

第 i 步 ($i = 1, 2, \dots, n$) 随机行走带来的坐标变动可由矢量 \vec{X}_i 描述；一般来说，它是一个多维随机变量。在此基础上，第 n 步时的坐标可表示为：

$$\vec{r}_n = \sum_{i=1}^n \vec{X}_i$$

注意到 \vec{X}_i, \vec{X}_j 相互独立且分布一致，自然有 $\langle \vec{r}_n \rangle = n \langle \vec{X}_i \rangle$ ；若 $\langle \vec{X}_i \rangle \neq 0$ ，则 $\langle \vec{r}_n \rangle$ 随步数 n 线性增大。

类似地，

$$\begin{aligned} (\vec{r}_n - \langle \vec{r}_n \rangle)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \vec{X}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \vec{X}_j \right) - 2\vec{r}_n \cdot \langle \vec{r}_n \rangle + \langle \vec{r}_n \rangle^2 \\ &= \sum_{i,j} \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j - 2\vec{r}_n \cdot \langle \vec{r}_n \rangle + \langle \vec{r}_n \rangle^2 \\ &= \sum_{i=j} \vec{X}_i^2 + \sum_{i \neq j} \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j - 2\vec{r}_n \cdot \langle \vec{r}_n \rangle + \langle \vec{r}_n \rangle^2, \\ \sigma^2 &= \left\langle (\vec{r}_n - \langle \vec{r}_n \rangle)^2 \right\rangle = n \langle X_i^2 \rangle - \langle \vec{r}_n \rangle^2 + \sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle \end{aligned}$$

若概率分布关于原点对称（如，各项同性），则 $\sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle = 0, \langle \vec{r}_n \rangle = 0$ ，相应地有 $\sigma^2 = n \langle X_i^2 \rangle \propto n$ 。注意，这一结论适用于任意维数的随机行走。

然而，即便步长固定为 1，若概率分布关于原点不对称，则 $\sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle \neq 0, \langle \vec{r}_n \rangle \neq 0$ ，特别地，对一维随机行走而言，若向右、向左概率分别为 p, q ， $p + q = 1$ ，则：

$$\langle \vec{r}_n \rangle = n(p - q), \quad \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle = p^2 + q^2 - 2pq = (p - q)^2, \quad \sum_{i \neq j} \langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \rangle = n(n - 1)(p - q)^2,$$

$$\therefore \sigma^2 = n(1 - (p - q)^2) = n \text{Var}(\vec{X}_i)$$

简单起见，这里规定行走的步长恒定为 1；可见 σ^2 依然正比于 n ，但 $|p - q|$ 越大，比例系数越小。若 $p = 1$ 或 $q = 1$ ，则 $\sigma^2 = 0$ ，此时随机行走退化为单向规则运动。此外，若允许有呆着不走的概率，则 $\langle X_i^2 \rangle < 1$ ，同样 $\sigma^2 = n \langle X_i^2 \rangle \propto n$ ，且比例系数小于 1。