3 Hilbert 矩阵

3.1 H_n 的具体形式

多项式近似的残差 $D=\int_0^1 \mathrm{d}x\left\{\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}-f(x)\right\}^2$, 为使其尽可能小，对参量 c_j 微分，即有：

$$
\begin{aligned}
0=\frac{\partial D}{\partial c_j} &= \int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{\partial}{\partial c_j}\left\{\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}-f(x)\right\}^2 \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\cdot 2\left\{\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}-f(x)\right\}\sum_{i=1}^n \delta_i^j x^{i-1} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\cdot 2x^{j-1}\left\{\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}-f(x)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

积分，得 $0=\sum_{i=1}^n c_i\,\frac{1}{i+j-1}-\int_0^1 \mathrm{d}x\,x^{j-1}f(x)$, 即有：

$$
\begin{gathered}
H_n\cdot c=b, \\
(H_n)_{ij}=\frac{1}{i+j-1},\quad b_j=\int_0^1 \mathrm{d}x\,x^{j-1}f(x)
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

3.2 H_n 的特征

由 $(H_n)_{ij}=\frac{1}{i+j-1}=(H_n)_{ji}$, 可见 H_n 为对称矩阵；此外，参见上文，有：

$$
c^T H_n c=\sum_{i,j=1}^n c_i c_j\int_0^1 x^{i+j-2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\left\{\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}\right\}^2\geq 0 \tag{3.3}
$$

当且仅当 $\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}\equiv 0$ 即 $c=0$ 时取到等号。可见 Hilbert 矩阵是对称正定矩阵。

此外，由对称正定性还可知 Hilbert 矩阵必定是非奇异的。事实上，对任一对称正定矩阵 A 而言，若它同时是奇异矩阵，则 $\det A=0$, 故存在 $c\neq 0$ 使得 $Ac=0$, 进而导致 $c^T Ac=0$, 这与对称正定性矛盾。因此对称正定矩阵均非奇异。

3.3 $\det H_n$ 的行为

已知：

$$
\det H_n=\frac{c_n^4}{c_{2n}},\quad c_n=1!\cdot 2!\ldots(n-1)! \tag{3.4}
$$

为估计 $\det H_n$ 的大小，取对数，注意到 $\ln c_n=\sum_{m=1}^{n-1}\ln m!$, 可得：

$$
\ln\det H_n=4\ln c_n-\ln c_{2n}=\left\{4\sum_{m=1}^{n-1}-\sum_{m=1}^{2n-1}\right\}\ln m! \tag{3.5}
$$

下面尝试用 Stirling 近似给出上式子的一个近似。已知：

$$
m!\sim\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \tag{3.6}
$$

带入上式，初步化简后得到：

$$
\begin{aligned}
\ln\det H_n &\sim \left\{4\sum_{m=1}^{n-1}-\sum_{m=1}^{2n-1}\right\} m\ln m \\
&\qquad +n+\left(n-\frac{3}{2}\right)\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\big(4\ln(n-1)!-\ln(2n-1)!\big) \\
&\sim \left\{4\sum_{m=1}^{n-1}-\sum_{m=1}^{2n-1}\right\} m\ln m \\
&\qquad +(2n-1)\ln(n-1)-\left(n-\frac{1}{4}\right)\ln(2n-1) \\
&\qquad\quad +\left(n-\frac{9}{4}\right)\ln(2\pi)+\frac{3}{2}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

进一步，考虑积分的几何意义，对 $\sum m\ln m$ 可采用如下近似：

$$
\sum_{m=1}^k m\ln m\sim\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\,x\ln x \tag{3.8}
$$

即可得到 $\ln\det H_n$ 的完整近似形式。截取最高阶项，我们得到：

$$
\boxed{\ln\det H_n\sim -2n^2\ln 2,\quad \det H_n\sim 4^{-n^2},\quad n\to\infty} \tag{3.9}
$$

由此可见，$\det H_n$ 随 n 增大而指数地减小，即 H_n 迅速地接近于一个奇异矩阵。注意，4^{-n^2} 给出的粗略近似（后面标记为 Rough）适用于大宗量 n 的情形；对于较小的 n 值而言，由于略去了过多的低阶项，结果可能不甚理想。