

原始问题的经济解释

1、原始问题是利润最大化的生产计划问题

总利润（元）

单位产品的利润（元/件）

产品产量（件）

$$\begin{aligned} \max z = & c_1 x_1 + c_2 x_2 \cdots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \cdots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \cdots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \cdots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m \\ & x_1 \quad x_2 \cdots x_n \quad x_{n+1} \quad x_{n+2} \cdots x_{n+m} \geq 0 \end{aligned}$$

消耗的资源（吨）

单位产品消耗的资源（吨/件）

剩余的资源（吨）

资源限量（吨）

对偶的经济解释

2、对偶问题是资源定价问题

The diagram illustrates the components of a linear programming model:

- Total Resource Pricing (元)**: Points to the coefficients \$b_1, b_2, \dots, b_m\$ in the objective function.
- Resource Limit (吨)**: Points to the right-hand side values \$c_1, c_2, \dots, c_n\$ in the constraints.
- Resource Estimation Price (元/吨)**: Points to the unit costs associated with each resource constraint (\$c_i\$).
- Cost per Unit (元/件)**: Points to the decision variables \$y_1, y_2, \dots, y_{m+n}\$.

$$\begin{aligned} &\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\ &s.t. \quad a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m - y_{m+1} = c_1 \\ & \qquad a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m - y_{m+2} = c_2 \\ & \qquad \vdots \hspace{10em} \vdots \\ & \qquad a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m - y_{m+n} = c_n \\ & \qquad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_{m+n} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_j = c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j = c_j - \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j = -y_{m+j}$$

差额成本(元/件)

单位产品的利润（元/件）

影子价格

对偶问题的最优解 y_1^* 、 y_2^* 、...、 y_m^* 称为m种资源的影子价格（Shadow Price）

$$z^* = w^* b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + \dots + b_i y_i^* + \dots + b_m y_m^*$$

$$y_i^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \frac{\text{最大利润的增量}}{\text{第i种资源的增量}} = \text{第i种资源的边际利润}$$

影子价格是一种机会成本，大于市场价格时，可买进对应的资源；反之，可卖出。

互补松弛关系的经济解释

$$y_i^* x_{n+i}^* = 0 \quad \begin{cases} y_i^* > 0 \Rightarrow x_{n+i}^* = 0 \\ x_{n+i}^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m$$

$$y_{m+j}^* x_j^* = 0 \quad \begin{cases} x_j^* > 0 \Rightarrow y_{m+j}^* = 0 \\ y_{m+j}^* > 0 \Rightarrow x_j^* = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

在利润最大化的生产计划中

- (1) 边际利润大于0的资源没有剩余（充分利用了资源）
- (2) 有剩余的资源，边际利润等于0（增加资源不会带来更高利润）
- (3) 安排生产的产品，机会成本等于利润（继续生产）
- (4) 机会成本大于利润，对应的产品不安排生产（不如卖出对应资源）

影子价格的性质

影子价格反映了资源在系统内部的紧缺程度：

- 影子价格越大，说明这种资源越是相对紧缺
- 影子价格越小，说明这种资源相对不紧缺
- 如果最优生产计划下某种资源有剩余，这种资源的影子价格一定等于0