第六周作业参考答案

3-1(b)、3-5、3-7、3-8(1)(3)(5)、3-9

3-1　分别采用时域方法与拉氏变换方法求解下列微分方程，假设初始条件为零。

(b) $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+4.25x=t+1$

参考答案：

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\{\frac{0.18}{s}+\frac{0.2353}{s^2}-\frac{0.18(s+\frac{1}{2})}{s^2+s+4.25}-\frac{0.16*2}{s^2+s+4.25}\}$$
$$=0.18+0.2353t-0.18e^{-0.5t}\cos 2t-0.16e^{-0.5t}\sin 2t$$

3-5　设单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)=\frac{4}{s(s+5)}$，求这个系统的单位阶跃响应。

解：系统的闭环传递函数：$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{4}{s(s+5)+4}=\frac{4}{s^2+5s+4}=\frac{4}{(s+1)(s+4)}$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{4}{(s+4)(s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+4}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1}$$

系统的单位阶跃响应：$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1+\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{4}{3}e^{-t}$

3-7 某控制系统的传递函数是 $G(s)=\frac{10(2s+1)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$，求出该系统的单位脉冲响应 g(t) 与单位阶跃响应 h(t)。

解：（1）因为单位脉冲输入为：$u(t)=\delta(t)$；其拉氏变换为：$U(s)=1$

故单位脉冲响应

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\{-\frac{2}{s+1}+2[\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}+\frac{11}{(s+2)^2+2^2}]\}$$
$$=-2e^{-t}+2e^{-2t}\cos 2t+11e^{-2t}\sin 2t$$

或：$g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\{-\frac{2}{s+1}+\frac{2s+26}{s^2+4s+8}\}$

因为　$L^{-1}[G(s)]=L^{-1}[\frac{s+\alpha_0}{(s+\alpha)^2+w^2}]=\frac{1}{w}\sqrt{w^2+(\alpha_0-\alpha)^2}\cdot e^{-\alpha t}\sin(wt+\varphi)$

此题：$\alpha_0=13,\quad w=2,\quad \alpha=2,\quad \varphi=tg^{-1}(\frac{w}{\alpha_0-\alpha})=tg^{-1}\frac{2}{11}=10.3^\circ$

故：$g(t)=-2e^{-2t}+11.18e^{-2t}\sin(2t+10.3^\circ)$

（2）因为单位阶跃输入为：$u(t)=1(t)$；其拉氏变换为：$U(s)=\frac{1}{s}$

$$H(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{10(2s+1)}{(s+1)(s^2+4s+8)}=\frac{1.25}{s}+\frac{2}{s+1}-\frac{3.25s+11}{s^2+4s+8}$$

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=1.25+2e^{-t}-3.25e^{-2t}\cos 2t-2.25e^{-2t}\sin 2t$$

或：$h(t)=L^{-1}[H(s)]=1.25+2e^{-t}-3.95e^{-2t}\sin(2t+55.3^\circ)$。

由于输入信号存在导数关系，由线性系统的性质，此题也可先求出单位阶跃响应 h(t)，然后对其求导即得单位脉冲响应 g(t)。

3-8　已知各系统的单位脉冲响应如下，试求系统的传递函数Φ(s)。

（1）$g(t)=7-5e^{-6t}$；

（3）$g(t)=\frac{k}{\omega}\sin\omega t$；

（5）$g(t)=0.02(e^{-0.5t}-e^{-0.2t})$。

解：（1）$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=L(7-5e^{-6t})=\frac{7}{s}-\frac{5}{s+6}=\frac{2s+42}{s(s+6)}$

（3）$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=L(\frac{k}{\omega}\sin\omega t)=\frac{k}{s^2+\omega^2}$

（5）$\Phi(s)=L\{0.02(e^{-0.5t}-e^{-0.2t})\}=0.02(\frac{1}{s+0.5}-\frac{1}{s+0.2})=-\frac{0.06}{(2s+1)(5s+1)}$

3-9　已知控制系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=1+0.2e^{-60t}-1.2e^{-10t};$$

试确定系统的阻尼比ζ和自然频率ω_n。

解：因为：系统的单位脉冲响应 k(t)的象函数为系统传递函数φ(s)，故可以通过对 k(t)求拉氏变换得到系统传递函数φ(s)，而 k(t)与单位阶跃响应成 D 关系：

$$k(t)=h'(t)=-12e^{-60t}+12e^{-10t}=12(e^{-10t}-e^{-60t})$$

故 $G(s)=L[k(t)]=12[\frac{1}{s+10}-\frac{1}{s+60}]=\frac{600}{ss^{2}+70s+600}=\frac{w_n^2}{s^{2}+2\xi w_n s+w_n^2}$

可见：$\omega_n=\sqrt{600}=24.5$；$\zeta=70/2\cdot 24.5=1.43$