

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO - INSTITUTO  
DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
MS211A - CÁLCULO NUMÉRICO  
PROF. JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER**

**TRABALHO:  
PONTE-TRELIÇA**

**GRUPO - TURMA A**

<b>BRYAN WOLFF</b>	<b>RA: 214095</b>
<b>WESNA SIMONE BULLA DE ARAUJO</b>	<b>RA: 225843</b>
<b>NADYA KAROLINE DA SILVA OLIVEIRA</b>	<b>RA: 185851</b>

**CAMPINAS  
MAIO DE 2021**

- **O problema da ponte-treliça**

Dado a ponte ferroviária demonstrada na Figura 1, projete forças verticais e horizontais para que possa calcular as forças de tensão e tração deste modelo.



Figura 1 - Ponte-Treliça

---

## Solução

A seguir serão abordados todos os passos para a resolução do problema.

- **Análise do Problema**

Para resolver o problema, foi projetado o seguinte modelo, estimando as forças horizontais e verticais (representadas em vermelho) em cada nó do sistema, e nomeando os elementos da ponte em azul.

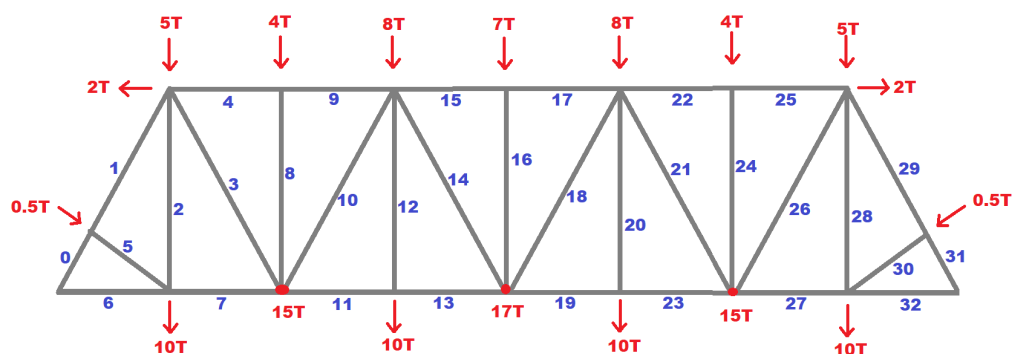


Figura 2 - Representação do modelo da Ponte-Treliça

Dessa forma, em cada nó existe um peso atuando de cima para baixo, sendo essa a convenção que será utilizada para um sinal positivo. Além disso, será adotado as tensões com sinais positivos e as trações com sinais negativos.

Para equacionar o problema, teremos os denominados “nós de cima”, que por convenção será adotado, por exemplo, o Nó<sub>1C</sub> como o nó superior esquerdo, Nó<sub>2C</sub> como o seu sucessor, até o último nó de cima, isto é, o Nó<sub>7C</sub> como o nó superior direito. Além disso, também temos os denominados “nós de baixo”, que seguirá a mesma convenção, porém com as nomenclaturas começando por Nó<sub>1B</sub>, Nó<sub>2B</sub>, etc.

Para simplificação, denotaremos por  $s$  o  $\sin(30^\circ)$ ,  $s''$  o  $\sin(60^\circ)$ ,  $c$  o  $\cos(30^\circ)$  e  $c''$  para o  $\cos(60^\circ)$ .

### • Equações utilizadas

Para calcular os nós da parte superior foram utilizados as seguintes equações:

#### • Nó<sub>1C</sub>:

$$s * F1 - s * F3 - F4 = -2 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$- F2 - c * F1 - c * F3 = 5 \quad \text{para as componentes verticais}$$

#### • Nó<sub>2C</sub>:

$$- F3 = 4 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F4 - F9 = 0 \quad \text{para as componentes verticais}$$

#### • Nó<sub>3C</sub> :

$$s * F10 - s * F15 + F9 - F14 = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$- c * F10 - c * F15 - F12 = 8 \quad \text{para as componentes verticais}$$

#### • Nó<sub>4C</sub> :

$$F14 - F17 = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_{16} = 7 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>5C</sub> :**

$$F_{17} - F_{22} + s * F_{18} - s * F_{21} = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$- F_{20} - F_{18} * c - F_{21} * c = 8 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>6C</sub> :**

$$F_{22} - F_{25} = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$- F_{24} = 4 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>7C</sub> :**

$$F_{25} + s * F_{26} - s * F_{29} = 2 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$- F_{28} - c * F - c * F_{29} = 5 \quad \text{para as componentes verticais}$$

Já para os nós da parte inferior da ponte, utilizamos as seguintes equações:

- **Nó<sub>1B</sub>:**

$$- F_0 * s'' - F_6 = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_0 * c'' = 0 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>2B</sub>:**

$$F_6 - F_7 + F_3 * s'' = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_5 * c'' + F_2 = 10 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>3B</sub>:**

$$F_7 - F_{11} + F_3 * s'' - F_{10} * s'' = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_8 + F_3 * c'' + F_{10} * c'' = 15 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>4B</sub>:**

$$F_{11} - F_{13} = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_{12} = 10 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>5B</sub>:**

$$F_{13} - F_{19} + F_{15} * s'' - F_{18} * s'' = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_{16} + F_{18} * c'' + F_{15} * c'' = 0 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>6B</sub>:**

$$F_{19} - F_{23} = 0 \quad \text{para as componentes horizontais}$$

$$F_{20} = 10 \quad \text{para as componentes verticais}$$

- **Nó<sub>7B</sub>:**

$F_{23} - F_{27} - F_{26} * s'' + F_{21} * s'' = 0$  para as componentes horizontais

$F_{24} + F_{21} * c'' + F_{26} * c'' = 15$  para as componentes verticais

- **Nó<sub>8B</sub>:**

$F_{27} - F_{32} - F_{30} * s'' = 0$  para as componentes horizontais

$F_{28} + F_{230} * c'' = 10$  para as componentes verticais

- **Nó<sub>9B</sub>:**

$F_{31} * s'' + F_{32} = 0$  para as componentes horizontais

$F_{31} * c'' = 0$  para as componentes verticais

As equações utilizadas para representar os nós localizados na lateral esquerda (Diagonal 1) e na lateral direita (Diagonal 2) são dadas por:

$$\text{Diagonal 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} -F_0 c'' - F_5 c'' + F_1 c'' = 0,5 \times c'' \\ F_0 s'' - F_5 s'' - F_1 s'' = 0,5 \times s'' \end{array} \right\}$$

$$\text{Diagonal 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} -F_{31} s'' + F_{29} s'' + F_{30} s'' = -0,5 \times s'' \\ -F_{31} c'' + F_{29} c'' - F_{28} c'' = 0,5 \times c'' \end{array} \right\}$$

- **Resolução do problema**

O problema pode ser reduzido em uma expressão  $A * F = b$ , onde  $A$  é a matriz que representa todas as equações demonstradas anteriormente (Figura 4),  $F$  é a matriz das variáveis das forças de tensão e  $b$  a matriz dos coeficientes do sistema linear. É importante notar que cada coluna da Matriz representa uma força, ou seja, a primeira coluna se refere a  $F_0$ , a segunda a  $F_1$  e assim por diante. Ademais, cada linha está associada a um valor contido na matriz  $b$  conforme indicado na Figura 3.



$$F_{24} = 1.79538$$

$$F_{27} = 23.09386$$

$$F_{30} = 19.8244$$

$$F_{25} = -26.23341$$

$$F_{28} = -9.5870$$

$$F_{31} = -8.0246$$

$$F_{26} = 32.52095$$

$$F_{29} = -23.9551$$

$$F_{32} = 6.4374$$

Nesta perspectiva, é notável a presença de forças aproximadamente simétricas, dado a existência simetria presente na ponte e na distribuição de cargas contidas nela. Além disso, a escolha do método numérico utilizado levou em conta a praticidade de executá-lo e a alta precisão quando comparado com os métodos de Newton e Jacobi.