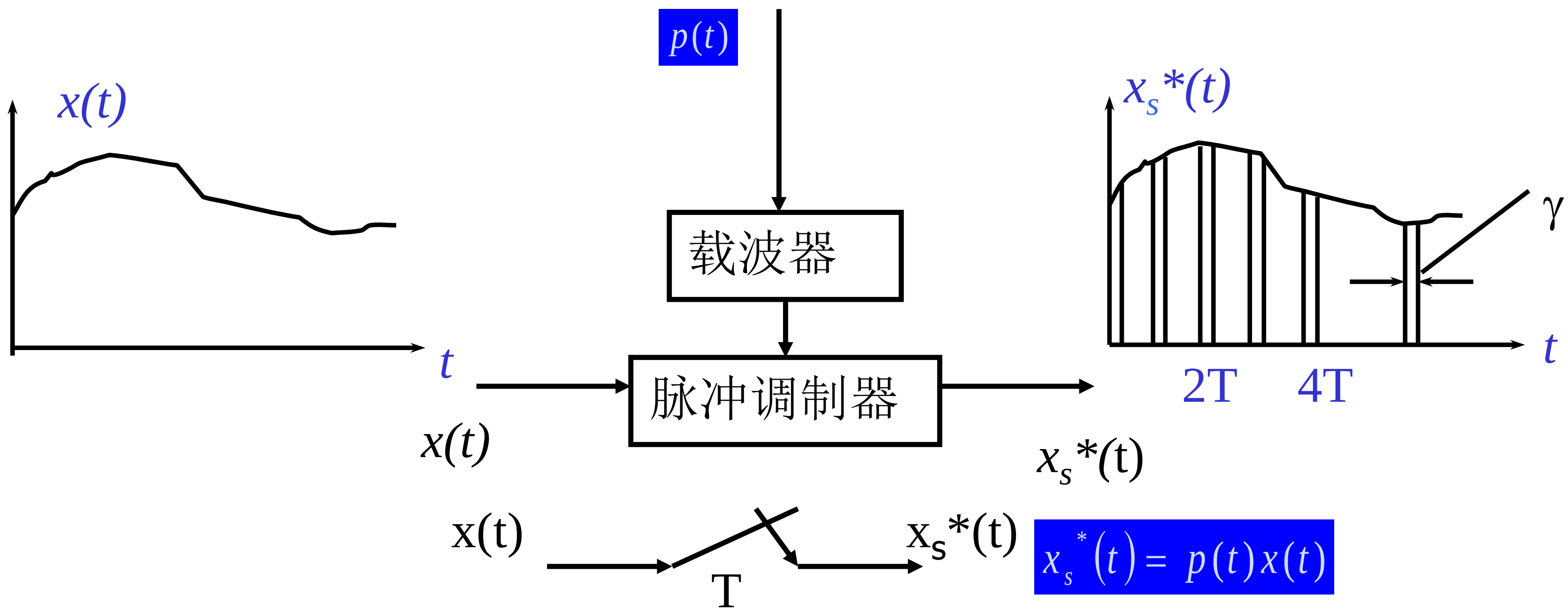
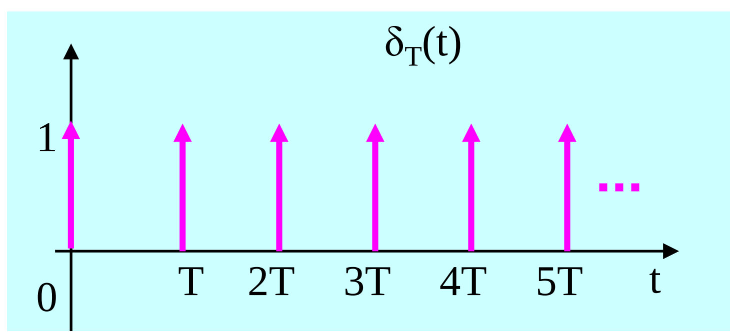
第三章 离散信号的分析


浙江大学控制科学与工程学院
CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING
SINCE 1956

从连续信号到离散信号

前提：仅考虑在 $t\geq 0$ 时存在的单边抽样信号$x_s(t)$(当$t<0$时，$x_s(t)=0$)，





离散信号的分析

1. 离散信号的时域描述和分析
2. 离散信号的频域分析
3. 快速傅里叶变换
4. 离散信号的Z域分析

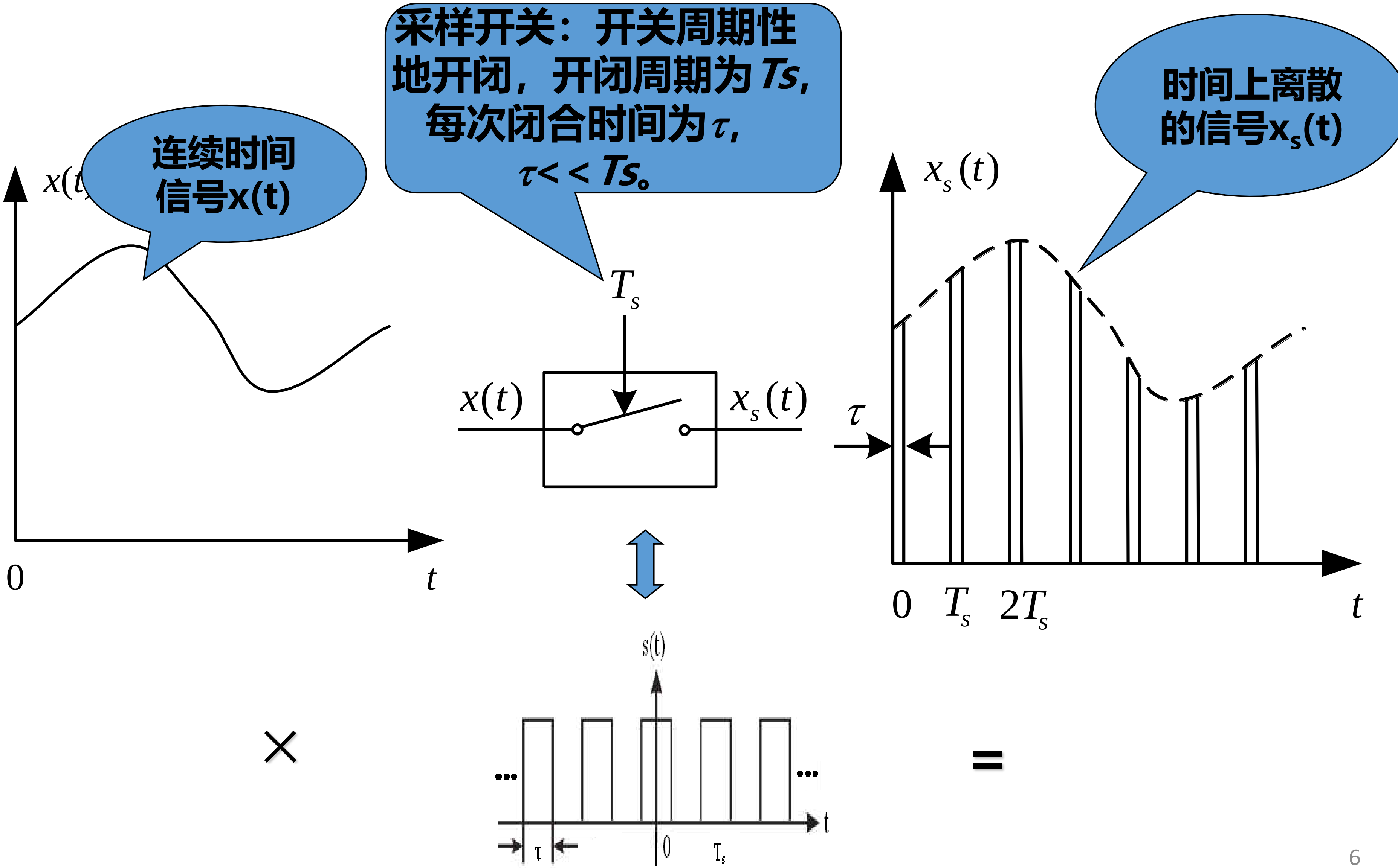
1. 离散信号的时域描述和分析

- 信号的抽样和恢复
- 时域采样定理
- 频域采样定理
- 离散信号的描述
- 离散信号的时域运算

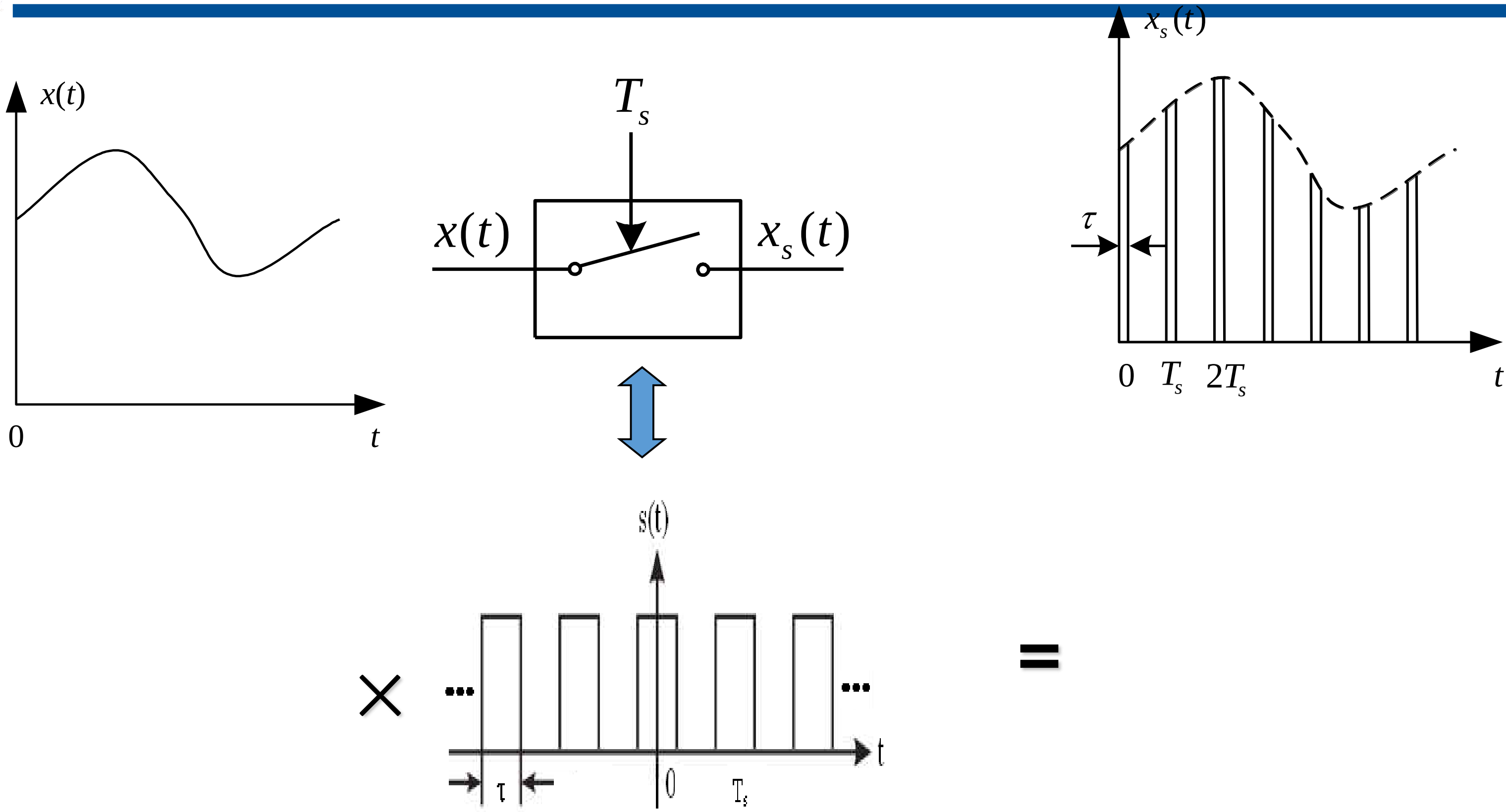
1.1 信号的抽样和恢复

- 连续信号的离散化
- 连续信号的抽样模型
- 采样信号的频域分析

连续信号的离散化–实际抽样

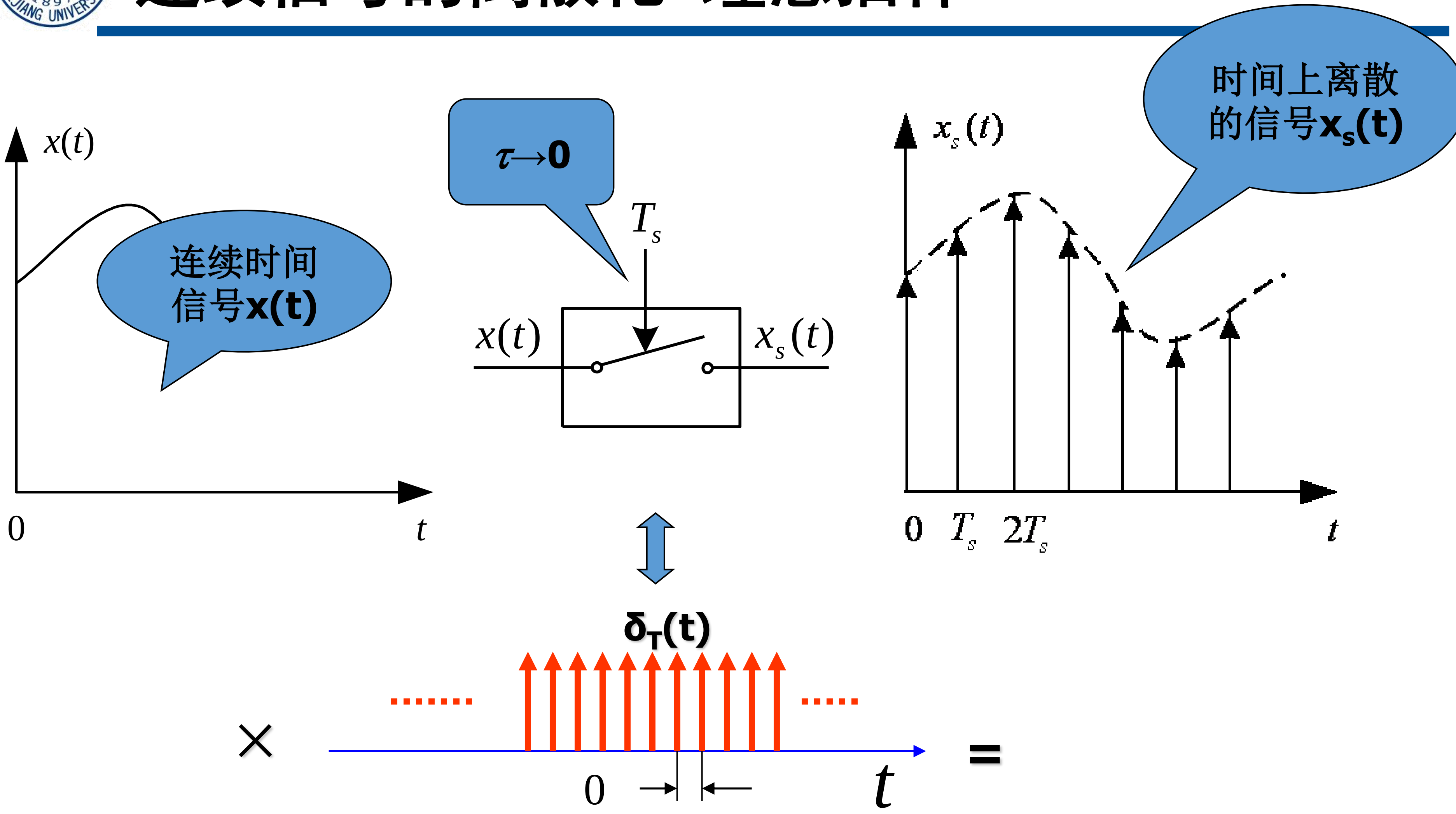


连续信号的离散化–实际抽样

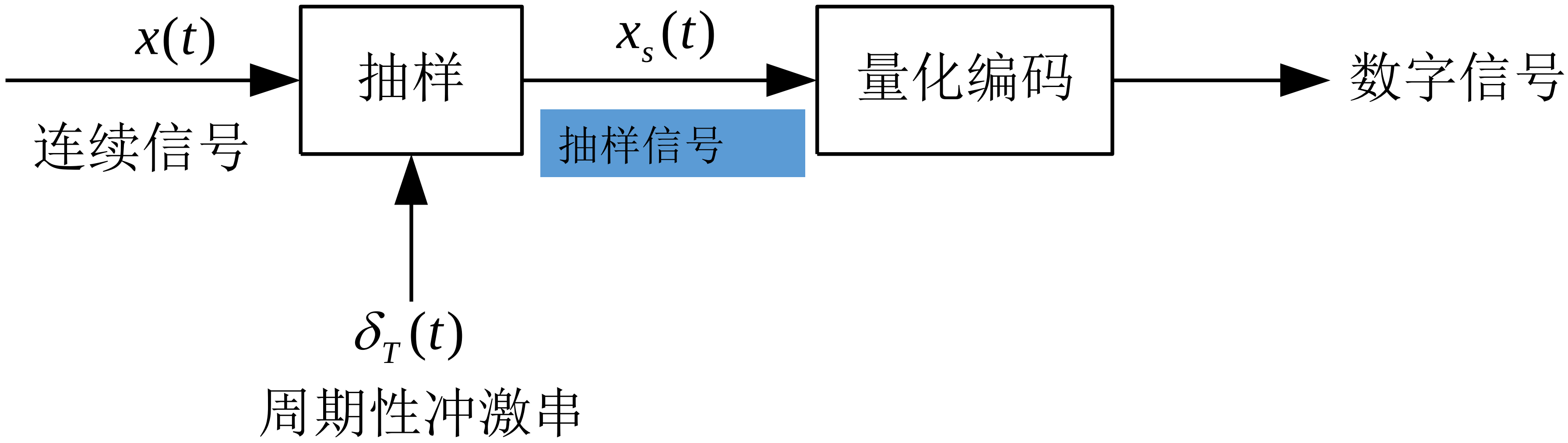


■ 考虑 T_s 是一个定值的情况，即**均匀抽样**，称 T_s 为采样周期，其倒数 $f_s=1/T_s$ 为**采样频率**，或 $\omega_s=2\pi f_s=2\pi/T_s$ 为**采样角频率**

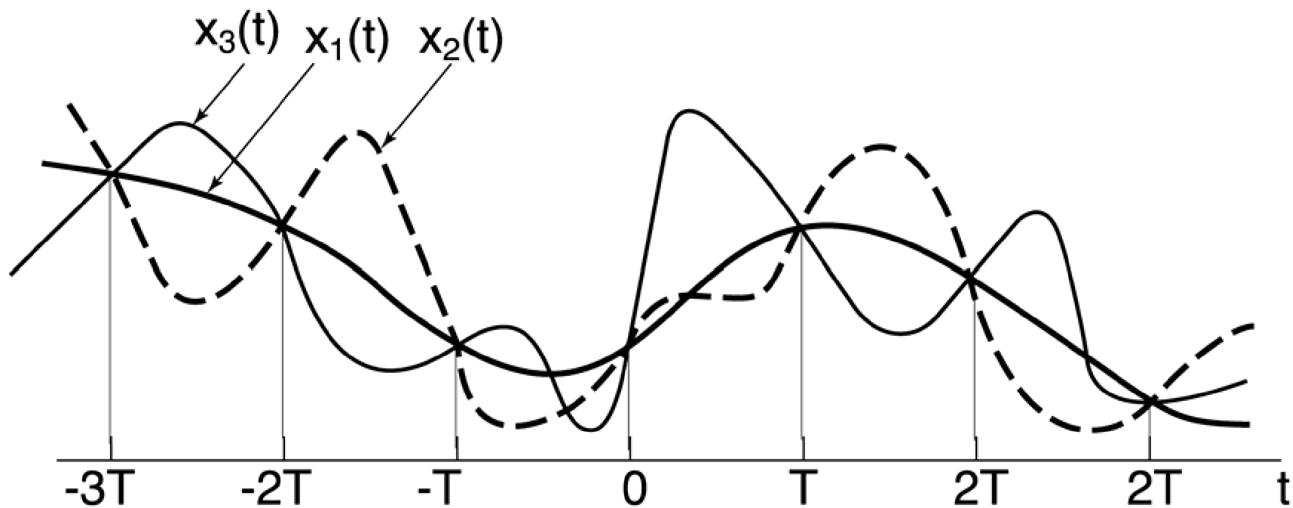
连续信号的离散化–理想抽样



连续信号的抽样



连续信号的抽样



- 不同的信号可以具有同样的离散采样
- 采样会丢失信息
- 在什么样的采样条件下可以通过采样信号重构原始信号?

连续信号的抽样

（1）抽样得到的信号$x_s(t)$在频域上有什么特性，它与原连续信号$x(t)$的频域特性有什么联系？

（2）连续信号被抽样后，它是否保留了原信号的全部信息，或者说，从抽样的信号$x_s(t)$能否无失真地恢复原连续信号？

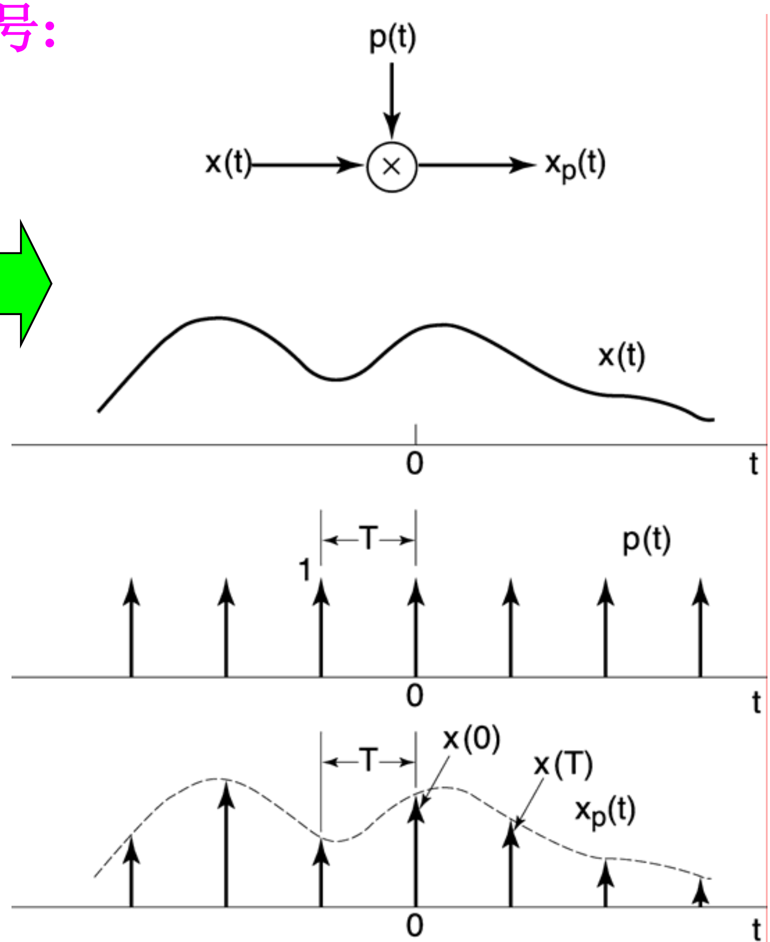
连续信号的理想抽样

对连续时间信号在均匀间隔上采样，确定在等时间间隔上的样值。

方法：用周期冲激串乘待采样的连续时间信号：

$$x_p(t) = x(t) \times p(t) \qquad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$



$$\boxed{x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)}$$

$x_p(t)$是一个冲激串，其冲激幅度等于x(t)以T为间隔的样本值。

连续信号的理想抽样

分析采样信号$x_p(t)$的频谱

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad p(t) \xleftrightarrow{F} P(j\omega)$$

周期冲激串的频谱：

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\omega_s), \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

FT的调制性质：

$$x(t)\times p(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)]$$

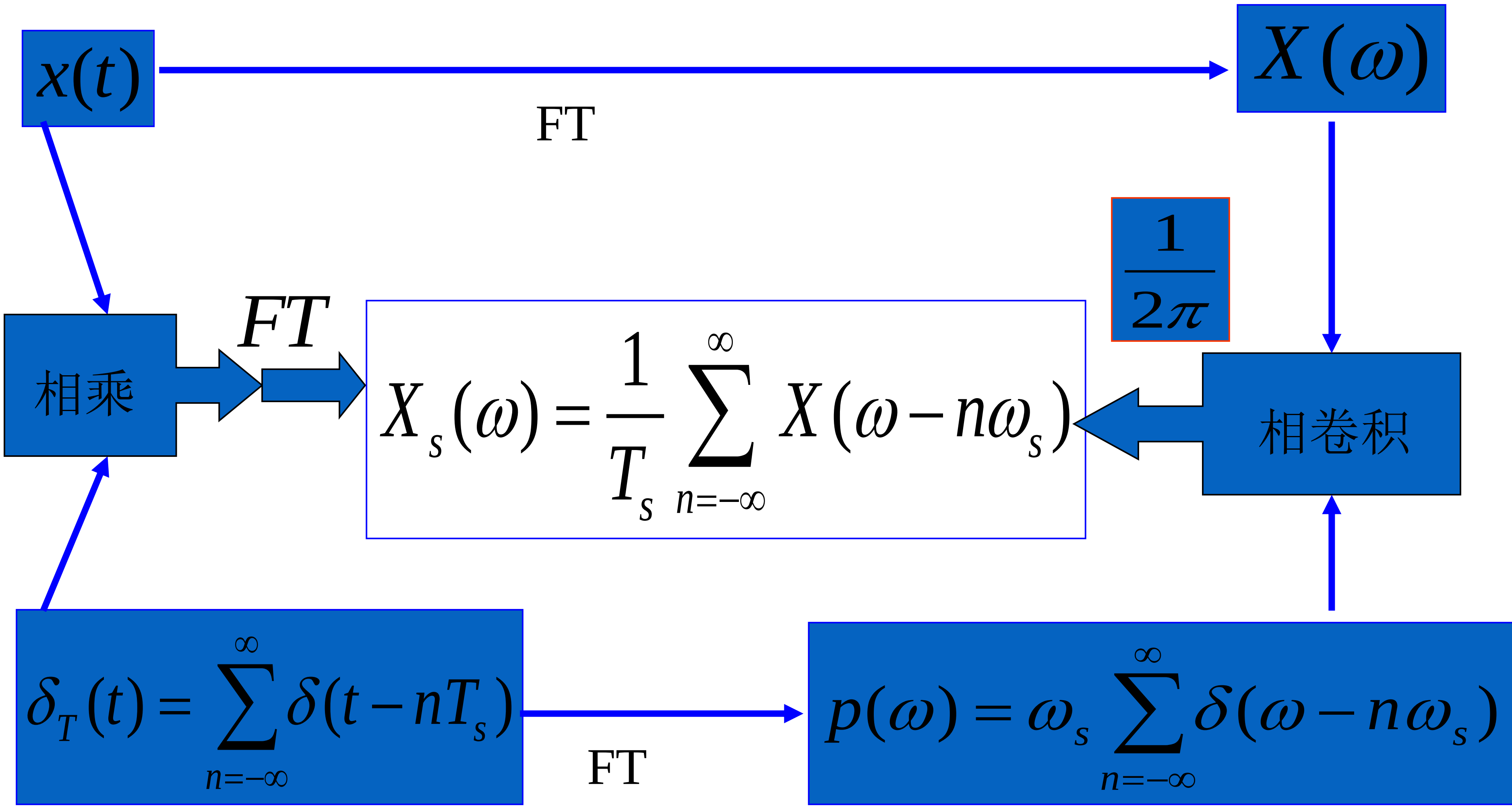
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

——$X_p(j\omega)$由一组移位的$X(j\omega)$叠加而成.

$$X_p(j(\omega \pm \omega_s)) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) = X_p(j\omega)$$

——$X_p(j\omega)$是频域上的周期函数，周期为ω_s

连续信号的理想抽样


$x(t)$
FT
$X(\omega)$
$\frac{1}{2\pi}$
相乘
FT
$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$
相卷积
$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$
FT
$p(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$

连续信号的理想抽样

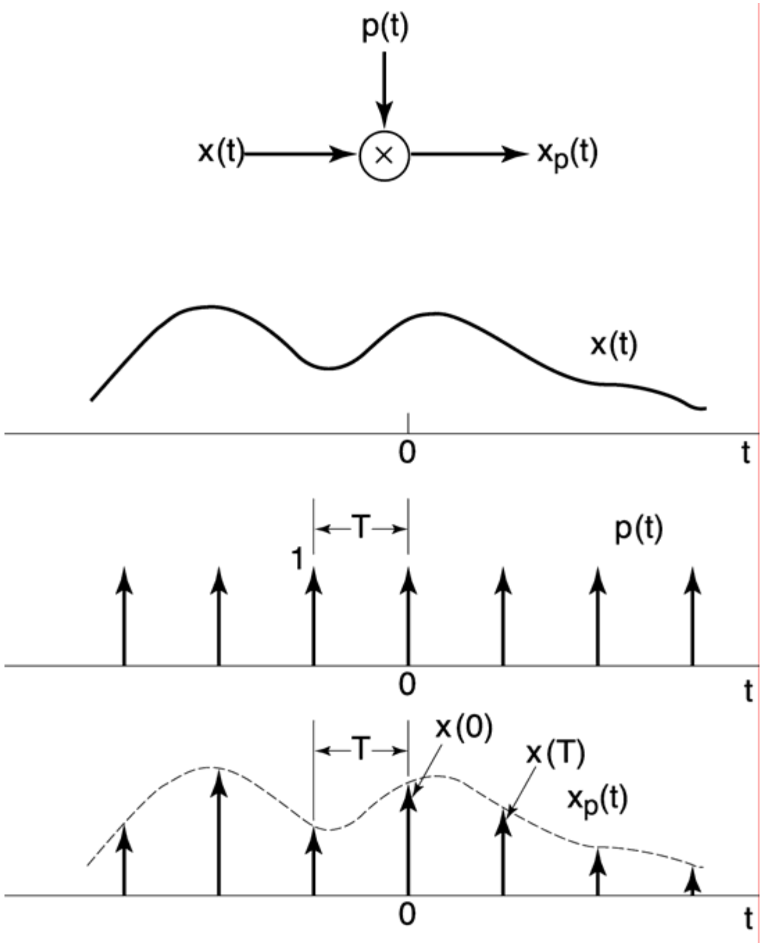
连续信号经理想抽样后频谱发生了两个变化：

1. **频谱发生了周期延拓，即将原连续信号的频谱X(ω)分别延拓到以±ω_s， ±2ω_s ……为中心的频谱，其中ω_s为采样角频率**

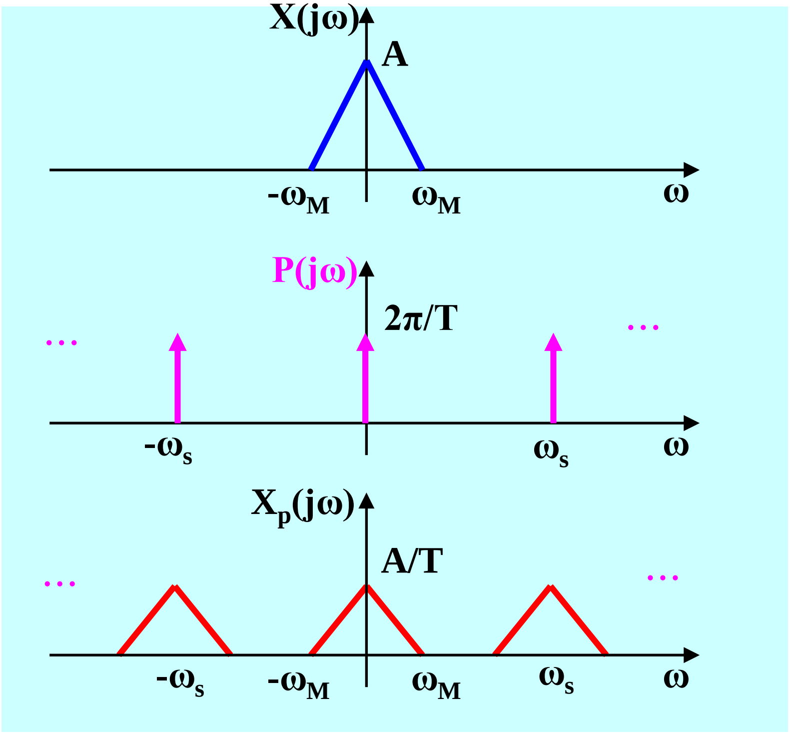
2. **频谱的幅度乘上了因子1/Ts，其中Ts为采样周期**

连续信号的理想抽样

假设x(t)是一带限信号（即$X(j\omega)=0,\ |\omega|>\omega_M$，$\omega_M$为信号的最高频率）



$$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega)*P(j\omega)\right]=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$



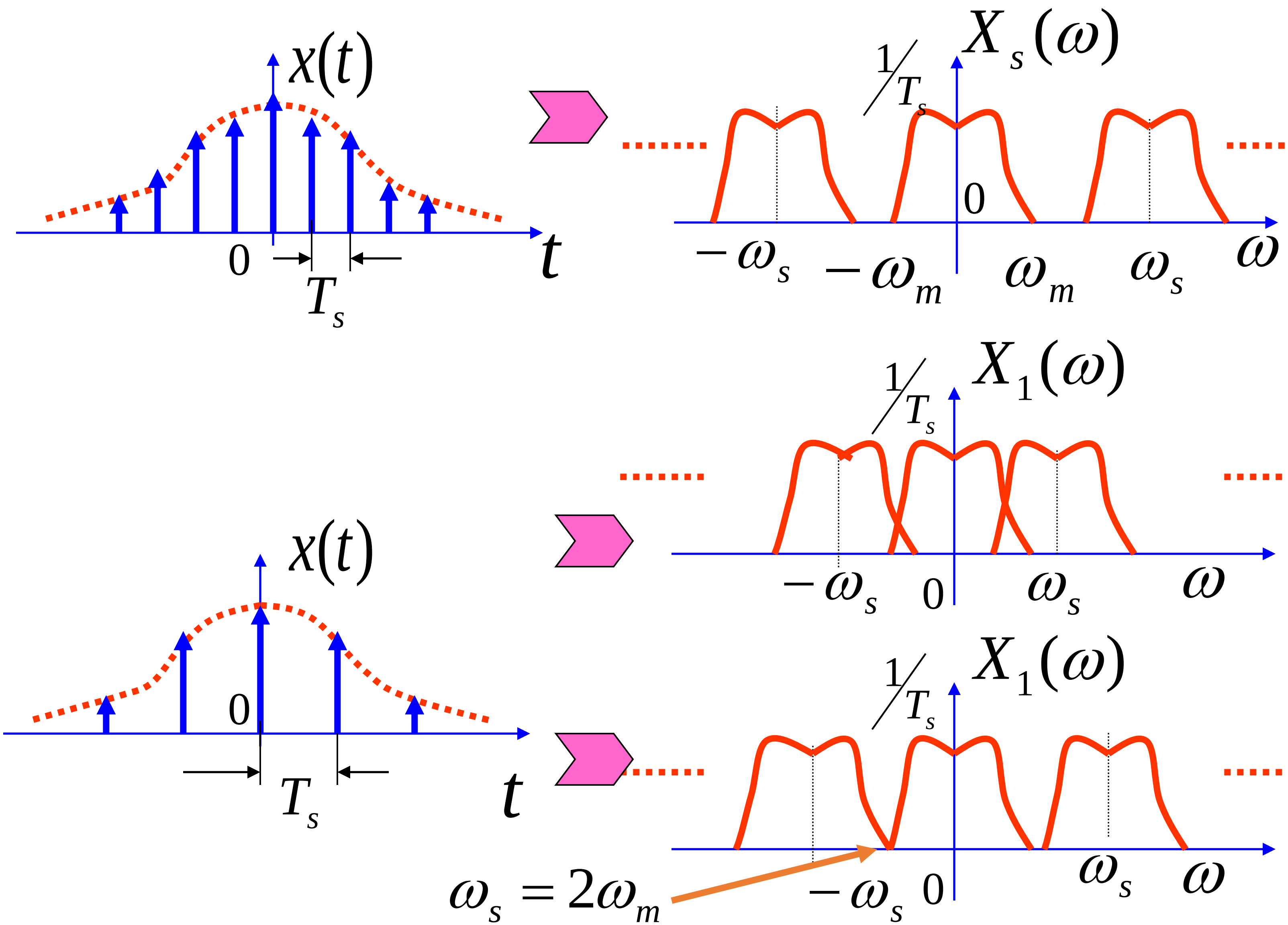
$\omega_s-\omega_M>\omega_M$，即$\omega_s>2\omega_M$

1.2 时域采样定理

对于频谱受限的信号x(t)，如果其最高频率分量为ω_m，为了保留原信号的全部信息，或能无失真地恢复原信号，在通过采样得到离散信号时，其采样频率应满足$\omega_s \geq 2\omega_m$

奈奎斯特（Nyquist）频率： $\omega_s = 2\omega_m$

频率混叠现象

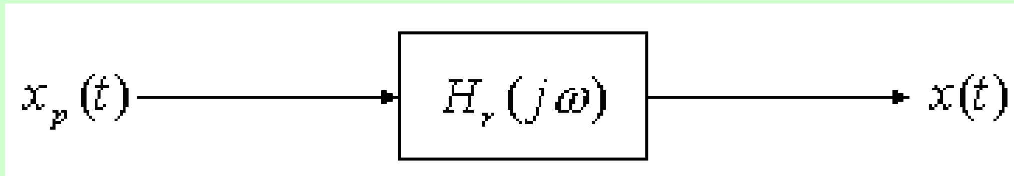


x(t)
0
T_s
t
X_s(ω)
1/T_s
0
−ω_s
−ω_m
ω_m
ω_s
ω
X_1(ω)
1/T_s
−ω_s
0
ω_s
ω
X_1(ω)
1/T_s
−ω_s
0
ω_s
ω
ω_s = 2ω_m

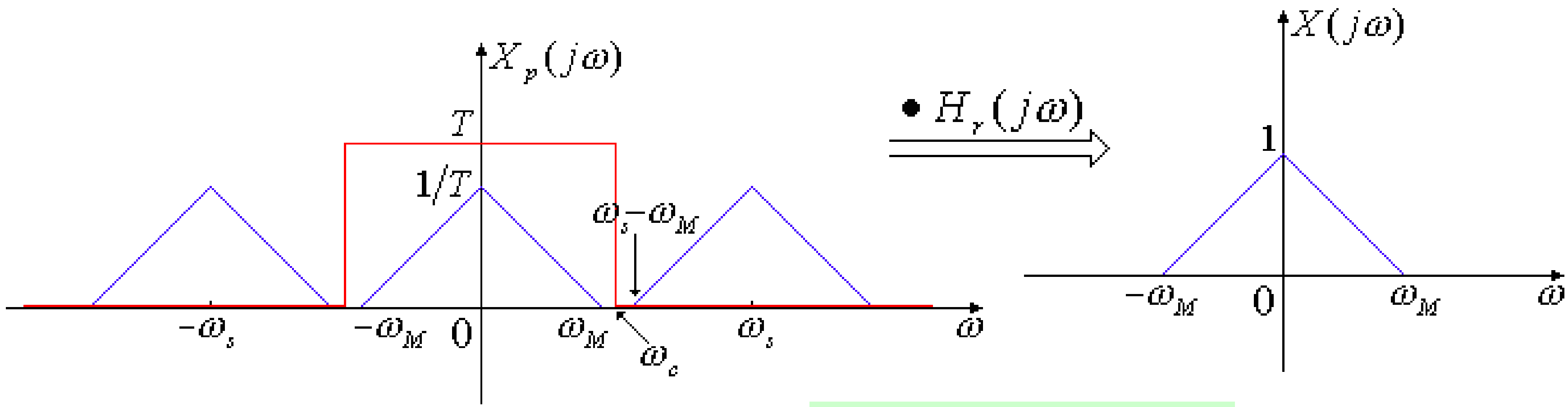
由抽样信号重建连续信号

信号的恢复（重建）——根据$x_p(t)$恢复$x(t)$

重建系统：



$$X(j\omega) = X_p(j\omega)H_r(j\omega)$$



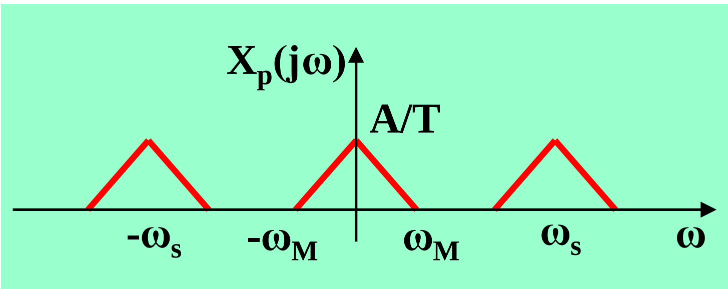
$$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

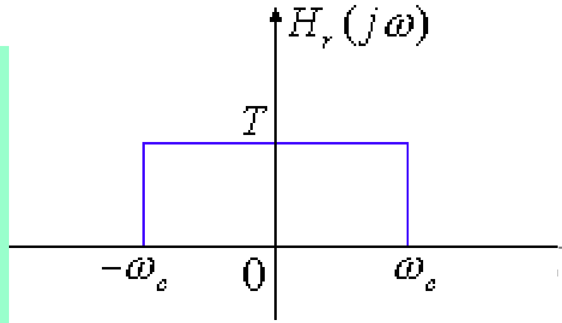
$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

由抽样信号重建连续信号

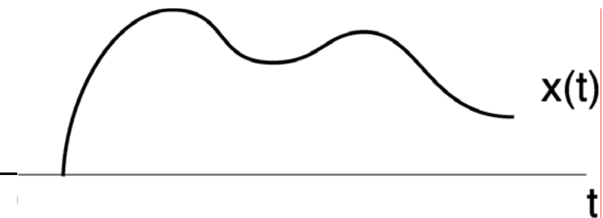
1）带限内插(采用理想滤波器进行信号重建）

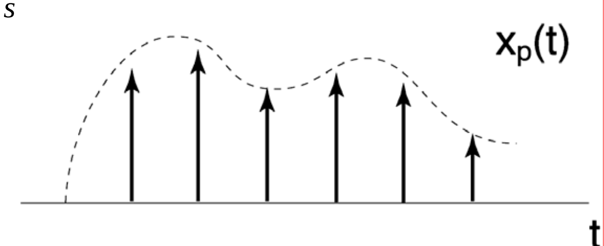
$$x_r(t) = x_p(t) * h_r(t)$$

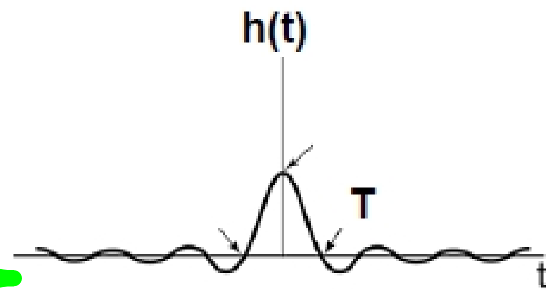




$$\omega_c = \omega_s$$

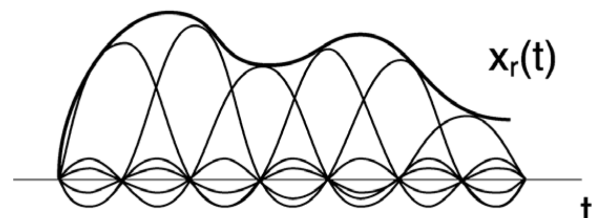






$$h(t) = T\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t-nT)$$

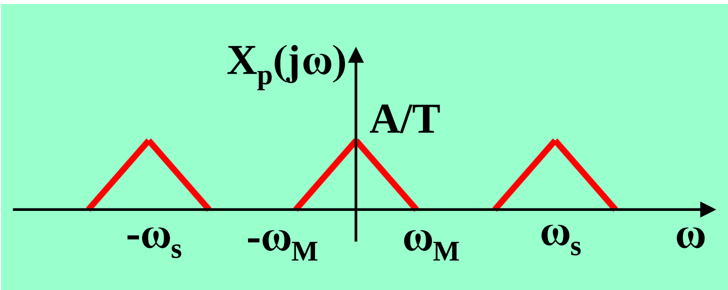


$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}Sa(\omega_c(t-nT))$$

连续信号可以展开成Sa函数的无穷级数，级数的系数等于抽样值

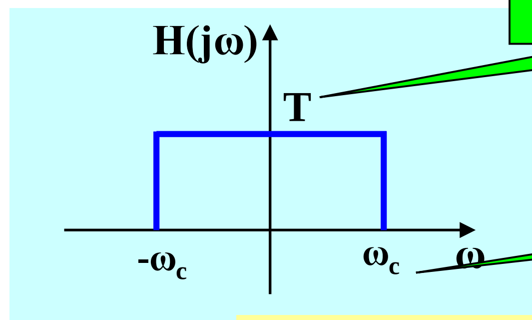
由抽样信号重建连续信号

1）带限内插(采用理想滤波器进行信号重建）



h(t)为理想滤波器

幅度T是补偿采样之后信号的频谱幅度变换1/T



$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$

$$h(t) = T\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)h(t-nT)$$

内插公式

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}Sa(\omega_c(t-nT))$$

重建时刻t_0时的$x(t_0)$需要所有时刻的样本值，所以内插公式是非因果内插

$$x_r(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}Sa(\omega_c(t-nT))$$

对无限长信号，截取h的有限项近似重建原信号。

由抽样信号重建连续信号

$x_p(t)$ 通过一个理想的滤波器，恢复原始信号$x(t)$。

$$x_p(t) = x(t) \times \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

问题：理想低通滤波器物理上无法实现；

解决方法：近似恢复（内插）

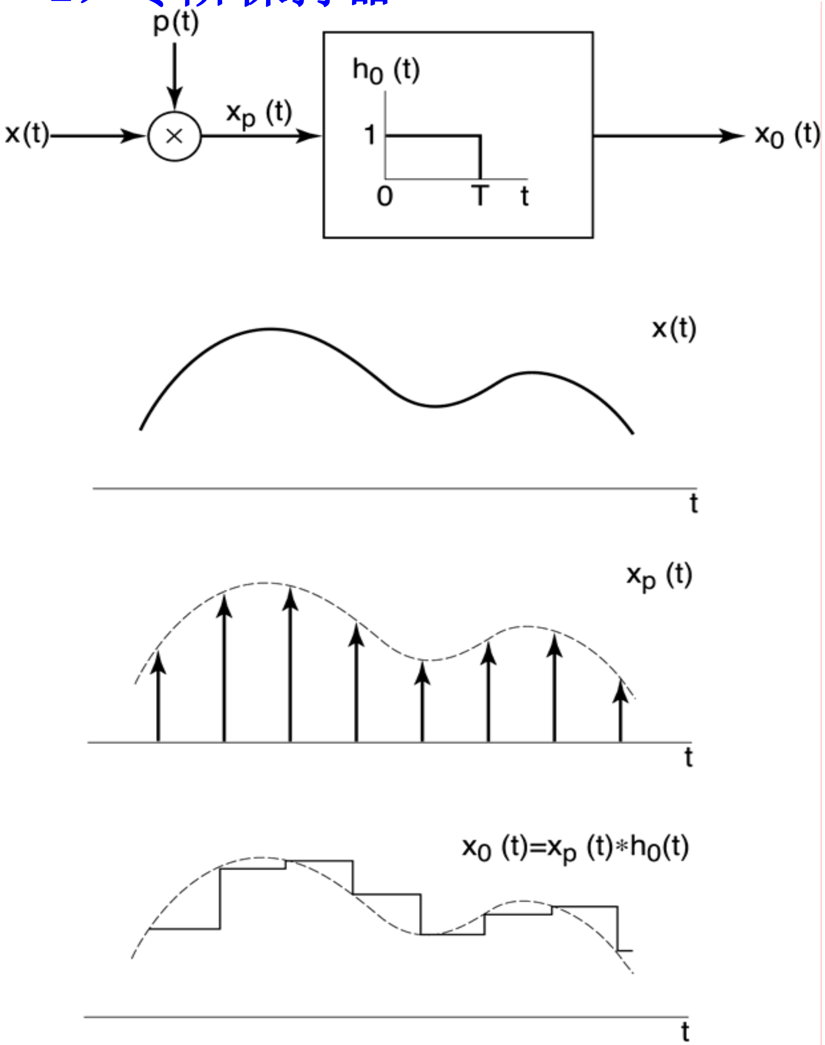
假设低通滤波器的单位冲激响应为$h(t)$，则滤波器输出$x_r(t)$为：

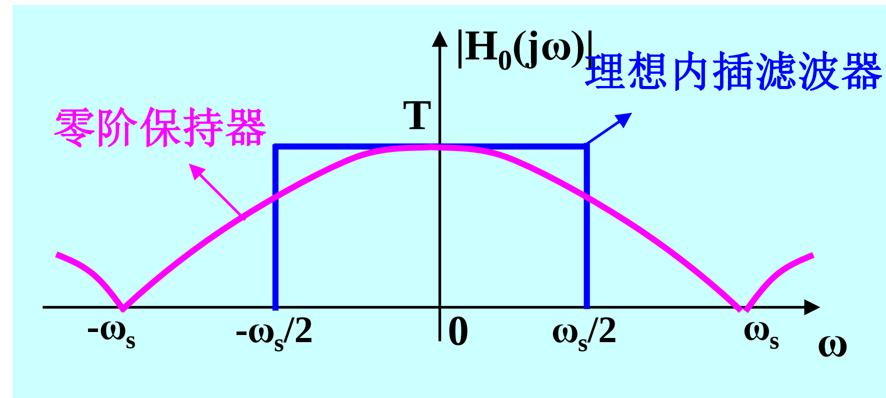
$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right] * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

$x_r(t)$可以由恢复系统中低通滤波器的单位冲激响应信号$h(t)$的移位信号的线性组合来重建，线性组合的加权系数为信号的样值序列

由抽样信号重建连续信号

1）零阶保持器





矩形窗函数的频谱： $\dfrac{2\sin\omega T_1}{\omega}$

T_1=T/2

右移T/2

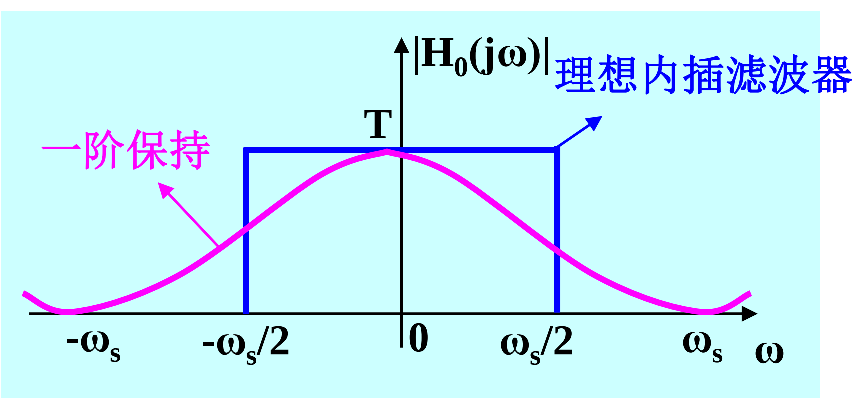
零阶保持器的频谱：

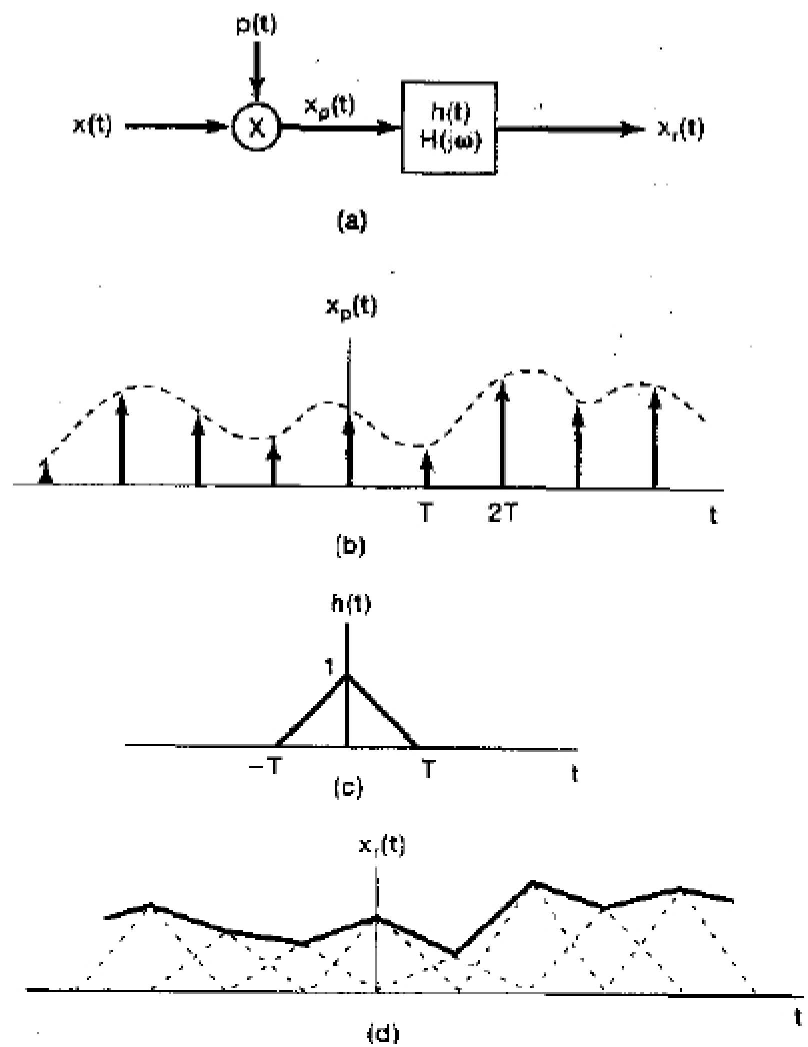
$$H_0(j\omega)=e^{-j\omega T/2}\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

由抽样信号重建连续信号

2）一阶保持器

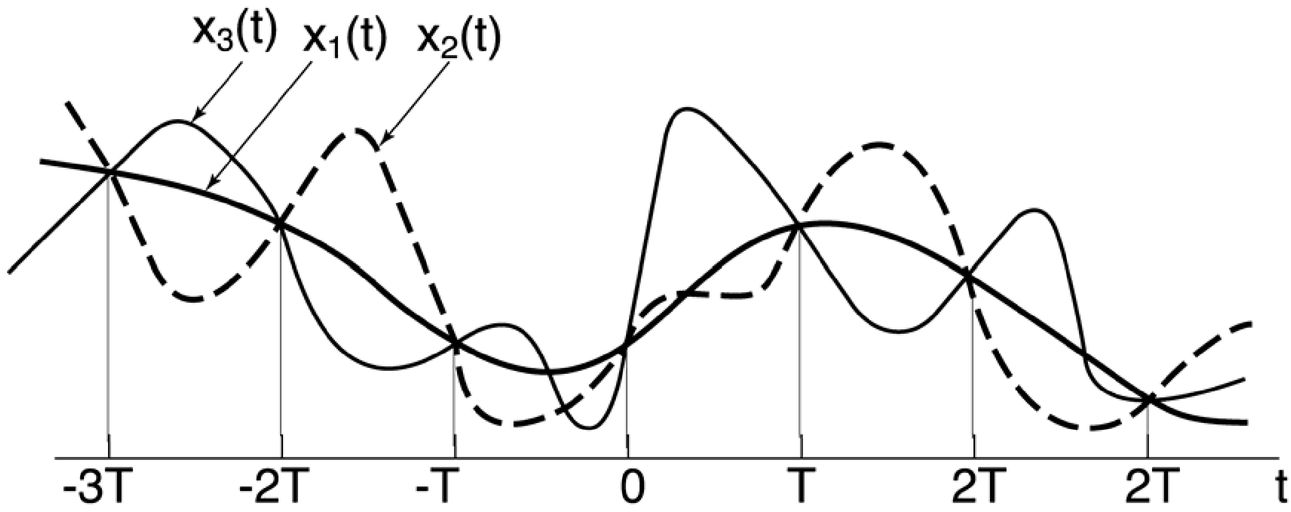
如果零阶保持所给出的粗糙内插不满意，可以通过选择其他更为平滑的内插手段，如一阶保持。





由抽样信号重建连续信号

Q: 下图中的信号是否都可以通过离散采样再理想还原？



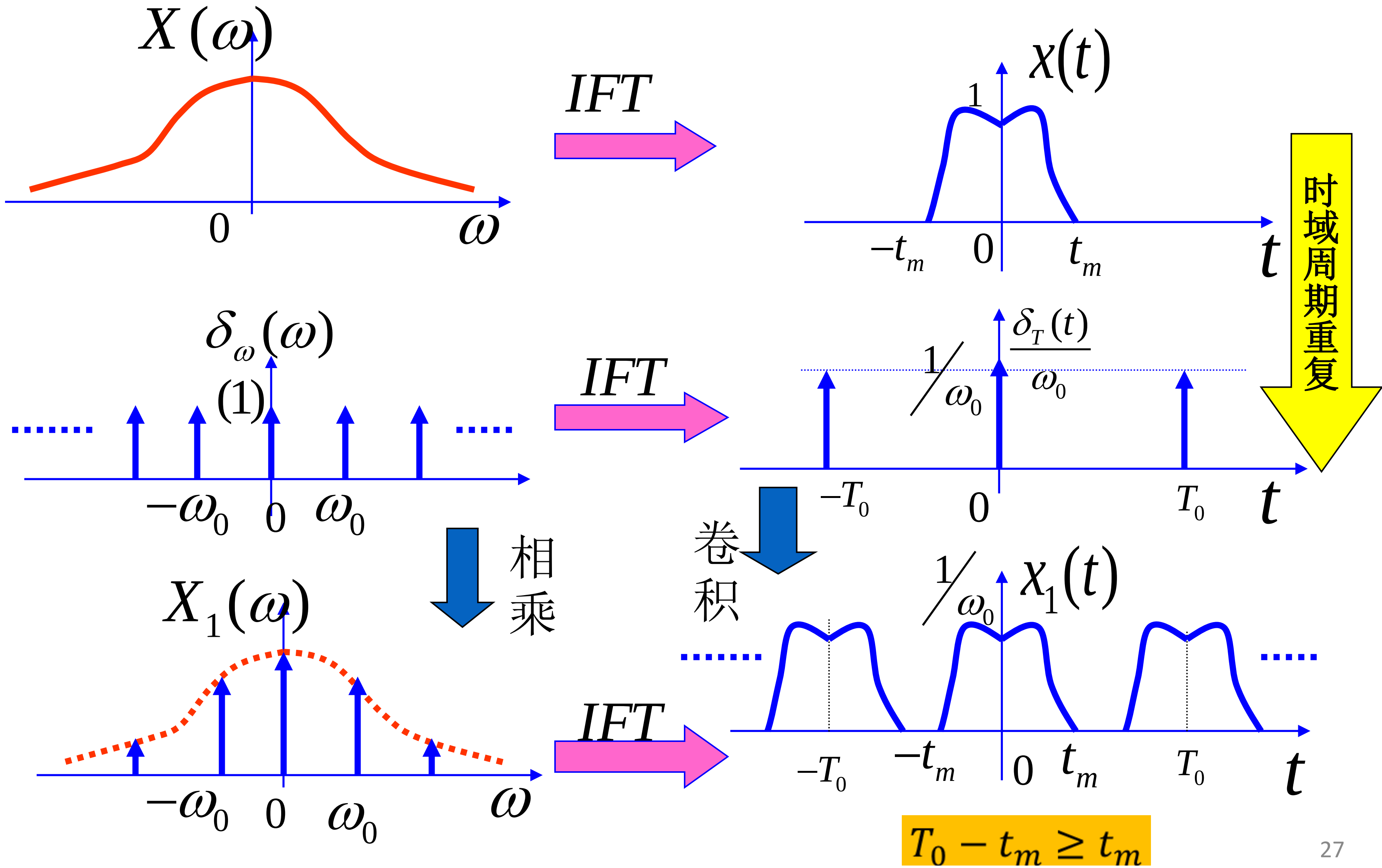
- 对于非带限信号，或频谱在高频段衰减较慢的信号，可根据实际情况采用抗混叠滤波器将不需要或不重要的高频成分去除，再进行抽样和数据处理

1.3 频域采样定理

对于一个长度为（$-t_m$ t_m）的时限信号$x(t)$，为了能够从频域样本集合完全恢复原信号的频谱，其频域的采样间隔必须满足

$$\boxed{\omega_0 \le \frac{\pi}{t_m}}$$

频域抽样后的时间函数



$X(\omega)$
0
ω
IFT
$x(t)$
1
$-t_m$
0
t_m
t
时域周期重复
$\delta_\omega(\omega)$
(1)
$-\omega_0$
0
ω_0
IFT
$\frac{\delta_T(t)}{\omega_0}$
$1/\omega_0$
$-T_0$
0
T_0
t
相乘
卷积
$X_1(\omega)$
$-\omega_0$
0
ω_0
ω
IFT
$1/\omega_0$
$x_1(t)$
$-T_0$
$-t_m$
0
t_m
T_0
t
$T_0 - t_m \geq t_m$

$$X(\omega)$$

$$X_1(\omega) = X(\omega)\delta_\omega(\omega)$$

$$\delta_\omega(\omega) = \sum_{n=-\omega}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

IFT

IFT

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0)$$

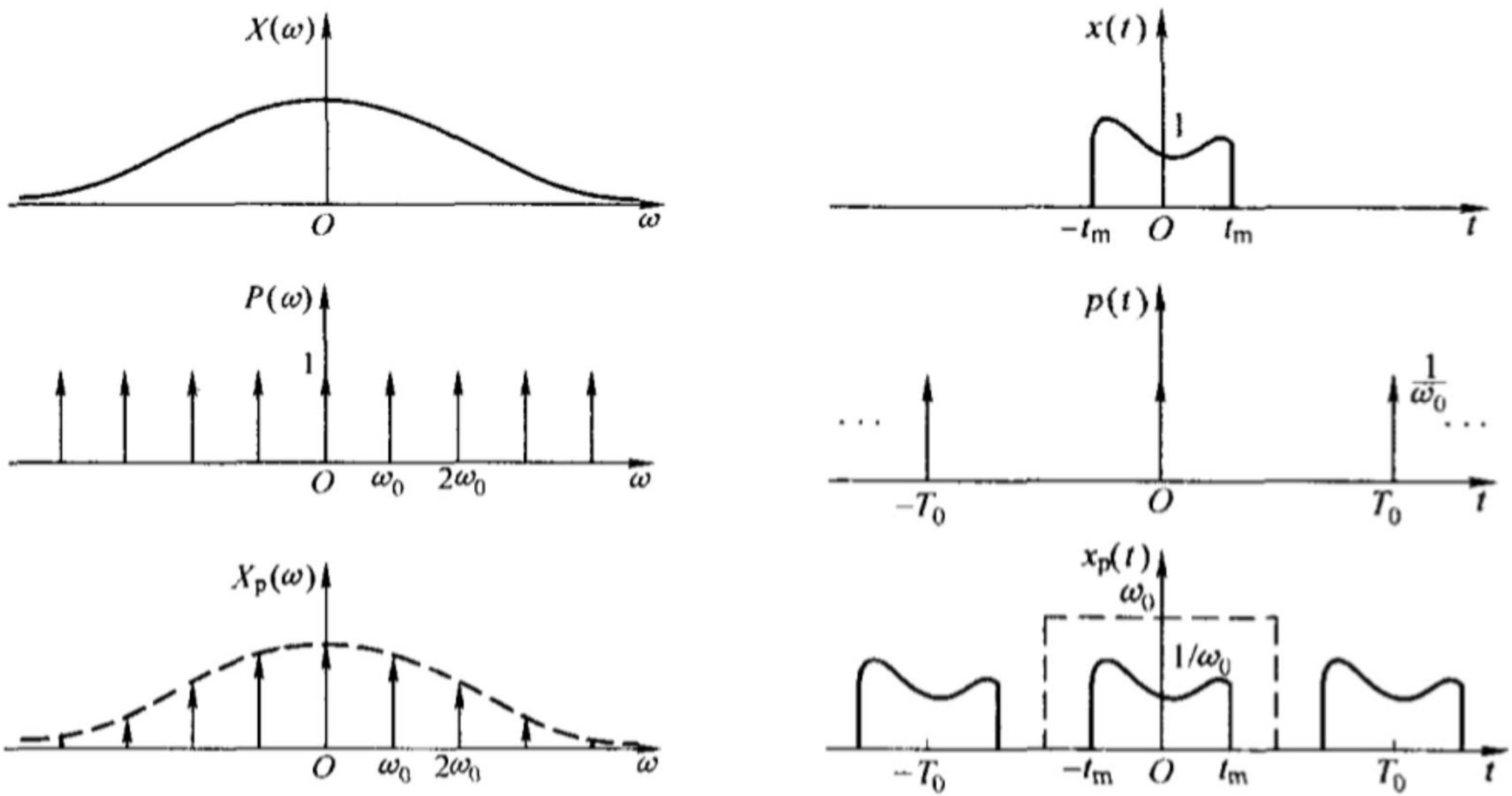
IFT

$$x(t)$$

$$x_1(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_0}\delta_T(t)$$

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

信号频谱的恢复



■为恢复原信号**x(t)**的连续频谱**X(ω)**，可以将其周期延拓的信号**$x_p(t)$**乘上时域窗函数**g(t)**：

$$g(t) = \begin{cases} w_0 & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

信号频谱的恢复

频域卷积定理

$$x(t) = x_p(t) \cdot g(t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_p(\omega) * G(\omega)$$

代入

$$g(t) = \begin{cases} w_0 & |t| \le \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$G(\omega) = 2\pi S_a\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) Sa\left[t_m(\omega - k\omega_0)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) \frac{\sin t_m(\omega - k\omega_0)}{t_m(\omega - k\omega_0)}$$

1. 4 离散信号的描述

- 单位脉冲序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 斜变序列
- 实指数序列
- 正弦型序列
- 复指数序列
- 任意离散序列

离散信号的描述-序列的表示方法

- **集合表示法**：

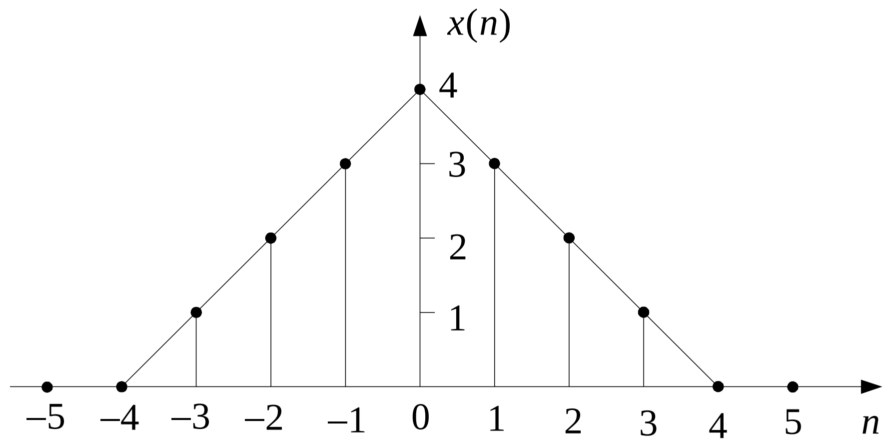
{x(n)}={……, 0， 1， 2， 3, 4， 3， 2， 1， 0， ……}

n=0

*n*值规定为自左向右逐一递增

- **公式表示法**：$x(n)=4-|n|, \quad |n|\le 3$

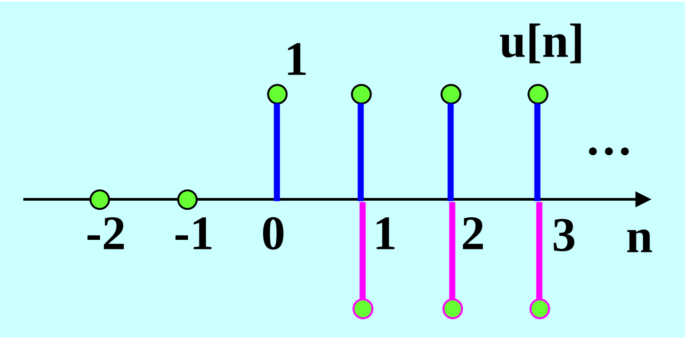
- **图形表示法**：



离散时间信号—单位阶跃序列u[n]

一、单位阶跃序列u[n]

$$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geq 0\end{cases}$$



$-u[n-1]$

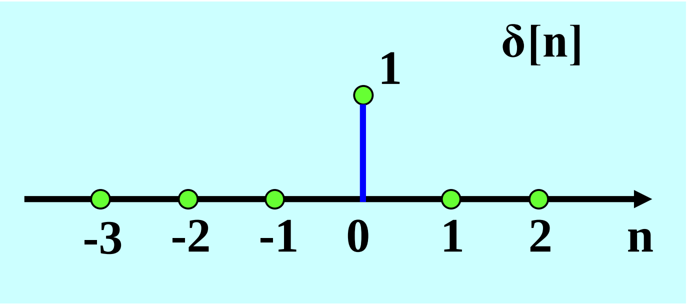
比较：离散时间单位阶跃序列x[n]在n=0时，u[0]=1

连续时间单位阶跃信号x(t)在t=0处无定义

离散时间信号—单位脉冲序列δ[n]

二、单位脉冲序列δ[n]

$$\delta[n]=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$



注意： δ[n]在n=0时有确切的数值，而δ(t)在t=0时无确切的值

单位阶跃序列u[n]与单位脉冲序列δ[n]的关系

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

单位阶跃序列的一次差分

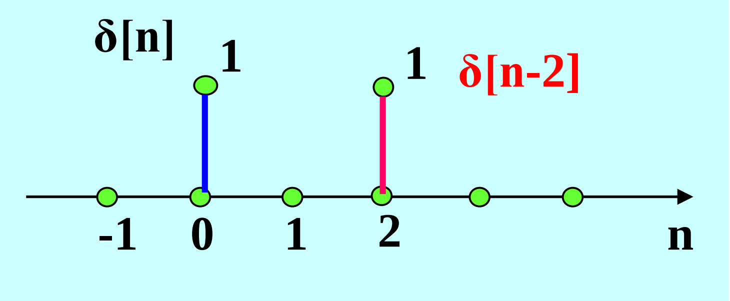
$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

单位样本序列的求和

离散时间信号—单位脉冲序列δ[n]

性质：

*1 移位的单位脉冲



*2 乘积特性

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

取样性质—请自己证明

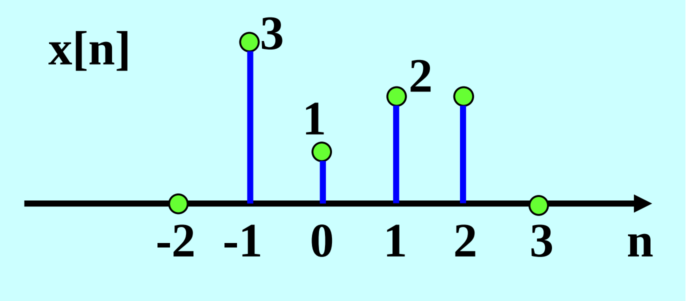
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$$

*3 偶函数

$$\delta[n]=\delta[-n]$$

*4 任意序列可以利用单位脉冲序列及移位单位脉冲序列的线性加权和表示

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

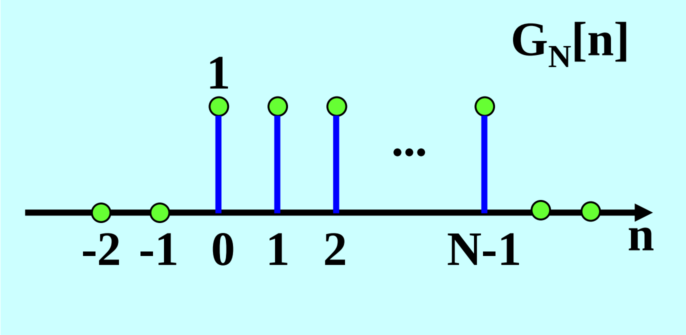


$$x[n]=3\delta[n+1]+\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]$$

矩形序列GN[n]与单位斜坡序列r[n]

三、矩形序列$G_N[n]$（窗函数）

$$G_N[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & n<0, n\ge N\end{cases}$$



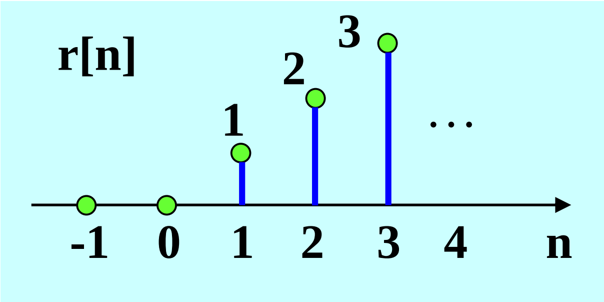
矩形序列$G_N[n]$可以用阶跃序列和脉冲序列分别表示

$$G_N[n]=u[n]-u[n-N]$$

令k=n-m

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]-\sum_{k=-\infty}^{n-N}\delta[k]=\sum_{k=n-N+1}^{n}\delta[k]=\sum_{m=N-1}^{0}\delta[n-m]=\sum_{m=0}^{N-1}\delta[n-m]$$

四、斜坡序列r[n]



$$r[n]=nu[n]=\sum_{k=0}^{\infty}k\delta[n-k]$$

周期复指数信号与正弦信号序列（1）

$x[n]=ce^{\beta n}$ 中β为纯虚数 $\beta=j\omega_0$ 纯虚指数序列 $x[n]=ce^{j\omega_0 n}$

回顾重要的公式——欧拉公式

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$$

$$\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$\sin\omega_0 n=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}\right)$$

考虑重要的序列——正弦序列

$$x[n]=A\cos\left(\omega_0 n+\varphi\right)$$

n—无量纲

$\boldsymbol{\omega_0}$—量纲为弧度(rad/秒)

用复指数序列表示

$$x[n]=A\cos\left(\omega_0 n+\varphi\right)=\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\varphi)}+\frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\varphi)}$$

$$=A\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega_0 n+\varphi)}\right\}$$

周期复指数信号与正弦信号序列（2）

例　确定下列信号是否周期的，若是，确定其基波周期。

$(1)\ x[n]=\cos(2\pi n/12);$　$(2)\ x[n]=\cos(8\pi n/31);$　$(3)\ x[n]=\cos(n/6)$

解：

$(1)\ \omega_0=\frac{2\pi}{12}\Rightarrow$　$N=m\cdot\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{12}}=12m$　若 m 取1,则 N=12

$(2)\omega_0=\frac{8\pi}{31}\Rightarrow$　$N=m\cdot\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}}=m\cdot\frac{31}{4}$　m 取4, N=31

$(3)\omega_0=\frac{1}{6}\Rightarrow$　$N=m\cdot\frac{2\pi}{\frac{1}{6}}=12m\pi$　找不到 $m\in Z$ 使 $N\in Z$

故该信号是非周期的

* 连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$ 是周期的，基波周期 $T_0=2\pi/\omega_0$ 对任何 ω_0 都是周期的；

离散信号 $e^{j\omega_0 n}$ 不一定是周期信号，取决于 ω_0

周期复指数信号与正弦信号序列（3）

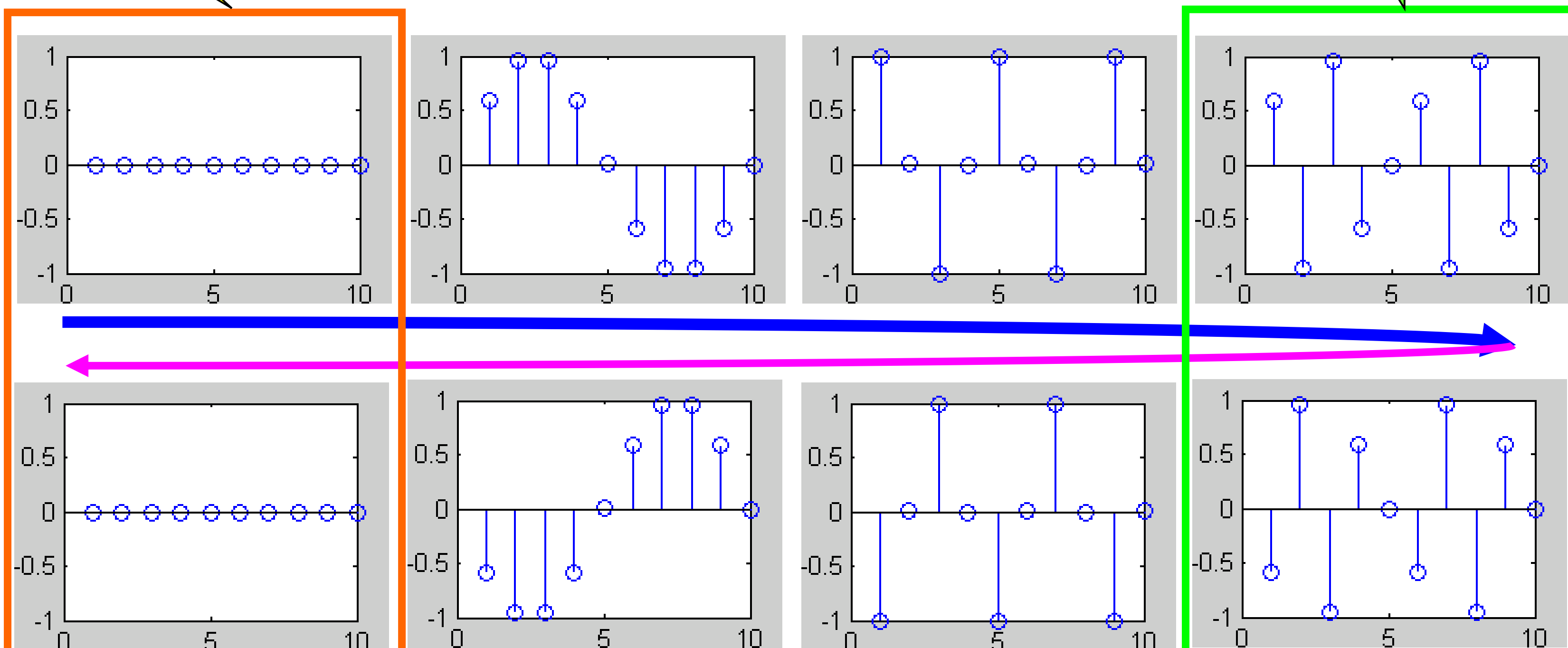
1）振荡频率不随ω_0的增大而增大；2）频率相差2π整数倍的信号相同

低频段
(π的偶数倍)

$$e^{j(\omega_0+2k\pi)n}=e^{j\omega_0 n}e^{j2k\pi n}=e^{j\omega_0 n}$$

高频段
(π的奇数倍)

$$x(n)=\sin(\omega_0 n) \qquad \omega_0=0,0.2\pi,0.5\pi,0.8\pi,1.2\pi,1.5\pi,1.8\pi,2\pi$$



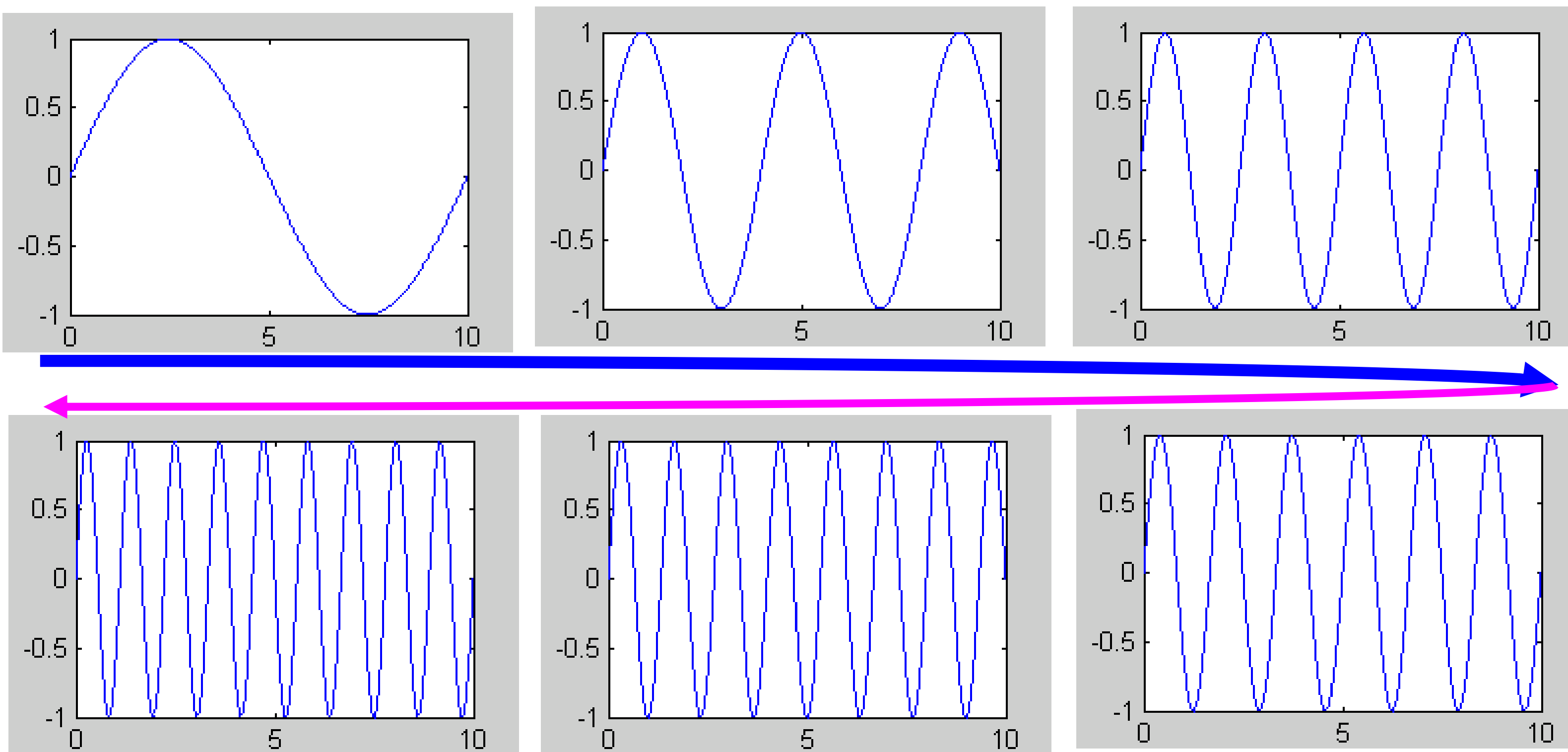
离散信号频域具有周期性，周期$\omega=2\pi$。

周期复指数信号与正弦信号序列（4）

比较：连续信号 $e^{j\omega_0 t}$

1）不同的ω_0表示不同的连续信号；2）ω_0 越大，信号的振荡频率越高

$$x(t)=\sin(\omega_0 t), \qquad \omega_0=0.2\pi,0.5\pi,0.8\pi,1.2\pi,1.5\pi,1.8\pi$$



周期复指数信号与正弦信号序列（5）

连续信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和离散信号 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

连续信号 $e^{j\omega_0 t}$	离散信号 $e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同，信号不同	频率相差2π的整数倍，信号相同
对任何ω_0 值都是周期的	仅当$\omega_0=2\pi m/N$时才是周期的。N>0和m为整数
基波频率为ω_0	基波频率为ω_0/m
基波周期$\omega_0=0$时无定义， $\omega_0\neq 0$时为$2\pi/\omega_0$	基波周期$\omega_0=0$时无定义， $\omega_0\neq 0$时为$m(2\pi/\omega_0)$

离散复指数信号与正弦信号——复指数序列集

具有谐波关系的信号集 $\varphi_k[n]=\left\{e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}\right\} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

连续时间复指数信号集合中的信号 $e^{jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t}$ 对应不同的 **k** 是不同的信号

离散时间复指数信号集合中的信号 $e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$ 仅有**N**个互不相同的复指数序列（即**N**个谐波信号不相关）

$$\because \qquad \varphi_{k+N}[n]=e^{j(k+N)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}e^{j2\pi n}=\varphi_k[n]$$

$\varphi_0[n]=1$ $\qquad \varphi_1[n]=e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ $\qquad \varphi_2[n]=e^{j\frac{4\pi}{N}n}$ $\quad \cdots$ $\qquad \varphi_{N-1}[n]=e^{j2\pi\frac{N-1}{N}n}$

离散时间复指数信号与正弦信号:小结

定义： $x[n]=e^{j\omega_o n}$, $x[n]=A\cos(\omega_o n+\theta)$

特点:

① 不一定是周期信号

② $\omega_0\uparrow \not\Rightarrow$ 振荡$\uparrow$

注意与连续时间复指数信号的区别！

当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是有理数时，信号是周期的，$N_0=m(\frac{2\pi}{\omega_0})$ **N_0>0和m为整数**

基波频率：ω_0/m

$y[n]=x_1[n]+x_2[n]+x_3[n]+\cdots$ **x_i[n]—正弦信号序列**

周期 N_0 N_1 N_2 N_3

$N_0=?$ **N_0=LCM(N_1, N_2 , N_3)**

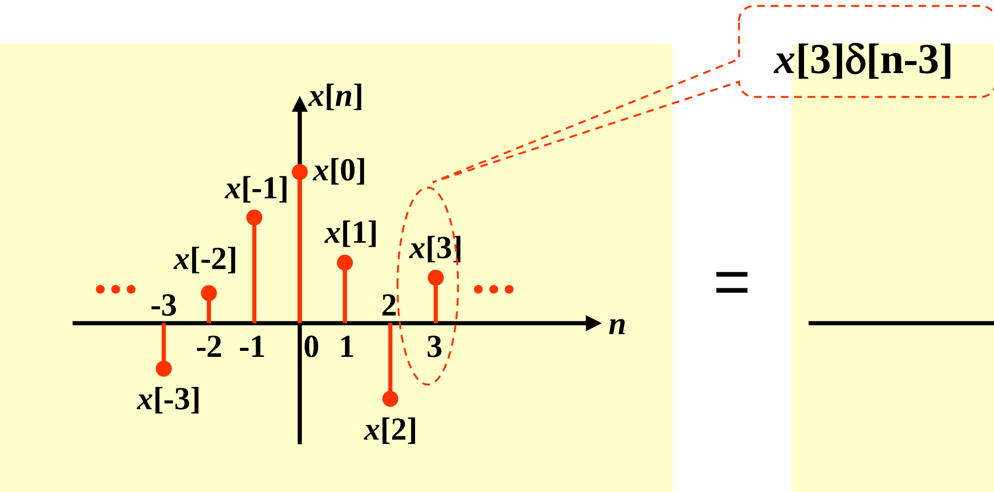
任意离散序列

➢离散时间信号分解为一组加权并移位的单位脉冲函数δ[n]的叠加的数学表达式

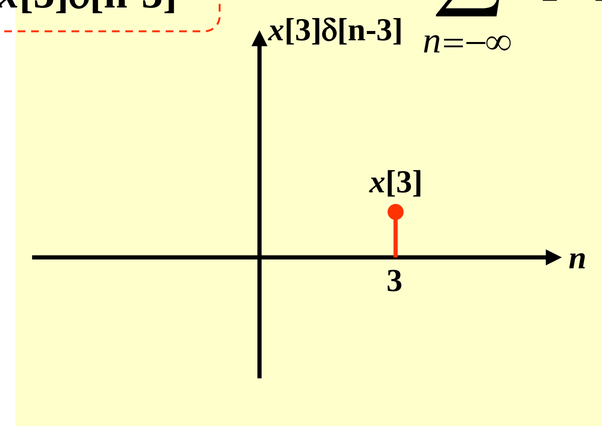
$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$$

取样性质



=



+ …

$$x[n]=\cdots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\cdots=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

—个任意离散信号可用δ[*n*]的加权及移位后的叠加来表示，

即δ[*n*]可作为前面所说的基本信号$x_1[n]$

1.5 离散信号的时域运算

- 平移、翻转
- 和、积
- 累加
- 差分运算
- 序列的时间尺度（比例）变换
- 卷积和
- 两序列相关运算

1、平移和翻转

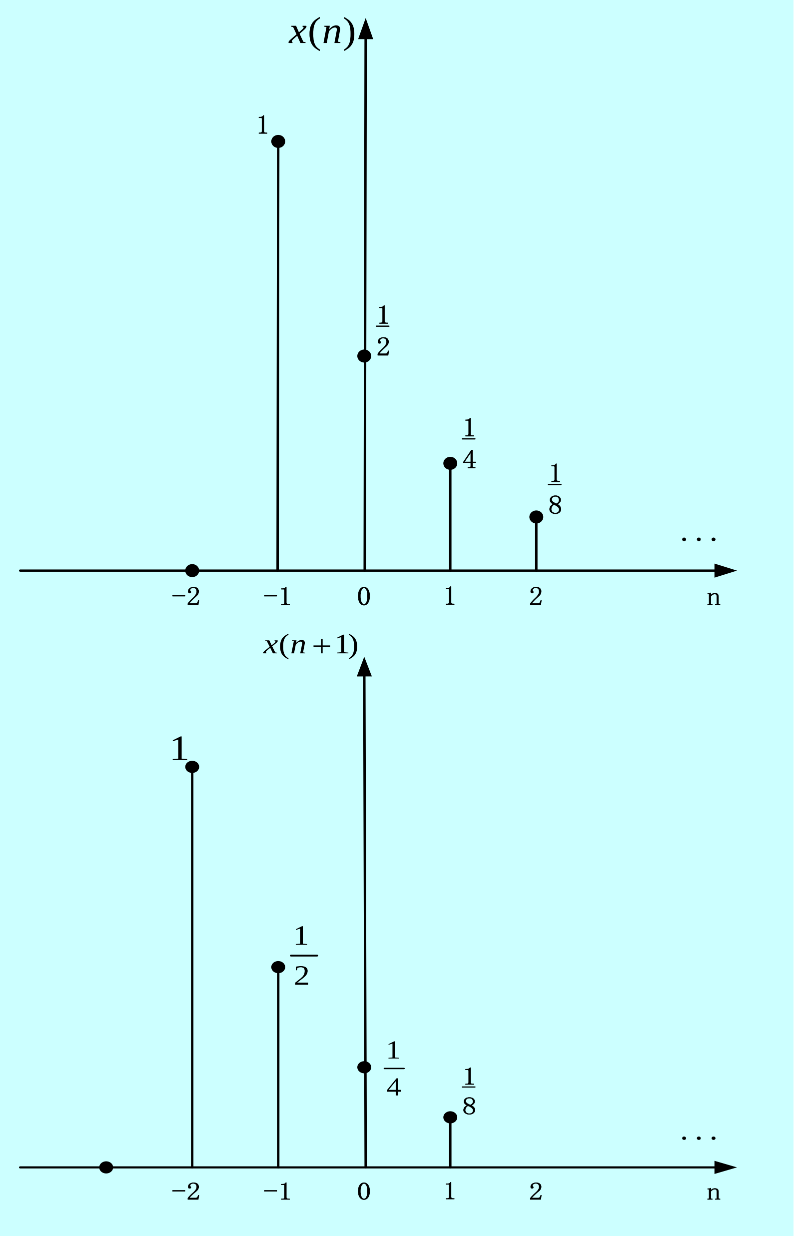
- 设某一序列为$x(n)$，当m为正时，则$x(n-m)$是指序列$x(n)$逐项依次延时（右移）m位而给出的一个新序列，而$x(n+m)$则指依次超前（左移）m位。m为负时，则相反
- 如果序列为x(-n)，则是以n=0的纵轴为对称轴将序列x(n)加以翻转

例1：已知x(n)，求x(n+1)

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n}, & n\geq -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

- 解：

$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n+1}, & n+1\geq -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$



2、和、积

- 两序列的和（积）是指同序号（n）的序列值逐项对应相加（相乘）而构成一个新的序列，表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

$$z(n) = x(n) \bullet y(n)$$

3、累加

- 设某序列为x(n)，则x(n)的累加序列y(n)定义为

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

它表示在某一个n_0上的值等于这一个n_0上的x(n_0)值以及n_0以前的所有n上的值之和。

4、差分运算

- 前向差分 $$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

- 后向差分 $$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

- 由此得出 $$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

5、序列的时间尺度（比例）变换

- 对某序列x(n)，其时间尺度变换序列为x(mn)或x(n/m)，其中*m*为正整数
- 以m=2为例来说明。 x(2n)不是x(n)序列简单地在时间轴上按比例增一倍，而是以低一倍的抽样频率从x(n)中每隔2点取1点，如果x(n)是连续时间信号x(t)的抽样，则相当于将x(n)的抽样间隔从*T*增加到*2T*，即，

  若 $$x(n) = x(t)\big|_{t=nT}$$

  则 $$x(2n) = x(t)\big|_{t=n2T}$$

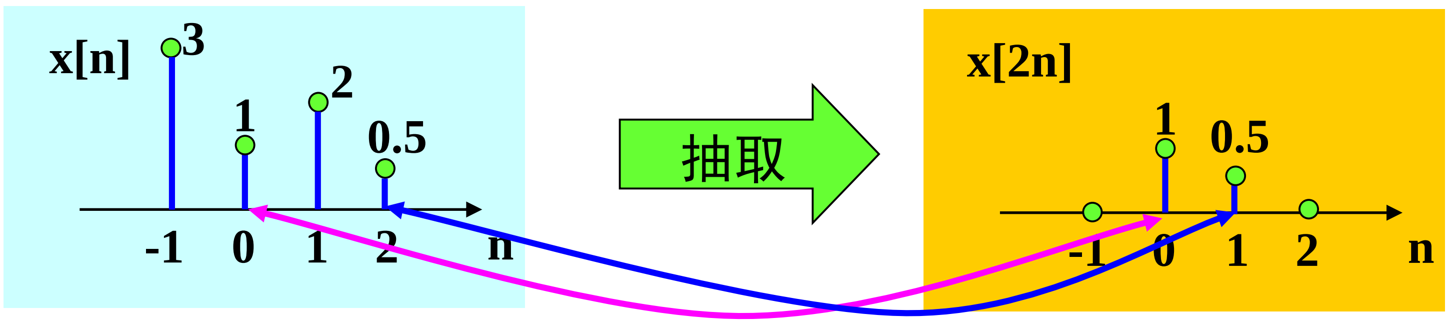
- 把这种运算称为抽取，即x(2n)是x(n)的抽取序列

5、序列的时间尺度变换

离散时间序列的尺度变换:是将原离散序列**样本个数减少或增加**（因为自变量只能是整数）。

- **信号的抽取(decimation):**　**f[k] → f[Mk] (M为正整数)——在原序列中每隔M-1个点抽取一点重新依次排序所构成的信号。**

例如:



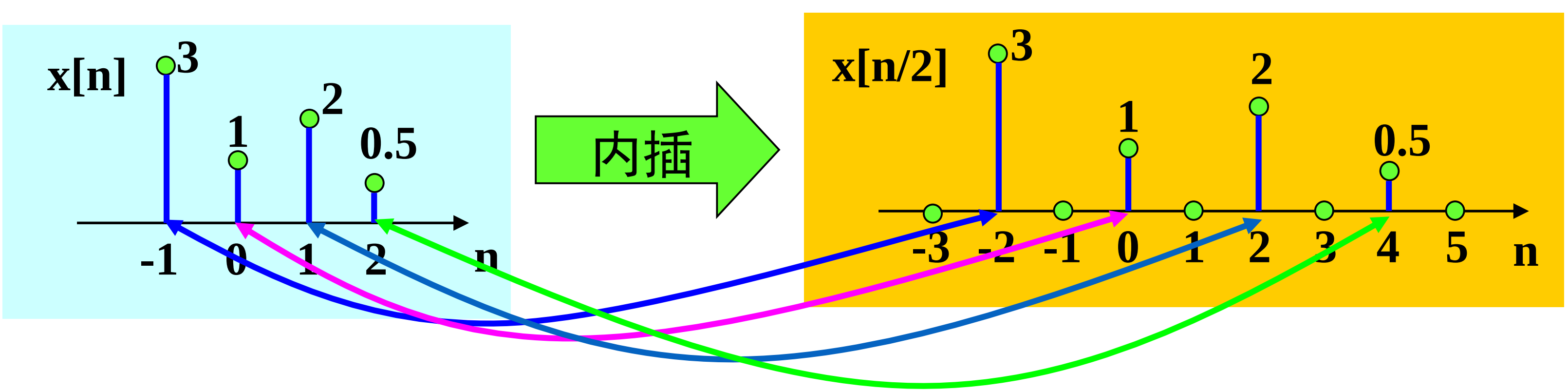
序列长度缩短

5、序列的时间尺度变换

➢ **信号的内插(interpolation):** 在**f[k]**序列中相邻两序号间插入**M-1**个零点值构成新序列。

$$f\left[k/M\right]=\begin{cases} f[k/M] & k=mM \\ 0 & else \end{cases}$$

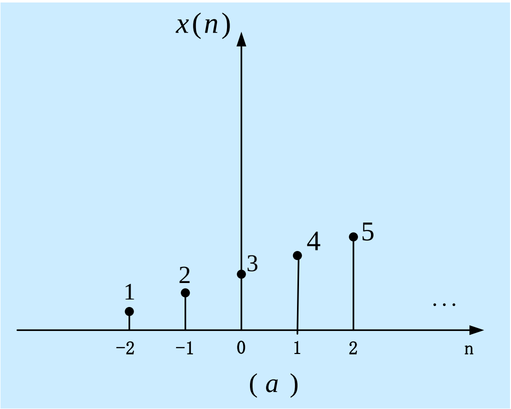
例如：



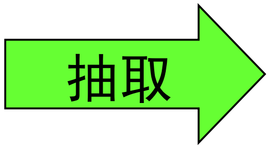
序列长度加长

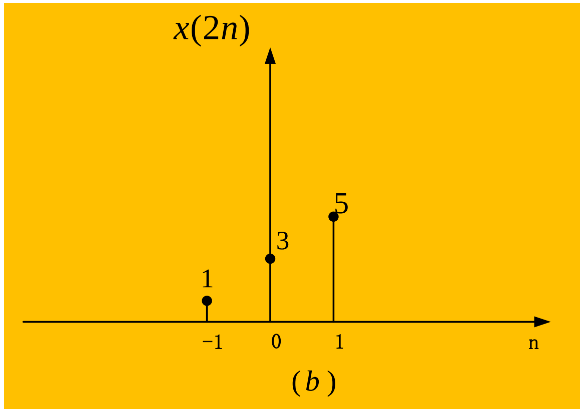
5、序列的时间尺度变换

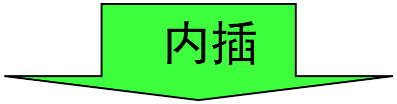
例　已知x[n]如图，求x[2n]，x[n/2]。

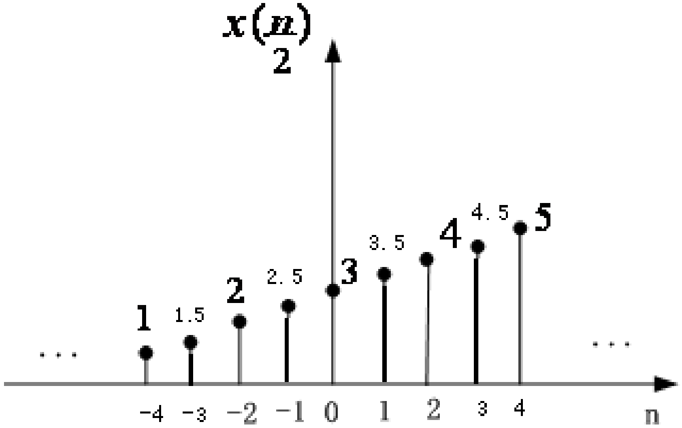


解:









6、卷积和

- 设两序列为**x(n)**和**h(n)**，则**x(n)**和**h(n)**的卷积和定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

6、卷积和

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

卷积和的图示求解

1）自变量变换及翻转

$$x[n]\longrightarrow x[k] \qquad h[n]\longrightarrow h[k]\longrightarrow h[-k]$$

2）平移：将h[-k]平移得h[n-k]

n>0时，h[-k]向右平移n； n<0时， h[-k]向左平移n

3）相乘(同一k)：x[k]h[n-k]

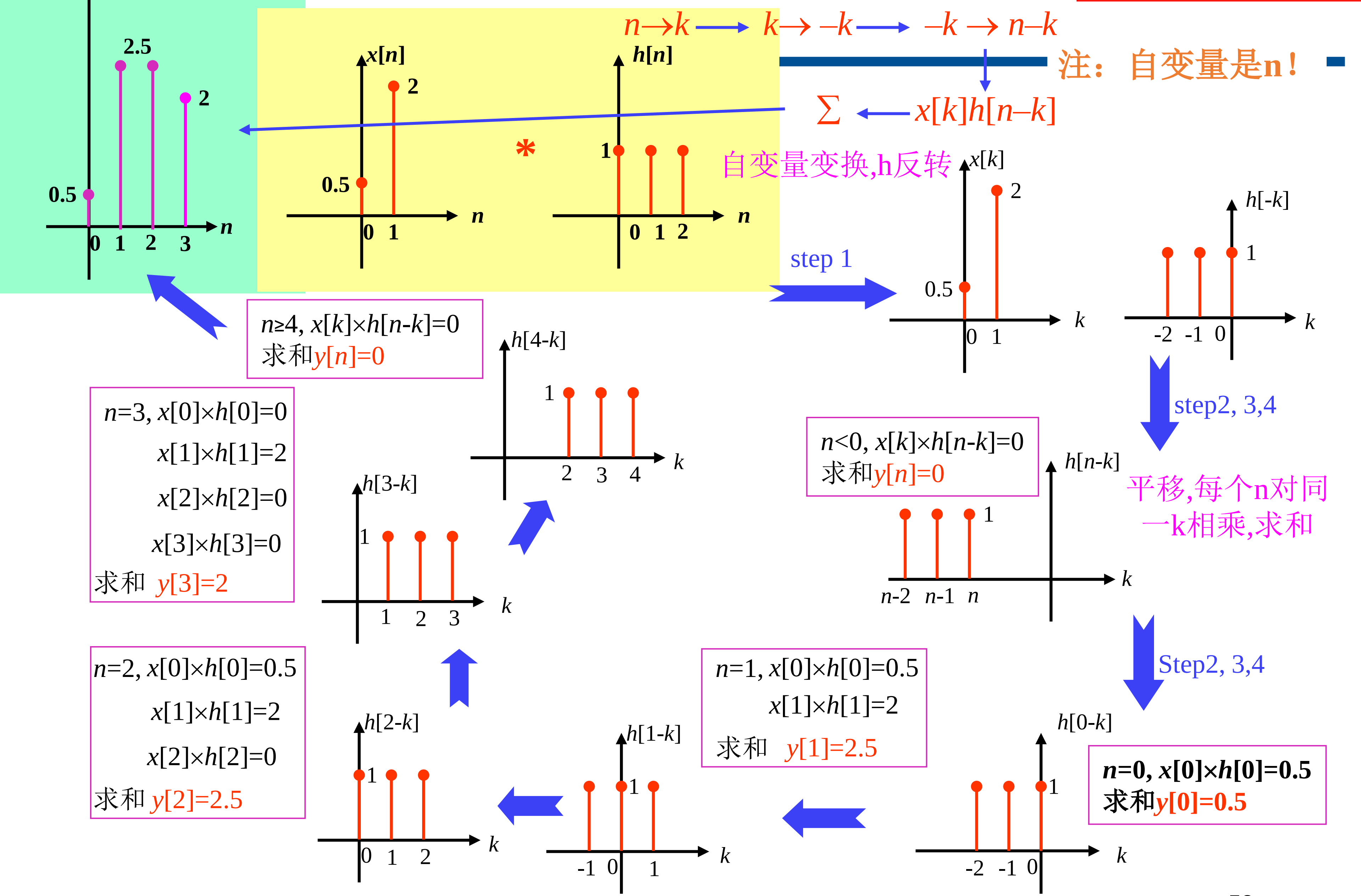
4）求和：将相乘后的x[k]h[n-k]各点相加，即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$ ——n时刻卷积和值

5）选不同的n值，重复2）~4），计算不同n时刻的卷积和。

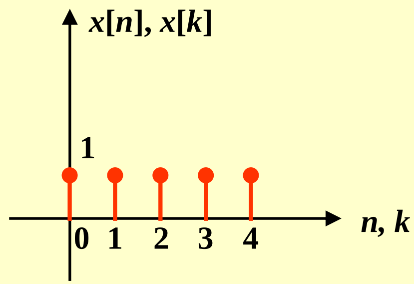
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

例 图解法求y[n]=x[n]*h[n]。

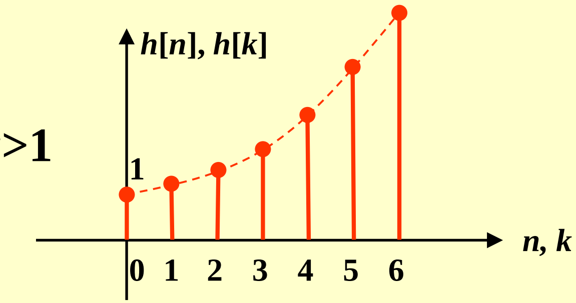


例2 $x[n]=u[n]-u[n-5]$ $h[n]=a^n\{u[n]-u[n-7]\},\ a>1$ 求 $y[n]=x[n]*h[n]$

解：

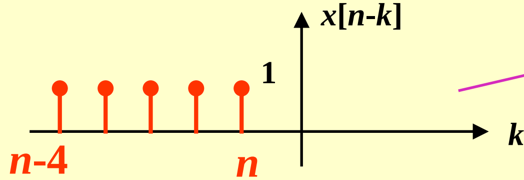


a>1



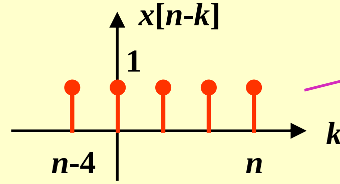
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k]$$

卷积的交换律



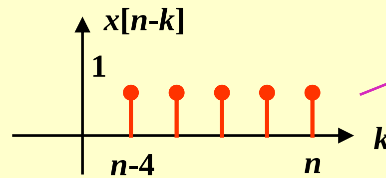
(1) $n<0$, $y[n]=0$

(5) $n>10$, $y[n]=0$



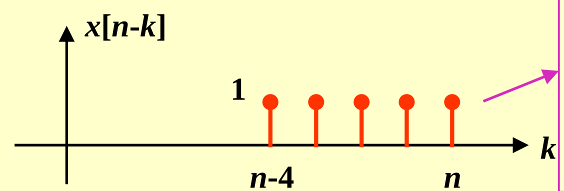
(2) $n\ge 0$, $n-4\le 0$, 即 $0\le n\le 4$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$



(3) $n-4>0$, $n\le 6$, 即 $4<n\le 6$

$$y[n]=\sum_{k=n-4}^{n}a^k=\frac{a^{n-4}-a^{n+1}}{1-a}$$



(4) $n>6$, $n-4\le 6$, 即 $6<n\le 10$

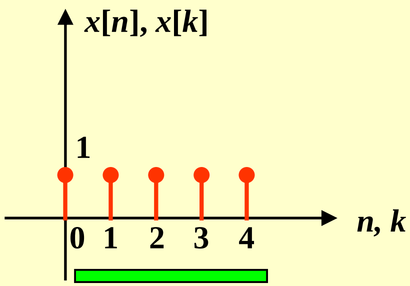
$$y[n]=\sum_{k=n-4}^{6}a^k=\frac{a^{n-4}-a^{7}}{1-a}$$

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0\le n\le 4\\ \dfrac{a^{n-4}-a^{n+1}}{1-a} & 4<n\le 6\\ \dfrac{a^{n-4}-a^{7}}{1-a} & 6<n\le 10\\ 0 & n>10\end{cases}$$

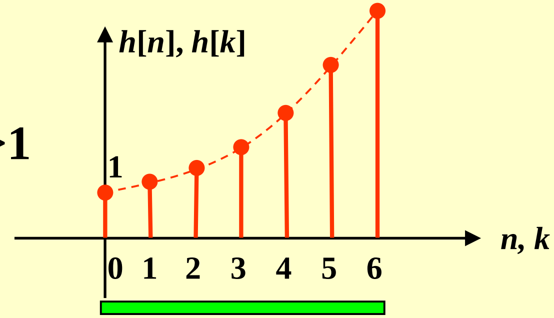
注：也可以将x[n]分解成δ[n]的5项移位线性组合，输出就变成了h[n]的移位线性组合

例2 $x[n]=u[n]-u[n-5]$ $h[n]=a^{n}\{u[n]-u[n-7]\},\ a>1$ 求 $y[n]=x[n]*h[n]$

解:



$a>1$



信号边界$x[n]$: [0, 4]

$h[n]$: [0, 6]

成对和: [0, 6, 4, 10]

排序: [0, 4, 6, 10]

区间确定——成对求和规则

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k]$$

(1) 建立$x[n]$, $h[n]$的范围边界点

(2) 构成它们的成对和(用一个信号的每个值加上另一个信号的每个值)

(3) 按上升次序排列成对和, 并舍去重复值

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0\le n\le 4\\ \dfrac{a^{n-4}-a^{n+1}}{1-a} & 4<n\le 6\\ \dfrac{a^{n-4}-a^{7}}{1-a} & 6<n\le 10\\ 0 & n>10\end{cases}$$

信号边界$x[n]$: [0, 1]

$h[n]$: [0, 2]

成对和: [0, 2, 1, 3]

排序并舍去重复值: [0,1,2,3]

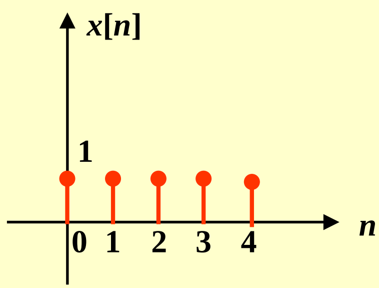
区间确定——成对求和规则

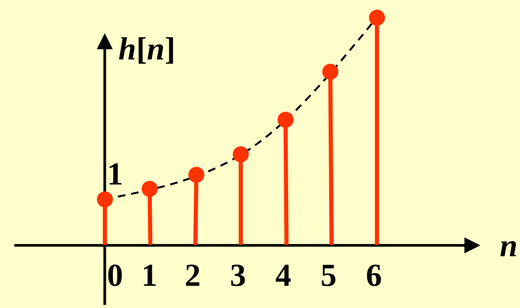
(1) 建立$x[n]$, $h[n]$的范围边界点

(2) 构成它们的成对和(用一个信号的每个值加上另一个信号的每个值)

(3) 按上升次序排列成对和, 并舍去重复值

在例2中





信号边界$x[n]$: [0, 4]

$h[n]$: [0, 6]

成对和: [0, 6, 4, 10]

排序: [0, 4, 6, 10]

信号边界：0+0=0, 4+6=10

序列长度：5+7-1=11

再例2： 信号边界$x[n]$: [0, 1]

$h[n]$: [0, 2]

成对和: [0, 2, 1, 3]

排序并舍去重复值: [0,1,2,3]

信号边界：0+0=0, 1+2=3

序列长度：2+3-1=4

另一种有限长度信号卷积规则描述

(1) $y[n]$始=$x[n]$始+$h[n]$始

(2) $y[n]$终=$x[n]$终+$h[n]$终

(3) 序列长度$L_y=L_x+L_h-1$

[例] 设 $h(n)=\{-1,2,4,0,5\},\ x(n)=\{1,3,6,1,-1,4\}$

求 $y(n)=h(n)*x(n)$

- **解**：这一方法的算式如下：
- 1 3 6 1 -1 4
- × -1 2 4 0 5
- -1 -3 -6 -1 1 -4
- 2 6 12 2 -2 8
- 4 12 24 4 -4 16
- 0 0 0 0 0 0
- \+ 5 15 30 5 -5 20
- -1 -1 4 23 32 13 34 21 -5 20
- 即

$$y(n)=\{-1,-1,4,23,32,13,34,21,-5,20\}$$

被卷行

卷行

将x[n]分解成δ[n]的5项移位线性组合，输出就变成了h[n]的移位线性组合

7、两序列相关运算

- 序列的相关运算被定义为

$$\Re_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n+m)$$

- 可以用卷积符号“ * ”来表示相关运算

$$\Re_{xy}(n) = x(n) * y(-n)$$

课后作业

- P186
  - 习题1、习题2、习题3
  - 22，23（MATLAB）
- 预习内容：
  - 离散信号的频域分析

- **实验1：信号的采样与恢复**