Projeto T1 EA 044 Formulação de Modelos de Otimização

Situação de decisão: A Natural Farmacêutica S. A. produz um *spray* para higienizar para as mãos cuja demanda é uma função do preço. Tanto o preço p quanto a quantidade q são definidos pela empresa. Sabe-se que a relação entre preço e quantidade é $p = 10 - 0.01q$. A produção do *spray* tem um custo fixo de \$500 e um custo variável de \$5 por unidade.

Atividades do projeto

Formular um modelo de otimização para responder as seguintes questões:

(1) quanto *spray* produzir e a que preço? Qual é o lucro correspondente?

(2) o que ocorre com a produção e o lucro se o custo fixo diminuir para \$400?

(3) qual o impacto na produção se o custo variável aumentar \$1 por unidade?

(4) vale a pena diminuir o preço mais lentamente com a quantidade e.g. $p = 10 - 0.005q$?

(5) resolver o modelo usando um solver e.g. o do Scipy:

Respostas

(1) A variável de decisão é a quantidade $q \geq 0$. Sabe-se que Lucro = Receita – Custo, que receita é quantidade produzida q vezes preço p, que a relação entre quantidade e preço é $p = 10 - 0.01q$, e que o custo de produção tem uma parcela variável (custo variável) que é a quantidade q vezes o custo de produção por unidade \$5, e uma parcela fixa (custo fixo) de \$500. Portanto Receita = $pq = (10 - 0.01q)q$ e Custo = $5q + 500$. Logo, a função objetivo, o lucro (L), é:

$$L(q) = (10 - 0.01q)q - 5q - 500 = -0.01q^2 + 5q - 500$$

Assim, o modelo (não linear, contínuo) de otimização para prescrever a quantidade é:

$$\begin{aligned} \max \quad & -0.01q^2 + 5q - 500 \\ \text{sa} \quad & q \geq 0 \end{aligned}$$

A Figura 1 mostra a função objetivo L(q). Observamos que o lucro L é uma função quadrática que atinge o valor máximo $L^* = 125$ para a quantidade $q^* = 250$. O preço correspondente à quantidade ótima q^* é \$7,50.

Alternativamente, a quantidade pode ser determinada analiticamente usando o cálculo:

$dL(q)/dq = -0.02q + 5 = 0 \rightarrow q = 250$ e como $q > 0$ (é factível e restrição não está ativa), o valor $q^* = 250$ determina a quantidade que maximiza o lucro, a solução ótima. O preço ótimo é o preço correspondente à quantidade ótima q^*, isto é, $p^* = 10 - 0.01q^* = 10 - 0.01(250) = 7{,}50$. Observar que o lucro fica negativo (perda) para $q < 138.2$ e $q > 361.8$ Os valores 138.2 e 361.8 são chamados de *break-even points*, pontos a partir dos quais o lucro se torna negativo.

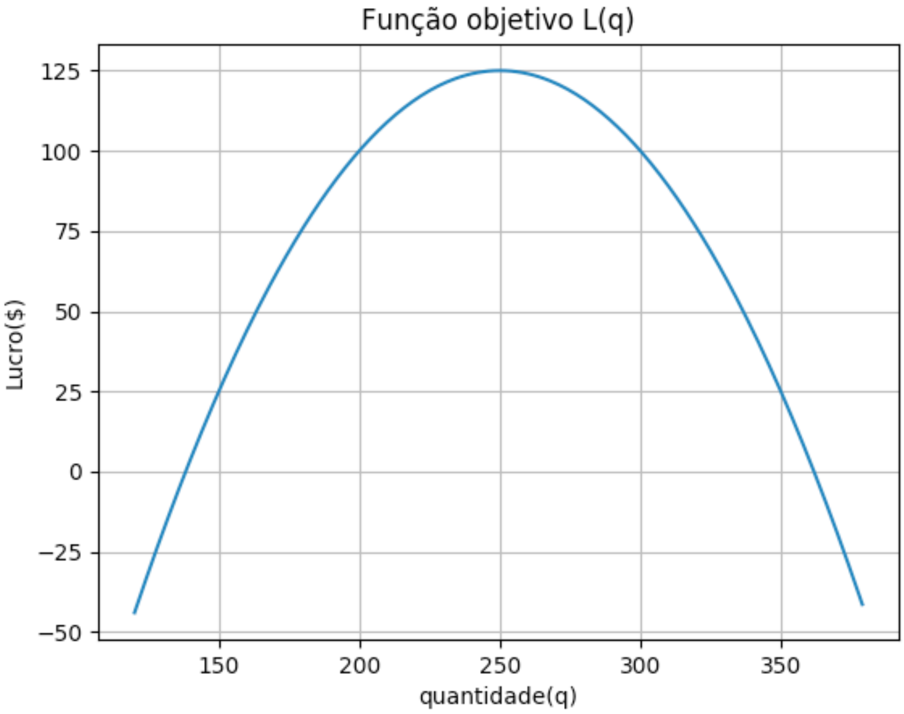

Figura 1: Função objetivo (custo variável de produção = \$5)

(2) Se o custo fixo é \$400, então o modelo é:

$$
\begin{aligned}
\max\ & -0.01q^2 + 5q - 400 \\
\text{sa}\ & q \geq 0
\end{aligned}
$$

Como o custo fixo é uma constante no modelo, seu valor não altera a solução ótima (sabemos que adicionar ou subtrair um valor constante de uma função não altera o ponto onde esta atinge o máximo ou mínimo) que permanece $q^* = 250$, mas o lucro aumenta de \$100, exatamente o valor que o custo fixo diminuiu do caso original em (1). Portanto o lucro é L^* =\$225. Observar, contudo, que os *break-even points* mudam para $q = 100$ e $q = 400$, respectivamente.

(3) Se o custo variável aumentar \$1 por unidade, então o modelo é:

$$
\begin{aligned}
\max\ & (10 - 0.01q)q - 6q - 500 \\
\text{sa}\ & q \geq 0
\end{aligned}
$$

e, procedendo como no item (1), obtemos $q^* = 200$ e $L(q^*)$ = \$-100, o que significa que a melhor solução dá prejuízo. Na prática, o resultado indica que o negócio é inviável se o custo variável de produção é \$6. A Figura 2 ilustra esta situação.

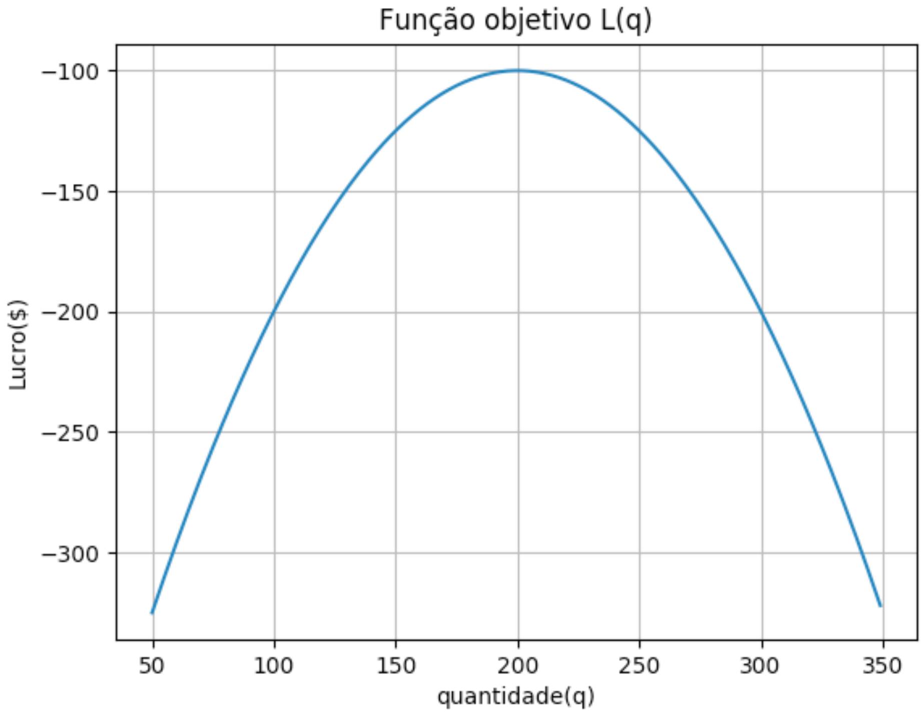

Figura 2: Função objetivo (custo variável de produção = $6)

(4) Considerando p = 10 – 0.005q o modelo é:

$$\begin{aligned} \max \ & (10 - 0.005q)q - 5q - 500 \\ \text{sa} \ & q \geq 0 \end{aligned}$$

Analogamente aos itens anteriores, vemos que a quantidade ótima é q^* = 500 com preço p^* = $7,50 e proporcionando um lucro $L(q^*)$ = $750, ver Figura 3. Observe que agora os *break-even points* são q = 112.7 e q = 887,3 e que q^* = 500 sugerindo que a diminuição mais lenta do preço aumentou as chances de lucro. Evidentemente, sempre é uma boa ideia comparar o resultado do modelo de otimização com a expectativa e a intuição de analistas e decisores experientes na área.

(5) Resolver o modelo usando um solver e.g. Scipy. Códigos para plotar e resolver:

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
"""Plota funcão objetivo Projeto T1 EA044 DCA FEEC Unicamp"""
# Gera dados para plotar
q = np.arange(120.0, 380.0, 1)
L = (10-0.01*q)*q - 5*q - 500
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(q, L)
ax.set(xlabel='quantidade(q)', ylabel='Lucro($)', title='Função objetivo L(q)')
ax.grid()
fig.savefig("T1.png")
plt.show()
```

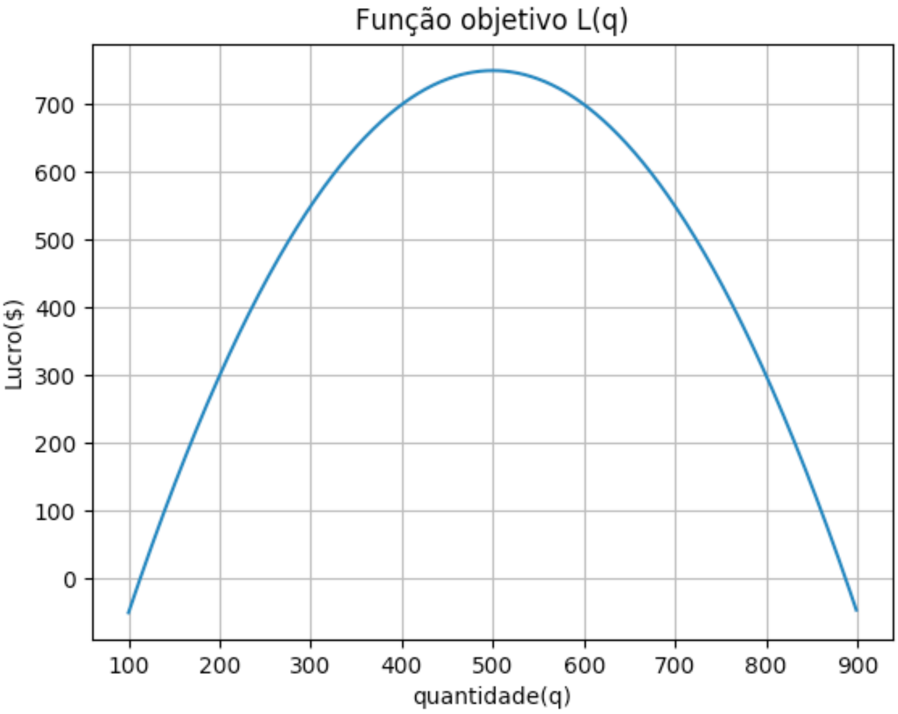

Figura 3: Função objetivo (diminuição mais lenta do preço)

```
import scipy.optimize as op

"""Resolve modelo de otimização Projeto T1 EA044 DCA FEEC Unicamp"""

def lucro(x):
    return -((10-0.01*x)*x - 5*x - 500)

limites = (0, 1000)

solucao = op.minimize_scalar(lucro, bounds = limites, method = 'bounded')

q = solucao.x
p = 10 - 0.01*q
L = -lucro(q)

print('Quantidade', '= {:.2f}'.format(q))
print('Preço', '= {:.2f}'.format(p))
print('Lucro', '= {:.2f}'.format(L))
```