# 计算物理作业 Ex04



物理学院 *Bryan*[*] 学号：1500066666

## A 一类可用打靶法求解的边值问题

与 ODE 的初值问题（*initial value problem*, IVP）不同，边值问题（*boundary value problem*, BVP）并没有统一的算法，需要具体问题具体分析；若采用有限差分方法，则需要针对方程具体设计相应的差分格式。与之相对，打靶法试图将边值问题转化为初值问题，其一般性更强；下面考察打靶法可以方便求解的一类边值问题。一般来说，有方程：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t,\vec{y}), \quad \vec{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}),$$

设求解区间为 $[a,b]$，定解所需的总约束数目为 $n$，若左端点处有 $n-m$ 个独立约束：

$$\begin{aligned} &a_{11}\, y_a^{(1)} + a_{12}\, y_a^{(2)} + \cdots + a_{1n}\, y_a^{(n)} = a_{10}, \\ &a_{21}\, y_a^{(1)} + a_{22}\, y_a^{(2)} + \cdots + a_{2n}\, y_a^{(n)} = a_{20}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\vec{y}_a = \vec{a}_0 \\ &\qquad\qquad\qquad \cdots \end{aligned} \tag{A.1}$$

相应地，右端则应有 $m$ 个约束，记为 $B\vec{y}_b = \vec{b}_0$.

$m=0$ 时，边值问题即退化为初值问题；$m \geq 1$ 时，(A.1) 实际上是一个关于 $n$ 维变量 $\vec{y}$ 的线性方程组，但其系数矩阵只有 $n-m$ 秩。因此，通常情况下，其解是一个 $m$ 维子空间 $V_0$. 打靶法的精神即在于，将边值问题转化为寻找满足右边条件的特定初值，即寻找函数：

$$\mathcal{F}\colon \quad \begin{aligned} V_0 &\longrightarrow V_0, \\ \vec{y}_0 &\longmapsto B\vec{y}_b - \vec{b}_0, \end{aligned}$$

的零点。给定 $\vec{y}_0 = \mathrm{proj}_{V_0}\, \vec{y}_a \in V_0$, 求解由 $\vec{y}_0$ 确定的初值问题（IVP），即可给出 $\mathcal{F}(\vec{y}_0)$, 流程如下：

$$\boxed{\vec{y}_0 \xmapsto{\text{solve}} \vec{y}_a \xmapsto[\text{IVP}]{\text{time evolution}} \vec{y}_b \longmapsto \mathcal{F}(\vec{y}_0)}$$

然而，实际计算时，对高维的 $V_0$ 而言，多元多分量函数 $\mathcal{F}\colon V_0 \to V_0$ 的求根是十分困难的。此外，$\mathcal{F}$ 函数值本身的计算量也不小，每次计算均需求解一次初值问题；因此，对 $m = \dim V_0 > 1$ 的情况而言，打靶法求解边值问题往往是不切实际的；但是，$m=1$ 时，$\mathcal{F}$ 退化为单变量、单分量函数，其根可以方便地迭代（如采用割线法）求出。

[*]邮箱：pls_contact_via_github@fake_email.com

综上所述，一端具有单一约束的边值问题可以方便地用打靶法求解，此时边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\,y_a^{(1)} + a_{12}\,y_a^{(2)} + \cdots + a_{1n}\,y_a^{(n)} &= a_{10}, \\
a_{21}\,y_a^{(1)} + a_{22}\,y_a^{(2)} + \cdots + a_{2n}\,y_a^{(n)} &= a_{20}, \\
&\cdots \\
a_{n-1,1}\,y_a^{(1)} + a_{n-1,2}\,y_a^{(2)} + \cdots + a_{n-1,n}\,y_a^{(n)} &= a_{n-1,0},
\end{aligned}\right\}\ \text{left}$$

$$b_1\,y_b^{(1)} + b_2\,y_b^{(2)} + \cdots + b_n\,y_b^{(n)} = b_0, \qquad \sim\ \text{right}$$

此时初值具有单一自由度 $\vec{y}_0 = y_0$，可简单取为某一 $y^{(k)}$ 分量。