计算物理作业 Ex06

物理学院 *Bryan*[*] 学号：1500066666

A 随机行走的统计特性

第 i 步（$i = 1, 2, \ldots, n$）随机行走带来的坐标变动可由矢量 $\vec{X}_i$ 描述；一般来说，它是一个多维随机变量。在此基础上，第 n 步时的坐标可表示为：

$$\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i$$

注意到 $\vec{X}_i, \vec{X}_j$ 相互独立且分布一致，自然有 $\langle \vec{r}_n \rangle = n \langle \vec{X}_i \rangle$; 若 $\langle \vec{X}_i \rangle \neq 0$, 则 $\langle \vec{r}_n \rangle$ 随步数 n 线性增大。

类似地，

$$\begin{aligned}
\big(\vec{r}_n - \langle \vec{r}_n \rangle\big)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \vec{X}_j\right) - 2\vec{r}_n \cdot \langle \vec{r}_n \rangle + \langle \vec{r}_n \rangle^2 \\
&= \sum_{i,j} \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j - 2\vec{r}_n \cdot \langle \vec{r}_n \rangle + \langle \vec{r}_n \rangle^2 \\
&= \sum_{i=j} \vec{X}_i^2 + \sum_{i \neq j} \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j - 2\vec{r}_n \cdot \langle \vec{r}_n \rangle + \langle \vec{r}_n \rangle^2, \\
\sigma^2 = \left\langle \big(\vec{r}_n - \langle \vec{r}_n \rangle\big)^2 \right\rangle &= n \langle X_i^2 \rangle - \langle \vec{r}_n \rangle^2 + \sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle
\end{aligned}$$

若概率分布关于原点对称（如，各项同性），则 $\sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle = 0, \langle \vec{r}_n \rangle = 0$, 相应有 $\sigma^2 = n \langle X_i^2 \rangle \propto n$. 注意，这一结论适用于任意维数的随机行走。

然而，即便步长固定为 1, 若概率分布关于原点不对称，则 $\sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle \neq 0, \langle \vec{r}_n \rangle \neq 0$, 特别地，对一维随机行走而言，若向右、向左概率分别为 p, q，$p + q = 1$, 则：

$$\langle \vec{r}_n \rangle = n(p - q), \quad \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle = p^2 + q^2 - 2pq = (p - q)^2, \quad \sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle = n(n-1)\,(p - q)^2,$$

$$\boxed{\therefore\ \sigma^2 = n\left(1 - (p - q)^2\right) = n\,\mathrm{Var}(\vec{X}_i)}$$

简单起见，这里规定行走的步长恒定为 1; 可见 σ^2 依然正比于 n, 但 $|p - q|$ 越大，比例系数越小。若 $p = 1$ 或 $q = 1$, 则 $\sigma^2 = 0$, 此时随机行走退化为单向规则运动。此外，若允许有呆着不走的概率，则 $\langle X_i^2 \rangle < 1$, 同样 $\sigma^2 = n \langle X_i^2 \rangle \propto n$, 且比例系数小于 1.

[*]邮箱：pls_contact_via_github@fake_email.com