EA614 - Análise de Sinais

Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 5 – Transformada Discreta de Fourier
Turma A – 2º semestre de 2020

Prof: Levy Boccato Email: `lboccato@dca.fee.unicamp.br`
PED-C: Renan Del Buono Brotto Email: `rbrotto@decom.fee.unicamp.br`

1 Introdução

Conforme visto em sala de aula, a transformada discreta de Fourier (DFT) é a ferramenta matemática utilizada para obter a representação no domínio da frequência de um sinal discreto $x[n]$ de comprimento finito. Na realidade, a DFT de N pontos fornece amostras da transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ nas frequências $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, podendo ser armazenada na forma de um vetor, assim como o próprio sinal $x[n]$. Neste exercício, estudaremos alguns aspectos ligados ao uso da DFT para analisar o espectro de sinais.

2 Atividades: Percebendo o Vazamento de Frequência

Considere o sinal $x(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)$, com $f_0 = 6$ Hz. Sabemos que o espectro deste sinal, denotado por $X(j\omega)$, possui somente componentes situadas nas frequências $\omega_0 = \pm 2\pi f_0$ rad/s. Gostaríamos, então, de poder observar seu comportamento em frequência empregando um computador digital.

(a) Gere a sequência $x[n]$ tomando $N = 64$ amostras de $x(t)$ no intervalo de 0 a 1 segundo (ou seja, a frequência de amostragem é igual a $f_s = 64$ Hz). Logo, $x[n] = \text{sen}(2\pi \frac{f_0}{f_s} n)$, onde $n = 0, \ldots, N-1$. Mostre a sequência obtida, utilizando o comando `stem()`.

(b) Calcule a transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ associada à sequência $x[n]$. Mostre todos os passos da derivação.
Dica: Note que a sequência $x[n]$ é uma versão truncada (ou janelada) da senoide discreta. Ou seja,

$$x[n] = \text{sen}(2\pi \frac{f_0}{f_s} n) w_N[n], \tag{1}$$

onde $w_N[n]$ é uma janela retangular de comprimento N, de modo que:

$$w_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2}$$

(c) Utilizando o comando `fft()` do Matlab (ou, em Python, `np.fft.fft()`), compute a DFT da sequência $x[n]$ com N pontos. Apresente, então, o gráfico de $|X(k)|$ em função da frequência Ω. Na mesma figura, plote $|X(e^{j\Omega})|$. Você pode obter $|X(e^{j\Omega})|$ trabalhando com o comando `freqz()` do Matlab (ou, em Python, `scipy.signal.freqz()`). Tendo em vista as propriedades da DFT, analise o espectro obtido, relacionando-o com $X(e^{j\Omega})$ e com $X(j\omega)$ (i.e., com o espectro da senoide analógica).
Obs.: Como os sinais em questão são reais, podemos analisar apenas a faixa de frequências de 0 a π por conta da simetria par do módulo da resposta em frequência.

(d) Repita o item (c), mas agora calcule a DFT utilizando $2N$ pontos. O espectro obtido continua sendo uma representação compatível com o esperado para uma senoide pura? Explique o que ocorreu.

(e) Repita os itens (a) e (c) considerando que a frequência fundamental da senoide analógica é $f_0 = 6{,}5$ Hz. O espectro obtido continua sendo uma representação compatível com o esperado para uma senoide pura? Comente.