FINAL PROJECT MODEL STOKASTIK 1

Pemodelan Antrian pada Bank Menggunakan *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC) berupa Antrian M/M/1

disusun oleh
Kelompok 5

Bryant Farrel Titanius	2306212240
Dimas Pramudya Yudasworo	2306209656
Evans Kizito	2306262453
Marsha Monika	2306203910

PROGRAM STUDI STATISTIKA
stats@sci.ui.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan sistem antrian pada layanan teller di PT Bank SulutGo Cabang Airmadidi menggunakan pendekatan stokastik M/M/1 berbasis *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC). Model ini mengasumsikan kedatangan nasabah mengikuti distribusi Poisson dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial. Data dikumpulkan melalui observasi selama 10 hari kerja, dan parameter sistem diestimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation*. Hasil estimasi menunjukkan laju kedatangan sebesar 6,07 nasabah per jam dan laju pelayanan sebesar 9 nasabah per jam. Simulasi sistem terhadap 500 nasabah menunjukkan bahwa waktu tunggu rata-rata relatif rendah dan sistem beroperasi secara efisien dengan tingkat utilisasi sekitar 67%. Model M/M/1 mampu merepresentasikan sistem antrian satu *server* secara sederhana namun efektif, meskipun memiliki keterbatasan dalam menggambarkan sistem *multi-server* dan memerlukan asumsi distribusi tertentu. Penelitian ini memberikan kontribusi terhadap pemahaman teoritis serta menawarkan dasar bagi pengambilan keputusan manajerial dalam pengelolaan antrian layanan bank.

Kata Kunci: Antrian, Bank, CTMC, M/M/1, Simulasi, Stokastik

ABSTRACT

This study aims to model the queueing system at the teller service of PT Bank SulutGo, Airmadidi Branch, using a stochastic M/M/1 approach based on Continuous-Time Markov Chain (CTMC). The model assumes that customer arrivals follow a Poisson distribution, while service times follow an exponential distribution. Data were collected through direct observation over ten working days, and system parameters were estimated using the Maximum Likelihood Estimation method. The estimated arrival rate is 6.07 customers per hour, and the service rate is 9 customers per hour. Simulation of 500 customer arrivals indicates that the average waiting time is relatively low, and the system operates efficiently with a utilization rate of approximately 67%. The M/M/1 model provides a simple yet effective representation of a single-server queueing system, although it has limitations in modeling multi-server environments and relies on strict distributional assumptions. This study contributes to theoretical understanding and serves as a practical tool for managerial decision-making in optimizing banking service operations.

Keywords: *Banking, CTMC, M/M/1, Queueing, Simulation, Stochastic*

DAFTAR ISI

HALAMAN UTAMA ... 1
ABSTRAK ... 2
ABSTRACT ... 2
DAFTAR ISI ... 3
BAB I PENDAHULUAN ... 4
1.1 Latar Belakang Masalah ... 4
1.2 Rumusan Masalah ... 5
1.3 Tujuan Penelitian ... 5
1.4 Manfaat Penelitian ... 5
1.5 Batasan Masalah ... 6
BAB II METODOLOGI ... 8
2.1 Deskripsi Model ... 8
2.2 Definisi Ruang Keadaan dan Parameter ... 9
2.3 Formulasi Matematis ... 10
2.4 Metode Simulasi/Analisis ... 11
2.5 Pengumpulan Data ... 12
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN ... 15
3.1 Penyajian Hasil ... 15
3.1.1 Estimasi Parameter Kedatangan Nasabah ... 15
3.1.2 Estimasi Parameter Waktu Pelayanan Nasabah ... 16
3.1.3 Simulasi ... 19
3.2 Interpretasi ... 21
3.3 Perbandingan ... 22
3.4 Kekuatan dan Keterbatasan ... 23
BAB IV KESIMPULAN ... 25
4.1 Ringkasan Temuan ... 25
4.2 Implikasi ... 25
4.3 Saran ... 26
REFERENSI ... 27
LAMPIRAN ... 28

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam sektor layanan, terutama di bidang perbankan, kualitas pelayanan menjadi salah satu aspek yang penting demi menjaga kepercayaan nasabah. Salah satu keluhan yang sering muncul adalah waktu tunggu dalam antrian yang cukup lama. Antrian yang panjang dan waktu tunggu yang tidak pasti bisa menyebabkan ketidaknyaman, mengganggu operasional, dan bahkan menurunkan kepercayaan nasabah terhadap layanan perbankan.

Permasalahan ini turut terjadi di PT Bank SulutGo Cabang Airmadidi, yang hanya membuka dua dari tiga *teller* saat kondisi ramai. Padahal, bank telah menetapkan standar waktu pelayanan maksimal 5 menit per transaksi, namun pengamatan menunjukkan bahwa rata-rata waktu tunggu nasabah bisa mencapai 7 hingga 9 menit, yang menandakan adanya ketidakefisienan dalam sistem antrian.

Untuk dapat memahami dan mengatasi permasalahan ini, diperlukan pendekatan matematis yang mampu memodelkan proses kedatangan nasabah dan proses pelayanan secara acak. Salah satu pendekatan yang sering digunakan adalah model stokastik M/M/1 yang menggunakan *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC), dengan asumsi proses kedatangan nasabah berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.

Walaupun tergolong sederhana, model M/M/1 dapat menggambarkan sistem antrian dengan satu jalur pelayanan dengan cukup akurat. Model ini juga dilengkapi dengan rumus-rumus analitik yang memudahkan perhitungan waktu tunggu, panjang antrian, dan tingkat kesibukan sistem.

Dengan menggunakan data riil dari Bank SulutGo, penelitian ini bertujuan untuk memodelkan dan menilai sistem antrian *teller* secara kuantitatif, mengestimasi parameter sistem, serta melakukan simulasi untuk memperoleh gambaran yang lebih jelas mengenai kinerja sistem. Selain meningkatkan pemahaman mengenai teori antrian, hasil penelitian ini diharapkan juga dapat memberikan kontribusi untuk meningkatkan efisiensi pelayanan bank dan mendukung pengambilan keputusan yang lebih tepat.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana karakteristik dari sistem antrian pada layanan teller Bank SulutGo Cabang Airmadidi yang dimodelkan dengan pendekatan stokastik M/M/1 menggunakan *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC)?
2. Bagaimana estimasi parameter tingkat kedatangan nasabah dan waktu pelayanan berdasarkan data observasi?
3. Seberapa akurat model M/M/1 dalam merepresentasikan kinerja sistem antrian berdasarkan hasil simulasi dan perbandingannya dengan perhitungan teoritis?
4. Apa saja keterbatasan dari model M/M/1 dalam menggambarkan sistem antrian riil di Bank SulutGo Cabang Airmadidi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Membangun model sistem antrian layanan *teller* di Bank SulutGo Cabang Airmadidi dengan pendekatan stokastik M/M/1 berbasis *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC).
2. Mengestimasi parameter kedatangan dan pelayanan berdasarkan data observasi, serta mensimulasikan sistem antrian untuk mengevaluasi kinerja operasional, seperti waktu tunggu dan panjang antrian.
3. Menganalisis kesesuaian model M/M/1 terhadap karakteristik sistem antrian nyata dan mengidentifikasi keterbatasan model dalam merepresentasikan kondisi sebenarnya di lapangan.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dalam tiga aspek utama berikut:

1. Manfaat Akademis
    a. Menjadi contoh kasus nyata dalam penerapan teori proses stokastik, khususnya model antrian M/M/1 berbasis *Continuous-Time Markov Chain*

(CTMC) pada permasalahan operasional di dunia perbankan.

b. Menjadi referensi bagi mahasiswa atau peneliti lain yang ingin memahami penerapan model stokastik dan simulasi dalam menyelesaikan permasalahan nyata.

2. Manfaat Praktis

   a. Memberikan *insight* bagi manajemen Bank SulutGo mengenai performa sistem antrian yang sedang berjalan.

   b. Menjadi dasar pertimbangan untuk pengambilan keputusan yang lebih tepat, seperti jumlah teller yang sebaiknya dioperasikan atau penyesuaian jam operasional agar pelayanan menjadi lebih efisien.

3. Manfaat Sosial

   a. Membantu meningkatkan kepuasan nasabah melalui sistem pelayanan yang lebih efisien.

   b. Mendorong pemanfaatan pendekatan berbasis data dalam perencanaan layanan publik agar pelayanan yang diberikan lebih tepat sasaran dan kepercayaan masyarakat terhadap layanan perbankan semakin meningkat.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini lebih terfokus dan terukur, beberapa batasan masalah yang ditetapkan adalah sebagai berikut:

- Model yang digunakan adalah M/M/1, yaitu model antrian dengan satu jalur layanan, meskipun pada kenyataannya Bank SulutGo Cabang Airmadidi memiliki lebih dari satu *teller*. Model ini dipilih untuk menyederhanakan analisis dan simulasi.
- Distribusi kedatangan nasabah diasumsikan mengikuti distribusi Poisson, dan waktu pelayanan diasumsikan mengikuti distribusi eksponensial, sesuai dengan karakteristik model M/M/1, meskipun pada data asli terdapat indikasi distribusi yang berbeda.
- Simulasi hanya dilakukan pada sistem dengan satu *teller*, untuk menyesuaikan

kerangka sistem antrian M/M/1 dan menjaga kesederhanaan model.

- Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa rata-rata jumlah kedatangan dan rata-rata waktu pelayanan per hari selama 10 hari kerja, bukan menggunakan data rinci dari setiap nasabah, sehingga perhitungan parameter dilakukan berdasarkan data yang sudah dirangkum per hari.

BAB II
METODOLOGI

2.1 Deskripsi Model

Pada penelitian ini, sistem antrian teller di PT Bank SulutGo Cabang Airmadidi dimodelkan sebagai Continuous-Time Markov Chain (CTMC) dengan struktur M/M/1 (single-server birth–death process). Pemilihan M/M/1 bertujuan untuk memfokuskan analisis pada perilaku dasar CTMC sebelum memperluas ke model multi-server. Data yang digunakan adalah hasil observasi selama 10 hari kerja (08.00–15.00, Tabel 1), dengan total 425 kedatangan nasabah dalam 70 jam operasi.

Laju kedatangan lambda dihitung dari interarrival time yang diasumsikan Poisson (eksponensial memori-less):

$$\lambda = \frac{\{425\}}{\{70\}} \approx 6.07\ nasabah/jam$$

Laju pelayanan μ diperoleh dari service time eksponensial melalui estimasi maximum likelihood:

$$\mu \approx 9\ nasabah/jam$$

Karena interarrival time dan service time keduanya eksponensial, proses ini memenuhi properti memory-less dan membentuk birth–death CTMC, di mana "birth" (kedatangan) terjadi pada laju λ dan "death" (selesai dilayani) pada laju μ.

Selanjutnya, probabilitas transisi memenuhi persamaan Chapman–Kolmogorov:

$$P(t + s) = P(t)\ P(s)$$

Notasi:

- P(t) = matriks probabilitas transisi selama t

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(t)q_{kj} \quad (forward)$$

Notasi:

- $P_{ij}(t)$ = prob. dari state i ke j di waktu t
- q_{kj} = elemen generator Q dari k ke j

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = \sum_{k} q_{ik}P_{kj}(t)\ (backward)$$

Notasi:

- q_{ik} = elemen Q dari i ke k
- $P_{kj}(t)$ = prob. transisi k→j di waktu t

dan solusi dalam bentuk eksponensial matriks:

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Qt)^k}{k!}$$

2.2 Definisi Ruang Keadaan dan Parameter

Ruang keadaan S adalah himpunan bilangan bulat tak negatif, di mana n menunjukkan jumlah total nasabah dalam sistem (menunggu + sedang dilayani):

$$S = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

di mana:

- State 0: Tidak ada nasabah di dalam sistem (teller menganggur).
- State 1: Satu nasabah sedang dilayani, dan tidak ada nasabah menunggu di antrian.
- State n (n ≥ 2): Satu nasabah sedang dilayani, dan (n – 1) nasabah menunggu di antrian.

Transisi antar state:

- Kedatangan (“birth”) $n \to n + 1\ pada\ laju\ \lambda$:
- Pelayanan(“death”) $n \to n - 1\ pada\ laju\ \mu,\ untuk\ n > 0$

Pada state 0 tidak ada transisi “death” karena tidak ada nasabah untuk dilayani.

Matriks generator $Q = [qij]$ memberi laju lompatan dari i ke j

$q_{n,n+1} = \lambda$, $q_{n,n-1} = \mu$; $(n > 0)$, $q_{n,n} = -(\lambda + \mu)$

Balance Equations (Steady-State)

Setiap aliran “masuk” = aliran “keluar” di long-run:

$$\pi_0\lambda \ = \ \pi_1\mu, \qquad \qquad \pi_n\lambda = \pi_{n+1}\mu$$

Distribusi Stasioner (Solusi dari Balance Equations):

$$\pi_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n\pi_0, \qquad \pi_0 = 1 - \rho, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Utilisasi Sistem (Fraksi waktu teller sibuk):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

2.3 Formulasi Matematis

Pemodelan antrian pada bank yang ada dalam penelitian ini dilakukan dengan menggunakan pendekatan *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC), khususnya model antrian M/M/1. Model ini merupakan salah satu model dengan *birth-death process* dengan waktu kedatangan nasabah mengikuti distribusi Poisson dengan laju λ dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial dengan laju μ serta jumlah servernya adalah 1. Dalam kasus ini, keadaan (*state*) merepresentasikan banyaknya nasabah dalam sistem, termasuk yang sedang dilayani.

Ruang keadaan dalam model ini didefinisikan sebagai himpunan $S = \{0, 1, 2, ...\}$, di mana *state* n menunjukkan jumlah nasabah yang berada dalam sistem pada waktu tertentu. Transisi antar *state* terjadi secara stokastik dari *state* n ke $n + 1$ saat ada nasabah datang dengan laju λ dan dari *state* n ke $n - 1$ dengan laju μ saat pelayanan selesai, selama $n > 0$.

Proses ini dapat disajikan dalam bentuk matriks generator Q, di mana matriks ini menggambarkan laju perpindahan antar *state*. Matriks Q memiliki struktur sebagai berikut.

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Kondisi *steady-state* dapat dianalisis menggunakan persamaan:

$$\pi Q = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

Karena model M/M/1 adalah *birth-death process*, maka probabilitas *steady-state* π_n diberikan oleh:

$$\pi_n = \rho^n \times \pi_0 \text{ dengan } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \rho < 1$$

Dengan menerapkan syarat normalisasi $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, diperoleh nilai $\pi_0 = 1 - \rho$, sehingga:

$$\pi_n = (1 - \rho) \times \rho^n$$

Dari hasil ini, beberapa kinerja sistem antrian dapat dihitung sebagai berikut.

- Ekspektasi banyaknya nasabah dalam sistem (L): $L = \frac{\rho}{1-\rho}$
- Ekspektasi banyaknya nasabah yang mengantri (L_q): $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Ekspektasi waktu nasabah dari mengantri sampai selesainya pelayanan (W): $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$
- Ekspektasi waktu tunggu nasabah dalam antrian sampai dilayani (W_q): $W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$

Model M/M/1 hanya akan valid apabila $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, yang artinya bahwa laju pelayanan harus lebih tinggi dibandingkan dengan laju kedatangan nasabah untuk mencegah sistem menjadi tidak stabil. Formulasi matematis ini menjadi dasar untuk melakukan analisis dan evaluasi kinerja sistem antrian bank.

2.4 Metode Simulasi/Analisis

Simulasi dalam penelitian ini dilakukan untuk merepresentasikan proses kedatangan nasabah dan pelayanan pada sistem antrian bank menggunakan pendekatan stokastik dengan model M/M/1. Simulasi dijalankan menggunakan bahasa pemrograman Python. Dalam simulasi ini, diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan nasabah mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter λ, dan waktu pelayanan juga mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter μ. Sebanyak 40 nasabah pertama disimulasikan untuk dianalisis alur masuk dan keluarnya dari sistem, serta waktu tunggu masing-masing nasabah dihitung berdasarkan waktu datang dan waktu mulai dilayani.

Hasil simulasi divisualisasikan dalam dua bentuk grafik. Grafik pertama menyajikan *timeline* alur nasabah, yaitu waktu nasabah tiba, mulai dilayani, dan selesai dilayani, yang memberikan gambaran jelas mengenai waktu tunggu dan waktu pelayanan. Grafik kedua menyajikan jumlah nasabah dalam sistem terhadap waktu, yang merepresentasikan dinamika sistem antrian dari waktu ke waktu.

Analisis dilakukan dengan mengamati pola-pola yang muncul pada grafik, seperti waktu tunggu yang meningkat ketika sistem padat dan waktu-waktu *idle* saat sistem kosong. Teknik ini bertujuan untuk memperkuat pemahaman terhadap karakteristik sistem antrian yang dibentuk oleh parameter λ dan μ, serta membandingkan perilaku empiris sistem dengan hasil teoritis dari formulasi matematis pada bagian sebelumnya.

2.5 Pengumpulan Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini dilakukan menggunakan teknik observasi langsung terhadap sistem antrian di PT Bank SulutGo Cabang Airmadidi selama sepuluh hari kerja. Pengumpulan data dilakukan dengan mencatat secara manual seluruh aktivitas kedatangan dan pelayanan nasabah pada bagian *teller*, termasuk waktu kedatangan dan waktu pelayanan masing-masing nasabah.

Pengamatan bertujuan untuk memperoleh informasi mengenai rata-rata jumlah nasabah dalam sistem, rata-rata waktu yang dihabiskan oleh nasabah di dalam sistem, rata-rata jumlah nasabah yang menunggu dalam antrian, serta rata-rata waktu tunggu sebelum dilayani. Selain itu, data juga mencakup distribusi kedatangan nasabah per jam dan per hari kerja, sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 1 dan Tabel 2 berikut ini.

No	Tanggal	Hari kerja	Jumlah kedatangan nasabah	Rata-Rata waktu pelayanan (menit)
1	20/09/2021	Senin	43	8
2	21/09/2021	Selasa	28	10
3	22/09/2021	Rabu	40	7.4
4	23/09/2021	Kamis	37	6

5	24/09/2021	Jumat	43	5
6	27/09/2021	Senin	45	7
7	28/09/2021	Selasa	38	6.8
8	29/09/2021	Rabu	43	8
9	30/09/2021	Kamis	58	5
10	01/10/2021	Jumat	40	7
Jumlah			425	7.5

Tabel 1. Distribusi Kedatangan Nasabah Per Hari Bagian *Teller*

No	Tgl	Hari kerja	08.00-09.00	09.00-10.00	10.00-11.00	11.00-12.00	12.00-13.00	13.00-14.00	14.00-15.00	Jml
1	20/09/2021	Senin	6	9	8	6	7	4	3	43
2	21/09/2021	Selasa	4	2	10	5	1	4	2	28
3	22/09/2021	Rabu	3	2	14	7	7	3	4	40
4	23/09/2021	Kamis	3	5	3	8	8	6	4	37
5	24/09/2021	Jumat	5	7	9	5	7	6	4	43
6	27/09/2021	Senin	3	2	15	11	7	3	4	45
7	28/09/2021	Selasa	4	7	10	9	6	7	5	38
8	29/09/2021	Rabu	3	5	4	9	7	9	6	43
9	30/09/2021	Kamis	5	8	7	17	6	5	10	58

10	01/10 /2021	Jumat	3	9	6	6	5	5	6	40

Tabel 2. Distribusi Kedatangan Nasabah Berdasarkan Jam Kerja

Struktur sistem antrian yang diamati memiliki karakteristik *multi-channel single-phase*, yaitu terdiri dari tiga *teller*, namun yang aktif melayani hanya dua *teller* secara bersamaan, dengan proses pelayanan yang terjadi dalam satu tahap (*single-phase*). Berdasarkan hasil observasi, pola kedatangan nasabah bersifat acak dan tidak teratur, yang sesuai dengan asumsi distribusi Poisson dalam model M/M/1.

Meskipun pelayanan yang dilakukan oleh dua *teller* mengindikasikan sistem *multi-channel*, namun dalam rangka penyederhanaan dan fokus pada dasar teori *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC), model yang dianalisis dalam penelitian ini tetap menggunakan pendekatan antrian M/M/1. Hal ini bertujuan untuk memudahkan formulasi matematis dan simulasi awal yang fokus pada prinsip dasar sistem antrian berbasis Markov.

Standar pelayanan pada bank ini ditetapkan sekitar 5 menit per transaksi, namun dari hasil pengamatan aktual, rata-rata waktu pelayanan yang dicatat berkisar antara 5 hingga 10 menit, tergantung pada hari dan jumlah nasabah yang datang.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Penyajian Hasil

Menggunakan data yang dikumpulkan pada jurnal yang telah disebutkan di Subbab 2.5, dapat dilakukan estimasi parameter, terutama parameter λ dan μ. Dengan menggunakan asumsi bahwa nasabah datang dengan mengikuti proses Poisson(λ), dimana dalam waktu 1 jam, nasabah yang datang mengikuti distribusi Poisson(λ), asumsi bahwa waktu pelayanan nasabah mengikuti distribusi Exp(μ), dan data pada jurnal, dilakukan metode estimasi sebagai berikut.

3.1.1 Estimasi Parameter Kedatangan Nasabah

Menggunakan asumsi bahwa kedatangan nasabah di setiap interval 1 jam mengikuti distribusi Poisson(λ), dimana λ memiliki satuan jam, dan data yang terdiri dari 70 observasi jumlah kedatangan pada 10 hari tersebut, dilakukan estimasi *maximum likelihood* untuk λ dengan sampel acak independen $X_1, \cdots, X_{70}$. Ingat kembali bahwa pdf dari distribusi Poisson(λ) adalah

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ x = 0, 1, 2, \cdots$$

Maka, fungsi likelihood untuk parameter ini dengan sampel acak $X_1, \cdots, X_{70}$ adalah

$$L(\lambda) = f_1(x_1; \lambda) f_2(x_2; \lambda) \cdots f_{70}(x_{70}; \lambda) = \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \frac{\lambda^{x_2} e^{-\lambda}}{x_2!} \cdots \frac{\lambda^{x_{70}} e^{-\lambda}}{x_{70}!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{70} x_i} e^{-70\lambda}}{\prod_{j=1}^{70} x_j!}.$$

Dengan mengambil logaritma natural (ln), diperoleh fungsi log-likelihood yaitu

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = \ln \lambda \cdot \sum_{i=1}^{70} x_i - 70\lambda - \sum_{j=1}^{70} \ln x_j!.$$

Kemudian, akan dimaksimumkan fungsi log likelihood ini dengan mencari turunannya dan menyamakannya dengan nol, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{70} x_i - 70 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{70} \sum_{i=1}^{70} x_i.$$

Jadi, diperoleh estimator *maximum likelihood* untuk parameter λ, yaitu

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{70}\sum_{i=1}^{70} X_i = \bar{X}.$$

Lebih lanjut, perhatikan bahwa

$$E(\hat{\lambda}) = E(\frac{1}{70}\sum_{i=1}^{70} X_i) = \frac{1}{70}\sum_{i=1}^{70} E(X_i) = \frac{1}{70}\sum_{i=1}^{70} \lambda = \frac{70\lambda}{70} = \lambda,$$

yang berarti estimator *maximum likelihood* $\hat{\lambda}$ adalah estimator yang tak bias. Menggunakan estimator ini, diperoleh estimasi untuk parameter *rate* kedatangan nasabah λ yaitu

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{70}(6 + 9 + 8 + \cdots + 5 + 6) = \frac{425}{70} = 6.07 \text{ nasabah per jam.}$$

3.1.2 Estimasi Parameter Waktu Pelayanan Nasabah

Kali ini, akan diasumsikan bahwa waktu pelayanan nasabah mengikuti distribusi Exp(μ). Meskipun demikian, pada data yang dimiliki, hanya terdapat data mengenai rata-rata waktu pelayanan di hari tertentu selama 10 hari. Selain itu, ada juga masalah dimana ternyata rata-rata yang ditulis di bawah kolom Rata-rata Waktu Pelayanan (menit) salah, sehingga itu akan diabaikan. Oleh karena itu, estimasi *maximum likelihood* yang perlu dilakukan lebih sulit. Untungnya, data tersusun secara rapi sehingga estimasi masih dapat dilakukan.

Misalkan $X_{1,1}, X_{1,2}, \cdots, X_{1,43}$ menyatakan waktu-waktu pelayanan nasabah di hari pertama. Karena terdapat 43 nasabah yang datang di hari pertama, maka sampel tersebut mencapai sebanyak 43 nasabah. Kemudian, misalkan pula $X_{2,1}, X_{2,2}, \cdots, X_{2,28}$ menyatakan waktu-waktu pelayanan nasabah di hari kedua, $X_{3,1}, X_{3,2}, \cdots, X_{3,40}$ menyatakan waktu-waktu pelayanan nasabah di hari ketiga, dan seterusnya sampai $X_{10,1}, X_{10,2}, \cdots X_{10,40}$ yang menyatakan waktu-waktu pelayanan nasabah di hari kesepuluh. Perhatikan bahwa secara total terdapat 425 observasi $X_{i,j}$, yang masing-masing akan diasumsikan untuk mengikuti distribusi Exp(μ).

Meskipun demikian, nilai-nilai untuk $X_{i,j}$ tidak diketahui dari data. Yang diketahui dari data hanyalah mean dari waktu pelayanan di setiap harinya, yaitu $\bar{X}_1 = \frac{1}{43}\sum_{j=1}^{43} X_{1,j}$, $\bar{X}_2 = \frac{1}{28}\sum_{j=1}^{28} X_{2,j}$, dan seterusnya sampai $\bar{X}_{10}$. Oleh karena itu, untuk mencari estimasi untuk μ, pertama perlu ditentukan distribusi dari masing-masing $\bar{X}_i$.

Akan digunakan teknik MGF untuk menentukan distribusi dari $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{i,n_i}$. Perhatikan bahwa X_{i,n_i} berdistribusi eksponensial dengan parameter rate μ, sehingga memiliki mgf $M_X(t) = (1 - \frac{1}{\mu}t)^{-1}$. Maka, mgf dari $\bar{X}_i$ yaitu

$$M_{\bar{X}}(t) = E(e^{t\bar{X}}) = E(e^{\frac{t}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}}) = E(e^{\frac{t}{n_i}X_{i,1}} \cdots e^{\frac{t}{n_i}X_{i,n_i}}) = E(e^{\frac{t}{n_i}X_{i,1}}) \cdots E(e^{\frac{t}{n_i}X_{i,n_i}}),$$

yang merupakan perkalian antara mgf dari X_{i,n_i}, yang semuanya sama. Artinya, perkalian sebanyak n_i ini hanyalah perpangkatan, sehingga mgf dari $\bar{X}_i$ menjadi

$$M_{\bar{X}}(t) = ((1 - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{t}{n_i})^{-1})^{n_i} = (1 - \frac{1}{\mu n_i}t)^{-n_i}.$$

Jadi, ternyata $\bar{X}_i$ akan berdistribusi Gamma($\alpha = n_i$, $\beta = \frac{1}{\mu n_i}$). Dengan mengetahui ini, diperoleh informasi bahwa

- $\bar{X}_1 \sim Gamma(43, \frac{1}{43\mu})$
- $\bar{X}_2 \sim Gamma(28, \frac{1}{28\mu})$
- $\bar{X}_3 \sim Gamma(40, \frac{1}{40\mu})$
- $\bar{X}_4 \sim Gamma(37, \frac{1}{37\mu})$
- $\bar{X}_5 \sim Gamma(43, \frac{1}{43\mu})$
- $\bar{X}_6 \sim Gamma(45, \frac{1}{45\mu})$
- $\bar{X}_7 \sim Gamma(38, \frac{1}{38\mu})$
- $\bar{X}_8 \sim Gamma(43, \frac{1}{43\mu})$

- $\bar{X}_9 \sim Gamma(58, \frac{1}{58\mu})$
- $\bar{X}_{10} \sim Gamma(40, \frac{1}{40\mu})$

Selanjutnya, setelah mengetahui distribusi dari data yang dimiliki, barulah bisa dibangun fungsi likelihood untuk parameter μ diketahui $\bar{X}_1, \cdots \bar{X}_{10}$. Fungsi likelihoodnya yaitu

$$L(\mu) = f_1(\bar{x}_1; \mu) \cdots f_{10}(\bar{x}_{10}; \mu) = \frac{(43\mu)^{43}}{\Gamma(43)} (\bar{x}_1)^{42} e^{-43\mu\bar{x}_1} \cdots \frac{(40\mu)^{40}}{\Gamma(40)} (\bar{x}_{10})^{39} e^{-40\mu\bar{x}_{10}}$$

atau

$$L(\mu) = \frac{43^{43} \cdots 40^{40} \mu^{425}}{\Gamma(43) \cdots \Gamma(40)} (\bar{x}_1)^{42} \cdots (\bar{x}_{10})^{39} e^{-\mu(43\bar{x}_1 + \cdots + 40\bar{x}_{10})}.$$

Kemudian, dengan mengambil logaritma natural, diperoleh fungsi log-likelihood yaitu

$$l(\mu) = \ln(43^{43} \cdots 40^{40}) + 425 \ln(\mu) - \ln(\Gamma(43) \cdots \Gamma(40)) + \ln((\bar{x}_1)^{42} \cdots (\bar{x}_{10})^{39}) - \mu(43\bar{x}_1 + \cdots + 40\bar{x}_{10}).$$

Fungsi log-likelihood ini kemudian diturunkan terhadap μ dan disamakan dengan nol untuk mendapatkan maksimumnya, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial l(\mu)}{\partial \mu} = \frac{425}{\mu} - (43\bar{x}_1 + \cdots + 40\bar{x}_{10}) = 0 \rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{43\bar{x}_1 + \cdots + 40\bar{x}_{10}}{425}.$$

Jadi didapat estimator *maximum likelihood* untuk μ yaitu

$$\hat{\mu} = \frac{425}{43\bar{X}_1 + \cdots + 40\bar{X}_{10}} = 1/(\frac{43\bar{X}_1 + \cdots + 40\bar{X}_{10}}{425}) = \frac{1}{\bar{\bar{X}}}.$$

Meskipun demikian, penting untuk diperhatikan bahwa estimator ini masih berbias. Hal ini dapat dibuktikan dengan pertama menentukan distribusi dari $\bar{\bar{X}} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} n_i \bar{X}_i = \frac{1}{425} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}$ lagi-lagi dengan teknik mgf:

$$M_{\bar{\bar{X}}}(t) = E(e^{t\bar{\bar{X}}}) = E(e^{\frac{t}{425}(X_{1,1} + X_{1,2} + \cdots X_{10,40})}) = E(e^{\frac{t}{425}X_{1,1}}) \cdots E(e^{\frac{t}{425}X_{10,40}}) = (1 - \frac{1}{\mu}\frac{t}{425})^{-425}.$$

Ternyata, mgf dari $\bar{\bar{X}}$ adalah mgf dari distribusi Gamma($\alpha = 425$, $\beta = \frac{1}{425\mu}$). Kemudian, ingat bahwa ekspektasi dari kebalikan dari distribusi Gamma(α, β) adalah

$E(1/X) = \frac{1}{(\alpha-1)\beta}$. Akibatnya, ekspektasi dari estimator *maximum likelihood* $\hat{\mu}$ adalah

$$E(\hat{\mu}) = E(\frac{1}{\bar{\bar{X}}}) = \frac{1}{(\alpha-1)\beta} = \frac{1}{424 \cdot 1/425\mu} = \frac{425}{424}\mu \neq \mu.$$

Ketakbiasan ini dapat dihilangkan dengan mendefinisikan statistik baru yaitu

$$\tilde{\mu} = \frac{424}{425}\hat{\mu} = \frac{424}{425} \cdot \frac{425}{43\bar{X}_1 + \cdots + 40\bar{X}_{10}} = \frac{424}{43\bar{X}_1 + \cdots + 40\bar{X}_{10}}.$$

Meskipun demikian, karena data sampel yang dimiliki (yaitu 425) sudah cukup banyak, bias yang terjadi juga tidak akan terlalu besar ($Bias(\hat{\mu}) = \frac{425}{424}\mu - \mu = \frac{1}{424}\mu$ cukup kecil, terutama jika rate pelayanan μ nya juga kecil). Selain itu, dengan menggunakan estimator tak bias $\tilde{\mu}$ ketimbang estimator MLE $\hat{\mu}$, efisiensi juga akan menurun. Hal ini menandakan bahwa sebaiknya estimator yang digunakan adalah $\hat{\mu}$.

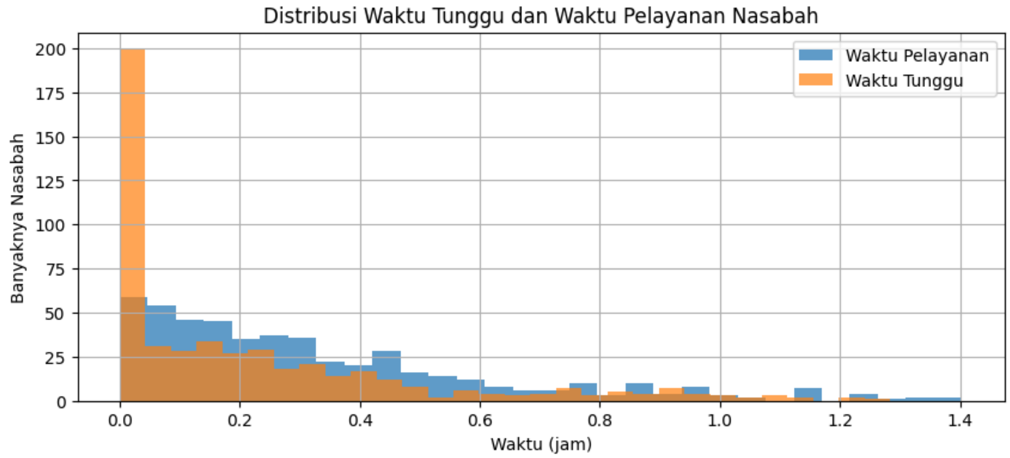
Menggunakan estimator $\hat{\mu}$, diperoleh estimasi untuk waktu pelayanan nasabah yaitu

$$\hat{\mu} = \frac{425}{43\bar{X}_1 + \cdots + 40\bar{X}_{10}} = \frac{425}{43 \cdot 8 + \cdots + 40 \cdot 7} = \frac{425}{2844.4} = 0.15 \text{ nasabah per menit}$$

atau sama dengan 9 nasabah per jam.

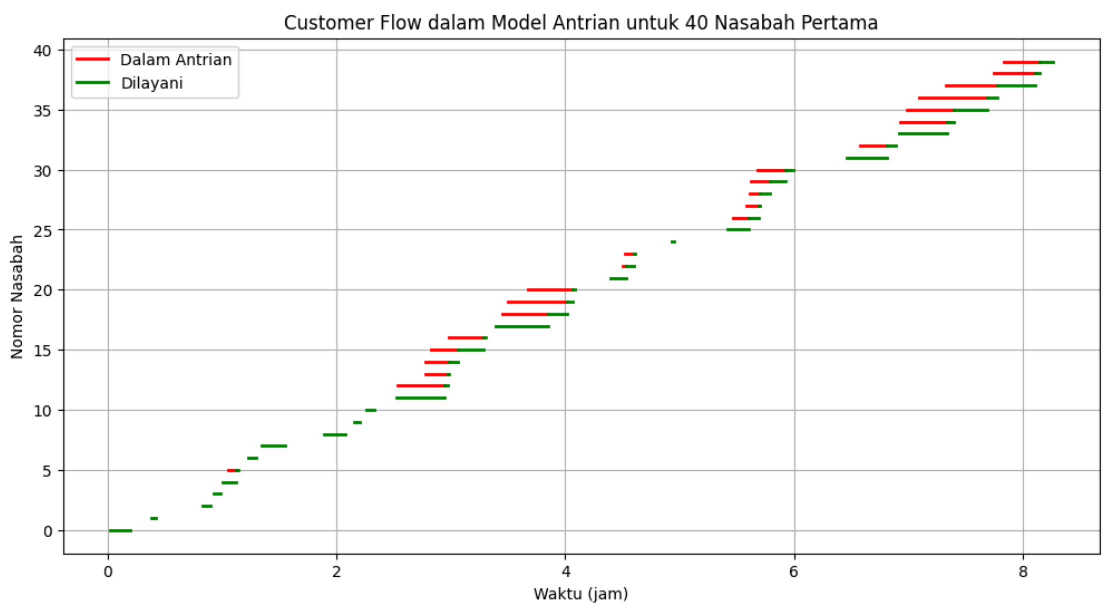
3.1.3 Simulasi

Selanjutnya, setelah diperoleh estimasi untuk parameter λ dan μ, yaitu $\hat{\lambda} = 6.07$ dan $\hat{\mu} = 9$, dilakukan simulasi untuk sebanyak 500 nasabah menggunakan *Python*. Hasil simulasi waktu tunggu dan waktu pelayanannya yaitu sebagai berikut.



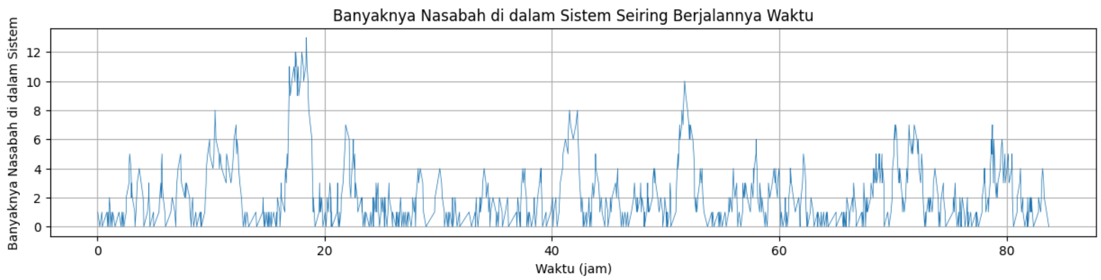
Gambar 3.1. Grafik distribusi waktu tunggu dan waktu pelayanan nasabah hasil simulasi.

Kemudian, dibuat pula grafik *timeline* gambaran *customer flow* untuk 40 nasabah pertama sebagai berikut.



Gambar 3.2. Lini masa nasabah yang datang/mengantri dalam sistem.

Terakhir, dibuat juga grafik banyaknya nasabah yang terdapat di dalam sistem seiring berjalannya waktu untuk kedatangan 500 nasabah hasil simulasi sebagai berikut.



Gambar 3.3. Grafik banyaknya nasabah di dalam sistem antrian seiring berjalannya waktu.

Ketiga hasil simulasi ini akan dijelaskan dan diinterpretasikan di Subbab 3.2.

3.2 Interpretasi

Setelah dilakukan simulasi dan memperoleh plot yang diinginkan, perlu dilakukan interpretasi supaya meningkatkan pemahaman tentang model antrian yang telah ditetapkan. Interpretasi ini kemudian dapat digunakan untuk menarik kesimpulan dan saran.

Gambar 3.1. menunjukkan distribusi waktu tunggu dan waktu pelayanan nasabah. Pertama, perhatikan bahwa distribusi dari waktu tunggu nasabah sangat menceng kanan, dimana banyak nasabah merasakan waktu tunggu yang sangat cepat, dibawah 0.1 jam atau bahkan tidak menunggu sama sekali. Hal ini masuk akal, karena memang rate kedatangan nasabah lebih kecil dibandingkan dengan waktu pelayanan nasabah, yaitu 6.07 dibandingkan dengan 9, sehingga nasabah lebih cepat dilayani daripada datang. Dapat dilihat juga bahwa sangat sedikit nasabah yang perlu menunggu sampai lebih dari 1 jam sebelum akhirnya dilayani.

Selain itu, perhatikan juga bahwa distribusi dari waktu pelayanan nasabah juga menceng ke kanan, dengan kebanyakan nasabah memiliki waktu pelayanan yang cukup cepat, tidak lebih dari 1 jam. Dapat dilihat juga bahwa cukup sedikit nasabah yang memerlukan waktu lebih dari 1 jam untuk dilayani.

Selanjutnya, Gambar 3.2. menunjukkan lini masa hasil simulasi yang kami lakukan untuk 40 nasabah pertama. Perhatikan bahwa antrian tidak terlalu sering menumpuk, dan bahkan jika memang menumpuk, maka antrian tersebut dengan cepat diselesaikan karena memang rate pelayanan nasabah lebih cepat daripada rate kedatangan nasabah. Hal ini masih sesuai dengan teori yang mendasari sistem antrian.

Kemudian, Gambar 3.3. menunjukkan banyaknya nasabah yang terdapat dalam sistem, termasuk yang sedang dilayani, terhadap waktu. Dapat dilihat bahwa grafik ini cukup stasioner dan tidak meledak ke tak hingga. Meskipun memang beberapa kali terjadi penumpukan antrian dimana nasabah yang mengantri cukup banyak, seperti di jam 17-19 yang bahkan mencapai 13 orang, hasil simulasi menunjukkan bahwa antrian yang panjang sekalipun bisa diselesaikan oleh model antrian ini.

3.3 Perbandingan

Hasil simulasi yang diperoleh di Subbab 3.2 dapat dibandingkan dengan hasil teoritis. Menggunakan $\lambda = 6.07$ dan $\mu = 9$, dengan nilai utilisasi $\rho = \lambda/\mu = 0.674$, dapat dihitung beberapa ukuran proporsi dan ekspektasi:

- Proporsi terdapat sebanyak n nasabah yang terdapat di dalam sistem:

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n = 0.326 \cdot 0.674^n$$

  Proporsi ini ternyata berdistribusi geometrik.

- Ekspektasi banyaknya nasabah dalam sistem:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.674}{1-0.674} = 2.07 \text{ nasabah}$$

- Ekspektasi banyaknya nasabah yang mengantri:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0.674)^2}{1-0.674} = 1.39 \text{ nasabah}$$

- Ekspektasi waktu nasabah dari mengantri sampai selesainya pelayanan:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{9-6.07} = 0.34 \text{ jam}$$

- Ekspektasi waktu tunggu nasabah dalam antrian sampai dilayani:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{0.647}{9-6.07} = 0.23 \text{ jam}$$

Hasil proporsi dan ekspektasi teoritis ini kemudian dibandingkan dengan simulasi. Menggunakan simulasi yang telah dilakukan, diperoleh nilai-nilai ekspektasi

$$\hat{L} = 1.97,\ \hat{L}_q = 1.29,\ \hat{W} = 0.33,\ \hat{W}_q = 0.22.$$

Hasil ini cukup mendekati ekspektasi-ekspektasi teoritis untuk sistem antrian yang telah dimodelkan. Kemudian, distribusi dari proporsi nasabah yang datang dapat diperiksa menggunakan uji statistik seperti uji Kecocokan Model Chi-Square. Uji ini digunakan karena distribusi yang ingin diuji adalah distribusi yang diskrit. Menggunakan uji kecocokan model, diperoleh hasil output sebagai berikut:

- Statistik uji Chi-Squared = 1.6331
- Derajat bebas = 14
- Titik kritis 95% = 23.6848
- P-value = 1.0000

Karena p-valuenya cukup besar, hipotesis nol yang menyatakan distribusi dari data geometrik tidak ditolak. Artinya, proporsi kedatangan nasabah hasil simulasi memang berdistribusi geometrik dengan parameter $p = \rho = \lambda/\mu$.

3.4 Kekuatan dan Keterbatasan

Model antrian M/M/1 yang telah dibahas merupakan salah satu model yang paling sederhana untuk memodelkan antrian dalam bank yang hanya memiliki 1 *server*. Beberapa keunggulan/kekuatan dari model antrian ini yaitu:

1. Model ini sangat sederhana sehingga perhitungan ekspektasi pun mudah dilakukan, dan memiliki rumus yang sederhana. Oleh karena itu, model ini dapat diinterpretasi dan dianalisis dengan cukup cepat dibandingkan dengan model lainnya.
2. Model ini juga cukup mudah untuk disimulasikan dan dibuat plotnya.

Meskipun demikian, model antrian M/M/1 juga memiliki keterbatasan. Beberapa keterbatasannya yaitu sebagai berikut:

1. Kebanyakan bank memiliki lebih dari 1 *server*. Hal ini berarti kebanyakan model tidak bisa sama sekali dimodelkan menggunakan model M/M/1. Masalah ini dapat diselesaikan dengan mengimplementasikan model M/M/s, dengan s adalah jumlah *server* pada sistem. Meskipun demikian, melakukan ini akan meningkatkan kompleksitas model dan menghilangkan kesederhanaan yang ada jika digunakan model M/M/1.
2. Pada estimasi parameter yang dilakukan, kedatangan nasabah diasumsikan mengikuti

proses Poisson dan distribusi waktu pelayanan juga diasumsikan mengikuti distribusi Eksponensial. Kedua asumsi ini belum tentu selalu berlaku, dan perlu dilakukan pengujian untuk mengecek asumsi ini. Terlebih lagi, data yang dimiliki kurang lengkap, dimana hanya ada data mengenai rata-rata waktu pelayanan di suatu hari, dan bukan waktu pelayanan untuk setiap nasabah yang datang. Masalah ini dapat diselesaikan dengan melakukan pengumpulan data yang lebih detail dan lengkap.

BAB IV
KESIMPULAN

4.1 Ringkasan Temuan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas, terlihat bahwa penelitian ini memodelkan sistem antrian *teller* di Bank SulutGo Cabang Airmadidi dengan pendekatan stokastik M/M/1 yang didasarkan pada *Continuous-Time Markov Chain* (CTMC). Parameter diestimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* berdasarkan data observasi. Estimasi menunjukkan bahwa rata-rata kedatangan nasabah adalah 6,07 nasabah per jam, sedangkan rata-rata kemampuan pelayanan adalah 9 nasabah per jam.

Simulasi sistem untuk 500 nasabah menunjukkan bahwa sebagian besar nasabah dapat dilayani dengan cepat, dimana waktu tunggu rata-rata cukup rendah dan tingkat pemanfaatan server cukup sedang. Model antrian M/M/1, meskipun sederhana, tetapi mampu merepresentasikan sistem antrian satu server secara akurat. Akan tetapi, model ini terbatas dalam penerapannya karena hanya sesuai untuk sistem dengan satu server, asumsi distribusinya cukup ketat, dan membutuhkan data yang lebih lengkap untuk estimasi yang lebih akurat.

4.2 Implikasi

Hasil penelitian menunjukkan bahwa model M/M/1 mampu memberikan gambaran yang cukup representatif mengenai sistem antrian sederhana di bank. Dengan pemanfaatan di bawah 70%, sistem berada dalam kondisi yang stabil dan efisien. Artinya, bank masih mampu melayani nasabah tanpa adanya tekanan yang berlebih.

Walaupun begitu, penerapan model ini masih memiliki keterbatasan dalam kehidupan nyata, mengingat sebagian besar bank memiliki lebih dari satu *teller*. Oleh karena itu, model M/M/1 lebih sesuai digunakan sebagai pendekatan awal dalam memodelkan sistem antrian sederhana atau sebagai landasan untuk simulasi lanjutan dengan model yang lebih rumit.

4.3 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk menggunakan model M/M/s (dengan $s > 1$) agar lebih sesuai dengan jumlah *teller* sebenarnya di Bank SulutGo. Selain itu, pengumpulan data yang lebih rinci, seperti waktu kedatangan dan waktu pelayanan setiap nasabah, akan sangat mendukung peningkatan tingkat keakuratan estimasi dan menguji kebenaran asumsi distribusi yang digunakan.

Dari sisi praktis, manajemen bank dapat memanfaatkan model ini sebagai alat bantu untuk mengevaluasi efisiensi operasional, menentukan jumlah teller yang optimal, serta mensimulasikan berbagai kemungkinan peningkatan jumlah nasabah untuk mengantisipasi potensi penumpukan antrian pada masa mendatang.

REFERENSI

Lumunon, L. N. A., Kindangen, P., & Tumewu, F. (2022). Efektivitas sistem antrian dalam mengoptimalkan pelayanan pada PT Bank SulutGo Cabang Airmadidi [Effectiveness of queue system in optimizing services at PT. Bank SulutGo Airmadidi branch]. *Jurnal EMBA*, *10*(1), 1749–1757. ANALISIS SISTEM ANTRIAN PADA BPJS KESEHATAN MANADO | Jurnal EMBA

LAMPIRAN

Link program yang digunakan untuk simulasi:

Simulasi Model Antrian Bank.ipynb