连续信号的分析

主 讲 教 师 ： 于 淼

连续信号的频域分析

二、非周期信号的频谱分析

- 从傅立叶级数到傅立叶变换
- 常见非奇异信号的频谱
- 奇异信号的频谱
- 周期信号的傅立叶变换

连续信号的频域分析

1、从傅立叶级数到傅立叶变换

当周期矩形脉冲信号的周期T_0无限大时,就演变成了非周期的单脉冲信号

$$T_0 \to \infty$$

谱线无限密集，频率也变成连续变量

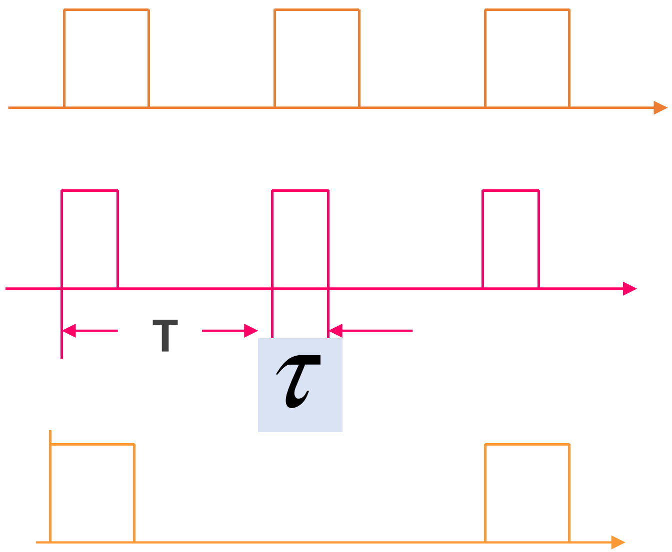
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to 0 \to d\omega$$

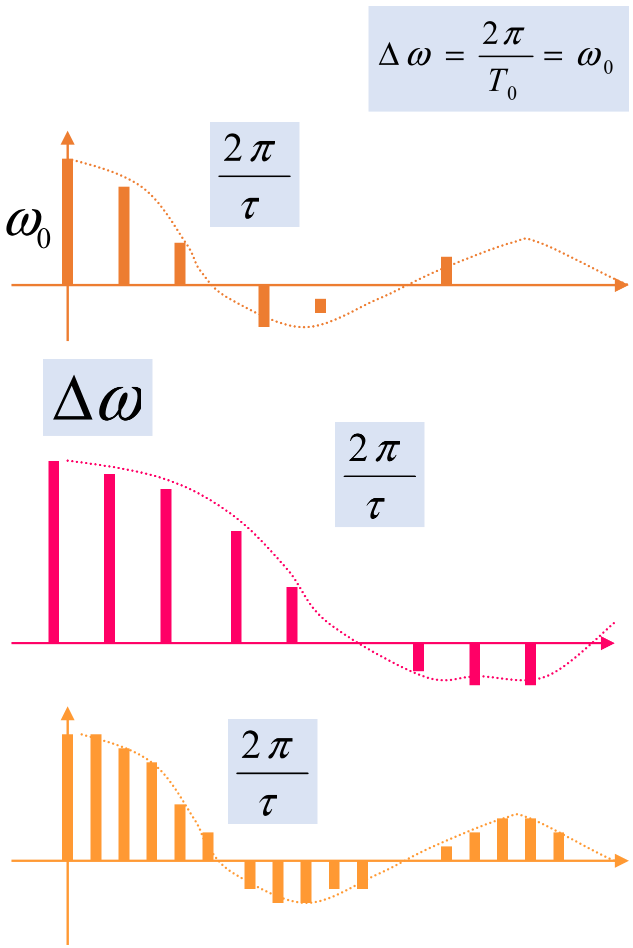
$$n\omega_0 \to \omega$$

连续信号的频域分析

周期矩形脉冲的频谱变化规律

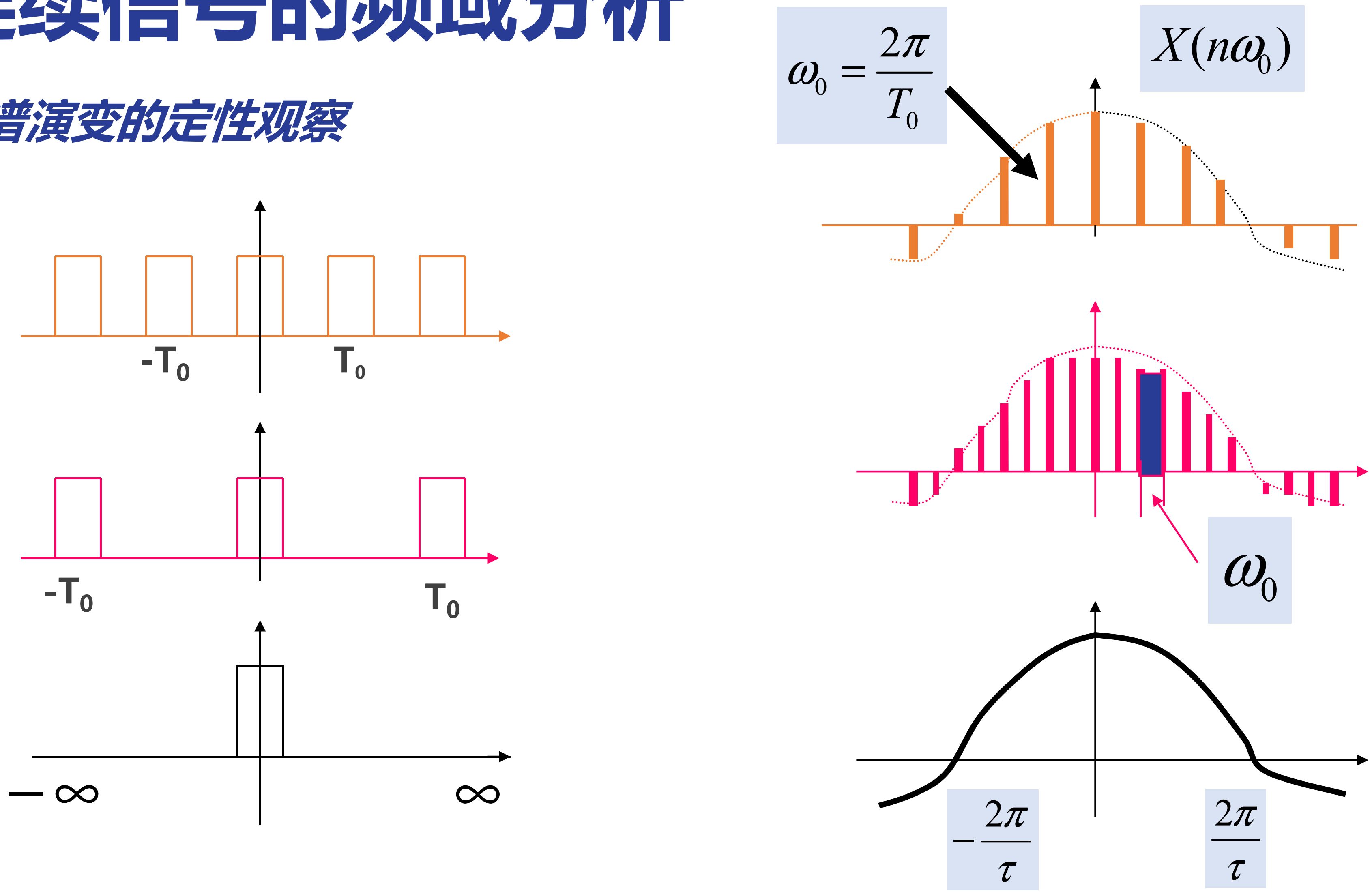
- 周期T不变，改变脉宽τ
- 脉宽τ不变，改变周期T_0





连续信号的频域分析

频谱演变的定性观察



连续信号的频域分析

从周期信号FS推导非周期的FT

$$\hat{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

傅立叶系数

$$\hat{X}(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\hat{x}(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}=\lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}T_0\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}\cdot\frac{1}{T_0}$$

$$=\lim_{T_0\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}T_0\hat{X}(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}\cdot\omega_0$$

消除T0的影响

$$T_0\hat{X}(n\omega_0)=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\hat{x}(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

T0趋于无穷

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅立叶反变换

T0趋于无穷

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅立叶变换

连续信号的频域分析

从物理意义来讨论傅立叶变换

- $X(\omega)$ 是一个频谱***密度函数*** 的概念
- $X(\omega)$ 是一个***连续谱***
- $X(\omega)$ 包含了***从零到无限高*** 频率的所有频率分量
- 各频率分量的频率***不成谐波*** 关系

连续信号的频域分析

傅立叶变换存在的条件

- 在无限区间内是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|dt < \infty$$

狄里赫利条件只是信号存在傅立叶变换的充分条件

- 在任意有限区间内，x(t)只有有限个不连续点，在这些点上函数取有限值。
- 在任意有限区间内， x(t)只有有限个极大值和极小值。

连续信号的频域分析

2、常见非奇异信号的频谱

- 矩形脉冲信号
- 单边指数信号
- 双边指数信号
- 双边奇指数信号

连续信号的频域分析

（1）矩形脉冲信号

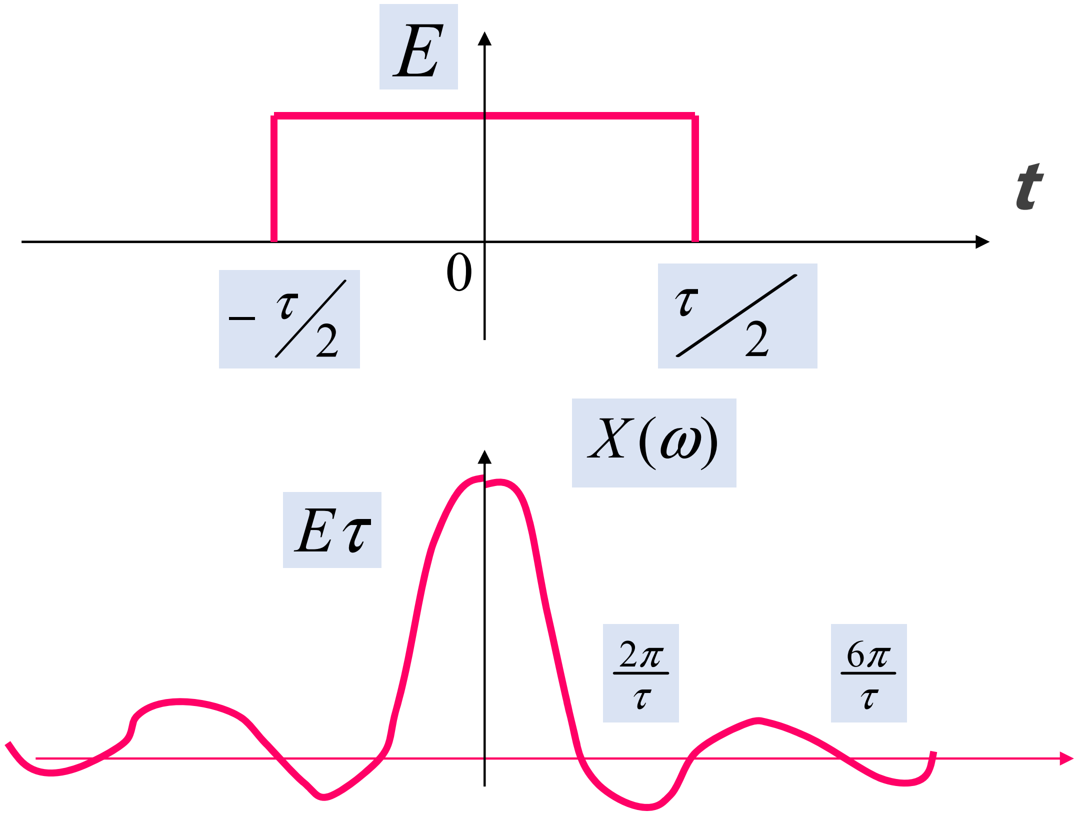
$$g(t)=\begin{cases} E & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

连续信号的频域分析

（1）矩形脉冲信号



连续信号的频域分析

（2）单边指数信号

$$x(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0, a>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

- 幅频

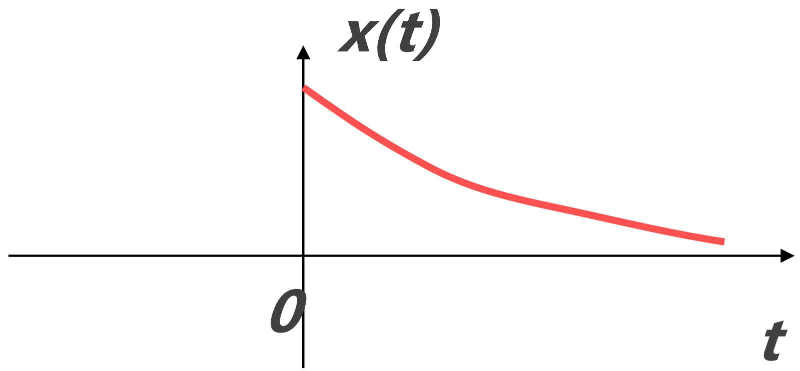
$$|X(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

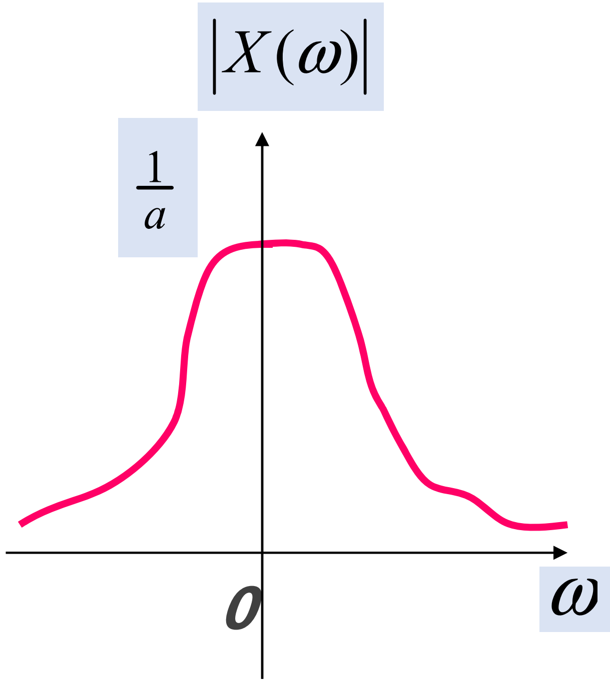
- 相频

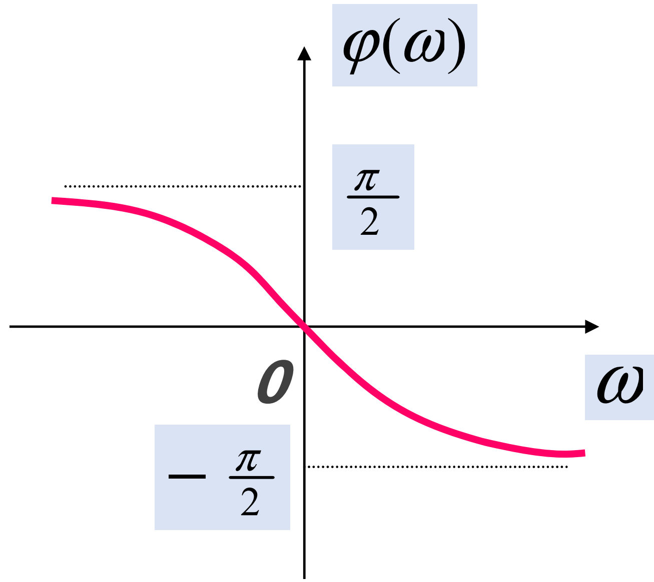
$$\varphi(\omega)=-\tan^{-1}(\frac{\omega}{a})$$

连续信号的频域分析

(2）单边指数信号







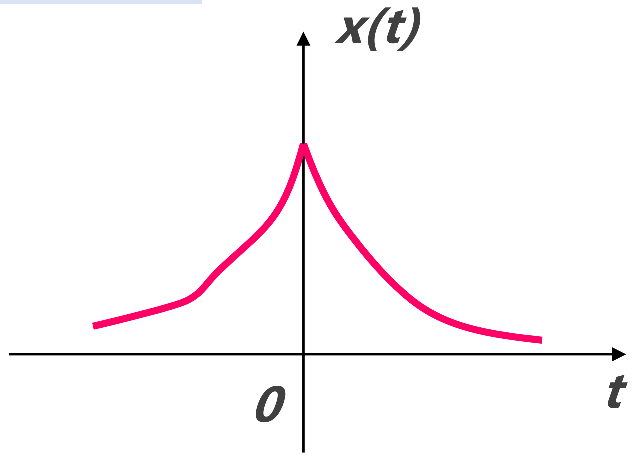
连续信号的频域分析

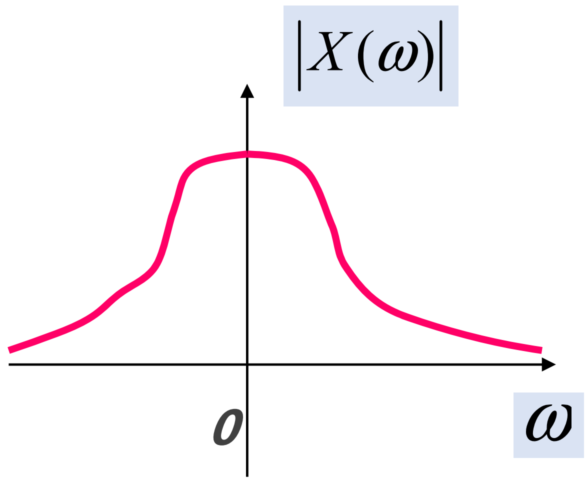
(3) 双边指数信号

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$





连续信号的频域分析

（4）双边奇指数信号

$$x(t)=\begin{cases}-e^{at} & t<0,a>0\\ e^{-at} & t>0,a>0\end{cases}$$

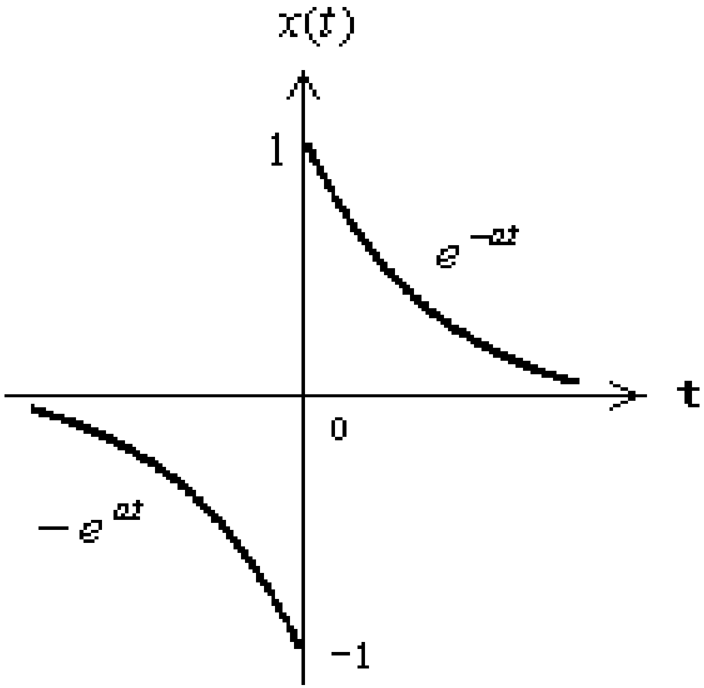
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}(-e^{at}e^{-j\omega t})dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

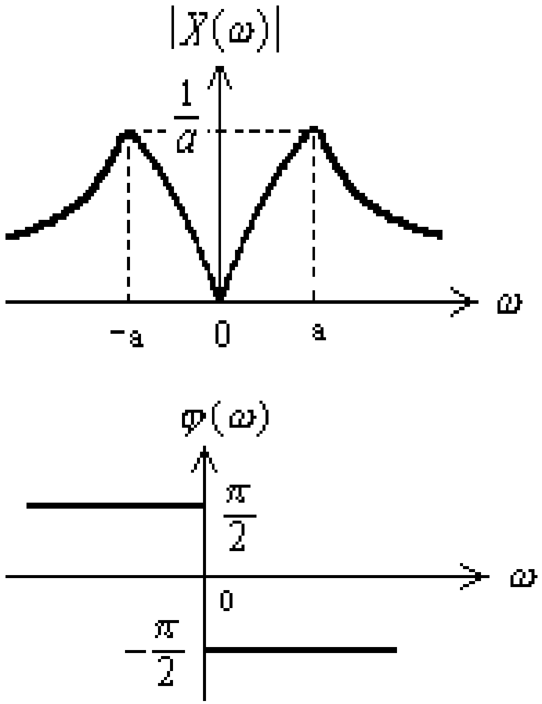
$$=-\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$

- **幅频** $$|X(\omega)|=\frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}$$
- **相频** $$\varphi(\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \omega<0\\ -\frac{\pi}{2} & \omega>0\end{cases}$$

连续信号的频域分析

(4) 双边奇指数信号





连续信号的频域分析

3、奇异信号的频谱

- 单位冲激信号
- 单位直流信号
- 符号函数信号
- 单位阶跃信号

往往不满足狄里赫利条件，通常用求极限的方法得到其频谱。

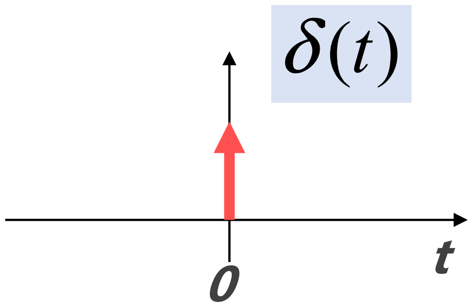
连续信号的频域分析

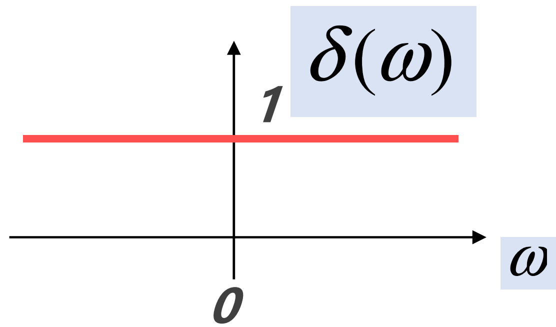
（1）单位冲激信号

- *根据冲激函数的筛选特性，有*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{0} = 1$$

也可由单矩形脉冲信号的傅立叶变换取极限得到





连续信号的频域分析

（2）单位直流信号

$$x(t)=1 \qquad -\infty < t < \infty$$

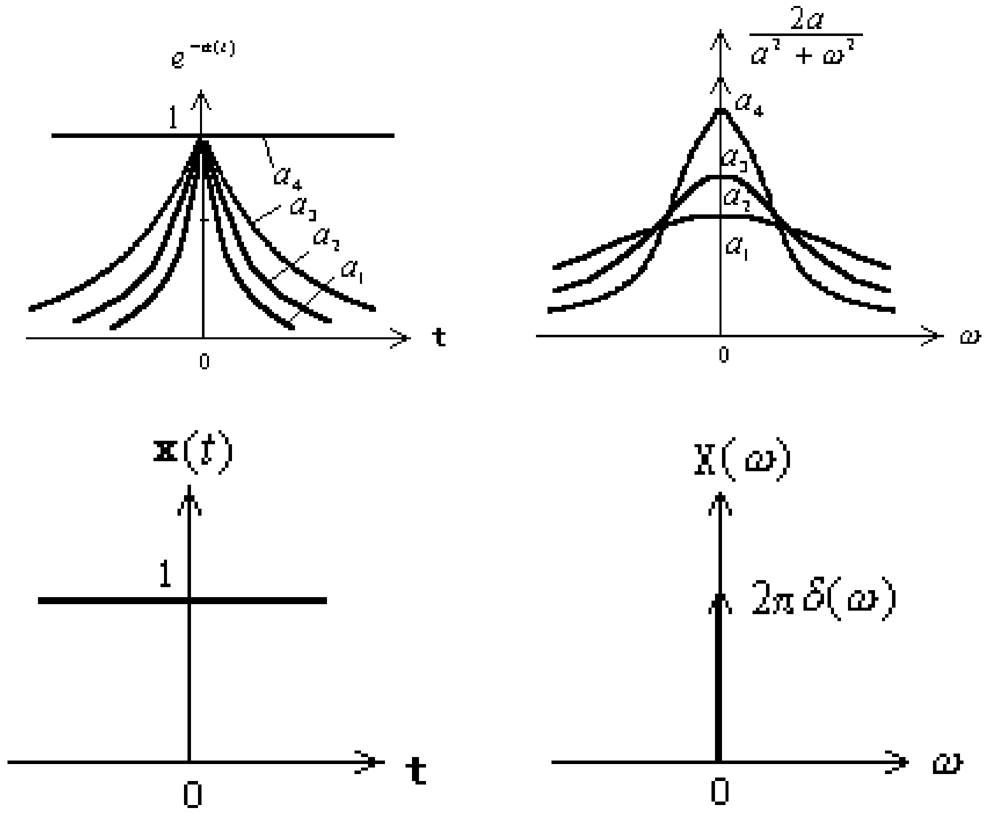
- 该信号不满足绝对可积条件，可以把它看作双边指数信号

当 $e^{-a|t|}(a>0)$ 的极限 $a \to 0$

$$F[e^{-a|t|}]=\frac{2a}{a^2+\omega^2} \xrightarrow{\text{a趋于零}} X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

连续信号的频域分析

(2) 单位直流信号



连续信号的频域分析

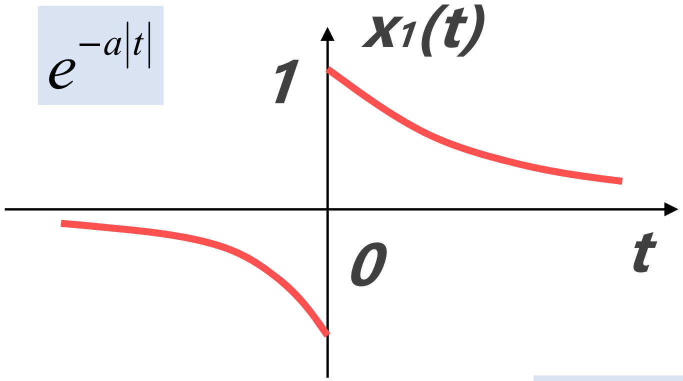
（3）符号函数信号

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 0 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

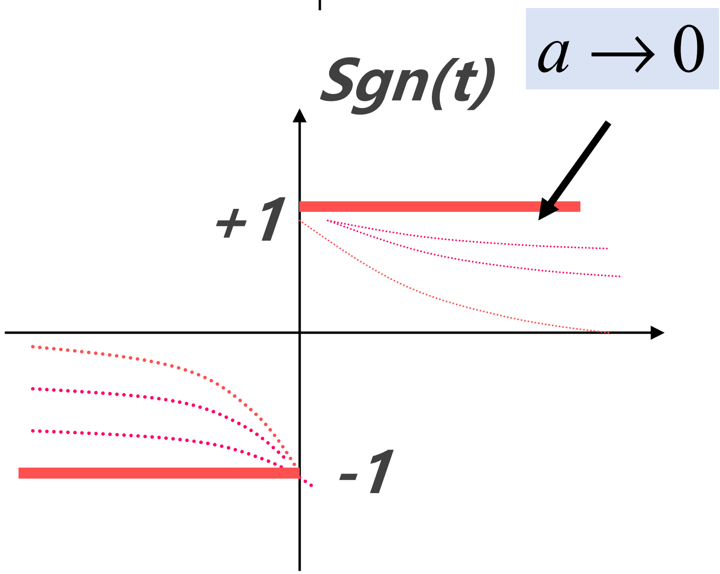
- 把符号函数信号看成是双边奇指数信号当a趋于0时的极限 。

$$X(\omega)=\lim_{a\to 0}[-j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}]=\begin{cases}\dfrac{2}{j\omega} & \omega\neq 0\\ 0 & \omega=0\end{cases}$$

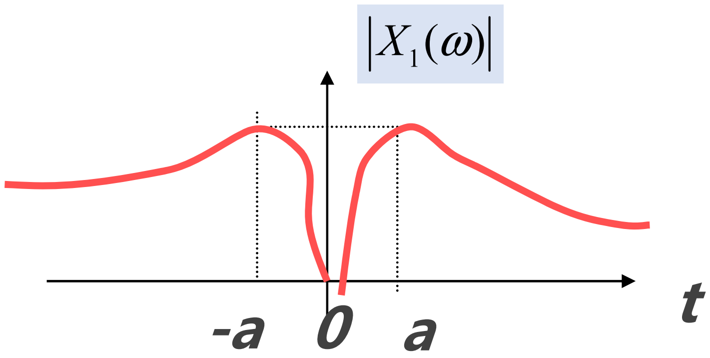
连续信号的频域分析



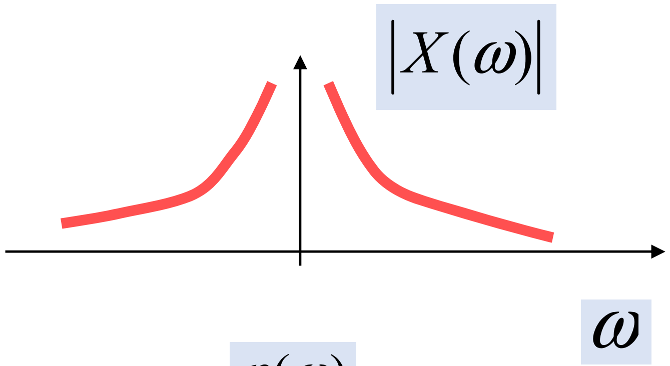
$e^{-a|t|}$
$x_1(t)$
1
0
t



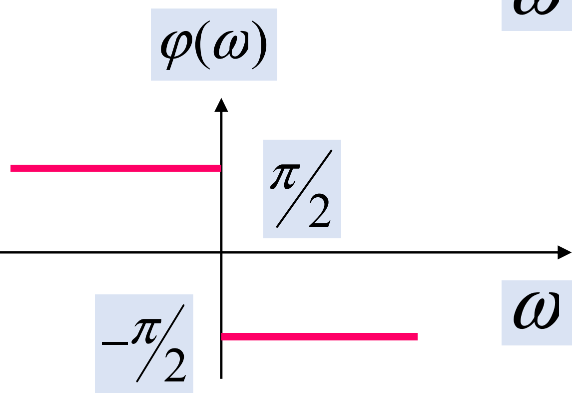
$a \to 0$
Sgn(t)
+1
-1



$|X_1(\omega)|$
-a
0
a
t



$|X(\omega)|$
ω



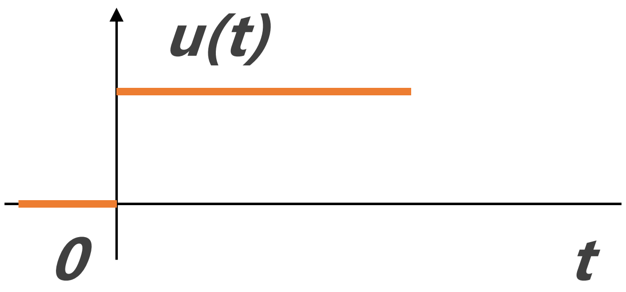
$\varphi(\omega)$
$\pi/2$
$-\pi/2$
ω

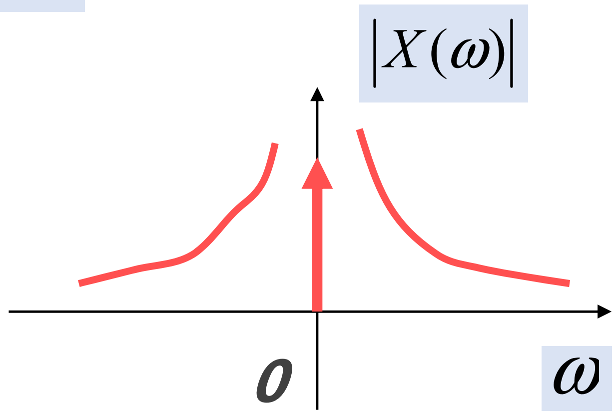
连续信号的频域分析

（4）单位跃阶信号

- 把它视为单边指数信号当a趋于0时的极限

$$X(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$





连续信号的频域分析

4、周期信号的傅立叶变换

- 复指数信号
- 正弦信号
- 余弦信号
- 一般周期信号

连续信号的频域分析

（1）复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$

- 考虑 $x(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅立叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

设x(t)的傅立叶变换为X(ω)，则上式为X(ω- ω_0)

令x(t) = 1，则由直流信号的傅立叶变换式，有

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$X_e(\omega) = X(\omega-\omega_0) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

连续信号的频域分析

(2) 正弦信号 $\sin\omega_0 t$

- 欧拉公式

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

应用复指数信号的傅立叶变换

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= -j\pi\delta(\omega-\omega_0) + j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

连续信号的频域分析

（3）余弦信号 $\cos\omega_0 t$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$
$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

连续信号的频域分析

(4）一般周期信号

周期信号的傅立叶变换（频谱密度函数）由无穷多个冲激函数组成，这些冲激函数位于周期信号的各谐波频率处，其强度为各相应幅度$X(n\omega_0)$的2π倍。

- *一般周期信号可以展开成指数形式的傅立叶级数*

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$X(\omega)=F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)F[e^{jn\omega_0 t}]$$

已知 $e^{jn\omega_0 t}$ 的傅立叶变换为 $2\pi\delta(\omega-n\omega_0)$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$$

谢谢大家