Projeto T3 EA 044: Análise de Sensibilidade e Interpretação Econômica em Planejamento

Introdução: Este projeto explora o conceito de dualidade em programação linear, sua interpretação econômica, e sua utilização na análise de sensibilidade e tomada de decisão em planejamento de produção.

Objetivo: entender o que significa a variável dual no contexto de modelos de otimização, sua natureza e relevância em análise de sensibilidade de modelos de programação linear, e o uso da análise de sensibiidade na decisão. Implementar o modelo em um solver e interpretar os dados e a informação que constam nos seus relatórios.

Situação e problema de decisão: A Náique Esportes está planejando sua linha de produtos para o próximo ano. Entre eles se encontram três tipos de tênis chamados de Esportista, Alpinista e Andarilho. Três das matérias primas utilizadas na produção são particularmente importantes e custosas: Provadagua (PD) um tecido à prova de água, Fabriterma (FI) um produto para isolamento térmico e Solespa (SE), uma sola especial. Presentemente um fornecedor disponibiliza 10.000 m^2 de PD a \$20/m^2. A indústria tem acesso a até 5000 kg de FI a \$15/kg, e até 7.000 pares de solas SE a \$10/par. A Tabela 1 mostra os recursos necessários para a fabricar de cada um dos produtos. A diretoria já assinou contrato para fornecer pelo menos 3000 pares do modelo Esportista, pelo menos 2000 pares do modelo Alpinista, e pelo menos 1000 pares do modelo Andarilho. A diretoria de marketing estima que os clientes pagarão \$40, \$65, e \$110 por cada tipo de par, respectivamente. A Náique deseja determinar a quantidade de cada produto a ser produzida que maximize seu lucro.

Tabela 1: Recursos por unidade de produto

	Produtos			
	Esportista	Alpinista	Andarilho	
PD	1/2	1	5/2	m^2/par
FI	1/2	2/3	4/3	kg/par
SE	1	1	1	par sola

Atividades do projeto

(a) Formular o modelo de linear otimização para planejar a produção. Deixar claro quais são as variáveis de decisão, a função objetivo, as restrições, e os respectivos significados. Na formulação lembrar que Lucro = Receita – Custo.

Variáveis de decisão: quantidade de Esportista x_1, de Alpinista x_2, e de Andarilho x_3
Função objetivo: lucro = lucro Esportista + lucro Alpinista + lucro Andarilho
Lucro Esportista: Receita – Custo (Esportista) = 40 – (1/2×20 + 1/2×15 + 10) = \$12,5/unidade
Lucro Alpinista: Receita – Custo (Alpinista) = 65 – (20 + 2/3×15 + 10) = \$25/unidade
Lucro Andarilho: Receita – Custo (Andarilho) = 110 – (5/2×20 + 4/3×15 + 10) = \$30 /unidade
Restrições: restrições de oferta e de demanda (principais) e não negatividade ($x_1, x_2, x_3 \geq 0$).

Formulação modelo de linear de otimização:

min $12{,}5x_1 + 25x_2 + 30x_3$	lucro
s.a. $1/2x_1 + x_2 + 5/2x_3 \leq 10.000$	oferta PD
$1/2x_1 + 2/3x_2 + 4/3x_3 \leq 5.000$	oferta FI
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7.000$	oferta SE
$x_1 \geq 3.000$	demanda Esportista
$x_2 \geq 2.000$	demanda Alpinista
$x_3 \geq 1.000$	demanda Andarilho
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	não negatividade

(b) Implementar e resolver o modelo usando e.g. o solver do Excel. Se optar por outra linguagem de modelagem e solver, verificar se disponibilizam os relatórios para análise de sensibilidade.

Ver planilha Excel anexa.

(c) Resolver o modelo e gerar os relatórios (e.g. Resposta e Sensibilidade no caso do Excel) com a solução, dados para análise de sensibilidade, intervalos de variação dos parâmetros do modelo, como mostrado em aula. A partir do conteúdo dos relatórios, responder as seguintes questões.

Ver planilha Excel anexa.

(1) Quantos pares de cada tipo de calçado a indústria deve produzir? Qual é o lucro que se obtém?

$x_1 = 3000$, $x_2 = 2.750$ e $x_3 = 1.250$ lucro = \$143.750,00

(2) Quais são os recursos críticos? Quanto de cada um deles o plano sugere utilizar? Há excesso de algum recurso?

As restrições de oferta FI e SE estão ativas; o plano de produção ótimo usa 5.000 kg de FI e 7.000 pares de SE. Portanto, estes são os recursos críticos. O plano ótimo requer 7.375 m^2 de PD. Portanto há excesso de 2.625 m^2 de PD.

(3) Pesquisa de marketing mostra que o modelo Alpinista é muito popular, e que a maioria dos os clientes estaria disposta a pagar \$10 a mais para obter um par deste produto. Esta mudança de preço afeta o plano de produção ótimo?

Análise de sensibilidade quanto à variação de c_2, o coeficiene de x_2 na função objetivo. De acordo com o relatório de sensibilidade, a solução permanece ótima para $16 \leq c_2 \leq 30$. Um aumento de \$10 significa que o valor de $c_2 = 25 + 10 = 35$. Como o novo valor está acima do limite superior, a solução ótima muda o que significa que afeta o plano de produção.

(4) Se, eventualmente, toda a demanda do modelo Esportista for atendida pelo plano de produção ótimo, valeria a pena diminuir seu preço? Diminuir seu preço aumentaria as vendas?

O plano de produção sugere 3.000 unidades de Esportista, o que satisfaz a demanda exatamente. Diminuir o preço do Esportista significa analisar a sensibilidade à variação de c_1, o coeficiene de x_1 na função objetivo. O relatório de sensibilidade mostra que a solução ótima permanece a mesma se $-\infty \leq c_1 \leq 23{,}75$. O preço corrente é \$12,50/par. Como o limite inferior é $-\infty$, não venderá mais, independentemente de quanto o preço é reduzido.

(5) Se um fornecedor oferecesse um adicional de 100kg de FI a \$8,50/kg seria vantajoso para a indústria comprar esta quantidade adicional? E a \$5,00/kg, a compra seria vantajosa? Nestas hipóteses, o que aconteceria com o lucro?

Trata-se de análise de sensibilidade quanto à variação do parâmetro b_2, o lado direito da segunda restrição principal do modelo (oferta de FI). O relatório de sensibilidade mostra que o preço marginal é \$7,50 e que a base (variáveis básicas) não muda se $4.833 \leq b_2 \leq 5.500$. Portanto, não comprar a \$8,50 pois não é vantajoso pagar mais que \$7,50. Se o preço for \$ 5,00 a compra seria vantajosa para uma quantidade de até 500kg (5.000 + 500 = 5.500 que é o limite superior para não mudar a base). Se comprar 500 kg o lucro adicional seria \$7,50 – \$5,00 = \$2,50/kg. Se comprar mais do que 500kg, então temos que ‘refazer as contas’, isto é, resolver o modelo para o novo valor de b_2.

(6) Um fornecedor está com estoque em promoção oferecendo solas à \$19 o par. Vale a pena, para a Náique aproveitar esta promoção?

Trata-se de análise de sensibilidade quanto à variação do parâmetro b_3, o lado direito da terceira restrição principal do modelo (oferta de SE). O preço marginal, de acordo com o relatório de sensibilidade, é \$20 e a base não muda se $6.625 \leq b_3 \leq 7.249{,}89$. Portanto, o aumento permitido é de ~250 pares (7.000 + 250 = 7.250 ~ 7.249,89). Como cada par de SE custa \$20, comprar a \$19 vale a pena pois lucramos \$1/par. Para isso, podemos comprar no máximo 250 pares.

(7) Suponha que 200 pares de solas foram danificados durante a manufatura e não podem ser reutilizados. O plano de produção mudaria? Quanto que esta perda custaria?

Conforme vimos na questão anterior, a base permanece a mesma se $6.625 \leq b_3 \leq 7.249{,}89$. Portanto, a perda de 200 pares não muda a base pois 7.000 – 200 = 6.800, valor que está dentro dos limites (6.625 < 6.800 < 7.249,89), mas muda a solução. Como o preço marginal é de \$20, o lucro diminui de \$20×200 = \$4.000. Resolvendo o modelo para $b_3 = 6.800$ obtemos $x_1 = 3000$, $x_2 = 2.350$ e $x_3 = 1.450$ lucro = \$139.750,00, significando 2,78% a menos do que o plano original.