# 第五章　目标规划

- 目标规划问题及数学模型
- 目标规划的集中求解算法
- 目标规划的序贯求解算法

# 线性规划在应用中的问题（1）

1、线性规划的目标是一个刚性的目标.
但实际应用中，目标常常是模糊的。

解决方法:

将目标化作一种软目标/软约束。

# 线性规划在应用中的问题（2）

2、线性规划要求有解时各个约束条件相容，可行域非空。而实际情况并非总能满足。

思路：

正视现实，将原来要求寻找最优解的目标，改为寻找满意解。

解决方法：

1）将矛盾的普通约束改为目标约束，即将硬约束改为软约束。

2）将多个约束分为不同的优先级。

# 线性规划在应用中的问题（3）

**3**、线性规划是一个单目标规划的问题，但实际应用中，常常存在多个目标。

解决方法：

**1**）分清主次，设置优先级（绝对优先级和相对优先级）

**2**）将各个目标函数按优先级加权，构成一个新的单目标函数

# 目标规划的思想和方法

思想：

将定量技术和定性技术结合，

承认矛盾、冲突的合理性，

强调通过协调，达到总体和谐

方法：

软约束＋优先级

# 例1 软约束的设计

例1、

| | 甲 | 乙 | 有效工时 |
|---|---|---|---|
| 金工 | **4** | **2** | **400** |
| 装配 | **2** | **4** | **500** |
| 收益 | **100** | **80** | |

# 例1的线性规划模型

**LP：** $\max z=100x_1+80x_2$

s.t. $\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 500 \\ 4x_1+2x_2 \le 400 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

$x^* = (50,100) \qquad z^* = 13000$

# 目标约束

**GP**：去年总收益***9000***，增长要求***11.1%***

即：今年希望总收益不低于***10000***

该目标实质上是一个约束，希望：

$$100x_1+80x_2 \geq 10000$$

# 决策值和目标值的关系

设$100x_1+80x_2$为决策值，$10000$为目标值

决策值与目标值之间存在着多种可能：

1）决策值小于目标值　$100x_1+80x_2<10000$

2）决策值等于目标值　$100x_1+80x_2=10000$

3）决策值大于目标值　$100x_1+80x_2>10000$

# 软约束

$$100x_1+80x_2+d^- - d^+ = 10000$$

引入偏差变量：

$d^+$：决策值超过目标值部分(正偏差变量)

$d^-$：决策值不足目标值部分(负偏差变量)

满足 $d^+ \geq 0$，$d^- \geq 0$，$d^+ \cdot d^- = 0$

# 例1的目标规划模型

$$\min z = d^-$$

s.t.

$$\begin{cases} 100x_1 + 80x_2 - d^+ + d^- = 10000 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 400 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 500 \\ x_1, x_2, d^-, d^+ \ge 0 \end{cases}$$

$$d^+ . d^- = 0$$

# 典型目标函数

**(1)**、恰好达到目标：

$$\min Z = d^- + d^+$$

**(2)**、超过目标：

$$\min Z = d^-$$

**(3)**、不超过目标：

$$\min Z = d^+$$

# 例2 多目标、多约束情况

例2

| | I | II | 资源拥有量 |
|---|---|---|---|
| 原材料(公斤) | 2 | 1 | 11 |
| 设备(小时) | 1 | 2 | 10 |
| 利润(千元/件) | 8 | 10 | |

# 规划目标

**(1)**、原材料价格上涨，超计划要高价购买，所以要严格控制。

**(2)**、市场情况，产品Ⅰ销售量下降，希望产品Ⅰ的产量不大于产品Ⅱ的产量。

**(3)**、充分利用设备，不希望加班。

**(4)**、尽可能达到并超过利润计划指标**56**千元。

# 建模步骤

建模：

**(1)**、设定约束条件。**(**目标约束、绝对约束**)**

**(2)**、规定目标约束优先级。

**(3)**、建立模型

# 例2—设定约束条件

设$x_1$，$x_2$为产品Ⅰ，产品Ⅱ产量。

$$
\begin{cases}
2x_1+x_2 \le 11 & \text{严格控制原材料} \\
x_1-x_2+d_1^- -d_1^+=0 & x_1\text{产量不大于}x_2 \\
x_1+2x_2+d_2^- -d_2^+=10 & \text{充分利用设备，不加班} \\
8x_1+10x_2+d_3^- -d_3^+=56 & \text{利润要求} \\
x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0,\ i=1,2,3 & \\
d_i^- \cdot d_i^+=0 &
\end{cases}
$$

# 例2的目标函数

多个目标函数：

$\mathbf{min}Z_1 = d_1^+$ 　　*$x_1$产量不大于$x_2$*

$\mathbf{min}Z_2 = d_2^- + d_2^+$ 　　*充分利用设备*

$\mathbf{min}Z_3 = d_3^-$ 　　*利润要求*

# 优先因子

则原目标函数为：

$$\min\{P_1 d_1^+ \,,\, P_2(d_2^- + d_2^+),\, P_3(d_3^-)\}$$

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2\,(d_2^- + d_2^+) + P_3\,(d_3^-)$$

为了说明目标的优先性，定义了优先因子$P_l$:

$$P_l >> P_{l+1} > 0$$

即目标$l$ 比目标 $l$+1具有绝对的优先权

# 例3 同等优先级的情况

例3、电视机厂装配25寸和21寸两种彩电，每台电视机需装备时间1小时，每周装配线计划开动40小时，预计每周25寸彩电销售24台，每台可获利80元，每周21寸彩电销售30台，每台可获利40元。

该厂目标：

1、避免开工不足。

2、允许装配线加班，但尽量不超过10小时。

3、尽量满足市场需求，尤其是25寸彩电。

# 例3的目标规划模型

解：设 $x_1$ , $x_2$ 分别表示25寸，21寸彩电产量

$$\min Z=P_1d_1^-+P_2d_2^++P_3(\mathrm{W}_{33}^- d_3^-+ \mathrm{W}_{34}^- d_4^-)$$

$\mathrm{W}_{33}^- > \mathrm{W}_{34}^-$

s.t.

$$\begin{cases} x_1+x_2 +d_1^- -d_1^+=40 & \text{上班时间} \\ x_1 +x_2+d_2^- -d_2^+=50 & \text{加班情况} \\ x_1+d_3^- -d_3^+=24 & \\ x2 +d_4^- -d_4^+=30 & \text{市场需求} \\ x_1 , x_2 , d_i^- , d_i^+\geq 0 \quad d_i^- .d_i^+= 0 \ (i=1,2,3,4) & \end{cases}$$

# 权系数

为了对优先级同为$P_l$的目标实现重要性的微调，可以对第$k$个目标的分量$d_k^-$加权$W_{lk}^-$，$d_k^+$加权$W_{lk}^+$。

可以看到，$W_{lk}$越大，第$k$个目标的重要性越大。

# 目标规划(Goal Programming)一般模型

$$\min\left\{P_l\left(\sum_{k=1}^{K}W_{lk}^{-}d_k^{-}+W_{lk}^{+}d_k^{+}\right), l=1,2,\ldots,L\right\}$$

Objective function

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le (=,\ge) b_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Target value

$$\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \qquad k=1,2,\ldots,K$$

$$x_j, d_k^{-}, d_k^{+} \ge 0 \qquad d_k^{-}\cdot d_k^{+}=0$$

Goal constraints

$$j=1,2,\ldots,n \qquad k=1,2,\ldots,K$$

# 目标规划的目的和特点

目标规划的目的：求一组决策变量的满意值，使决策结果与给定目标总偏差最小。

特点：

① 目标函数中只有偏差变量。

② 目标函数总是求偏差变量最小。

③ $Z=0$：各级目标均已达到

$Z>0$：部分目标未达到。

# 第五章 目标规划

- 目标规划问题及数学模型
- 目标规划的集中求解算法
- 目标规划的序贯求解算法

# 目标规划单纯形解法

$$\min z = \sum_{l=1}^{L} P_l \left( \sum_{k=1}^{K} W_{lk}^{-} d_k^{-} + W_{lk}^{+} d_k^{+} \right)$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge) b_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \qquad k = 1, \cdots, K$$

$$x_j, d_k^{-}, d_k^{+} \ge 0 \qquad d_k^{-} \cdot d_k^{+} = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

# 集中单纯形法的特点

**(1)**只有**1**个目标

**(2)**含优先因子 $\boldsymbol{P_l >> P_{l+1}}$，有：

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = \sum_{l=1}^{L} a_{lj} P_l$$

因此，$\sigma_j$的符号看$\boldsymbol{a_{lj} \neq 0}$中***l***最小一项的符号

# 例2的目标规划模型

$$\min Z=P_1d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3(d_3^-)$$

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{cases}
2x_1+x_2 \le 11 \\
x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\
8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\
x_1,\ x_2,\ d_i^-,\ d_i^+ \ge 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,3
\end{cases}
$$

# 初始单纯形表

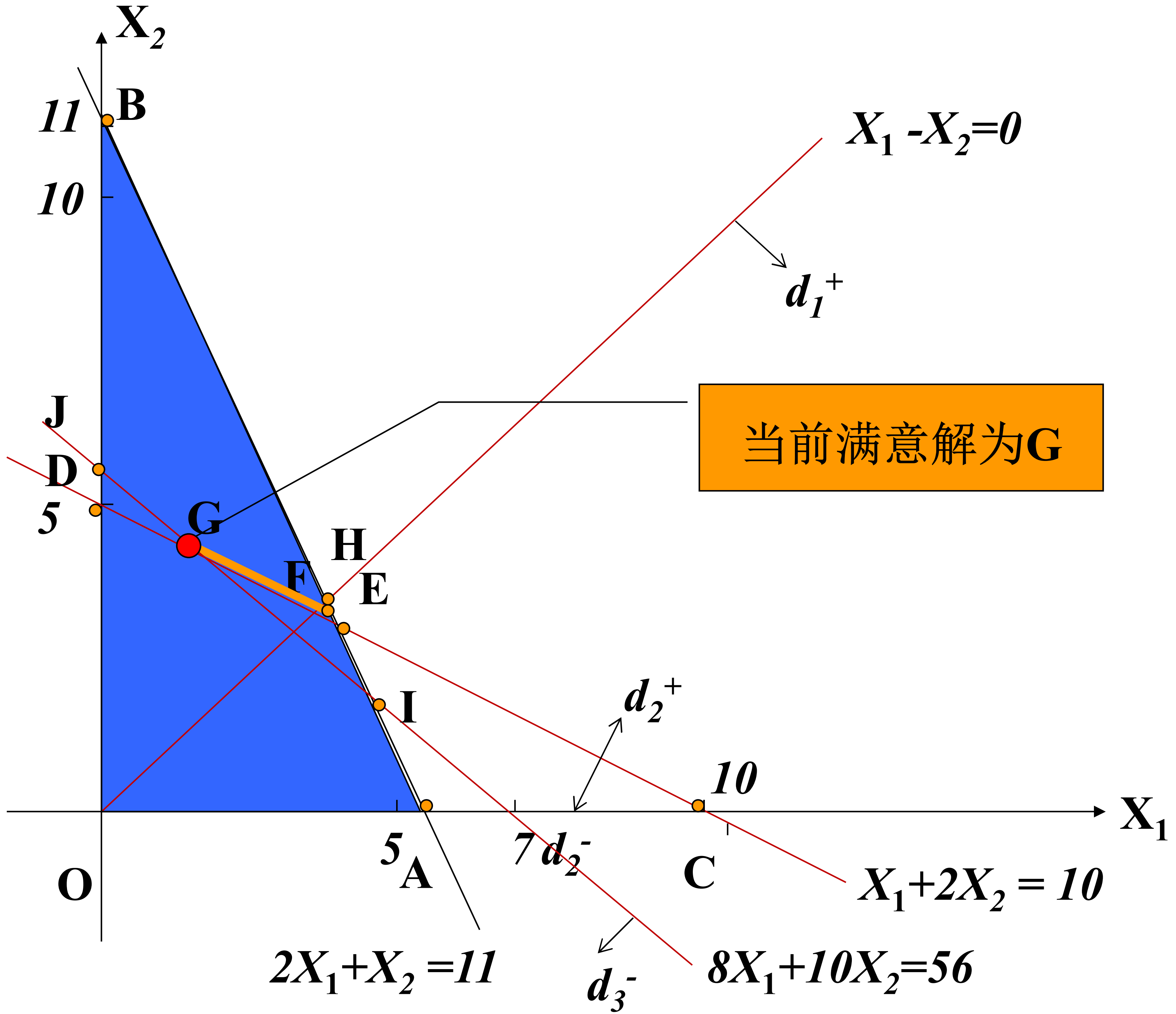
| $c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $P_1$ | $P_2$ | $P_2$ | $P_3$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d_1^-$ | $d_1^+$ | $d_2^-$ | $d_2^+$ | $d_3^-$ | $d_3^+$ |
| 0 | $x_3$ | 11 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $d_1^-$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $P_2$ | $d_2^-$ | 10 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| $P_3$ | $d_3^-$ | 56 | 8 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| $\sigma_j$ | | $P_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | $P_2$ | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| | | $P_3$ | -8 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# 迭代后的单纯形表

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_j$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $P_1$ | $P_2$ | $P_2$ | $P_3$ | 0 |
| $C_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d_1^-$ | $d_1^+$ | $d_2^-$ | $d_2^+$ | $d_3^-$ | $d_3^+$ |
| 0 | $x_3$ | 6 | 3/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 0 | $d_1^-$ | 5 | 3/2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 |
| 0 | $x_2$ | 5 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 |
| $P_3$ | $d_3^-$ | 6 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5 | 5 | 1 | -1 |
| $\sigma_j$ | | $P_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | $P_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | | $P_3$ | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | -5 | 0 | 1 |

# 最终单纯形法表

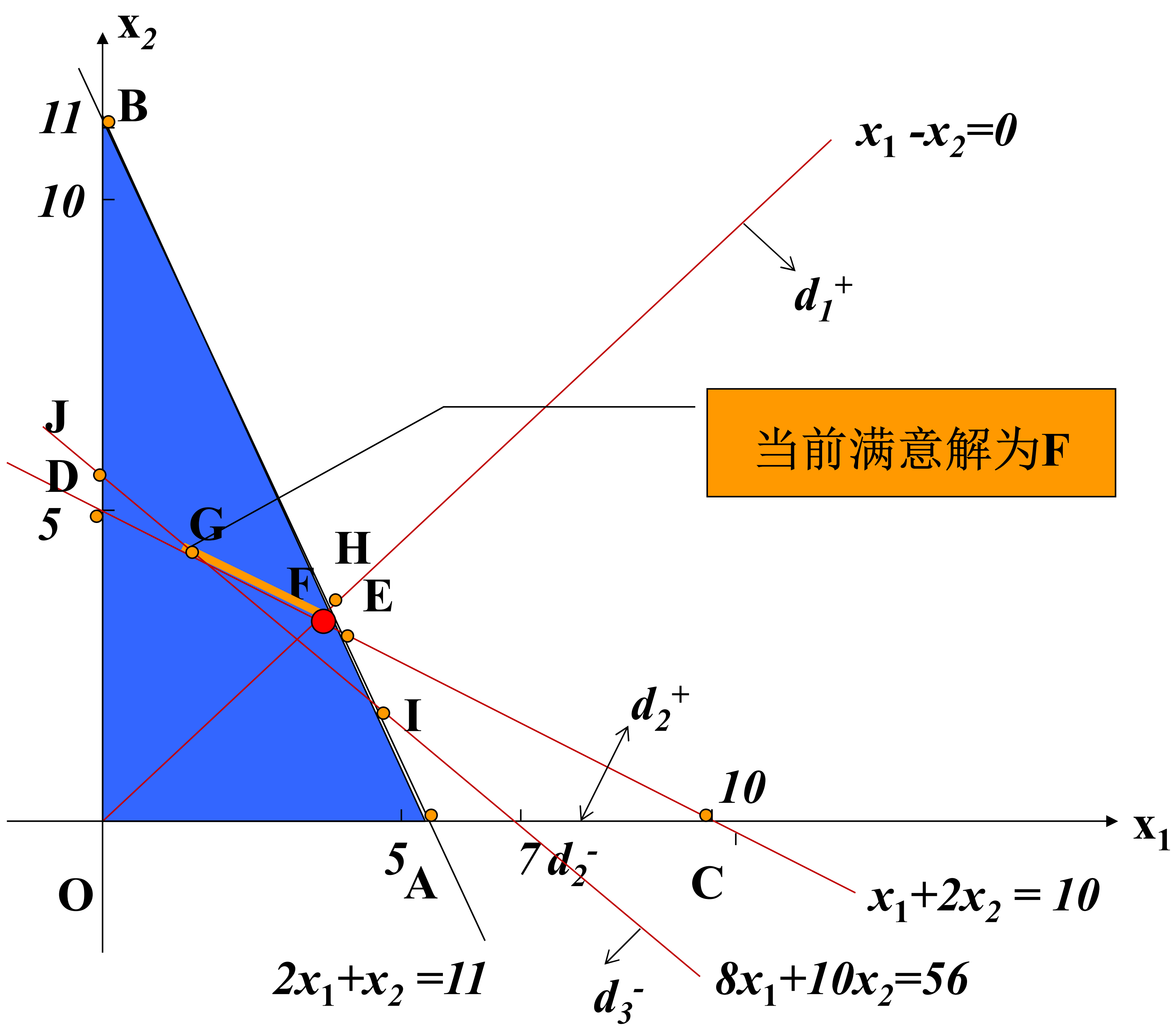
| | | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $P_1$ | $P_2$ | $P_2$ | $P_3$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d_1^-$ | $d_1^+$ | $d_2^-$ | $d_2^+$ | $d_3^-$ | $d_3^+$ |
| 0 | $x_3$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | -2 | -1/2 | 1/2 |
| 0 | $d_1^-$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 3 | -3 | -1/2 | 1/2 |
| 0 | $x_2$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4/3 | -4/3 | -1/6 | 1/6 |
| 0 | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5/3 | 5/3 | 1/3 | -1/3 |
| $\sigma_j$ | | $P_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | $P_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | | $P_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |



X2
X1
11
10
5
B
J
D
G
H
F
E
I
O
5
A
7
C
10
X1 -X2=0
d1+
d2+
d2-
d3-
当前满意解为G
X1+2X2 = 10
2X1+X2 =11
8X1+10X2=56

# 其他满意解

| $c_{jC}$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | $P_1$ | $P_2$ | $P_2$ | $P_3$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $x_B$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $d_1^-$ | $d_1^+$ | $d_2^-$ | $d_2^+$ | $d_3^-$ | $d_3^+$ |
| 0 | $x_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $d_3^+$ | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 | -2 | 6 | -6 | -1 | 1 |
| 0 | $x_2$ | 10/3 | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 1/3 | 1/3 | -1/3 | 0 | 0 |
| 0 | $x_1$ | 10/3 | 1 | 0 | 0 | 2/3 | -2/3 | 1/3 | -1/3 | 0 | 0 |
| $\sigma_j$ | | $P_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | $P_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | | $P_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |



$x_2$
11
B
10
$x_1 - x_2 = 0$
$d_1^+$
当前满意解为F
J
D
5
G
H
F
E
I
$d_2^+$
10
$x_1$
O
5
A
7
$d_2^-$
C
$x_1 + 2x_2 = 10$
$2x_1 + x_2 = 11$
$d_3^-$
$8x_1 + 10x_2 = 56$

# 第五章 目标规划

- 目标规划问题及数学模型
- 目标规划的集中求解算法
- 目标规划的序贯求解算法

# 目标规划的序贯解法

$$\min\left\{P_l\left(\sum_{k=1}^{K}W_{lk}^{-}d_k^{-}+W_{lk}^{+}d_k^{+}\right)\right\}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i \qquad (i=1,\cdots,m)$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_j+d_k^{-}-d_k^{+}=g_k \qquad (k=1,\cdots,K)$$

$$x_j,d_k^{-},d_k^{+}\ge 0 \qquad d_k^{-}\cdot d_k^{+}=0$$

# 目标规划的序贯式算法

基本思路：按优先级的顺序，从最高级开始，逐个满足目标。

具体方法：将已计算目标函数值，作为下一级目标的硬约束。

# 序贯式算法举例

$$\min Z = P_1(d_1^- + d_2^+) + P_2 d_3^- + P_3 d_4^+$$

s.t. $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 30$ ①

$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15$ ②

$8x_1 + 12x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$ ③

$x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40$ ④

$x_j, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \; d_i^- \cdot d_i^+ = 0, \; i = 1,2,3,4, \; j = 1,2$

# 序贯式算法(1)

$$\min Z_1 = d_1^- + d_2^+$$

s.t. $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 30$ ①

$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15$ ②

$x_j,\ d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,\ \ j=1,2$

解得：$x_1=30$ , $x_2=15$,

$d_1^+=0$， $d_1^-=0$， $d_2^+=0$， $d_2^-=0$

# 序贯式算法(2)

$$\min Z_2 = d_3^-$$

s.t. $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 30$ ①

$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 15$ ②

$8x_1 + 12x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1000$ ③

$d_1^- + d_2^+ = 0$ ④

$x_j,\ d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \cdot d_i^+ = 0,\ i=1,2,3\ \ j=1,2$

解得：$x_1=30$，$x_2=15$，$d_1^+=0$，$d_1^-=0$，

$d_2^+=0$，$d_2^-=0$，$d_3^+=0$，$d_3^-=580$，

$$\min Z_3 = d_4^+$$

s.t. $x_1+d_1^- - d_1^+=30$ ①

$x_2+d_2^- - d_2^+=15$ ②

$8x_1 +12 x_2 +d_3^- - d_3^+=1000$ ③

$x_1 + 2x_2 +d_4^- - d_4^+=40$ ④

$d_1^- + d_2^+=0$ ⑤

$d_3^-=580$ ⑥

$x_j , d_i^-, d_i^+ \geq 0, d_i^- \cdot d_i^+ = 0, i=1,2,3,4 \;\; j=1,2$

解得：$x_1=30$ , $x_2=15$， $d_1^+=0$ ,$d_1^-=0$, $d_2^+=0$, $d_2^-=0$，
$d_3^+=0$， $d_3^-=580$， $d_4^+=20$， $d_4^-=0$

# 序贯式算法的特点

**(1)** 可以直接使用普通的单纯形算法解决问题。

**(2)** 工作量大