Chapitre 6

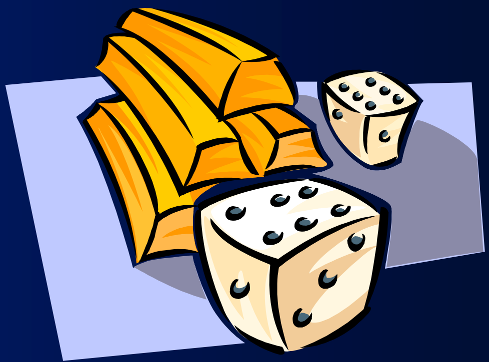
Premier test d’hypothèse

Rappel

1. Population vs. Echantillon
2. Distribution population → Probabilité score
3. Distribution normale → Probabilité score

Le principe du test d'hypothèse

Le dé est-il truqué ?

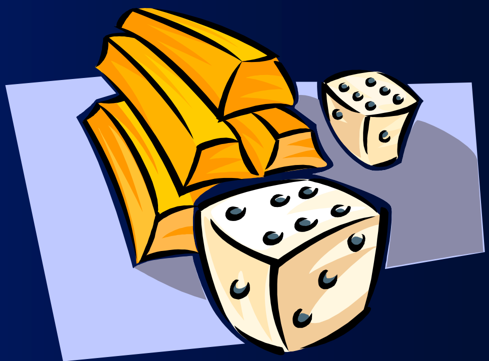


Résultat d'un lancé : 6

Probabilité: 1/6 (0,17)

Le principe du test d'hypothèse

Le dé est-il truqué ?



Résultats de dix lancés :

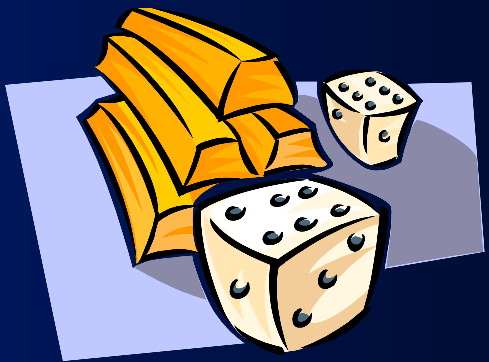
6, 6, 6, 2, 6, 6, 6, 6, 6 ,6

Très improbable !!!

Etapes de ce test d'hypothèse

1. Poser une hypothèse:

Le dé est normal – P = 0,17



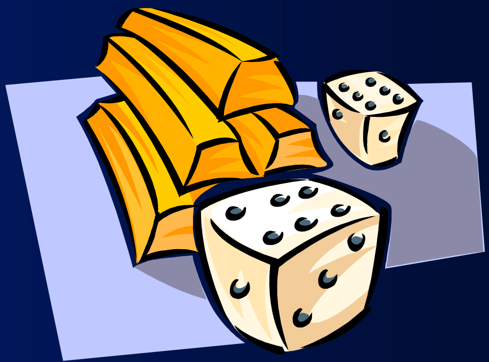
2. Récolter des observations :

Neuf 6 en dix tirages

3. Calculer la probabilité d'obtenir les résultats que j'ai observé si l'hypothèse posée était correcte

P = 0,0000008

Etapes de ce test d’hypothèse



4. Tirer une conclusion en fonction de la probabilité calculée:

La probabilité d’obtenir neuf 6 est tellement faible avec un dé normal que j’en conclus que le dé doit être truqué

Les étapes du test d'hypothèse

1. Poser une hypothèse

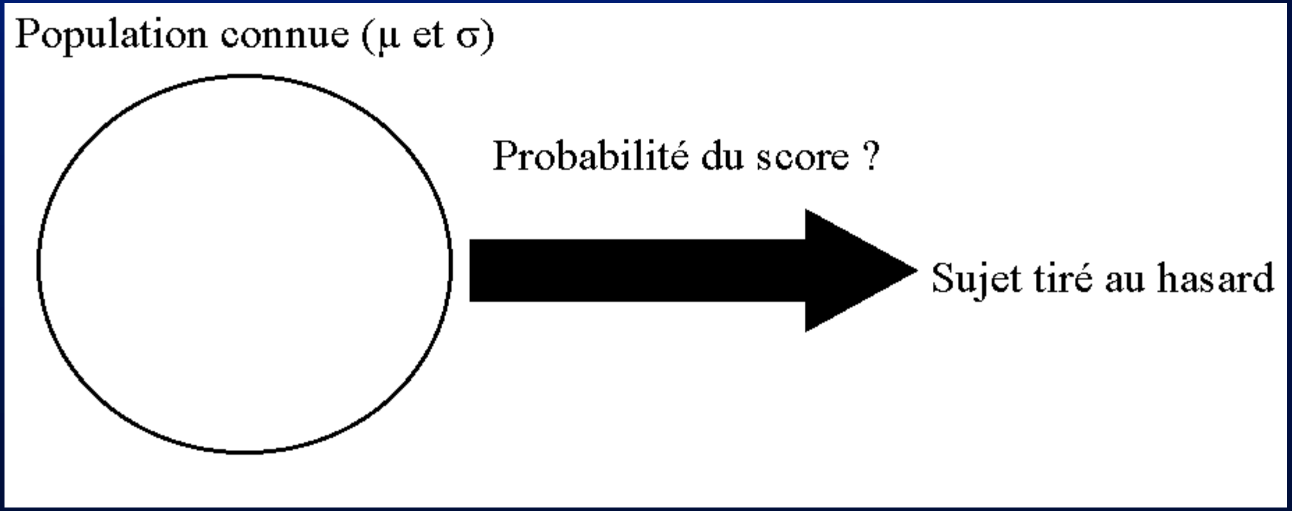
2. Récolter des observations

3. Calculer la probabilité d'obtenir ces observations si l'hypothèse posée est correcte

4. Tirer une conclusion en fonction de la probabilité calculée
   Si la probabilité est très faible : je rejette l'hypothèse.
   Sinon, je conserve mon hypothèse.

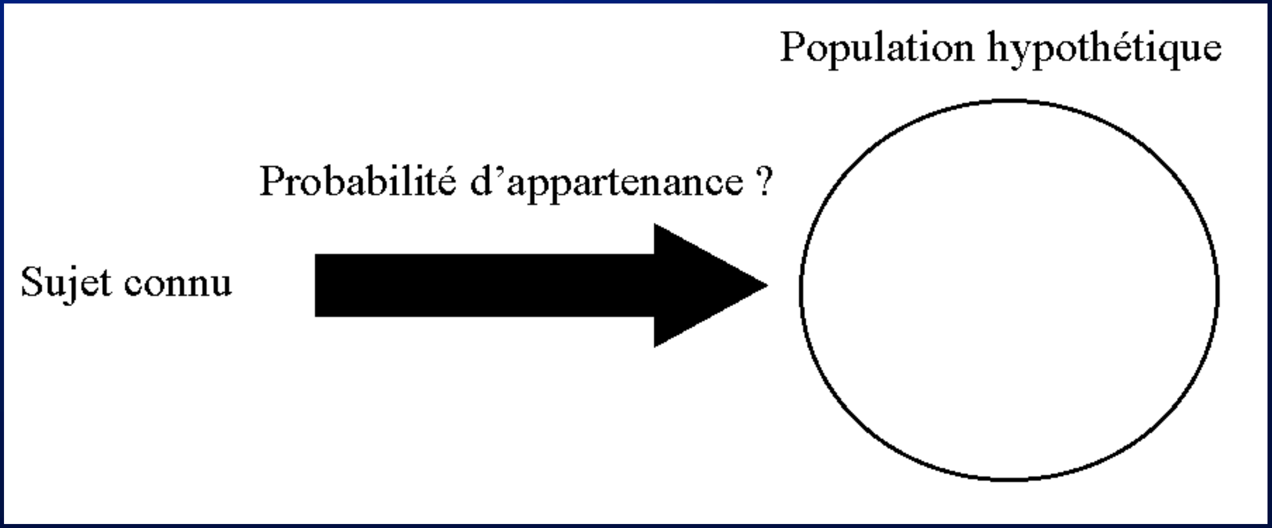
Test d’hypothèse avec la distribution normale

Chapitre 5: Probabilité de scores tirés au hasard dans une population normalement distribuée



Test d’hypothèse avec la distribution normale

Le test d’hypothèse :



Exemple

Les adultes normaux en bonne santé tapent du doigt à un rythme moyen de 100 tapotements en 20 secondes, avec un écart-type de 20

Les personnes souffrant de troubles neurologiques tapent du doigt avec un rythme plus lent

Exemple

Un sujet a obtenu un score de 70

Personne lente ou souffrant de troubles neurologiques ?

Test d'hypothèse

1. Je pose une hypothèse :

   Le sujet est sain (μ=100, σ=20)

2. Récolter des observations :

   Un score de 70

3. Calculer la probabilité d'obtenir cette observation si l'hypothèse posée est correcte

Test d'hypothèse

Probabilité d'obtenir un score aussi petit que 70 si population avec μ=100 et σ=20 ?

$P(X \leq 70) \quad = P(Z<-1,5) \quad = P(Z>1,5) \quad = 0,0668$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{70 - 100}{20} = -1,5$$

Test d'hypothèse

4. <u>Tirer une conclusion </u>:

La probabilité pour un sujet normal d'avoir un score aussi faible que 70 est de 0,07 (7%).

Les conventions:

On rejette une hypothèse lorsque la probabilité est inférieure à 0,05 (5%). (= seuil de signification)

Test d'hypothèse

4. <u>Tirer une conclusion</u> :

La probabilité calculée est supérieure au seuil de signification: 0,07 > 0,05

Le score du sujet n'est pas suffisamment bas pour affirmer qu'il souffre de troubles neurologiques

L'hypothèse nulle

Pourquoi poser une hypothèse

(appelée hypothèse nulle)

qui va directement à l'encontre de ce que l'on

espère démontrer ?

- **Point de vue théorique**
- **Point de vue pratique = calculs**

L'hypothèse nulle

On pose généralement:

Une hypothèse nulle (H_0)

Une hypothèse alternative (H_A)

Exemple d’hypothèse nulle

Alfred a obtenu un score de 40 tapotements en 20 secondes.

Fait-il partie d’une population de sujets atteints de troubles neurologiques dont la vitesse de tapotement est inférieure à 100?

Exemple d’hypothèse nulle

Hypothèse nulle :

Alfred appartient à la population saine ($\mu = 100$)

Hypothèse alternative :

Alfred appartient à une population de sujets affectés d’un trouble neurologique ($\mu < 100$)

Premier test d’hypothèse formel

$H_0 : \mu = 100$

$H_A : \mu < 100$

$\sigma = 20$

$P(X \leq 40) = P(Z < -3) = P(Z > 3) = 0{,}0013$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{40 - 100}{20} = -3$$

Premier test d'hypothèse formel

Puisque $p=0{,}0013 < 0{,}05$ rejeter H_0

Alfred a un score tellement faible qu'il est très improbable qu'il appartienne à une population saine. J'en conclus donc qu'il appartient à une population souffrant de troubles neurologiques.

La conclusion du test d'hypothèse

Si probabilité < seuil de signification: rejet H_0

Si probabilité > seuil de signification:

non-rejet de H_0 $\neq$ H_0 est vraie

Exemple 1

Résultats de 10 tirages sur un dé:

6, 5, 2, 6, 4, 3, 6, 6, 5, 1

Exemple 1

Résultats de 10 tirages sur un dé:

6, 5, 2, 6, 4, 3, 6, 6, 5, 1

Probabilité sous H_0: 0,07

0,07 > 0,05 non rejet de H_0

Conclusion: pas de preuves suffisantes pour affirmer que le dé est truqué

Exemple 2

Sujet ayant obtenu un score de 70 tapotements

Probabilité sous H_0: 0,07

0,07 > 0,05 non rejet de H_0

Conclusion: pas suffisamment de preuves pour rejeter l’hypothèse selon laquelle ce sujet appartient à la population saine

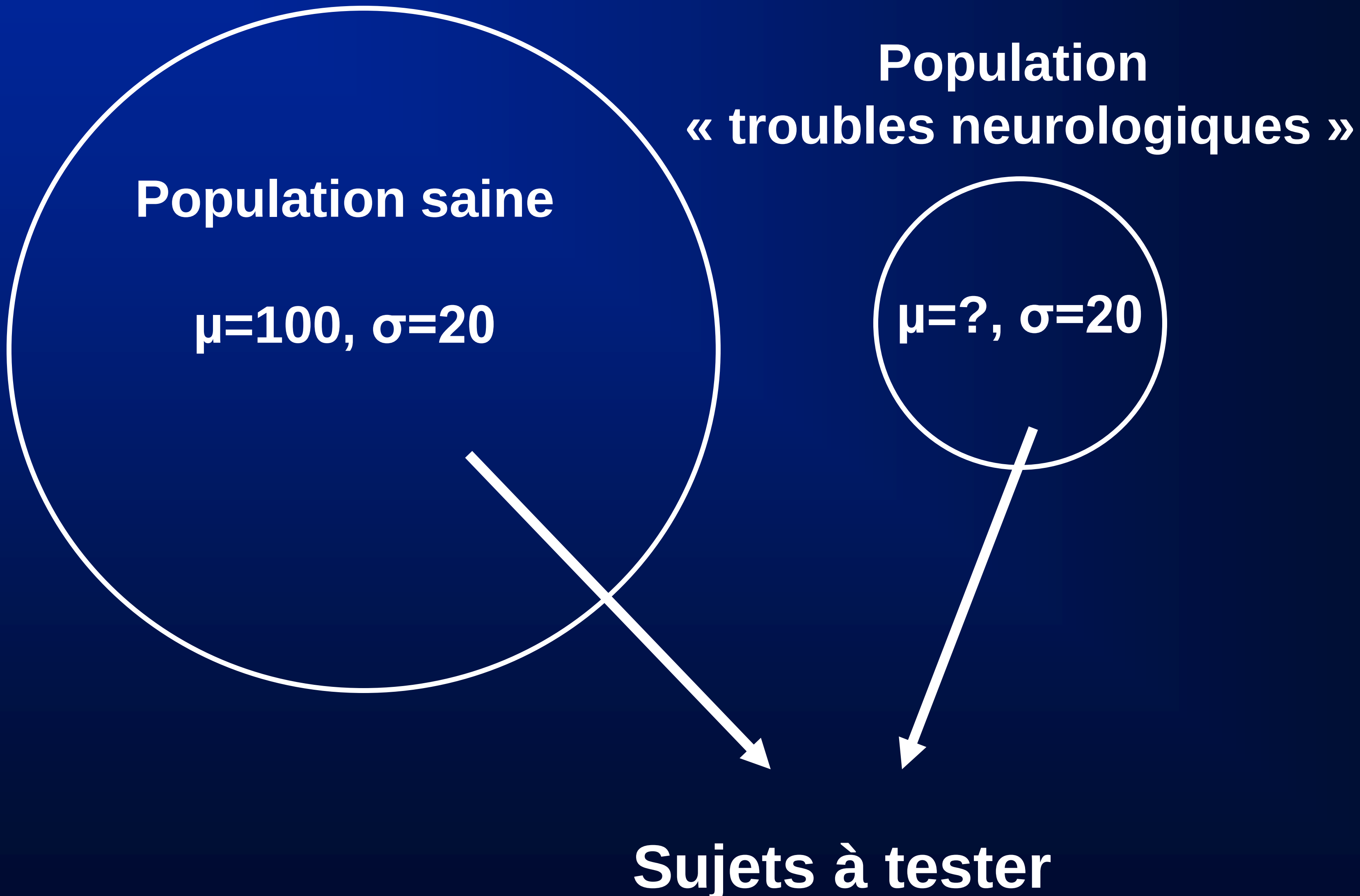
Erreurs α et β

Lors d'un test statistique, on peut commettre deux types d'erreur:

1. Rejeter H_0 vraie = faux positif

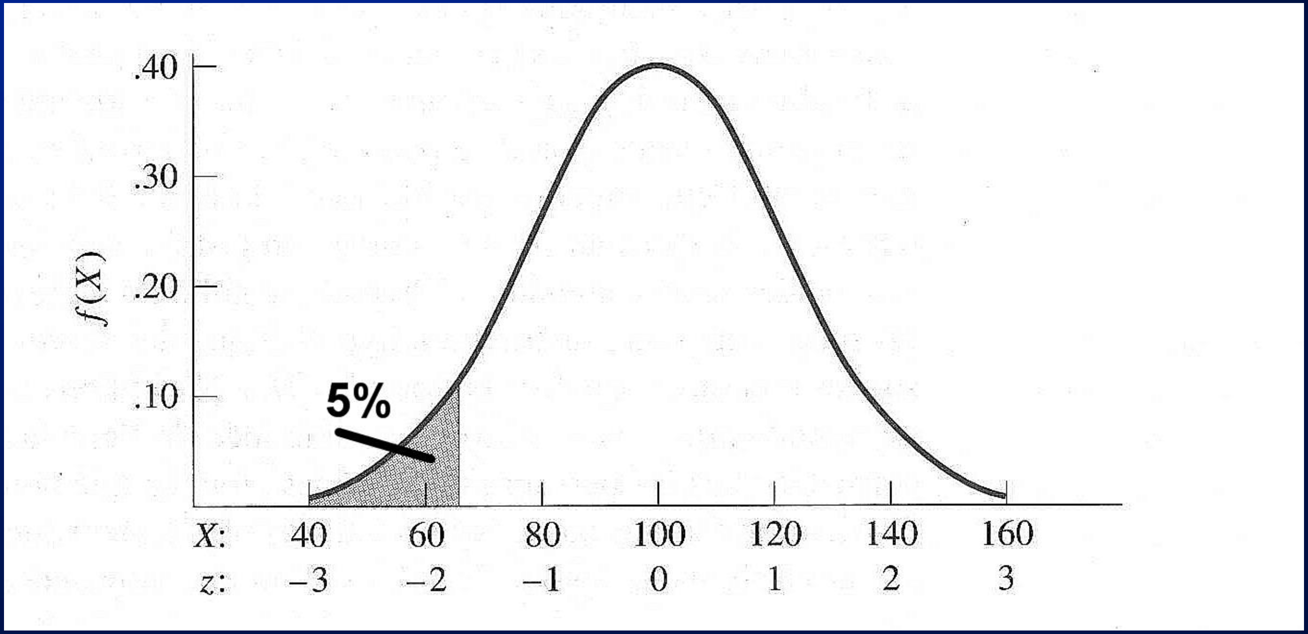
2. Ne pas rejeter H_0 fausse = faux négatif

Erreurs α et β



Erreurs α et β

Sujets sains



5% classés comme troubles neurologiques

Erreurs α et β

Rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie

= erreur de première espèce

= probabilité α (alpha)

= faux positif

Le seuil de signification est fixé en référence au risque d'erreur de première espèce que l'on veut maintenir à 5%

Erreurs α et β

En diminuant le seuil de signification

(exemple 0,01)

On diminue le risque d'erreurs α

Mais on augmente le risque d'erreurs β

Erreurs α et β

Ne pas rejeter H_0 lorsqu'elle est fausse

= erreur de seconde espèce

= probabilité β (bêta)

= faux négatif

Exemple d'erreur de seconde espèce:

Classer un sujet malade dans la population saine

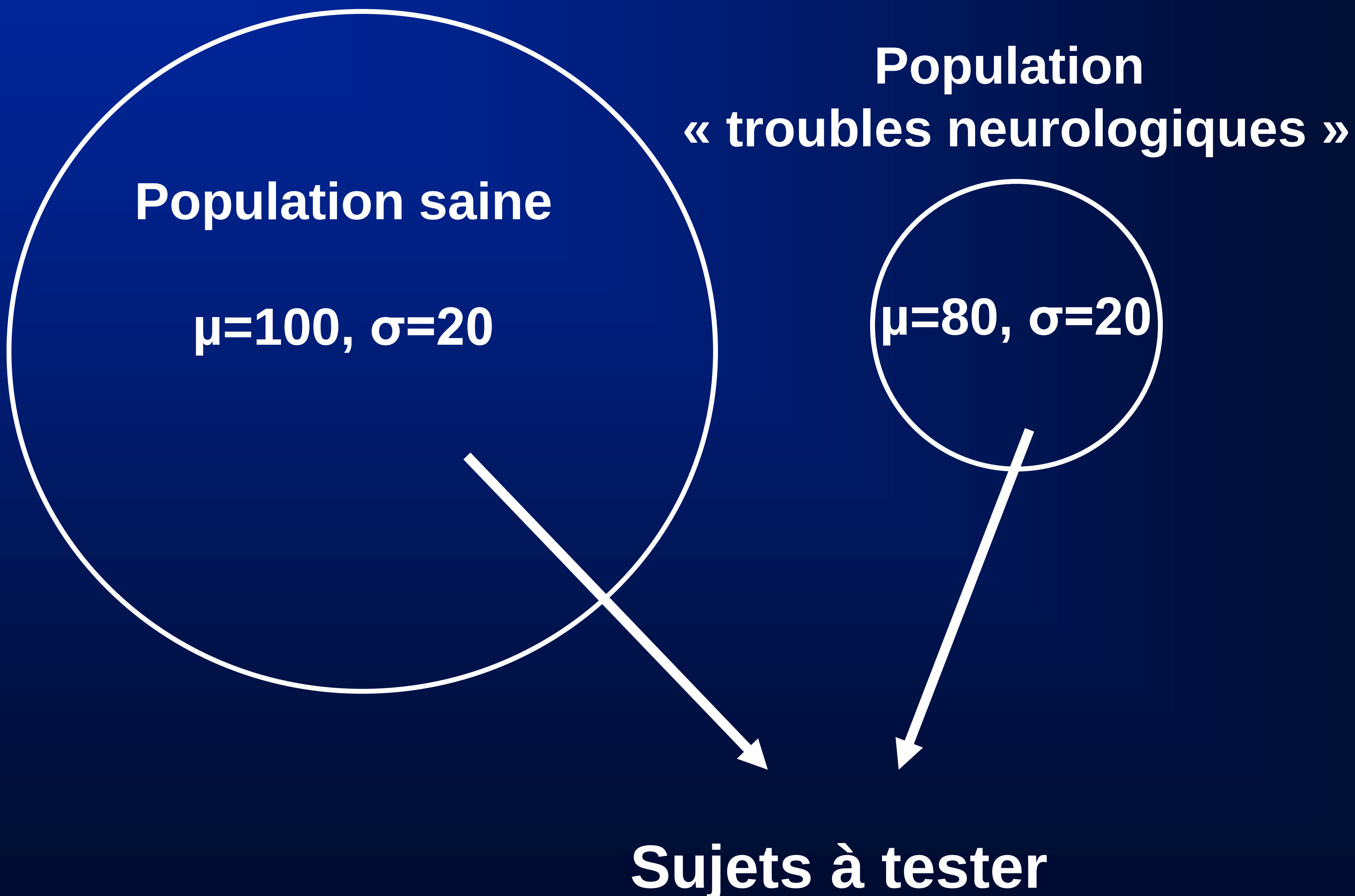
Calcul des probabilités α et β

Si on fixe le seuil de signification à 0,05:

$\alpha = 0{,}05$

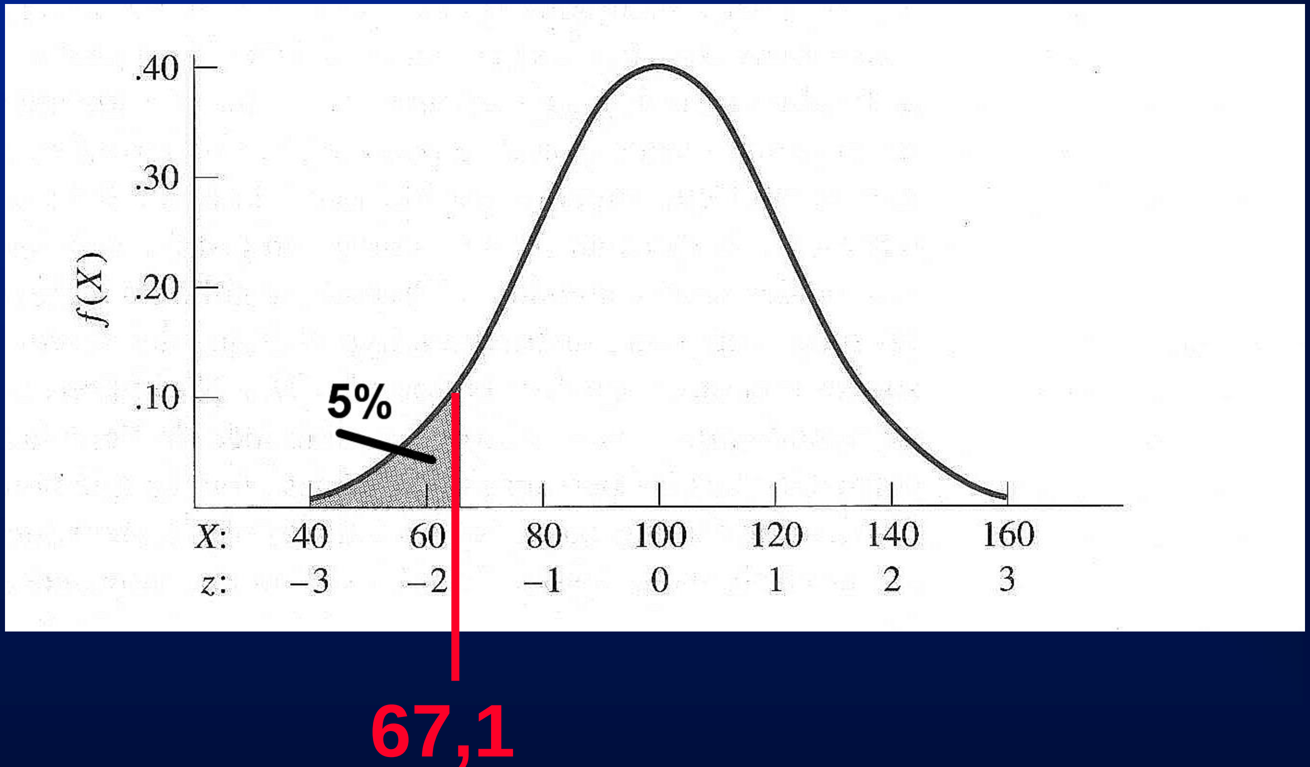
Calculer β nécessite de connaître la moyenne de la population alternative

Erreurs α et β



Erreurs α et β

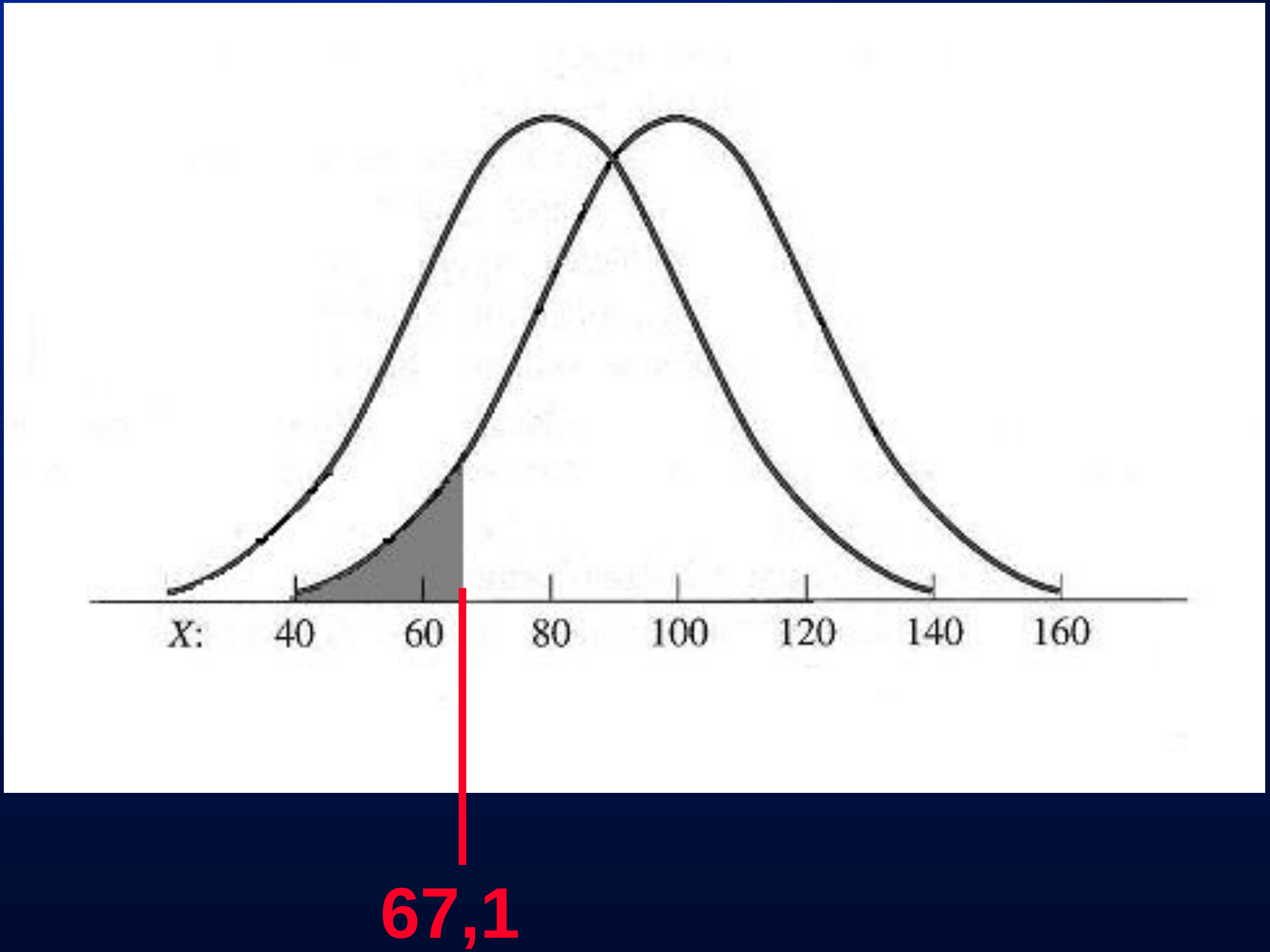
Sujets sains



$0,05 = P(Z<-1,645)=P(X<67,1)$

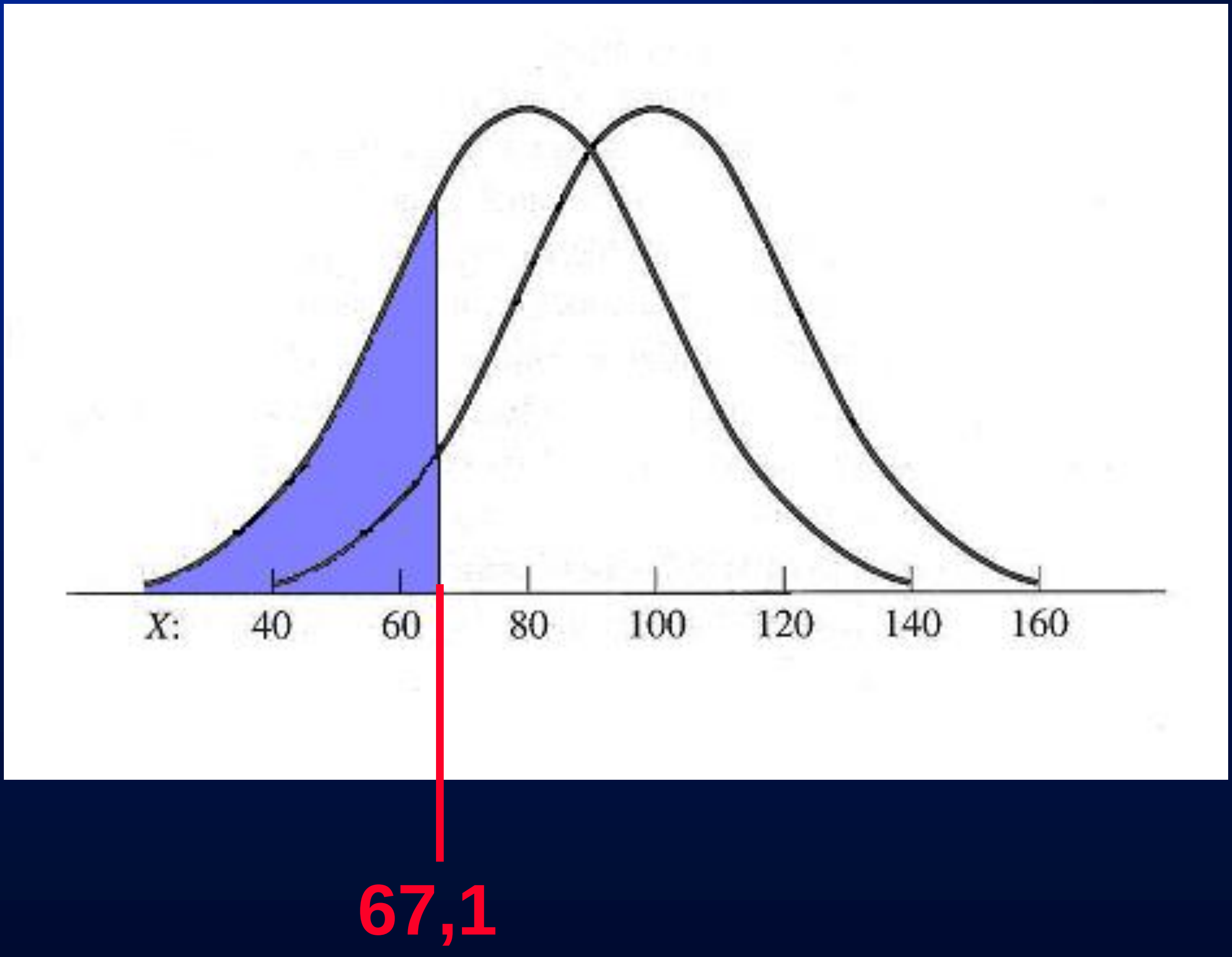
Erreurs α et β

Superposition des deux populations



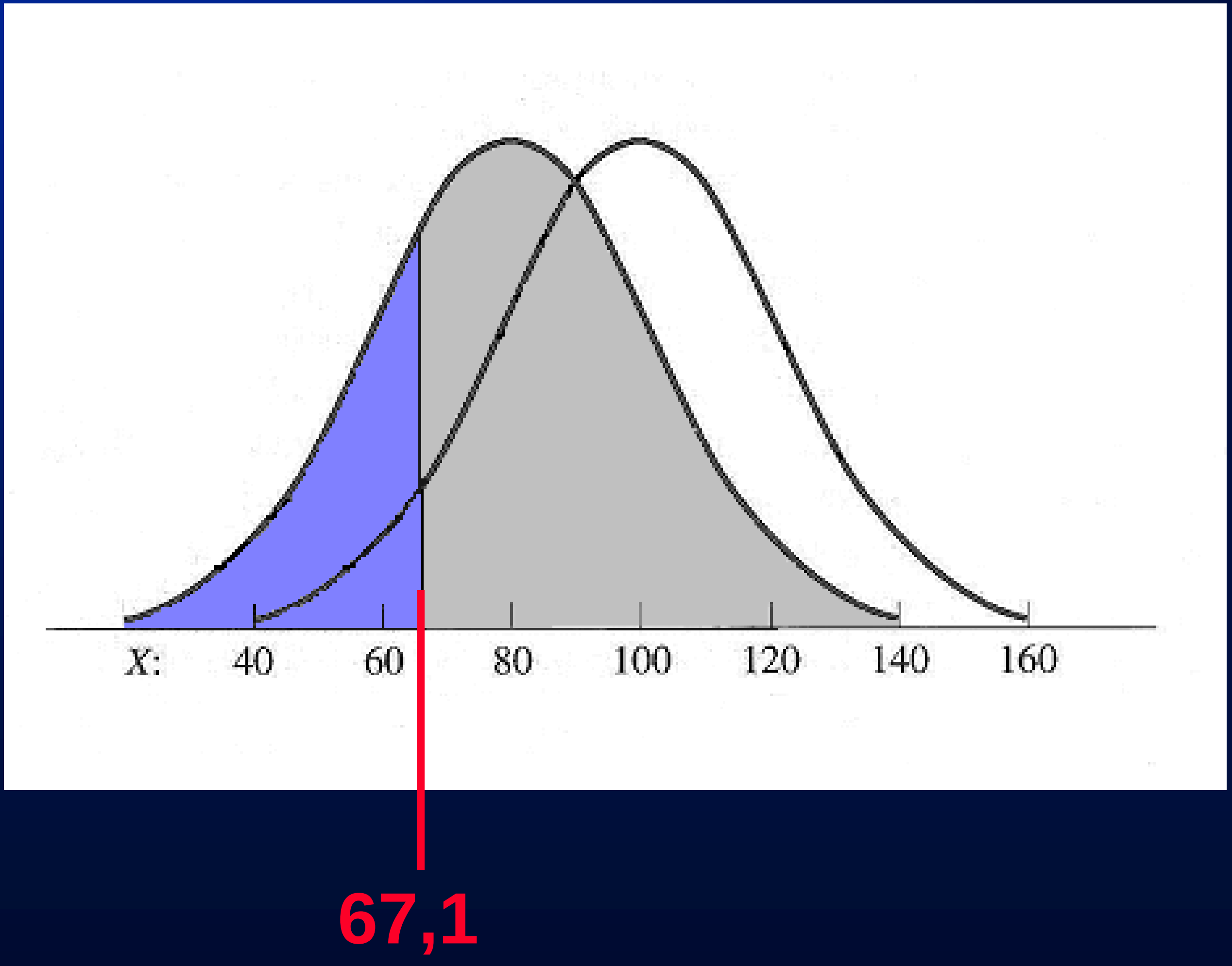
Erreurs α et β

Superposition des deux populations



Erreurs α et β

Superposition des deux populations



Calcul des probabilités α et β

Calculer la probabilité β lorsque H_A: μ = 80

= Calculer probabilité que X > 67,1 avec μ=80 et σ=20

P(X>67,1) = P(Z>-0,645) = P(Z<0,645) = 0,74

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{67{,}1-80}{20} = \frac{-12{,}9}{20} = -0{,}645$$

Calcul des probabilités α et β

Donc probabilité de commettre une erreur de seconde espèce

= β = 0,74

J'ai 74% de chance de ne pas diagnostiquer un sujet souffrant de troubles neurologiques

Calcul des probabilités α et β

Que se passe-t-il si je fixe α à 0,01 ?

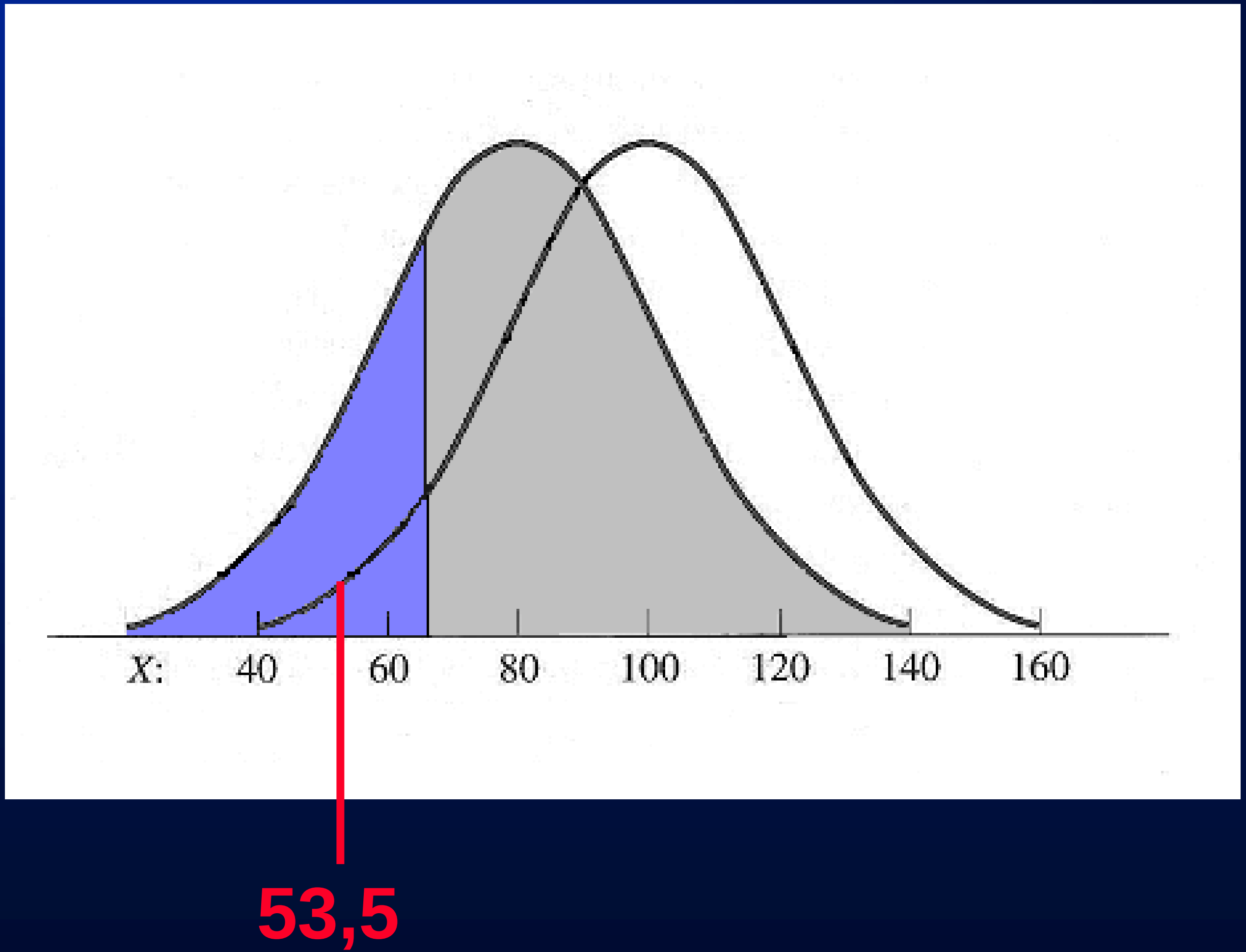
La limite de rejet pour H_0 est maintenant:

53,5

$0,01 = P(Z<-2,325) = P(X<53,5)$

Erreurs α et β

Superposition des deux populations



Calcul des probabilités α et β

Calculer probabilité que X > 53,5 avec μ=80 et σ=20

P(X>53,5) = P(Z>-1,325) = P(Z<1,325) = 0,91

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{53{,}5-80}{20} = \frac{-26{,}5}{20} = -1{,}325$$

Calcul des probabilités α et β

Donc probabilité de commettre une erreur de seconde espèce si α devient 0,01

$= \beta = 0,91$

J'ai 91% de chance de ne pas diagnostiquer un sujet souffrant de troubles neurologiques

Résumé

Les étapes du calcul de la probabilité β :

1. Calculer la limite de rejet de H_0

= calculer la valeur de X en dessous de laquelle H_0 serait rejetée

2. Calculer la probabilité pour un sujet de la population altenative d'avoir un score supérieur à cette limite

Exemple

Calculer la probabilité β si la population des personnes souffrant de troubles neurologiques ont une moyenne de 50 et si α est fixé à 0,01

Exemple

1. Calculer la limite de rejet de H_0

$0{,}01 = P(Z<-2{,}325) = P(X<53{,}5)$

Limite de rejet = 53,5

Calcul des probabilités α et β

Calculer probabilité que X > 53,5 avec μ=50 et σ=20

P(X>53,5) = P(Z>0,175) = 0,43

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{53{,}5 - 50}{20} = 0{,}175$$

Calcul des probabilités α et β

Donc β = 0,43

J'ai 43% de chance de ne pas diagnostiquer un sujet souffrant de troubles neurologiques si la moyenne de ces sujets est 50

Etat réel des choses

Décision	H_0 vraie	H_0 fausse
Rejet de H_0	Erreur de première espèce $p = \alpha$	Décision correcte $p = 1\text{-}\beta$ = puissance
Non-rejet de H_0	Décision correcte $p = 1\text{-}\ \alpha$	Erreur de seconde espèce $p = \beta$

Tests unilatéraux et bilatéraux

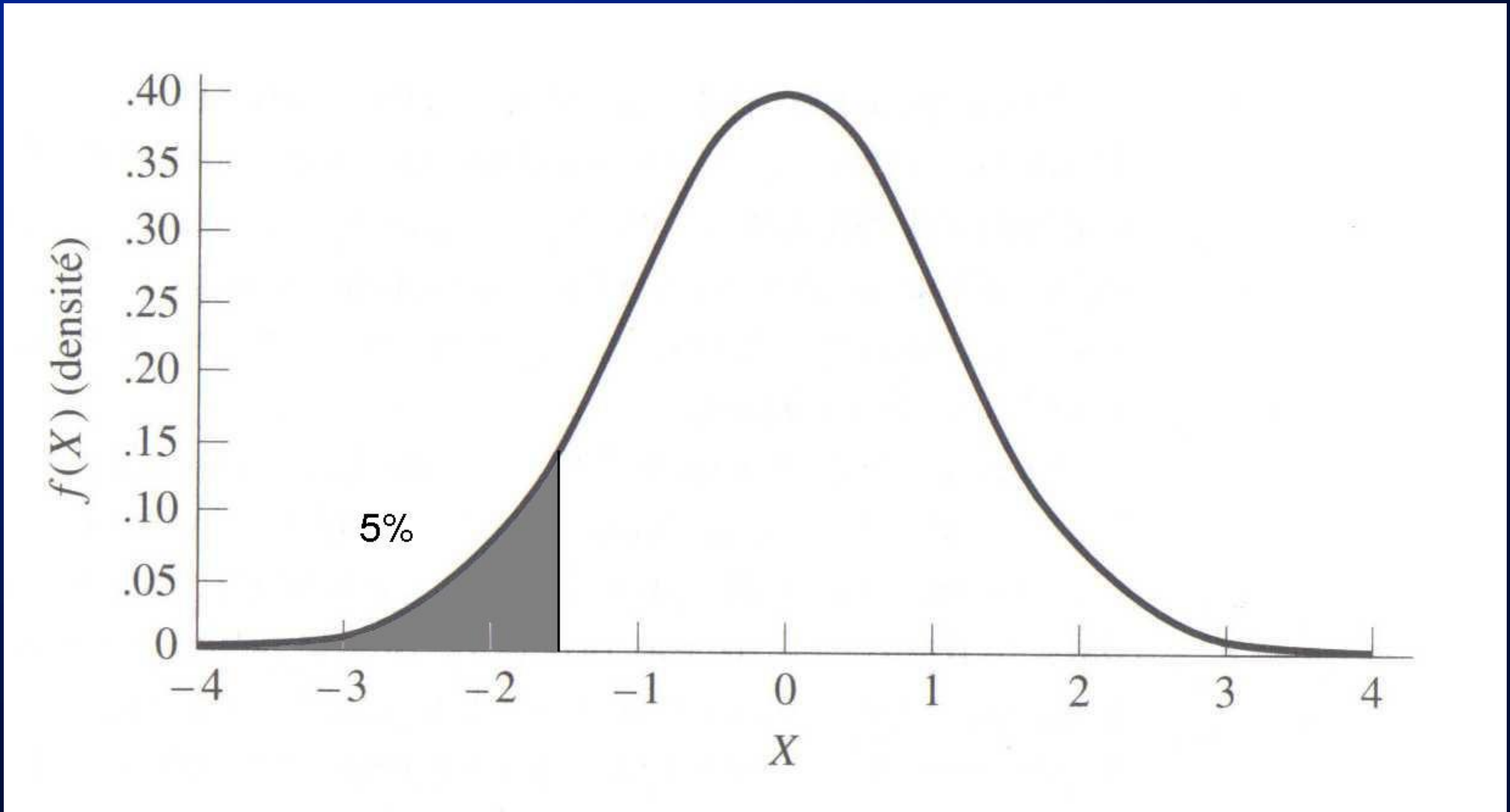
Test unilatéral:

On rejette H_0 quand les scores s'éloignent de la moyenne dans une seule direction

Test bilatéral:

On rejette H_0 aussi bien lorsqu'un score est anormalement bas que lorsqu'il est anormalement haut

Test unilatéral



Test bilatéral

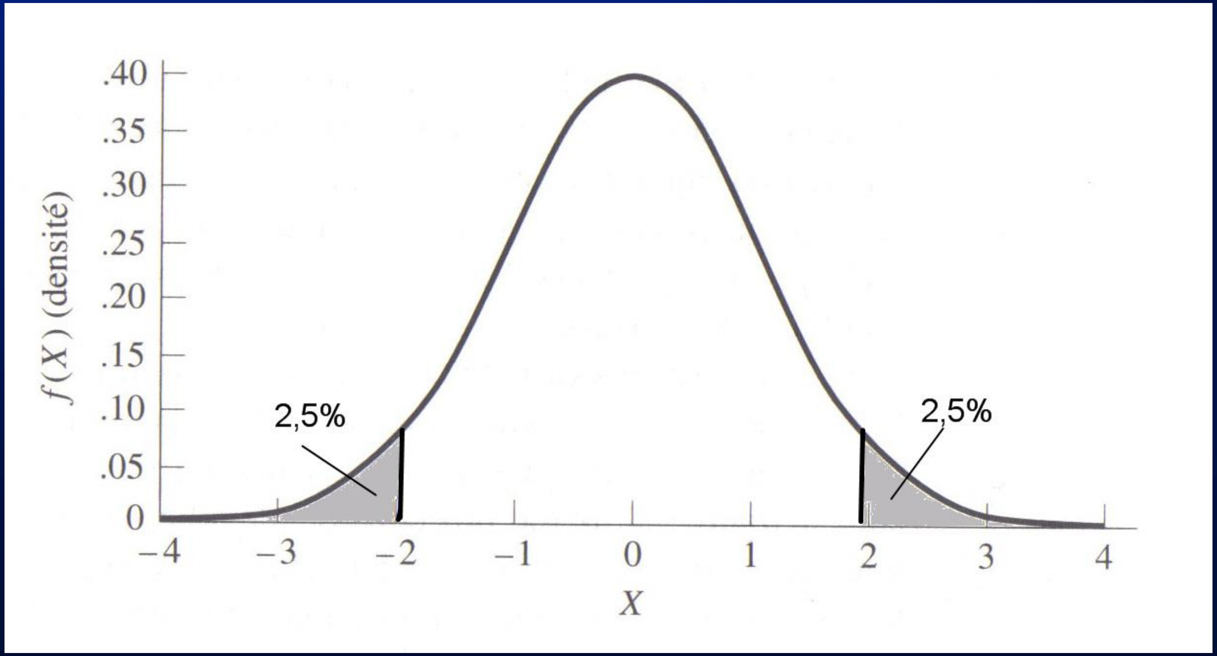
Exemple:

Vitesse de tapotement excessivement faible <u>et</u> excessivement rapide sont signes de troubles neurologiques

Test bilatéral

Deux changements majeurs:

1. **Calculer la probabilité d'être + grand et + petit**
2. **Adapter le α = diviser α par 2**



Test bilatéral

Exemple:

Henry a obtenu un score de tapotement de 58. Quel diagnostic ?

Pour être exhaustif, il faudrait tester:

$P(X<58) < \alpha/2$?

et

$P(X>58) < \alpha/2$?

Test bilatéral

Exemple:

Henry a obtenu un score de tapotement de 58.
Quel diagnostic ?

Dans la pratique, on teste:

$P(X<58) < \alpha/2$?

Test bilatéral

P(X<58) = P (Z<-2,1) = P(Z>2,1)

= 0,0179

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{58 - 100}{20} = -2{,}1$$

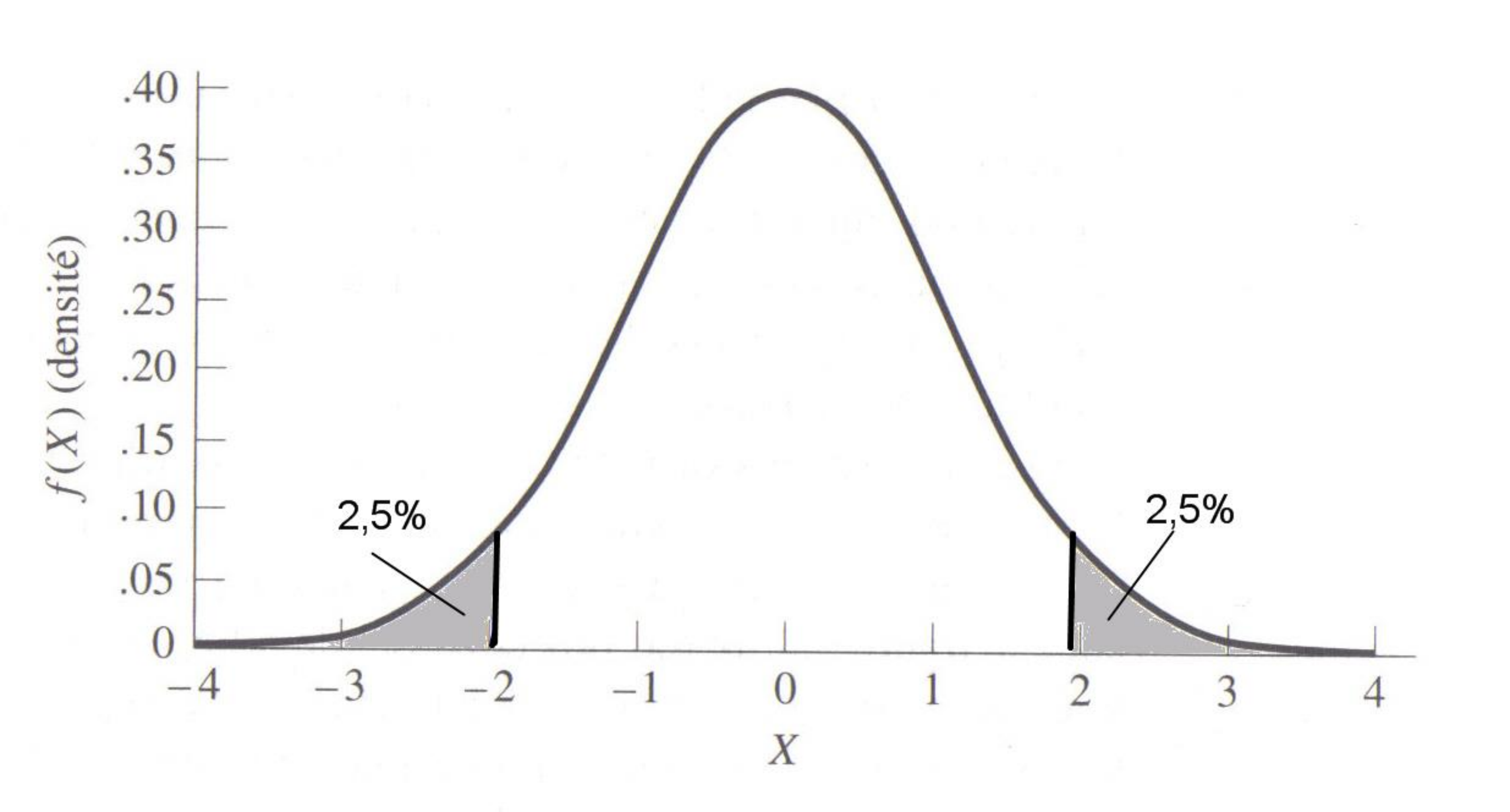
Test bilatéral

$P(X<58) = 0{,}0179$

$0{,}0179 < 0{,}025$, Rejeter H_0

Henry a un score tellement faible qu'il appartient vraisemblablement à une population dont les scores sont <u>inférieurs</u> à la population saine

Test bilatéral



Test bilatéral

Fred a obtenu un score de tapotement de 160

P(X>160) = P(Z>3) = 0,0013

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{160 - 100}{20} = 3$$

Test bilatéral

$P(X>160) = 0{,}0013$

$0{,}0013 < 0{,}025$, Rejeter H_0

Fred a un score tellement grand qu'il appartient vraisemblablement à une population dont les scores sont <u>supérieurs</u> à la population saine

Technique de la valeur critique

Plutôt que calculer précisément la probabilité p associée aux données, on peut réaliser un test d'hypothèse en se basant sur les valeurs critiques de Z

Test habituel: $X \rightarrow Z \rightarrow p$ comparé à α

Avec la valeur critique: $X \rightarrow Z$ comparé à $Z_{critique}$

Technique de la valeur critique

α	Valeur critique de Z	Valeur critique de Z
0,10	-1,28	1,28
0,05	-1,645	1,645
0,025	-1,96	1,96
0,01	-2,32	2,32
0,005	-2,57	2,57

Technique de la valeur critique

Comment obtient-on les valeurs de ce tableau?

Exemple: $Z_{0,05} = 1,645$

1,645 est la valeur de Z qui donne p=0,05

Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
1,62	0,9474	0,0526
1,63	0,9484	0,0516
1,64	0,9495	0,0505
1,65	0,9505	0,0495
1,66	0,9515	0,0485
1,67	0,9525	0,0475
1,68	0,9535	0,0465
1,69	0,9545	0,0455
1,70	0,9554	0,0446

Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
1,62	0,9474	0,0526
1,63	0,9484	0,0516
1,64	0,9495	0,0505
1,65	0,9505	0,0495
1,66	0,9515	0,0485
1,67	0,9525	0,0475
1,68	0,9535	0,0465
1,69	0,9545	0,0455
1,70	0,9554	0,0446

Technique de la valeur critique

1,645 est la valeur de Z qui donne $p=0,05$

Tout Z supérieur à 1,645 donnera $p<0,05$ et rejet de H_0

Tout Z inférieur à 1,645 donnera $p>0,05$ et non rejet de H_0

Technique de la valeur critique

Alfred a obtenu un score de tapotement de 40

H_0 : μ = 100

H_A : μ < 100 σ = 20

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{40 - 100}{20} = -3$$

$Z_{obs} = -3 < Z_{0,05} = -1{,}645$ donc $p<0{,}05$, rejeter H_0

Technique de la valeur critique

Alphonse a un QI de 150

H_0 : μ = 100

H_A : μ ≠ 100   σ = 15

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{150 - 100}{15} = 3{,}33$$

Z_{obs} = 3,33 > $Z_{0,025}$ = 1,96 donc p<0,025, rejeter H_0

L'intervalle de confiance

Technique alternative au test d'hypothèse

Reprenons l'exemple de Henry qui a un score de tapotement de 58

Nous avons rejeté l'hypothèse H_0
Donc Henry n'appartient pas à la population $\mu=100$

L'intervalle de confiance

A quelle population Henry appartient-il ?

On pourrait essayer de deviner et tester nos hypothèses:

$\mu = 98$?

L'intervalle de confiance

H_0: μ = 98

H_A : μ ≠ 98

P(X<58) = P(Z<-2) = 0,0228

0,0228 < 0,025, rejeter H_0

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{58 - 98}{20} = -2$$

L'intervalle de confiance

On pourrait essayer de deviner et tester nos hypothèses:

$\mu = 98$: rejeter H_0

$\mu = 80$: ne pas rejeter H_0

$\mu = 70$: ne pas rejeter H_0

$\mu = 60$: ne pas rejeter H_0

Etc….

L’intervalle de confiance

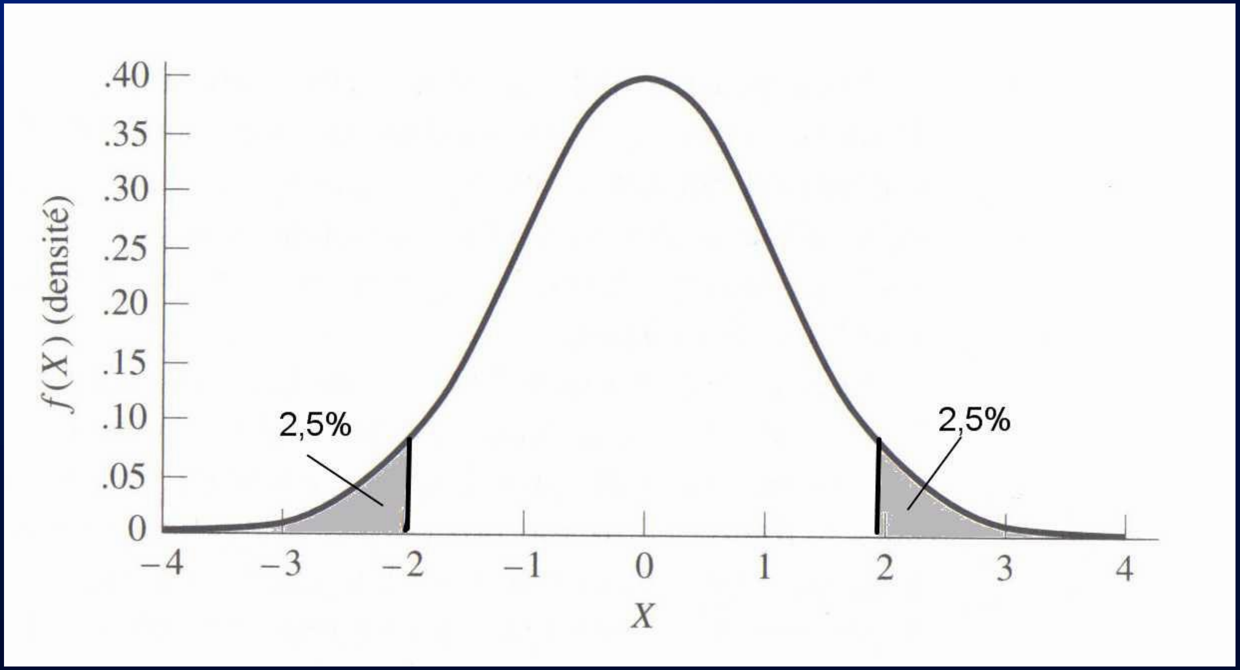
Finalement, on aurait une réponse du type:

Si α est fixé à 0,05:

On rejette H_0 pour toutes les moyennes <18 et >97

L’intervalle de confiance

La technique de l’intervalle de confiance permet d’obtenir la même information beaucoup plus facilement



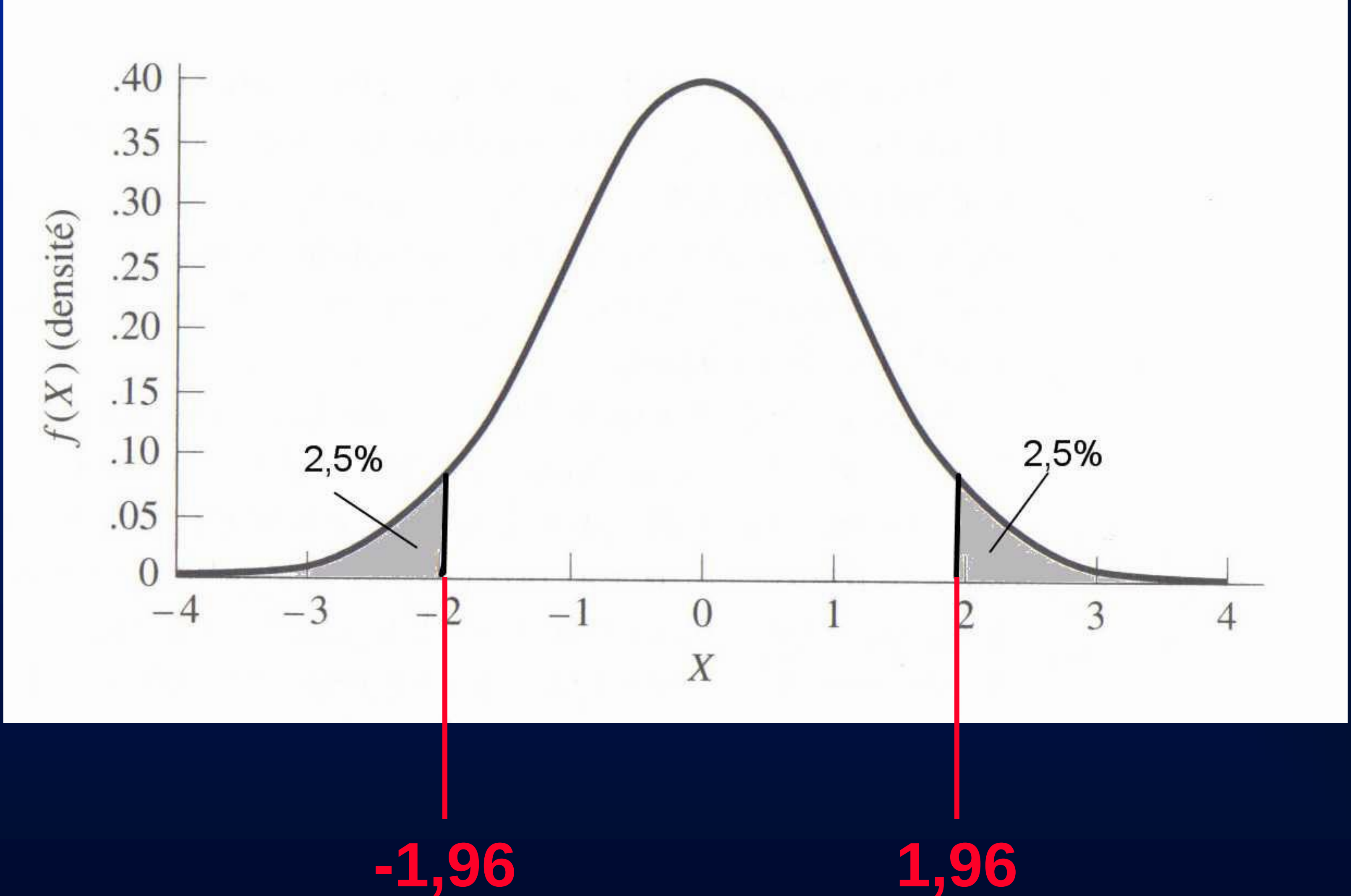
Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
1,90	0,9713	0,0287
1,91	0,9719	0,0281
1,92	0,9726	0,0274
1,93	0,9732	0,0268
1,94	0,9738	0,0262
1,95	0,9744	0,0256
1,96	0,9750	0,0250
1,97	0,9756	0,0244
1,98	0,9761	0,0239

Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
1,90	0,9713	0,0287
1,91	0,9719	0,0281
1,92	0,9726	0,0274
1,93	0,9732	0,0268
1,94	0,9738	0,0262
1,95	0,9744	0,0256
1,96	0,9750	0,0250
1,97	0,9756	0,0244
1,98	0,9761	0,0239

L’intervalle de confiance



L'intervalle de confiance

On sait maintenant que les limites de rejet de H_0 pour Z sont –1,96 et +1,96

En transformant la formule du Z, on peut retrouver les moyennes que l'on accepterait

L’intervalle de confiance

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

devient

$$\mu = X - Z\sigma$$

L'intervalle de confiance

Pour notre sujet avec un score de 58:

<u>Limite inférieure</u>

$$\mu = X - Z\sigma = 58 - (1{,}96 \times 20) = 18{,}8$$

<u>Limite supérieure</u>

$$\mu = X - Z\sigma = 58 - (-1{,}96 \times 20) = 97{,}2$$

L'intervalle de confiance

En résumé, on écrira:

$$18{,}8 < \mu < 97{,}2$$

Nous pouvons affirmer avec une certitude de 95% que Henry appartient à une population dont la moyenne se trouve entre les valeurs de 18,8 et 97,2

L’intervalle de confiance

Formule complète:

$$IC_{0,95} = X \pm Z_{\alpha/2}\sigma$$

$IC_{0,95}$ signifie l’intervalle de confiance à 95%

X est le score du sujet

$Z_{\alpha/2}$ est la limite d’exclusion sur la distribution normale réduite

σ est l’écart-type de la population

L’intervalle de confiance

L’intervalle de confiance permet de répondre aux mêmes questions que le test d’hypothèse