Tarea de Programación # 2

Instrucciones

La solución de la tarea puede ser presentada en grupos de 3 o 4 estudiantes, con fecha límite de entrega el lunes 14 de Noviembre, antes de las 12:00 medio día; no se calificarán tareas entregadas posteriores a la fecha y hora indicada.

La tarea consiste en desarrollar los programas que se detallan a continuación. Los estudiantes podrán utilizar el lenguaje de programación de su elección, tanto para el desarrollo de los algoritmos de programación, como para la visualización de la información (interfaces).

Se debe de elaborar un manual de usuario, donde se debe presentar la información completa de los integrantes del grupo, la forma en la que se deben ejecutar los programas, la forma de insertar los datos, la secuencia de ejecución de las funciones, la forma de acceder a la salida de datos, entre otros que consideren necesarios.

En caso de comprobar fraude en la solución de la tarea, se aplicarán las normativas internas vigentes del ITCR.

Objetivos a evaluar

1. Comprender el algoritmo de matriz de transición entre dos bases de un mismo espacio vectorial
2. Comprender el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt.
3. Utilizar los algoritmos del álgebra matricial para resolver problemas aplicados.
4. Utilizar los conocimientos de bases de espacios vectoriales para resolver problemas aplicados.
5. Fomentar la capacidad de análisis y de razonamiento deductivo.
6. Promover el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas utilizando herramientas de programación.

I.PARTE. MATRIZ DE TRANSICIÓN

Dado un espacio vectorial V de dimensión n, con $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, \dots v'_n\}$ bases ordenadas de V, todo elemento v_j de la base de B se puede escribir como combinación lineal de los elementos de B', de la siguiente manera:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v'_i \qquad (\forall j = 1, 2, ..., n)$$

De manera que si $v \in V$, tal que $[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{aligned}
v &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \\
&= c_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1} v'_i + c_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2} v'_i + \cdots + c_n \sum_{i=1}^{n} a_{in} v'_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v'_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_j v'_i \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_j \right) v'_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} c_j \right) v'_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} c_j \right) v'_n
\end{aligned}$$

donde en la última expresión se tiene la combinación lineal del vector v en la base B', por lo tanto:

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} c_1 + a_{12} c_2 + \ldots + a_{1n} c_n \\ a_{21} c_1 + a_{22} c_2 + \ldots + a_{2n} c_n \\ \vdots \\ a_{n1} c_1 + a_{n2} c_2 + \ldots + a_{nn} c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = A[v]_B$$

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ es la matriz formada por los coeficientes de la combinación lineal de los elementos de la base de B, en la base B'. Es decir, la matriz A nos permite pasar de una base a otra mediante la fórmula

$$[v]_{B'} = A[v]_B$$

Por esta razón, la matriz A se llama **matriz de transición o bien matriz de cambio de base** de la base B a la base B'.

Ejemplo:

Considere las bases ordenadas en $\mathbb{R}^3$:

$$B = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$$
$$B' = (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)$$

se determina la matriz de transición, A, de la base B' a la base B, para ello note que:

$$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$
$$(1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

Con esto se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema nos permite establecer una relación directa entre la matriz de cambio de base de B a B' con la de B' a B.

Teorema 1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, B y B' bases ordenadas de V, si A es la matriz de transición de la base B a la base B' entonces A es invertible y su inversa A^{-1} es la matriz de transición de la base B' a la base B.*

Así por ejemplo si se quiere calcular $[(1,3,-2)]_{B'}$ entonces se aplica el teorema y se obtiene:

$$[(1,3,-2)]_{B'} = A^{-1}[(1,3,-2)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} [(1,3,-2)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Observe que efectivamente: $(1,3,-2) = -2(1,1,1) + 5(1,1,0) + (-2)(1,0,0)$ ⊠

PROGRAMACIÓN UNO Crear un programa que permita:

1. Como entrada incluir dos bases ordenadas B y B' de $\mathbb{R}^3$ y como salida:
   (a) la matriz de transición de B a B'
   (b) la matriz de transición de B' a B.
2. Como entrada cualquier vector u de $\mathbb{R}^3$, y como salida:
   (a) u escrito como combinación lineal de los elementos de la base B.
   (b) u escrito como combinación lineal de los elementos de la base B'.

Se debe validar que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que se ingresan al sistema sean una base, de lo contrario, el programa debería mostrar una mensaje que diga que no lo son y solicite ingresar nuevos vectores.

Las entradas de los vectores deben ser "flotantes", deben aceptar una cantidad mínima de dos decimales. Además se debe validar que los datos ingresados de los vectores sean numéricos.

II.PARTE. BASES ORTONORMALES

Definición 1 *Sean $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vector de $\mathbb{R}^n$ se define la norma euclidiana de v como*

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Por ejemplo la norma del vector $(2, -1, 3)$ es

$$\|(2, -1, 3)\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{15}$$

Definición 2 *Sean $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, el producto punto de v con w se denota y define como*

$$v \bullet w = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$$

Por ejemplo

$$(2, -1, 3) \bullet (1, 4, 2) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 4$$

Definición 3 *Sean $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ la proyección de v sobre w es un vector que se denota como $proy_w v$ y define por*

$$proy_w u = \left(\frac{v \bullet w}{\|w\|^2} \right) \cdot w$$

Por ejemplo, sean $v = (5, 2)$ y $w = (4, -3)$ entonces

$$proy_w u = \left(\frac{v \bullet w}{\|w\|^2} \right) \cdot w = \frac{(5,2) \bullet (4,-3)}{\left(\sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \right)^2} \cdot (4, -3) = \frac{14}{15} \cdot (4, -3)$$

Definición 4 *Sean $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ se dice V es ortogonal si todos sus vectores son unitarios ($\|v_i\| = 1, \quad (\forall i = 1, 2, ..., n)$) y ortogonales entre si, es decir:*

$$v_i \bullet v_j = 0 \quad (\forall i, j = 1, 2, ..., n; i \neq j)$$

A partir de una base cualquiera $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ poder producir una base ortonormal, mediante el siguiente proceso:

Primero se generar v_1 como:

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

Luego se genera v_2 mediante:

$$v_2 = \frac{w_2 - proy_{v_1} w_2}{\|w_2 - proy_{v_1} w_2\|}$$

El proceso continua de forma inductiva generando así una base ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ para cualquier sub espacio W de $\mathbb{R}^n$ en el cual el vector v_j esta determinado mediante

$$v_j = \frac{w_j - \sum_{k=1}^{j-1} proy_{v_k} w_j}{\|w_j - \sum_{k=1}^{j-1} proy_{v_k} w_j\|}$$

Este algoritmo se denomina **Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**.

Ejemplo:

Para la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ donde

$$w_1 = (1, -1, 1), \quad w_2 = (-2, 3, -1), \quad w_3 = (1, 2, -4),$$

determinemos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ aplicando Gram-Schmidt.

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

$$v_2 = \frac{w_2 - proy_{v_1} w_2}{\|w_2 - proy_{v_1} w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

$$v_3 = \frac{w_3 - proy_{v_1} w_3 - proy_{v_2} w_3}{\|w_3 - proy_{v_1} w_3 - proy_{v_2} w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$$

Finalmente se obtiene $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

PROGRAMACIÓN DOS Crear un programa que permita:

1. De entrada ingresar una base de $\mathbb{R}^2$ y de salida generar su respectiva base ortonormal mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
2. De entrada ingresar una base de $\mathbb{R}^3$ y de salida generar su respectiva base ortonormal mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Se debe validar que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que se ingresan al sistema sean una base, de lo contrario, el programa debería mostrar una mensaje que diga que no lo son y solicite ingresar nuevos vectores.

Las entradas de los vectores deben ser "flotantes", deben aceptar una cantidad mínima de dos decimales. Además se debe validar que los datos ingresados de los vectores sean numéricos.

III.PARTE. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

La tarea será evaluada de la siguiente manera:

#	Criterios	Puntaje
1	Manual de usuario	10
2	Funcionalidad de los programas	
	Programa UNO	50
	Programa DOS	30
3	Interface	10
	Total	100
