# 离散信号的分析

主讲教师：齐冬莲

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## 1、DFS

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

周期为N

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

周期为N

如果周期序列x(n)的周期N趋于∞，则其频谱$X(k\Omega_0)$将如何变化?

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## 2、离散时间傅立叶变换DTFT

- 非周期序列可看作为周期序列的周期N→∞的极限情况

❖ 极限情况下各谐波分量的复振幅$X(k\Omega_0)\rightarrow 0$

$$\lim_{N\rightarrow\infty} N\cdot X(k\Omega_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$N\rightarrow\infty,\Omega_0=(2\pi/N)\rightarrow d\Omega,k\Omega_0\rightarrow\Omega$$

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

x(n) 为有限长序列，若为无限长序列，须满足条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|=S<\infty$$

N为有限长序列

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\Omega n}=\underline{X(\Omega)}$$

频谱密度

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## 思 考

- X(Ω) 是否具有周期性？若是，则其周期是多少？
- X(Ω)的幅频特性和相频特性各具有什么特点？

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\Omega n}=X(\Omega)$$

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

**DTFT反变换** **DFS：** $x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$

N→∞

$$x(n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\Omega)e^{j\Omega n}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\Omega_0}{2\pi}\to\frac{d\Omega}{2\pi},\sum_{k=0}^{N-1}\to\int_0^{2\pi}$$

IDTFT

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

X(Ω)为数字频率Ω的周期函数，周期为2π

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## DTFT:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT)

**例1：求有限长序列x(n)的频谱**

$$x(n)=\begin{cases}0 & others \\ 1 & -2\le n\le 2\end{cases}$$

**解：**

$$X(\Omega)=\sum_{n=-2}^{2}e^{-j\Omega n}=\frac{\sin(2+1/2)\Omega}{\sin(\Omega/2)}$$

$$|X(\Omega)|=\left|\frac{\sin(2+1/2)\Omega}{\sin(\Omega/2)}\right|$$

频谱为连续的

$$\varphi(\Omega)=\begin{cases}0 & X(\Omega)>0 \\ \pm\pi & X(\Omega)<0\end{cases}$$

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## 3、 DFS、DTFT与FT之间的关系

- **DTFT与DFS**： DTFT是DFS当N→∞时情况
  - **共同点**：在时域时间是离散的，在频域频谱都是周期的。
  - **不同点**：周期序列的频谱是离散的，具有谐波性， X（$k\Omega_0$）是谐波的复振幅，宜于计算机计算；非周期序列的频谱是连续的，不具有谐波性， X（Ω）表示的是频谱密度，不利于计算机计算分析。
- **DTFT与FT**：
  - **共同点**：在时域波形均为非周期，频域均为频谱密度函数，为连续频谱。
  - **不同点**：X（Ω）是周期性的， X（ω）为非周期的。

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## 连续信号离散化后分析其频谱时：

- 采样频率：必须满足采样定理，否则容易引起**频谱混叠**。
- 采样信号的截断长度：必须取信号的一个基本周期或基本周期的整数倍长度， 否则容易引起**频谱泄露**。

**频谱泄露**：由于截取信号长度不当，从原来比较集中的谱线，出现了分散的扩展谱线

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

## 4、DTFT的性质

| | | |
|---|---|---|
| 线性 | $ax(n)+by(n)$ | $aX(\Omega)+bY(\Omega)$ |
| 位移 | $x(n-n_0)$ | $e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$ |
| 时间反向 | $x(-n)$ | $X(-\Omega)$ |
| 调制 | $e^{j\Omega_0 n}x(n)$ | $X(\Omega-\Omega_0)$ |
| 卷积 | $x(n)*y(n)$ | $X(\Omega)Y(\Omega)$ |
| 共轭 | $x^*(n)$ | $X^*(-\Omega)$ |
| 微分 | $nx(n)$ | $j\dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ |
| 乘积 | $x(n)y(n)$ | $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\theta)Y(\Omega-\theta)d\theta$ |

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT）

例2： 假设y(n)满足零初始条件且x(n)=δ(n)，求解下式线性常差分方程。

$$y(n)-0.25y(n-1)=x(n)-x(n-2)$$

- 解： 首先取差分方程中每项的DTFT：

$$Y(\Omega)-0.25e^{-j\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega)-e^{-2j\Omega}X(\Omega)$$

- 因为x(n)的DTFT是X(Ω)=1

$$Y(\Omega)=\frac{1-e^{-2j\Omega}}{1-0.25e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}}-\frac{e^{-2j\Omega}}{1-0.25e^{-j\Omega}}$$

- 利用DTFT对 $(0.25)^n u(n)\xleftrightarrow{DTFT}\frac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}}$
- 利用线性和移位性质求得 $y(n)=(0.25)^n u(n)-(0.25)^{n-2}u(n-2)$

# 非周期离散信号的频谱分析（DTFT)

## 5、信号的频谱特征

- 连续时间信号的频谱是非周期的
- 离散时间信号的频谱是周期的
- 周期信号具有离散频谱
- 非周期信号具有连续频谱

- 时域周期性——频域离散性
- 时域离散性——频域周期性
- 时域非周期——频域连续性
- 时域连续性——频域非周期

# 预习与作业

- 作业
  - P188
    - 6，11
    - 24，25（MATLAB）
- 预习
    - DFT、FFT
- 实验2：离散时间信号分析
    - 4月2日，周四1-2节

# 谢谢大家