Линейная алгебра 2

Байрамкулов Аслан

Руководитель группы моделирования профиля
МТС Big Data

План:

- Определитель матрицы
- Ранг матрицы
- Обратная матрица
- СЛАУ
- Обусловленность СЛАУ
- Собственные значения и собственные вектора матрицы
- Матричные разложения (SVD, Truncated SVD)

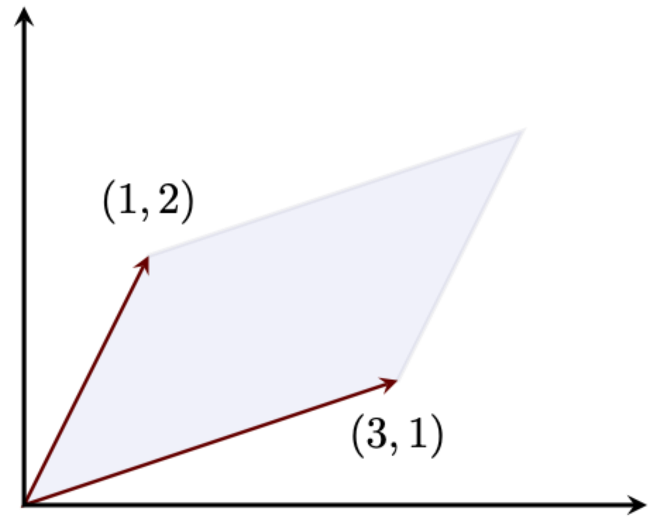
Определитель матрицы

Определитель 2x2: геометрический смысл

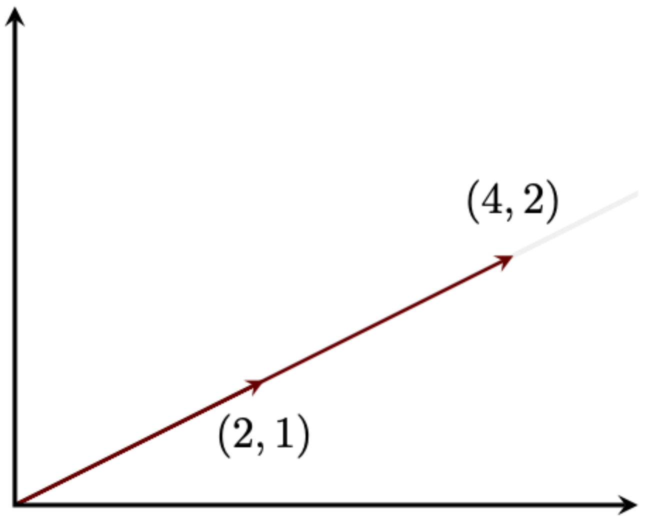
С помощью определителя можно вычислить площадь построенного на двух векторах параллелограмма на плоскости. Для этого каждый из векторов следует записать как отдельный столбец матрицы 2x2. Определитель с точностью до знака будет равен площади параллелограмма.

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad S = |\det A|.$$

Определитель 2x2: геометрический смысл



Площадь параллелограмма.



Вырожденный случай.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = |\det A| = |3 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 5.$$

Определитель.

- Геометрический смысл в общем случае — ориентированный объем многомерного параллелепипеда, построенного на векторах, которые являются столбцами этой матрицы
- Определение можно дать по-разному, например через рекурсивную формулу (разложение по строке):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1,$$

$\bar{M}_j^1$ - определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием 1-строки и j-го столбца

Определитель. Пример

$$det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} = (-1)^0 2 * 5 + (-1)^1 1 * 3 = 7$$

$$det\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & -4 & 4\end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^0 2 * 5 * 4 + (-1)^1 2 * 0 * (-4) + (-1)^1 1 * 3 * 4 +$$

$$+ (-1)^2 1 * 0 * 1 + (-1)^2 7 * 3 * (-4) + (-1)^3 7 * 5 * 1 =$$

$$= 40 + 0 - 12 + 0 - 84 - 35 = -91$$

Определитель. Свойства

- Определитель матрицы, содержащей линейно зависимые строки или столбцы, равен 0.
- Определитель не меняется при транспонировании.
- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ => $\det(AB) = \det A \cdot \det B.$

Ранг матрицы

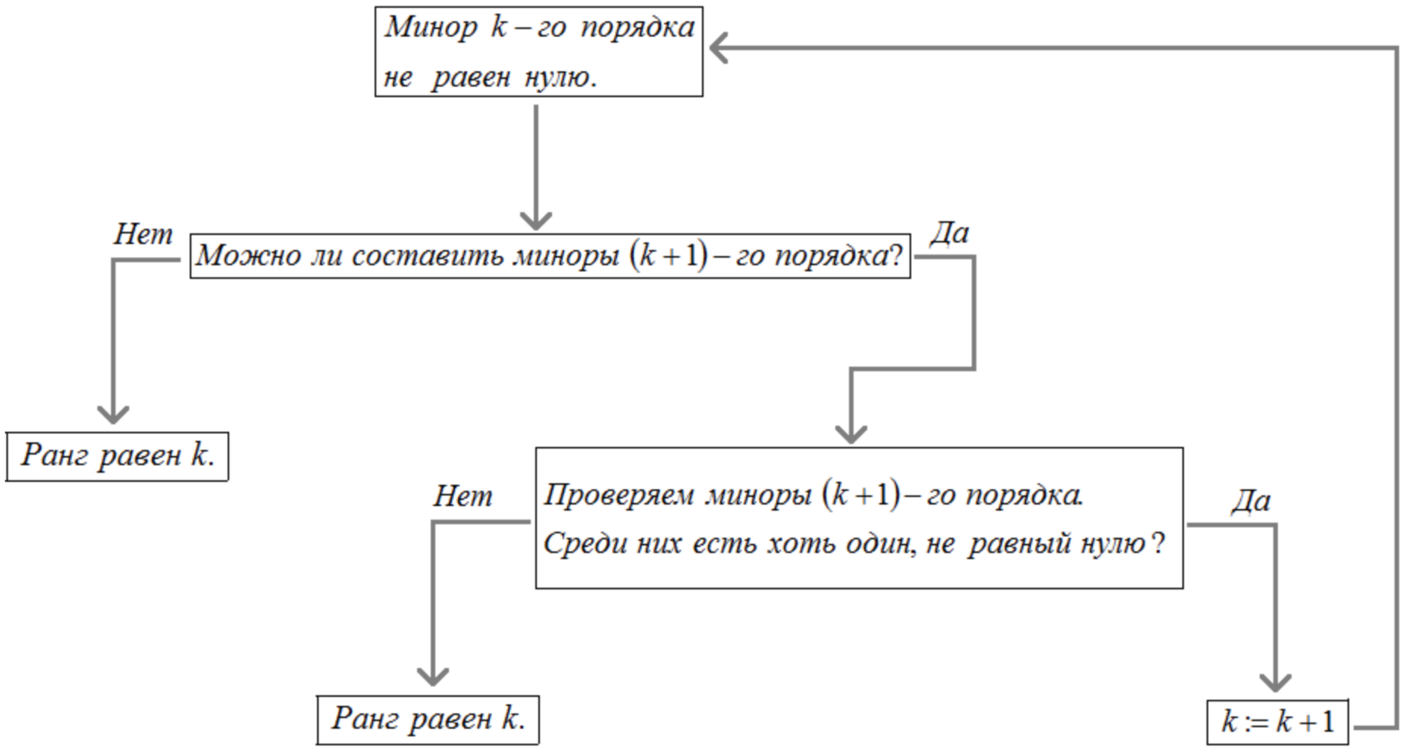
Ранг матрицы

- Строчный ранг: максимальное число линейно независимых строк.
- Столбцовый ранг: максимальное число линейно независимых столбцов.
- Строчный ранг равен столбцовому, поэтому говорим просто о ранге матрицы

Ранг матрицы

- **Рангом матрицы** называют максимальный порядок её миноров, среди которых есть хотя бы один, не равный нулю.

- **Эквивалентные матрицы** – матрицы, ранги которых равны между собой.



Ранг матрицы. Свойства

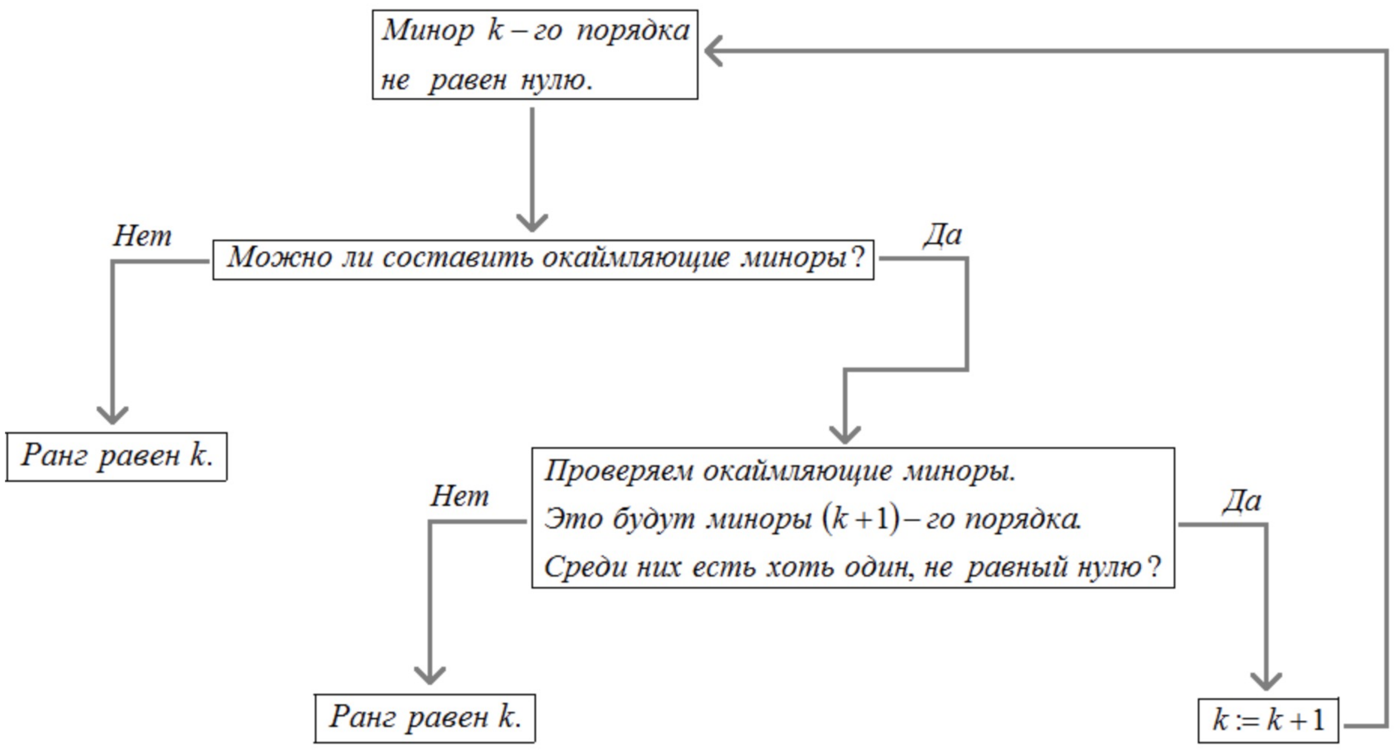
- При транспонировании матрицы ее ранг не изменяется.
- Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
- При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.

Основные методы нахождения ранга:

1. Метод окаймляющих векторов
2. Метод элементарных преобразований (алгоритм Гаусса)

Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры (k+1)-го порядка, которые содержат в себе минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор (k+1)-го порядка, и вся процедура повторяется.



Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}.\qquad M_2=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0.$$

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&1\end{vmatrix}=0,\qquad M_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&6\\1&2&3\end{vmatrix}=0,\qquad M_3=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&4&8\\1&2&4\end{vmatrix}=0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен 2,

Ранг матрицы. Метод элементарных преобразований

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr} \quad (r \leq \min(m,n))$$

равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r

Ранг матрицы. Метод элементарных преобразований

Элементарные преобразования:

- Перемена мест двух строк (столбцов).
- Умножение всех элементов строки (столбца) на некоторое число $a \neq 0$.
- Суммирование всех элементов одной строки (столбца) с соответствующими элементами иной строки (столбца), умноженными на некое вещественное число.

Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.

Конечная цель преобразований матрицы – сделать её ступенчатой. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Обратная матрица

Обратная матрица

- Квадратная матрица А называется **невырожденной** (неособенной), если определитель матрицы А не равен нулю
- Если матрица А невырожденная, то существует и притом единственная матрица, такая, что:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

- A^{-1} называется **обратной** матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица. Свойства и основные методы нахождения

- Метод присоединённой матрицы. Присоединенная матрица — это матрица, составленная из алгебраических дополнений данной матрицы и транспонированная.

- Метод элементарных преобразований. В методе используется расширенная матрица (A|E)

- Итерационные методы

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Обратная матрица. Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -3 & \frac{7}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{7}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

СЛАУ

СЛАУ

- Систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных x1,..., xn можно записать в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных x1,..., xn можно записать в общем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

СЛАУ

Или еще более кратко: $Ax = b$

где A — это матрица коэффициентов, b — столбец свободных членов, а x — вектор из неизвестных. Причем возможны три случая:

1. Система вовсе не имеет решения. Такая система называется несовместной
2. Система имеет единственное решение.
3. Система имеет бесконечно много решений.

СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли

СЛАУ **Ax = b** совместна тогда и только тогда, когда **rg(A) = rg(A|b)**, причём:

- система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных,
- бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

Расширенная матрица получается из матрицы A приписыванием к ней справа столбца b.

СЛАУ. Решение через обратную матрицу

Решение уравнения Ax = b, если матрица A — невырожденная, единственно и запишется в виде:

$$x = A^{-1}b$$

Задача вычисления обратной матрицы и решения СЛАУ, строго говоря, сравнимы по сложности.

СЛАУ. Прикладная роль

- Матрица объекты-признаки (матрица, в строках которой содержатся описания исследуемых объектов, а в столбцах - значения их характеристик)
- Например, в первом столбце матрицы может содержаться расстояние от квартиры до ближайшего метро, во втором - её площать, в третьем - этаж, а в векторе-столбце b может стоять стоимость квартиры и т.д.
- Алгоритмы, основывающиеся на поиске коэффициентов линейной комбинации, называются линейными
- Основное преимущество - интерпретируемость (важно, например, в задаче кредитного скоринга)

СЛАУ. Случай несовместной системы

- Система несовместна, то есть мы не можем восстановить точную линейную зависимость целевой переменной b от столбцов матрицы A.

- Ставится задача регрессии - задача приближённого восстановления зависимости целевой переменной от входных переменных, в которой целевая переменная принимает значения из R.

- Решение таких задач сводится к минимизации функционала ошибки, определяющего качество нашего решения.

СЛАУ. Случай несовместной системы

- Пример - метод наименьших квадратов - минимизация суммы квадратов ошибок регрессии (нормы вектора ошибок)

$$||Ax - b||^2 \to min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$x = argmin_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||^2$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Обусловленность СЛАУ

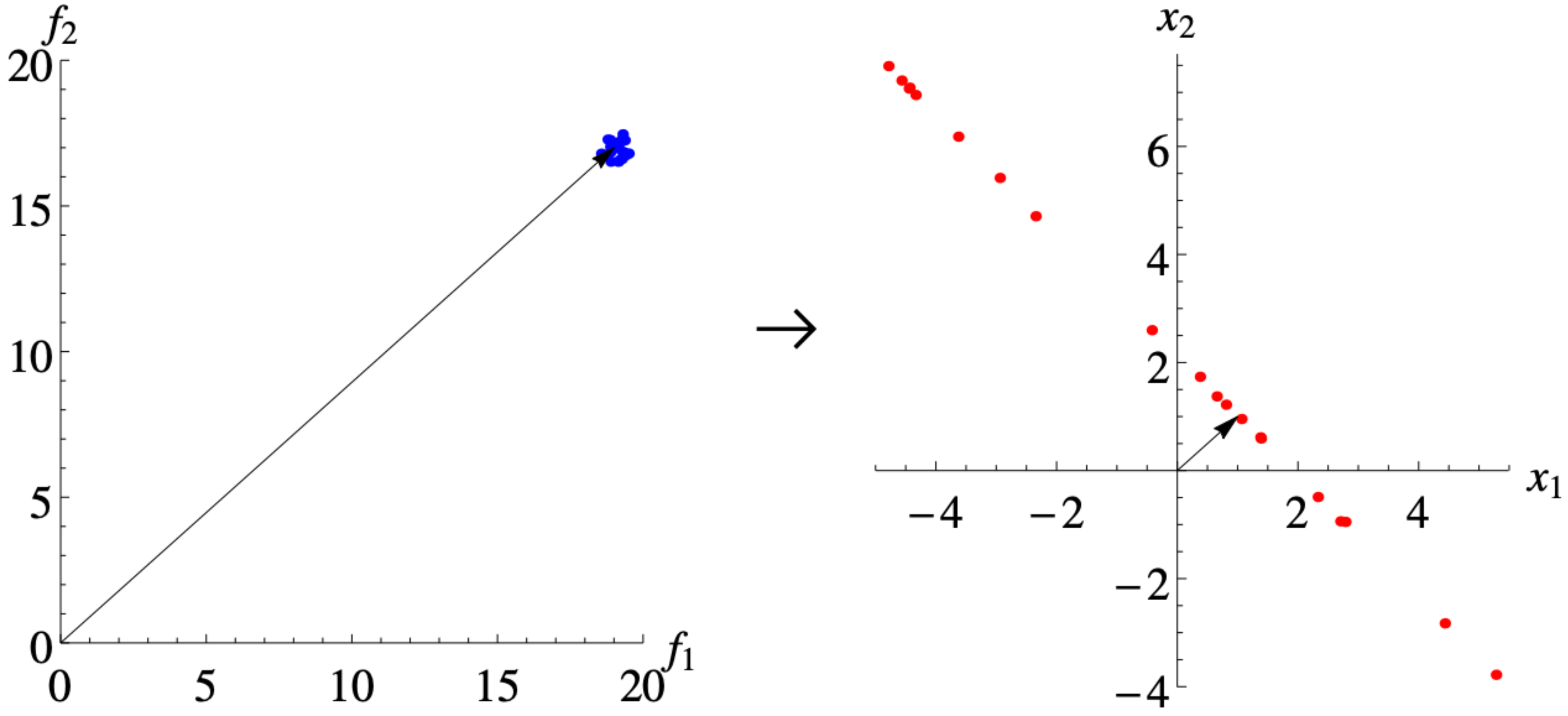
Неустранимые погрешности

- Рассмотрим систему:

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19. \\ 17. \end{pmatrix}$$

- Причем матрица известна точно, а правая часть получена округлением до целого (погрешность не более 3%). Посмотрим, на какую точность можно рассчитывать при решении системы.
- С точки зрения линейной алгебры, проблем при решении данной системы не должно быть, так как определитель не равен 0.

Неустранимые погрешности



Плохо обусловленные системы

Задача оказалась **плохо обусловленной**. Сравнительно небольшие возмущения системы уравнений привели к существенным отклонениям в решении.

Обусловленность задачи не связана с конкретным численным методом, это неустранимая ошибка. Существуют способы снижения погрешности, вызванной плохой обусловленностью:

- Каким-то образом перейти к хорошо обусловленной эквивалентной системе.
- Повысить точность определения коэффициентов СЛАУ и правой части.

Плохо обусловленные системы являются обобщением понятия вырожденных систем. Системы «близкие» к вырожденным скорее всего будут плохо обусловлены.

Векторные нормы

В вычислительной математике широко распространены следующие нормы:

- Максимальная или бесконечная норма (норма Чебышёва)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

- Манхэттенская норма (L1)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$$

- Евклидова норма (L2)

$$\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \equiv \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Матричные нормы

$$\|A\| > 0, \qquad A \neq 0\,, \quad \|0\| = 0,$$

$$\|\alpha\, A\| = |\alpha|\, \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|A\, C\| \leq \|A\|\, \|C\|$$

Если норма удовлетворяет только первым трем аксиомам, то такую норму называют **аддитивной**. Если удовлетворяются все четыре аксиомы, то **мультипликативной**. Всякую аддитивную норму умножением на достаточно большую положительную константу можно превратить в мультипликативную.

Матричные нормы

- Первая норма (1-норма):

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;$$

- Спектральная норма (норма Гильберта)

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le m} \sigma_i = \left(\max_{1 \le i \le m} \lambda_i (A^T A) \right)^{1/2} = \left(\max_{1 \le i \le n} \lambda_i (A A^T) \right)^{1/2}$$

Матричные нормы

- Бесконечная норма

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;$$

- Сферическая норма (норма Фробениуса)

$$\|A\|_F = \|A\|_E = N(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (A^T A) \right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

Матричные нормы

Матричная норма называется **согласованной** с векторной нормой, если

$$\|A\boldsymbol{x}\|_V \leq \|A\|_M \|\boldsymbol{x}\|_V$$

для любой матрицы A и всех векторов x.
Всякая норма матрицы согласована с какими-нибудь векторными нормами.

Матричные нормы

Пусть задана векторная норма. Тогда числовая функция:

$$\|A\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_V \neq 0} \frac{\|A\,\boldsymbol{x}\|_V}{\|\boldsymbol{x}\|_V} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_V = 1} \|A\,\boldsymbol{x}\|_V$$

является матричной нормой и называется нормой матрицы, **подчиненной** векторной норме.

Число обусловленности для СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ и полученную из неё возмущением правой части. Оценим относительную погрешность решения, связав ее с относительной погрешностью правой части.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{x}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

Число обусловленности для СЛАУ

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Число обусловленности СЛАУ:

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \equiv \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|}$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Число обусловленности матрицы

Насколько плохо может быть обусловлена система с данной матрицей? Можно ли за счет выбора правой части сделать систему сколь угодно плохой? Оказывается, нет.

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Число обусловленности матрицы:

$$\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Матрицу можно считать вырожденной, если ее число обусловленности превосходит **1/ε**, где **ε** — относительная погрешность выполнения машинных операций

Число обусловленности матрицы. Пример

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19. \\ 17. \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_1 = 19, \qquad \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = 19,$$

$$\mu_1(\mathbf{A}) = \mu_\infty(\mathbf{A}) = 19 \cdot 19 = 361.$$

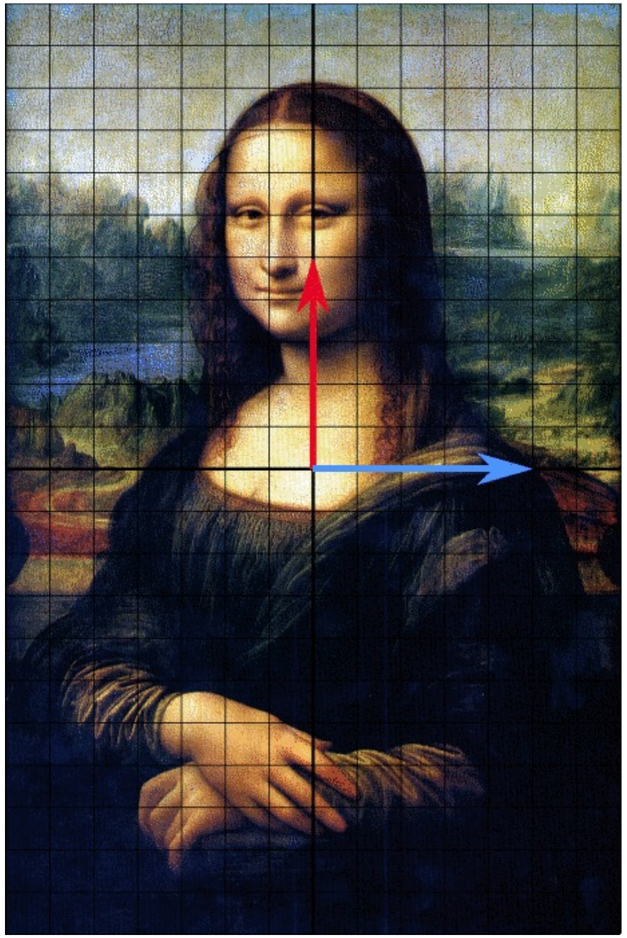
$$\mu_e(\mathbf{A}) = \left| \frac{\lambda_{max}(\mathbf{A})}{\lambda_{min}(\mathbf{A})} \right| = \frac{\sqrt{82} + 9}{\sqrt{82} - 9} \approx 326.$$

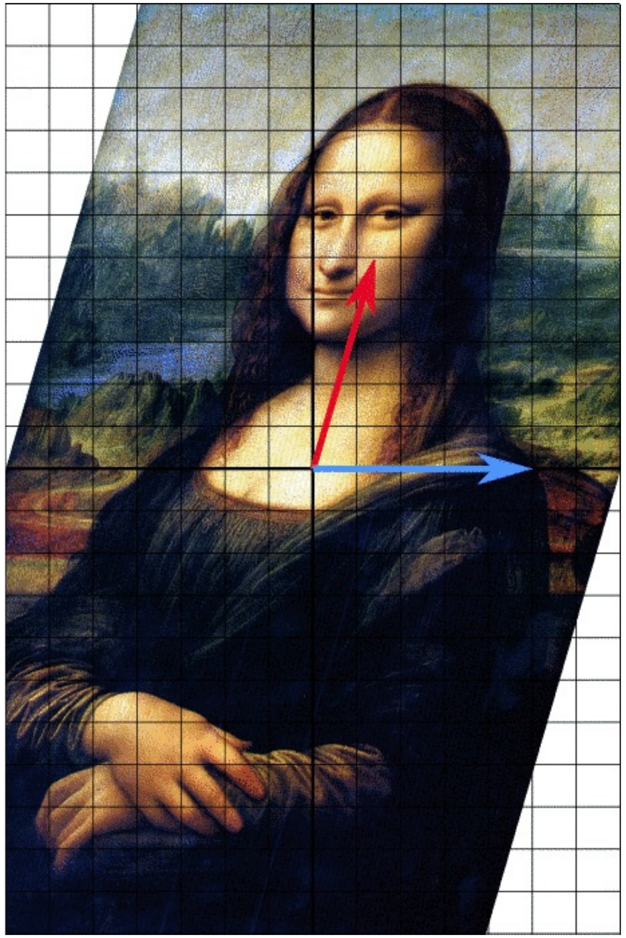
Таким образом, погрешность в 3% в правой части решения приводит примерно к $\sim$ 1000% ошибки в решении.

Собственные значения и векторы

Собственные векторы

- **Собственный вектор** — любой ненулевой вектор x, который отображается в коллинеарный ему вектор λx оператором A, а соответствующий скаляр называется **собственным значением** оператора.





Собственные вектора

- Линейное преобразование может не иметь собственных векторов вообще, например поворот в двумерном пространстве (кроме нескольких исключительных случаев), или иметь n собственных векторов с различными собственными значениями

- Все корни характеристического многочлена и только они являются собственными значениями матрицы.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Собственные вектора. Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 3 - 4\lambda + \lambda^2 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

$$(A - I)\mathbf{v}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1v_1 + 1v_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 3I)\mathbf{v}_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1v_1 + 1v_2 &= 0; \\ 1v_1 - 1v_2 &= 0 \end{aligned}$$

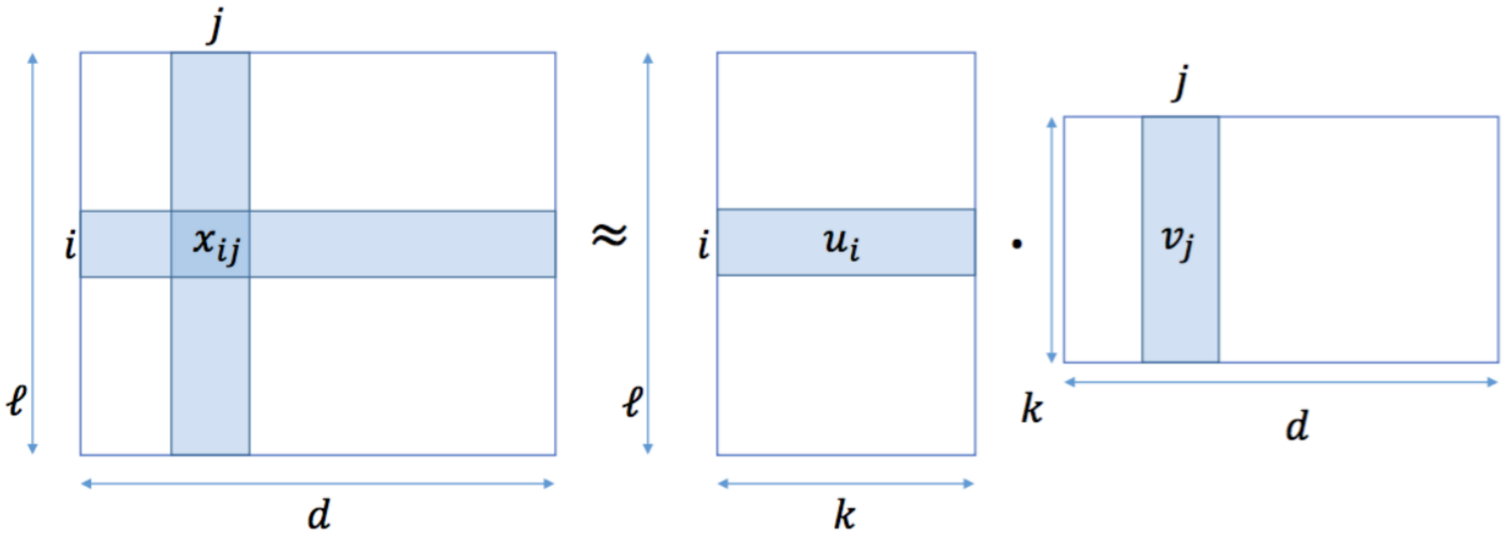
$$\mathbf{v}_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матричные разложения

Постановка задачи

- В задаче матричного разложения требуется приблизить матрицу произведением двух других, где матрицы U и V задают новое признаковое описание объектов и изначальных признаков.

$$X_{l,n} \approx U_{l,k} \cdot V_{k,n}^T$$



Постановка задачи

- Формально задачу можно свести к поиску минимума:

$$\|X - U \cdot V^T\| \to \min$$

- Если использовать норму Фробениуса, то задача записывается следующим образом:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \qquad \sum_{i,j} (x_{ij} - \langle u_i, v_j \rangle)^2 \to \min$$

- Где u_i — новое описание объекта i, а v_j — новое описание признака j.

SVD разложение

Сингулярное разложение — это способ представить некоторую исходную матрицу в виде произведения трех других

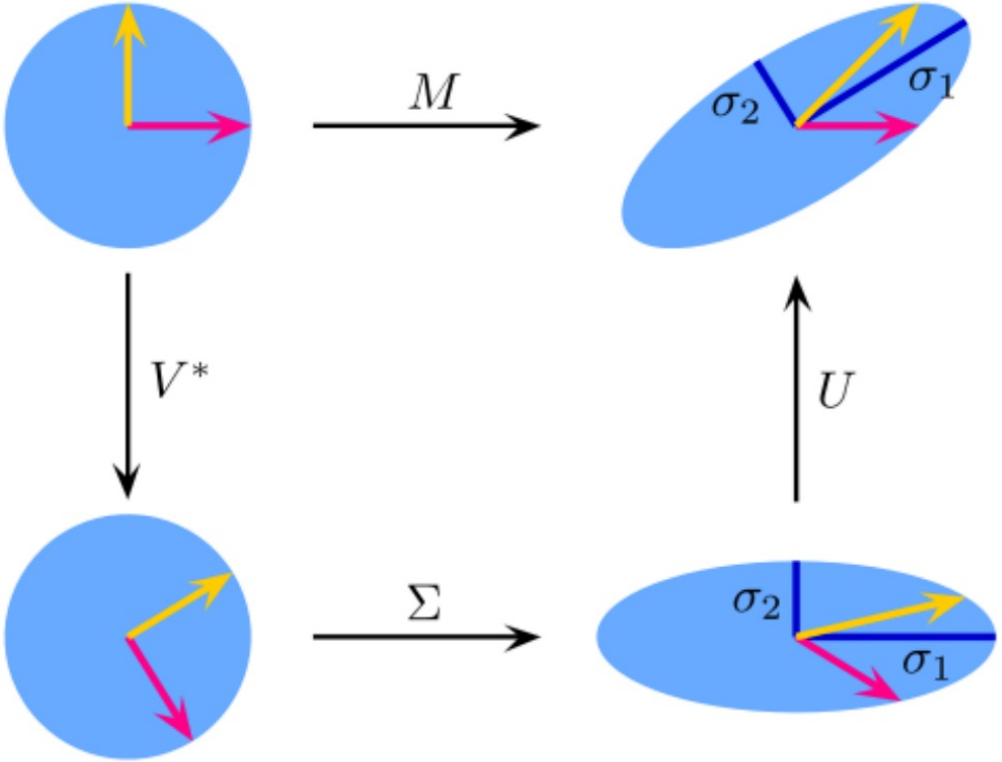
$$X = U\Sigma V^T$$

где U — ортогональная матрица, Σ — диагональная матрица, V — ортогональная матрица

SVD разложение. Геометрическая интерпретация

Если рассматривать матрицу M как задающую некоторое отображение, то оно раскладывается на составляющие:

1. сначала пространство поворачивают
2. потом растягивают вдоль осей координат
3. затем снова поворачивают (говоря более точно, здесь могут быть не только повороты, но и вращения некоторых осей, но в упрощённом виде это выглядит так).



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

SVD разложение

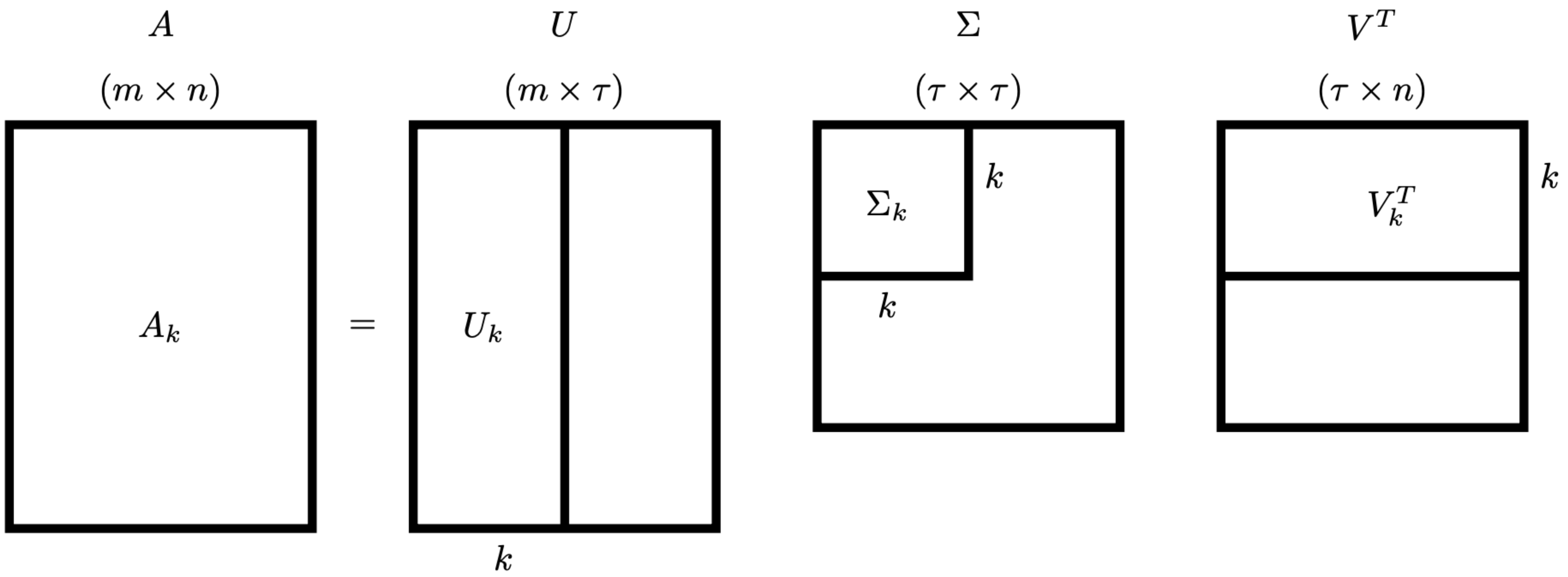
Сингулярное разложение матриц может быть полезно для рассматриваемой задачи. Можно рассмотреть сингулярное разложение матрицы X:

$$X = \tilde{U}\Sigma\tilde{V}^T$$

Теперь у каждой матрицы можно взять какую-то часть: от матрицы U первые k столбцов, от матрицы Σ — квадрат размера k × k, от матрицы V - первые k строк.

Таким образом, определяются усеченные матрицы сингулярного разложения.

SVD разложение. Усечение



SVD разложение

Если в задаче матричного разложения взять в качестве искомых матриц

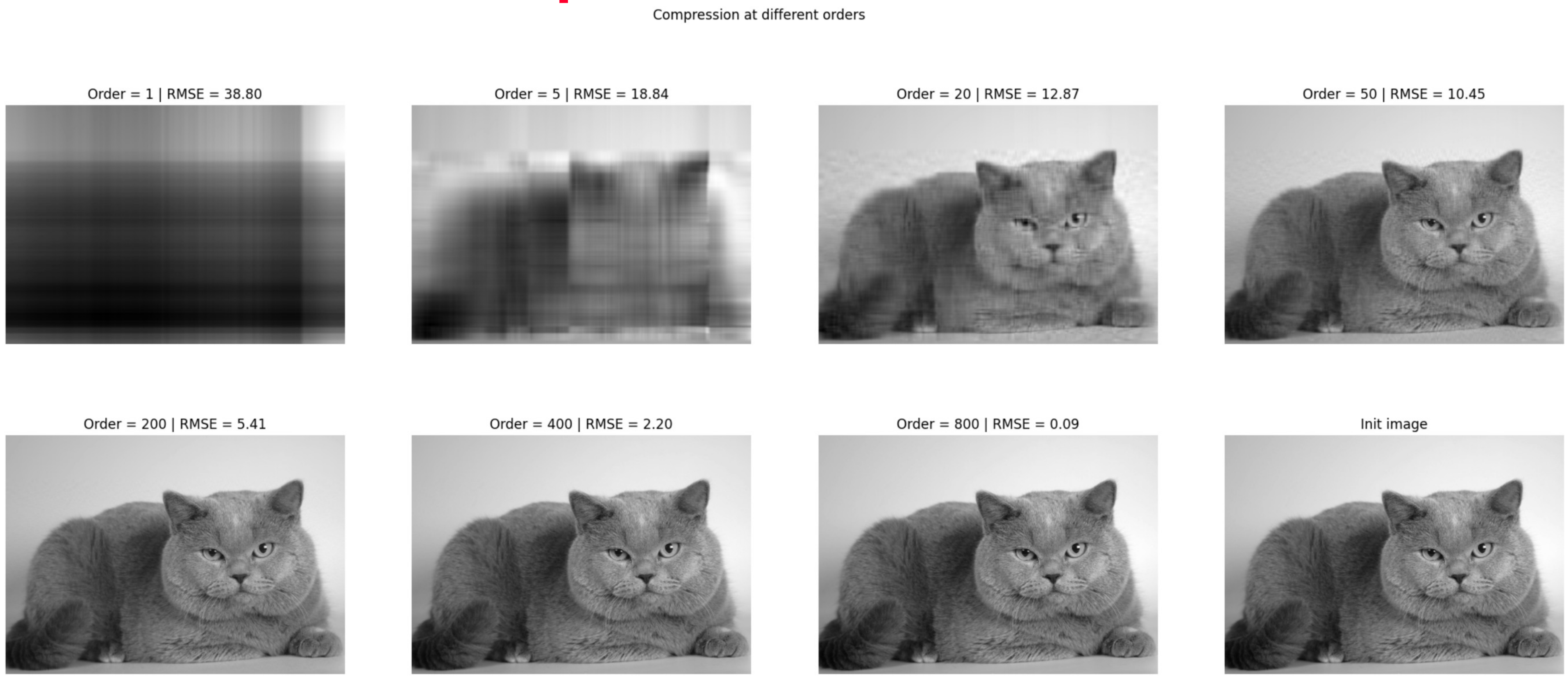
$$U = \tilde{U}_k \Sigma_k, \quad V = \tilde{V}_k$$

то это будет решением оптимизационной задачи, которое даст наилучшее приближение исходной матрицы по норме Фробениуса. При этом в качестве искомых матриц можно использовать другие. Это указывает на неоднозначность решения задачи матричного разложения.

$$U = \tilde{U}_k, \quad V = \tilde{V}_k \Sigma_k$$

$$U = \tilde{U}_k \sqrt{\Sigma_k}, \quad V = \tilde{V}_k \sqrt{\Sigma_k}.$$

Сжатие изображений на базе SVD



Применение матричных разложений

- Понижение размерности
- Заполнение пропусков в матрицах
- Рекомендательные системы
- Профилирование
- Анализ текстов
- Широко в науке…
- И другие…

Что мы узнали

- Разобрали матричную терминологию: определитель, ранг, обратная матрица
- Рассмотрели работу со СЛАУ
- Обсудили вопросы обусловленности СЛАУ и матриц
- Определили понятия собственных векторов и значений
- Детально рассмотрели механизм разложения матриц и рассмотрели наиболее актуальное в анализе данных – SVD разложение

Полезные ссылки

- https://www.cis.upenn.edu/~jean/math-deep.pdf
- https://mml-book.github.io/
- https://youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab&si=PCfYtyqnveHtF2My