离散信号的分析

主讲教师：齐冬莲

目录

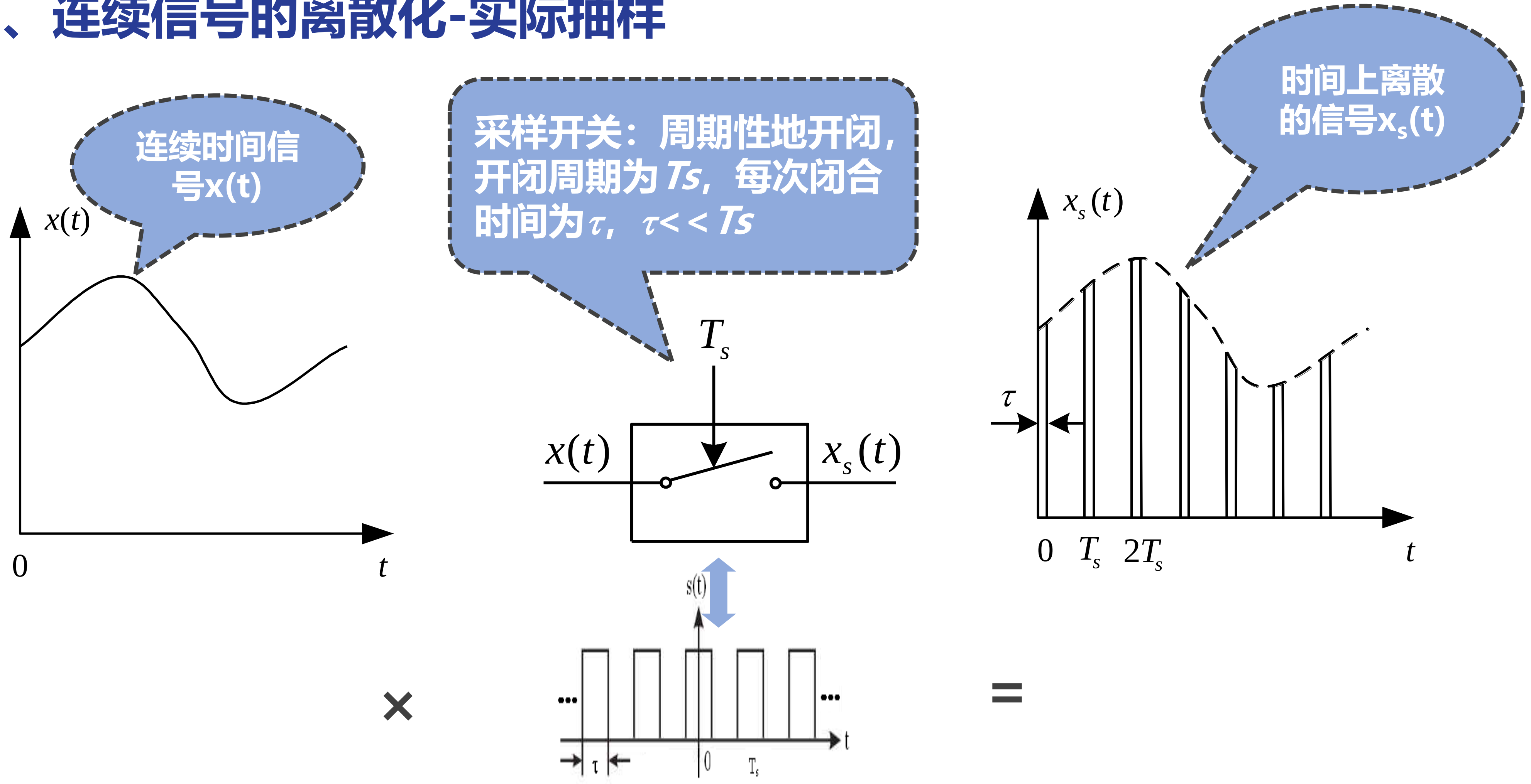
离散信号的时域描述和分析

- 信号的抽样和恢复
- 采样定理
- 离散信号的描述
- 离散信号的时域运算

离散信号的时域描述和分析

一、信号的抽样和恢复

1、连续信号的离散化-实际抽样



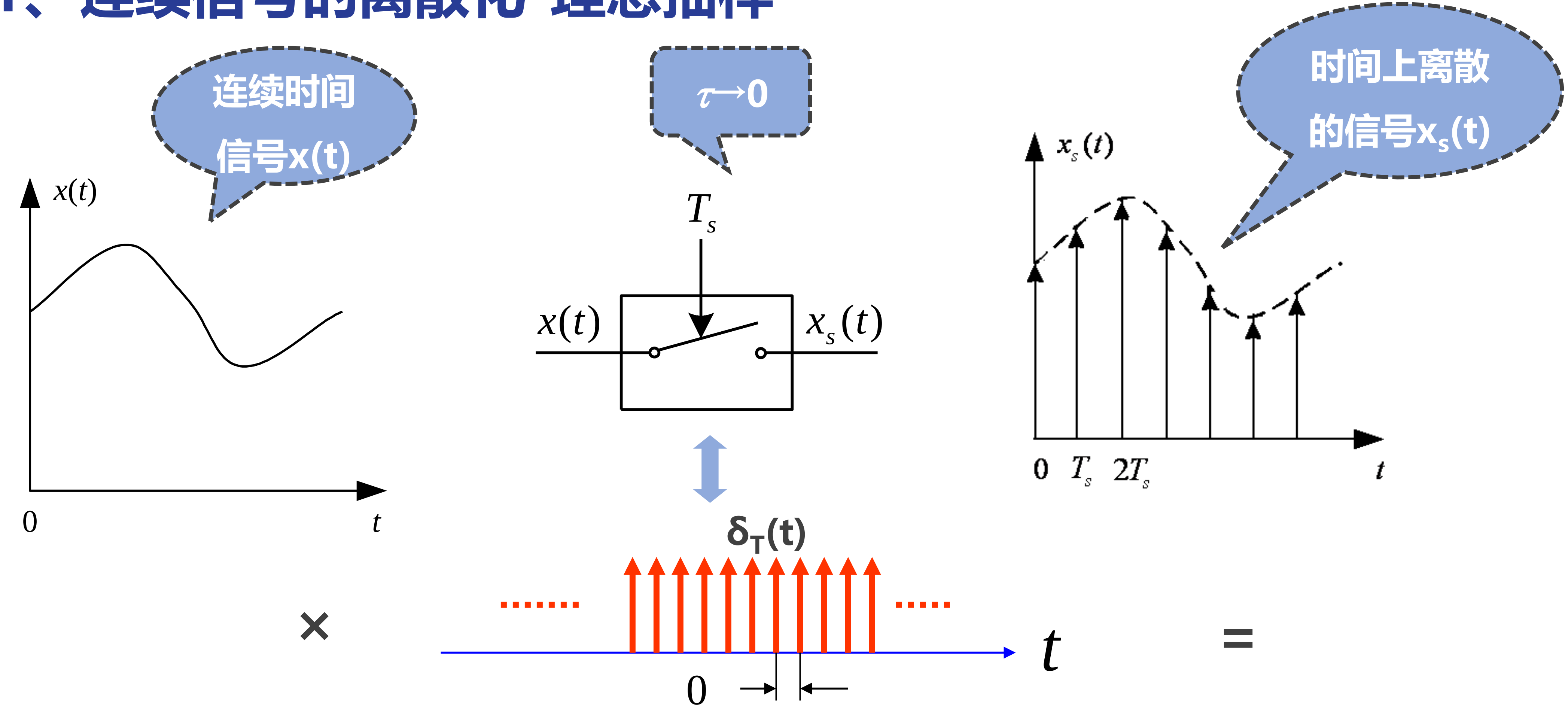
离散信号的时域描述和分析

1、连续信号的离散化

- 考虑Ts是一个定值的情况，即**均匀抽样**，称Ts为采样周期，其倒数$f_s=1/Ts$为**采样频率**，或$\omega_s=2\pi f_s=2\pi/Ts$为**采样角频率**

离散信号的时域描述和分析

1、连续信号的离散化-理想抽样



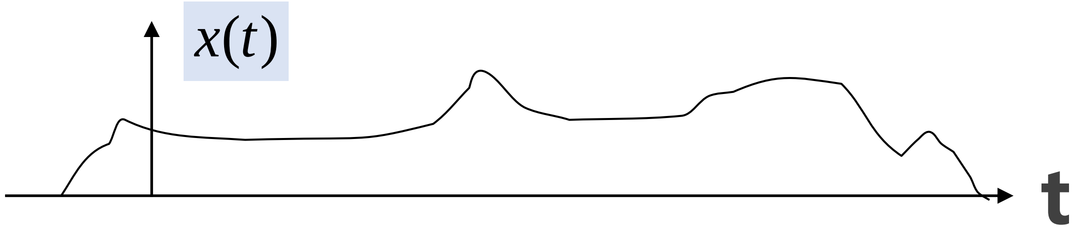
离散信号的时域描述和分析

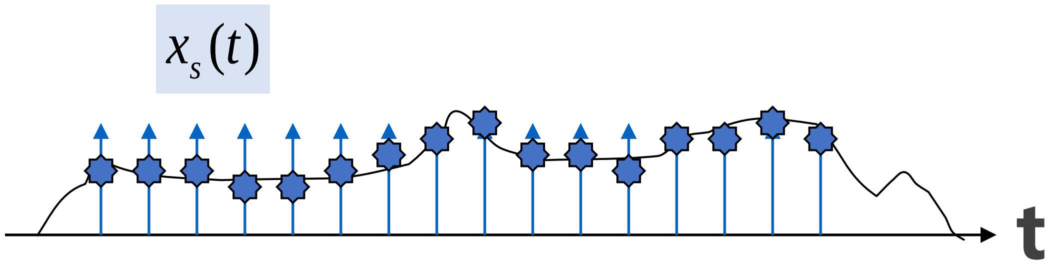
1、连续信号的离散化-理想抽样

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$= x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

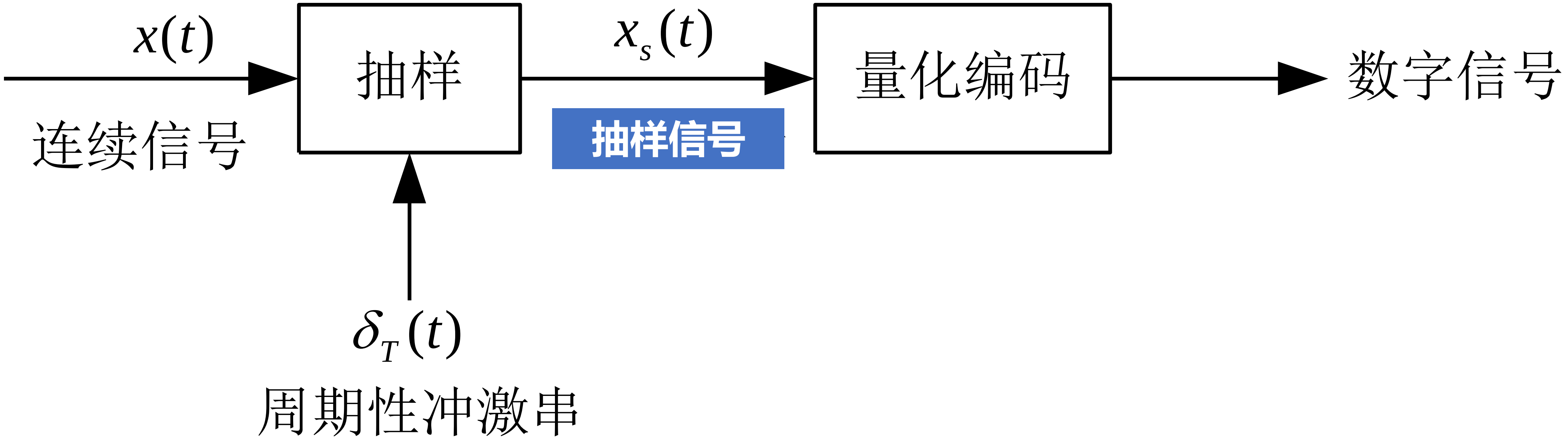
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$





离散信号的时域描述和分析

2、连续信号的抽样模型



离散信号的时域描述和分析

两个需要深入探讨的问题：

（1）抽样得到的信号$x_s(t)$在频域上有什么特性，它与原连续信号$x(t)$的频域特性有什么联系？

（2）连续信号被抽样后，它是否保留了原信号的全部信息，或者说，从抽样的信号$x_s(t)$能否无失真地恢复原连续信号？

离散信号的时域描述和分析

3、采样信号的频域分析

- 设连续信号x(t)的傅里叶变换为X(ω)，抽样后信号$x_s(t)$的傅里叶变换为$x_s(\omega)$，已知周期性冲激串$\delta_T(t)$的傅里叶变换为

$$P(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

- 由傅里叶变换的**频域卷积定理**

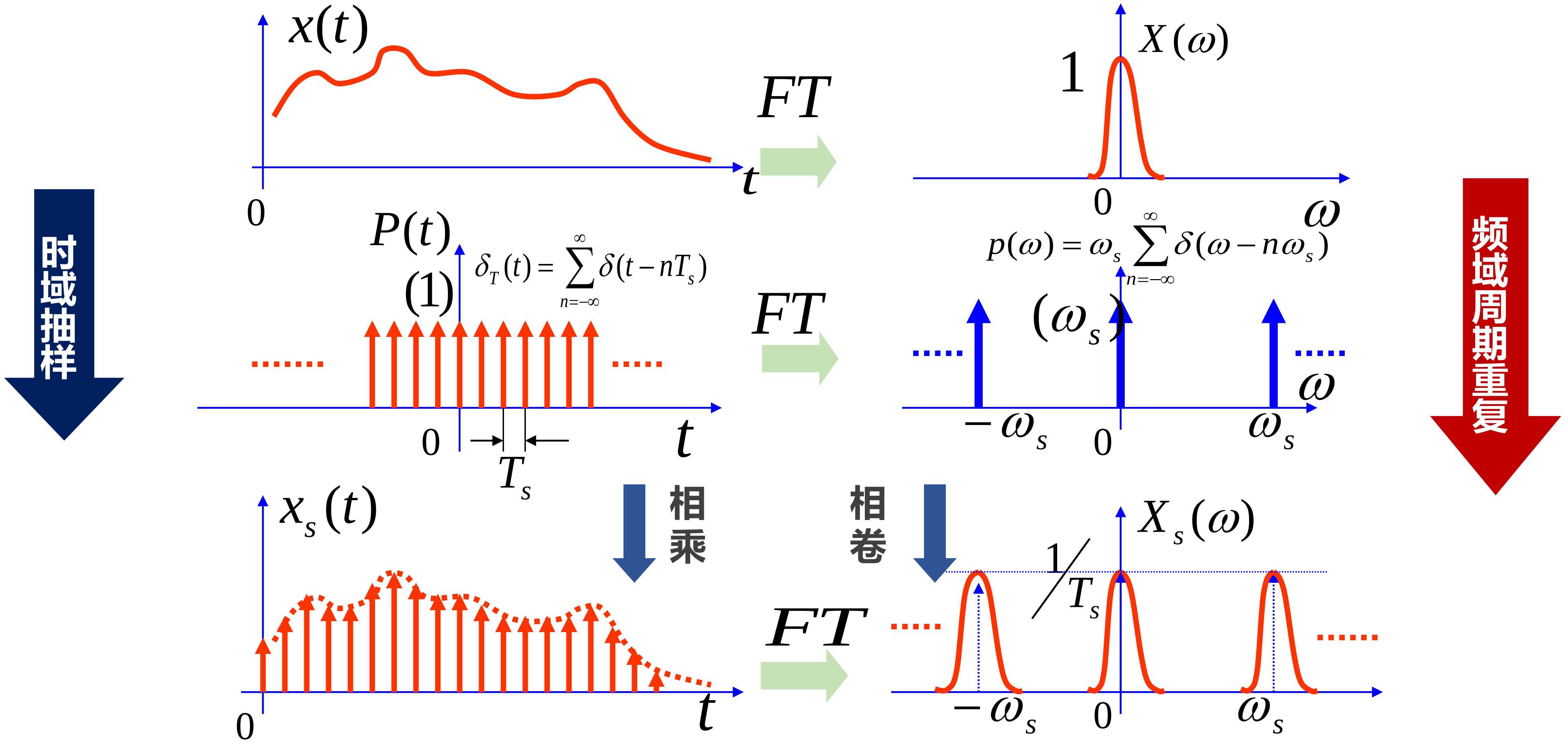
$$X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)$$

代入P（ω）

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

信号在时域被抽样后，它的频谱xs(ω) 是连续信号频谱X(ω)的形状以抽样频率为间隔周期性地重复得到

时域理想抽样的傅立叶变换



离散信号的时域描述和分析

时域理想抽样的傅立叶变换

$x(t)$

FT

$X(\omega)$

$\frac{1}{2\pi}$

相乘

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

相卷积

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

FT

$$p(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

离散信号的时域描述和分析

结 论:

- **连续信号经理想抽样后频谱发生了两个变化:**

  - 频谱发生了周期延拓，即将原连续信号的频谱X(ω)分别延拓到以$\pm\omega_s$，$\pm 2\omega_s$ ……为中心的频谱，其中ω_s为采样角频率

  - 频谱的幅度乘上了因子1/Ts，其中Ts为采样周期

离散信号的时域描述和分析

- 信号的抽样和恢复
- 采样定理
- 离散信号的描述
- 离散信号的时域运算

离散信号的时域描述和分析

二、采样定理

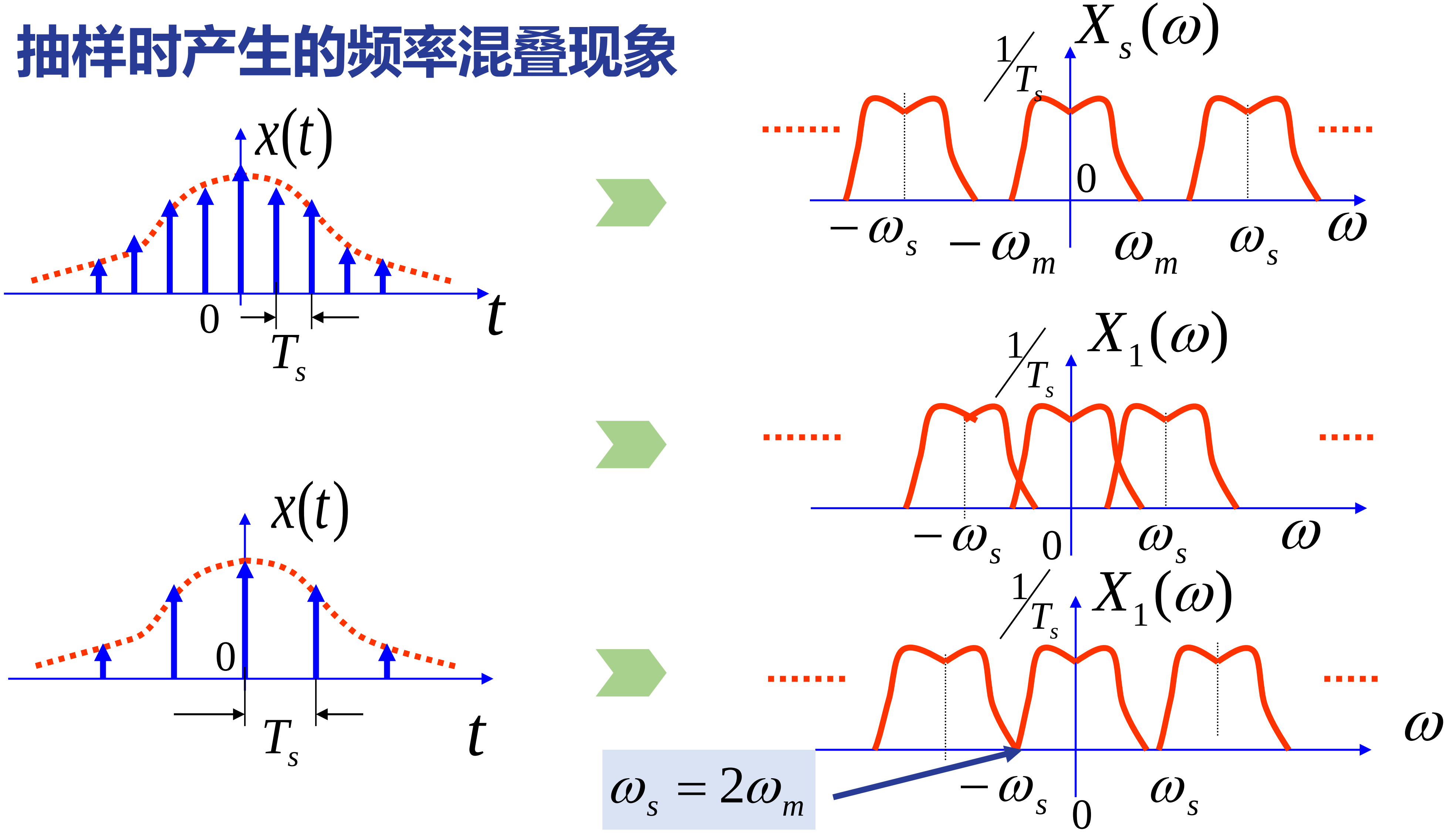
1、时域采样定理

对于频谱受限的信号x(t)，如果其最高频率分量为ω_m，为了保留原信号的全部信息，或能无失真地恢复原信号，在通过采样得到离散信号时，其采样频率应满足$\omega_s \geq 2\omega_m$

奈奎斯特（Nyquist）频率：$\omega_s = 2\omega_m$

离散信号的时域描述和分析

(1) 抽样时产生的频率混叠现象



离散信号的时域描述和分析

（2）由抽样信号恢复原连续信号

- **取主频带** $X(\omega)$ ： $X(\omega)=X_s(\omega)H(\omega)$
- **时域卷积定理：**

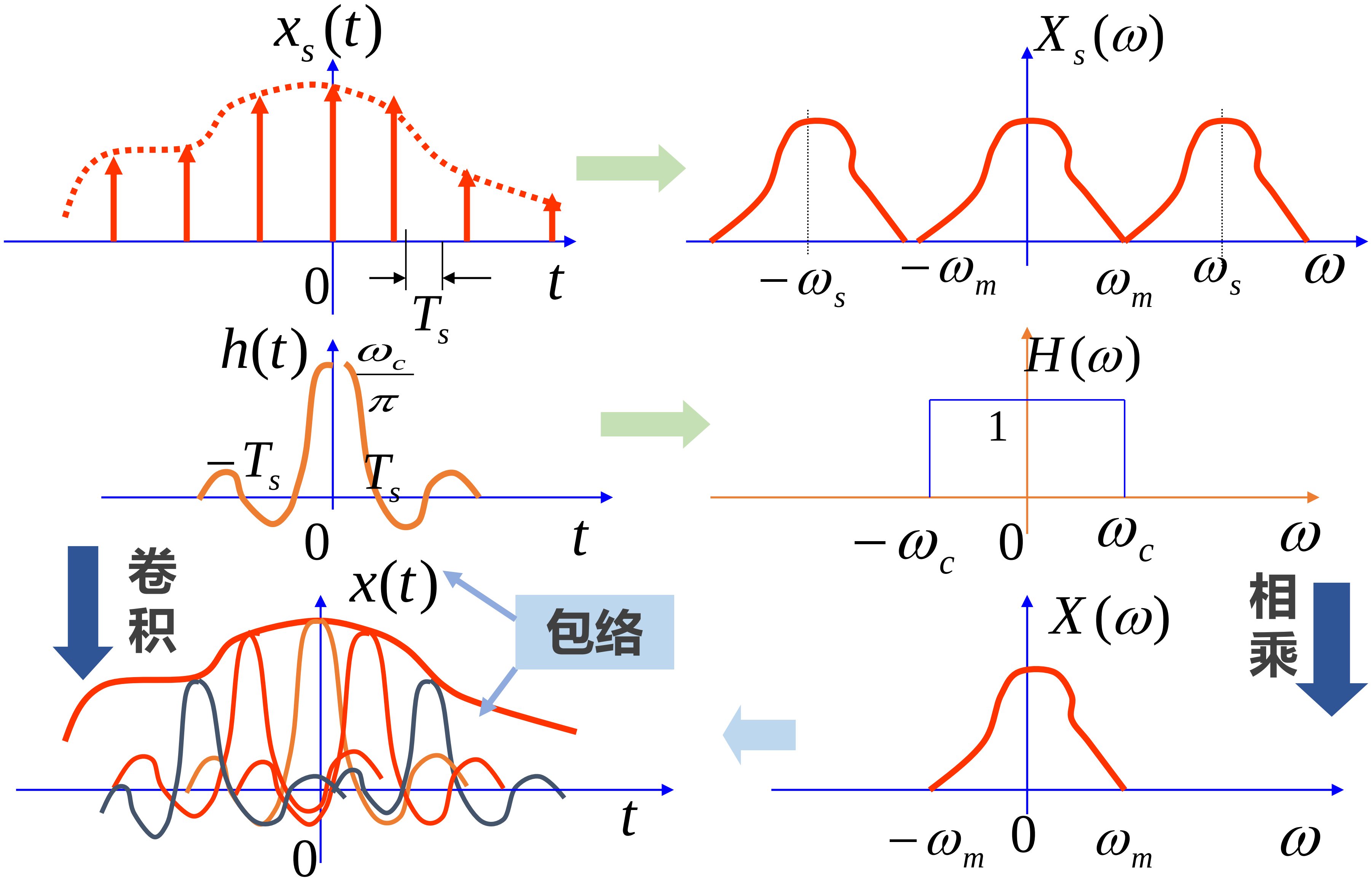
$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c t)$$

$$x(t)=x_s(t)*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega_c}{\pi}x(nT_s)Sa[\omega_c(t-nT_s)]$$

离散信号的时域描述和分析



离散信号的时域描述和分析

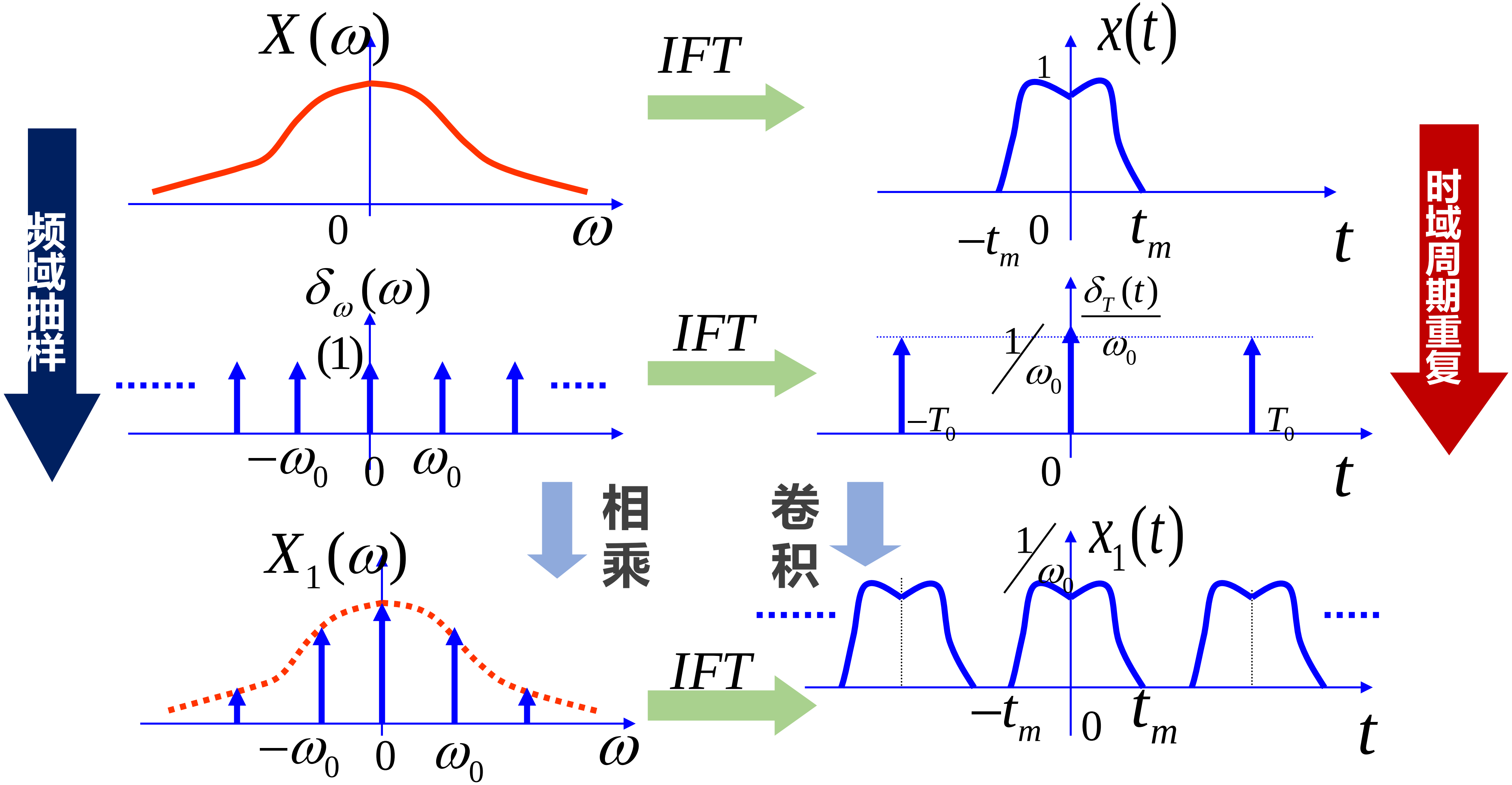
2、频域采样定理

对于一个长度为$2t_m$的时限信号x(t)，为了能够从频域样本集合完全恢复原信号的频谱，其频域的采样间隔必须满足

$$\omega_0 \le \frac{\pi}{t_m}$$

离散信号的时域描述和分析

频域抽样后的时间函数



离散信号的时域描述和分析

$$
\begin{tikzcd}
X(\omega) \arrow[r] \arrow[dd, "IFT"'] & X_1(\omega) = X(\omega)\delta_\omega(\omega) \arrow[d, "IFT"] & \delta_\omega(\omega) = \sum_{n=-\omega}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \arrow[l] \arrow[dd, "IFT"] \\
 & x_1(t) = \dfrac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) & \\
x(t) \arrow[r] & x_1(t) = x(t) * \dfrac{1}{\omega_0} \delta_T(t) \arrow[u] & p(t) = \dfrac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

离散信号的时域描述和分析

信号频谱的恢复

- 为了恢复原信号$x(t)$的连续频谱$X(\omega)$，可以将其周期延拓的信号$x_p(t)$乘上时域窗函数$g(t)$：

频域卷积定理

$$x(t) = x_p(t)\cdot g(t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_p(\omega) * G(\omega)$$

代入

$$G(\omega) = 2\pi S_a\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) Sa\left[t_m(\omega - k\omega_0)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\frac{\sin t_m(\omega - k\omega_0)}{t_m(\omega - k\omega_0)}$$

谢谢大家