UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
EA044A – PLANEJAMENTO E ANÁLISE DE
SISTEMAS DE PRODUÇÃO
PROF. FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE

RELATÓRIO DO PROJETO T1:
MODELAGEM E MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

Bryan Wolff RA: 214095
Raphael Cury Spiller RA: 186300

Campinas
Abril de 2021

Situação e problema de decisão

A Natural Farmacêutica S.A. produz um spray para higienizar as mãos cuja demanda é uma função do preço. Tanto o preço p quanto a quantidade q são definidos pela empresa. Sabe-se que a relação entre preço e quantidade é dado pela seguinte expressão:

$$p = 10 - 0,01 * q \qquad (1)$$

Além disso, a produção do spray tem um custo fixo de \$500 e um custo variável de \$5 por unidade, ou seja, podemos inferir que o custo em relação a unidade é dado pela seguinte expressão:

$$Custo = 500 + 5 * q \qquad (2)$$

A fim de calcular o lucro é necessário saber a $Receita$ que a farmacêutica vai ter ao vender os sprays. Essa receita pode ser obtida multiplicando a quantidade de sprays pelo preço de cada unidade ($R = p \cdot q$). Dessa forma, a receita é dada por:

$$Receita = p * q = (10 - 0,01 * q) * q = 10q - 0,01q^2 \qquad (3)$$

Logo, a função objetivo, Lucro (L) será a diferença entre a receita e o custo, como expresso logo abaixo:

$$L(q) = Receita - Custo = - 0.01q^2 + 5q - 500 \qquad (4)$$

Questão 1 - Quanto *spray* produzir e a que preço? Qual é o lucro correspondente?

A partir das equações apresentadas no item anterior, podemos escrever a equação do lucro a fim de otimizar a produção:

$$R = q \cdot p = q \cdot (10 - 0,01q) = 10q - 0,01q^2$$

$$L = R - C = (10q - 0,01q^2) - (500 + 5q)$$

$$L = -0,01q^2 + 5q - 500 \quad (5)$$

Do cálculo sabemos que os valores de máximo e mínimo podem ser obtidos derivando a função e igualando a zero, pois a derivada da função permite calcular o coeficiente angular da reta tangente ao ponto desejado. Portanto, quando a derivada for zero indica que a reta está horizontal ou seja, ela é tangente no ponto máximo da função a ser derivada. A partir disso:

$$L'(q) = 0 \rightarrow -0,02q + 5 = 0 \rightarrow q = 250;$$

$$p = 10 - 0,01(250) = 7,5;$$

$$L(250) = 125;$$

Dos cálculos acima, podemos concluir que, para se obter o maior lucro possível (de $125,00) com esse custo de produção, é preciso produzir 250 unidades e vendê-las por $7,50 a unidade.

Questão 2 - O que ocorre com a produção e o lucro se o custo fixo diminuir $400?

Ao reduzir o novo custo fixo para $400, isto é, reduzir em $100, por ser uma constante no modelo ela não altera a solução de otimização do sistema, que ainda permanece em q*=250. Porém, o lucro é alterado, recebendo um acréscimo do mesmo valor que foi reduzido no custo, isto é, de $100.

Nesta perspectiva, teremos uma nova relação de lucro e quantidades dada por:

$$L(250) = -0.01q^2 + 5q - 400$$

Substituindo o número de quantidades temos que:

$$L(250) = -625 + 1250 - 400 = 225$$

Portanto, reduzindo o custo fixo, deve-se produzir o mesmo número de unidades, porém, com um lucro maior, dado por $100.

Questão 3 - Qual o impacto na produção se o custo variável aumentar $1 por unidade?

Caso o custo variável aumente, a nova equação do lucro passa a ser:

$$L = R - C = (10q - 0,01q^2) - (500 + 6q)$$

$$L = - 0,01q^2 + 4q - 500$$

Nesse caso, realizando o mesmo procedimento do item a temos que o lucro máximo é obtido quando:

$$- 0,02q + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad q = 200.$$

Quando a produção é de 200 unidades o lucro é $L(200) = - 100$;

Portanto, aumentando $1 por unidade no custo variável passa a ser inviável ganhar dinheiro vendendo sprays, o custo para produzir sempre será maior que a receita obtida.

Questão 4 - Vale a pena diminuir o preço mais lentamente com a quantidade e.g. p = 10 -0.005*q ?

Se o preço diminuir mais lentamente com as quantidades, teremos a seguinte equação de lucro:

$$L = 10q - 0,005q^2 - 500 - 61$$

$$L = - 0,005q^2 + 5q - 500$$

Calculando a quantidade para obter o lucro máximo, temos que:

$$L' = - 0,01q + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{5}{0.01}$$

$$\therefore q = 500$$

Nesta perspectiva, com a condição estabelecida, para o lucro máximo devemos produzir 500 quantidades, ou seja:

$$L(500) = - 0,005 * 500^2 + 5 * 500 - 500 = 750$$

$$\therefore L(500) = 750$$

Vemos que a quantidade ótima é de q* = 500, e agora temos um lucro máximo maior, dado por L(q*) = $750, com preço por unidade dado por p* = $10 - 0.005 * 500 = \$7,50$. Portanto, apesar da situação imposta, o lucro máximo possível ao produzir mais unidades (500), e o preço de venda por unidade ser menor ($6,25), ainda temos um lucro bruto maior do que nas situações anteriores ($750), logo, é benéfico para a empresa reduzir mais lentamente o valor por unidade.

Questão 5 - Resolver o modelo usando um solver e.g. o do *Scipy*.

```
#importa a biblioteca Scipy
import scipy.optimize as optmize

def funcao_objetivo(x):
    lucro = 5*x - 500 - 0.01 * x * x #função do lucro
    return -lucro #devemos tornar a função negativa para encontrar o lucro
MÁXIMO

limites = (0, 1000)

#Encontra o máximo, obtendo o número de unidades a serem produzidas
max = optmize.minimize_scalar(funcao_objetivo,bounds=limites,
method='bounded')

q = max.x # seleciona o resultado que queremos da saída
p = 10-0.01*q #preço
gasto = 500 + 5*int(q) #Gasto total
ganho = (10 - 0.01*int(q))*int(q) #Ganho total
lucro = ganho - gasto #Lucro máximo

print('Quantidade(s) = {}'.format(int(q)))
print('Preço = ${:.2f}'.format(p))
print("Gasto total = ${:.2f}".format(gasto))
print("Ganho total de venda = ${:.2f}".format(ganho))
print("Lucro máximo = ${:.2f}".format(lucro))
```

Ao utilizar esta implementação, temos os seguintes resultado na saída do console:

```
Quantidade(s) = 250
Preço = $7.50
Gasto total = $1750.00
Ganho total de venda = $1875.00
Lucro máximo = $125.00
```