1 数值误差的避免

1.1 求平均的误差

N 数平均的误差来源于求和、除以 N 两个过程；在 N 较大时，除以大数所引入的误差相对较小，此时求和的误差占主要成分。

两数相加时，引入的相对误差为机器精度 $\frac{\epsilon_M}{2}$；记 $x_0 = \max|x_i|$，考虑最坏的情况，即可能的误差最大值，这一情形在每个 $x_i \to x_0$ 时取到。不妨设 x_i 均为正数，此时求和的上限为：

$$f \circ f \circ \cdots \circ f(x_0) \equiv f^{N-1} \circ (x_0), \quad f(x) = (x + x_0)\left(1 + \frac{\epsilon_M}{2}\right) \tag{1.1}$$

这里 f 是每次数值求和操作的函数表示。

作用于 x_0	$\mathcal{O}(1)$ 项	$\mathcal{O}(\frac{\epsilon_M}{2})$ 系数
$f^0 = \mathbb{1}$	x_0	0
f^1	$2x_0$	$2x_0$
f^2	$3x_0$	$5x_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f^k	$x_0 + kx_0$	c_k

f 的作用规律：先加 x_0，再乘以 $\left(1 + \frac{\epsilon_M}{2}\right)$

考察 $\frac{\epsilon_M}{2}$ 的系数，设 f^k 作用后的 $\frac{\epsilon_M}{2}$ 系数为 c_k，则不难发现：

$$c_k = c_{k-1} + x_0 + kx_0 \tag{1.2}$$

其中 kx_0 源于前一步 $\mathcal{O}(1)$ 项的系数。已知 $c_0 = 0$，展开此递推关系，即得：

$$\begin{aligned} c_{N-1} &= \frac{(N+2)(N-1)}{2} x_0, \\ \text{均值的误差限：}\quad \frac{1}{N} \cdot c_{N-1} \frac{\epsilon_M}{2} &= \frac{(N+2)(N-1)}{2N} \frac{\epsilon_M}{2} \max|x_i| \sim \frac{N}{2} \frac{\epsilon_M}{2} \max|x_i| \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2 方差计算的稳定性

两种方差计算公式如下：

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\left\{\sum_i x_i^2 - N\bar{x}^2\right\} \tag{1.4a}$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{1.4b}$$

沿用前文给出的估计办法，可以给出两式的误差限；有：

$$\begin{aligned} e_{(a)} &\sim S^2 \frac{\epsilon_M}{2} + \left\{\frac{N}{2}\frac{\epsilon_M}{2}\max|x_i|^2 + \frac{N}{2}\frac{\epsilon_M}{2}\max|x_i| \times 2\right\} \\ &= \left(S^2 + \frac{N}{2}\max|x_i|^2 + N\max|x_i|\right)\frac{\epsilon_M}{2}, \\ e_{(b)} &\sim \frac{N}{2}\frac{\epsilon_M}{2}\max|x_i - \bar{x}|^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

可见，多数情况下第一式 (1.4a) 将带来较大误差；特别是在 x_i 很大但方差却很小的情况下，此时将产生大数相消，从而大量损失有效数字。相比之下，第二式 (1.4b) 较为稳定和准确。

1.3 递归计算的稳定性

考察 $I_n = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^n}{x+5}$，首先有 $I_0 = \ln(x+5)\big|_0^1 = \ln\frac{6}{5}$，而：

$$I_k + 5I_{k-1} = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^k + 5x^{k-1}}{x+5} = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{k-1} = \frac{x^k}{k}\bigg|_0^1 = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

从而可以递归地给出 I_k 的值。

关注这一过程的误差传递，设计算值 $\hat{I}_{k-1} = I_{k-1} + \epsilon_{k-1}$，则相应地：

$$\begin{aligned} \hat{I}_k &\sim \left(\frac{1}{k} - 5\hat{I}_{k-1}\right)\left(1 + \frac{\epsilon_M}{2}\right) \\ &\sim I_k - 5\epsilon_{k-1} + I_k\frac{\epsilon_M}{2} \\ \text{即有：}\quad \epsilon_k &\sim -\left({}^5\!/_{I_k}\right)\epsilon_{k-1} + \frac{\epsilon_M}{2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

系数 $\kappa = |5/I_k|$ 是关键；若 $\kappa < 1$，则误差将得到控制，不会进一步放大。

然而，不幸的是，本问题中的 $I_n < I_0 < 1$，即始终有 $\kappa > 1$，初始误差 ϵ 将随递归过程不断（指数）放大，可见这一算法是不稳定的。