



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
EA619R – LABORATÓRIO DE ANÁLISE LINEAR
PROF. RENATO DA ROCHA LOPES
PROF. RICARDO CORAÇÃO DE LEÃO FONTOURA DE OLIVEIRA

RELATÓRIO DO EXPERIMENTO 6:
IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS VIA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Bryan Wolff

RA: 214095

João Luís Carvalho de Abreu

RA: 175997

Campinas
Junho de 2021

VÍDEOS DEMONSTRATIVOS:

- [João Luís Carvalho de Abreu](#)
- [Bryan Wolff](#)

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS:

Este experimento objetiva realizar a identificação de parâmetros físicos associados a um modelo linear utilizando o software de simulação de robótica *V-REP*. O modelo a ser estudado trata-se de um sistema massa-mola-amortecedor, como ilustrado na Figura 1.

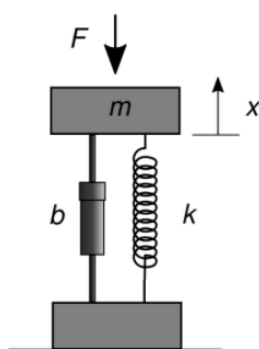


Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor.

Além da utilização do software *V-REP* para simular o sistema massa-mola-amortecedor, também será utilizado o *Matlab* para enviar sinais de entrada (aplicação de forças) e receber os dados de posição do *V-REP* de maneira síncrona - a interligação e a conexão entre os dois software é feita por um módulo chamado *remoteAPI*.

2. DADOS EXPERIMENTAIS

A partir da automatização e adaptação do *script* em Matlab anexado na página da disciplina (*identificaBode.m*) e do modelo do sistema linear de segunda ordem proposto (*initialConditionMassSpring.ttt*), foi possível simular a dinâmica do sistema massa-mola de forma a obter as posições do máximo sobressinal para cada frequência entre 25 e 33 rad/s de maneira sequencial e sem interferência do usuário. O resultado desta simulação pode ser encontrado na Tabela 1, Figura 2 e na Figura 3

Tabela 1: Valores de Máximo Sobressinal para frequências de 25 a 33 rad/s.

Frequência [rad/s]	Valor de Máximo Sobressinal (Mp)
25	1.8622
26	1.9333
27	1.9896
28	2.0624
29	2.1184
30	2.1516
31	2.1550
32	2.1239
33	2.0654

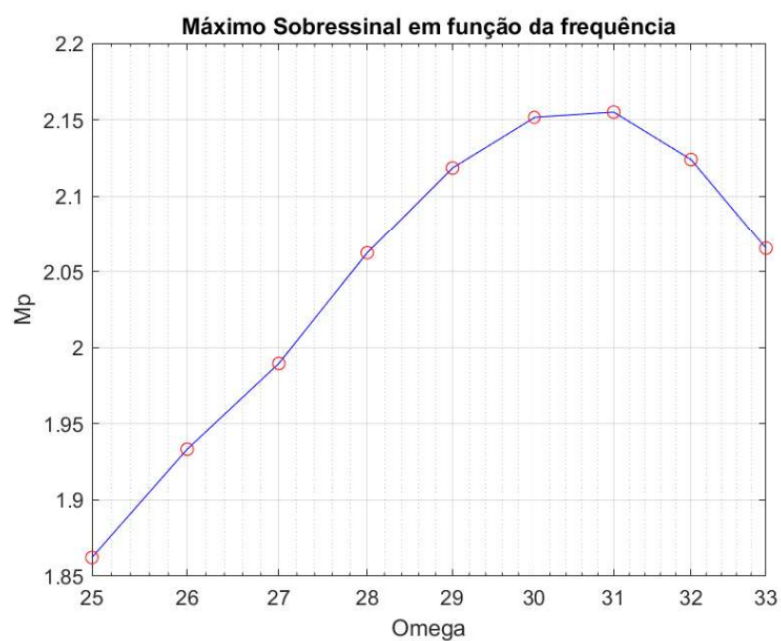


Figura 2: Máximo Sobressinal em função das frequências de 25 a 33 rad/s.

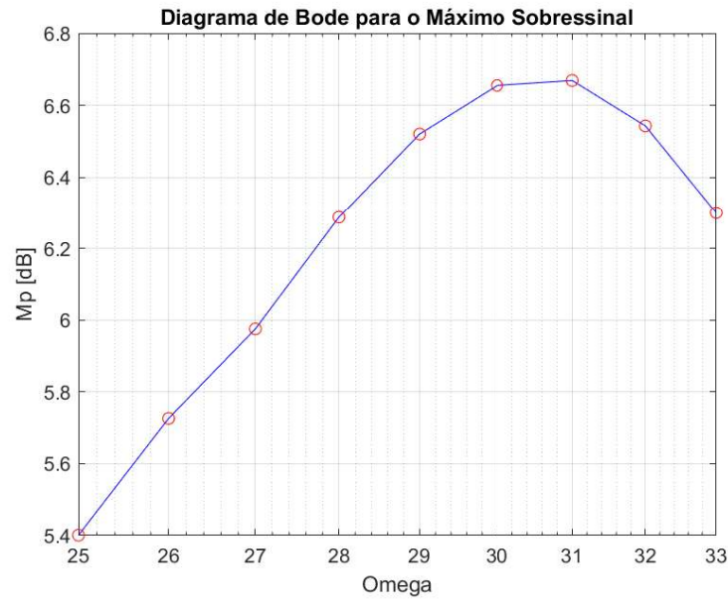


Figura 3: Diagrama de Bode para o Máximo Sobressinal em função das frequências de 25 a 33 rad/s.

3. PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO

A partir dos gráficos gerados anteriormente, é notável que o valor máximo de M_p ocorre na frequência de 31 rad/s. Ou seja, para $\omega_r = 31$ rad/s temos $M_p = 2.1550$. Dessa forma, é possível determinar o coeficiente de amortecimento ξ a partir da seguinte relação:

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Isolando o coeficiente de amortecimento ξ , tem-se que:

$$\xi^2 - \xi^4 = \frac{1}{4M_p^2} \Rightarrow -4M_p^2\xi^4 + 4M_p^2\xi^2 - 1 = 0$$

Utilizando o método de substituição de variável para $q = \xi^2$, tem-se:

$$q = \frac{-4M_p^2 \pm \sqrt{16M_p^4 - 16M_p^2}}{-8M_p^2} \Rightarrow q = \frac{-M_p^2 \pm M_p \sqrt{M_p^2 - 1}}{-2M_p^2}$$

Substituindo o valor $M_p = 2.1550$, temos que:

$$q_1 = 0.05709; \quad q_2 = 0.94290.$$

A partir da relação $q = \xi^2$, tem-se que:

$$\xi_1 = 0.23893; \quad \xi_2 = 0.97103.$$

Como o coeficiente de amortecimento ξ deve ser menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, $\xi < 0.7071$, tem-se que:

$$\xi = 0.23893.$$

Utilizando o coeficiente de amortecimento ξ , é possível obter a frequência de oscilação natural da massa ω_n a partir da seguinte relação:

$$\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{31}{\sqrt{1-2 \cdot 0.23893^2}} \Rightarrow \omega_n = 32.93728 \text{ [rad/s]}.$$

Para identificar os parâmetros m , b e k , é necessário realizar mais um experimento, em que o valor da massa é aumentado (por um valor conhecido) que, como sugerido, será de $m_a = 100\text{g}$. Dessa forma, foi possível simular a dinâmica do sistema massa-mola de forma a obter as posições do máximo sobressinal para cada frequência entre 25 e 33 rad/s, e o resultado desta simulação está demonstrado a seguir.

Tabela 2: Valores de Máximo Sobressinal para frequências de 25 a 33 rad/s com a massa aumentada.

Frequência [rad/s]	Valor de Máximo Sobressinal (Mp)
25	2.6775
26	2.6753
27	2.6770
28	2.6577
29	2.6312
30	2.6123
31	2.5769

32	2.5287
33	2.4937

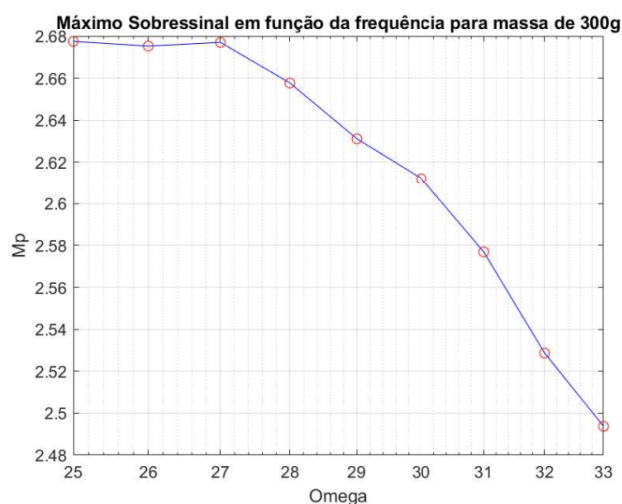


Figura 4: Máximo Sobressinal em função das frequências de 25 a 33 rad/s para a massa aumentada.

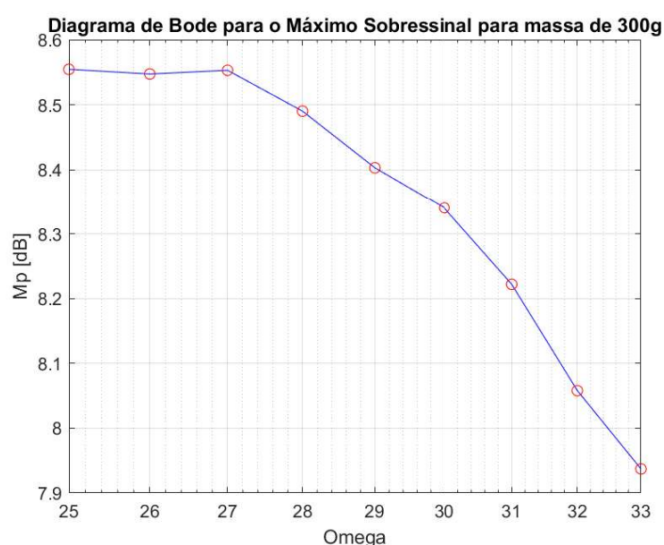


Figura 5: Diagrama de Bode para o Máximo Sobressinal em função das frequências de 25 a 33 rad/s para a massa aumentada.

A partir dos gráficos gerados, é notável que o valor máximo de M_p ocorre na frequência de 27 rad/s. Ou seja, para $\omega_r = 25$ rad/s temos $M_p = 2.6775$. Dessa forma, é possível determinar o coeficiente de amortecimento ξ_a da massa aumentada de maneira análoga ao método utilizado

anteriormente.

$$q = \frac{-4M_p^2 \pm \sqrt{16M_p^4 - 16M_p^2}}{-8M_p^2}$$

Substituindo o valor $M_p = 2.6775$, temos que:

$$q_1 = 0.03618; \quad q_2 = 0.96381.$$

A partir da relação $q = \xi^2$, tem-se que:

$$\xi_1 = 0.19021; \quad \xi_2 = 0.98173.$$

Como o coeficiente de amortecimento da massa aumentada ξ_a deve ser menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, $\xi_a < 0.7071$, tem-se que:

$$\xi_a = 0.19021.$$

Utilizando o coeficiente de amortecimento ξ_a , é possível obter a frequência de oscilação natural da massa aumentada ω_{na} a partir da seguinte relação:

$$\omega_{na} = \frac{\omega_{ra}}{\sqrt{1-2\xi^2}} \Rightarrow \omega_{na} = \frac{25}{\sqrt{1-2 \cdot 0.19021^2}} \Rightarrow \omega_{na} = 25.95674 \text{ [rad/s]}.$$

Assim, temos as seguintes equações que permitem determinar todos os parâmetros:

$$m = \frac{m_a \omega_{na}^2}{\omega_n^2 - \omega_{na}^2}; \quad k = \omega_n^2 m; \quad b = 2\xi\sqrt{mk}.$$

3.1 Determinando o parâmetro m (massa):

$$m = \frac{m_a \omega_{na}^2}{\omega_n^2 - \omega_{na}^2} \Rightarrow m = \frac{0.100 \cdot 25.95674^2}{32.93728^2 - 25.95674^2} \Rightarrow m = 0.16388 \text{ [Kg]}$$

3.2 Determinando o parâmetro k (Constante Elástica):

$$k = \omega_n^2 m \Rightarrow k = 32.93728^2 \cdot 0.16388 \Rightarrow k = 177.787 \text{ [N/m]}$$

3.3 Determinando o parâmetro b (Coeficiente de atrito viscoso):

$$b = 2\xi\sqrt{mk} \Rightarrow b = 2 \cdot 0.19021 \cdot \sqrt{0.16388 \cdot 177.787} \Rightarrow b = 2.053 \text{ [(N \cdot s)/m]}$$

4. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A partir dos valores da massa m , da constante elástica k e do coeficiente de atrito viscoso b , é possível determinar a função de transferência de maneira analítica através da seguinte expressão:

$$G = \frac{0.0049k}{ms^2 + bs + k}$$

Essa função de transferência foi implementada no *script* em Matlab *identificaBode.m*, e o diagrama de Bode é dado pela Figura 6. A partir da imagem é notável que a função encontrada aproxima bem os resultados analíticos.

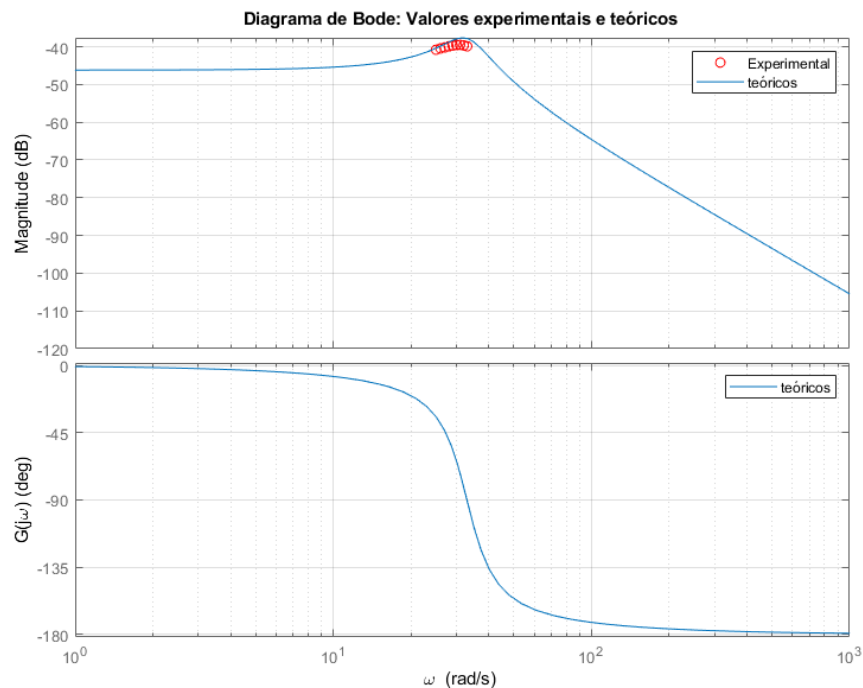


Figura 6: Diagrama de Bode com a função de transferência e os resultados experimentais

5. COMPARAÇÃO

Após feito os experimentos, é possível comparar os valores obtidos experimentalmente com os valores do sistema representado no V-REP. Para isso, foi criada a Tabela 3, de forma a demonstrar as diferenças numéricas.

Tabela 3: Erros percentuais dos parâmetros obtidos experimentalmente.

Parâmetros	Valores do V-REP	Valores Exp 5	Erro Percentual Exp 5 (%)	Valores Exp. 6	Erro Percentual Exp 6 (%)
k [N/m]	203	222.82	9.76	177.79	12,4
b [N*s/m]	3	2.67	10.9	2.053	31,5
m [g]	200	212.85	6.42	163.88	18,06

Os erros percentuais destacados advêm dos arredondamentos e algarismos significativos utilizados, como também da utilização de valores espaçados da frequência na representação da resposta em frequência do sistema massa-mola, de maneira a refletir numa imprecisão na obtenção das informações relevantes da sobrelevação do sinal. No caso, a utilização de frequências mais próximas à de pico e menos espaçadas resultaria numa melhor precisão.

6. CONCLUSÃO

A partir do desenvolvimento deste trabalho, foi possível estudar um sistema linear de segunda ordem caracterizado por um modelo massa-mola-amortecedor e, a partir da análise do seu comportamento na frequência regido sob massas conhecidas, pôde-se identificar e obter parâmetros físicos que caracterizam o modelo proposto: ξ , ω_n , M , k , e b . Também foi possível construir um diagrama de Bode deste sistema.

Além disso, é importante destacar que este relatório explorou uma metodologia diferente para obter os parâmetros estudados no experimento anterior, de forma a solucionar o mesmo

problema. Vale ressaltar que o software *V-REP* foi de suma importância para simular a dinâmica do sistema massa-mola em questão, cujo objetivo foi aplicar sinais senoidais de entrada de forças convenientes de forma que os valores de posição da massa tornaram possíveis a utilização de novas técnicas de identificação de parâmetros físicos.