

与 ODE 的初值问题 (*initial value problem*, IVP) 不同, 边值问题 (*boundary value problem*, BVP) 并没有统一的算法, 需要具体问题具体分析; 若采用有限差分方法, 则需要针对方程具体设计相应的差分格式。与之相对, 打靶法试图将边值问题转化为初值问题, 其一般性更强; 下面考察打靶法可以方便求解的一类边值问题。一般来说, 有方程:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad \vec{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}),$$

设求解区间为 $[a, b]$, 定解所需的总约束数目为 n , 若左端点处有 $n - m$ 个独立约束:

$$\begin{aligned} a_{11} y_a^{(1)} + a_{12} y_a^{(2)} + \dots + a_{1n} y_a^{(n)} &= a_{10}, \\ a_{21} y_a^{(1)} + a_{22} y_a^{(2)} + \dots + a_{2n} y_a^{(n)} &= a_{20}, \quad \Longleftrightarrow \quad A \vec{y}_a = \vec{a}_0 \\ &\dots \end{aligned} \tag{A.1}$$

相应地, 右端则应有 m 个约束, 记为 $B \vec{y}_b = \vec{b}_0$.

$m = 0$ 时, 边值问题即退化为初值问题; $m \geq 1$ 时, (A.1) 实际上是一个关于 n 维变量 \vec{y} 的线性方程组, 但其系数矩阵只有 $n - m$ 秩。因此, 通常情况下, 其解是一个 m 维子空间 V_0 。打靶法的精神即在于, 将边值问题转化为寻找满足右边条件的特定初值, 即寻找函数:

$$\mathcal{F}: \begin{aligned} V_0 &\longrightarrow V_0, \\ \vec{y}_0 &\longmapsto B \vec{y}_b - \vec{b}_0, \end{aligned}$$

的零点。给定 $\vec{y}_0 = \text{proj}_{V_0} \vec{y}_a \in V_0$, 求解由 \vec{y}_0 确定的初值问题 (IVP), 即可给出 $\mathcal{F}(\vec{y}_0)$, 流程如下:

$$\boxed{\vec{y}_0 \xrightarrow{\text{solve}} \vec{y}_a \xrightarrow[\text{IVP}]{\text{time evolution}} \vec{y}_b \longmapsto \mathcal{F}(\vec{y}_0)}$$

然而, 实际计算时, 对高维的 V_0 而言, 多元多分量函数 $\mathcal{F}: V_0 \rightarrow V_0$ 的求根是十分困难的。此外, \mathcal{F} 函数值本身的计算量也不小, 每次计算均需求解一次初值问题; 因此, 对 $m = \dim V_0 > 1$ 的情况而言, 打靶法求解边值问题往往是不切实际的; 但是, $m = 1$ 时, \mathcal{F} 退化为单变量、单分量函数, 其根可以方便地迭代 (如采用割线法) 求出。

综上所述, 一端具有单一约束的边值问题可以方便地用打靶法求解, 此时边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} y_a^{(1)} + a_{12} y_a^{(2)} + \dots + a_{1n} y_a^{(n)} &= a_{10}, \\ a_{21} y_a^{(1)} + a_{22} y_a^{(2)} + \dots + a_{2n} y_a^{(n)} &= a_{20}, \\ &\dots \\ a_{n-1,1} y_a^{(1)} + a_{n-1,2} y_a^{(2)} + \dots + a_{n-1,n} y_a^{(n)} &= a_{n-1,0}, \end{aligned} \right\} \text{left}$$

$$b_1 y_b^{(1)} + b_2 y_b^{(2)} + \dots + b_n y_b^{(n)} = b_0, \quad \sim \text{right}$$

此时初值具有单一自由度 $\vec{y}_0 = y_0$, 可简单取为某一 $y^{(k)}$ 分量。