夏学期第二周作业参考答案

5-7 已知系统的开环传递函数为$G(s)H(s)=\dfrac{K_0}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+0.125s)^2}$。试：(1) 绘制闭环系统的根轨迹图($K_0$>0)； (2) 确定闭环系统稳定 K_0 值范围。

答案：

传递函数改写为：

$$G(s)H(s)=\frac{K_0}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+0.125s)^2}=\frac{640K_0}{(s+2)(s+5)(s+8)^2}$$
$$=\frac{K}{(s+2)(s+5)(s+8)^2}$$

(1) 开环极点： n=4, p1= -2, p2= -5, p3=p4= -8

开环零点：m=0

(2) 实轴上的根轨迹： [-2, -5]

(3) 渐近线： $\gamma=\dfrac{(1+2n)\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4},\pm\dfrac{3\pi}{4}$

$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{4}(p_i)}{4}=\frac{-2-5-8-8}{4}=-5.75$$

(4) 实轴上的分离点：

$$\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+5}+\frac{2}{d+8}=0\Rightarrow\begin{cases}d_1=-6.17(\text{abandoned})\\ d_2=-3.1\end{cases}$$

(5) 与虚轴的交点：可以用两种方法。这里采用劳斯判据：

$$1+G(s)H(s)=(s+2)(s+5)(s+8)^2+K=s^4+23s^3+186s^2+608s+640+K=0$$

劳斯阵列：

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 186 & 640+K \\
s^3 & 23 & 608 & \\
s^2 & \dfrac{186\times23-608}{23}=159.6 & 640+K & \\
s & \dfrac{159.6\times608-(640+K)\times23}{159.6} & &
\end{array}$$

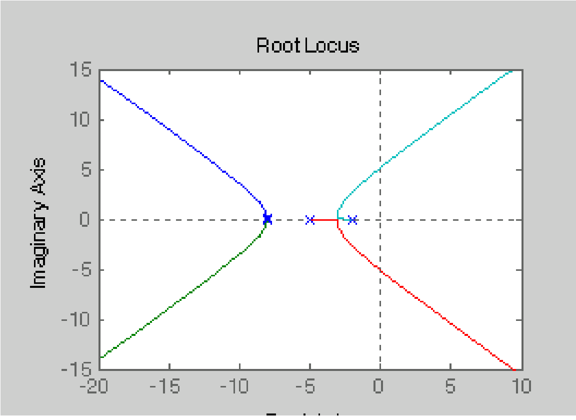
由 s^1 行为零可得

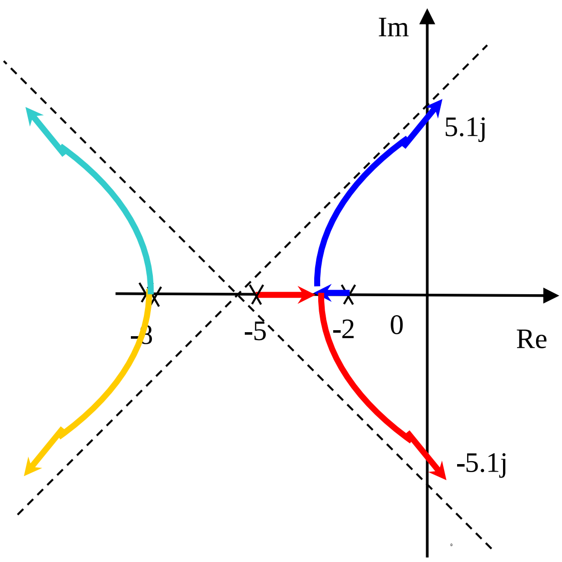
$$159.6\times608-23(640+K)=0\Rightarrow K\approx3578\Rightarrow K_0\approx5.6$$

由 s^2 行：

$$159.6s^2+640+K=0 \Rightarrow s^2=-26.4 \text{ 可以求出与虚轴交点：} \quad s_{1,2}=\pm j5.1$$

因此当-1<K_0<5.6，系统稳定。





5-8 设单位负反馈控制系统的开环传递函数如下，要求：

(1) 确定 $G(s)=\dfrac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$ 产生纯虚根为 $\pm j1$ 的 z 值和 K^*值；

(2) 概略绘出 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图（要求确定根轨迹的分离点、起始角和与虚轴的交点）。

答案：

（1）该系统的闭环特征方程为：

$$s^4+30s^3+200s^2+K^*s+K^*z=0$$

将系统纯虚根 $\pm j1$ 代入闭环特征方程可得：

$$\begin{cases}1-j30-200+jK^*+K^*z=0\\1+j30-200-jK^*+K^*z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}K^*=30\\z=\dfrac{199}{30}\end{cases}$$

（2）

① 系统无开环有限零点，系统的开环有限极点为：$p_1=0$，$p_2=-1$，$p_3=-3.5$，$p_{4,5}=-3\pm j2$

② 实轴上的根轨迹区间为：$(-\infty,-3.5]$，$[-1,0]$

③ 根轨迹渐近线有 n-m=5 条，根轨迹渐近线与实轴的交点为：$\sigma_a=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_i=-2.1$，与实轴的交角为：$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=\dfrac{(2k+1)\pi}{5}=\pm36°,\pm108°,180°$

④ 根轨迹的分离点方程：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+3.5}+\dfrac{1}{d+3+j2}+\dfrac{1}{d+3-j2}=0$，用试探法求得分离点为：$d\approx-0.4$，分离角为：$\dfrac{(2k+1)\pi}{l}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

⑤ 根轨迹的起始角：

$$\theta_{p_4}=180°+(-\sum_{\substack{j=1\\j\neq4}}^{5}\angle(p_4-p_j))=180°-(146°+136°+76°+90°)=-268°，\quad \theta_{p_5}=268°$$

⑥ 根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

$$D(s)=s^5+10.5s^4+43.5s^3+79.5s^2+45.5s+K^*=0$$

将 $s=j\omega$ 代入，并使 $\mathrm{Re}[D(j\omega)]=0,\mathrm{Im}[D(j\omega)]=0$，得

$$\begin{cases}\omega_1=0\\K^*=0\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_{2,3}=\pm1.034\\K^*=73.04\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_{4,5}=\pm6.514\\K^*=-15530\end{cases}$$

因为 $\omega=\omega_{4,5}$ 时，K*<0，所以 $\omega_{4,5}$ 不是所求根轨迹与虚轴的交点，根轨迹和虚轴的交点为 ω_1 和 $\omega_{2,3}$。

系统的闭环根轨迹图如图所示：