

137438691328
Student Number

Bryan Hoang
Name

1.

$$\begin{aligned}
p_{X_1}(x_1) &= \sum_{x_3=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (1 - e^{-x_3})^2 e^{-x_3(x_1+x_2-2)} \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \sum_{x_2=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (1 - e^{-x_3})^2 e^{-x_3(x_1-2)} (e^{-x_3})^{x_2} \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (1 - e^{-x_3})^2 e^{-x_3(x_1-2)} \sum_{x_2=1}^{\infty} (e^{-x_3})^{x_2} \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (1 - e^{-x_3})^2 e^{-x_3(x_1-2)} \left(\frac{e^{-x_3}}{1 - e^{-x_3}}\right) \quad \because |e^{-x_2}| < 1, \forall x_2 \in \mathbb{Z}_{>0} \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (1 - e^{-x_3}) e^{-x_3 x_1} e^{x_3} \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (e^{-x_1})^{x_3} e^{x_3} - \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} (e^{-x_1})^{x_3} \\
&= \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{e}{2e^{x_1}}\right)^{x_3} - \sum_{x_3=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2e^{x_1}}\right)^{x_3} \\
&= \frac{\frac{e}{2e^{x_1}}}{1 - \frac{e}{2e^{x_1}}} - \frac{\frac{1}{2e^{x_1}}}{1 - \frac{1}{2e^{x_1}}} \quad \because \text{both } \left|\frac{e}{2e^{x_1}}\right| < 1 \text{ and } \left|\frac{1}{2e^{x_1}}\right| < 1, \forall x_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \\
&= \frac{e}{2e^{x_1} - e} - \frac{1}{2e^{x_1} - 1} \\
&\Rightarrow p_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{e}{2e^{x_1} - e} - \frac{1}{2e^{x_1} - 1}, & \forall x_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

□