2 矩阵的模与条件数

2.1 矩阵 A 的基本性质

考虑矩阵 A, 有:

$$(A - \mathbb{1})_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{for } i < j, \\ 0, & \text{for } i \geq j, \end{cases} \tag{2.1}$$

计算 n 阶 A_n 的行列式，注意有递归关系 $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & [-1]\times n \\ & A_n \end{pmatrix}$ —— 这里借用了 python 的记号: $[-1]\times n$ 表示长为 n 的常数列表。按第一行展开（Laplace expansion），注意到 A_{1j} 元素的代数余子式（minor）均有一列零元，故其对行列式的贡献为零，从而:

$$\det A_n = 1 \times \det A_{n-1} = \cdots = \det A_1 = 1 \tag{2.2}$$

事实上，上述过程可推广到任何三角矩阵，由此得到三角矩阵的本征值:

$$\det A_n = a_{11} \det A_{n-1} = \cdots = \prod_i a_{ii} \tag{2.3}$$

即其对角元素的乘积。

2.2 A^{-1} 的形式

承接上文，记 A_n 的某代数余子式为 $\left|\tilde{A}_{ij}^{(n)}\right|$, $|\cdot|$ 为行列式的简记符号；从定义出发，有:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \tag{2.4}$$

其中 $\operatorname{adj} A$ 的元素为 $(-1)^{i+j}\left|\tilde{A}_{ji}\right|/|A|$, 注意指标有交换，即应当取一个额外的转置。

类似前面的讨论，对一般的上三角矩阵，均有:

$$\left|\tilde{A}_{ij}^{(n)}\right| = \begin{cases} 0, & \text{for } i < j, \\ |A_n|/a_{ii}, & \text{for } i = j, \end{cases} \tag{2.5}$$

再复合上一个转置，可得上（下）三角矩阵的逆依然是上（下）三角矩阵。

进一步，$\left|\tilde{A}_{ij}^{(n)}\right|$, $i > j$ 的情形较为复杂，这里同样采用递归的办法。不难发现，有:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{A}_{ij}^{(n+1)}\right| &= \begin{vmatrix} 1 & [-1]\times(n-1) \\ & \tilde{A}_{i-1,j-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \left|\tilde{A}_{i-1,j-1}^{(n)}\right|, \quad i > j > 1, \\ &= \begin{vmatrix} \tilde{A}_{i,j}^{(n)} & \vdots \\ & 1 \end{vmatrix} = \left|\tilde{A}_{ij}^{(n)}\right|, \quad i > j, \end{aligned} \tag{2.6}$$

上述化简利用了 A 的上三角特性。

由此可见，A^{-1} 具有平行于主对角线的带状结构，且:

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ & A_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

综上，A^{-1} 的形态已经基本确定，唯一未定的元素只剩下最右上角的 $A_{1,n}^{-1}$ 了。可以方便地以待定系数的方法给出 $A_{1,n}^{-1}$; 利用 $A^{-1}A = \mathbb{1}$, 不难得到:

$$A_{1,n}^{-1} = \sum_{j<n} A_{1,j}^{-1} = \sum_{i>1} A_{i,n}^{-1} \tag{2.8}$$

即它是第 1 行（或第 n 列）除去其自身以外其他元素的总和。如此，便可以递归地得到:

$$\begin{gathered} A_1^{-1} = (1), \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots \\ A_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{for } i > j, \\ 1, & \text{for } i = j, \\ 2^{j-i-1}, & \text{for } i < j, \end{cases} \end{gathered} \tag{2.9}$$

2.3 矩阵的 ∞ 模

已知矢量 p 模:

$$\|x\|_p = \left\{\sum_i |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p\to\infty} \max|x_i| \lim_{p\to\infty}\left\{1 + \sum_{|x_i|<|x_{\max}|}\left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \max|x_i| \tag{2.10}$$

考虑相应的矩阵模，首先有:

$$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \xrightarrow{p\to\infty} \frac{\max\left|A_{ij}x^j\right|}{\max|x_i|} \tag{2.11}$$

$\forall\, x \neq 0$, 取上界，即得到 $\|A\|$. 注意数乘不改变 $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, 故不妨限制 $\|x\| = 1$, 从而:

$$\|Ax\|_p \xrightarrow{p\to\infty} \max\left|A_{ij}x^j\right| \leq \max_i \sum_j |A_{ij}| \tag{2.12}$$

当 $x^j = \operatorname{sign} A_{ij}$ 时取到等号。也就是说，$\|A\|_\infty$ 即为矩阵的行和最大值。

2.4 矩阵的欧式模

欧式模由于和线性空间上的标准内积一致，因此有额外的优良性质。例如，对 $\mathbb{C}$ 上的幺正矩阵 U 而言，$\forall\, x$, 均有:

$$\begin{aligned} p = 2, \quad \|Ux\|^2 &= x^\dagger U^\dagger U x = x^\dagger U U^\dagger x = \left\|U^\dagger x\right\|^2, \\ &= x^\dagger x = \|x\|^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

因此 $\|U\|_2 = \left\|U^\dagger\right\|_2 = 1$. 类似有 $\|(UA)\,x\|_2 = \|U(Ax)\|_2 = \|Ax\|_2$, 故 $\|UA\|_2 = \|U\|_2$. 而矩阵的条件数可一般性地表示为 $K_p(A) = \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$, 故:

$$K_2(A) = K_2(UA) \tag{2.14}$$

2.5 A 的 ∞ 模条件数 $K_\infty(A)$

对于前述例子 A, 其行和最大值在第一行取到，即: $\|A\|_\infty = n$. 类似地，$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1}$, 从而有:

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = n\, 2^{n-1} \tag{2.15}$$