

Controlador de Precisión para el Oscilador de Van der Pol: Reducción de Error y Sobrepasso usando DAQ y LabVIEW

1st Barzola Chancasanampa Bryan Cesar
20204042H

Facultad de Ingeniería Mecánica
Ingeniería Mecatrónica
Lima, Perú
bryan.barzola.c@uni.pe

2nd Gutierrez Fernandez Bryan Antonio
20202150H

Facultad de Ingeniería Mecánica
Ingeniería Mecatrónica
Lima, Perú
bryan.gutierrez.f@uni.pe

3rd Antezana Livia Kevin Jesú

20202014G

Facultad de Ingeniería Mecánica
Ingeniería Mecatrónica
Lima, Perú
kevin.antezana.l@uni.pe

Abstract—This paper presents the design and implementation of a control system for the nonlinear Van der Pol oscillator. Due to its nonlinear dynamics and limit cycle behavior, controlling this system represents a significant challenge. A PID controller is designed based on a linearized model of the oscillator using the Routh–Hurwitz stability criterion. The controller is discretized through a redesign approach, applying the Tustin method for the integral action and the Backward Euler method for the derivative action. Simulation results obtained in MATLAB, Simulink, and LabVIEW are validated through experimental implementation using a DAQ USB-6003 and a physical electronic circuit. The results demonstrate effective stabilization of the system, achieving near-zero steady-state error and reduced overshoot.

Index Terms—Van der Pol oscillator, PID control, nonlinear systems, discrete control, DAQ, LabVIEW.

I. INTRODUCCIÓN

En el ámbito del control de sistemas no lineales, el oscilador de Van der Pol destaca por su comportamiento oscilatorio característico y su capacidad para modelar una variedad de fenómenos en la ingeniería y la física. Este oscilador, con sus ciclos límite y dinámicas no lineales, presenta desafíos únicos para el diseño de controladores que buscan optimizar el rendimiento del sistema.

El objetivo de este trabajo es diseñar un controlador capaz de lograr un error en estado estacionario nulo y minimizar el sobrepasso máximo del oscilador de Van der Pol. Para esto, se implementará una estrategia de control utilizando un sistema de adquisición de datos (DAQ) y la plataforma LabVIEW. A lo largo del desarrollo, se llevarán a cabo simulaciones del sistema en lazo abierto y cerrado utilizando herramientas como MATLAB, Simulink, y LabVIEW, lo que permitirá contrastar la efectividad del controlador propuesto.

El documento está estructurado en varias secciones que abarcan desde la descripción detallada del sistema y su simulación en diferentes entornos, hasta el diseño e implementación del algoritmo de control. Se presentan resultados experimentales y simulados que validan el desempeño del controlador. Finalmente, se discuten las conclusiones obtenidas y se proporcionan recomendaciones para futuras investigaciones. Este

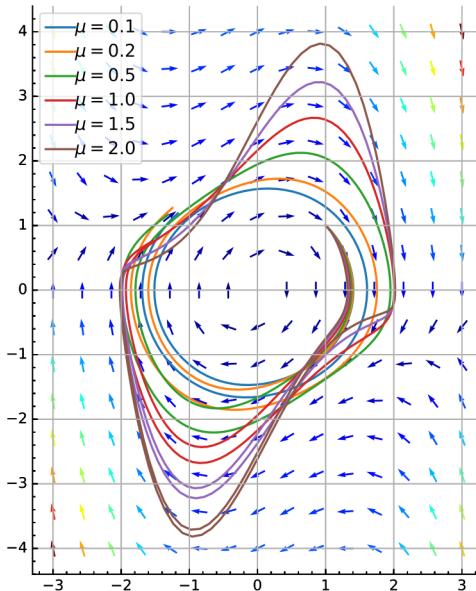


Fig. 1: Retrato de fase para oscilador de Van der Pol

estudio pretende contribuir al campo del control de sistemas no lineales, ofreciendo un enfoque metodológico para el diseño

de controladores aplicados a osciladores complejos, y demostrando la utilidad de herramientas modernas de simulación y adquisición de datos en la mejora del desempeño de dichos sistemas.

II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El oscilador de Van der Pol es un oscilador con amortiguamiento no lineal regido por la ecuación diferencial de segundo orden,

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

donde x es la variable dinámica y $\epsilon > 0$ es un parámetro. Este modelo fue propuesto por Balthasar van der Pol (1889-1959) en 1920, cuando era ingeniero y trabajaba para la compañía Philips (en los Países Bajos).

Análisis: Cuando x es pequeño, el término cuadrático x^2 es despreciable y el sistema se convierte en una ecuación diferencial lineal con un amortiguamiento negativo $-\epsilon\dot{x}$. Así, el punto fijo ($x = 0, \dot{x} = 0$) es inestable (un foco inestable cuando $0 < \epsilon < 2$ y un nodo inestable en caso contrario). Por otro lado, cuando x es grande, el término x^2 se vuelve dominante y el amortiguamiento se vuelve positivo. Por lo tanto, se espera que la dinámica del sistema se restrinja en alguna área alrededor del punto fijo. En realidad, el sistema de Van der Pol (1) satisface el teorema de Liénard, asegurando que existe un ciclo límite estable en el espacio de fases. El sistema de Van der Pol es, por lo tanto, un sistema de Liénard.

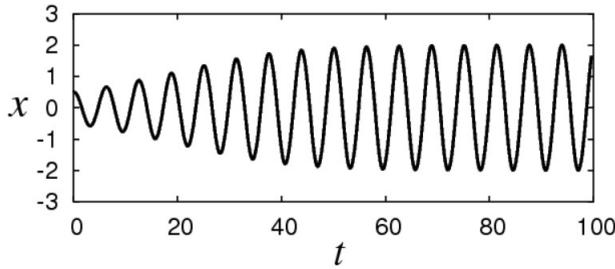


Fig. 2: Cambio en x a lo largo del tiempo con bajo amortiguamiento

Para el desarrollo del presente estudio, se consideró el modelo del oscilador de Van der Pol con disturbio externo $\omega(t) = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_1 + c(1 - x_1^2)x_2 \quad (1) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

De esta forma, el modelo ha sido construido con los parámetros $k = 1, c = 0.1$. Se usaron los siguientes valores en el diagrama del circuito electrónico (Fig.3) :

- $R_i = 1 \text{ M}\Omega$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- $R_7 = 130 \Omega$

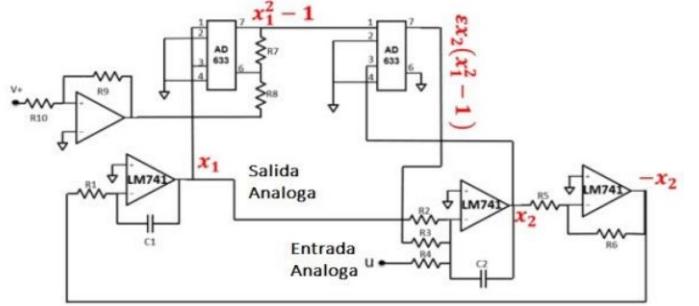


Fig. 3: Circuito electrónico para modelar el oscilador de Van der Pol

- $R_8 = 1.2 \text{ K}\Omega$
- $R_9 = 100 \Omega$
- $R_{10} = 1.5 \text{ K}\Omega$
- $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$

Además se utilizó el amplificador operacional de propósito general LM741 y el AD633, el cual es un amplificador operacional multiplicador de 4 cuadrantes amplificado.

Es evidente de (1) que un punto de equilibrio es (0,0).

Debido al comportamiento no lineal de planta, es necesario hacer un proceso ed linealización. De esta forma se realizan los siguiente cálculos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 &= (-2cx_2\dot{x}_1 - k)\dot{x}_1 + c(1 - x_1^2)x_2 \\ \dot{x}_1 &= 0\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{x}_2 &= -k\dot{x}_1 + cx_2 - u \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{X_1(s)}{U(s)} &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ k & s - c \end{bmatrix}^{-1} \\ \frac{\alpha_1(s)}{U(s)} &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s - c & 1 \\ -k & s \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Obteniendo la función de transferencia linealizada:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{-1}{s^2 - cs + k} \quad (5)$$

Utilizando los parámetros $k = 1 \wedge c = 0.1$, obtenemos la planta linealizada que se utilizará en este estudio:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{-1}{s^2 - 0.1s + 1} \quad (6)$$

Para observar el comportamiento de nuestro sistema no lineal utilizamos MATLAB, donde se observa el comportamiento

inestable de las variables de estado, además se observa el diagrama de fase en las siguientes imágenes:

```

1 clc, clearvars, close all
2 duracion = 20; fps = 30;
3 nframes = duracion*fps;
4 c = 0.1; k = 1;
5 xdot = @(t,x) [x(2); c*x(2) - k*x(1)];
6 s = ode45(xdot,[0 duracion],[1 1]);
7 t = linspace(0,duracion,nframes);
8 x = deval(s,t);
9 figure(1)
10 plot(t,x(1,:)); hold on;
11 plot(t,x(2,:)); legend('x1','x2'); grid on;
12 xlabel('Tiempo[s]'); ylabel('Estados');
13 title('Van der Pol');
14 figure(2)
15 plot(x(1,:),x(2,:)); title('Diagramas de Fase');

```

Listing 1: Algoritmo empleado para el sistema no lineal de Van der Pol

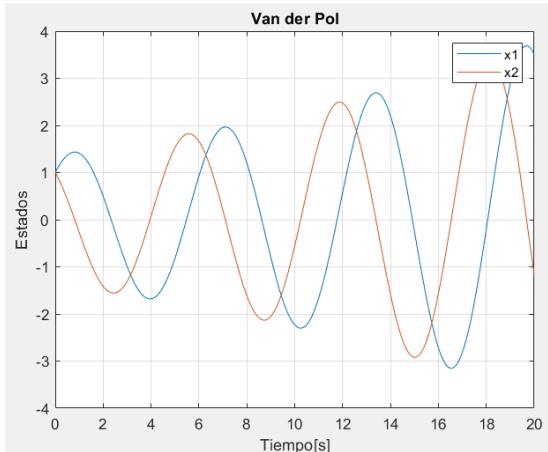


Fig. 4: Oscilador de Van der Pol

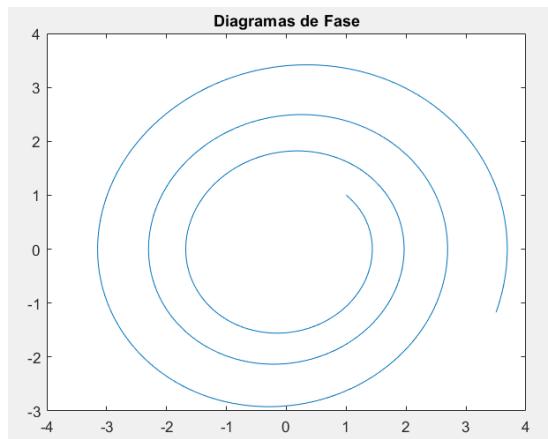


Fig. 5: Diagrama de Fase

Estas figuras muestran el comportamiento de la planta en simulación; sin embargo, se realizó una medición de los estados del circuito implementado y se obtuvo los siguientes graficos:

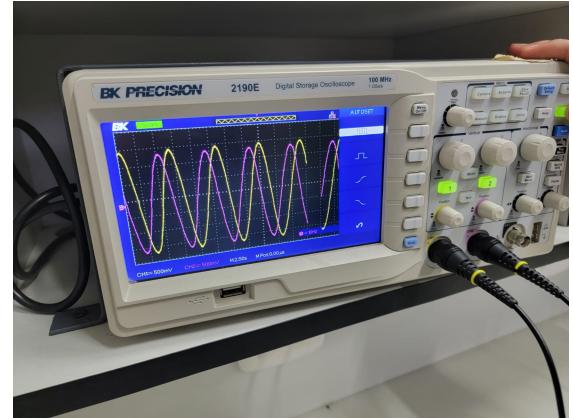


Fig. 6: Estados del circuito de Van Der Pol

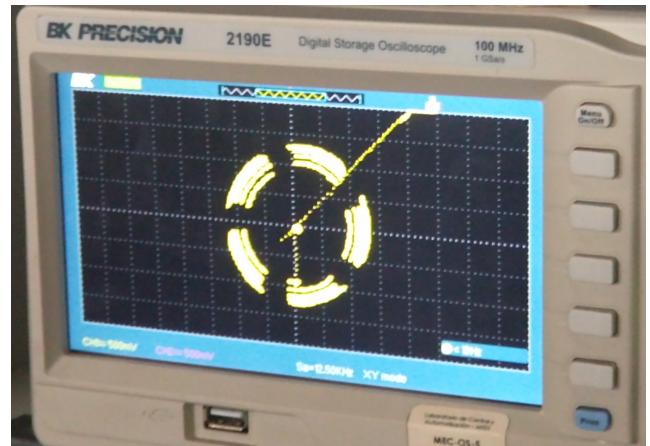


Fig. 7: Diagrama de Fase Circuito en Fisico

III. DISEÑO DEL ALGORITMO DE CONTROL

Se realizó un controlador discreto PID por el método de rediseño, este método consiste en realizar el controlador PID del sistema continuo y luego discretizarlo para su implementación en LabVIEW que puede ser por Forward Euler, Backward Euler o Tustin (bilineal). Para hallar el controlador PID continuo se consideró una estructura en paralelo y se empleó el criterio de estabilidad de Routh Hurwitz, partiendo de ello asumimos un tiempo de establecimiento T_s de 6 seg, así como el sobrepaso M_p menor al 1%.

El circuito Oscilador de Van Der Pol linealizado tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{-1}{s^2 - 0.1s + 1}$$

Además el controlador PID continuo tiene la siguiente estructura, ya que es un PID en paralelo:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D * s$$

$$C(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Finalmente, hallamos la función de transferencia del sistema en lazo cerrado para aplicar el criterio de estabilidad de Routh Hurwitz.

$$T(s) = \frac{C(s) * G(s)}{1 + C(s) * G(s)}$$

Reemplazando las funciones de transferencia del sistema como del controlador PID se obtiene el polinomio característico:

$$P(s) = s^3 - (0.1 + K_D)s^2 + (1 - K_P)s - K_I$$

Formamos la tabla de Routh Hurwitz:

s^3	1	$(1 - K_P)$
s^2	$-(0.1 + K_D)$	$-K_I$
s^1	$\frac{-K_I}{0.1+K_D} + (1 - K_P)$	0
s^0	$-K_I$	

Los términos de la primera columna deben ser positivos para que el sistema sea estable, con ello tenemos valores admisibles para cada variable del controlador PID continuo.

- $K_P = -9$
- $K_I = -0.9$
- $K_D = -11.1$

Con estos valores se implementó el sistema en lazo cerrado en simulink, pero se realizó un ajuste para la señal de control usando un sistema no lineal denominado saturador para delimitar el voltaje, ya que el DAQ USB-6003 solo trabaja entre $[-10, 10]$.

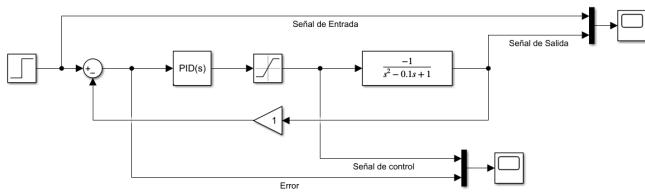


Fig. 8: Sistema de control en lazo cerrado

Tenemos dos gráficas de la respuesta al escalón unitario, así como la señal de control y del error:

Ahora este controlador se debe pasar al mundo discreto, para lo cual el método de rediseño nos recomienda discretizar la acción integral con tustin (bilínea) y la acción derivativa con Backward Euler, para lo cual elegimos un periodo de muestreo de 0.1 seg.

Igualmente se utilizó un saturador para evitar errores en la implementación en físico con el LabVIEW. Los resultados fueron los siguientes:

El controlador tiene la siguiente ecuación:

$$C(z) = -120.045 \frac{(z - 0.98836)(z - 0.93553)}{z(z - 1)}$$

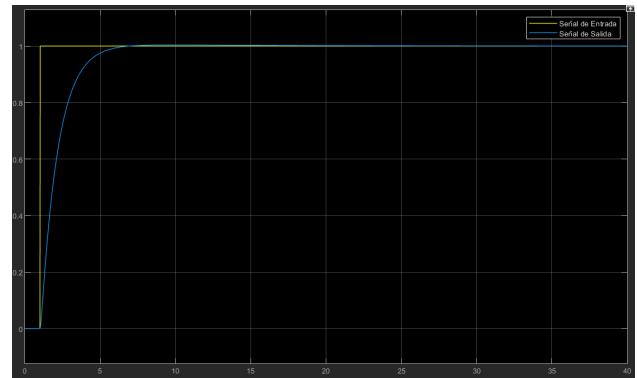


Fig. 9: Sistema de control en lazo cerrado

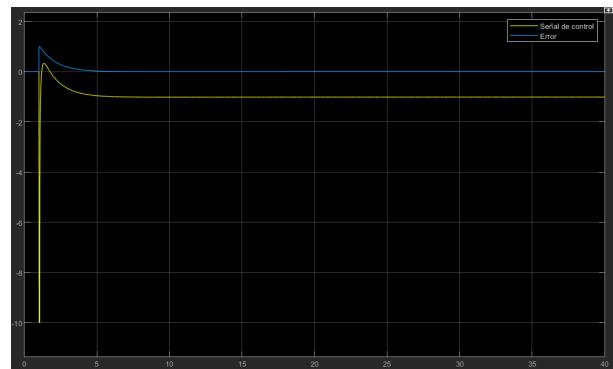


Fig. 10: Señal de Control y Error

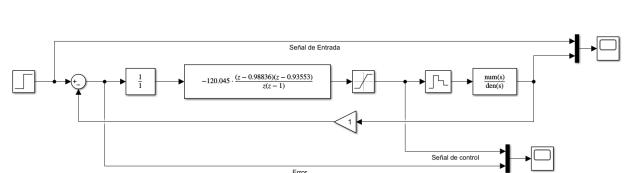


Fig. 11: Sistema de control en lazo cerrado

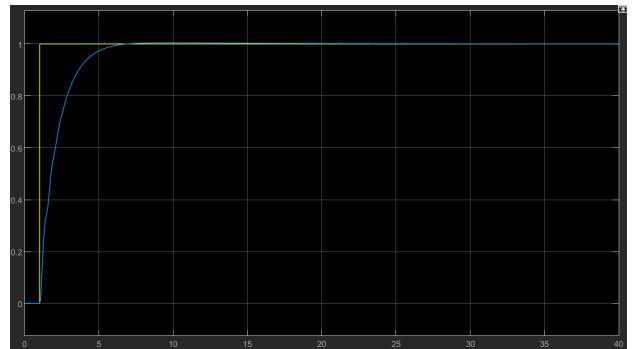


Fig. 12: Sistema de control discreto en lazo cerrado

Esta ecuación se implementará en LabVIEW para su análisis, pasándolo a ecuación en diferencias. Se eligió ese tiempo de muestreo ya que al aumentar la señal de salida así como la señal de control se ven afectadas, ya que este valor tiene relevancia para la estabilidad del sistema discreto.

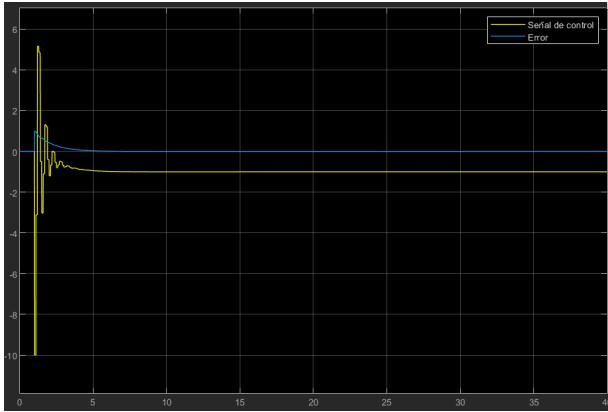


Fig. 13: Señal de Control y Error

IV. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO DE CONTROL

Se implementa el circuito pertinente de Labview para poder controlar la planta real. Como se mencionó antes se debe traducir el controlador $C(z)$ diseñado a ecuación de diferencias para poder utilizarlo. Se introduce también el mismo periodo de muestreo de 0.1 segundos que se utilizó para discretizar el controlador, además de un saturador para no sobrepasar el rango de trabajo de 10 V de la tarjeta de adquisición de datos.

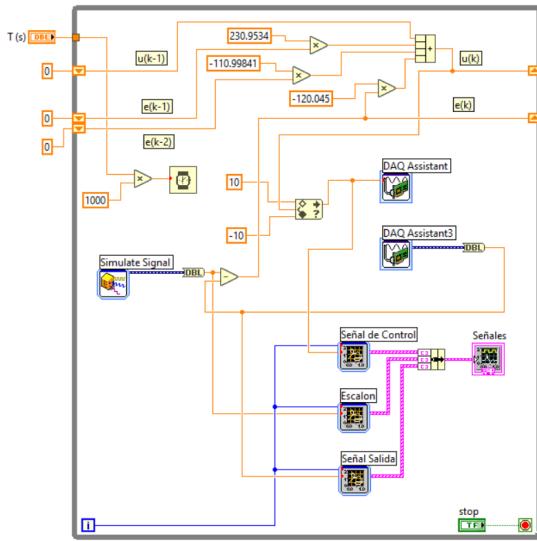


Fig. 14: Circuito en Labview

A continuación se trae a la mesa el circuito completo de la planta, el cual se puede ver en las siguientes imágenes.

Se añadieron etiquetas en los jumpers de las variables de interés para una mejor identificación al momento de hacer las pruebas. Tomar en cuenta que el jumper de color rojo señalado como u no se usa en ningún momento de acuerdo al diseño propuesto.

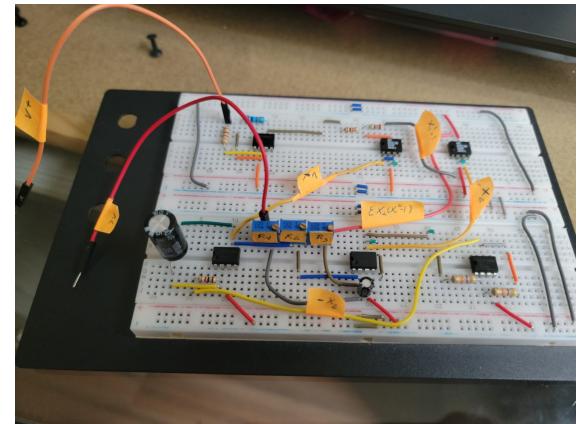


Fig. 15: Circuito de experiencia

A continuación, se alimenta tanto al sistema, los opamps y AD633 con el mismo voltaje de 15 V. El resultado de estas conexiones puede resultar cuando menos desordenado por lo que se recomienda usar cables pequeños que no dificulten tanto la visión.

Se observó la respuesta de los estados del sistema no lineal, además de ser susceptible al ruido producido por los jumpers, al momento de desconectar los cables, por lo que teniendo esa consideración se trató de aislar de vibraciones alrededor del circuito. La disposición de los cables de alimentación así como los cables para las lecturas de los estados con el osciloscopio se disponen como se muestra en la imagen:

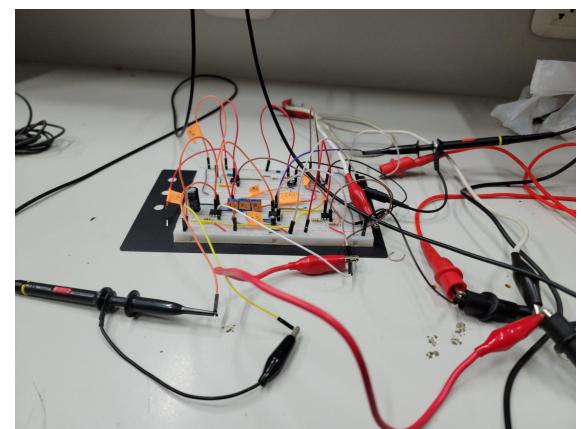


Fig. 16: Circuito de experiencia alimentado

El resultado de la planta no controlada se puede apreciar en el osciloscopio. Como se ve tanto x_1 como x_2 tienen un comportamiento senoidal inestable en concordancia con lo apreciado en la simulación.



Fig. 17: Voltaje de alimentación

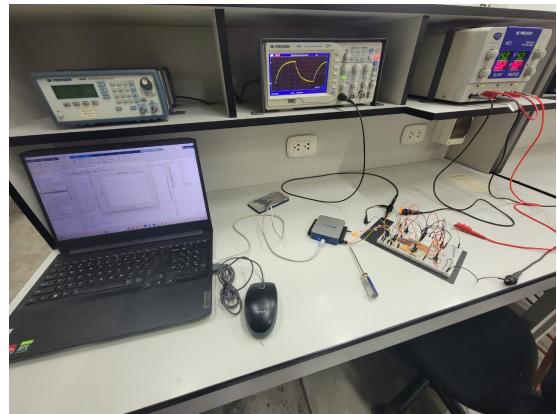


Fig. 20: Planta controlada

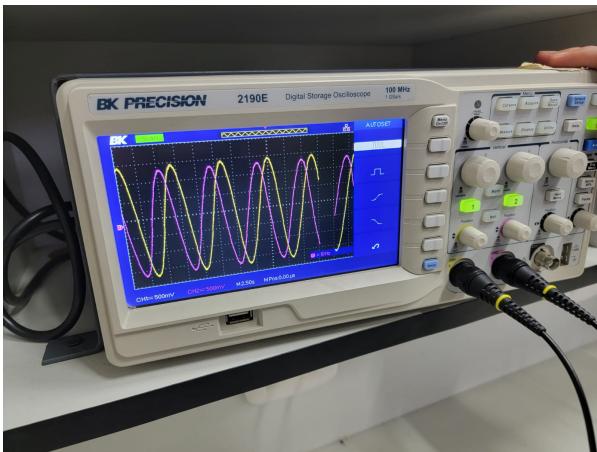


Fig. 18: x_1 (amarillo) y x_2 (morado)

Finalmente, se conectara el DAQ al circuito de la planta para poder controlarla efectivamente. Se añade un mini protoboard encima del circuito para poder usar menos jumpers y facilitar el conexionado.

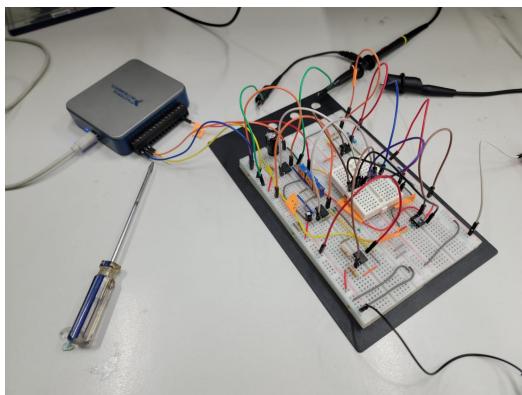


Fig. 19: Circuito para el control de la planta

V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

- Se logró implementar un control existoso que estabiliza la planta: Se puede observar con el osciloscopio que la señal llega satisfactoriamente a un nivel de 1 voltio, con un tiempo de establecimiento de aproximadamente 6 segundos, consistente con la simulación en Simulink.

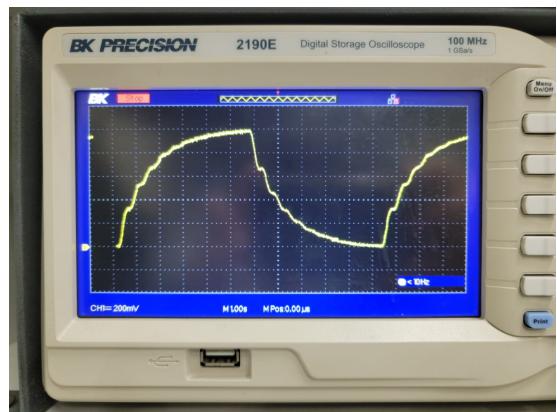


Fig. 21: Planta controlada

- Además de esto, se ha logrado que el sistema consiga un error en estado estacionario de aproximadamente cero y no presentar ningún sobreimpulso.

VI. CONCLUSIONES

- En este trabajo, se ha presentado la implementación y control de un oscilador de Van der Pol mediante un controlador PID, con el objetivo de estabilizar su comportamiento oscilatorio. A través de una serie de simulaciones y experimentos prácticos, se ha demostrado que la aplicación del control PID es eficaz para lograr la estabilidad deseada en el oscilador.
- La implementación del oscilador de Van der Pol en un circuito físico ha validado la aplicabilidad del controlador PID en un entorno real. Los resultados

experimentales han corroborado los obtenidos en las simulaciones, confirmando la efectividad del diseño propuesto.

- Este estudio aporta una solución práctica y efectiva para el control de sistemas no lineales oscilatorios, como el oscilador de Van der Pol. La metodología empleada puede ser extendida a otros sistemas dinámicos no lineales, abriendo nuevas posibilidades de investigación y desarrollo en el campo de la electrónica y el control.
- La elección del método de rediseño para la discretización de las acciones de control ha sido una decisión clave. En particular: La discretización de la acción integral mediante el método de Tustin (bidimensional) ha proporcionado una representación precisa y estable del componente integral del controlador PID, mejorando la respuesta del sistema ante errores acumulados. La discretización de la acción derivativa con el método de Backward Euler ha permitido una implementación robusta del componente derivativo, minimizando el ruido y proporcionando una respuesta suave y estable.

VII. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES

- Inicialmente se intentó simular la planta también en PROTEUS pero sin resultados satisfactorios. Se recomienda entonces verificar bien las especificaciones y librería de los componentes utilizados ya que podrían ser distintos a los que se están utilizando en la vida real.

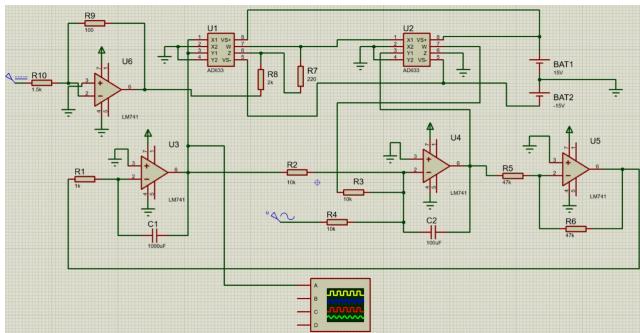


Fig. 22: Planta en PROTEUS

- Se observó que al discretizar todo el controlador utilizando únicamente el método de Tustin, el sistema se volvía inestable a pesar de emplear un tiempo de muestreo pequeño. Esto se debe a que el método de Tustin, aunque es adecuado para la acción integral, puede introducir una excesiva sensibilidad al ruido en la acción derivativa, lo que conduce a amplificaciones no deseadas de las señales de alta frecuencia. Al aplicar el método de Tustin para la acción integral y el método de Backward Euler para la acción derivativa, se logra

una combinación que balancea la precisión y la robustez, permitiendo mantener la estabilidad del sistema.

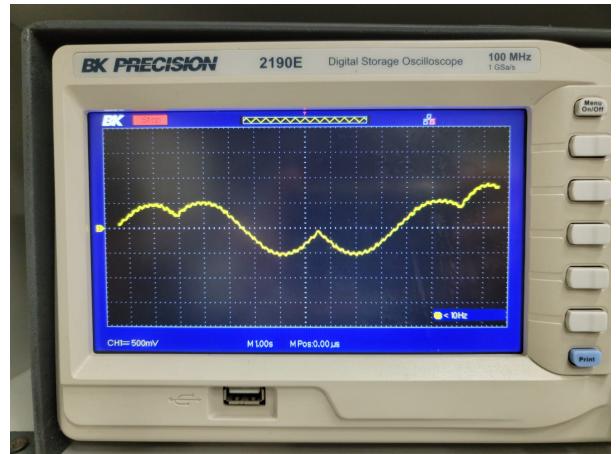


Fig. 23: Comportamiento inestable de la planta

VIII. VÍDEO

<https://drive.google.com/file/d/17zW6xTHNwOZy221Ecmf6lKG3MI6rHG/view?usp=sharing>

REFERENCES

- [1] Ogata, Katsuhiko *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Segunda edición. Prentice Hall.
- [2] Ogata, Katsuhiko *Ingeniería de Control Moderno*. Tercera edición. Prentice Hall.
- [3] Fernández del Busto y Ezeta, Ricardo *Análisis y Diseño de Sistemas de Control Digital*. Primera edición. McGraw hill.
- [4] Charles L. Phillips, H. Troy Nagle y Aranya Chakraborty *Análisis y Diseño de Sistemas de Control Digital*. Cuarta edición. Pearson.