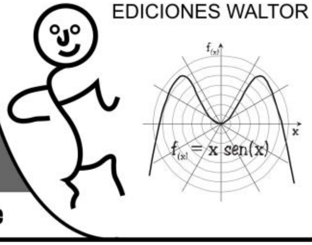
349358702 Expresiones Algebraicas Doc ejercicios resueltos

Matemática I (Universidad Nacional de Piura)

ACADEMIA PREUNIVERSITARIA
NUEVA GENERACIÓN
EDICIONES WALTOR
L. Espinar 511. 4to.Piso. ☎ 327037.Chimbote



PRÁCTICA DE ÁLGEBRA

Tema: Expresiones Algebraicas

Profesor: Walter Rogger Torres Iparraguirre

APRENDIZAJE ESPERADO:

- Reconoce una expresión algebraica entera como un polinomio
- Establece las relaciones con términos semejantes
- Elabora los cálculos pertinentes referidos a grados de polinomios
- Aplica las propiedades respecto a los polinomios especiales.

COMENTARIO PREVIO:

En este capitulo vamos a indicar algunos conceptos matemáticos, tales como el de variables, constante y algunas notaciones que utilizaremos posteriormente, en esta parte también reduciremos términos semejantes y encontraremos grados de polinomios, indicando también que los polinomios representan uno de los entes matemáticos más importantes en la teoría del álgebra su aplicación se extiende hasta la teoría de funciones e inclusive en las e ecuaciones

CONTENIDO TEÓRICO:

EXPRESIÓN ALGEBRÁICA

CONSTANTE

Son símbolos que representan a una cantidad definida, es decir su valor es único, (fijo)

Si dicho valor está determinado se le da una representación numérica por ejemplo: $4\ ;\ \sqrt{5}\ ;\ \pi$ … etc.

Cuando su valor no está determinado, se le puede dar una representación literal. A una constante representada por una letra se le da el nombre de *parámetro*

VARIABLES:

Es un símbolo utilizado para representar a un elemento cualquiera de algún conjunto. Es decir, su valor no es fijo, puede tomar cualquier valor del conjunto que le sea asignado. Las variables llamadas también indeterminadas, tienen en general representación literal, por ejemplo podemos usar las letras x , y , z, etc .

Con las constantes y variables se componen a las expresiones matemáticas, al ser ligadas por operaciones matemáticas

Ejemplos:

- $5x + 3y^2 + sen(x + \pi)$
- $Log2 + 3x$

En una expresión matemática las variables y constantes se diferencian al usar la notación matemática, lo cual consiste en indicar los símbolos que representan a las variables dentro de un paréntesis

Ejemplo

- $P(x;y) = 3x + 2by^4 + 2ax^3y^2$

Las variables son x; y
a y b son las constantes

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es una combinación de constantes y variables en cantidades finitas donde solo intervienen las seis operaciones fundamentales suma, resta, multiplicación, división potenciación y radicación, sin variables en los exponentes.

Nota:

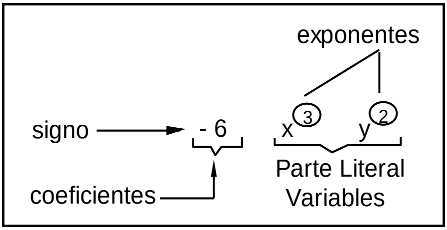
Cualquier expresión que no cumpla con los requisitos mencionados se denomina expresión no algebraica o trascendente.

Ejemplos

- $2^x + \log x$
- $1 + x^2 + x^3 + x^4 \cdots$

TÉRMINO ALGEBRAICO:

Es la mínima expresión algebraica en la que sus elementos se encuentran ligados por las diferentes operaciones aritméticas, excepto la adición y sustracción. Sus partes se indican en el siguiente esquema.



TERMINOS SEMEJANTES:

Son aquellos que tienen la misma parte literal.
Dos o más términos se pueden sumar o restar sólo si son semejantes, para lo cual se suman o restan los coeficientes y se escriben la misma parte literal.

Ejemplos:

- $3x^2\ ;\ 4x^2\ ;\ x^2$
- $2y\ ;\ 3y\ ;\ \sqrt{5}y$
- $7xy^2\ ;\ -xy^2\ ;\ 3xy^2$

Nota: $7xy^2\ ;\ -xy^2\ ;\ 3xy^2$ son semejantes y se pueden reducir a: $9xy^2$

Aplicación:

Si A y B son términos semejantes, hallar (m + n)

$$A = 3x^{m+2}y^{11} \quad ; \quad B = 5x^{10}y^{2n-1}$$

Resolución

Igualamos exponentes correspondientes a cada variable

$$m + 2 = 10 \qquad 2n - 1 = 11$$

$$\boxed{m = 8} \ \boxed{n = 6}$$

$$\boxed{m + n = 14}$$

CLASIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRÁICAS:

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar según la naturaleza de sus exponentes o por el número de sus términos.

DE ACUERDO A SU FORMA	RACIONALES	ENTERAS	Todos los exponentes de sus variables son números naturales Ejemplos • $7a^2b + 2xy^5 - 4m^3n^4$ • $\frac{x+2}{3} + 5xy$ • $\frac{x+1}{3} - \sqrt{2x} + 0{,}8y^2$
		FRACCIONARIAS	Si una o más variables están afectadas por un exponente que pertenezca a los enteros negativos o aparezca como denominador • $7a^{-2}b + 2xy^5 - 4m^3n^4$ • $\frac{x+2}{y} + 5xy$
	IRRACIONALES		Si al menos una de sus variables está afectada por un exponente fraccionario o decimal • $a^{\frac{1}{2}}bc + 2xy^5 - 4m^3n^4$ • $\frac{x+2}{y} + \sqrt{5xy} - x^{0,5}$

GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

GRADO

Es aquel exponente numérico (no variable) racional positivo o negativo que afecta a una variable tomada como base.

Clases de Grado:

a) Grado Relativo (G.R.): Con respecto a una de las variables

b) Grado Absoluto (G.A.): Con respecto a todas sus variables

GRADOS DE UN MONOMIO

a) Grado Relativo:

Se refiere a una de sus variables de la expresión y está determinada por el mayor exponente que posee dicha variable; para ello la expresión debe estar previamente reducida o simplificada.

Así por ejemplo en el monomio

$M(x,y,z) = 4x^2y^5z^8$. Se concluye que:

- Grado relativo de x es 2 $\Rightarrow$ $\boxed{GR\,(x) = 2}$
- Grado relativo de y es 5 $\Rightarrow$ $\boxed{GR\,(y) = 5}$
- Grado relativo de z es 8 $\Rightarrow$ $\boxed{GR(z) = 8}$

b) Grado Absoluto:

Se calcula sumando algebraicamente los exponentes de sus variables.

Así por ejemplo el monomio:

$M(x;y) = 3x^5y^7z^4$

Se concluye que:

- Los exponentes a sumar son sólo de "x" e "y" , el exponente de "z" no se toma en cuenta por ser un monomio de variable (x ;y)
- Luego se tiene que el monomio es de grado (5 + 7)
  - $\Rightarrow$ $\boxed{GA = 12}$

GRADO DE UN POLINOMIO:

a) Grado Relativo:

Se refiere a una de sus variables y está determinado por el mayor exponente que afecta a dicha letra en todo el polinomio.

Así por ejemplo el polinomio:

$$P(x;y) = 3x^2y^5 - 4x^2y^3 + 2x^7y^2$$

Se concluye que:

$$P(x;y) = 3x^2y^{\boxed{5}} - 4x^2y^3 + 2x^{\textcircled{7}}y^2$$

- El mayor exponente de "x" es 7 $\Rightarrow$ $\boxed{GR(x) = 7}$
- El mayor exponente de "y" es 5 $\Rightarrow$ $\boxed{GR(y) = 5}$

b) Grado Absoluto:

Se calcula indicando el término de máximo grado. Así por ejemplo en el polinomio:

$P(x;y;z) = 2x^3y^7z^5 - x^9yz^4 + 7x^3y^6z^7$

Se concluye que:

$$P(x;y;z) = 2\overbrace{x^3y^7z^5}^{15} - \overbrace{x^9yz^4}^{14} + 7\overbrace{x^3y^6z^7}^{16}$$

- La suma de todos los exponentes de cada término es respectivamente 15 ; 14 y 16
- Luego el mayor exponente (grado absoluto del término) es el grado absoluto del polinomio.
- $\boxed{GA = 16}$

GRADOS RESULTANTES EN OPERACIONES CON POLINOMIOS:

En el siguiente cuadro se muestra como obtener los grados de las diferentes operaciones:

RECUERDA:

El grado de una expresión es el mayor exponente

OPERACIÓN	GRADO RESULTANTE
MULTIPLICACIÓN	- Se suman los grados de los factores **Ejemplo** Hallar el grado resultante de $M=(x^4+1)(x^6+x^5-2x)(1+x^8)$ **Resolución** Identificamos el grado en cada factor y luego sumamos $M=\underbrace{(x^4+1)}_{4}\underbrace{(x^6+x^5-2x)}_{6}\underbrace{(1+x^8)}_{8}$ Grado = 4 + 6 + 8 = 18
DIVISIÓN	- Se resta el grado del dividendo menos el grado del divisor **Ejemplo:** Hallar el grado resultante de $M=\dfrac{(x^4+6x^8-1)}{x^3-2}$ **Resolución** Identificamos el grado en cada factor y luego restamos $M=\dfrac{\overbrace{(x^4+6x^8-1)}^{8}}{\underbrace{x^3-2}_{3}}$; Grado = 8 – 3 = 5
POTENCIACIÓN	- Se multiplica el grado de la base por el exponente **Ejemplo:** Hallar el grado resultante de $M=\left(x^4+x^3-x^7+1\right)^5$ **Resolución** Identificamos el grado de la base y luego multiplicamos con el exponente $M=\left(\underbrace{x^4+x^3-x^7+1}_{7}\right)^5$ Grado = 7(5) = 35
RADICACIÓN	- Se divide el grado del radicando entre el índice del radical. **Ejemplo** Hallar el grado resultante de $M=\sqrt[3]{x^8+x^{24}-2+x^7}$ **Resolución** Identificamos el grado del radicando y luego dividimos con el exponente $M=\sqrt[3]{\underbrace{x^8+x^{24}-2+x^7}_{24}}$ Grado= 24/3 = 8

POLINOMIOS ESPECIALES

Son aquellos polinomios que cumplen ciertas características independientes, los cuales se necesita conocer para las aplicaciones respectivas en situaciones problemáticas

POLINOMIO DE UNA VARIABLE

Generalmente se utiliza la letra x para indicar la variable, donde el mayor exponente de la variable es llamado grado del polinomio.

Ejemplos

$P(x)=3x+6$ ⇒ Polinomio de primer grado

$Q(x)=x^2+3x-2$ ⇒ Polinomio de segundo grado

$R(x)=x^3-2x+1$ ⇒ Polinomio de tercer grado

FORMAS GENERALES:

Polinomio de primer grado (polinomio lineal)

$$\boxed{P(x)=ax+b \quad \Leftrightarrow a\neq 0}$$

Polinomio de segundo grado (polinomio cuadrático)

$$\boxed{P(x)=ax^2+bx+c}$$

POLINOMIO MONICO:

Es el polinomio en donde su coeficiente principal es la unidad.

Ejemplo

- x^3+2x+1 , Es un polinomio de grado 3 y su coeficiente es 1, por lo tanto **es un polinomio mónico**
- x^3+2x^4-3
  Es un polinomio de grado 4 y su coeficiente principal es 2, por lo tanto **no es un polinomio mónico**

Aplicación:

Si el siguiente polinomio $(m-2)x^2+3x-1$ es lineal hallar “m”

Resolución

Para que el polinomio sea lineal el coeficiente cuadrático debe ser cero de esta manera solo nos quedará el polinomio lineal

$$\underbrace{(m-2)}_{cero}x^2+3x-1$$

$$m-2=0\Rightarrow \boxed{m=2}$$

Aplicación:
Si el siguiente polinomio $(m^2-3)x^3+x^2-x+12$ es mónico. Hallar "m"

Resolución:

Para que el polinomio sea mónico el coeficiente cúbico (principal) debe ser uno

$$\underbrace{(m^2-3)}_{\text{uno}}x^3+x^2-x+12$$

$$m^2-3=1 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

POLINOMIO HOMOGÉNEO:

Es aquel cuyos términos están constituidos por más de una variable y presentan el mismo grado.

- $P(x;y)=2x^3y^7+5x^8y^2-7x^9y+x^6y^4$

Es un polinomio homogéneo de grado 10

$$P(x;y)=2\overbrace{x^3y^7}^{10}+5\overbrace{x^8y^2}^{10}-7\overbrace{x^9y}^{10}+\overbrace{x^6y^4}^{10}$$

Aplicación:
Hallar "m" sabiendo que el siguiente polinomio es homogéneo

$$P(x;y)=2x^5y^{12}+5x^my^{13}-7x^9y^8+x^{16}y$$

Resolución

Por ser polinomio homogéneo la suma del grado de cada término son iguales, en este caso es 17

$$P(x;y)=2\overbrace{x^5y^{12}}^{17}+5\overbrace{x^my^{13}}^{17}-7\overbrace{x^9y^8}^{17}+\overbrace{x^{16}y}^{17}$$

$$m+13=17$$

$$\boxed{m=4}$$

POLINOMIO ORDENADO:

Cuando los exponentes de la variable que se toma como referencia, guardan un cierto orden, ya sea ascendente o descendente.
Así por ejemplo el polinomio $P(x;y)=x^5y^3+x^3y^4-xy^7$ es ordenado en forma decreciente respecto a "x", en forma creciente respecto a "y".

POLINOMIO COMPLETO:

Es el que contiene todos los exponentes de la variable que se toma como referencia, desde el mayor exponente hasta el cero inclusive (éste último se denomina término independiente).

Así por ejemplo $P(x)=2x^3+3x^2+9x-4$ es un polinomio completo y ordenado, de 3er grado el cual tiene cuatro términos, uno más que el grado.

Observación:

- En un polinomio completo se cumple
  NÚMERO DE TÉRMINOS = GRADO + 1
- $P(x;y)=3x^2y+2x^5y^2-2x^6y^2$
  Se lee: Polinomio de variable "x" e "y" o simplemente P de x e y

Aplicación:
El polinomio: $P(x)=x^{a-1}+2x^b-x^{c+2}+abc$ es ordenado y completo de grado 3, hallar el valor del término independiente.

Resolución

Recuerda el término independiente es de grado cero, en este caso el término independiente es a.b.c

$$P(x)=x^{\overbrace{a-1}^{3}}+2x^{\overbrace{b}^{2}}-x^{\overbrace{c+2}^{1}}+\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Término}\\ \text{Independiente}}}{abc}$$

$$a-1=3\Rightarrow\boxed{a=4}\ \wedge\ \boxed{b=2}$$

$$c+2=1\Rightarrow\boxed{c=-1}$$

Luego $\boxed{abc=-8}$

POLINOMIOS IDÉNTICOS:

Son aquellos cuyos términos semejantes poseen el mismo coeficiente.

$P(x)=ax^3+bx^2+c$; $Q(x)=mx^3+nx^2+p$

$$\boxed{P(x)<>Q(x)}$$

$$\boxed{a=m \qquad b=n \qquad c=p}$$

Aplicación:

Hallar (m + n) sabiendo que A (x) < > B (x)

$$A(x)=(m+2)x^2+5x$$

$$B(x)=(2n-1)x\ \ +3x^2$$

$$2n-1=5\Rightarrow n=3\ \Rightarrow \boxed{m+n=4}$$

POLINOMIO EQUIVALENTES:

Son aquellos polinomios que teniendo formas diferentes aceptan iguales valores numéricos para un mismo sistema de valores asignados a sus variables.

Así por ejemplo dado los polinomios:

$P(x;y)=(x+y)^2-(x-y)^2 \quad ; \quad Q(x)=4xy$

Si ambos admiten el mismo valor numérico para cualquier valor de “x” e “y”, entonces serán equivalentes ; veamos.

Hagamos: x = 2 $\wedge$ y = 1

$$P(2;1)=(2+1)^2-(2-1)^2=8$$

$$Q(2;1)=4(2)(1)=8$$

Observar que: $P(2;1)=Q(2;1)$

En consecuencia P(x, y) $\wedge$ Q(x; y), son polinomios equivalentes y se les podrá cualquier representar así:

$$\boxed{P(x,y)<>Q(x;y)}$$

POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO:

Es aquel que tiene sus coeficientes todos nulos. Su valor es cero para cualquier valor de la variable.

Ejemplo: Si el polinomio $P(x)=ax^3+bx+c$ es idénticamente nulo, se cumplirá:

$$\boxed{a=b=c=0}$$

Y se podrá representar así. $P(x)\equiv 0$

Aplicación:

Hallar (2b – a) si el siguiente polinomio es idénticamente nulo: $P(x)=(a-3)x^2+(2-b)x$

Resolución

Anulamos los coeficientes, igualando a cero

$$P(x)=\underbrace{(a-3)}_{0}x^2+\underbrace{(2-b)}_{0}x$$

$a-3=0\Rightarrow a=3$

$2-b=0\Rightarrow b=2$

$$\boxed{2b-a=1}$$

VALOR NUMÉRICO:

Es el número real que resulta al reemplazar valores dados a las variables en un determinado polinomio y efectuar las operaciones indicadas.

Aplicación 1: Hallar el valor numérico de la expresión: $M=\dfrac{a^b-b^a}{a+b}$: para a = 3 y b = 2

Resolución

Reemplazamos los valores de “a” y “b”, obtenemos: $M=\dfrac{3^2-2^3}{3+2}=\dfrac{9-8}{5}=\dfrac{1}{5}$

$$\therefore \boxed{M=\frac{1}{5}}$$

Aplicación 2: Si: $E=\sqrt[5]{x^x+y^y+z^z}$

Hallar el valor numérico de “E”, para: x = 1, y = 2, z = 3

Resolución

Reemplazando los valores dados en “E”, obtenemos: $E=\sqrt[5]{1^1+2^2+3^3}$

$E=\sqrt[5]{1+4+27} \quad \Rightarrow \quad E=\sqrt[5]{32}$

Pero: $\boxed{32=2^5} \quad \Rightarrow \quad E=\sqrt[5]{2^5}=2$

$$\therefore \boxed{E=2}$$

Aplicación 3: Hallar el V. N. de $3y\sqrt{x}+2x\sqrt{y}$, cuando x = 4; y = 9

Resolución

$$3(9)\sqrt{4}+2(4)\sqrt{9}$$

$$27(2)+8(3)=78$$

CAMBIO DE VARIABLE:

Las variables de un polinomio pueden ser sustituidas por cualquier otra variable, quedando un nuevo polinomio en función de la nueva variable

Aplicación: Dado el polinomio: $f(x-4) = 10x - 7$, Determinar $f(x)$

Resolución

$f(x-4) = 10x - 7$

Tenemos que eliminar (– 4) con (+ 4) en ambos miembros

$f(x - 4 \mathbf{+ 4}) = 10(x \mathbf{+ 4}) - 7$

$f(x) = 10x + 40 - 7 \rightarrow \boxed{f(x) = 10x + 33}$

SUMA DE COEFICIENTES

Para encontrar la suma de coeficientes de un polinomio, se reemplaza la variable del polinomio P(x) por la unidad. Veamos:
Dado P(x), asignamos x = 1 obteniendo:

$$\boxed{P(1) \Rightarrow \text{Suma de coeficientes de } P(x)}$$

TÉRMINO INDEPENDIENTE

Para determinar la suma de coeficientes de un polinomio, se reemplaza la variable del polinomio P(x) por cero. Veamos:
Dado P(x), asignamos x = 0 obteniendo:

$$\boxed{P(0) \Rightarrow \text{Término independiente de } P(x)}$$

Aplicación: Hallar la suma de coeficientes y el término independiente del siguiente polinomio

$$P(x)=(x-1)^{20}+(x+2)^3-7$$

Resolución

Calculando la suma de coeficientes $P(1)$:

$$P(1)=(x-2)^{20}+(x+2)^3-7$$

$$P(1)=(1-1)^{20}+(1+2)^3-7$$

$$P(1)=(0)^{20}+(3)^3-7 \Rightarrow P(1)=0+27-7$$

$$\boxed{P(1)=20}$$

Calculando el término independiente $P(0)$:

$$P(0)=(0-1)^{20}+(0+2)^3-7$$

$$P(0)=(-1)^{20}+(2)^3-7$$

$$P(0)=1+8-7 \quad \Rightarrow \boxed{P(0)=2}$$

POLINOMIO CONSTANTE

Es aquel polinomio (de uno o más variables) de la forma $\boxed{P(x)=k}$, donde k es un número real.

Si $k \neq 0$, entonces definimos el grado del polinomio constante como cero

Aplicación: Si P(x) = 3, calcular P (5) + P (2)

Resolución

Como es un polinomio constante el valor que asuma "x" siempre será 3

$$P(5)+P(2)=3+3$$

$$\boxed{P(5)+P(2)=6}$$

PROBLEMAS EXPLICATIVOS

01. La expresión $\sqrt[n]{x.x^2.x^3.....x^n}$ es de 5to grado, el valor de "n"

A) 7   B) 8   C) 6
D) 5   E) 9

Resolución

Por condición del problema se cumple:

$$\sqrt[n]{x.x^2.x^3\cdots\cdots x^n}=x^5$$

Aplicando grado de producto

$$x^{1+2+3+4+\cdots+n}=\left(x^5\right)^n$$

Recordando que:

$$\boxed{1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

Luego:

$$x^{\frac{n(n+1)}{2}}=x^{5n}$$

Aplicamos ecuaciones exponenciales

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5n \qquad \Rightarrow \quad n^2 + n = 10n$$

$$n^2 = 9n \qquad \Rightarrow \quad \boxed{n = 9}$$

Clave E

02. El grado absoluto de:

$$P(x,y) = (x+y)^7(x+y^2)^7(x+y^3)^7(x+y^4)^7...(x+y^{20})^7$$

Es:

A) 1436 B) 1470 C) 1346
D) 1634 E) 1463.

Resolución:

Arreglando la expresión queda:

$$P(x,y) = \left[(x+y)(x+y^2)(x+y^3)(x+y^4)...(x+y^{20})\right]^7$$

Los grados del producto se suman

$$P(x,y) = \left[\underbrace{(x+y)}_{1}\underbrace{(x+y^2)}_{2}\underbrace{(x+y^3)}_{3}\underbrace{(x+y^4)}_{4}\underbrace{...}_{...}\underbrace{(x+y^{20})}_{20}\right]^7$$

$$(1+2+3+4+ \quad \cdots \quad +20)(7) = \left[\frac{20(21)}{2}\right](7)$$

Luego se tiene: 210(7) = 1470

Clave B

03. Indique el valor de "n" para que el monomio:

$$R = \frac{\sqrt{y^{2n}\sqrt[3]{y^{n-1}}}}{\sqrt[4]{y^{2n-2}}}$$, sea de 1er grado

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 9

Resolución

Transformando se tiene:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{\left(y^{2n}\right)^3 .y^{n-1}}}}{\sqrt[4]{y^{2(n-1)}}} = y^{1\rightarrow grado}$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{y^{6n}.y^{n-1}}}}{\sqrt{y^{n-1}}} = y$$

Aplicando propiedades de teoría de exponentes

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{y^{6n}.y^{n-1}}}{y^{(n-1)}}} = y \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{y^{7n-1}}}{y^{n-1}} = y^2$$

$$y^{\frac{7n-1}{3}} = y^2.y^{n-1}$$

$$y^{\frac{7n-1}{3}} = y^{n+1} \rightarrow 7n-1 = 3n+3$$

$$\boxed{n = 1}$$

Clave A

04. Calcular la suma de coeficientes del polinomio completo y ordenado en forma decreciente.

$$P(x) = a^2x^{n^2-1} + bx^{a-5} + nx^{n+b-1} + nx^{d-2}$$

A) 53 B) 49 C) 45
D) 35 E) 64

Resolución

Suma de coeficientes $a^2 + b + 2n$

Por condición del problema

$$P(x) = a^2x^{\overbrace{n^2-1}^{3}} + bx^{\overbrace{a-5}^{2}} + nx^{\overbrace{n+b-1}^{1}} + nx^{\overbrace{d-2}^{0}}$$

$n+b-1 = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{n+b = 2}$ ......(1)

$a-5 = 2 \qquad \Rightarrow \boxed{a = 7}$ ......(2)

$n^2-1 = 3 \qquad \Rightarrow \boxed{n = 2}$ ......(3)

Reemplazando (3) en (1)

$2+b = 2 \rightarrow b = 0$

$a^2+b+2n = 7^2+0+2(2)$

$\boxed{a^2+b+2n = 53}$

Clave A

05. Si el polinomio es homogéneo:

$$P(x,y) = x^{n^2-2n}y^{m+2} + x^{n-m}y^{3m+5} + y^{n^2+m-8}$$

Calcular: m . n

A) 5 B) 10 C) 14

D) 35   E) 45

Resolución

Igualamos el grado de cada término (polinomio homogéneo)

$$\underbrace{n^2-2n+m+2}_{I}=\underbrace{n+2m+5}_{II}=\underbrace{n^2+m-8}_{III}$$

Igualamos (I) y (III)

$$\cancel{n^2}-2n+\cancel{m}+2=\cancel{n^2}+\cancel{m}-8$$

$$\boxed{n=5}$$

Reemplazamos el valor de n en (II) y (III)

$$n+2m+5=n^2+m-8$$

$$5+2m+5=5^2+m-8$$

$$2m+10=m+17$$

$$\boxed{m=7}$$

Luego multiplicamos m y n: $m\ .\ n\ =\ 35$

Clave D

06. Hallar el grado del polinomio homogéneo

$$P(x;y)=x^{2^n}+y^{n^2}+x^{2n}y^{2n}$$

A) 4   B) 16   C) 64
D) 256   E) 32

Resolución

Por ser polinomio homogéneo igualamos los exponentes

$$GA=2^n=n^2=4n$$

$$n^2=4n\ \Rightarrow\ \frac{n^2}{n}=4\ \Rightarrow\ n=4$$

Luego el grado es: $\boxed{2^n=2^4=16}$

Clave B

07. Si la expresión:

$$P(x)=(2b+8)x^3+(a^2-9)x^2+(2a+b)x+2ab$$

Es una función lineal, hallar P (- 12)

A) 48   B) 0   C) 12
D) - 48   E) 2

Resolución

Para que la función sea lineal

$$\boxed{P(x)=(2a+b)x+2ab}$$

Por la aseveración anterior, se concluye:

$$P(x)=\underbrace{(2b+8)}_{0}x^3+\underbrace{(a^2-9)}_{0}x^2+\underbrace{(2a+b)x+2ab}_{\text{Función lineal}}$$

$$2b+8=0\rightarrow b=-4$$

$$a^2-9=0\rightarrow a=3$$

Reemplazando:

$$P(x)=\left[2(3)+(-4)\right]x\ \ +2(3)(-4)$$

La función lineal queda ⇒ $\boxed{P(x)=2x-24}$

Pero como en el problema nos piden $P(-12)$ reemplazamos

$$P(-12)=2(-12)-24\ \Rightarrow \boxed{P(-12)=-48}$$

Clave D

08. Si: $F(2x+1)=6x-10;\quad F(G(x)-3)=3x-4$

halle el resultado de $F(G(-6))$

A) –10   B) – 13   C) –16
D) 16   E) 12

Resolución

Determinamos F(x), para luego Calcular G(x)

$$F(2x+1)=6x-10$$

$$F(2x+1)=3(2x+1)-13$$

Hacemos el cambio: 2x + 1 = x, obteniéndose:

$$\boxed{F(x)=3x-13}\ \ldots\ldots\ldots\ (\ \alpha\ )$$

Reemplazando en (α), x = G(x) – 3:

$$\underbrace{F(G(x)-3)}_{\downarrow}=3x-4$$

$$3(G(x)-3)-13)=3x-4$$

$$3G(x)-9-13=3x-4$$

$$3G(x)-22=3x-4$$

$$G(x)=\frac{3x+18}{3} \Rightarrow \boxed{G(x)=x+6}$$

Piden $F(G(-6))$, empezamos desde la parte interna reemplazando

G (-6) = -6 + 6 = 0

$F(G(-6))=$ $F(0)=3(0)-13$

$$\boxed{F(G(-6))=-13}$$

Clave B

09. Calcular F (1); si, F(x) + G(x) = 5x – 8

F(x) – G(x) = 7x + 6

A) 5 B) 12 C) –12

D) –7 E) 6

Resolución

Sumando ambas condiciones se tiene

F(x) + G(x) = 5x – 8

F(x) – G(x) = 7x + 6

2F(x) = 12x – 2 ⇒ $\boxed{F(x) = 6x – 1}$

Reemplazando:

F(1) = 6(1) – 1 ⇒ $\boxed{F(1) = 5}$

Clave A

10. Hallar el valor del coeficiente en el siguiente monomio de GR(x) =15 y GR (y) = 17

$$\left(a^2+b^2\right)^2 x^{a^2-5ab} y^{b^2+5ab}$$

A) 1024 B) 144 C) 1256

D) 1144 E) N.A.

Resolución

GR(x) =15 $\Rightarrow a^2-5ab=15$

GR (y) = 17 $\Rightarrow b^2+5ab=17$

Sumando las ecuaciones del sistema:

$$\boxed{a^2+b^2=32}$$

El coeficiente es: $\left(a^2+b^2\right)^2=32^2$

$$\boxed{\left(a^2+b^2\right)^2=1024}$$

Clave A

11. En el siguiente polinomio:

$$P(x;y)=2x^{3m+3}y^{n-2}+\sqrt{2}x^{3m-1}y^{n+4}$$

GR(x) = 21 y G.A.= 24,

Hallar el valor de: $\frac{m+n}{m-n}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Identificamos el grado absoluto y relativo

$$P(x;y)=\underbrace{2x^{\overbrace{3m+3}^{21}}y^{n-2}}_{3m+n+1}+\underbrace{\sqrt{2}x^{3m-1}y^{n+4}}_{\substack{3m+n+3\\ \uparrow}}$$

Dato: GR(x) = 3m+ 3 = 21

$$3m+3=21 \quad \Rightarrow m=6$$

Grado absoluto**:** 3m + n + 3 > 3m+ n + 1 (el mayor es el GA)

$3m+n+3=24 \Rightarrow n=3$

Reemplazando: $\boxed{\frac{m+n}{m-n}=\frac{6+3}{6-3}=3}$

:

Clave C

12. Dados $A=x^{2m-1}y^{3n}$; $B=x^{p+2}y^{6q}$

$A+B=x^5.y^6$. Calcular (m –n)(p + q)

A) 9 B) 4 C) 6

D) 8 E) 10

Resolución

La expresión que observamos solo se puede realizar con términos semejantes, donde se cumple que: $2m-1=p+2=5$

$3n=6q=6$

Luego: $m=3$; $p=3$; $n=2$; $q=1$

Reemplazando:

$$(m-n)(p+q)=(3-2)(3+1)$$

$$(m-n)(p+q)=4$$

Clave B

13. Si GR(x) = 15, hallar el grado absoluto del siguiente monomio

$$M(x;y)=(3a+1)x^{a^2-1}y^{a+2}z^3$$

A) 24 B) 23 C) 22
D) 21 E) 20

Resolución

$$M(x;y)=(3a+1)\underbrace{x^{\overbrace{a^2-1}^{15}}y^{a+2}}_{GA}z^3$$

Notamos que el polinomio es de variable x e y , no incluye a “z” por lo tanto lo solicitado es:

$$GA=a^2+a+1\ \ldots\ (\text{I})$$

Además:

GR(x) = 15 $\Rightarrow\ a^2-1=15\ \Rightarrow\ a=4$

Luego reemplazamos a = 4 en (I):

$$GA=4^2+4+1\Rightarrow\boxed{GA=21}$$

Clave D

14. Si el grado absoluto de M(x; y; z) es (a + 18) hallar el valor del coeficiente

$$M(x,y,z)=(2a^2-2)x^{a-1}y^{a+3}z^{a+4}$$

A) 63 B) 65 C) 67
D) 70 E) 72

Resolución

Ubicamos el coeficiente y el grado absoluto

$$M(x,y,z)=\underbrace{(2a^2-2)}_{\text{Coef.}}x^{\overbrace{a-1}^{\text{Grado}}}y^{a+3}z^{a+4}$$

Reemplazando:

GA = $3a+6=a+18$

$2a=12\qquad\Rightarrow\ a=6$

Ahora, podemos determinar el coeficiente:

$$(2a^2-2)=2(6)^2-2\ \Rightarrow\boxed{Coef.=70}$$

Clave D

15. Se tiene $P(P(P(x)))=27x+52$, calcular P (8), sabiendo que P(x) es una función lineal

A) 64 B) 32 C) 27
D) 30 E) 28

Resolución

Por propiedad

$$\boxed{\underbrace{P(P(P(P\ \cdots(P(x))}_{n\ \ \text{veces}}\ \cdots)))=a^nx+\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)b}$$

Sea la función lineal $\boxed{P(x)=ax+b}$ *

Por dato $P(P(P(x)))=27x+52$ y aplicando la propiedad

$$\underbrace{P(P(P(x)))}_{3}=27x+52$$

$$P(P(P(x)))=a^3x+\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right)b=27x+52$$

Comparando: $a^3=27\ \Rightarrow\ a=3$

Reemplazando: $\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right)b=52\Rightarrow\ b=4$

Luego la función lineal: $\boxed{P(x)=3x+4}$

Piden P(8) = 3(8) + 4 ⇒ $\boxed{P(8) = 28}$

Clave E

PRÁCTICA DE CLASE

01. Hallar el grado absoluto del siguiente polinomio

$$P(x^5;y^3)=3x^{15}y^3-7x^{25}y^{21}+x^{20}y^9$$

A) 12 B) 48 C) 46
D) 29 E)18

02. Si P(x ; y) = $3abx^2y^6$

I. El grado de P(x; y) es 8
II. El grado relativo a “x” es 6
III. El coeficiente es 3a

IV. El grado relativo a "y" es 2
De lo anterior podemos decir que:

A) Todas son ciertas
B) Son incorrectas II y III
C) Son incorrectas II y IV
D) Solo I es correcta
E) Todas son incorrectas

03. Al sumar los términos semejantes
$P(x;y)=(a+b)x^{2a-1}y^{3b+7}$, $Q(x;y)=abx^{a+3}y^{2b+13}$

Se obtiene: $R(x;y)=px^{q}y^{r}$, calcule p + q + r

A) 64   B) 66   C) 68
D) 72   E) 54.

04. Calcular m – n en el monomio:

$$\frac{x^{m+1}y^{n-2}}{x^{n-1}y^{2-m}}$$ **;** Si GR(x) = 8, GR(y) = 6

A) 3   B) 4   C) 5
D) 6   E) 7

05. Si $a=\sqrt{3+\sqrt{2}}$, $b=3\sqrt{3=\sqrt{2}}$, $c=\sqrt{6}$.
Determine el valor numérico de:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+\left(a^2-b^2+\sqrt{2}\,c^2\right)^2$$

A) 64   B) 66   C) 68
D) 72   E) 0

06. Si la expresión se reduce a monomio

$$\left(a+b^2\right)\sqrt[6]{x^{a-b}}-ab\sqrt[4]{x^{a+b}}+(b-a)x$$

Este monomio es:

A) 7x   B) 5x   C) 6x
D) 4x   E)x.

07. Dado el polinomio $P(x+3)=x^2-8x+2k$, si el término independiente es 37. Halle la suma de sus coeficientes

A) 22   B) 24   C) 23
D) 27   E) 32

08. Si el polinomio

$$P(x;y)=3x^{\frac{3}{n-4}}y^{b}+4x^{a}y^{6-n}$$

Se reduce a monomio, calcular el grado absoluto de:

$$Q(x;y)=a^2x^ny^{a+b}-b^2x^{a+n}y^{b+n}$$

A) 11   B) 12   C) 13
D) 14   E) 15.

09. Encontrar el valor de "n" si la expresión es de grado 2

$$M(x)=\frac{\left(\left(\left(x^{n-2}\right)^3x^{2n-3}\right)^2x^4\right)}{\left(\left(x^n\right)^2x^4\right)^2}$$

A) 3   B) 4   C) 12
D) 6   E) N.A.

10. Calcular $P\big(P(-1)+Q(0)\big)$.
Si se tiene que:

$$P(x)=x^{729}+2x^{728}+3x^{727}+4x^{726}+\cdots+730$$
$$Q(x)=x^{41}+x^{40}+x^{39}+x^{38}+\cdots-365$$

A) 365   B) 730   C) 0
D) 1   E) N.A.

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Si $M(a,b,c)=(2x-y)a^3b^8c$ se tiene que:
( ) El coeficiente de M(a; b; c) es 1
( ) Las variables son x; y; a; b ; c
( ) El grado absoluto de M es 11
( ) El grado relativo de "c" es 1
Indique el valor de verdad más adecuado para las expresiones anteriores

A) VFVF   B) VVFF   C) VFFF
D) FFVV   E) FFFV

02. Si T_1 y T_2 son semejantes:

$$T_1 = 4a^{x+2y}b^{13} \; ; \; T_2 = 11a^{15}b^{2x-1}$$

Calcular $(x-y)^2$

A) 7 B) 9 C) 3
D) 16 E) 4

03. Si el grado relativo con respecto a "x" es 10; y el grado relativo respecto a "y" es 8, calcular a . b

$$P(x;y) = 3x^{a+2}y^{b-1} + x^{a+5}y^{b-2}$$

A) 32 B) 42 C) 36
D) 48 E) 45

04. Si el monomio $R(x) = 5(x^{2n})^3 x^{n-1}$ tiene como grado absoluto 20, hallar el valor expresado por n^2

A) 4 B) 16 C) 25
D) 9 E)16

05. Si la expresión se reduce a monomio, hallar el coeficiente final en:

$$P(x;y) = a^b x^{b^a - 1} y^9 - a^2 b x^{24} y^{a^3+1}$$

A) 13 B) 11 C) 12
D) 15 E) 14

06. Si el siguiente polinomio cuadrático $P(x) = (a-3)x^2 + 3x + b - 6$, es mónico y la suma de sus coeficientes es 7, hallar a + b

A) 10 B) 16 C) 19
D) 13 E) 21

07. Si la suma de coeficientes y el término independiente del polinomio P(x - 2) = ax + b son 5 y 3 en ese orden, entonces el valor de P(7) es:

A) 13 B) 15 C) 11
D) 17 E)21

08. Calcular la suma de coeficientes del polinomio:

$$P(x,y) = ax^{a+5} + 3x^a y^b + bx^{b+3}$$,

homogéneo.

A) 14 B) 13 C) 11
D) 10 E) 16

09. Si el polinomio siguiente es idénticamente nulo. Hallar "m –n"

$$P(x,y) = (m+n)xy^2 + 2x^2y - 18xy^2 + (n-m)x^2y$$

A) 4 B) 5 C) 2
D) 3 E) –2

10. Si P(x) = x + 1, calcular: $\dfrac{P(x+1)+P(x-1)}{P(x)}$

A) 6 B) 2 C) 4
D) 5 E) 3

11. Si G [F(2x+ 1)] = 3 [F(3x- 1)] + 2[G(x+1)] –12. Hallar G (3), siendo F(5) = 3

A) 4 B) 1 C) 2
D) 3 E) 6

12. Hallar el número de variables que debe tener el monomio M = $a.b^2c^3d^4e^5$… para que su grado sea 190

A) 14 B) 17 C) 19
D) 16 E)15

13. Hallar a + b en la identidad
27 + 8x = a (x + 4) + b (2x + 3)

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

14. Si $P(x) = x^{12} - 81x^8 + 5x + 6$,
Calcule: P(0) + P(3)

A) 2115 B) 27 C) 236
D) 729 E) 9371

15. Sea: $P(x) = 2x^2 + ax + 6$ y P(2) = 20 , halle el valor de P(3)

A) 21 B) 23 C) 27
D) 33 E) 35

16. Sea: $P(x+2) = 3x^2 + x + 2$
Calcule: P(3) + P(0)

A) 4 B) 8 C) 2
D) 7 E) 11

17. Si P(a + 1) = P(a) + 5a + 7 y P(2) = 6 entonces el resultado de P(3) es:

A) 23 B) 29 C) 17
D) 5 E) 18

18. Se sabe que:
P(x) = 3F(x+2) + 5x, F(x - 4) = 3x + 5
Hallar el valor de P(5)

A) 306 B) 132 C) 139
D) 167 E) 144

19. Se conoce el polinomio P (5x + 2) = 10x – 1, hallar el resultado de P(4x + 7) – P(3x + 5)

A) 2x + 1 B) 2x + 4 C) 2x + 2
D) 2x + 5 E) x + 4

20. Hallar el grado del siguiente monomio:

$$M(x,y) = a^4 x^{\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\cdots}}}} y^{\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\cdots}}}}$$

A) 13 B) 14 C) 11
D) 15 E) 17

CLAVE DE RESPUESTAS

01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
E	B	E	D	C	D	A	C	C	B
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
D	C	C	B	D	B	A	C	B	C

TAREA DOMICILIARIA

01. Indicar el valor de P (3) si el polinomio:
$P(x) = (a^3 - 8)x^2 + (b^3 - 26)x + (5 + ab)$
Es lineal y mónico.

A) 11 B) 13 C) 14
D) 15 E) N.A.

02. Conociendo la relación
$P(x) = 3x^2 + 2F(x+3)\ ;\ F(x-1) = 9x$
Hallar P(6)

A) 288 B) 144 C) 256
D) 234 E) 124

03. Hallar (a + b) en la identidad
$10 + 5x \equiv a(x+4) + b(2x+3)$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 9

04. Determinar $\dfrac{a+b-1}{n}$
Sabiendo que el polinomio:
$P(x;y) = x^{n^3-3}y^7 + 2x^a y^b - 3x^{n^3-8}y^{4n}$
Es homogéneo

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

05. Si el polinomio ordenado decreciente y completo
$P(x) = x^{2n+1} + ax^{\alpha+3} - 3x^{m+2} + \cdots\cdots + b$
Posee "2m" términos. Halle α + m + n

A) 14 B) 9 C) 12
D) 11 E) 15

06. Determinar "m" en el polinomio

$P(2x\,;y+3)=6mx+y^2$,

Si se sabe que P (6; 7) = 142

A) 20 B) 18 C) 16
D) 28 E) 7

07. Se sabe que el valor numérico de la expresión $2mx^2 + 5xy + 3y^3$, para x = 2 ; y = 3 es 183, hallar el valor de "m"

A) 2 B) 8 C) 9
D) 6 E) 7

08. Sea $P(x+3)=x^2-5x+K$, halle P(1), sabiendo que su término independiente es igual a 4k + 6

A) 21 B) 20 C) 5
D) 30 E) 1

09. Hallar "x" si:
F(x) + G(x) = 12, F(x) = 2x + 1; G(x) = x – 1

A) 1 B) 2 C) 3
D)4 E) 5

10. Se tiene las siguientes funciones
$F(x) = 2(x^2 - x)$, $G(x) = 2x + x^2$
Hallar el valor de F (G (3))

A) 415 B) 430 C) 412
D) 420 E) 445

11. Si $P(x) = x^2 – x^3$

Calcular $E=\sqrt{\dfrac{P(-3)-P(2)}{P(-2)-P(-1)}}$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 6

12. Hallar $a^2 + b^2 + c^2$ si el polinomio R(x) es idénticamente nulo

$R(x)=(a+b-4)x^4+(b+c-6)x^3+(a+c-8)x$

A) 34 B) 35 C) 36
D) 37 E) 38

13. Si $P(x)\cong Q(x)$ hallar abc

$P(x)=(a^2-1)x^4+(b+a)x^2+(b+c)x$

$Q(x)=(a+8)x^2+24x^4+10x$

A) 85 B) 80 C) 90
D) 72 E) 78

14. Si el polinomio homogéneo es de grado 10, hallar el valor de a + b + c

$x^a y^{b^2}+x^{5-a}y^c-x^b y^7$

A) 10 B) 15 C) 12
D) 13 E) 30

15. Si P(x) = ax + b $\wedge$ P[P[P(x)]] = 8x + 7

Calcular: $\underbrace{P(P\cdots\cdots P(-1)\cdots\cdots))}_{2005\text{ veces}}$

A) 1 B) 0 C) 2
D) –1 E) –2

16. Hallar p + q + r en la siguiente reducción de términos semejantes expresada como:

$qx^{q+1}=\frac{r}{2}x^{8-p}+\frac{r}{4}x^p$

A) 12 B) 13 C) 14
D)15 E)11

17. Sea el monomio $W(a,b,c)=2a^x b^y c^z$

Donde:

$GA-GR(a)=10$

$GA-GR(b)=12$

$GA-GR(c)=14$

Calcular: x + y + z

A) 14 B) 12 C) 13
D) 18 E) 17

18. Si el grado del polinomio "P" es 6 y el grado del polinomio Q es 3, entonces el grado del polinomio $E = \dfrac{8P^2Q}{P - Q^3}$ es:

A) 3   B) 6   C) 9
D) 12   E) 16

19. ¿Cuántos valores admite "x" en la siguiente expresión racional entera?

$$R(a;b) = \frac{3\sqrt{5}\,a^{6-x}b^{\frac{24}{x}}}{7}$$

A)4   B) 2   C) 5
D)7   E) 9

20. Si GR(x) = a + b – 3, GR(y)= b – 1 , hallar el grado de la siguiente expresión

$$\frac{x^{2a+1}y^{b+5}}{x^{b-a}y^{a}}$$

A) 27   B) 9   C) 18
D) 13   E) 19