**EA614 - Análise de Sinais**

**2º Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) – Série de Fourier**

**Bryan Wolff RA: 214095**

- **Questão A**

Para obter o coeficiente da série de Fourier dessa onda de Período T = 4, onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, partimos da integral fornecida no enunciado, definida por:

$$a_k = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}, \text{ onde } \mathrm{x(t)} = \frac{-2}{T}\mathrm{t}$$

Dessa forma, ao calcular a integral podemos chegar no seguinte resultado para $a_k$:

$$a_k = -\frac{\pi jke^{-\pi jk}+e^{-\pi jk}+\pi jke^{\pi jk}-e^{\pi jk}}{2\pi^2k^2}$$

Sabendo as relações de Euler dada por:

$$\mathrm{e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta}$$

$$\mathrm{sin\theta} = \frac{\mathrm{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}}{2\mathrm{j}} \quad \text{e} \quad \mathrm{cos\theta} = \frac{\mathrm{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}}{2}$$

Podemos agora simplificar o resultado obtido de forma a chegar no seguinte resultado:

$$a_k = \frac{-2j\pi k cos(\pi k) + 2j\sin(\pi k)}{2\pi^2k^2}$$

Sabendo também que $\sin(\pi k) = 0$ e que $\cos(\pi k) = (-1)^k$, podemos obter:

$$a_k = -\frac{j(-1)^k}{\pi k} = \begin{cases} -\frac{j}{k\pi}, \text{para k par} \\ \frac{j}{k\pi}, \text{para k ímpar} \end{cases}$$

Para o caso de $a_0$, realizaremos uma média da função x(t) no período dado Nesse sentido:

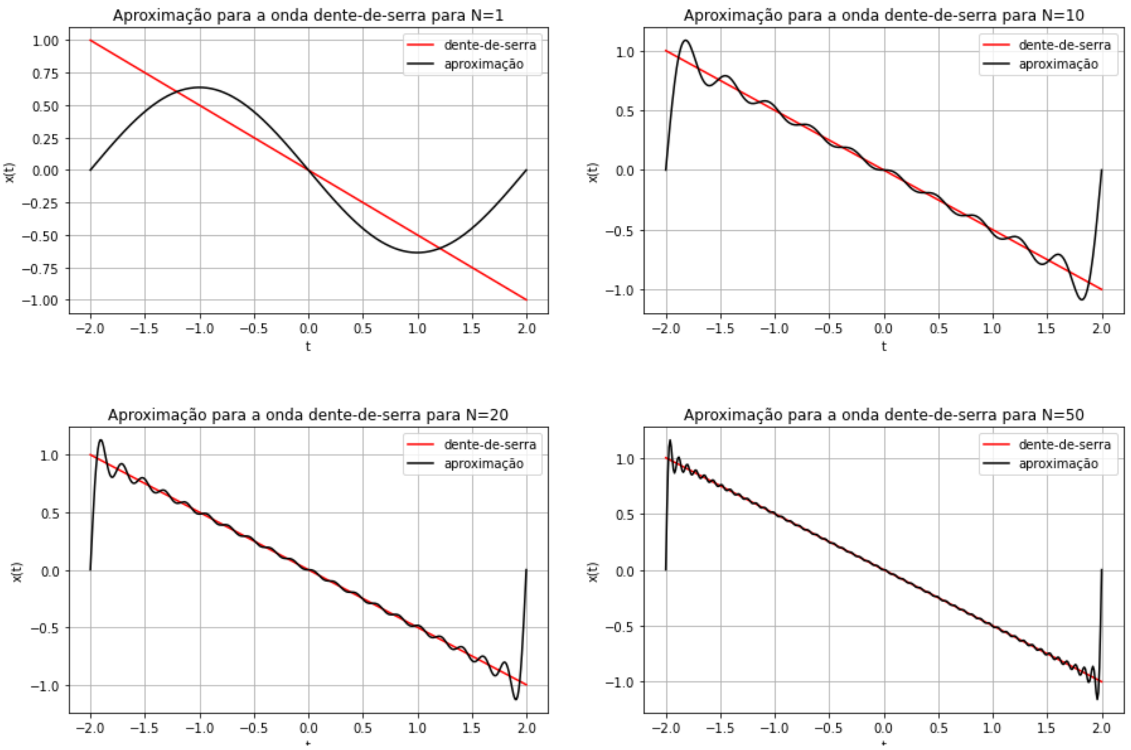
$$\mathrm{a_0} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{x(t)dt} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} -\frac{1}{2}\mathrm{tdt} = 0$$

- **Questão B**

Com os coeficientes obtidos anteriormente, foi implementado um programa de forma a aproximar a onda "dente de serra" pela sua série de Fourier com N harmônicas definida abaixo. A implementação está disponível na parte computacional.

- **Questão C**

Foi gerado os gráficos "dente de serra" junto com sua aproximação dada pela série de Fourier com os valores para N = 1; 10; 20; 50, para um período do sinal. Sabendo que o período estipulado para a plotagem do gráfico vai de -T/2 a T/2, temos o espaço amostral do tempo de -2 a 2.




- **Questão D**

Para calcular a energia erro $E_N$, foi implementado na parte computacional uma função definida pela fórmula:

$$E_N = \frac{1}{len(t)} \sum_{k=-N}^{N} [x(k) - x_N(k)]^2$$

Onde *len(t)* é o total de instantes calculados.

Dessa forma, ao arredondar os resultados em 5 casas decimais, foi possível obter os seguintes resultados:

Energia do erro em N = 01: 0.13287 J

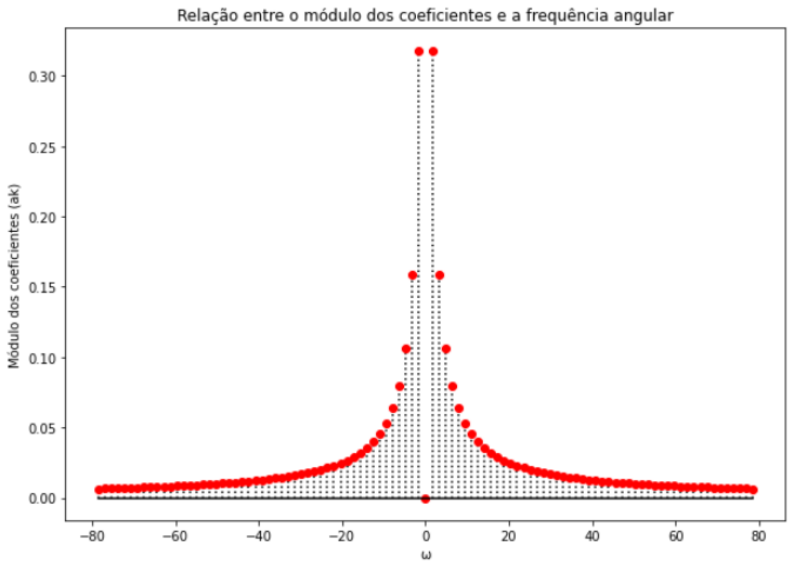
Energia do erro em N = 10: 0.02182 J

Energia do erro em N = 20: 0.01252 J

Energia do erro em N = 50: 0.00692 J

- **Questão E**

Foi possível obter o gráfico do módulo dos coeficientes da série $|a_k|$ em função de ω para N = 50:



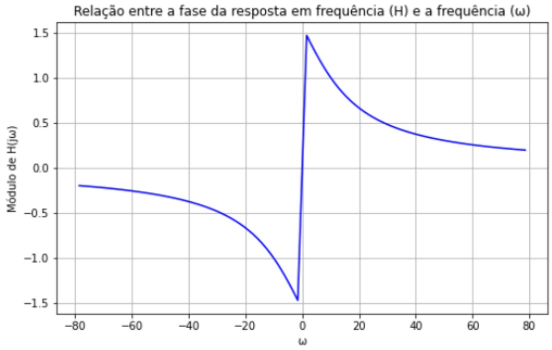

É possível concluir que a função modular acima apresenta simetria par a partir de que x(t) = x(-t). Além disso, observa-se a propriedade da reversão no tempo das Séries de Fourier, em que ocorre a reversão da sequência de coeficientes em torno do eixo k.

- **Questão F**

Considerando o circuito analógico mostrado na Figura 2, cujo C = 1μF e R = 100kΩ, que corresponde a um sistema LIT cuja resposta em frequência dada por:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1-j\frac{\omega c}{\omega}} \text{, onde } \omega_c = \frac{1}{RC} = 10\ rad/s$$

A partir disso, foi gerado os gráficos do módulo e da fase da resposta em frequência do filtro H para tempo contínuo:


De acordo com o gráfico do módulo de H(jω), percebe-se que para altos valores de frequência, o módulo tende a 1. Portanto, teremos altos valores de tensão no circuito e o filtro atuará, portanto, como um filtro passa-altas.

- **Questão G**

Tendo como base os conceitos de autofunção e autovalor, foi implementado na parte computacional uma lógica para plotagem da onde y(t) observada na saída do sistema LIT do item (f) quando a entrada é a onda “dente-de-serra" aproximada com N = 50.


Analisando o gráfico acima, pode-se perceber que trata de um filtro passa-altas, onde frequências abaixo da frequência de corte serão filtradas. Isso afirma o que foi discutido no item (f). Além disso, pode ser observado no ponto de descontinuidade o fenômeno de Gibbs, como por exemplo, próximo a t = 2.

As bordas dos limites do período representam as maiores frequências e, portanto, apresentam maiores oscilações na amplitude. Os valores intermediários representam as menores frequências e apresentam variação quase nula em relação ao eixo 0, demonstrando que foram filtrados pelo filtro utilizado.

- **Questão H**

A principal diferença entre o gráfico da Figura 3 e a resposta do sistema observada no item anterior, está no fato de que a resposta do item (g) aborda uma aproximação da resposta real do circuito. Dessa forma, como a Série de Fourier é uma forma de série trigonométrica usada para simplificar a visualização de funções complexas e a sua aplicação resulta na aproximação de uma função desejada. Neste caso, o sinal de saída, por mais que filtrado, ainda apresentará oscilações características da série. Além disso, o gráfico do item (g) demonstra a saída para um período apenas.