Chapitre 5

Concepts de base des probabilités

Le concept d’événement

Obtenir 6 au lancé d’un dé

Survenue d’un accident de la route

Etre un homme (ou une femme)

Obtenir “pile” sur une pièce

Etc…

Evénements indépendants

Deux événements sont indépendants si l'occurrence ou la non-occurrence de l'un n'a pas d'influence sur l'occurrence ou la non-occurrence de l'autre

Exemple: Résultats sur deux dés

Contre-exemple: Etre une femme et travailler à temps partiel

Evénements mutuellement exclusifs

Deux événements sont mutuellement exclusifs si l'occurrence de l'un exclut l'occurrence de l'autre

Exemple: Pile et face

1 et 6 sur un dé

Distinction / Grande distinction

Evénements mutuellement exclusifs

Un ensemble d'événements est exhaustif s'il inclut tous les résultats possibles

Exemple: Pile et face

1, 2, 3, 4, 5, 6 sur un dé

Probabilités

0% 100%

0,00 1,00

Evénement impossible Evénement certain

Probabilités

0,00  **1,00**

0,0000001
Pratiquement aucune
Chance de se réaliser

0,999
Presque certain

La loi additive

Pour un ensemble d'événements <u>mutuellement exclusifs</u>, la probabilité d'occurrence d'un événement <u>ou</u> de l'autre est égale à la somme de leurs probabilités séparées

La loi additive

Exemple:

Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 lors du lancé d'un dé à six faces ?

P(5) = 1/6 = 0,17 **P(6) = 1/6 = 0,17**

P(5 ou 6) = P(5) + P(6) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 0,33

La loi additive

Contre-Exemple:

Je jette deux pièces. Quelle est la probabilité d’obtenir face sur la première ou sur la deuxième

P(Face1) = 0,5 **P(Face2) = 0,5**

P(Face1 ou Face2) ≠ 0,5 + 0,5 = 1

La loi additive

Pour un ensemble d'événements exhaustifs, la probabilité de l'ensemble est égale à 1.

Exemple: Quelle est la probabilité d'obtenir pile ou face sur une pièce ?

P(pile ou face) = 0,5 + 0,5 = 1

La loi mutliplicative

La probabilité d'occurrence conjointe de deux ou plusieurs <u>événements indépendants</u> est égale au produit de leurs probabilités individuelles

La loi multiplicative

Exemple:

Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles sur deux pièces ?

P(Pile1) = 0,5 **P(Pile2) = 0,5**

P(pile, pile) = 0,5 X 0,5 = 0,25

Lois additive et multiplicative

Loi additive:	**« OU »**
Loi multiplicative:	**« ET »**

Exercice

Si on admet que la probabilité pour un enfant d'être une fille est de 0,5, calculer les probabilités suivantes :

Exercice

Quelle est la probabilité qu'une famille de deux enfants ait deux filles ?

P(fille, fille) = 0,5 x 0,5 = 0,25

(loi multiplicative)

Exercice

Quelle est la probabilité d'avoir cinq filles sur cinq naissances?

P(fille, fille, fille, fille, fille) =

0,5 x 0,5 x 0,5 x 0,5 x 0,5 = 0,03125

(loi multiplicative)

Exercice

Quelle est la probabilité qu'une famille avec deux enfants ait deux filles ou deux garçons ?

P(F, F) = 0,5 x 0,5 = 0,25 (loi multiplicative)

P(G, G) = 0,5 x 0,5 = 0,25 (loi multiplicative)

P(2 filles ou 2 garçons) = 0,25 + 0,25 = 0,5

(loi additive)

Probabilité conjointe

= la probabilité de co-occurrence de deux ou plusieurs événements

Si deux événements sont <u>indépendants</u>, leur probabilité d'occurrence conjointe peut être calculée à l'aide de la <u>loi multiplicative</u>

Probabilité conditionnelle

= la probabilité d'occurrence d'un événement étant donné qu'un autre événement s'est produit

Pour deux événements A et B, la probabilité conditionnelle d'obtenir A étant donné B se note

$P(A \mid B)$

Probabilité conditionnelle

Exemple: Une urne contient 6 boules blanches et 2 boules noires.

Quelle est la probabilité de tirer une boule noire?

$$P(N) = 2/8 = 0{,}25$$

Probabilité conditionnelle

Exemple: Une urne contient 6 boules blanches et 2 boules noires.

Quelle est la probabilité conditionnelle de tirer une boule noire au deuxième tirage si on sait que le premier tirage a donné une boule blanche ?

$$P(N \mid B) = 2/7 = 0{,}29$$

Probabilité conditionnelle

Si les deux événements A et B sont indépendants:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

Probabilité conditionnelle

Exemple: quelle est la probabilité d'obtenir « pile » sur le lancé d'une pièce étant donné que le lancé précédent a aussi donné « pile » ?

$$P(\text{pile} \mid \text{pile}) = P(\text{pile}) = 0{,}5$$

Exercice

Les assureurs savent bien que les personnes ayant des enfants ont moins de risque de commettre un accident. Cela se reflète aussi sur le port de la ceinture. Supposons que l'on examine un échantillon de 100 conducteurs et que l'on note pour chacun s'il porte sa ceinture et s'il a des enfants.

Exercice

Situation Familiale	Ceinture	Pas de ceinture	Total
Enfants	15	5	20
Pas d’enfants	15	65	80
Total	30	70	100

Exercice

Quelle est la probabilité qu’une personne prise au hasard dans cet échantillon porte la ceinture ?

Exercice

Situation Familiale	Ceinture	Pas de ceinture	Total
Enfants	15	5	20
Pas d’enfants	15	65	80
Total	30	70	100

Exercice

Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard porte la ceinture ?

$P(C) = 30/100 = 0,30$

= Probabilité simple

Exercice

Quelle est la probabilité qu'une personne ait des enfants et porte sa ceinture ?

Probabilité conjointe: $P(E, C) = ?$

Exercice

Situation Familiale	Ceinture	Pas de ceinture	Total
Enfants	15	5	20
Pas d’enfants	15	65	80
Total	30	70	100

Exercice

Quelle est la probabilité qu'une personne ait des enfants et porte sa ceinture ?

$P(E, C) = 15/100 = 0{,}15$

Attention: Evénements non indépendants

$P(E, C) \neq P(E) \times P(C) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$

Exercice

Quelle est la probabilité qu'une personne porte la ceinture étant donné qu'elle a des enfants ?

Probabilité conditionnelle: $P(C \mid E) = ?$

Exercice

Situation Familiale	Ceinture	Pas de ceinture	Total
Enfants	15	5	20
Pas d’enfants	15	65	80
Total	30	70	100

Exercice

Quelle est la probabilité qu’une personne porte la ceinture étant donné qu’elle a des enfants ?

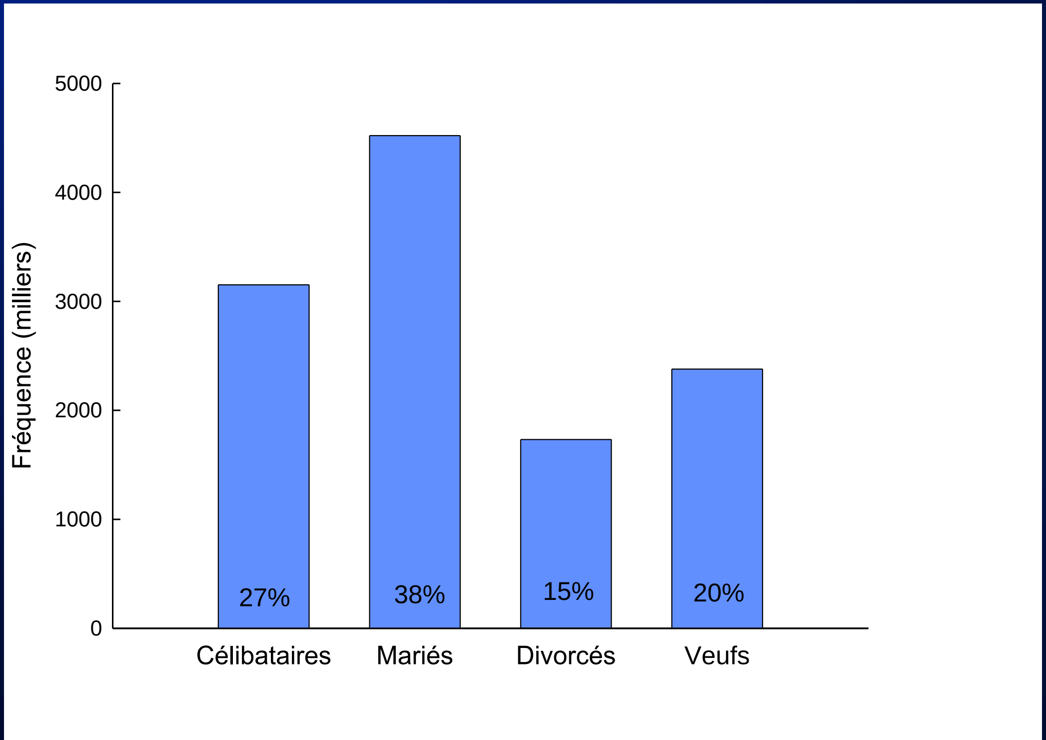
$P(C \mid E) = 15/20 = 0,75$

Probabilités lors d'un tirage aléatoire dans une population

Connaître la distribution d'une population informe sur la probabilité de scores tirés aléatoirement

Exemple avec une variable nominale

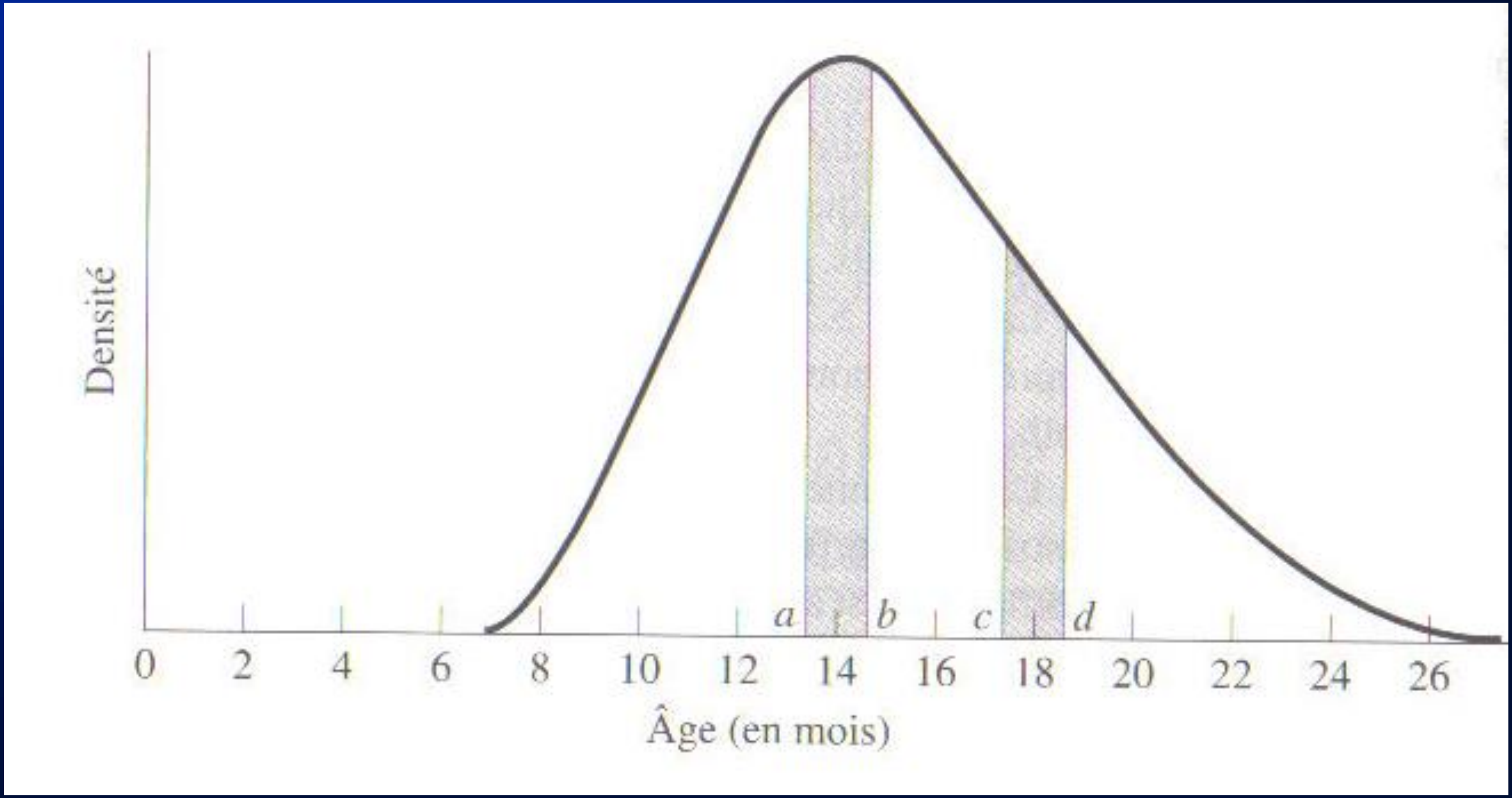
Probabilités s'obtiennent immédiatement à partir des fréquences relatives de la population



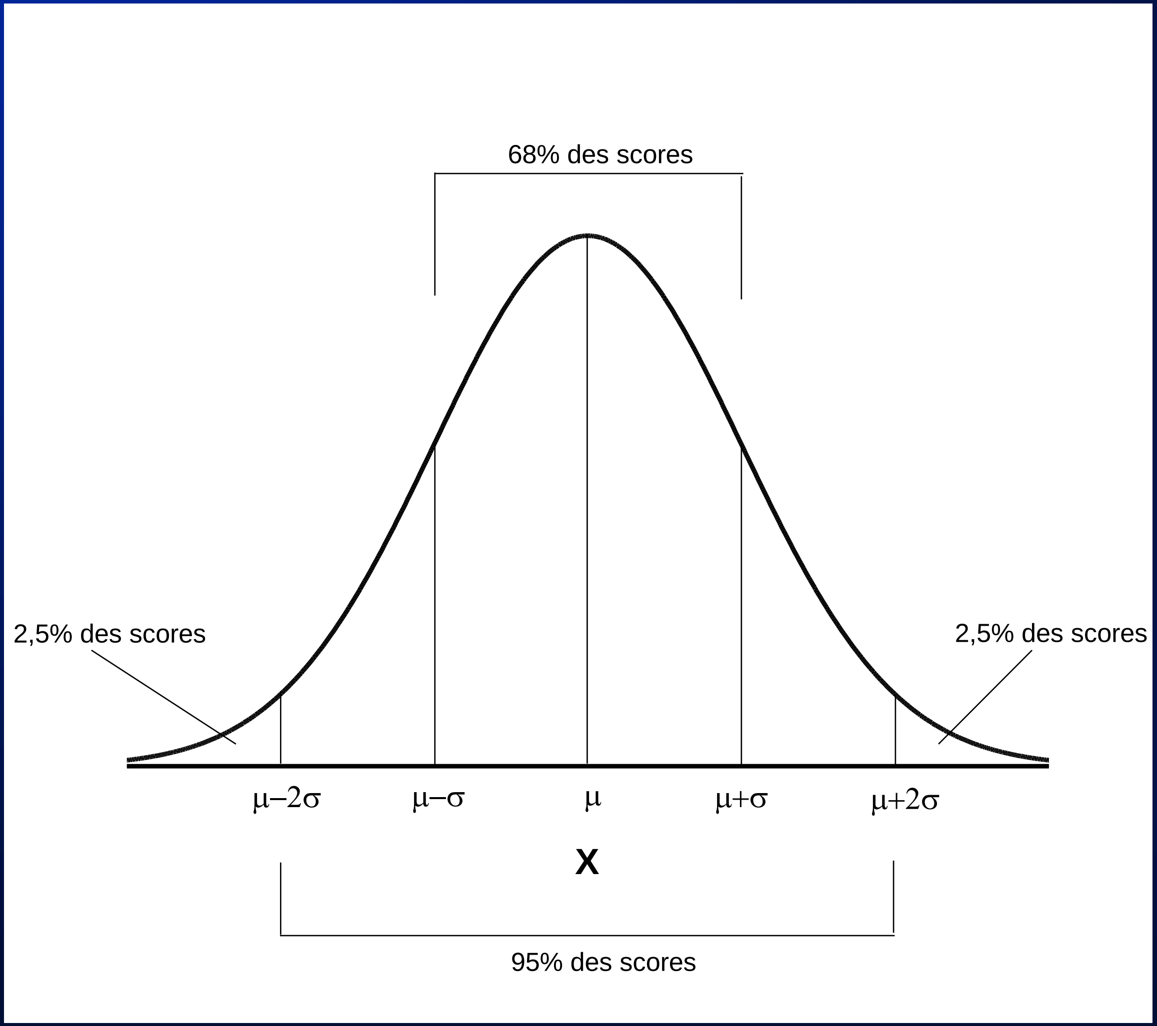
Probabilités pour les variables métriques

- Plus complexe à calculer
- Absurde de calculer la probabilité d’un score particulier
- Probabilité d’un score à l’intérieur d’un intervalle

Probabilités pour les variables métriques

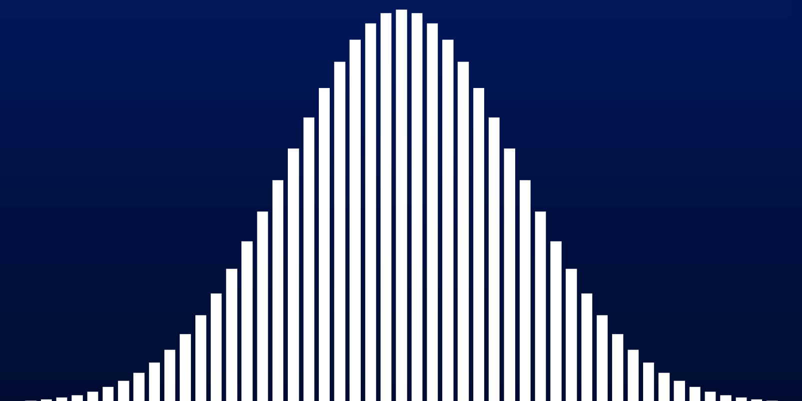


Probabilités pour les variables normalement distribuées



Définition mathématique

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(e)^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}$$



Exemple du QI

Le QI est normalement distribué avec

$\mu = 100$ et $\sigma = 15$

X	P(QI<X)	P(QI>X)
….	…	…
95	0,37	0,63
96	0,39	0,61
97	0,42	0,58
98	0,45	0,55
99	0,47	0,53
100	0,50	0,50
101	0,53	0,47
102	0,55	0,45
103	0,58	0,42
104	0,61	0,39
105	0,63	0,37
…	…	…
120	0,91	0,09
…	…	…
130	0,98	0,02
…	…	…
140	1,00	0,00
….	…	…

Exemple du QI

Le QI est normalement distribué avec

$\mu = 100$ et $\sigma = 15$

Probabilité d'avoir un QI plus grand que 105 ?

P=0,37 (37%)

Probabilité d'avoir un QI inférieur à 98 ?

P=0,45 (45%)

Exemple du QI

Le QI est normalement distribué avec

$\mu = 100$ et $\sigma = 15$

Probabilité d'avoir un QI plus grand que 105 ?

P=0,37 (37%)

= 37% des sujets ont un QI supérieur à 105

= un sujet tiré aléatoirement à 37% de chance

d'avoir un QI supérieur à 105

Exemple du QI

Le QI est normalement distribué avec

$\mu = 100$ et $\sigma = 15$

Probabilité d'avoir un QI de 105 ?

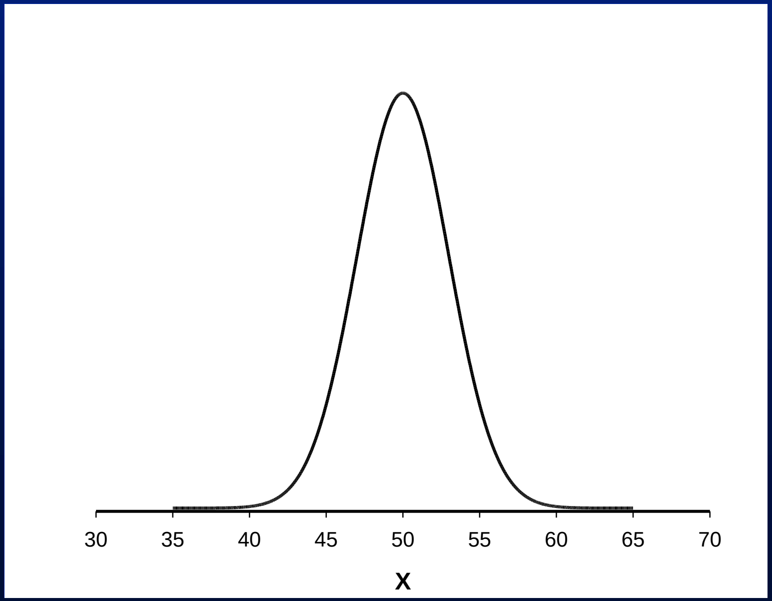
$P \approx 0$

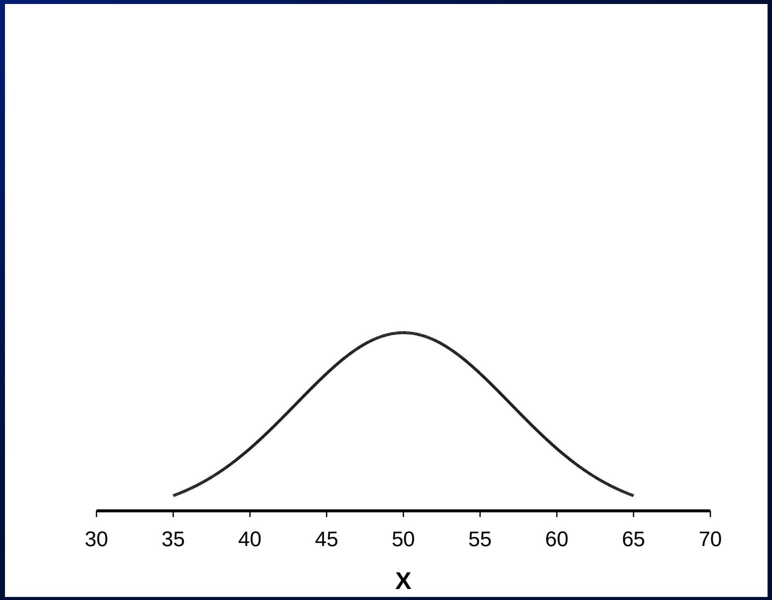
= Probabilité d'avoir un QI de 105,00000000

= Probabilité d'avoir un QI de 105,12485

Problème des tables

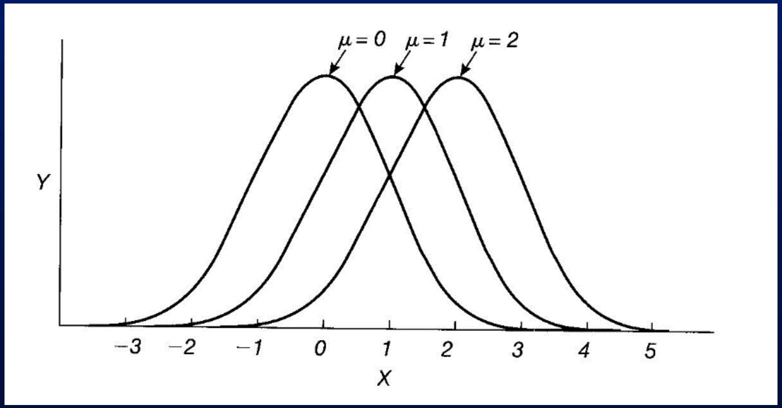
Une distribution normale dépend de la moyenne et de l'écart-type de la population

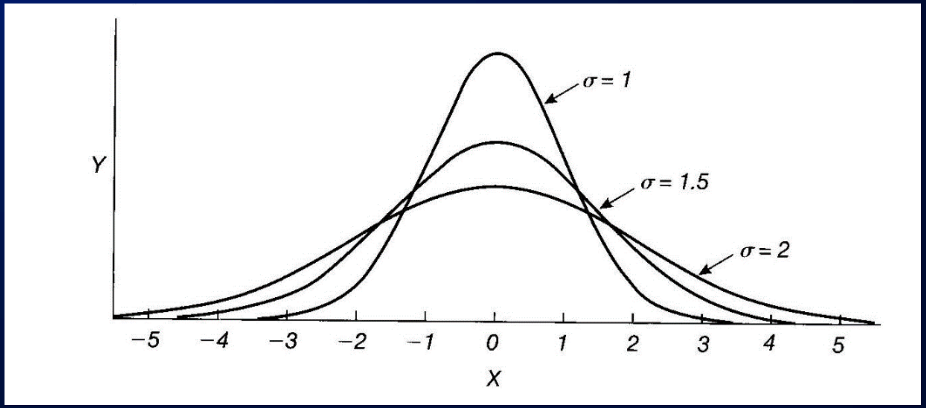




Problème des tables

Il faudrait établir une table différente pour chaque combinaison possible de moyenne et d’écart-type





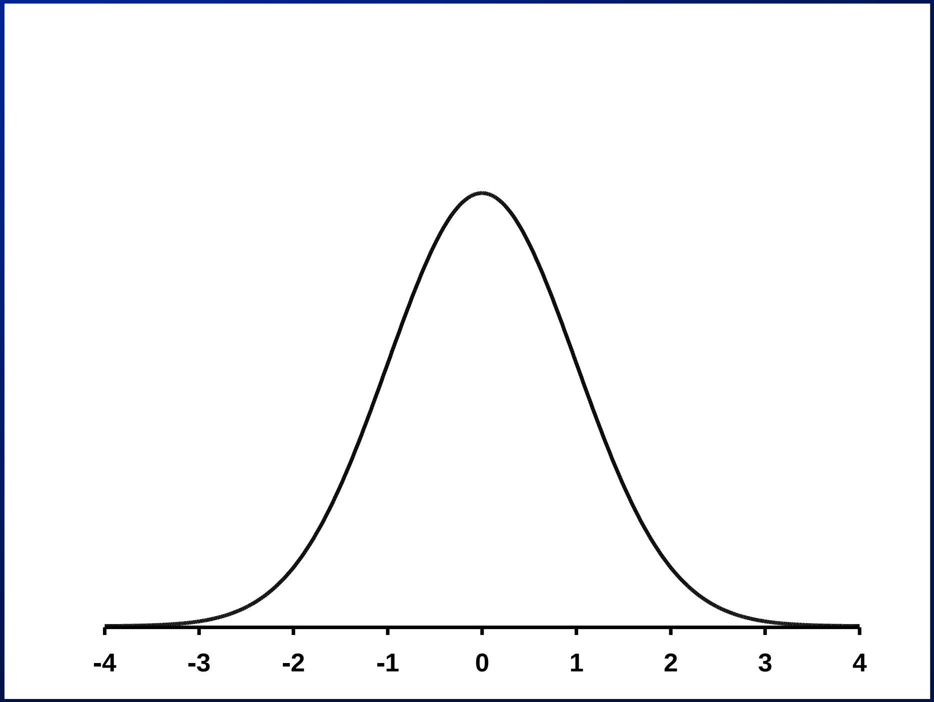
La distribution normale réduite

Solution au problème des tables:

Standardiser les scores pour obtenir une distribution normale réduite :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La distribution normale réduite



$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$

Probabilités pour les variables normalement distribuées

1. Transformer le score brut X en son score Z correspondant

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

2. Rechercher dans la table normale réduite la probabilité associée à ce score Z

Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
0,99	0,8389	0,1611
1,00	0,8413	0,1587
1,01	0,8438	0,1562
1,02	0,8461	0,1539
1,03	0,8485	0,1515
1,04	0,8508	0,1492
1,05	0,8531	0,1469
1,06	0,8554	0,1446
1,07	0,8577	0,1423

Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z supérieur à 1,00 ?

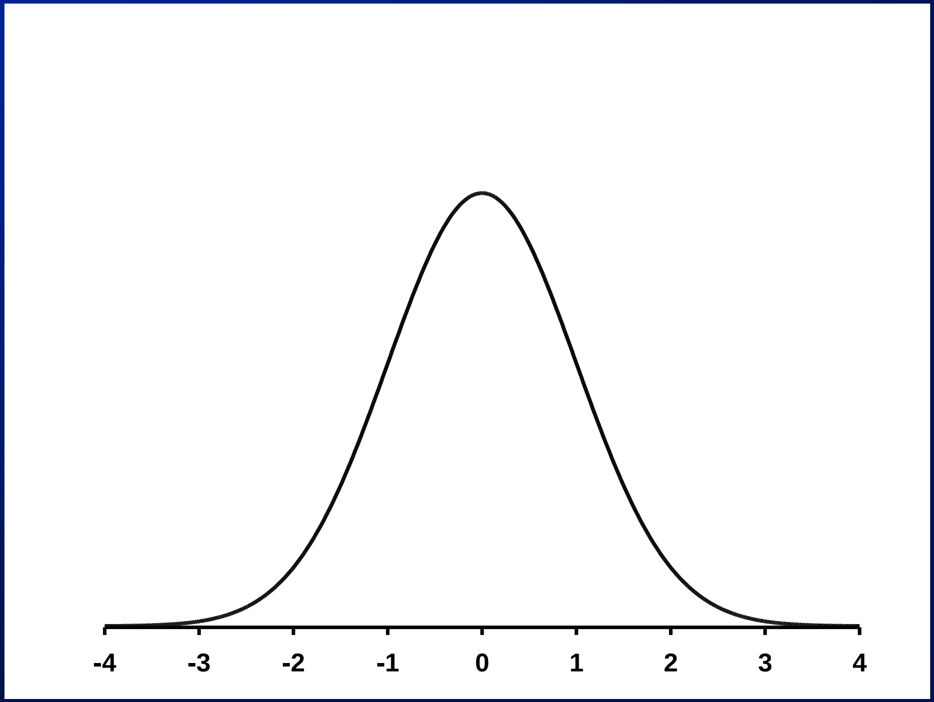
$P(Z>1,00) = 0,1587$

Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z inférieur à 1,07 ?

$$P(Z<1{,}07) = 0{,}8577$$

Calcul de probabilités pour des Z négatifs



La distribution est symétrique

Calcul de probabilités pour des Z négatifs

$$P(Z<-1) = P(Z>1) = 0{,}1587$$

Ne pas oublier d'inverser les signes

$P(Z<-0{,}13) = P\ (Z >0{,}13)$

$P(Z>-1{,}78) = P\ (Z<1{,}78)$

$P(-1{,}45<Z<-0{,}42) = P(0{,}42<Z<1{,}45)$

Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z supérieur à –0,59 ?

$$P(Z>-0,59) = P(Z<0,59)$$

$$= 0,7224$$

Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z égal à 1,42 ?

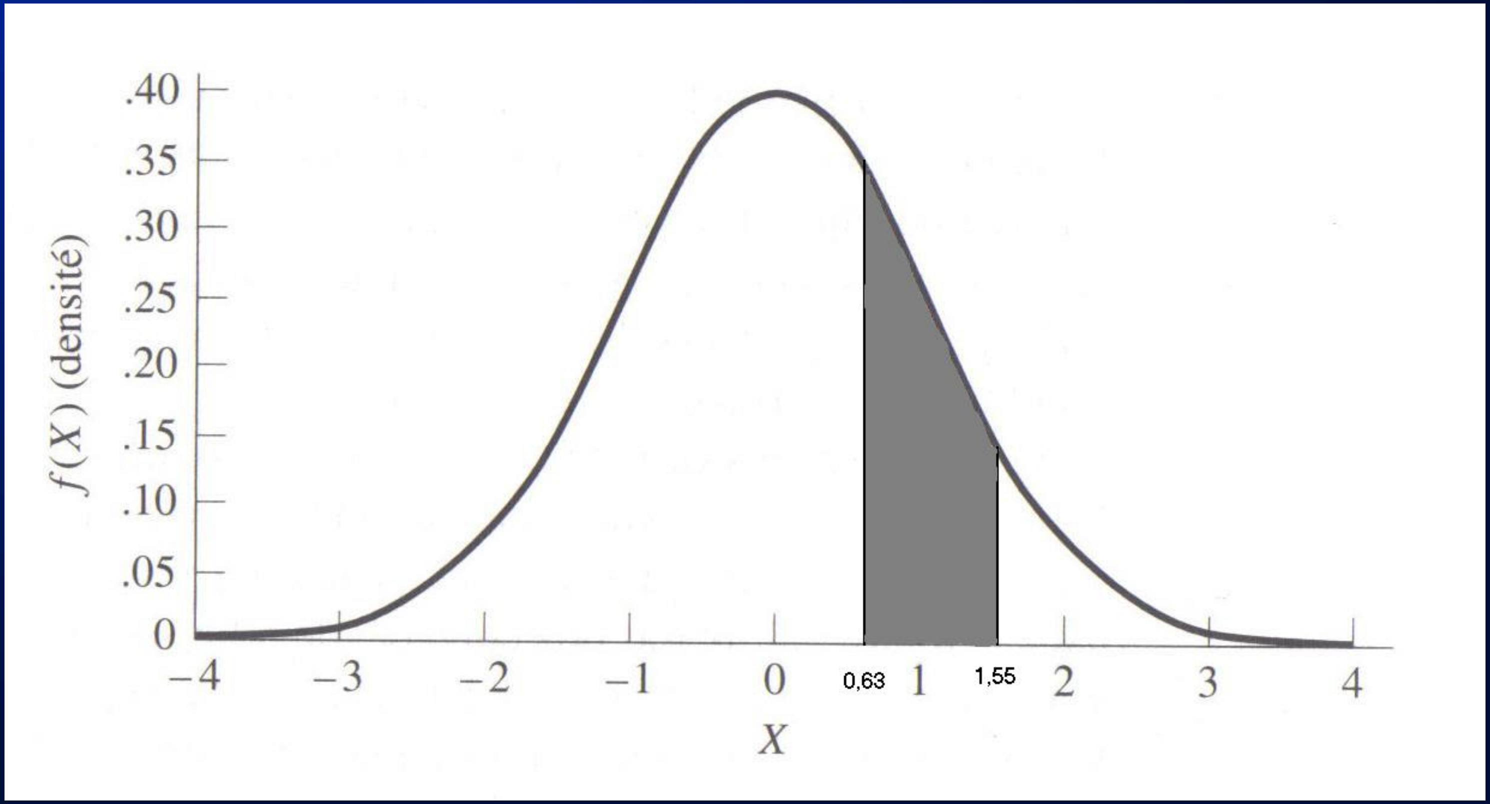
$$P(Z=1,42) \approx 0$$

$$P(Z \geq 1,42) = P(Z > 1,42)$$

Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z entre 0,63 et 1,55 ?

Exercices



Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z entre 0,63 et 1,55 ?

$$P(0,63<Z<1,55) = P(Z>0,63)-P(Z>1,55)$$

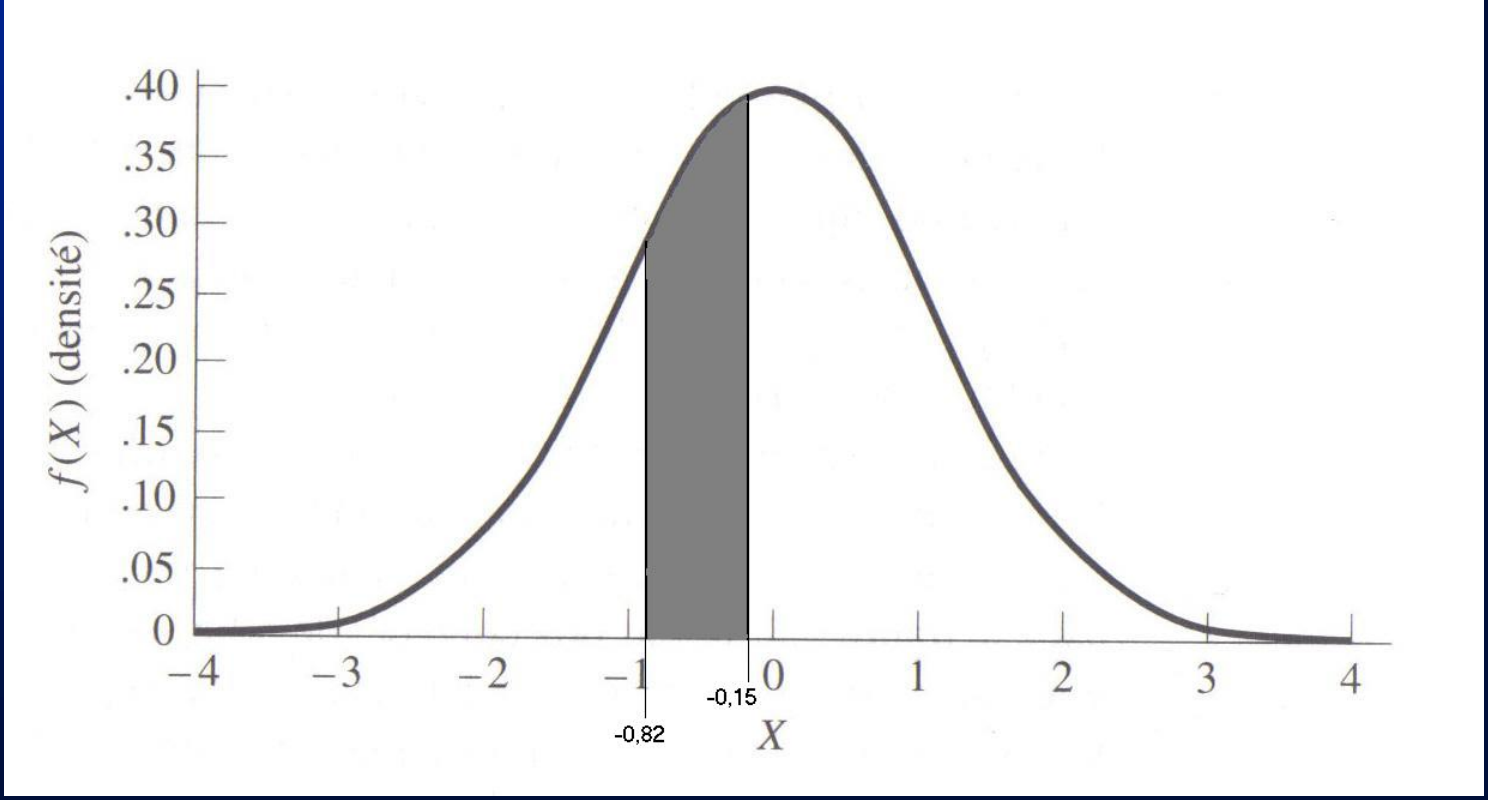
$$= 0,2643-0,0606 = 0,2037$$

Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z entre -0,82 et -0,15 ?

$$P\,(-0{,}82 < Z < -0{,}15)$$

Exercices



Exercices

Quelle est la probabilité d'obtenir un score Z entre -0,82 et -0,15 ?

$$P(-0{,}82<Z<-0{,}15)$$

$$= P(Z<-0{,}15)-P(Z<-0{,}82)$$

$$= P(Z>0{,}15)-P(Z>0{,}82)$$

$$= 0{,}4404-0{,}2061 = 0{,}2343$$

Exercices QI

Le QI : μ=100 et σ=15

Quelle est la probabilité de tirer au hasard un sujet dont le QI est supérieur à 135 ?

Etape 1: Calculer le score Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{135 - 100}{15} = \frac{35}{15} = 2{,}33$$

Exercices QI

Le QI : μ=100 et σ=15

Quelle est la probabilité de tirer au hasard un sujet dont le QI est supérieur à 135 ?

Etape 2: Calculer la probabilité

$P(X>135)$ =

$P(Z>2,33)$ =

0,0099 ou 0,99%

Exercices QI

Quelle proportion de la population a un QI inférieur à 85 ?

$P(X<85) \quad = P(Z<-1) \quad = P(Z>1) \quad = 0{,}1587$ ou 15,87%

$$Z = \frac{85-100}{15} = \frac{-15}{15} = -1$$

Exercices QI

Quelle partie de la population a un QI entre 85 et 115 ?

P(85<X<115) $= P\left(\frac{85-100}{15} < Z < \frac{115-100}{15}\right)$

= P(-1<Z<1) = 1- P(Z<-1)-P(Z>1) = 1- P(Z>1)-P(Z>1)

= 1-0,1587-0,1587 = 0,6826

Exercices QI

Quelle est la probabilité de tirer au hasard un individu dont le QI est 108,24 ?

$$P(X=108{,}24) \approx 0$$

Utilisation de la table en sens inverse

Quel score minimal de QI une personne doit-elle avoir pour être dans les 5% supérieurs ?

1. Rechercher Z correspondant à $p = 0,05$
2. Transformer Z en X

Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
1,62	0,9474	0,0526
1,63	0,9484	0,0516
1,64	0,9495	0,0505
1,65	0,9505	0,0495
1,66	0,9515	0,0485
1,67	0,9525	0,0475
1,68	0,9535	0,0465
1,69	0,9545	0,0455
1,70	0,9554	0,0446

Utilisation de la table

Z	Probabilité inférieur à Z	Probabilité supérieur à Z
1,62	0,9474	0,0526
1,63	0,9484	0,0516
1,64	0,9495	0,0505
1,65	0,9505	0,0495
1,66	0,9515	0,0485
1,67	0,9525	0,0475
1,68	0,9535	0,0465
1,69	0,9545	0,0455
1,70	0,9554	0,0446

Utilisation de la table en sens inverse

Quel score minimal de QI une personne doit-elle avoir pour être dans les 5% supérieurs ?

1. $0{,}05 = P(Z > 1{,}645)$

2. $X = \mu + Z\sigma = 100 + (1{,}645 \times 15) = 124{,}68$

QI minimum de 124,68

Utilisation de la table en sens inverse

En dessous de quel score de QI trouve-t-on 20% de la population ?

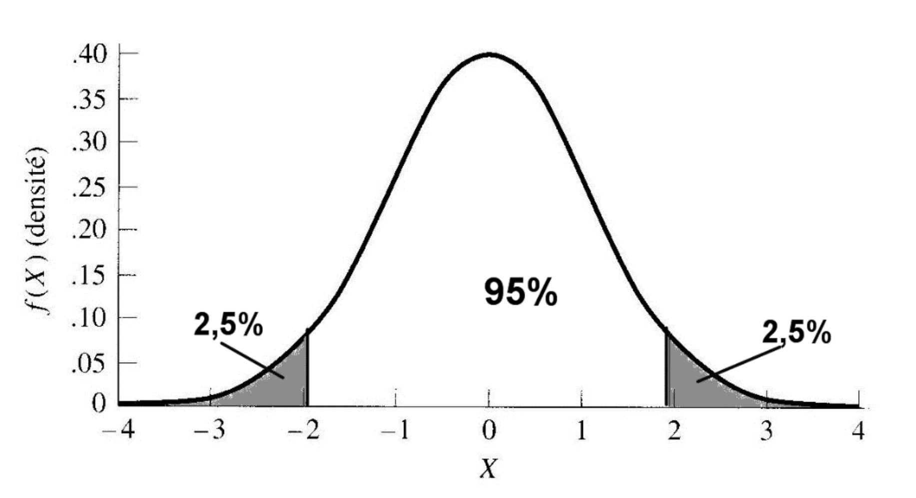
1. $0{,}20 = P(Z > 0{,}84) = P(Z < -0{,}84)$

2. $X = \mu + Z\sigma = 100 + (-0{,}84 \times 15) = 87{,}4$

20% de la population ont un score inférieur à 87,4

Limites probables à une observation

Si je tire aléatoirement un sujet dans une population connue, entre quels scores se situera-t-il dans 95% des cas ?



Limites probables à une observation

Trouver les limites dans la distribution Z

95% des sujets ont un score Z entre
-1,96 et 1,96

$$X = \mu + Z\sigma = 100 + \left(-1{,}96 \times 15\right) = 70{,}6$$

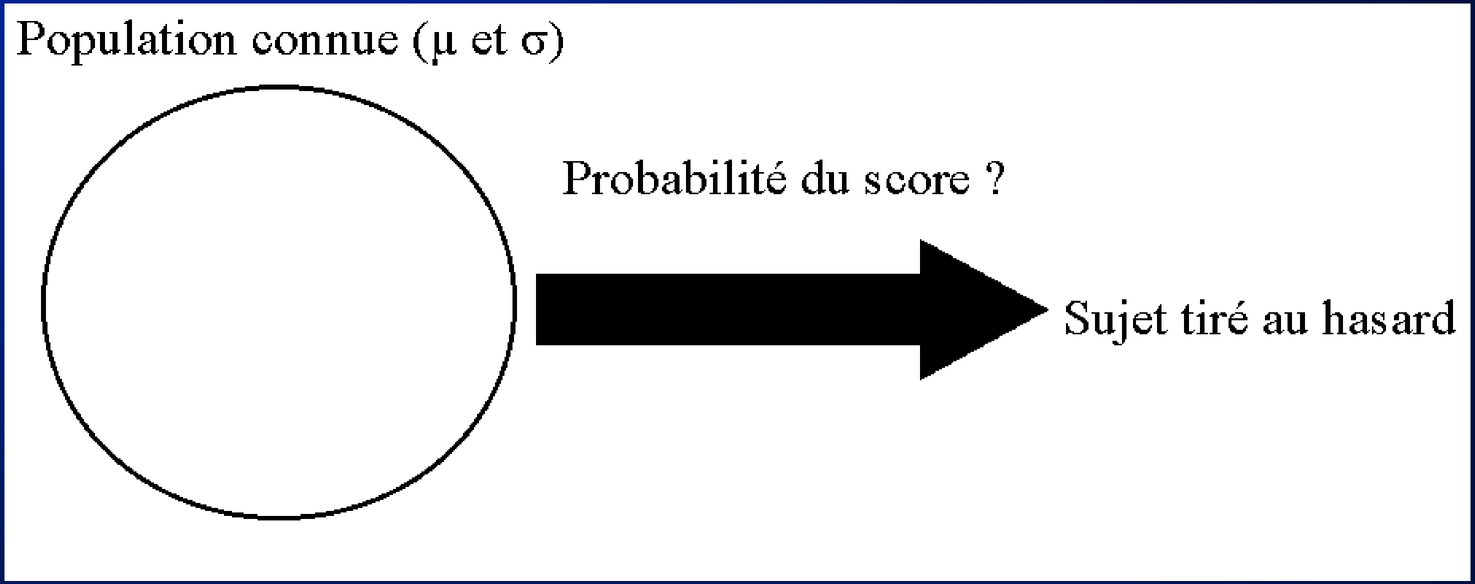
$$X = \mu + Z\sigma = 100 + \left(1{,}96 \times 15\right) = 129{,}4$$

Limites probables à une observation

Si je tire aléatoirement un sujet dans une population connue, entre quels scores se situera-t-il dans 95% des cas ?

95% des sujets ont un QI entre 70,6 et 129,4

Rappel



Condition: Normalité