EA614 - Análises de Sinais

EFC5 - Transformada Discreta de Fourier

Bryan Wolff - RA: 214095

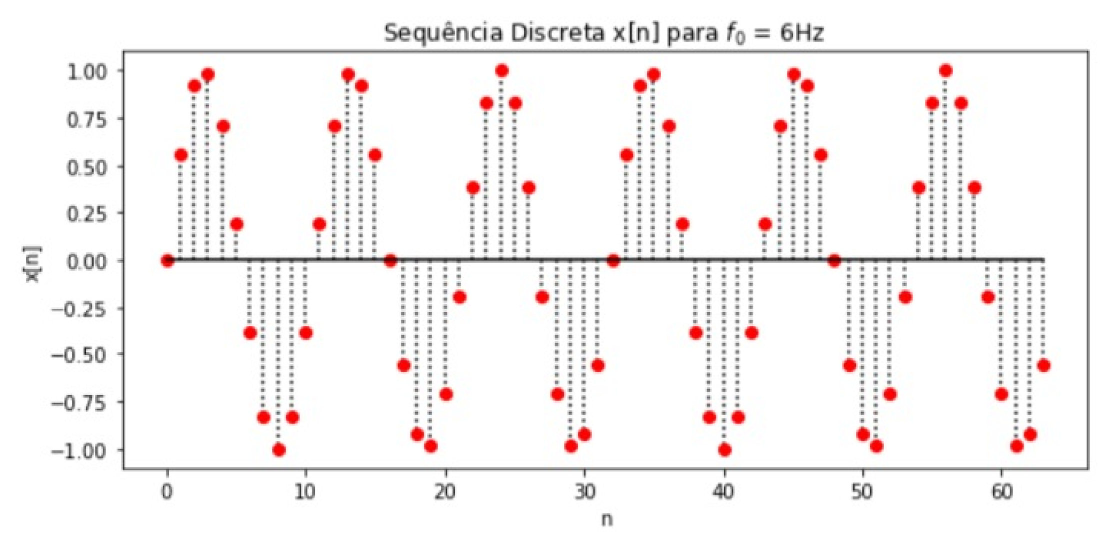
Bibliotecas Utilizadas

[19]
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal
```

Questão A - *Gerando a sequência x[n]*

[32]
```python
f0 = 6    #Frequência fundamental
N = 64    #Número de amostras
fs = 64   #Frequência de amostragem

n = [x for x in range(0,N,1)]
x_n = [np.sin(2*np.pi*(f0/fs)*i) for i in range(N)]

#Gráfico de x[n]
plt.figure(figsize=[9,4])
plt.title("Sequência Discreta x[n] para $f_0$ = 6Hz")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("x[n]")
plt.stem(n, x_n, linefmt = (':','k'), markerfmt = ('o','r'), basefmt = 'k', use_line_collection = True)
plt.show()
```

[32]



Questão B - *Transformada de Fourier $X(e^{j\Omega})$ associada à x[n]*

Sabemos que:

$X(e^{j\Omega})$ = $F\{$ x[n] $\}$ = $F\{sen(\omega_0 n)\cdot\omega_N[n]\}$ = $\frac{1}{2\pi}\cdot F\{sen(\omega_0 n)\}{*}F\{\omega_N[n]\}$

A partir de valores já tabelados para cada uma das funções acima temos:

- $F\{sen(\omega_0 n)\}$ = $\frac{\pi}{j}\cdot[\delta(\Omega-\omega_0)-\delta(\Omega+\omega_0)]$ com $\omega_0 = 2\pi\cdot\frac{f_0}{f_s}$;
- $F\{\omega_N[n]\}$ = Transformada de Fourier de um pulso retangular deslocado de $\frac{N-1}{2}$ ou, de maneira análoga, a Transformada de Fourier de $u[n]-u[n-N]$:
  $\therefore F\{\omega_N[n]\}$ = $\frac{sen(N\cdot\frac{\Omega}{2})}{sen(\frac{\Omega}{2})}\cdot e^{-j\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot\Omega}$.

Dessa forma, obtemos a seguinte expressão:

$X(e^{j\Omega})$ = $\frac{1}{2\pi}\cdot\{\frac{\pi}{j}\cdot[\delta(\Omega-\omega_0)-\delta(\Omega+\omega_0)]*[\frac{sen(N\cdot\frac{\Omega}{2})}{sen(\frac{\Omega}{2})}\cdot e^{-j\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot\Omega}]\}\Rightarrow$

$\Rightarrow X(e^{j\Omega})$ = $\frac{j}{2}\cdot[\frac{sen(\frac{N}{2}\cdot(\Omega+\omega_0))}{sen(\frac{1}{2}\cdot(\Omega+\omega_0))}\cdot e^{-j\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot(\Omega+\omega_0)}-\frac{sen(\frac{N}{2}\cdot(\Omega-\omega_0))}{sen(\frac{1}{2}\cdot(\Omega-\omega_0))}\cdot e^{-j\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot(\Omega-\omega_0)}]$

e, portanto:

$X(e^{j\Omega})$ = $\frac{j}{2}\cdot[\frac{sen(\frac{N}{2}\cdot(\Omega+2\pi\frac{f_0}{f_s}))}{sen(\frac{1}{2}\cdot(\Omega+2\pi\frac{f_0}{f_s}))}\cdot e^{-j\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot(\Omega+2\pi\frac{f_0}{f_s})}-\frac{sen(\frac{N}{2}\cdot(\Omega-2\pi\frac{f_0}{f_s}))}{sen(\frac{1}{2}\cdot(\Omega-2\pi\frac{f_0}{f_s}))}\cdot e^{-j\cdot(\frac{N-1}{2})\cdot(\Omega-2\pi\frac{f_0}{f_s})}]$

Questão C - *DFT da sequência x[n]*

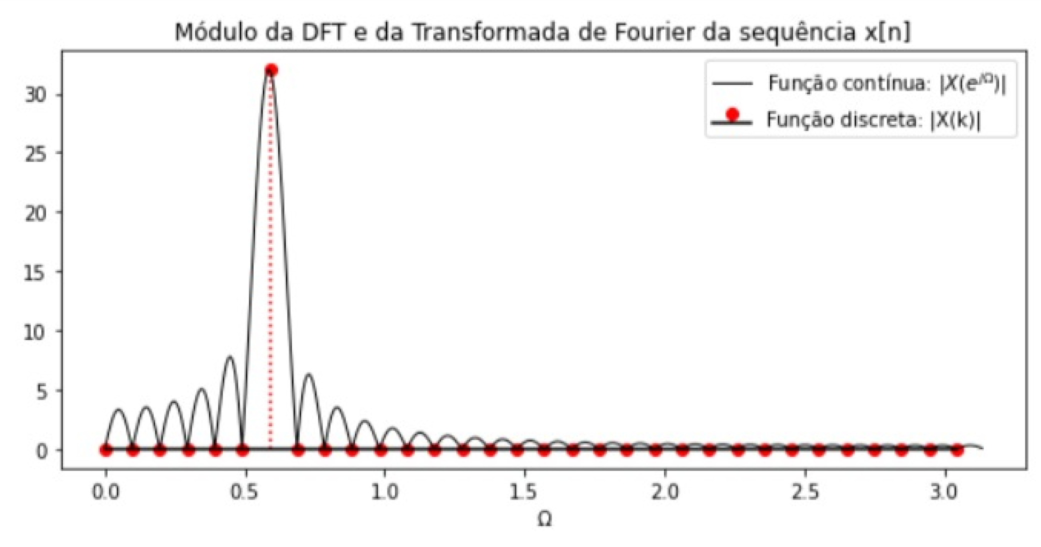
Como os sinais em questão são reais, podemos analisar apenas a faixa de frequências de 0 a π, ou seja, de 0 a N/2. Isso se dá por conta da simetria par do módulo da resposta em frequência. Ao análisar o gráfico, obtido, é possivel perceber que o gráfico em sua grande parte apresenta valores nulos, com excessao um valor de pico no ponto correspondente à frequência fundamental do sinal x[n] ($\Omega = 2\pi\frac{f_0}{f_s}\approx 0.58$) que lembra uma função de impulso unitário.

Além disso, para um grande número de amostras, o comportamento do espectro da função $|X(j\omega)|$ também se aproxima de um impulso unitário localizado no ponto referente à esta frequência fundamental. Vale ressaltar que este comportamento corresponde ao espectro de uma senoide pura no domínio da frequência.

Analisando agora a função $|X(e^{j\Omega})|$, é possível perceber que apesar da correspondência dos pontos nulos e do pico, não há amostras suficientes que demonstrem semelhanças com o espectro da DFT além destas pontuadas, devido a função contínua apresentar vários outros picos.

[33]
```python
DFT_N_amostras = abs(np.fft.fft(x_n, N))    #DFT da sequência x[n] para N amostras
omega = [2*np.pi*(i/N) for i in range(0,N-1,1)]   #Escala de frequências

#Transformada de Fourier da sequência x[n]
Ω,XΩ = signal.freqz(x_n)
XΩ = abs(XΩ)

#Podemos analisar apenas a faixa de frequências de 0 a π (0 a N/2).
plt.figure(figsize=[9,4])
plt.stem(omega[0:32], DFT_N_amostras[0:32], linefmt = (':','r'), \
         markerfmt = ('o','r'), basefmt = 'k', label = "Função discreta: |X(k)|", use_line_collection = True)

plt.plot(Ω,XΩ, label = "Função contínua: |$X(e^{jΩ})$|", color = "k", linewidth = 1)
plt.title("Módulo da DFT e da Transformada de Fourier da sequência x[n]")
plt.xlabel("Ω")
plt.legend(loc="upper right")

plt.show()
```

[33]

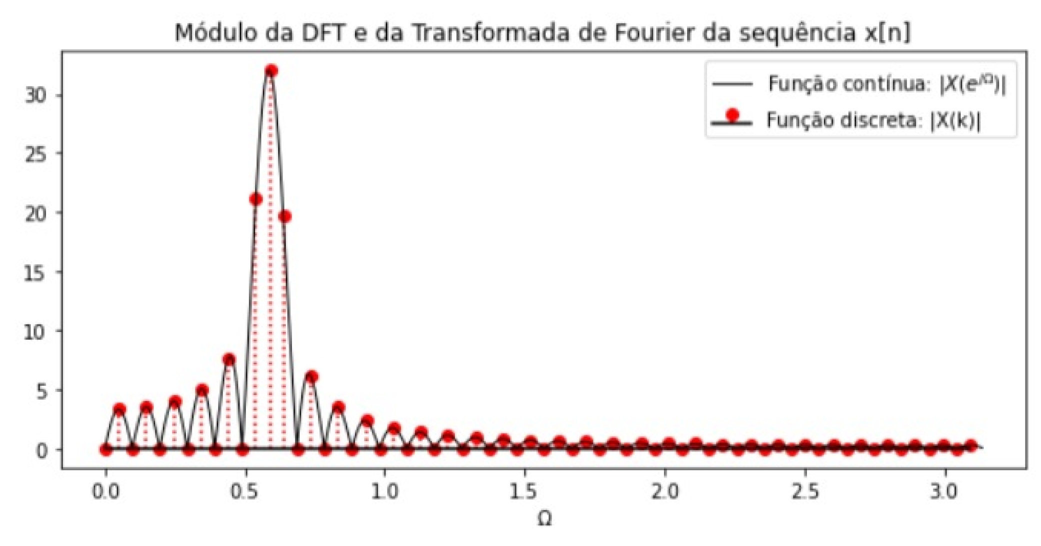


Questão D - *DFT utilizando 2N pontos*

Analisando o gráfico, é notável que ao aumentar o número de amostras o espectro da função $|X(k)|$ passa a apresentar mais semelhanças com o espectro da função $|X(e^{j\Omega})|$, pois com 2N amostras é possível visualizar outros pontos que não são nulos, não sendo mais possível observar o comportamento de uma senoide pura no domínio da frequência com um único valor de pico.

[22]
```python
N_2 = 2*N
DFT_2N_amostras = abs(np.fft.fft(x_n, N_2)) #DFT da sequência x[n] para 2N amostras
omega2N = [2*np.pi*(i/N_2) for i in range(N_2)] #Nova escala de frequências

#análogamente, podemos analisar apenas a faixa de frequências de 0 a π (0 a N).
plt.figure(figsize=[9,4])

plt.stem(omega2N[0:N], DFT_2N_amostras[0:N], linefmt = (':','r'), markerfmt = ('o','r'),\
         basefmt = 'k', label = "Função discreta: |X(k)|", use_line_collection = True)

plt.plot(Ω,XΩ, label = "Função contínua: |$X(e^{jΩ})$|", color = "k", linewidth = 1)
plt.title("Módulo da DFT e da Transformada de Fourier da sequência x[n]")
plt.xlabel("Ω")
plt.legend(loc="upper right")

plt.show()
```

[22]

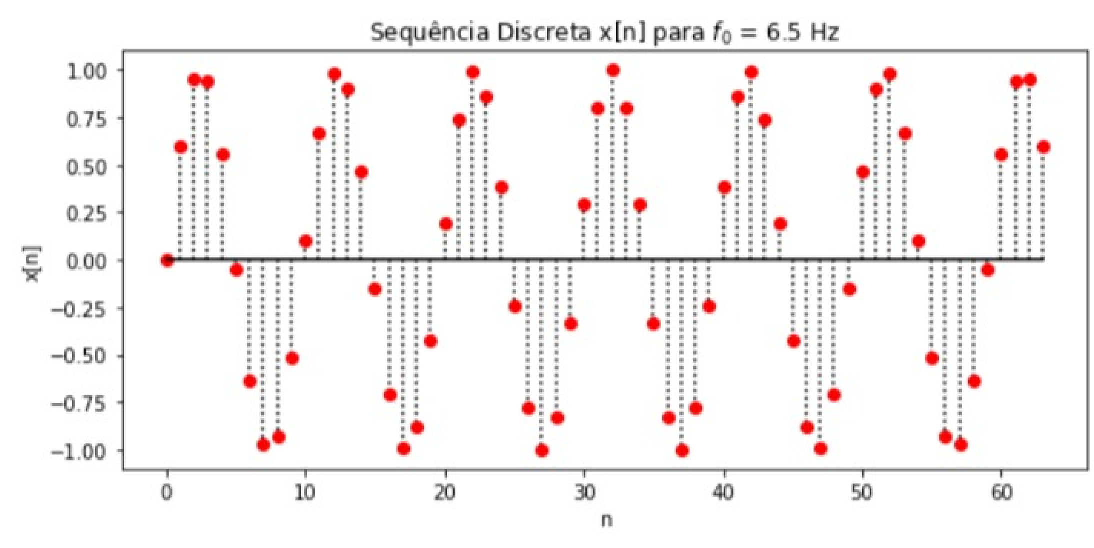


Questão E - *Análise para frequência f_0 = 6,5 Hz*

Gerando a sequência x[n]

[34]
```python
f0 = 6.5  #nova frequência fundamental
x_n = [np.sin(2*np.pi*(f0/fs)*i) for i in range(0,N,1)] #Nova sequência x[n]

#gráfico de x[n]
plt.figure(figsize=[9,4])
plt.title("Sequência Discreta x[n] para $f_0$ = 6.5 Hz")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("x[n]")
plt.stem(n, x_n, linefmt = (':','k'), markerfmt = ('o','r'), basefmt = 'k', use_line_collection = True)
plt.show()
```

[34]



DFT e Transformada de Fourier

Analisando o gráfico, ao alterar a freqência natural para f_0 = 6,5Hz, os valores do seno que antes atingiam os valores nulos (por serem multiplos de π), agora atingem valores não nulos. Além disso, os valores de picos apresentam deslocados em comparação com os obtidos anteriormente, valendo ressaltar que, neste caso, não existe o comportamento de uma senoide pura como visto para anteriormente.

[31]
```python
DFT_novo_f0 = abs(np.fft.fft(x_n, N))   #DFT da sequência x[n] com f0 = 6.5Hz
Ω_novo_f0,XΩ_novo_f0 = signal.freqz(x_n) #Nova transformada de Fourier da sequência x[n]
XΩ_novo_f0 = abs(XΩ_novo_f0)

#Podemos analisar apenas a faixa de frequências de 0 a π (0 a N/2)
plt.figure(figsize=[9,4])
plt.stem(omega[0:32], DFT_novo_f0[0:32], linefmt = (':','r'), markerfmt = ('o','r'),\
         basefmt = 'k', label = "Função discreta: |X(k)|", use_line_collection = True)
plt.plot(Ω_novo_f0, XΩ_novo_f0, label = "Função contínua: |$X(e^{jΩ})$|", color = "k", linewidth = 1)
plt.title("Módulo da DFT e da Transformada de Fourier da sequência x[n] com $f_0$ = 6.5Hz")
plt.xlabel("Ω")
plt.legend(loc="upper right")
plt.show()
```

[31]