COMPUTACIÓN GRÁFICA

TAREA 1: PRUEBA DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN

INTEGRANTES:

Bryan Steven Biojó R. 1629366

bryan.biojo@correounivalle.edu.co

Herney Eduardo Quintero T. 1528556

herney.quintero@correounivalle.edu.co

DOCENTE:

JOHN ALEXANDER VARGAS, M.Sc.

SANTIAGO DE CALI, 28 DE MAYO DE 2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN
COMPUTACIÓN GRÁFICA
TAREA 1: PRUEBA DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1. Calcular el producto escalar de $\vec{u} = (2, 5)$ y $\vec{v} = (1, 3)$ así como el ángulo que forman los dos vectores.

2. Sea el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2, -2)$. Determinar si el triángulo es isósceles, equilátero o escaleno.

3. Calcular los ángulos y ver si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

4. Calcular la ecuación de la recta en forma punto pendiente, explícita, general, vectorial y paramétrica sabiendo que pasa por el punto $P1(1,3)$ y $P0(0, -2)$.

5. Dada la recta $r: 2y = -3x + 4$, calcular:

    a. La recta paralela a esta que pasa por $P(1, -2)$.
    b. La recta perpendicular que pasa por $P(0,1)$.

6. La recta que pasa por $M(2,3)$ y es paralela a la recta $r: y = 3x + 1$ determina con los ejes coordenados un triángulo. Hallar su área.

7. Escribir un programa en C++ que reciba dos matrices $N \times N$ de un archivo de entrada y calcule la traspuesta de cada matriz y su producto.

RESPUESTAS

1. Sea $\vec{u} = (2,5)$ y $\vec{v} = (1,3)$ entonces tenemos que:

$$|\vec{u}| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

- El producto escalar de dos vectores se halla de la siguiente forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

Entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,5) \cdot (1,3) = (2 \cdot 1) + (5 \cdot 3) = 17$$

- Para hallar el ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se tiene la siguiente fórmula:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2}\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}}$$

Entonces:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(2 \cdot 1) + (5 \cdot 3)}{\sqrt{2^2 + 5^2}\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}\sqrt{10}}$$

Despejando θ tenemos:

$$\cos\theta = \frac{17}{\sqrt{29}\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{17}{\sqrt{29}\sqrt{10}}$$

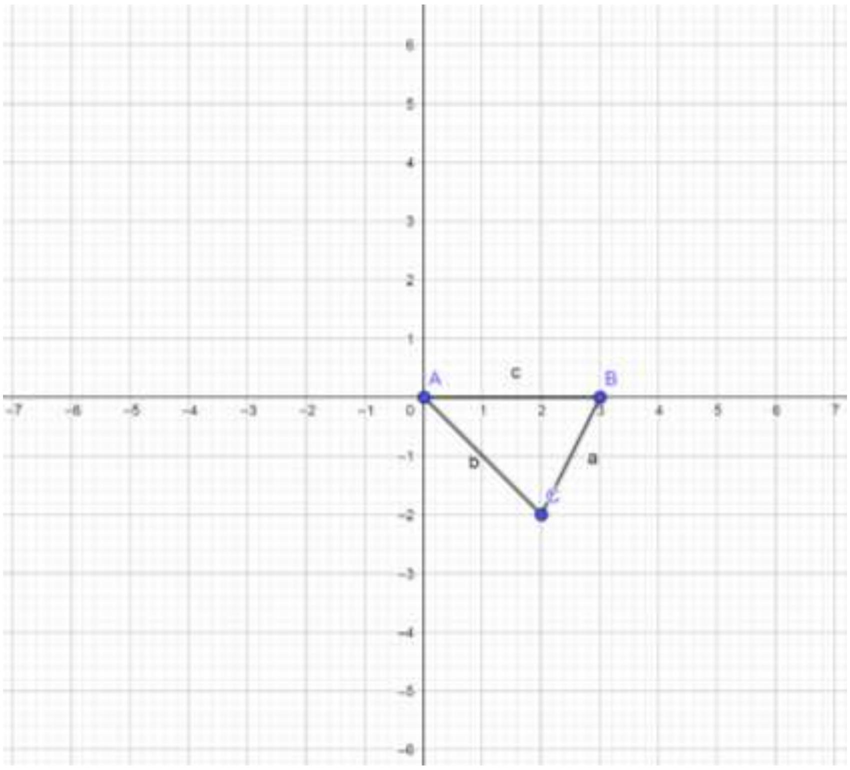
$$\theta \approx 0.05875\, rad$$

$$\theta \approx 3.36612°$$

2. Antes de determinar el tipo de triángulo, veamos las respectivas definiciones para triángulo isósceles, equilátero y escaleno.

   - **Triángulo isósceles:** Tiene tres lados iguales, tres ángulos iguales, todos de $60°$.
   - **Triángulo equilátero:** Tiene dos lados iguales, dos ángulos iguales.
   - **Triángulo escaleno:** No hay lados iguales, no hay ángulos iguales.

   Entonces, sea ABC el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,-2)$ se tiene:



   Para iniciar, hallaremos la distancia entre los segmentos AB, BC y CA de la siguiente forma:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

   - La distancia del segmento AB es:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2}$$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = 3$$

- La distancia del segmento BC es:

$$d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$$

- La distancia del segmento CA es:

$$d(C,A) = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(0-2)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4}$$

$$d(C,A) = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{8}$$

Una vez hallados los segmentos, denotaremos como a al segmento BC, b al segmento CA y c al segmento AB. Por lo tanto:

$$a = \sqrt{5},\ b = \sqrt{8},\ c = 3$$

Ahora, utilizaremos el **Teorema del Coseno** para hallar los ángulos a partir de los lados. El teorema se define como sigue:

- **Teorema del coseno:** Dado un triángulo ABC cualquiera, siendo α, β, γ, los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Despejando, obtenemos las siguientes fórmulas para hallar A, B y C:

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

$$C = 180° - A - B$$

- Reemplazando para hallar $\cos A$ se obtiene:

$$\cos A = \frac{\sqrt{5}^2 - \sqrt{8}^2 - 3^2}{-2 \cdot \sqrt{8} \cdot 3} = \frac{5 - 8 - 9}{-6 \cdot \sqrt{8}} = \frac{-12}{-6 \cdot \sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Despejando A:

$$A = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = 45°$$

- Reemplazando para hallar $\cos B$ se obtiene:

$$\cos B = \frac{\sqrt{8}^2 - \sqrt{5}^2 - 3^2}{-2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3} = \frac{8 - 5 - 9}{-6 \cdot \sqrt{5}} = \frac{-6}{-6 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Despejando B:

$$B = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$B = 63.43°$$

- Reemplazando para hallar C se obtiene:

$$C = 180° - 45° - 63.43°$$

$$C = 71.57°$$

Finalmente, se tiene que los ángulos correspondientes son:

$$A = 45°,\ B = 63.43°,\ C = 71.57°$$

Por lo anterior, se puede concluir que como ni los lados ni los ángulos son iguales, el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,-2)$ es un **Triángulo escaleno.**

3. A partir del punto anterior y teniendo en cuenta las medidas de los ángulos que son: $A = 45°$, $B = 63.43°$ y $C = 71.57°$ respectivamente, tenemos que el triángulo ABC es un **Triángulo acutángulo**, ya que todos sus ángulos miden menos de $90°$.

   Si queremos ser más específicos, el triángulo ABC es un **Triángulo acutángulo escaleno** porque todos sus ángulos son agudos (menores de $90°$) y todos diferentes, no tiene eje de simetría.

4. Sean los puntos $P1(1,3)$ y $P2(0,-2)$, tenemos que la ecuación de la recta en sus distintas formas es como sigue:

   - **Forma punto pendiente:**

     Primero, hallamos la pendiente a partir de los puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{0-1} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$m = 5$$

     Una vez hallada la pendiente, procedemos a reemplazar los valores en la siguiente ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

     Finalmente, la ecuación en la forma punto pendiente es:

$$y - 3 = 5x - 5$$

   - **Forma general:**

     Para hallar la ecuación de la recta en forma general, despejamos y de la ecuación en la forma punto pendiente:

$$y - 3 = 5x - 5$$

$$y - 3 - 5x + 5 = 0$$

$$y + 2 - 5x = 0$$

$$-5x + y + 2 = 0$$

$$5x - y - 2 = 0$$

Finalmente, la ecuación en la forma general es:

$$5x - y - 2 = 0$$

- **Forma explícita:**

Para hallar la ecuación de la recta en forma explícita, despejamos y de la ecuación en la forma general:

$$5x - y - 2 = 0$$

$$-y = -5x + 2$$

$$y = 5x - 2$$

Finalmente, la ecuación en la forma explícita es:

$$y = 5x - 2$$

- **Forma vectorial:**

Para hallar la ecuación de la recta en forma vectorial, vamos a hallar el vector director a partir de los puntos $P1(1,3)$ y $P2(0,-2)$:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (0,-2) - (1,3) = (-1 - 5)$$

Como el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene sus componentes negativas, nos quedaremos con el vector $\overrightarrow{QP}$ el cuál es $(1,5)$. Este vector nos servirá como vector director.

Ahora, vamos a tomar el vector $\overrightarrow{QP}$ para formar la ecuación de la recta:

$$(x, y) = (1,3) + t(1,5)$$

Finalmente, la ecuación en la forma vectorial es:

$$(x, y) = (1,3) + t(1,5)$$

- **Forma paramétrica**

  Para hallar la ecuación de la recta en forma paramétrica, vamos a tomar el punto $P1(1, 3)$ y la ecuación de la recta en forma vectorial:

  - **Punto:** $P1(1, 3)$.
  - **Ecuación en forma vectorial:** $(x, y) = (1,3) + t(1,5)$.

  Finalmente, la ecuación en la forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

5. Sea la recta $r: 2y = -3x + 4$ tenemos:

   a. **Recta paralela que pasa por** $P(1, -2)$**:**

$$r: 2y = -3x + 4$$

$$y = \frac{-3x + 4}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Por lo anterior, tenemos que la pendiente de la recta es:

$$m = -\frac{3}{2}$$

Ahora, vamos a hallar la ecuación de la recta a partir del punto y la nueva pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

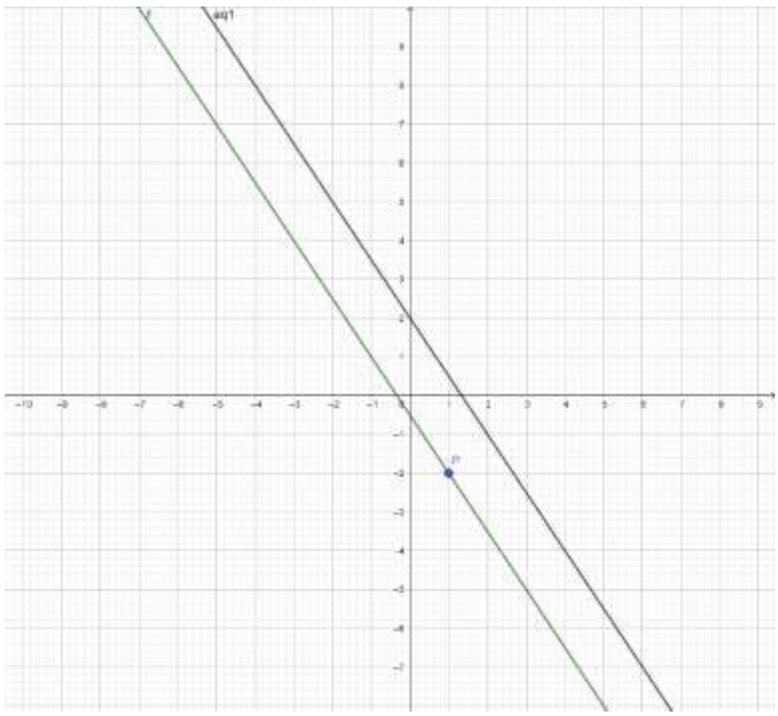
$$y-(-2)=-\frac{3}{2}(x-1)$$

$$y+2=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

Finalmente, la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto $P(1,-2)$ es:

$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$



b. **Recta perpendicular que pasa por $P(0,1)$:**

$$y=-\frac{3}{2}x+2$$

Por lo anterior, tenemos que la pendiente de la recta es:

$$m_1=-\frac{3}{2}$$

Ahora, hallamos la pendiente m_2:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$m_2 = \frac{2}{3}$$

Ahora, vamos a hallar la ecuación de la recta a partir del punto y la nueva pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

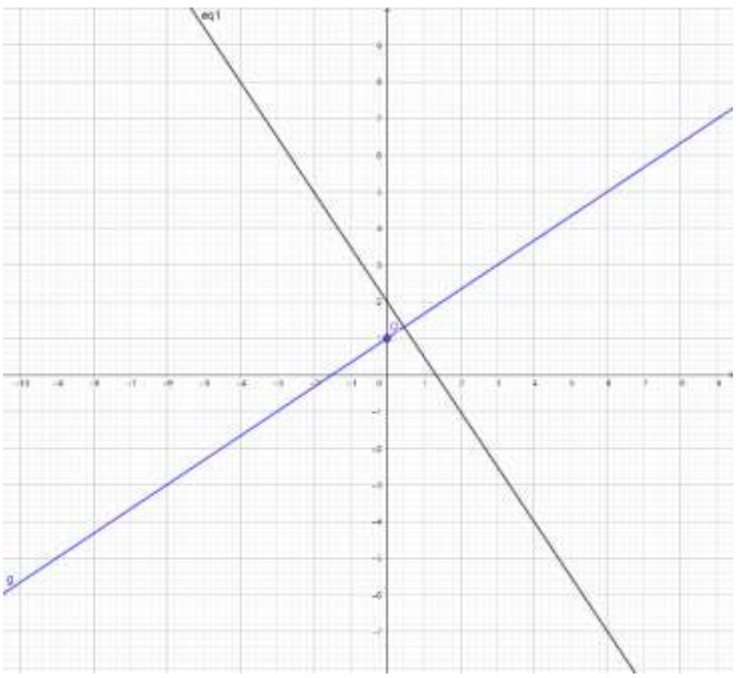
$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}x$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

Finalmente, la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto $P(0,1)$ es:

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$



6. Sea $M(2, 3)$ y la recta $r: y = 3x + 1$, la recta que pasa por M y es paralélela a r se calcula como sigue:

   Para hallar la recta paralela a r usamos la ecuación punto pendiente:

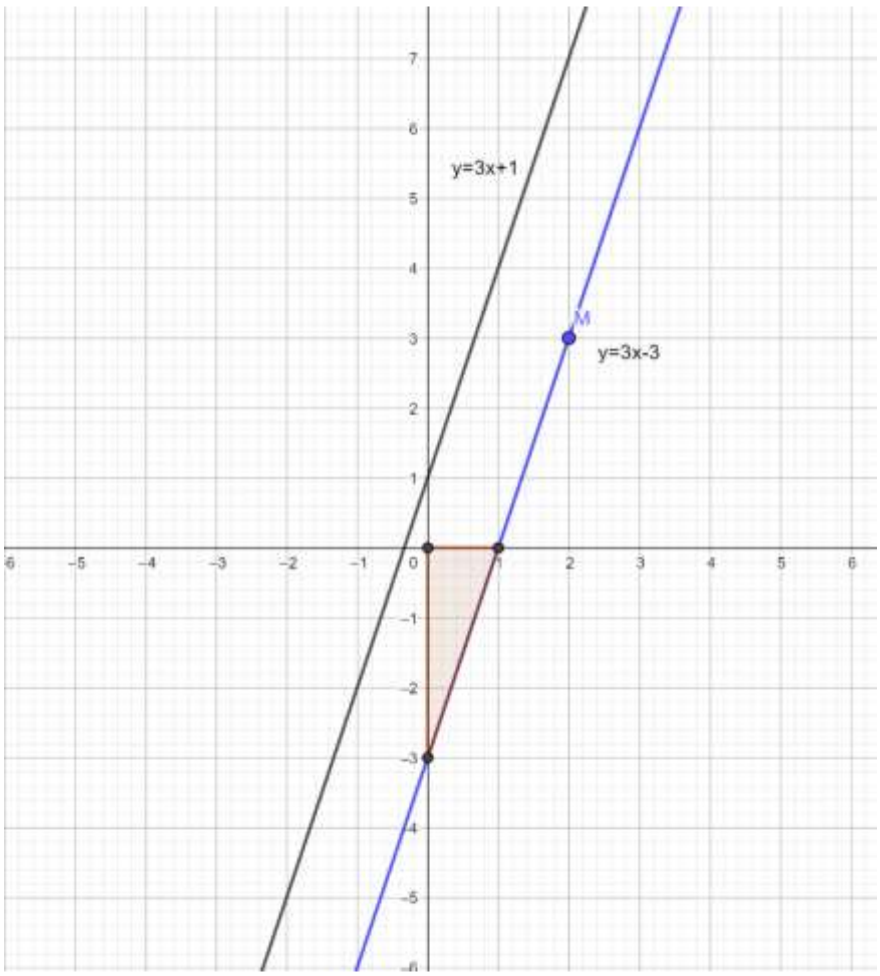
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 3(x - 2)$$

$$y - 3 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 6 + 3$$

$$y = 3x - 3$$



Graficando r y la recta paralela obtenida anteriormente, tenemos que junto con los ejes coordenados se forma un triángulo rectángulo del cual su base es $b = 1$ y su altura es $h = 3$. Por lo tanto, tenemos que su área es igual a:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$$

Finalmente, al área de triángulo rectángulo formado por la recta paralela a r, que pasa por M y los ejes coordenados es:

$$A = \frac{3}{2}$$

7. La implementación de este punto se encuentra en la carpeta.