UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO - INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
MS211A - CÁLCULO NUMÉRICO
PROF. JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER

TRABALHO 1
MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A IDENTIFICAÇÃO DE ZEROS DE FUNÇÕES

GRUPO - TURMA A

BRYAN WOLFF	**RA: 214095**
WESNA SIMONE BULLA DE ARAUJO	**RA: 225843**

CAMPINAS
ABRIL DE 2021

Questão 1

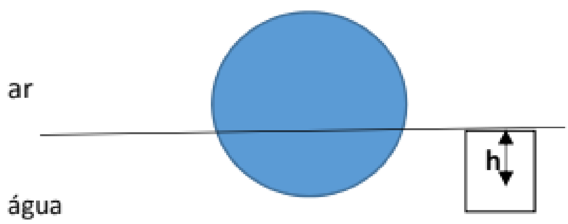
Considere uma esfera de raio r e densidade$d$. Seu $Peso$ é dado por:

$$Peso \ = \ P \ = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot d}{3} \times g \qquad (1)$$

Além disso, sabe-se que o volume de uma calota esférica é dado por:

$$Volume_{calota} \ = V_c \ = \frac{\pi \cdot (3 \cdot r \cdot h^2 - h^3)}{3} \qquad (2)$$

em que h é a profundidade da calota esférica submersa, como indicado na figura a seguir.



Dado que a esfera seja uma boia, cuja finalidade é flutuar na água, e considerando d, a densidade da esfera como sendo dada por $d = \ 0.6$, obtenha h como uma fração de r quando h é a altura da calota esférica que fica submersa.

Solução

Primeiramente, observou-se que o problema envolvia a força de empuxo (E), já que a esfera se encontrava flutuando na água. Assim, para que esse fenômeno pudesse ocorrer, era necessário que a força empuxo se igualasse a força peso. Com isso, foi possível chegar a seguinte equação:

$$E = P \tag{3}$$

$$d_{água} \cdot V_c \cdot g = P \tag{4}$$

Sabendo que $d_{água} = 1 \frac{g}{m^3}$, temos a seguinte expressão:

$$\left(\frac{\pi \cdot (3 \cdot r \cdot h^2 - h^3)}{3}\right) \cdot g = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot d}{3} \times g \tag{5}$$

que através de manipulações algébricas

$$h^3 - 3 \cdot r \cdot h^2 + 2.4 \cdot r^3 = 0 \tag{6}$$

No entanto, deseja-se obter uma função em que h seja uma fração de r. Assim, dividindo ambos os lados da equação por r^3, é possível obter a expressão que modela o problema da altura da calota esférica:

$$f\left(\frac{h}{r}\right) = \left(\frac{h}{r}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^2 + 2.4 = 0 \tag{7}$$

Para fins de simplicidade adotou-se $x = \frac{h}{r}$.

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 2.4 = 0 \tag{8}$$

A seguir, foi gerado o gráfico da função $f(x)$encontrada, de forma a obter uma visualização dos pontos das soluções da equação.

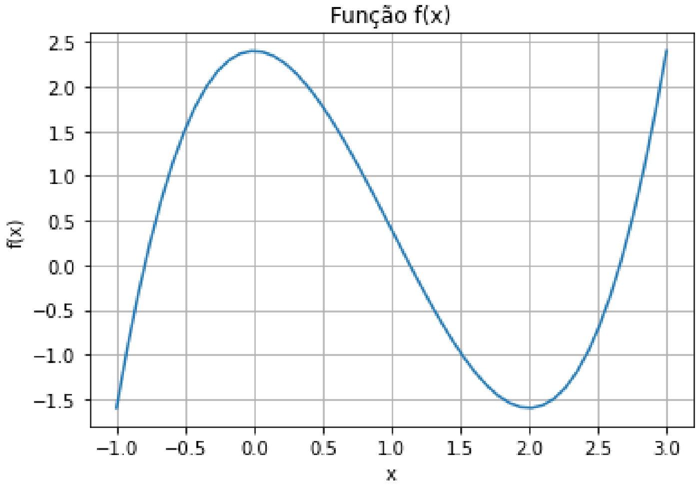


Figura 1 - Função polinomial do terceiro grau que modela o problema da altura da calota esférica

Para determinar o valor de h, foram utilizados quatro métodos numéricos a fim de comparar os resultados, sendo eles: Método da bisseção, Método da Posição Falsa, Método do Ponto Fixo e Método de Newton-Raphson. Para todos os casos foi escolhido um valor de erro na ordem de 10^{-3}definido arbitrariamente, mas maior do que os erros tipicamente utilizados em aula (10^{-7}). Além disso, os intervalos utilizados como valor inicial foram escolhidos com base no valor das raízes calculadas diretamente com o auxílio da calculadora Symbolab, que forneceu três raízes:

$$x_1 =- 0.79521 \tag{9}$$

$$x_2 = 1.13413 \tag{10}$$

$$x_3 = 2.66108 \tag{11}$$

Como o problema é composto por h e r, isto é, distâncias reais, a raiz negativa será desconsiderada do problema. Além disso, se a finalidade da calota esférica é atuar como uma boia, é interessante que a distância h seja a menor possível, e para isso, o intervalo utilizado para buscar as raízes será compreendido entre x ∈ [0,2]. Dessa forma, definiu-se intervalos na qual seria garantido a existência de uma raíz válida. A seguir o resultado e a quantidade de interações de cada método aplicado.

- **Método da Bisseção**

A equação que define a aproximação da raiz é dada por

$$x = \frac{a+b}{2} \tag{12}$$

em que [a,b] representa o intervalo de existência da raiz procurada.

Assim, definiu-se um intervalo entre [0,2] de modo que uma raiz foi encontrada na 11ª iteração do código. A raiz obtida foi de 1,13378906. Através da Figura 2 é possível observar a convergência das aproximações para $f(x)$= 0.

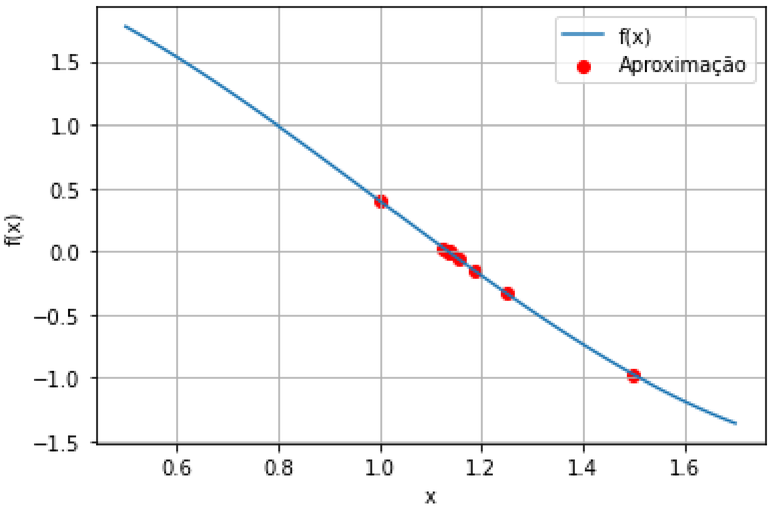


Figura 2 - Trecho da função polinomial do terceiro grau que mostra as aproximações da função $f(x)$convergindo para a raíz através do Método da Bisseção.

Para averiguar os resultados da aproximação final, aplicou-se o valor encontrado novamente na função $f(x)$ com o intuito de comparar com o valor zero. Afinal, quando x é uma raíz $f(x) = 0$. O resultado para $f(1.13378906)$ foi de 0.00102757, algo bastante próximo de zero.

- **Método da Posição Falsa**

O próximo método utilizado foi o método da posição falsa muito semelhante ao caso anterior, exceto pela expressão que define o valor da aproximação.

$$x = \frac{a \cdot f(b) + b \cdot f(a)}{f(b) + f(a)} \tag{13}$$

Com isso, o mesmo intervalo foi definido entre [0,2] de modo que uma raiz foi encontrada na 4ª interação do código. A raiz obtida foi de 1,13436867. Através da Figura 3 é possível observar a convergência das aproximações para $f(x)$= 0.

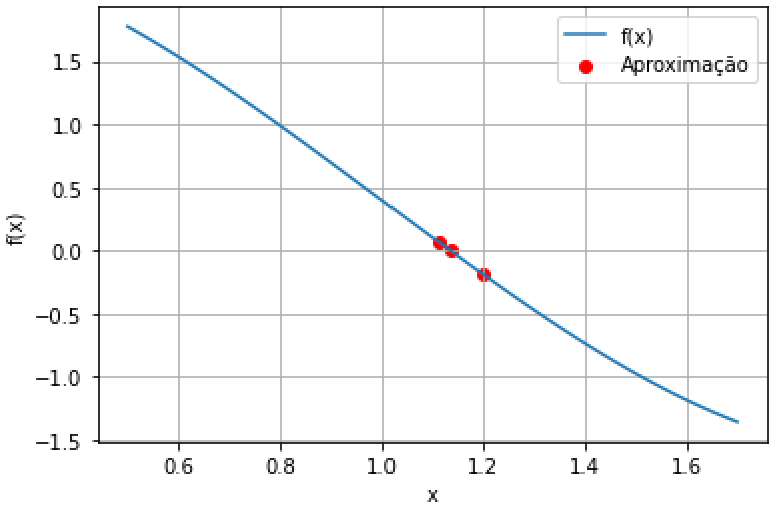


Figura 3 - Trecho da função polinomial do terceiro grau que mostra as aproximações da função $f(x)$convergindo para a raíz através do Método da Posição Falsa

Da mesma maneira que realizado anteriormente, para averiguar os resultados da aproximação final, aplicou-se o valor encontrado novamente na função $f(x)$ com o intuito de comparar com o valor zero. Afinal, quando x é uma raíz $f(x) = 0$. O resultado para $f(1.13436867)$ foi de -0.00067999. Diferentemente do método da bisseção, nota-se que além do número de interações ter reduzido o valor de $f(x)$aplicado a raiz aproximada é ainda mais satisfatório (próximo de zero).

- **Método do Ponto Fixo**

Para desenvolver esse método foi necessário encontrar uma função $x = \phi(x)$ tal que $f(\varepsilon) = 0$ se e somente se $\varepsilon = \phi(\varepsilon)$. Dessa forma, para obter essa função isolou-se x de $f(x)$. Assim, manipulando a equação (8), de modo a colocar em evidência o termo x^2, tem-se:

$$x^2 \cdot (x - 3) = -2.4 \quad (14)$$

$$x = \phi(x) = \sqrt{\frac{-2.4}{(x-3)}} \quad (15)$$

Tendo em mãos o novo x aproximado aplicou-se o método definindo como primeira aproximação o valor 1, visto que já se sabe que há raízes próximas a esse valor, e 20 para a quantidade máxima de iterações novamente escolhido arbitrariamente. Com isso, na 6ª iteração foi encontrada uma raíz no valor de 1,13381488. A Figura 4 ilustra a convergência das raízes.

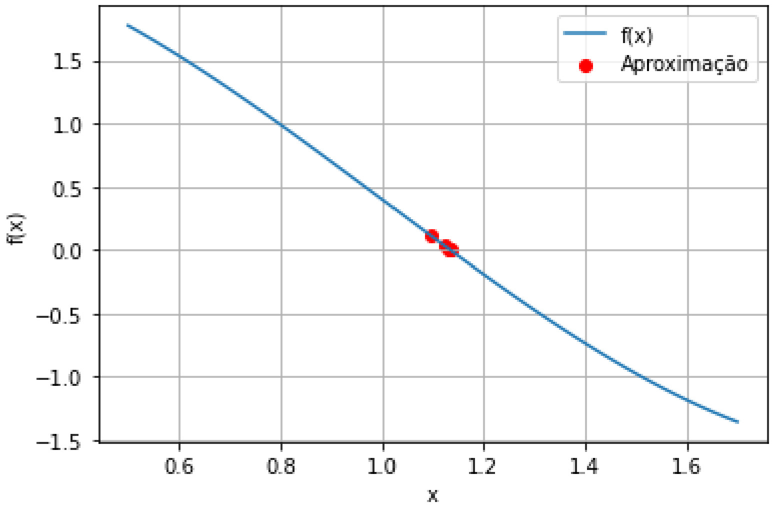


Figura 4 - Trecho da função polinomial do terceiro grau que mostra as aproximações da função $f(x)$convergindo para a raíz através do Método do Ponto Fixo.

Por fim, para averiguar os resultados da aproximação final, aplicou-se o valor encontrado novamente na função $f(x)$ com o intuito de comparar com o valor zero. Afinal, quando x é uma raíz $f(x) = 0$. O resultado para $f(1.13381488)$ foi de 0.00095149. Observa-se, que embora o número de iterações tenha aumentado em relação ao método da posição falsa o resultado final é ainda próximo de zero.

- **Método de Newton-Raphson**

O último método aplicado foi o Método de Newton-Raphson que utiliza como aproximação de x

$$\phi(x) = x = x - \frac{f(x)}{f(x)^{'}} \tag{16}$$

em que $f(x)^{'}$indica a derivada de $f(x)$. Assim, tem -se

$$f(x)^{'} = 3 \cdot x^{2} - 6 \cdot x \tag{17}$$

Além disso, para aplicar o método foi definido como aproximação inicial o valor 1 (o valor 2 não pode ser escolhido pois zeraria $f(x)'$ o que tornaria $\phi(x)$ uma equação indefinida). Dessa forma, na 2ª iteração foi encontrada a raiz 1,13381488. A Figura 5 mostra o gráfico da função e de suas aproximações.

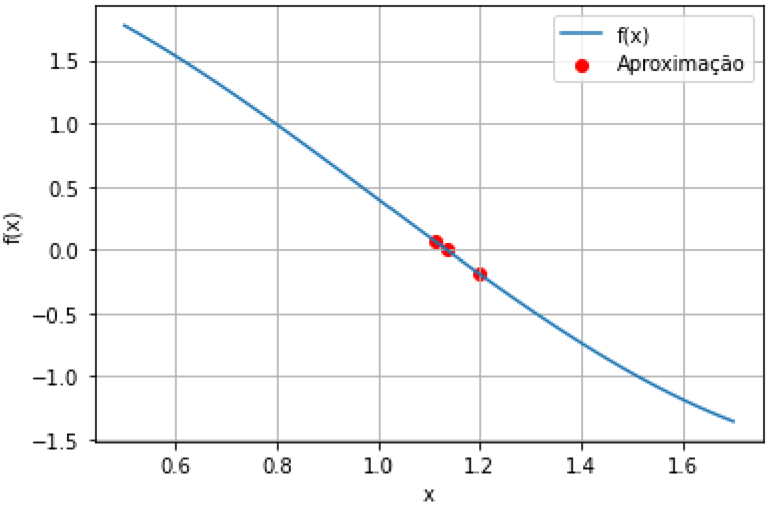


Figura 5 - Trecho da função polinomial do terceiro grau que mostra as aproximações da função $f(x)$convergindo para a raíz através do Método de Newton.

Como anteriormente, para verificar os resultados da aproximação final, aplicou-se o valor encontrado novamente na função $f(x)$ com o intuito de comparar com o valor zero. Afinal, quando x é uma raíz $f(x) = 0$. O resultado para $f(1.13381488)$ foi de 0.00095149.

Todos os métodos implementados neste relatório podem ser verificados no seguinte notebook: Métodos Numéricos.

Conclusão

Os métodos numéricos são aplicações de algoritmos no qual é possível resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas menos complexas. É importante salientar que o objetivo principal da análise numérica é encontrar soluções aproximadas para problemas complexos, visto que o uso de iterações convergem para o valor aproximado de uma solução exata.

Nessa perspectiva, independentemente do método utilizado, o objetivo deste trabalho foi encontrar soluções aproximadas para o problema proposto, visando estabelecer uma relação entre as variáveis h e r.

Vale ressaltar que o problema aborda distâncias reais, então ao comparar com as raízes exatas dada pelas expressões 9, 10 e 11, a raiz negativa (9) foi desconsiderada do problema. Como a finalidade da calota esférica é flutuar na água, é interessante que a distância h seja a menor possível, e para isso, buscamos encontrar a menor raiz (Expressão 10), que está compreendida no intervalo x ∈ [0,2]. A partir disso, de forma a analisar o resultado de cada método numérico estudado, foi gerado a Tabela 1 com as soluções encontradas e a quantidade de iterações de cada método.

Tabela 1 - Comparação entre os Métodos Numéricos

Método Numérico	**Quantidade de Iterações**	**Raíz**	$f(x)$
Método da bisseção	11	1.13378906	0.00102757
Método da Posição Falsa	4	1.13436867	-0.00067999
Método do Ponto Fixo	6	1.13381488	0.00095149
Método de Newton-Raphson	2	1.13381488	0.00095149

Dessa forma, é possível concluir que dentre todas as quatro implementações utilizadas, o método de Newton-Raphson se mostrou mais eficiente devido a quantidade de iterações necessárias para se obter uma raiz (somente duas).

Apesar de todos os métodos apresentarem uma quantidade de interações diferentes, todos mostraram resultados satisfatórios, isto é, aproximados da solução exata. Portanto, mesmo que o Método de Newton-Raphson tenha se destacado, é possível utilizar qualquer um para obter a solução do problema.

Além disso, como o problema envolve a determinação de $\frac{h}{r}$de modo a garantir que a boia (esfera) flutue, a variação mínima na precisão da altura não será tão danoso para o resultado final, já que foi definido um intervalo em que a raiz encontrada seria a menor possível.