系统的频域法分析

时域分析法给出了输入信号通过系统后的时域变化，那么其频域发生了什么变化呢？

接下来，研究系统本身与频率相关的特性！

目录

频域法分析

1、频率特性函数（频率响应函数）

- 考察线性时不变连续系统，其对于单位冲激响应为h(t)，那么对于复指数信号 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的响应为

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot e^{j\omega t}$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

线性时不变系统对复指数信号的响应仍是一个同频率的复指数信号，只是其幅值和相位发生了改变，而其改变由频率响应函数H(ω)决定。

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

频率响应函数H(w)，其实就是单位冲激响应h(t)的傅里叶变换！

线性时不变连续系统

$\delta(t)$ → 线性时不变连续系统 → h(t)

$e^{j\omega t}$ → 线性时不变连续系统 → $y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$

复指数信号的响应仍是一个同频率的复指数信号，只是其幅值和相位发生了改变，而其改变由频率响应函数H(ω)决定。

任意信号 x(t) → 线性时不变连续系统 → $y(t) = x(t) * h(t)$

那么，输出y(t)的频域特性怎么样呢？

从物理意义来讨论傅立叶变换：复指数角度

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$T_0X(n\omega_0)=\frac{2\pi X(n\omega_0)}{\omega_0}$$

$$n\omega_0\rightarrow\omega$$

- X(ω)是一个频谱密度函数的概念
- X(ω)是一个连续谱
- X(ω)包含了从零到无限高频率的所有频率分量
- 但是各频率分量的频率不成谐波关系

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$$

非周期信号是由无限多个频率从-∞到∞连续变化，幅度为X(ω)dω/2π的复指数信号组成。

频域法分析

- **对于任意信号 x(t)**

傅里叶反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$$

$$x(t)=e^{j\omega t} \Rightarrow y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$$

x(t)可以看做是多个复指数函数e^{jwt}的线性组合

x(t)的响应可以由线性得知为多个复指数函数响应的线性组合

频域法分析

- **对于任意信号 x(t)**

傅里叶反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$$

$$x(t)=e^{j\omega t} \Rightarrow y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$$

x(t)可以看做是多个复指数函数e^{jwt}的线性组合

$\Downarrow$

x(t)的响应可以由线性得知为多个复指数函数响应的线性组合

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

频域法分析

- **对于任意信号 x(t)**

傅里叶反变换

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\boxed{e^{j\omega t}}d\omega$$

利用系统的齐次性和叠加性

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

FT反变换

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

从两方面进行

信号的改变

$$|Y(\omega)|=|X(\omega)|\cdot|H(\omega)|$$

$$\varphi_y(\omega)=\varphi_x(\omega)+\varphi_h(\omega)$$

使输入信号的某些频率分量得到增强，某些频率分量被削弱或保持不变，具有滤波的特性

$$y(t)=x(t)*h(t) \quad \xleftrightarrow{\text{FT时域卷积定理}} \quad Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

1-频率响应函数H(w)，其实就是单位冲激响应h(t)的傅里叶变换！

2-频率响应函数H(w)，其实也是输出和输入信号傅里叶变换之比！

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

频率响应特性H(w)有两种求解方法

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

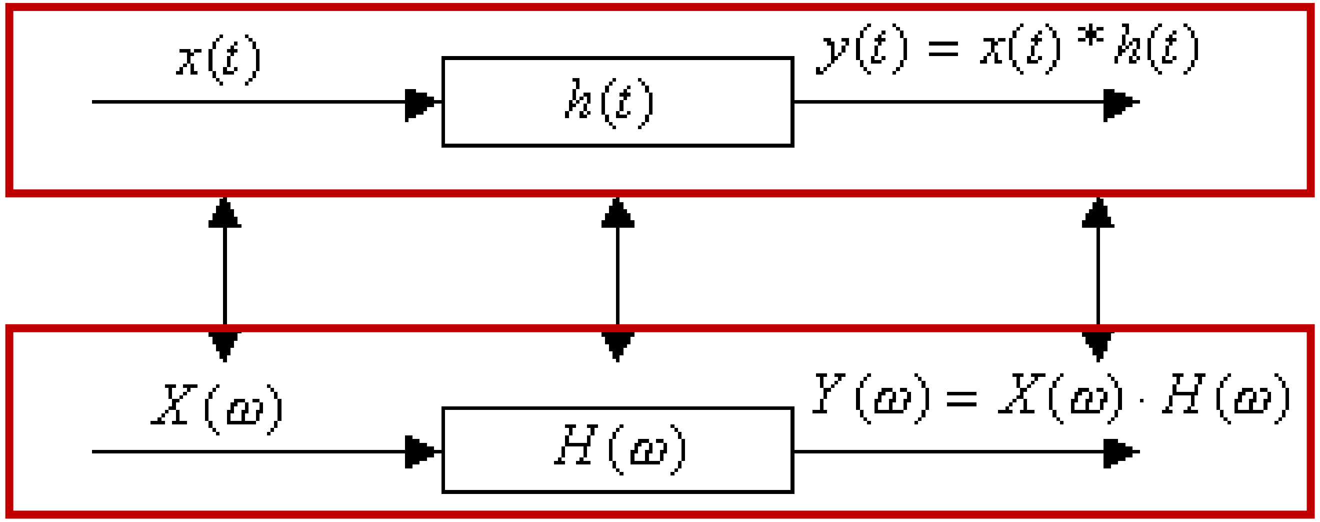
对于频率响应特性H(w)，反映了信号处理系统的幅度和相位随频率的变化规律

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \longrightarrow H(\omega)=\underbrace{|H(\omega)|}_{\text{系统的幅频特性}}e^{\underbrace{j\varphi_h(\omega)}_{\text{系统的相频特性}}}$$

频域法分析

h(t)：描述线性时不变系统在时域的响应特性和系统功能

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$



H(w)：描述线性时不变系统在频域的响应特性和系统功能

信号x(t)经过线性时不变系统后，在幅值和相位两个方面改变了原来信号的频谱结构

频域法分析

两种路线:(1)y(t)=x(t)*h(t)
(2)考虑由Y(w)->y(t)

[例1]已知描述某系统的微分方程为 $y'(t)+2y(t)=x(t)$

求系统对输入信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的响应y(t).

(1)y(t)=x(t)*h(t)

a-待定系数法，求解h(t)；

b-卷积计算，求解y(t)。

(2)考虑由Y(w)->y(t)

a-微分方程求H(w)= Y(w)/X(w);

b-求解Y(w)，反变换求y(t)

频域法分析

两种路线:(1)y(t)=x(t)*h(t)
(2)考虑由Y(w)->y(t)

[例1]已知描述某系统的微分方程为 $y'(t)+2y(t)=x(t)$

求系统对输入信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的响应y(t).

- 解：对方程两边取傅立叶变换，得 $j\omega Y(\omega)+2Y(\omega)=X(\omega)$
- 系统的频率特性函数 $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\dfrac{1}{j\omega+2}$
- 对x(t)取傅立叶变换 $X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$
- 系统响应y(t)的傅立叶变换为 $Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}\cdot\dfrac{1}{j\omega+2}=\dfrac{1}{j\omega+1}-\dfrac{1}{j\omega+2}$
- 对Y(ω)取傅立叶反变换 $y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

考虑一类特殊的频率响应函数H(w)，其幅值为固定值，相位随频率线性变化，会有什么效果呢？

2、无失真传输-直观形象的理解

- 信号无失真传输是实现信息可靠传送与交换的基本条件，它要求信号通过系统后，在时域上保持原来信号随时间变化的规律，即**信号的波形不变**，而只能是**幅度上对原信号按比例地放大或缩小，或者在时间上有一固定的延迟。**

时域上看

(1)纵向伸缩，横向不伸缩：幅值变化，频率不变

(2)横向平移或者不平移：时移变化

2、无失真传输-数学推导的理解

- 设原信号为x(t)，其频谱为X(ω)，经无失真传输后，输出信号y(t)应为

时域描述无失真处理过程 $$y(t) = Kx(t - t_0)$$

FT的时移特性和线性特性

频域描述无失真处理过程 $$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

- 无失真传输系统的频率特性函数为

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}$$

- 其幅频特性和相频特性分别为

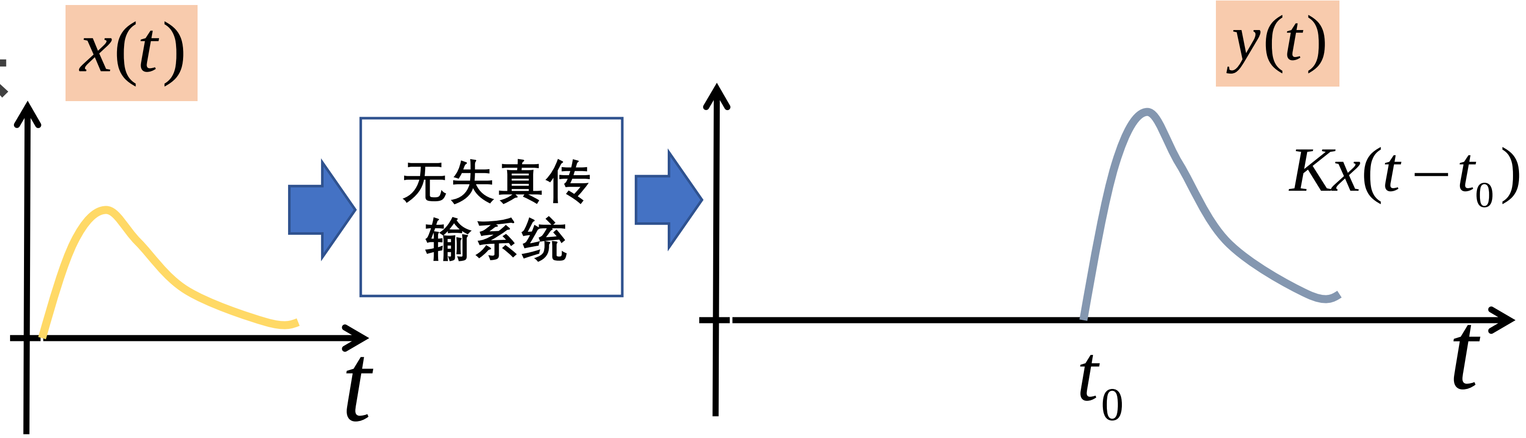
$$\left.\begin{aligned} |H(\omega)| &= K \\ \varphi_h(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned}\right\}$$

线性相位

2、无失真传输-图形的理解

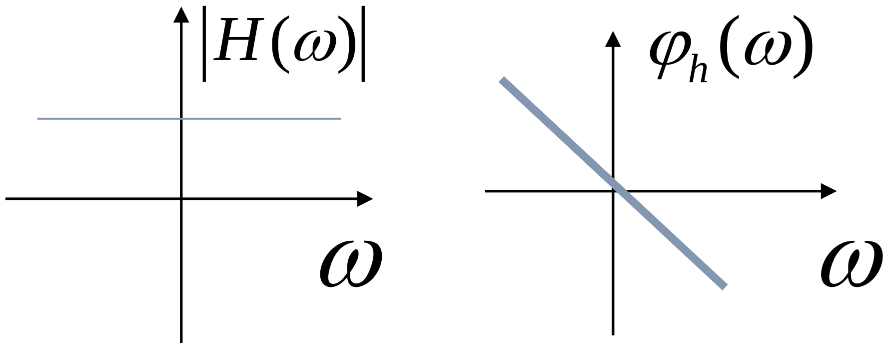
- 时域上看：信号放大、时延，波形不失真

$$y(t)=Kx(t-t_0)$$



频域上看：幅频增大k倍，相位时延t0

$$Y(\omega)=KX(\omega)e^{-j\omega t_0}$$



无失真传输的频域理解

仅是理想条件，但在实际中任何系统不可能在所有频率内具有平坦的幅频和线性相频，都是**带限信号系统**，为实现无失真传输，只要在信号占据的频率范围内，系统的频率特性满足无失真传输条件即可

- （1）系统的**幅频特性**是一个与频率无关的常数，即在**全部频带内**，系统都具有恒定的放大倍数
- （2）系统的**相频特性**与频率成线性关系。且信号通过系统的延迟时间t_0就是系统相频特性 $\varphi_h(\omega)$ 斜率的负值，即

$$t_0 = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega}$$

考虑现实中一类特殊的无失真传输系统，

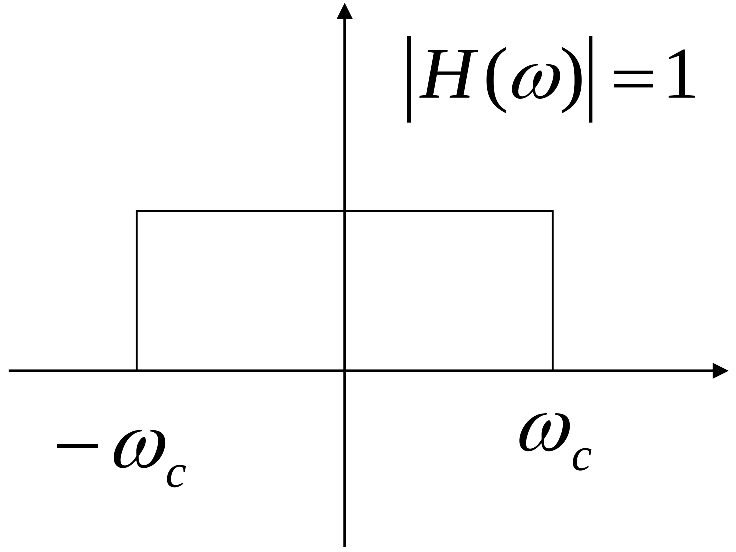
仅仅在特定的频谱范围内是无失真传输

3、理想低通滤波器

特定频带内的频率响应特性具有固定幅值和线性相位

$$H(\omega)=\begin{cases}1\bullet e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$|H(\omega)|=1$

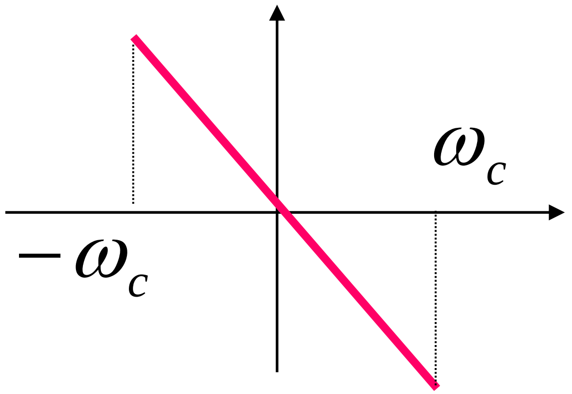


ωc称为滤波器的截止频率

$0<|\omega|<\omega_c$ **称为滤波器的通带**

$|\omega|>\omega_c$ **称为滤波器的阻带**

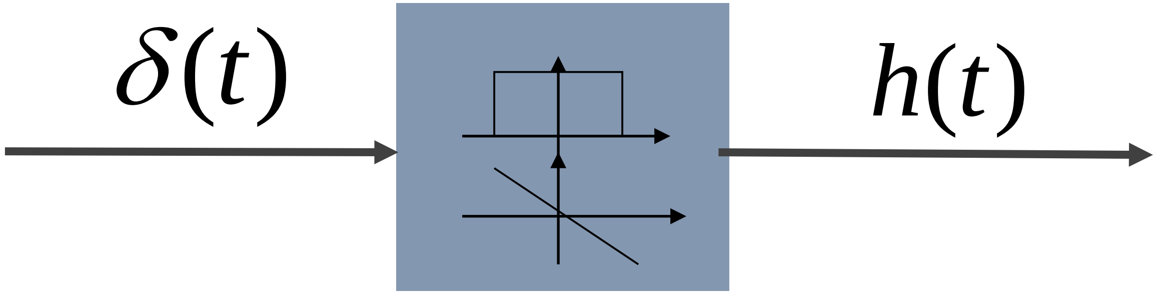
$\varphi_h(\omega)=-t_0\omega$



理想低通滤波器将通带内的信号实现无失真传输

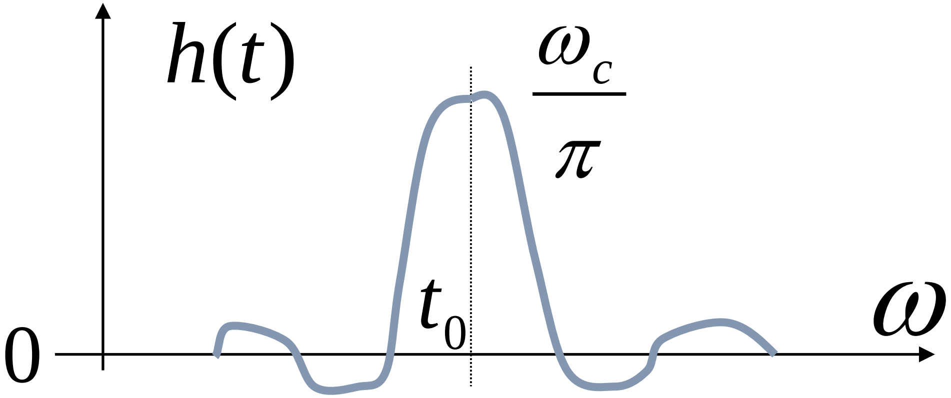
理想低通滤波器的冲激响应

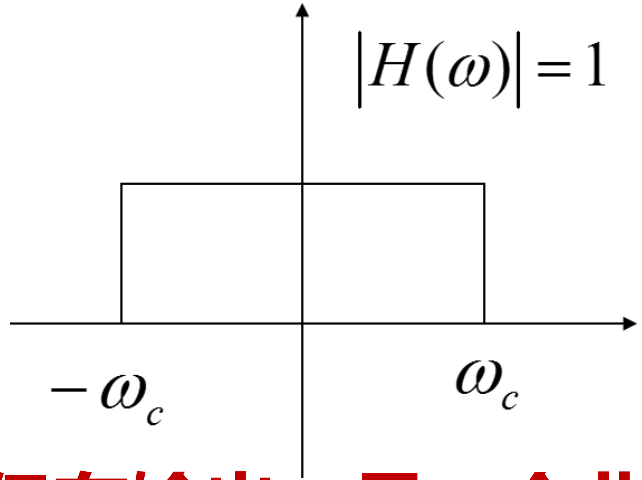
$$H(\omega)=\begin{cases}1\bullet e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$



$$h(t)=F^{-1}[H(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]$$





理想低通滤波器当t<0时，输入为零，但h(t)仍有输出，是一个非因果系统

例:理想低通滤波器的响应求解

两种路线:(1)y(t)=x(t)*h(t)
(2)考虑由Y(w)->y(t)

求信号x(t)=Sa(t)cos(2t) 通过理想低通滤波器（设通带内的放大倍数为k）后的输出响应。

- 解：求输入信号的傅立叶变换
- x(t)=Sa(t)cos(2t)

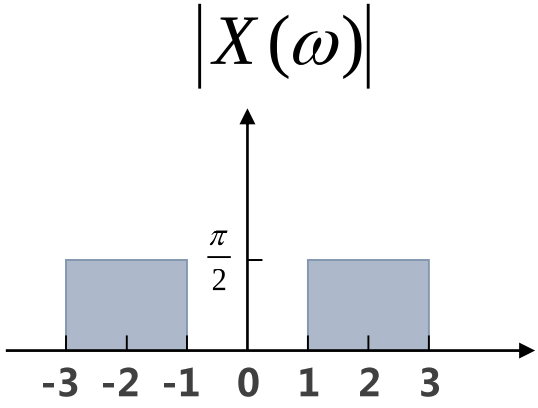
频域卷积定理

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[\pi g(\omega)*\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]]$$

$$=\frac{\pi}{2}[g(\omega)*\delta(\omega+2)+g(\omega)*\delta(\omega-2)]$$

筛选性质

$$X(\omega)=\frac{\pi}{2}[g(\omega+2)+g(\omega-2)]$$



- 滤波器频率响应函数

$$H(\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

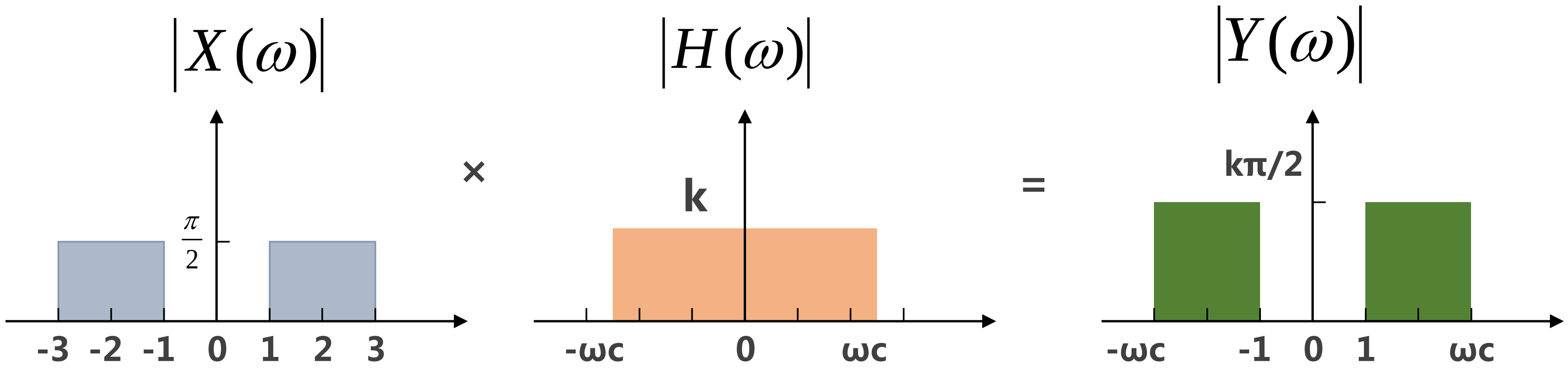
- 滤波器输出信号的频谱为

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

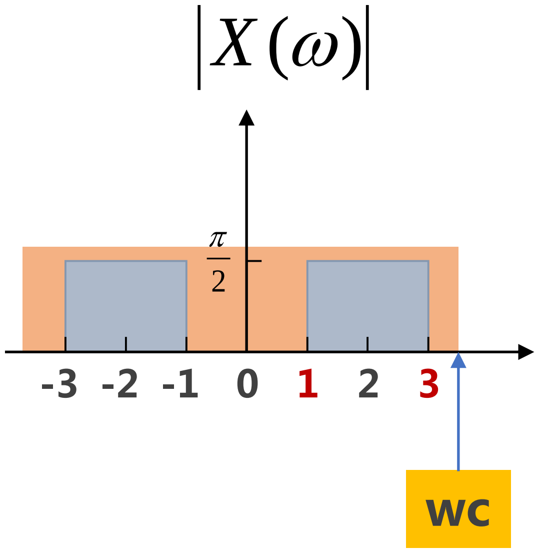
$$X(\omega)=\frac{\pi}{2}[g(\omega+2)+g(\omega-2)]$$

$$H(\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

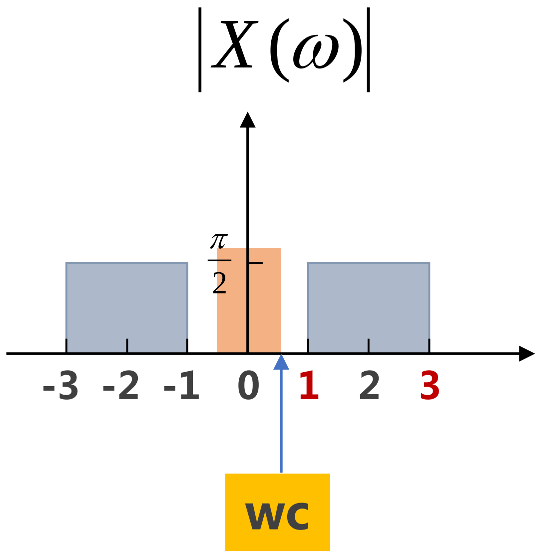
$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$



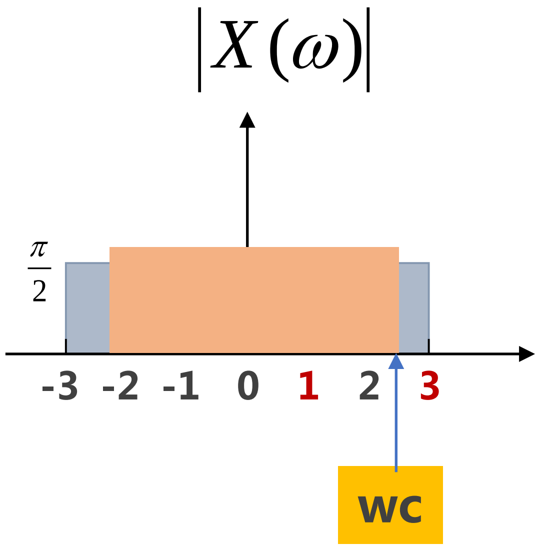
- 根据以上图示，**相乘需要避开为0的区域**，根据wc与1、3的位置关系，分三种情况讨论Y(ω)的计算



$$\omega_c > 3$$



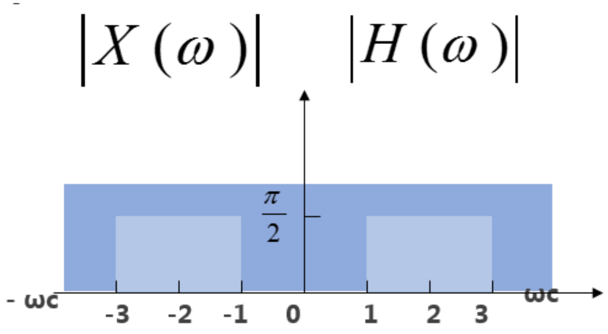
$$\omega_c < 1$$



$$1 < \omega_c < 3$$

(1) $\omega_c > 3$

输入信号的频带完全被包含在低通滤波器的通带内因此直接计算



第一种方法，频域法

$$X(\omega)=\frac{\pi}{2}[g(\omega+2)+g(\omega-2)]$$

$$H(\omega)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

$$Y(\omega)=\frac{k\pi}{2}[g(\omega+2)+g(\omega-2)]e^{-j\omega t_0}$$

$$|Y(\omega)|=k|X(\omega)|$$

$$\varphi_h(\omega)=-t_0\omega$$

$$y(t)=kx(t-t_0)=kSa(t-t_0)\cos 2(t-t_0)$$

第二种方法，概念法

$$y(t)=kx(t-t_0)=kSa(t-t_0)\cos 2(t-t_0)$$

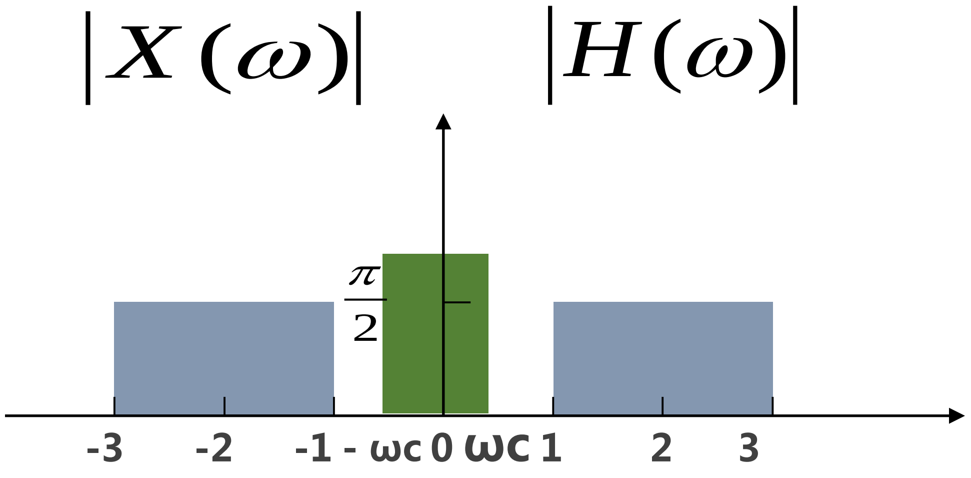
输出信号为输入信号的t_0延时的k倍

(2) $\omega_c < 1$

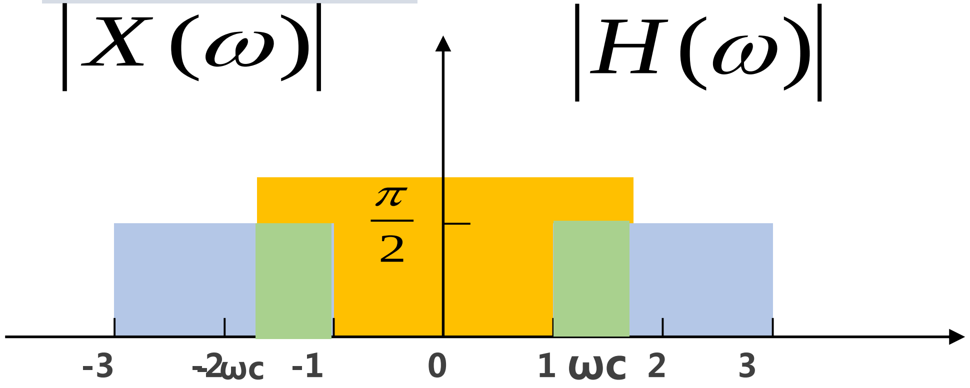
- **输入信号频带完全落在低通滤波器的通带外,则有**

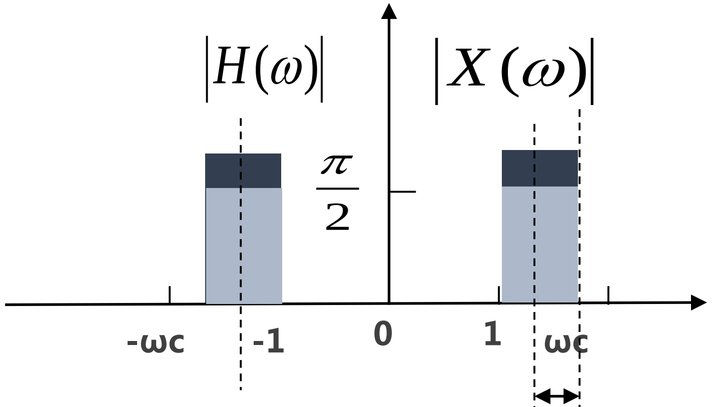
$$Y(\omega) = 0, y(t) = 0$$

- **系统无输出**



（3）$1<\omega_c<3$ · 输入信号的频带部分落在低通滤波器通带内





- （A）重叠的矩形区域是$Y_1(\omega)$，是$Y(\omega)$没考虑放大及时延的结果， $Y_1(\omega)$的表达式是以+-（wc+1）/2为中心的两个矩形

$-\frac{\omega_c+1}{2}$ $\frac{\omega_c+1}{2}$ 两个矩形的中心点位置

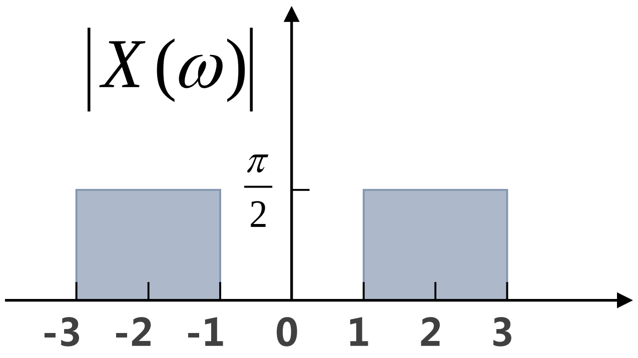
$\frac{\omega_c-1}{2}$ 两个矩形的半宽度

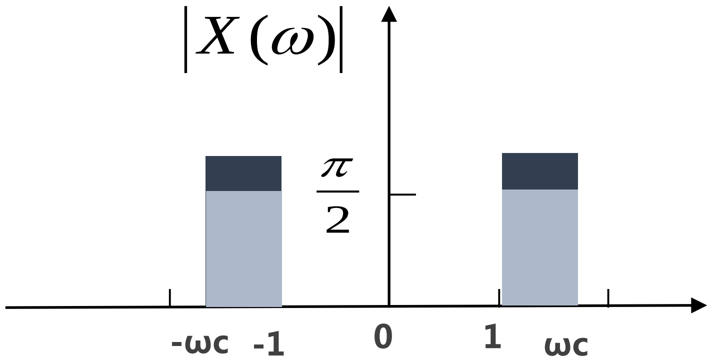
- （B）然后把$Y_1(\omega)$经过幅值**放大及时延后**，得到$Y(\omega)$

关键在于怎么求解Y1(w)的表达式！！！

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[\pi g(\omega)*\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]]$$

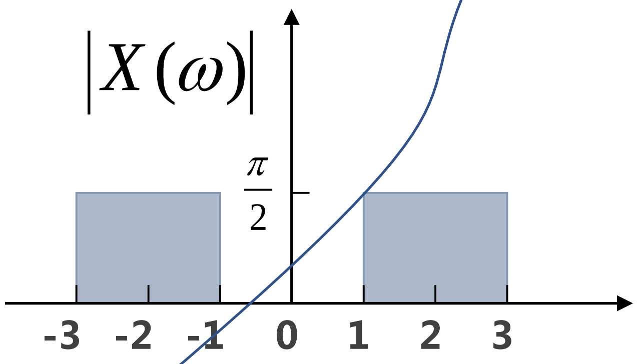
$$g(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

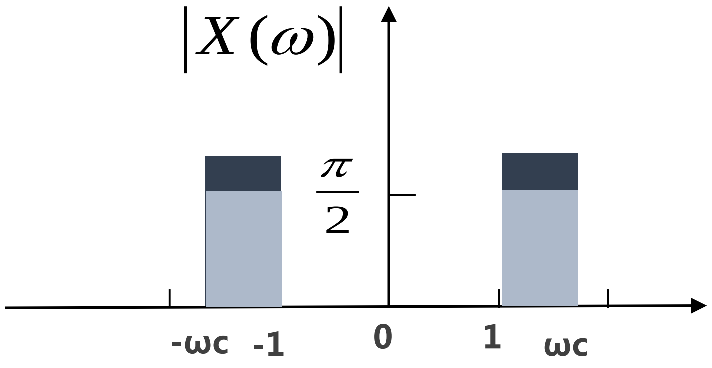




$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[\pi g(\omega)*\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]]$$

$$g(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$





1：两个矩形的半宽度

+/-2：两个矩形的中心点位置

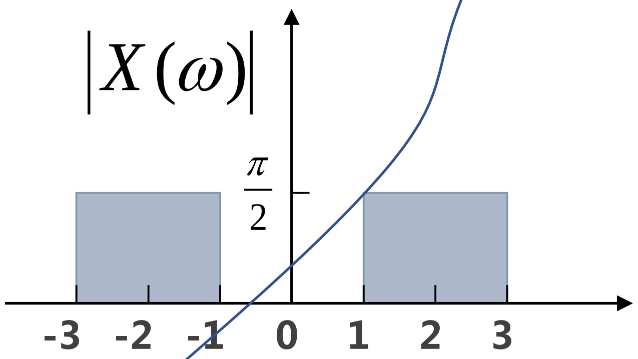
$\frac{\omega_c-1}{2}$ **两个矩形的半宽度**

$-\frac{\omega_c+1}{2}$

$\frac{\omega_c+1}{2}$ **两个矩形的中心点位置**

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[\pi g(\omega)*\pi[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]]$$

$$g(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

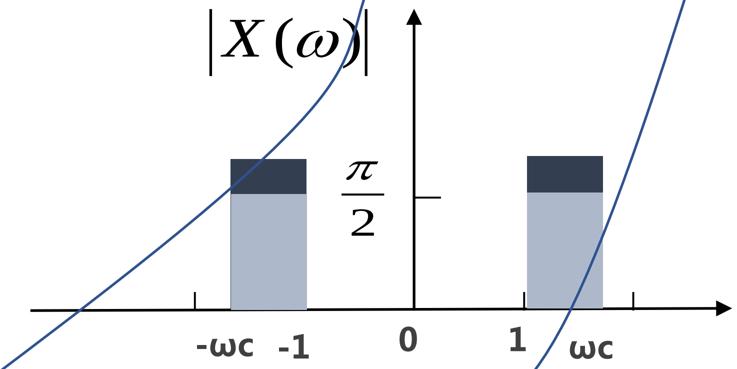


1：两个矩形的半宽度

+/-2：两个矩形的中心点位置

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\pi g_1(\omega)*\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c+1}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c+1}{2})]\}$$

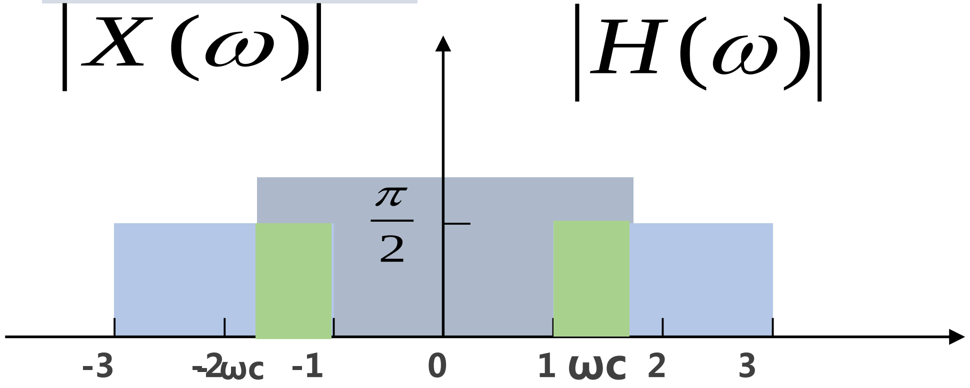
$$g_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\omega_c-1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{\omega_c-1}{2}\end{cases}$$

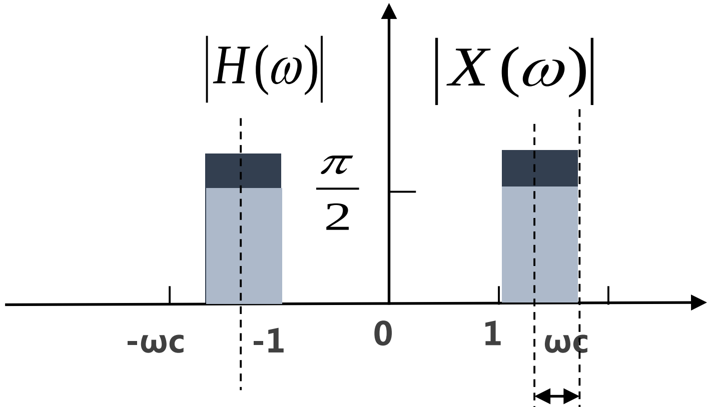


$\frac{\omega_c-1}{2}$ **两个矩形的半宽度**

$-\frac{\omega_c+1}{2}$ $\frac{\omega_c+1}{2}$ **两个矩形的中心点位置**

（3） $1<\omega_c<3$ ·输入信号的频带部分落在低通滤波器通带内





- （A）重叠的矩形区域是$Y_1(\omega)$，是Y(ω)没考虑放大及时延的结果， $Y_1(\omega)$的表达式是以+-（wc+1）/2为中心的两个矩形

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\pi g_1(\omega)*\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c+1}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c+1}{2})]\}$$

$$g_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\omega_c-1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{\omega_c-1}{2}\end{cases}$$

$-\frac{\omega_c+1}{2}$ $\frac{\omega_c+1}{2}$ 两个矩形的中心点位置

$\frac{\omega_c-1}{2}$ 两个矩形的半宽度

- （B）然后把$Y_1(\omega)$经过幅值**放大及时延后**，得到Y(ω)

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\pi g_1(\omega) * \pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c+1}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c+1}{2})]\}$$

如何求解Y1(w)对应的时域信号y1(t)?

其实是两个信号的频域卷积，利用时域与频域运算的对应关系，即可方便求出对应的时域信号！

频域法分析

$$Y_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\pi g_1(\omega)*\pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c+1}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c+1}{2})]\}$$

频域卷积

线性

$$Sa(\omega_c t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c}g(\omega),\quad g(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$\frac{\omega_c-1}{2}Sa(\frac{\omega_c-1}{2}t) \longleftrightarrow \pi g_1(\omega)$$

$$g_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\frac{\omega_c-1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{\omega_c-1}{2}\end{cases}$$

线性

$$\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\cos(\frac{\omega_c+1}{2}t) \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega+\frac{\omega_c+1}{2})+\delta(\omega-\frac{\omega_c+1}{2})]$$

时域卷积定理：$x_1(t)\cdot x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$

时域相乘

$$y_1(t)=\frac{\omega_c-1}{2}Sa(\frac{\omega_c-1}{2}t)\cos(\frac{\omega_c+1}{2}t)$$

将时域信号y1(t)进行放大和时延可得结果

频域法分析

由$Y_1(\omega)$推导$Y(\omega)$：经过幅值扩大k倍，相位延迟t0

$$Y(\omega)=kY_1(\omega)e^{-j\omega t_0} \qquad |\omega|<\omega_c$$

$$y(t)=\frac{k(\omega_c-1)}{2}Sa(\frac{\omega_c-1}{2}(t-t_0))\cos(\frac{\omega_c+1}{2}(t-t_0))$$

小结

1 频率特性函数

2 无失真传输

3 理想低通滤波器