信号分析与处理

第四章信号处理基础

浙江大学控制科学与工程学系

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

主要内容

- 系统及其性质
  - 系统的描述
  - 系统的性质
- 信号的线性系统处理
  - 时域法分析
  - 频域法分析
  - 复频域分析

系统的描述

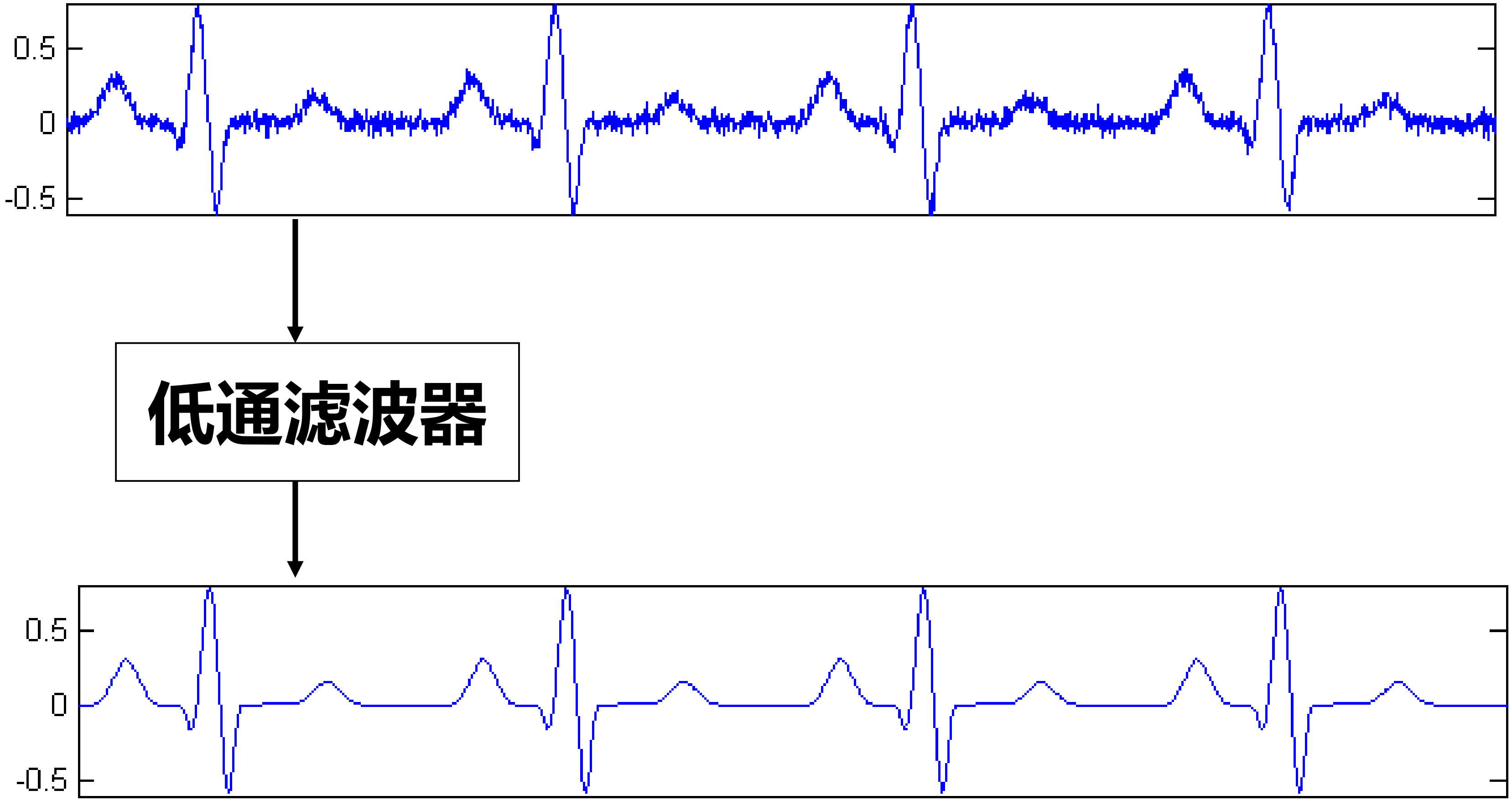
系统的定义：一组相互间有联系的事物组成的一个整体

对信息的处理即对信号的处理、管理等是通过不同系统实现的

Physical system in the broadest sense are an interconnection of components, devices, or subsystems.

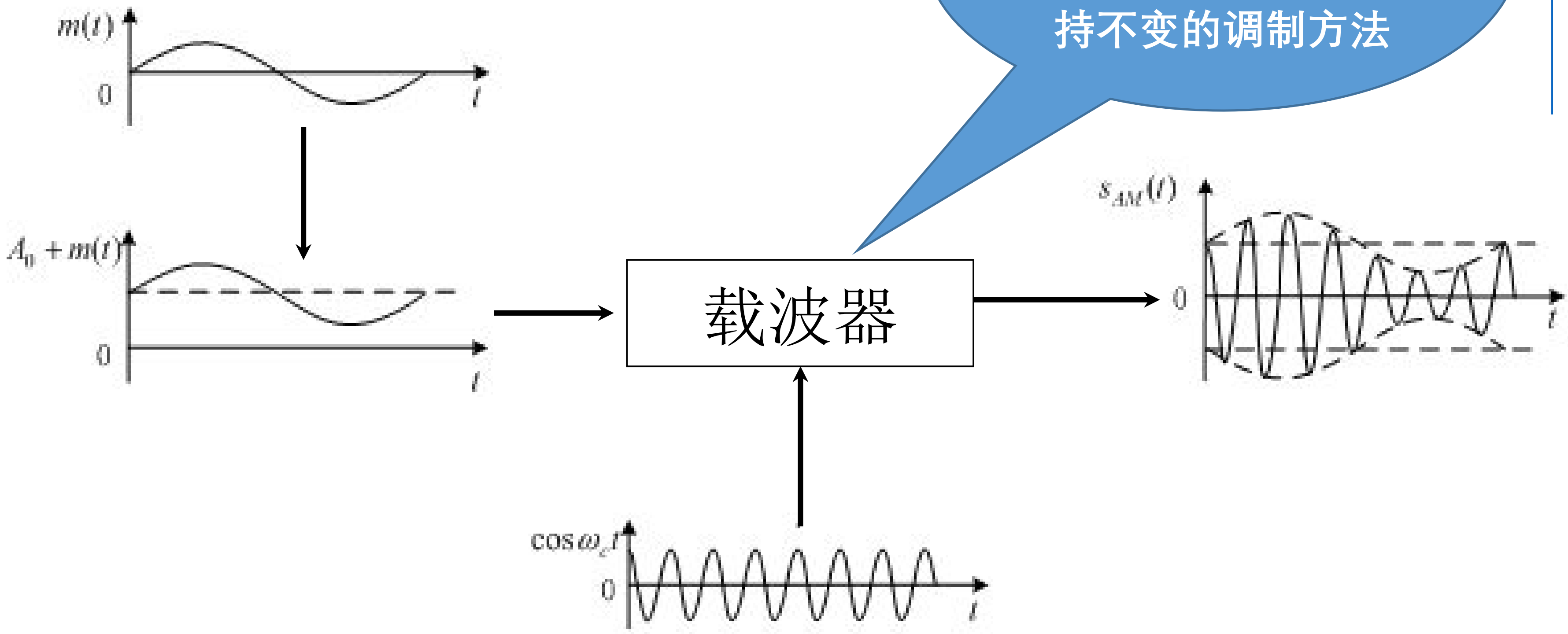
A system can be viewed as a process in which input signals are transformed by the system or caused the system to respond in some way, resulting in other signals as outputs.

例：心电图低通滤波



例：AM的调幅信号

使载波的振幅按照所需传送信号的变化规律而变化，但频率保持不变的调制方法



智能交通—车牌识别系统

- 边缘检测
- 纹理分析
- 区域聚类
- 候选区域
- 二值化
- 倾斜校正
- 字符分割
- 字符识别

系统的数学模型

系统数学模型

- 对系统进行抽象，用能表达信号加工或变换关系的数学式子来描述系统，就是系统的数学模型。

系统数学模型的分类

- **输入输出模型**：只反映系统输入和输出之间的关系，或者说只反映系统的外特性，称为输入输出模型，通常由输入输出方程描述；
- **状态空间模型**：不仅反映系统的外特性，而且更着重反映系统的内部状态，称之为状态空间模型，通常由状态方程和输出方程描述。

不同应用场合的系统往往都可用一个非常类似的数学模型来描述，由此就可得到一种分析与设计系统的一般方法。任何模型均是代表了一种理想情况化了的情况（在实际应用中应注意假设的适用范围）。

系统的描述

连续时间系统与离散时间系统

■ 如果系统的输入输出信号，或者系统的所有状态变量都是连续时间信号，则为**连续时间系统**。通常用微分方程或连续时间状态方程描述。

■ 如果系统的输入输出信号，或者系统的所有状态变量都是离散时间信号，则为**离散时间系统**。通常用差分方程或离散时间状态方程描述。

连续系统 $x(t) \longrightarrow \boxed{\text{连续时间系统}} \longrightarrow y(t)$

常系数线性微分方程描述线性时不变连续系统

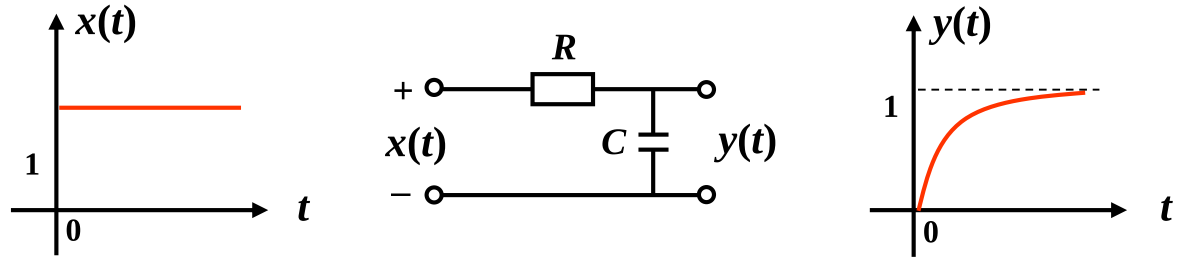
离散系统 $x[n] \longrightarrow \boxed{\text{离散时间系统}} \longrightarrow y[n]$

常系数线性差分方程描述线性时不变离散系统

系统的描述—连续系统的模型

连续系统举例

例:



一阶RC低通网络，数学模型?

$$i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}=C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)\Rightarrow\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

一阶微分方程

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

*n*阶微分方程

系统的描述—离散系统的模型

离散系统举例

例： 一个银行账户按月结余的金额y[n]与上月存款y[n-1]、当月存款数x[n]有关，设月息1%。试给出x[n]与y[n] 的关系。

解：列出常系数差分方程 $y[n]=1.01y[n-1]+x[n]$

写成一般形式： $y[n]-1.01y[n-1]=x[n]$

一阶后向差分方程

$y[n]$ ~ 第n个月底帐户上的金额

$y[0]$可以理解为开户时存入的金额~ 初始状态

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_mx[n-m]$$

N阶后向差分方程

线性时不变 (LTI—Linear Time-Invariant)系统: a_k, b_k为常数

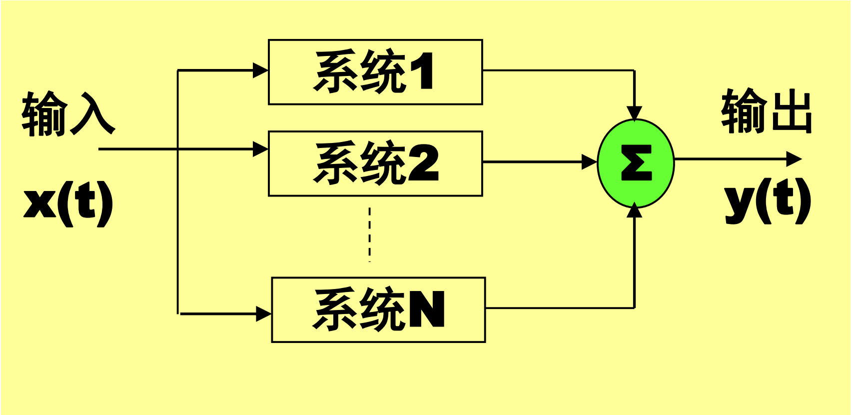
系统的描述—系统的互联

1） 串联或级联系统

几个子系统首尾依次相接，前一个系统的输出是后一个系统的输入；

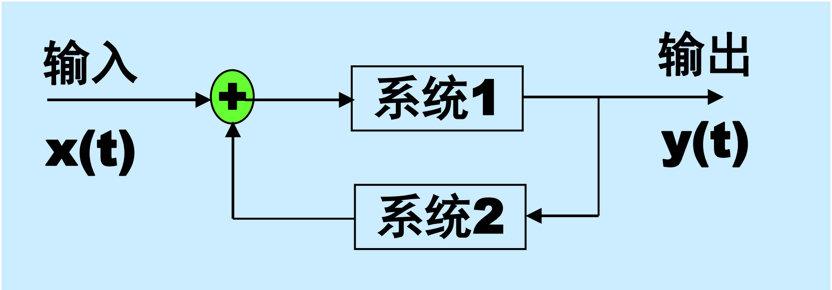
2) 并联系统：

子系统具有相同的输入，并联后的输出是子系统的输出之和。



3) 反馈系统：

系统1的输出是系统2的输入，而系统2的输出又回到输入端与外加的输入信号一起组成系统1的真正输入。



系统的描述

单输入、单输出系统和多输入、多输出系统

- 如果系统只有一个输入信号，也只有一个输出信号，则为**单输入单输出系统 SISO**。
- 如果一个系统有多个输入信号和（或）多个输出信号，就称为**多输入多输出系统MIMO**。

系统的研究方法

系统分析 System Analysis

- 在给定系统情况下，研究系统对输入信号所产生的响应，并由此获得对系统功能和特性的认识。

系统综合 System Synthesis

- 已知系统的输入信号及对输出信号要求的情况下，通过调整系统中可变动部分的结构和参数，以保证所要求的输出信号。

系统的分类及基本性质

- 线性系统和非线性系统
- 时变系统和时不变系统
- 增量线性系统
- 记忆系统与无记忆系统
- 因果性系统与因果系统
- 可逆性与可逆系统
- 系统的稳定性

系统的基本性质—线性/非线性

线性系统与非线性系统

线性系统（连续/离散）的两个重要的性质：叠加性和齐次性

$$x_1(t) \xrightarrow{sys} y_1(t)$$
$$x_2(t) \xrightarrow{sys} y_2(t)$$

叠加性 $x_1(t)+x_2(t) \xrightarrow{sys} y_1(t)+y_2(t)$

齐次性（均匀性） $kx_1(t) \xrightarrow{sys} ky_1(t)$

***1 线性系统应该满足叠加原理**

连续系统 $ax_1(t)+bx_2(t) \xrightarrow{sys} ay_1(t)+by_2(t)$

离散系统 $ax_1[n]+bx_2[n] \xrightarrow{sys} ay_1[n]+by_2[n]$

***2 线性系统满足零输入零输出特性**

$$0=0\cdot x(t) \xrightarrow{sys} 0\cdot y(t)=0; \quad 0=0\cdot x[n] \xrightarrow{sys} 0\cdot y[n]=0$$

系统的基本性质—时变/时不变（1）

时不变系统的定义：*1 系统的行为特性不随时间而变化；

*2 输入输出特性不随输入的时间而变化；

*3 输入信号时移，输出信号产生同样的时移

$x(t) \xrightarrow{sys} y(t)$ 时不变系统 $x(t-t_0) \xrightarrow{sys} y(t-t_0)$

$x[n] \xrightarrow{sys} y[n]$ 时不变系统 $x[n-n_0] \xrightarrow{sys} y[n-n_0]$

例 判断下列系统是否为时不变系统

1）x(t) $\longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow$ $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

解：$x(t-t_0) \xrightarrow{sys}$ $\int_{-\infty}^{t} x(\tau-t_0)d\tau \overset{\tau-t_0=v}{=} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(v)dv = y(t-t_0)$ 时不变系统

系统的基本性质—时变/时不变（2）

例 设y[n]=2x[n]+3,判定系统的线性和时不变性。

解：

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow 2(ax_1[n] + bx_2[n]) + 3 = 2ax_1[n] + 2bx_2[n] + 3$$

$$ay_1[n] + by_2[n] = 2ax_1[n] + 3a + 2bx_2[n] + 3b$$

非线性系统

线性方程不一定是线性系统

$$x_1[n-n_0] \longrightarrow 2x_1[n-n_0] + 3 = y_1[n-n_0]$$

时不变系统

思考题： 问系统 $x(t) \xrightarrow{Sys} y(t) = x(\frac{t}{4})$ 是否时不变系统？

系统的基本性质—时变/时不变（3）

含常数项, $x(t)$或$y(t)$, $x[n]$或$y[n]$的非线性函数⇒非线性系统

含缩放运算, x(t)或y(t)的系数含t, x[n]或y[n] 的系数含n ⇒时变系统

例：

$$y''(t)-2ty'(t)=x(t)$$ 线性, 时变

$$y'(t)+2y^2(t)=2x'(t)-x(t)$$ 非线性, 时不变

$$y[n]-4y[n]y[2n]=x[n]$$ 非线性, 时变

$$y[n]-2y[n-1]=2^{x[n]}x[n]$$ 非线性, 时不变

讨论： $y(t)=\begin{cases}0, & t<6\\ x(t), & t\geq 6\end{cases}$ 线性？时变？ 如果是： $y(t)=\begin{cases}1, & t<6\\ x(t), & t\geq 6\end{cases}$

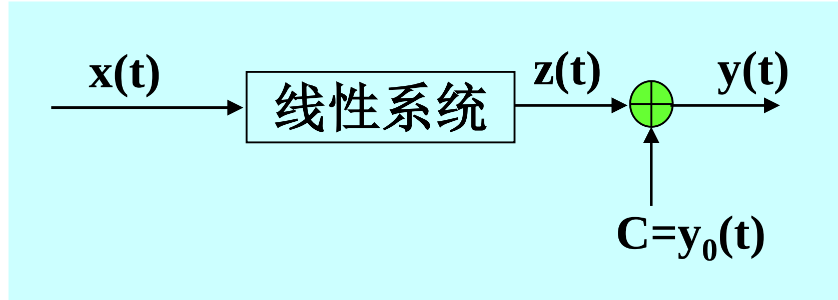
系统的基本性质—增量线性系统

增量线性系统表示：

例：

$$y(t) = k \cdot x(t) + C$$

$$y[n]=k\,x[n]+C$$



物理意义：含独立源

初始条件不为零(非零状态系统，非松弛系统)

$$y_1(t) = z_1(t) + y_0(t) = kx_1(t) + y_0(t)$$

$$y_2(t) = z_2(t) + y_0(t) = kx_2(t) + y_0(t)$$

$$\Rightarrow \Delta y(t) = y_1(t) - y_2(t) = k\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

对任何两个输入信号的响应之差和这两个信号之差成线性关系，即满足差的线性称为增量线性系统；

系统的基本性质—记忆与无记忆系统

无记忆系统

一个系统的输出仅仅决定于该时刻的输入，如：

$$y[n]=3x[n]-2x^2[n]$$

$$\left.\begin{aligned} y(t)&=kx(t)\\ y[n]&=kx[n] \end{aligned}\right\}\ k=1$$，为恒等系统

记忆系统

一个系统的输出与以前时刻的输入有关（输出与将来值有关也称记忆系统）。如：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$ ——累加器

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]+x[n]=y[n-1]+x[n]$$

$$y[n]=x[n-1]$$ ——延迟单元

$$x[n]=y[n]-y[n-1]$$ ——差分器

$$y(t)=kx(t+2)$$

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$ ——积分器

系统的基本性质—因果与非因果系统

因果系统——系统在任何时刻的输出只决定于现在以及过去的输入，而与系统以后时刻的输入无关，即：y(t)=f(x(t),x(t-1),…)。输入激励是系统产生输出响应的原因，而响应则是输入激励的结果。

非因果系统——不满足因果系统条件的系统。非因果性就意味着系统的不可实现性，但存在非因果算法。

*1 无记忆系统 → 因果系统

*2 通常把从零时刻开始的信号称为因果信号，即

$$\text{当}t<0\text{时}, x(t)=0$$

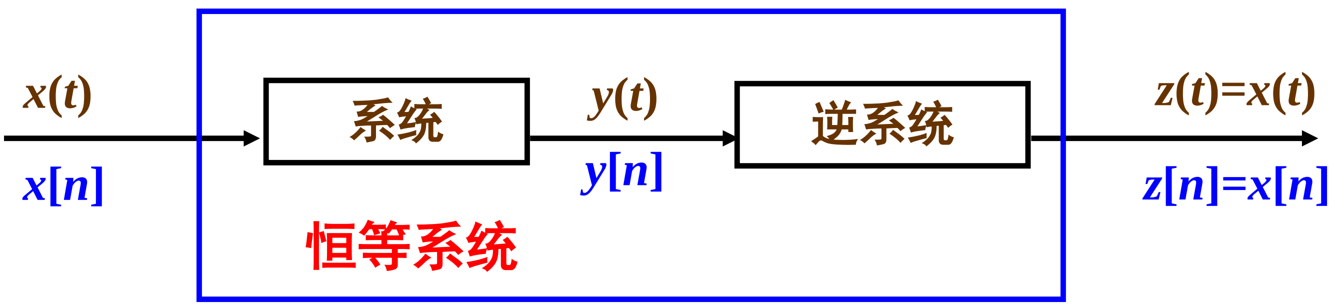
系统的基本性质—可逆性和可逆系统(1)

可逆系统——对应不同的输入有不同的输出（一一对应关系）

即：若 $x_1(t) \neq x_2(t)$，则必有 $y_1(t) \neq y_2(t)$

可逆系统必存在逆系统

当它与原系统串联时，将产生一个等于第一个系统输入的总的响应



$$y(t) = 2x(t)$$ 逆系统 $$z(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$ 逆系统 $$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

系统的基本性质—可逆性和可逆系统(2)

一些常用系统的逆系统

$$y(t)=x(t-t_0)\Rightarrow \quad \text{逆系统：} y(t)=x(t+t_0)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\Rightarrow \quad \text{逆系统：} y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\Rightarrow \quad \text{逆系统：} y[n]=x[n]-x[n-1]$$

不可逆系统——不同的输入有相同的输出

例如： $y(t)=x^2(t);\quad y[n]=x^2[n]\quad y(t)=\sin[x(t)]$

$$y[n]=x[2n]\begin{cases}\text{输入}\{1,2,4,5\}\\ \text{输入}\{1,3,4,8\}\end{cases}\longrightarrow \text{输出}\{1,4\}$$

可逆系统的典型应用：编码，解码

系统的基本性质—系统的稳定性(1)

稳定的系统

系统对有界输入的响应（输出）也是有界的(BIBO：Bounded Input Bounded Output)。即：当$|x(t)| < M_{\text{in}}$时，$|y(t)| < M_{\text{out}}$

例如：$y(t) = x(t-1)$

不稳定的系统

系统对有界输入的响应（输出）是无界的。如：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n]$$

系统的基本性质—系统的稳定性(2)

例 判定下列系统的稳定性。

$$(1)y(t)=x^2(t);\quad (2)y(t)=e^{x(t)};\quad (3)y(t)=tx(t)$$

解：

(1) $y(t)=x^2(t)$， 当$|x(t)|<M$时，$|y(t)|<M^2$， 系统稳定

(2) $y(t)=e^{x(t)}$， 当$|x(t)|<M$时，$|y(t)|<e^M$， 系统稳定

(3) 取$x(t)=u(t)$， $|x(t)|\le 1$， $y(t)=tu(t)$无界， 系统不稳定

系统的分类及其基本性质：重点

- 线性系统：满足叠加原理 $\begin{cases} \text{齐次性} \\ \text{可加性} \end{cases}$

- 时不变系统：若输入 $x(t) \Rightarrow y(t)$，$x[n] \Rightarrow y[n]$ 则 $x(t-t_0) \Rightarrow y(t-t_0)$，$x[n-n_0] \Rightarrow y[n-n_0]$

若一个系统既是线性的，又是时不变的，称之为线性时不变系统（LTI系统）。注意:

(1)含常数项, $x(t)$或$y(t)$, $x[n]$或$y[n]$的非线性函数$\Rightarrow$非线性系统

(2)含缩放运算, $x(t)$或$y(t)$的系数含t, $x[n]$或$y[n]$ 的系数含n $\Rightarrow$时变系统

系统的分类及其基本性质：重点

- **增量线性系统：＝带有初始状态的线性系统**
- **无记忆系统：当前的输出仅取决于当前的输入，一定是因果系统**
- **因果系统：当前输出仅取决于当前输入和/或过去的输入(与未来无关)**
- **可逆系统：** 若$x_1(t) \neq x_2(t)$，则必有$y_1(t) \neq y_2(t)$

  可逆系统,必然有一个逆系统存在

- **系统的稳定性：** 当$|x(t)| < M_{in}$时，$|y(t)| < M_{out}$

主要内容

- 系统及其性质
  - 系统的描述
  - 系统的性质
- **信号的线性系统处理**
  - **时域法分析**
  - 频域法分析
  - 复频域分析

线性时不变系统的时域分析

- **线性时不变系统——LTIS（Linear Time Invariant System)**

  Linear（线性）——叠加性 + 齐次性

  Time Invariant（时不变性)

  线性和时不变性是信号与系统分析中最为主要的两个基本性质

- **时域分析**

  对信号与系统的描述、变换、分析全部在时间域上进行，即自变量都是时间t(或n)的函数。

- **信号与系统分析**的主要任务之一

  特定条件下求解系统对输入信号的响应

线性时不变系统的时域分析

对线性时不变系统

若 基本信号 $x_1(t)$ / $x_1[n]$ $\longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow$ $y_1(t)$ / $y_1[n]$ 已知

由LTIS性质：

$ax_1(t)$ / $ax_1[n]$ $\longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow$ $ay_1(t)$ / $ay_1[n]$

$ax_1(t-t_0)$ / $ax_1[n-n_0]$ $\longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow$ $ay_1(t-t_0)$ / $ay_1[n-n_0]$

任意$x(t)/x[n]$可由$x_1(t)/x_1[n]$的加权, 移位叠加得到 ➡ 就可获得$y(t)/y[n]$

若能将一个任意的时间信号x(t)/x[n]分解成为一系列简单信号$x_1(t)$ /$x_1[n]$或者其延时的线性组合，则相应的输出就为$y_1(t)$ /$y_1[n]$或者其延时的线性组合。

问题： $x_1(t)$=? $x_1[n]$=?

线性时不变系统的时域分析

(1) 离散时间LTI系统的时域分析：卷积和，卷积性质

(2) 连续时间LTI系统的时域分析：卷积积分，卷积性质

(3) LTI系统的微分、差分方程描述

(4) LTI系统的单位冲激/脉冲响应

(5) 系统响应分解：零输入、零状态响应

核心（求解LTI系统的时域方法）

离散时间LTI系统时域分析

- **卷积和**
  - 离散信号的脉冲分解：用δ[n]表示离散信号
  - 离散时间LTI系统的单位脉冲（样值、冲激）响应与卷积和
- **卷积和的性质**

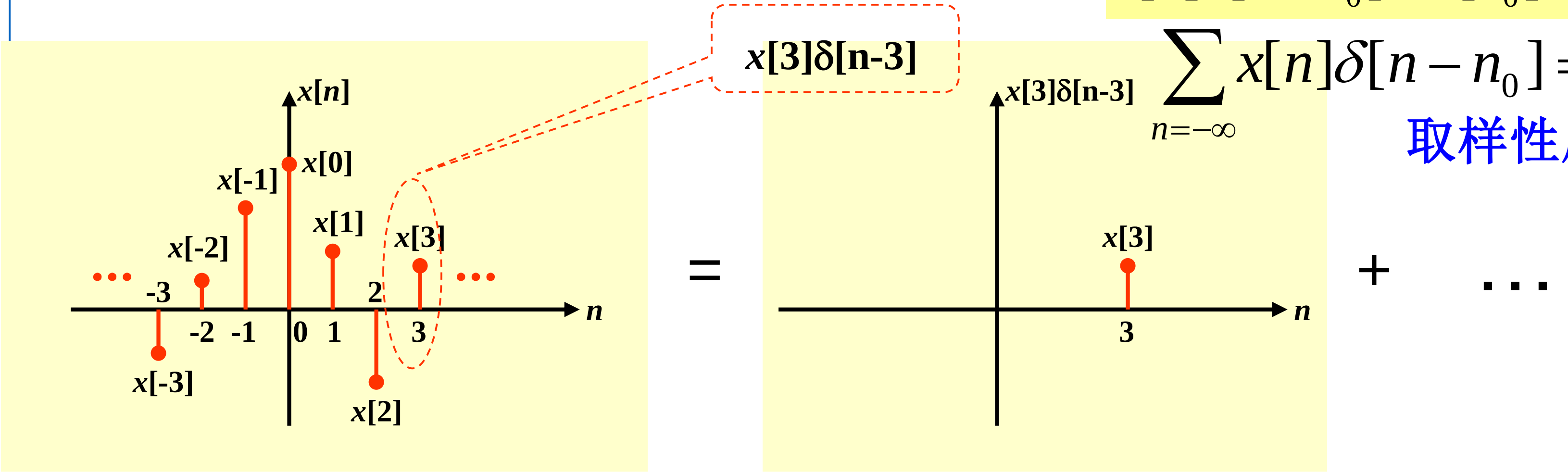
离散LTI系统时域分析—离散信号的脉冲分解（1）

➢ 将一个离散时间信号分解为一组加权并移位的单位脉冲函数δ[n]的叠加的数学表达式

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$$

取样性质



$$x[n]=\cdots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\cdots=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

—个任意离散信号可用δ[*n*]的加权及移位后的叠加来表示，

即δ[*n*]可作为前面所说的基本信号$x_1[n]$

离散LTI系统时域分析—离散信号的脉冲分解（2）

证明：由：

$$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$$

筛选性质

加权值

对k求和

$$\Sigma\ x[n]\delta[n-k]\Rightarrow\Sigma\ x[k]\delta[n-k]$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]\delta[n-k]$$

$$=x[n]\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-k]$$

$$=x[n]$$

移位的单位脉冲

$$x[n]=\cdots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]$$
$$+x[0]\delta[n]$$
$$+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\cdots$$

例用单位脉冲δ[n]表示单位阶跃信号u[n]。

解：

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]\Rightarrow u[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u[k]\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$

n-k=m

$$u[n]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

u[n]可以表示为单位脉冲δ[n]的累加器（连续信号为积分器）

离散LTI系统时域分析—离散信号的脉冲分解（3）

➢ 利用单位脉冲响应h[n]求离散系统对输入信号x[n]的响应y[n]

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$$

（1）单位脉冲响应

x[n]	LTI	y[n]
δ[n]		h[n]
$\delta[n-n_0]$		$h[n-n_0]$

$$x[n]\xrightarrow{LTI}y[n]$$

$$\delta[n]\xrightarrow{LTI}h[n]$$ **h[n]称为单位脉冲响应**

$$\delta[n-n_0]\xrightarrow{LTI}h[n-n_0]$$ **LTI时不变性**

叠加性 $$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

（2）卷积和

离散卷积和定义：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

* 离散LTI系统对任一信号x[n]的响应等于输入信号x[n]与该系统单位脉冲响应h[n]的卷积和；离散LTI系统可以由其单位脉冲响应来表征

LTI系统 ⟷ **该系统单位冲激响应**

离散LTI系统时域分析——单位脉冲响应与卷积和

离散LTI系统

$\delta[n]$ → LTI系统 → $y_1[n] = h[n]$

单位脉冲响应
(单位样值响应)

$\vdots$

$\delta[n-k]$ → LTI系统 → $h[n-k]$

$\vdots$

$x[k]\delta[n-k]$ → LTI系统 → $x[k]h[n-k]$

$h[n]$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$ → LTI系统 → $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$x[n]$ $\qquad$ $y[n]$

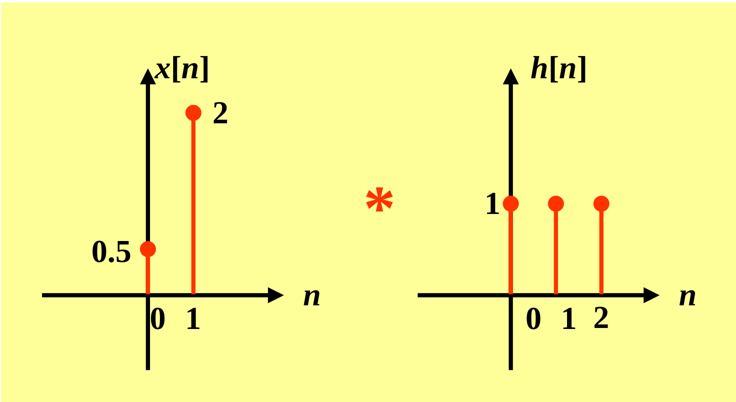
$x[n]$ → LTI系统 → $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n]$

卷积和定义

结论：$h[n]$刻画了离散LTI系统的特性

卷积和的计算-系统响应

例2 已知x[n]与h[n]如图，按定义求y[n]=x[n]*h[n]。

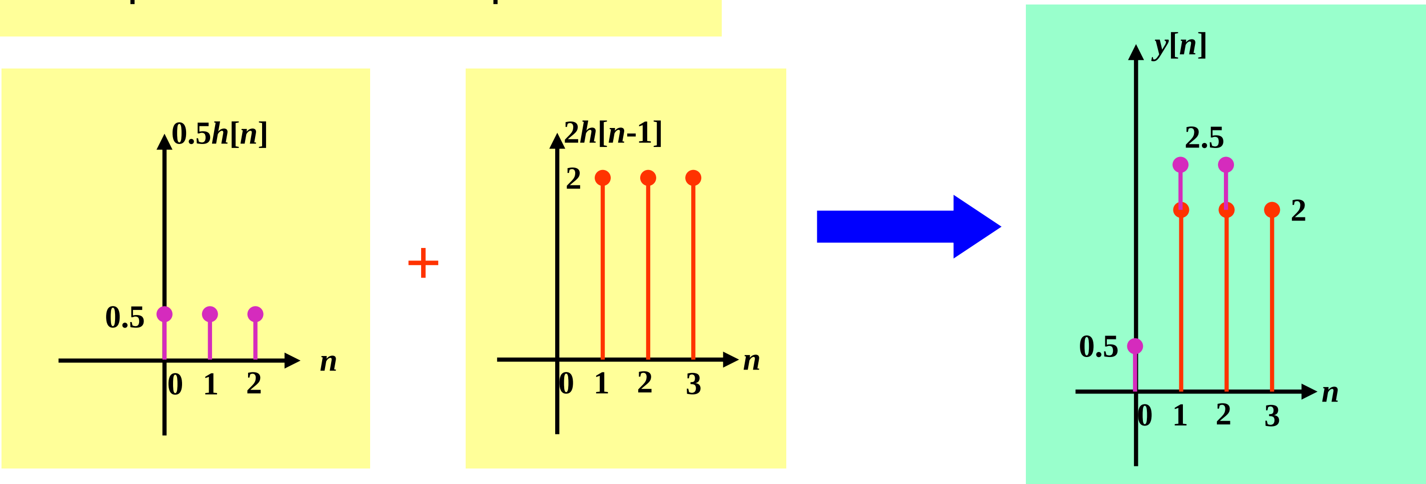


解：

$$x[n]=0.5\delta[n]+2\delta[n-1]$$

$$\downarrow \text{sys} \qquad \downarrow \text{sys}$$

$$y[n]=0.5h[n]+2h[n-1]$$



线性时不变系统的时域分析

(1) 离散时间LTI系统的时域分析：卷积和，卷积性质

(2) 连续时间LTI系统的时域分析：卷积积分，卷积性质

(3) LTI系统的微分、差分方程描述

(4) LTI系统的单位冲激/脉冲响应

(5) 系统响应分解：零输入、零状态响应

核心（求解LTI系统的时域方法）

连续LTI系统的时域分析

- 卷积积分
  - 信号的脉冲分解：用δ(t)表示连续信号
  - 连续时间LTI系统的卷积积分与单位冲激响应
  - 卷积积分的图示
- 卷积的性质

连续LTI系统的时域分析—信号的脉冲分解（1）

1) 连续信号的脉冲分解

$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

两边对τ积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

积分与$x(t)$无关

$$x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$\delta(t-\tau)$积分面积为1

筛选性质

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

对照

离散信号

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

—任意连续信号可用$\delta(t)$的加权,移位后的积分来表示

连续LTI系统的时域分析—信号的脉冲分解（2）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

任意连续信号　求和　权值　移位冲激函数

任意连续信号都可以分解为一系列加权的移位冲激函数之和

或: 任一信号x(t)可用无穷多个单位冲激函数δ(t)的移位、加权之和（积分）来表示。

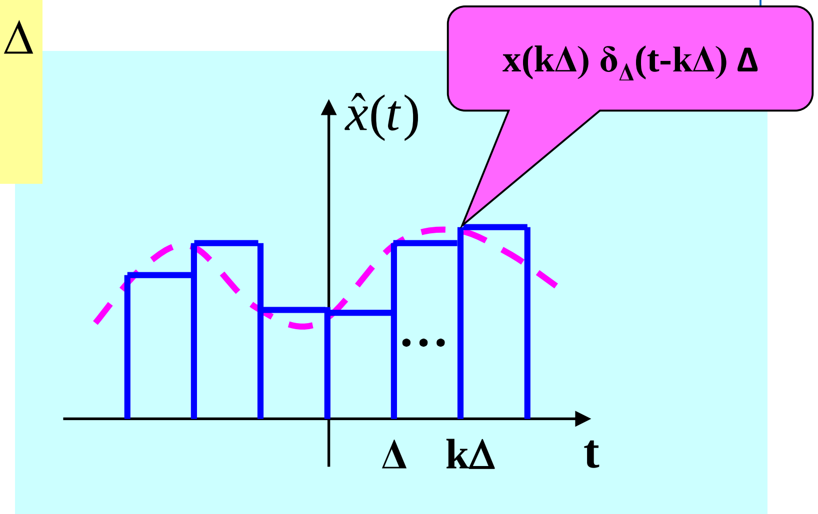
离散信号

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

连续LTI系统的时域分析——信号的脉冲分解（3）

2）几何意义

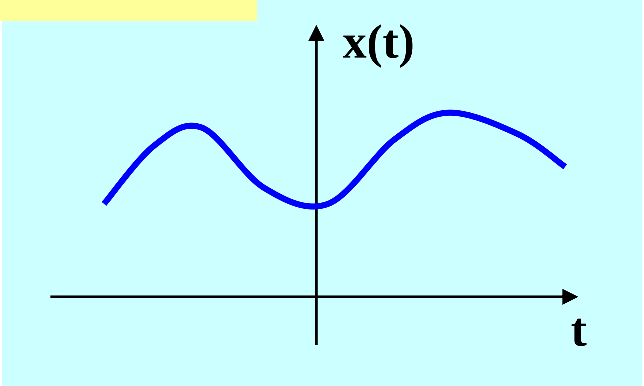
矩形脉冲 $\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & else\end{cases}$



$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Δ→0 $\delta(t)=\lim_{\Delta\to0}\delta_\Delta(t)$

$$x(t)=\lim_{\Delta\to0}\hat{x}(t)=\lim_{\Delta\to0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



任一x(t)由δ(t-kΔ)的线性组合来近似表示，其“权值”为x(kΔ)Δ，不同的k，权值不同。

连续LTI系统时域分析—单位冲激响应与卷积积分(1)

1）LTI系统的冲激响应

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t)$$

$\delta(t)$ → $h(t)$

$\delta(t-t_0)$ → $h(t-t_0)$

$$x(t) \xrightarrow{LTI} y(t)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{LTI} h(t)$$ **h(t)为单位冲激响应**

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{LTI} h(t-t_0)$$ **LTI时不变性**

2）LTI系统的卷积积分

信号分解：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\delta_\Delta(t) \xrightarrow{LTI} h_\Delta(t)$$

$$\delta_\Delta(t-t_0) \xrightarrow{LTI} h_\Delta(t-t_0)$$

LTI系统的齐次性

$$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-t_0)\Delta \xrightarrow{LTI} x(k\Delta)h_\Delta(t-t_0)\Delta$$

LTI系统的叠加性

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta} \xrightarrow{LTI} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Δ→0

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0}h_\Delta(t)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \xrightarrow{LTI} y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \xrightarrow{LTI} \boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

卷积积分：记y(t)=x(t)*h(t)

卷积积分的物理意义：

将信号x(t)分解成移位冲激信号δ(t-τ)的线性组合，借助系统的单位冲激响应h(t)和LTI系统的叠加性，就可获得LTI系统对激励为x(t)的响应解。

$x(t) \rightarrow$ LTI $\rightarrow y(t)$ ⟺ $x(t) \rightarrow$ h(t) $\rightarrow y(t)=x(t)*h(t)$

h(t)可以完全表征系统的特性

LTI系统 ⟺ 该系统单位冲激响应

连续LTI系统时域分析—单位冲激响应与卷积积分(3)

连续LTI系统

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow h(t)$$

单位冲激响应

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow h(t-\tau)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}_{x(t)} \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{y(t)}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

卷积积分定义

结论:$h(t)$刻画了连续LTI系统的特性

例4 已知LTI系统的单位冲激响应 $h(t)=e^{-at}u(t)$，系统输入信号为 $x(t)=e^{-bt}u(t), a\neq b$，求系统对输入信号的响应输出y(t)。

解：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\tau}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

τ>0

t-τ>0 => τ<t

$$y(t)=\int_0^t e^{-b\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau\cdot u(t)=e^{-at}\int_0^t e^{(a-b)\tau}d\tau\cdot u(t)$$

t<0时，积分为零

$$=e^{-at}\cdot\left.\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right|_0^t u(t)$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)u(t)$$

线性时不变系统的时域分析

(1) 离散时间LTI系统的时域分析：卷积和，卷积性质

(2) 连续时间LTI系统的时域分析：卷积积分，卷积性质

(3) LTI系统的微分、差分方程描述

(4) LTI系统的单位冲激/脉冲响应

(5) 系统响应分解：零输入、零状态响应

LTI系统的微分、差分方程描述

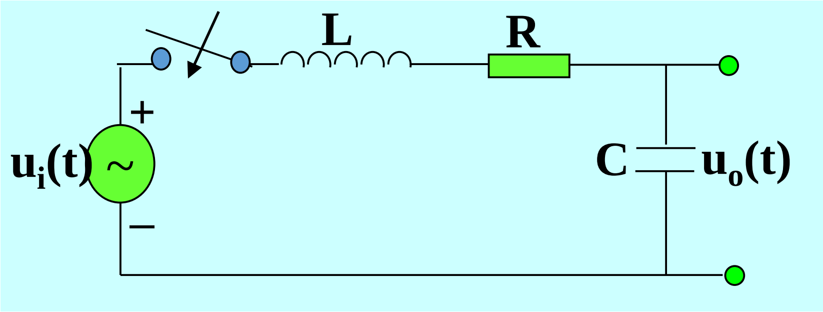
- ➢线性时不变LTI系统的微分、差分方程描述
  - ❖ 连续LTI系统微分方程描述及其经典解法
  - ❖ 离散LTI系统差分方程描述及其经典解法
- ➢ 连续LTI系统的单位冲激响应
- ➢ 离散LTI系统的单位样值响应

LTI系统的描述—连续LTI系统微分方程描述(1)

首先由系统结构、元件特性，利用有关基本定律来建立对应的微分方程，然后进行系统分析。

1. 建立微分方程

例: 对如下电路方程，列写以$u_i(t)$为输入量，以$u_o(t)$为输出量的微分方程。



解：设回路电流为$i(t)$，由基尔霍夫定律可以写出回路方程

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=u_i(t)$$

$$u_o(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow \begin{cases} i(t)=C\dfrac{du_o(t)}{dt} \\ \dfrac{di(t)}{dt}=C\dfrac{d^2u_o(t)}{dt^2} \end{cases}$$

消去中间变量$i(t)$

$$LC\frac{d^2u_o(t)}{dt^2}+RC\frac{du_o(t)}{dt}+u_0(t)=u_i(t)$$

LTI系统的描述——连续LTI系统微分方程描述(2)

一般而言：

设x(t)——LTI系统的激励信号

y(t)——LTI系统的响应

则系统由一高阶微分方程表示

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

或者

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

LTI系统的描述——连续微分方程经典解法（1）

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}x(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}x(t)+b_0x(t)$$

2. 求全解： $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

特解

齐次解

自由响应　　强迫响应

h—homogeneous solution
p—particular solution

强调解的形式由谁决定

$$y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}+y_{\mathrm{p}}(t)$$

—式中系数 C_i由n个初始条件确定

LTI系统的描述—连续微分方程经典解法（2）

（1）齐次解：输入置零时方程的解，由特征方程的特征根决定。

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

特征方程： $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

若特征根均为单根 λ_i：

$$y_h(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+C_ne^{\lambda_n t}$$

特征根有重根(λ_i为k重根),对应响应项： $(C_1t^{k-1}+C_2t^{k-2}+\cdots+C_k)e^{\lambda_i t}$

特征根有复根：$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$，对应响应项：

$e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$ 或 $Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$, $Ae^{j\theta}=C_1+jC_2$

响应式中系数C_i由n个系统初始条件来决定

LTI系统的描述—连续微分方程经典解法（3）

（2）**特解:** 特解的函数形式与激励信号的函数形式有关。通常，将激励x(t)代入方程右端，由输入函数形式试选定特解的函数形式，代入方程后求得特解函数式中的待定系数。

输入形式	输出$y_p(t)$
常数A	常数C
t^p	$C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots+C_pt^p$
$e^{\alpha t}$ (α为非特征根)	$Ce^{\alpha t}$
$\sin\omega t, \cos\omega t$	$C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$
$e^{\alpha t}$ (α为特征方程的k次重根)	$(C_kt^k+C_{k-1}t^{k-1}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\alpha t}$
⋮	⋮

*C_i的求解为$y_p(t)$代入方程, 两边系数匹配求得
*如果输入是几种激励函数的组合，特解也为相应组合

其余参见P58 表2-2

LTI系统的描述——连续微分方程经典解法（4）

（3）全解

$$全解y(t) = 齐次解y_h(t) + 特解y_p(t)$$
$$= 自由响应 + 强迫响应$$

一般情况下：

- 假设激励信号x(t)是在t=0时刻接入的；因果系统对应的微分方程的全解适合于时间区间$[0_+, +\infty)$。
- 给定微分方程和激励信号x(t),必须有一组求解区间的边界条件用于确定齐次解中的待定系数。
- $t=0_+$的n个边界条件$y^{(k)}(0_+)$称为方程（系统）的初始条件，用来确定完全解中的系数。
- $t=0_$的n个边界条件$y^{(k)}(0_)$称为方程（系统）的起始条件，是系统在$t \le 0$-时间内对过去输入信号的响应。

LTI系统的描述——连续微分方程经典解法（5）

例：给定线性常系数微分方程 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=f(t)$ ，求当 $f(t)=2e^{-t}u(t)$ ，$y(0_+)=2, y'(0_+)=-1$时的全解。

解：1）求齐次解

特征方程：$\lambda^2+5\lambda+6=0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1=-2 \qquad \lambda_2=-3$

方程齐次解：$y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$

2）求特解：输入为$f(t)=2e^{-t}u(t)$，方程右端为$f(t)$，所以$t>0$时，特解设为$y_p(t)=Be^{-t}$，代入原方程

$$Be^{-t}-5Be^{-t}+6Be^{-t}=2e^{-t} \Rightarrow B=1 \Rightarrow y_p(t)=e^{-t}, t>0$$

LTI系统的描述——连续微分方程经典解法（6）

3）求全解

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+e^{-t},t>0 \xrightarrow{y(0_+)=2} C_1+C_2+1=2$$

$$y'(t)=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}-e^{-t} \xrightarrow{y'(0_+)=-1} -2C_1-3C_2-1=-1$$

$$\begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} y(t)&=\left[3e^{-2t}-2e^{-3t}+e^{-t}\right]u(t) \\ &=\left[3e^{-2t}-2e^{-3t}\right]u(t)+e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

*1　齐次解的函数形式依赖于系统本身的特性（特征方程的根），与激励信号的形式无关，但是齐次解的系数是将系统的初始条件（0_+）代入系统的全解得到的。

*2　特解的函数形式由激励信号确定，特解的系数是将特解和激励代入原方程求得的。

起始点的跳变----从0_-到0_+的状态转换

冲激函数匹配法：选读补充材料

LTI系统描述——离散差分方程描述及其经典解法(1)

线性常系数差分方程 $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

全解y[n] = 齐次解y_h[n] + 特解y_p[n]

（1）齐次解——自由响应y_h[n]

令输入信号为零的解，即 $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$

齐次解的形式由特征根决定

特征方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{N-k} = 0$ ⇒ 特征根：λ_i

⇒ 齐次解：
- 单根：$C_i \lambda_i^n$
- r重实根λ_i $(C_{r-1} n^{r-1} + C_{r-2} n^{r-2} + \cdots + C_1 n + C_0)\lambda_i^n$
- 共轭复根$\lambda_{1,2} = pe^{\pm j\beta}$ $p^n [C\cos\beta n + D\sin\beta n]$

LTI系统描述——离散差分方程描述及其经典解法(2)

（2）特解——强迫响应$y_p[n]$

特解的函数形式与输入信号x[n]的函数形式有关，

确定函数形式之后代入原差分方程，求待定系数。

$$x(n) \xrightarrow{\text{特解}} y_p(n)$$

激励

$$n^m \xrightarrow{\text{特解}} \begin{cases} D_m n^m + D_{m-1} n^{m-1} + \cdots + D_0 & \text{所有特征根不等于1} \\ n^r \left(D_m n^m + D_{m-1} n^{m-1} + \cdots + D_0 \right) & \text{有r重等于1 的特征根} \end{cases}$$

$$a^n \xrightarrow{\text{特解}} \begin{cases} D a^n & \text{a不等于特征根} \\ \left(D_r n^r + D_{r-1} n^{r-1} + \cdots + D_0 \right) a^n & \text{a等于r重特征根} \end{cases}$$

（3）全解y[n]——$y[n]=y_h[n]+y_p[n]$

对于N阶差分方程，用给定的N个初始条件y[0],…,y[N-1]确定全部待定系数。也可以用N个起始条件y[-N], y[-N+1],…, y[-1]确定全部待定系数。

LTI系统描述—离散差分方程描述及其经典解法(3)

例：二阶因果LTI系统差分方程：y[n]+y[n-1]+0.25y[n-2]=x[n]，已知起始条件为y[-1]=-2，y[-2]=8，激励x[n]=u[n]，求方程全解。

解：1）齐次解

特征方程：$\lambda^2+\lambda+0.25=0$ → $\lambda_1=\lambda_2=-0.5$ （重根）

→ 齐次解：$y_h[n]=(C_1 n+C_2)(-0.5)^n$

2）特解

$x[n]=u[n]=1^n \quad n\geq 0$ → $y_p[n]=D \quad n\geq 0$ → 代入差分方程

$D+D+0.25D=1$ → $D=\frac{4}{9}$ → $y_p[n]=\frac{4}{9}u[n]$

3）全解 $y[n]=y_h[n]+y_p[n]=\left[(C_1 n+C_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{4}{9}\right]u[n]$

LTI系统描述——离散差分方程描述及其经典解法(4)

$$\left.\begin{array}{r} y[n]+y[n-1]+0.25y[n-2]=x[n] \\ y[-1]=-2 \qquad y[-2]=8 \\ x[n]=u[n] \end{array}\right\} \Rightarrow y[0]=1 \qquad y[1]=\frac{1}{2}$$

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=\left[\left(C_1n+C_2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{4}{9}\right]u[n]$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y[0]=C_2+\dfrac{4}{9}=1 \\ y[1]=(C_1+C_2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=-\dfrac{6}{9} \\ C_2=\dfrac{5}{9} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$y[n]=\left[\underbrace{\left(-\frac{6}{9}n+\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{4}{9}}_{\text{强迫响应}}\right]u[n]$$

自由响应

强迫响应

线性时不变系统的时域分析

(1）离散时间LTI系统的时域分析：卷积和，卷积性质

(2）连续时间LTI系统的时域分析：卷积积分，卷积性质

(3) LTI系统的微分、差分方程描述

(4) LTI系统的单位冲激/样值响应

(5）系统响应分解：零输入、零状态响应

LTI系统的单位冲激/样值响应

➢ 线性时不变单位冲激/样值响应

- ❖ 连续LTI系统的单位冲激响应
- ❖ 离散LTI系统的单位样值响应

连续LTI系统的单位冲激响应

- 对于线性时不变连续系统

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{y^{(k)}(t)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{x^{(k)}(t)}$$

$$\Big\downarrow \ y(t)=h(t) \qquad\qquad \Big\downarrow \ x(t)=\delta(t)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{h^{(k)}(t)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{\delta^{(k)}(t)}$$

连续LTI系统的单位冲激响应

h(t) 应具有齐次微分方程解的基本形式。

根据方程两边函数项匹配的原则，h(t)为:

n>m时，h(t) 具有形式:

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

n=m时，h(t)具有形式:

$$h(t)=c\delta(t)+\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

n<m时，h(t)具有形式:

$$h(t)=\sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t)+\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

连续LTI系统的单位冲激响应

求h(t) 的经典方法和步骤：

1. 系统微分方程
2. 求微分方程的特征根
3. 得齐次解
4. 求各阶导数
5. 代入微分方程
6. 两边奇异函数的系数平衡，可求出系数

$$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_1 t}\right]u(t)$$

A_i

连续LTI系统的单位冲激响应

例：　试求如下微分方程所描述的系统的单位冲激响应

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$$

解： 首先系统对应的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+3=0$

其两个特征根分别为: $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=-3$

h(t)应具有如下形式： $h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

将其代入原方程： $h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

根据h(t)可以求解出h’(t)和h”(t)的形式，代入上式

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

方程两边各奇异函数项系数相等，有$A_1=A_2=1/2$

$$h(t)=(\tfrac{1}{2}e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

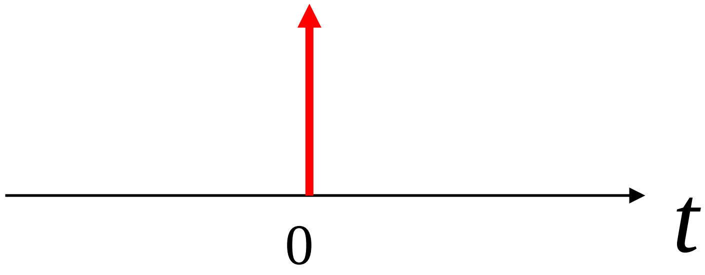
离散LTI系统的单位样值响应

（1） δ(t)和δ(n)的区别

- δ（t）的定义

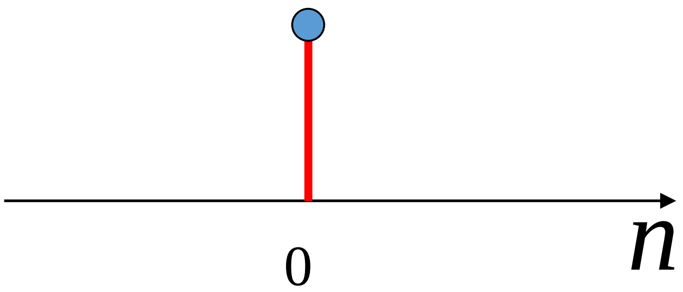
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \qquad (t = 0)$$

$$\delta(t) = 0 \qquad (t \neq 0)$$



- δ（n）的定义

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



离散LTI系统的单位样值响应

对于线性时不变离散系统

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{y(n-k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{x(n-k)}$$

y(n)=h(n)　　　　x(n)=δ(n)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{h(n-k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{\delta(n-k)}$$

离散LTI系统的单位样值响应

h(n)的特点：

$$h(n)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^{\,n}u(n) & n>m\\ \sum_{j=0}^{m-n} C_j\delta(n-j)+\sum_{i=1}^{n} A_i\lambda_i^{\,n}u(n) & n\le m\end{cases}$$

离散LTI系统的单位样值响应

例：　线性时不变因果离散系统的差分方程为

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

试求出该系统的单位样值响应。

解：系统的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$

求得两个特征根分别为 $\lambda_1=3,\lambda_2=2$

h(n)为 $h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$

满足方程 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$

分别求出**h(n-1),h(n-2)**代入上式

$$(C_0+A_1+A_2)\delta(n)+(-C_0-2A_1-3A_2)\delta(n-1)+6C_0\delta(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$$

等式两边对应项系数相等

$$C_0=-1/2,A_1=2,A_2=-1/2$$

系统的单位样值响应为

$$h(n)=-0.5\delta(n)+2\cdot 3^n u(n)-0.5\cdot 2^n u(n)$$

线性时不变系统的时域分析

(1) 离散时间LTI系统的时域分析：卷积和，卷积性质

(2) 连续时间LTI系统的时域分析：卷积积分，卷积性质

(3) LTI系统的微分、差分方程描述

(4) LTI系统的单位冲激/样值响应

(5) 系统响应分解：零输入、零状态响应

系统响应分解：零输入与零状态响应

- 系统的响应分解
- 系统的零输入响应
- 系统的零状态响应

系统响应分解：零输入与零状态响应(1)

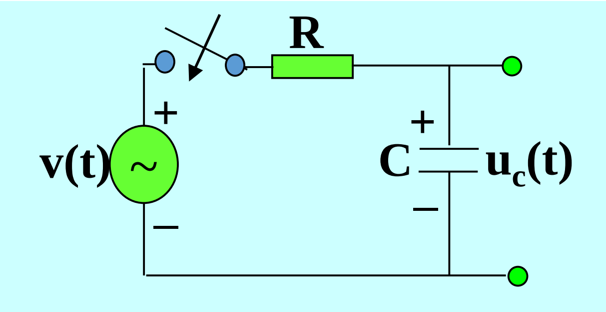
首先看一个例子：

如图所示RC电路，电容C两端有起始电压$u_c(0-)$（储能元件），激励源为v(t)，求t>0时系统响应$u_c(t)$

系统的微分方程：

$$C\frac{du_c(t)}{dt}R+u_c(t)=v(t)$$

$$\frac{du_c(t)}{dt}+\frac{u_c(t)}{RC}=\frac{1}{RC}v(t)$$



解此方程，两边同乘以 $e^{t/RC}$

$$\underline{e^{t/RC}\frac{du_c(t)}{dt}+e^{t/RC}\frac{1}{RC}u_c(t)}=\frac{1}{RC}e^{t/RC}v(t)$$

$$\frac{d\left(e^{t/RC}u_c(t)\right)}{dt}=\underline{e^{t/RC}\frac{du_c(t)}{dt}+e^{t/RC}\frac{1}{RC}u_c(t)}$$

$$\frac{d\left(e^{t/RC}u_c(t)\right)}{dt}=\frac{1}{RC}e^{t/RC}v(t)$$

两边积分

系统响应分解：零输入与零状态响应(2)

$$\int_{0_-}^{t}\frac{d\left(e^{\tau/RC}u_c(\tau)\right)}{\cancel{d\tau}}\cancel{d\tau}=\int_{0_-}^{t}\frac{1}{RC}e^{\tau/RC}v(\tau)d\tau \Rightarrow e^{t/RC}u_c(t)-u_c(0_-)=\int_{0_-}^{t}\frac{1}{RC}e^{\tau/RC}v(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow u_c(t)=\boxed{e^{-t/RC}u_c(0_-)}+\boxed{\frac{1}{RC}\int_{0_-}^{t}e^{-(t-\tau)/RC}v(\tau)d\tau}$$

只与电容两端的起始电压$u_c(0-)$有关，与输入激励无关——零输入响应（$y_{zi}(t)$）

只与输入激励 $v(t)$ 有关，与电容两端的起始电压$u_c(0-)$无关——零状态响应（$y_{zs}(t)$）

LTI系统输出响应可分成：

*1 不考虑外加输入信号的作用，仅由系统起始状态引起的响应（$y_{zi}(t)$）；

*2 不考虑系统起始状态的作用，即起始状态为零，仅由系统的外加激励信号所产生的响应（$y_{zs}(t)$）

零输入响应不存在0时刻的跳变，但零状态响应可能存在，取决于微分方程右端有无δ(t)及其高阶导数。

系统响应分解：零输入与零状态响应(3)

若：输入$v(t) = u_0 \cdot u(t)$

$$u_c(t) = e^{-t/RC} u_c(0\_) + \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} v(\tau) d\tau$$

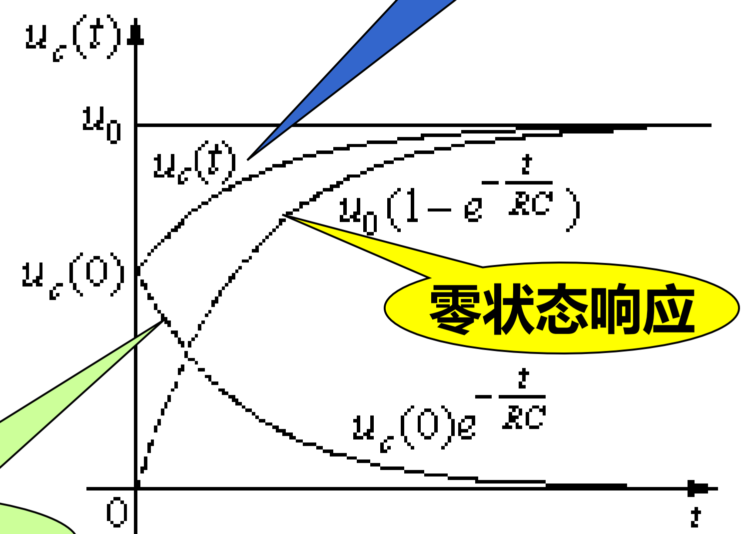
$$u_c(t) = u_c(0\_) e^{-t/RC} + u_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

式中：第一项称为零输入响应，

是由初始电压u_c (0-)决定的分量；

第二项称为零状态响应，

是由阶跃输入$u_0(t)$决定的分量。



右图表示各分量的变化曲线，

电容电压u_c (t)即为两者的合成。

***RC*网络的阶跃响应曲线**

系统响应分解：零输入与零状态响应(4)

$y_{zi}(t)$零输入响应：

没有外加激励信号作用，只有起始状态（起始时刻系统有储能）所产生的响应，是齐次解的一部分。

连续系统方程： $\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = 0 \\ y^{(k)}(0\_)(k = 0,1,\cdots,N-1) \\ x(t)^{(k)} u(-t)(k = 1,2,\cdots,M) \end{array} \right.$$

离散系统方程： $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0 \\ y[-k](k = 1,2,\cdots,N) \\ x[-k](k = 1,2,\cdots,M) \end{array} \right.$$

$y(0_-)$可能不等于$y(0_+)$，但是$y_{zi}(0_-)=y_{zi}(0_+)$

系统响应分解：零输入与零状态响应(5)

$y_{zs}(t)$零状态响应：

在起始状态为零时，由系统外加激励信号引起的响应。是强迫响应加上自由响应的一部分。

连续系统方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$

满足

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(0_-) = 0 (k = 0,1,\cdots,N-1) \\ x^{(k)}(0_-) = 0 (k = 1,2,\cdots,M) \end{cases}$$

离散系统方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

满足

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[-k] = 0 (k = 1,2,\cdots,N) \\ x[-k] = 0 (k = 1,2,\cdots,M) \end{cases}$$

起始松弛：系统输出的初始条件为零

系统响应分解：零输入与零状态响应(6)

对连续时间系统：

$$y(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k e^{\lambda_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}}\qquad(t\ge 0)$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik} e^{\lambda_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk} e^{\lambda_k t}+B(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik} e^{\lambda_k t}+x(t)*h(t)$$

(由$y(0^-), y'(0^-),\cdots$决定)

$C_k=C_{zik}+C_{zsk}$

(松弛状态)

对离散时间系统：

$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k(\lambda_k)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B[n]}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}(\lambda_k)^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}(\lambda_k)^n+B[n]}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}C_{zik}(\lambda_k)^n+x[n]*h[n]$$

(由$y[-1], y[-2],\cdots$决定)

系统的响应分解——零输入响应（1）

例 已知二阶连续系统的动态方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t) \quad t\geq 0$

起始状态y(0-)=1, y'(0-)=2，输入信号 $f(t)=e^{-t}u(t)$ 求零输入响应y_{zi}(t)

解：特征方程：$\lambda^2+5\lambda+6=0$ ⇒ 特征根 $\lambda_1=-2 \quad \lambda_2=-3$

$$\left.\begin{array}{l} y_{zi}(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t} \quad t\geq 0_- \\ y(0_-)=1 \quad y'(0_-)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1+C_2=1 \\ -2C_1-3C_2=2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=5 \\ C_2=-4 \end{array}\right. \Rightarrow y_{zi}(t)=5e^{-2t}-4e^{-3t} \quad t\geq 0_-$$

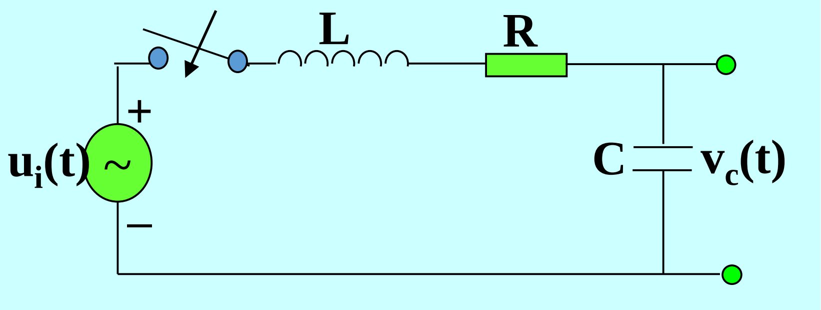
若系统是以具体电路形式给出，则需要根据电路结构和元件参数，先求出其对应的动态方程式，然后再计算零输入响应。

求零输入响应的方法：经典法（输入＝0，起始条件）

零输入响应的形式： 自由响应的一部分

系统的响应分解——零输入响应（2）

例1　如图RLC电路，R=2Ω，L=0.5H，C=0.5F，初始储能$v_c(0-)=1V$，$i_L(0-)=1A$，求输入激励为零时的$v_c(t)$。



解：1）根据基尔霍夫定律

$$v_R(t)+v_L(t)+v_c(t)=u_i(t)$$

$$v_R(t)=Ri(t)$$

$$v_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_R(t)=RC\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_L(t)=LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}$$

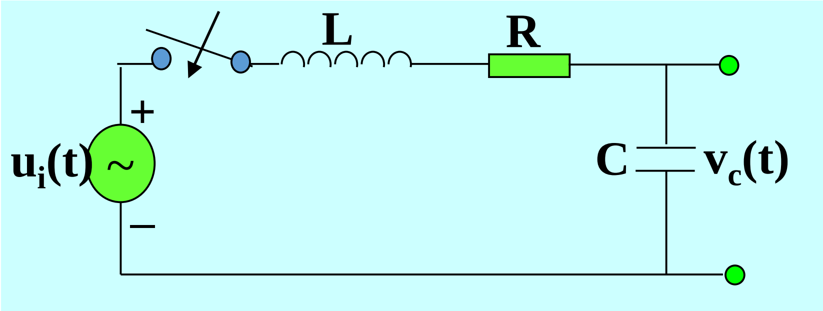
$$\boxed{LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=u_i(t)}$$

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+4\frac{dv_c(t)}{dt}+4v_c(t)=4u_i(t)$$

系统的响应分解——零输入响应（3）

$$i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+4\frac{dv_c(t)}{dt}+4v_c(t)=4u_i(t)}$$



$v_c(0\text{-})=1V$，$i_L(0\text{-})=1A$, $C=0.5F$

2）求零输入响应

特征方程：$\lambda^2+4\lambda+4=0$

特征根：$\lambda_1=\lambda_2=-2$

$\Rightarrow$ $v_{czi}(t)=(C_1+C_2t)e^{-2t} \qquad t\ge 0_-$

$i_L(0_-)=1$ $\Rightarrow$ $C\left.\frac{dv_c(t)}{dt}\right|_{t=0_-}=i_L(0_-)=1$ $\Rightarrow$ $v_c'(0_-)=\frac{1}{C}=2$

已知$v_c(0_-)=1$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}C_1=1\\ C_2-2C_1=2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}C_1=1\\ C_2=4\end{cases}$ $\Rightarrow$ $v_{czi}(t)=(1+4t)e^{-2t} \qquad t\ge 0_-$

系统的响应分解——零输入响应（4）

例 离散系统差分方程：y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=f[k]，起始状态为y[-1]=0，y[-2]=0.5，求零输入响应$y_{zi}[k]$。

解：特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ ⟹ 特征根：$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2$

零输入响应：$y_{zi}[k]=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$

代入起始条件：

$$\left.\begin{aligned} y_{zi}[-1]&=-C_1-0.5C_2=0 \\ y_{zi}[-2]&=C_1+0.25C_2=0.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

$$y_{zi}[k]=(-1)^k-2(-2)^k$$

方法二：

$$\left.\begin{aligned} y_{zi}[0]&=-3y[-1]-2y[-2]=-1 \\ y_{zi}[1]&=-3y[0]-2y[-1]=3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{代入}y_{zi}[k]} \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

对差分方程求零输入响应系数的方法

方法一：用起始条件求；方法二：原方程的迭代

系统的响应分解——零状态响应（1）

求零状态响应的方法：经典法、卷积法

零状态响应的形式：强迫响应 + 自由响应的一部分

例 已知 y[n]+0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=x[n]，n≥0，激励 x[n]=2^nu[n]，起始条件 y[-1]=1，y[-2]=0，求系统的零输入响应、零状态响应和全解。

解：1）零输入响应

特征方程：$\lambda^2+0.5\lambda-0.5=0$ ⟹ 特征根：$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=0.5$

⟹ $y_{zi}[n]=C_1(-1)^n+C_2(0.5)^n \qquad n\ge 0$

$\begin{cases} y[-1]=1 \\ y[-2]=0 \\ x[n]=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{（方法二）}}$ $\begin{cases} y[0]=-0.5 \\ y[1]=0.75 \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} y[0]=C_1+C_2=-0.5 \\ y[1]=-C_1+0.5C_2=0.75 \end{cases}$ ⟹ $\begin{cases} C_1=-\dfrac{2}{3} \\ C_2=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

⟹ $y_{zi}[n]=-\dfrac{2}{3}(-1)^n+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \qquad n\ge 0$

系统的响应分解——零状态响应（2）

2）零状态响应（指起始状态为零）

$$y[n]+0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=x[n]=2^n$$

$$\boxed{y[-1]=y[-2]=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{zs}[0]=2^0-0.5y[-1]+0.5y[-2]=1 \\ y_{zs}[1]=2^1-0.5y[0]+0.5y[-1]=1.5 \end{cases}$$

激励 $x[n]=2^n u[n]$ $\Rightarrow$ 特解 $y_p[n]=B2^n$ $\Rightarrow$ 代入原方程

$$B\cdot 2^n+0.5B\cdot 2^{n-1}-0.5B\cdot 2^{n-2}=2^n \Rightarrow B=\frac{8}{9} \Rightarrow$$ 特解 $$y_p[n]=\frac{8}{9}\cdot 2^n u[n]$$

$\Rightarrow$ 零状态响应：$$y_{zs}[n]=A_1(-1)^n+A_2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{9}\cdot 2^n \qquad n\ge 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{zs}[0]=A_1+A_2+\dfrac{8}{9}=1 \\ y_{zs}[1]=-A_1+\dfrac{1}{2}A_2+\dfrac{16}{9}=1.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=\dfrac{2}{9} \\ A_2=-\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

系统的响应分解——零状态响应（3）

$$y_{zs}[n]=\left[\frac{2}{9}(-1)^n-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{9}\cdot 2^n\right]u[n]$$

3）全响应

$$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]+\left[\frac{2}{9}(-1)^n-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{9}\cdot 2^n\right]u[n]$$

$$=\left[-\frac{4}{9}(-1)^n+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{9}\cdot(2)^n\right]u[n]$$

自由响应

(齐次解）

强迫响应

（特解）

系统的响应分解例题（1）

例：给定线性常系数微分方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$**，已知** $x(t)=4e^{-3t}u(t)$ **y(0)=3，y’(0)=4，求自由响应、强迫响应、零输入响应与零状态响应及全响应。**

解：

齐次方程：$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$

特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$ ➡ $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

自由响应：$y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

已知输入：$x(t)=4e^{-3t}$ ➡ 强迫响应：$y_p(t)=Be^{-3t}$

则 $y'_p(t)=-3Be^{-3t}$ $y''_p(t)=9Be^{-3t}$

$9Be^{-3t}-9Be^{-3t}+2Be^{-3t}=4e^{-3t}$ ➡ $B=2$ ➡ $y_p(t)=2e^{-3t}$

由全响应：$y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+2e^{-3t}$ 代入已知条件：

$$\left.\begin{aligned}C_1+C_2+2&=3\\-C_1-2C_2-6&=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_1=12,\ C_2=-11$$

所以：$y(t)=[\underbrace{12e^{-t}-11e^{-2t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{2e^{-3t}}_{\text{强迫响应}}]u(t)$

系统的响应分解例题（2）

例： 给定线性常系数微分方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$ ，已知 $x(t)=4e^{-3t}$ ，y(0)=3，y'(0)=4，求自由响应、强迫响应、零输入响应与零状态响应及全响应。

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

解： 零输入响应： $y_{zi}(t)=C_{zi1}e^{-t}+C_{zi2}e^{-2t}$

由 $\left.\begin{array}{l} y(0)=3 \\ y'(0)=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} C_{zi1}+C_{zi2}=3 \\ -C_{zi1}-2C_{zi2}=4 \end{array}\right\} \rightarrow C_{zi1}=10,\ C_{zi2}=-7$

得： $y_{zi}(t)=10e^{-t}-7e^{-2t}$

零状态响应： $y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}+2e^{-3t}$

由 $\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} C_{zs1}+C_{zs2}+2=0 \\ -C_{zs1}-2C_{zs2}-6=0 \end{array}\right\} \rightarrow C_{zs1}=2,\ C_{zs2}=-4$

得： $y_{zs}(t)=2e^{-t}-4e^{-2t}+2e^{-3t}$

完全响应： $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

若二阶系统给定初始条件为y[0]=A, y[1]=B 则可通过迭代求得y[-1]=C, y[-2]=D⇒求零输入响应

例：方程 $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=x[n]$,已知 $x[n]=6u[n],\quad y[-1]=-1,\ y[-2]=4$

（1）求零输入响应, 零状态响应；（2）y[-1]=-1, y[-2]=4, 当输入$x[n]=12u[n]$时, 求总响应；（3）若$x[n]=6u[n]$, y[-1]=-2, y[-2]=8,求总响应。

解： **(1) 特征方程** —本例考察零输入线性和零状态线性

$\lambda^2-\lambda-2=0 \rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2 \rightarrow y_{\mathrm{h}}[n]=C_1(-1)^n+C_2(2)^n$

由于$n\geq 0$ 时, $x[n]$为常数 $\rightarrow y_{\mathrm{p}}[n]=D$,代入方程 $D-D-2D=6 \rightarrow D=-3$

即：$y_{\mathrm{p}}[n]=-3$

零输入响应: $y_{\mathrm{zi}}[n]=C_{zi1}(-1)^n+C_{zi2}(2)^n$

$y[-1]=-1,\ y[-2]=4$ 代入 $\begin{cases}-C_{zi1}+C_{zi2}2^{-1}=-1\\ C_{zi1}+C_{zi2}2^{-2}=4\end{cases} \rightarrow C_{zi1}=3,\ C_{zi2}=4$

$y_{\mathrm{zi}}[n]=3(-1)^n+4(2)^n$

零状态响应: $y_{\mathrm{zs}}[n]=C_{zs1}(-1)^n+C_{zs2}(2)^n-3$

$y[-1]=0,\ y[-2]=0$

代入原方程求得

$y[0]=6,\ y[1]=12$

$\rightarrow \begin{cases}C_{zs1}+C_{zs2}2^0-3=6\\ C_{zs1}(-1)+C_{zs2}2^1-3=12\end{cases} \rightarrow C_{zs1}=1,\ C_{zs2}=8$

$y_{\mathrm{zs}}[n]=(-1)^n+8(2)^n-3$

系统的响应分解例题（4）

例：方程 $y[n]-y[n-1]-2y[n-2]=x[n]$ ，已知 $x[n]=6u[n],\quad y[-1]=-1,\ y[-2]=4$

（1）求零输入响应, 零状态响应, 总响应； （2）$y[-1]= -1$, $y[-2]=4$, 当输入 $x[n]=12u[n]$时, 求总响应； （3）若$x[n]=6u[n]$, $y[-1]=-2$, $y[-2]=8$,求总响应。

解：(1)总响应: —本例考察零输入线性和零状态线性

$$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]=[4(-1)^n+12(2)^n-3]u[n]$$

(2) $y[-1]=-1$, $y[-2]=4$, 当输入$x[n]=12u[n]$时

初始条件不变 → $y_{zi}[n]$ 不变

输入加倍 → $y_{zs}[n]$ 加倍

(2)总响应: $y[n]=y_{zi}[n]+2y_{zs}[n]$

(3) $x[n]=6u[n]$, $y[-1]=-2$, $y[-2]=8$

零输入,零状态分别线性！

初始条件加倍 → $y_{zi}[n]$ 加倍

输入不变 → $y_{zs}[n]$ 不变

(3)总响应: $y[n]=2y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$

系统的响应分解 —有关系统响应的概念

- 自由响应和零输入响应都满足齐次方程的解。但其系数不同。零输入响应的系数C_{zik}仅由起始储能情况决定，而自由响应的C_k要同时依从于起始状态和激励信号。
- 自由响应由两部分组成，其中一部分由起始状态决定，另一部分由激励信号决定。二者都与系统自身参数有关。
- 若系统起始无储能，即0_-条件 为零，则零输入 响应为零。但自由响应可以不为零，由激励信号与系统参数共同决定。
- 零输入 响应由0_-时刻到0_+时刻不跳变。此时刻若发生跳变只可以出现在零状态响应分量之中。
- 线性常系数微分方程描述的系统为时不变系统。只有在起始状态为零时才是线 性时不变系统。但可用增量线性系统的概念解释。

作业

- P256
  - 习题1
  - 习题6
  - 习题10
- 实验：离散时间信号和系统分析（MATLAB）
- 预习：线性时不变系统的频域、复频域分析