第五章　根轨迹方法

Chapter 5　Root Locus

第五章内容

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

根轨迹绘制方法

- **根轨迹绘制问题**

开环传递函数（零极点形式）

$$G(s)H(s)=\frac{Z(s)}{E(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

开环零点z_j和开环极点p_i已知

参数K在$(0,+\infty)$或$(-\infty,0)$中变动

要求在s平面上绘出方程

$$(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)=0$$

的根（闭环极点）随K变动的轨线

- **计算机解决根轨迹问题，逐点计算绘制**

  如：Matlab的rlocus函数

- **手工如何绘制根轨迹？**

根轨迹绘制方法

- **根轨迹条件（K>0）**

几何方法：

$s\in C$且$s\neq z_i, s\neq p_j, i\in\{1,\cdots,w\}, j\in\{1,\cdots,n\}$，则$s$在根轨迹上，当且仅当有整数$h$使

$$\angle(s-z_1)+\cdots+\angle(s-z_w)-\angle(s-p_1)-\cdots-\angle(s-p_n)=(2h+1)180^\circ \qquad \text{（相角条件）}$$

- **根轨迹条件（K>0）的等价描述**

$s\in C$是根轨迹（$K>0$）上的点当且仅当存在$K>0$，满足

$$K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1$$

幅值条件：

$$\frac{K|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_w|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=1$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则1

法则1：根轨迹的分支、对称性和连续性

闭环特征方程$(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)+K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)=0$

闭环特征方程的阶数为$\max(n,w)$，有$\max(n,w)$个根
每个根形成一个分支（一条曲线）

结论：根轨迹的分支数等于开环零点数与开环极点数之大者

闭环特征方程是实系数多项式方程，其根或为实数或为共轭复数

结论：根轨迹关于实轴对称

闭环特征方程的系数是K的一次函数，一次函数是连续函数

多项式方程的根对其系数是连续依赖的

结论：根轨迹每个分支都是连续的曲线

根轨迹（K>0）－－绘制法则2

法则2：根轨迹的起点和终点

- 根轨迹的起点是指K=0时的根轨迹点
- 根轨迹的终点是指K=+∞时的根轨迹点
- 设s是根轨迹上的点，则$\dfrac{K|s-z_1||s-z_2|\cdots|s-z_w|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=1$，即

$$K=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则2

$$K=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s-z_j|}$$

法则2：根轨迹的起点和终点

（1）若$n\geq w$(开环极点数不小于开环零点数)，则

$K=0$意味着$s=p_i$(开环极点)

$K=+\infty$意味着$s=z_j$(w个开环有限零点)或$|s|=+\infty$（$n-w$个开环无限零点）

（2）若$n<w$，则

$K=0$意味着$s=p_i$(n个开环有限极点)或$|s|=+\infty$（$w-n$个开环无限极点）

$K=+\infty$意味着$s=z_j$(开环零点)

结论：

根轨迹起始(K=0)于开环极点（有限极点和无限极点），终止于开环零点 (有限零点和无限零点)。

根轨迹（K>0）－－绘制法则3

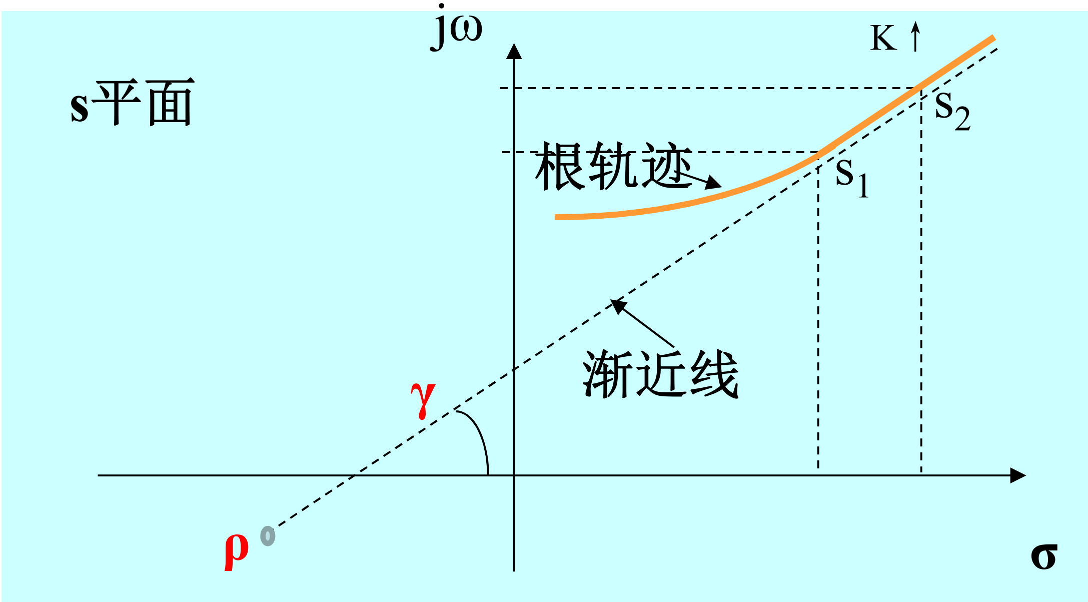
法则 3: 根轨迹的渐近线(n>w时)

根轨迹渐近线 —— 当|s|取很大的值时，各条根轨迹分支的近似线

根轨迹任一分支的渐近线可以视为一条**射线**，可以用渐近线上的某一个点ρ以及渐近线与实轴间夹角γ来表示

n>w下渐近线条数： **n-w条**

n个有限起点、w个有限终点、n-w个无限终点、n条根轨迹



问题：

如何绘制渐近线?

根轨迹（K>0）－－绘制法则3

$$K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1$$

法则3: 根轨迹的渐近线 (n>w时)

$$\lim_{|s|\to+\infty}K\frac{\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\lim_{|s|\to+\infty}\frac{K}{s^{n-w}}=-1$$

当 $|s|\to+\infty$

$$-K=s^{n-w}$$

$$s=\sqrt[n-w]{-K}$$

$$\gamma=\angle s=\angle\left(\sqrt[n-w]{-K}\right)=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}\qquad k\in\{0,1,\cdots,n-w-1\}$$

此外，在数学上可以证明：

实数$\sigma_0=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_j}{n-w}$在根轨迹每一分支的渐近线上

根轨迹（K>0）－－绘制法则3

法则3: 根轨迹的渐近线 (n>w时)

结论: 根轨迹有n-w 条终止于开环无限零点的分支，这些分支的渐近线为从实轴上

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{w} z_j}{n-w}$$

射出的n-w条射线，这些射线与实轴间的夹角分别为

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{n-w} \qquad k \in \{0,1,\cdots,n-w-1\}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-5: 开环传递函数**G(s)H(s)**如下，绘制根轨迹的渐近线

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

开环极点: $n = 2,\quad p_1 = 0,\quad p_2 = -2$

开环零点: $w = 0$

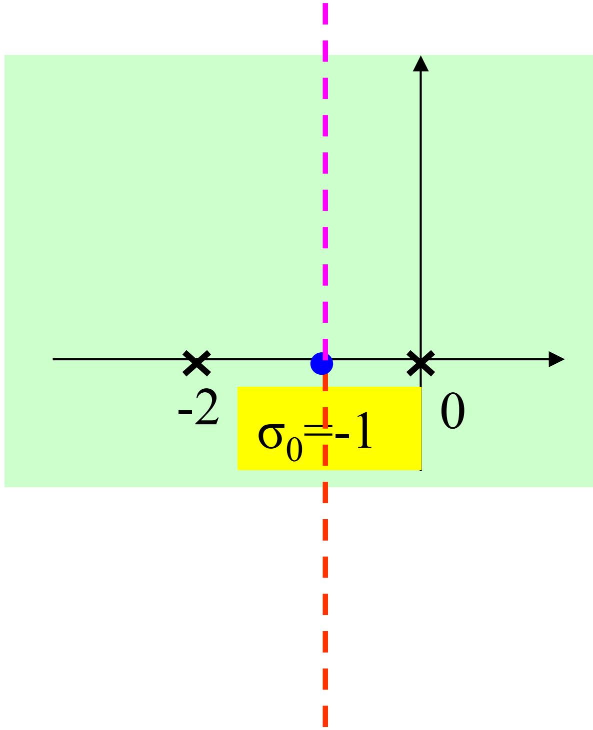
渐近线条数: $n - w = 2$条

渐近线交点: $\sigma_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{w} z_j}{n-w} = \dfrac{-2-0}{2} = -1$

渐近线角度:

$$\gamma = \frac{(1+2k)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2k)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$$

$k = 0,1$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-6: 开环传递函数G(s)H(s) 如下，试绘制根轨迹的渐近线

$$G(s)\,H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

开环极点: $n=4,\quad p_{1,2}=0,\quad p_3=-1,\quad p_4=-4$

开环零点: $w=1, z_1=-2$

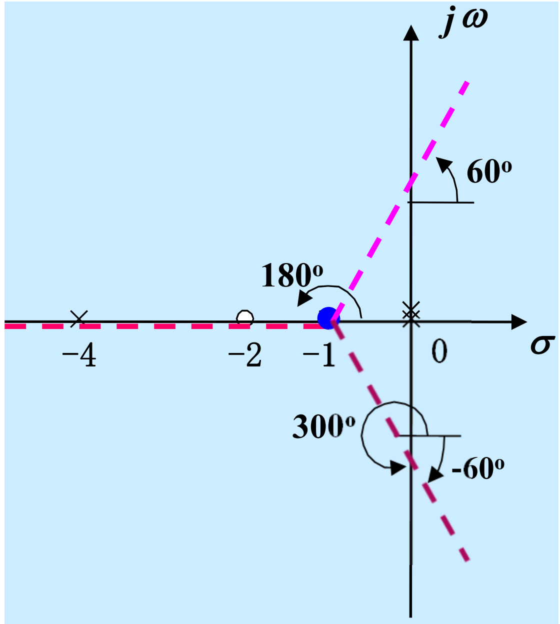
渐近线条数: $n-w=3$条

渐近线交点: $\sigma_0=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{w}z_j}{n-w}=\dfrac{0+0-1-4-(-2)}{3}=-1$

渐近线角度:

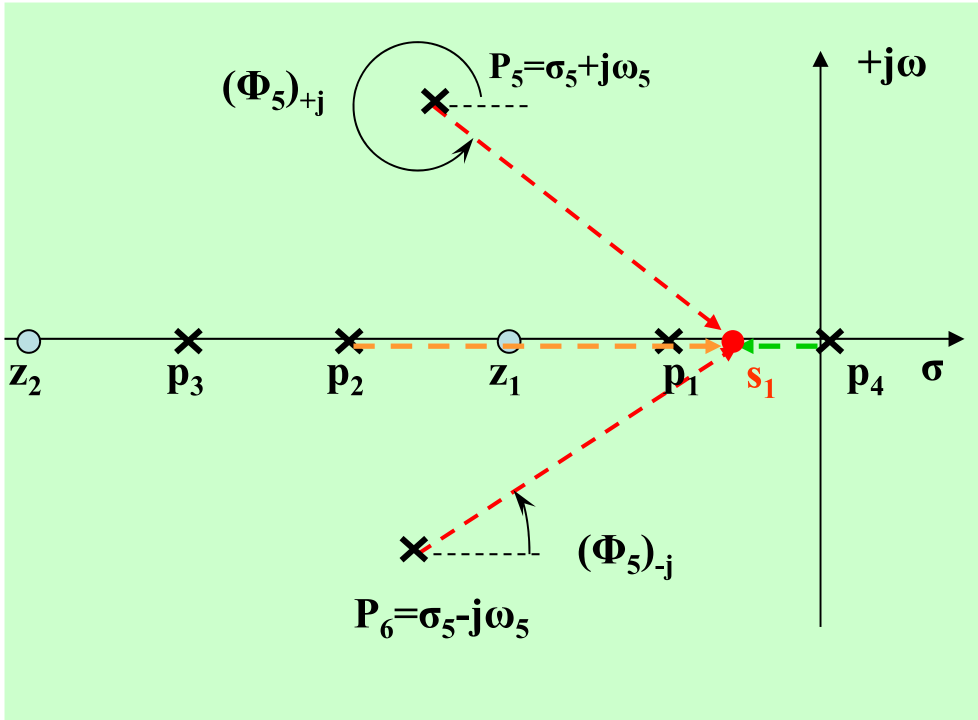
$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ\\180^\circ\\300^\circ\end{cases}$$

$k=0,1,2$



法则 4: 实轴上的根轨迹

实轴上哪一区域是根轨迹？ 对于实轴上的某一试验点（如 s_1 ）：



- 该点左侧实数零、极点到该点的向量相角为0 如

$$\angle\left|s_1 - z_i(p_j)_l\right| = 0$$

- 复数共轭零、极点到该点的相角和为360°

- 该点右侧实数零、极点到该点的向量相角为180°

$$\angle\left|s_1 - z_i(p_j)_r\right| = 180^\circ$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则 4

$$\angle(s-z_1)+\cdots+\angle(s-z_w)-\angle(s-p_1)-\cdots-\angle(s-p_n)=(2h+1)180^\circ$$

法则 4: 实轴上的根轨迹

G(s)H(s) 各零极点到点 s_1 的相角:

$$(\psi_1+\psi_2)-\left(\varphi_4+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+(\varphi_5)_{+j}+(\varphi_5)_{-j}\right)=(1+2h)180^\circ$$

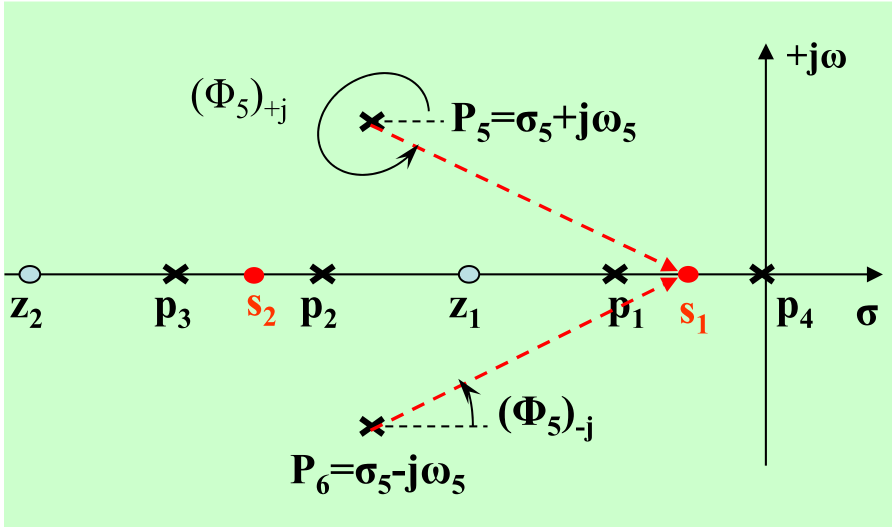
$$0^\circ+0^\circ-(180^\circ+0^\circ+0^\circ+0^\circ+360^\circ)=(1+2h)180^\circ \quad h=0$$

因此 s_1 是根轨迹上的一点

s_1右侧有1个实开环零极点

同样地，可以看出s_2 不是根轨迹上的点.

s_2右侧有4个实开环零极点



根轨迹（K>0）－－绘制法则 4

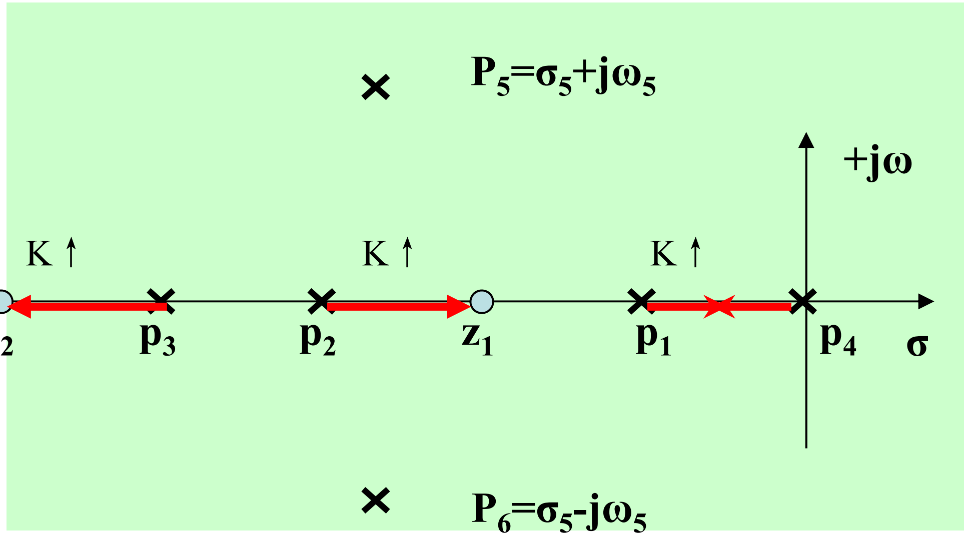
法则 4: 实轴上的根轨迹

结论-1:

复数零点、复数极点以及点s左侧的实零点、实极点对相角条件（180的奇数倍）没有影响.

结论-2:

实轴上的点s在根轨迹上，当且仅当s右侧实零点数与实极点数之和是奇数

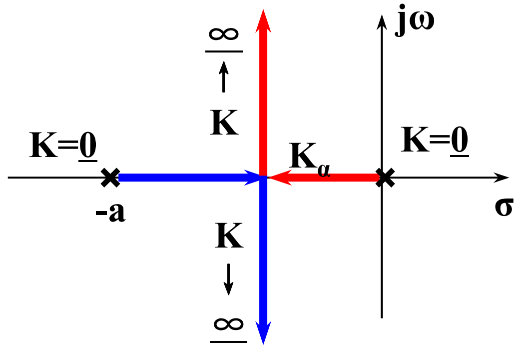


根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

法则5: 根轨迹的分离点和分离角

两条或两条以上根轨迹分支在s平面相遇又立即分开的点，称为根轨迹的**分离点**。常见的是**两条根轨迹分支的分离点**

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

法则5: 根轨迹的分离点和分离角

方法1: 分离点的出现，意味着特征方程有重根——如何获取这些根?

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)\right)=0$$

$s\in C$

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)$$

$s\in C$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}$$

$s\in C$

法则5: 根轨迹的分离点和分离角

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}$$

注:

$$\frac{\mathrm{d}\ln(f(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\ln\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\mathrm{d}s}$$

注:

$$\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln(s-p_i)$$

$$\ln\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)=\sum_{j=1}^{w}\ln(s-z_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\ln(s-p_i)}{\mathrm{d}s}=\sum_{j=1}^{w}\frac{\mathrm{d}\ln(s-z_j)}{\mathrm{d}s}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{s-z_j}$$

s未知，需要求取

根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

法则5: 根轨迹的分离点和分离角

结论: 分离点 r 满足条件:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{r-z_j}$$

$$r\in C$$

注：在求解分离点时，须注意：

1）分离点必须在根轨迹上.

2）无有限极点时:

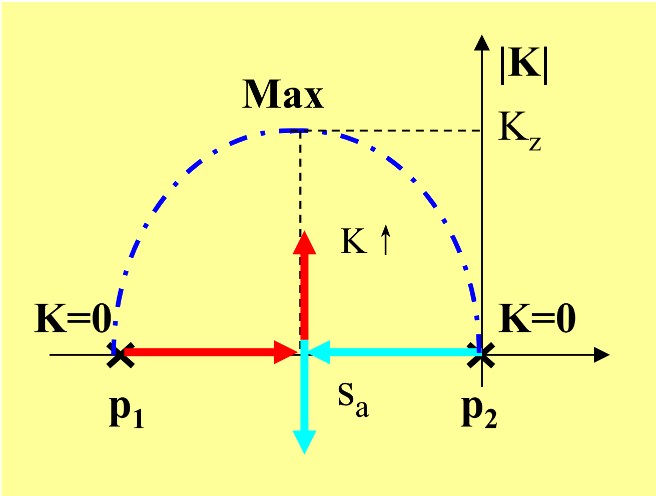
$$\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{r-z_j}=0,\ r\in C$$

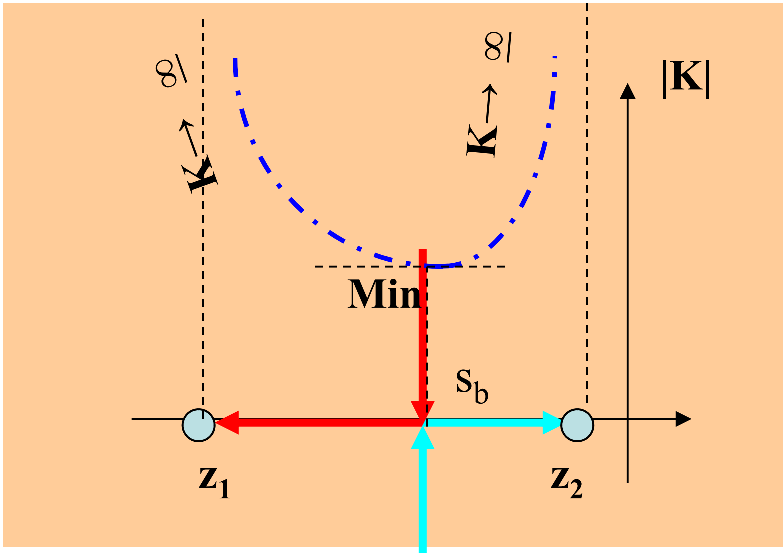
3）无有限零点时:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r-p_i}=0,\ r\in C$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

法则5: 根轨迹的分离点和分离角

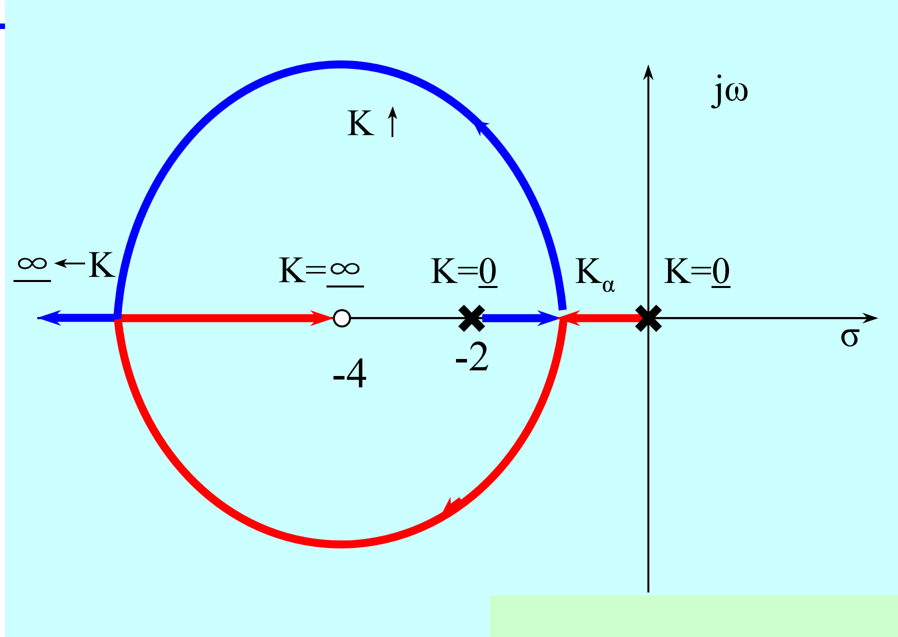


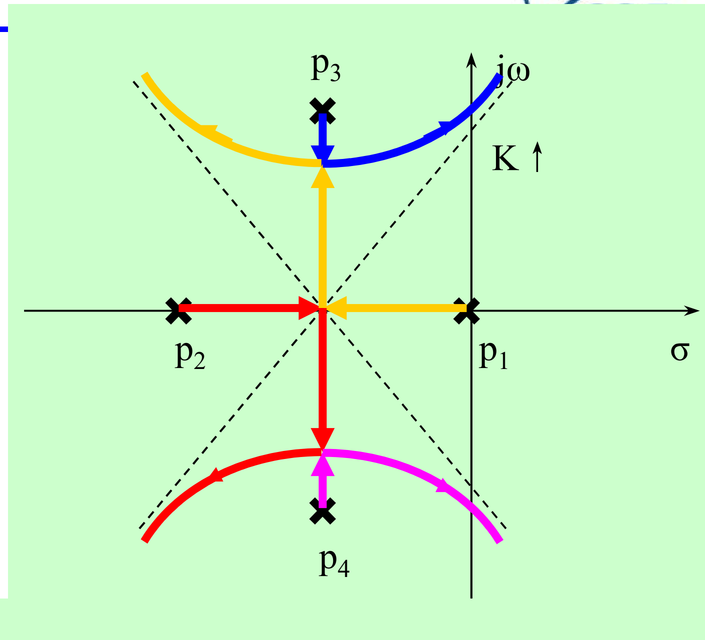


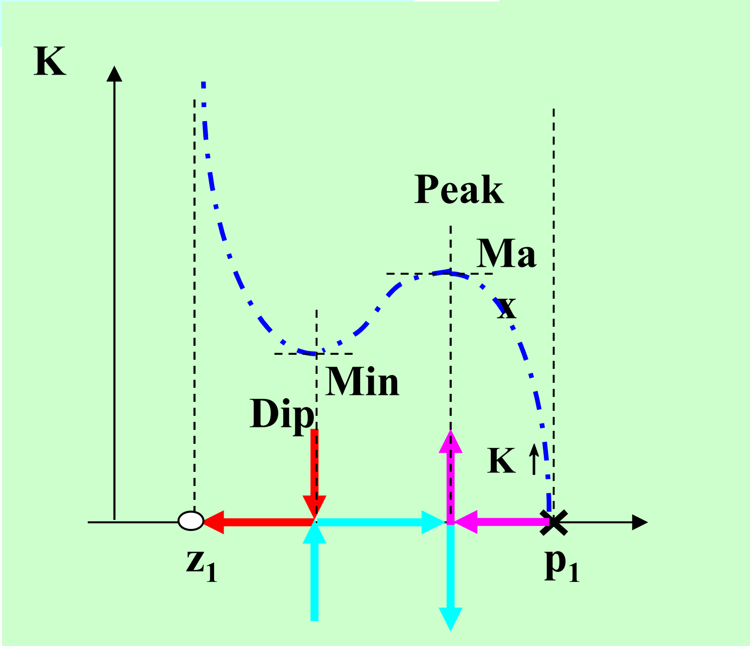
- 对于分离点s_a，对应的K_z 大于实轴上 s_a 两侧的任意点的K.

- 对于分离点s_b，在两个零点之间，K（在实轴上）是最小值.

根轨迹（K>0）－－绘制法则 5







根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

法则5: 根轨迹的分离点和分离角

方法2：

开环传递函数：

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

特征方程：

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0$$

$$\text{Let}:\ W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=-K$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=r}=\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=r}=0$$

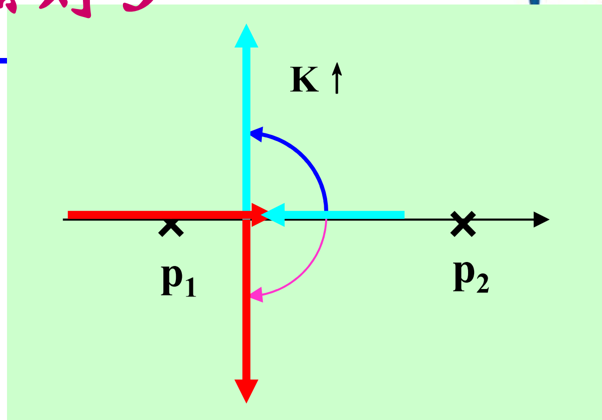
根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

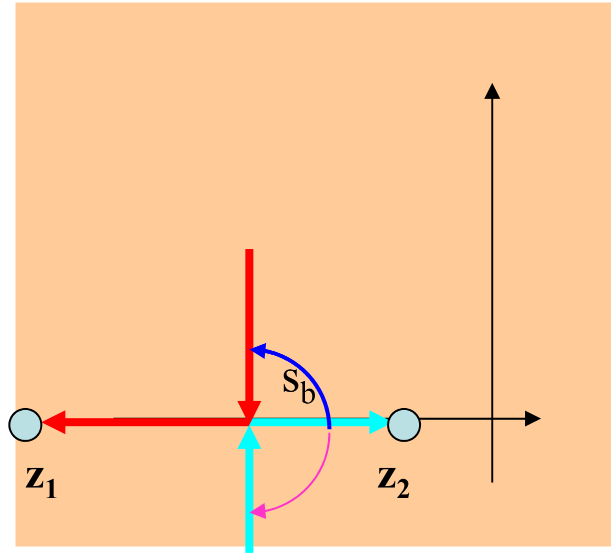
法则5: 根轨迹的分离点和分离角

分离角：

2条根轨迹分支由实轴外进入实分离点的轨线方向角

或者2条根轨迹分支离开实分离点进入实轴外的轨线方向角





借助出射角公式的证明思路可得上述分离角

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\pm 90^\circ$$

一般地，分离角满足以下条件:

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}$$

其中 l 表示有 l 条根轨迹在该分离点分离。

根轨迹（K>0)－－绘制法则举例

例5-8 开环传递函数 G(s)H(s), 绘制根轨迹.

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1）: 开环极点: $n=3: p_1=0,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$

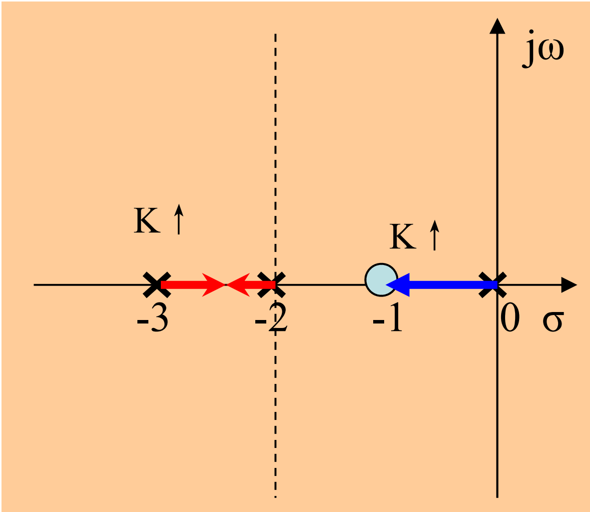
2）: 开环零点: $w=1: z_1=-1$

3）: 实轴上的根轨迹 [0, -1], [-2, -3]

4）: 渐近线

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{0-2-3-(-1)}{3-1}=-2$$



例5-8 开环传递函数 G(s)H(s), 绘制根轨迹.

5）：分离点

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

方法 1

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+3}=\frac{1}{r+1}$$

$$r^3+4r^2+5r+3=0$$

$$r=-2.47$$

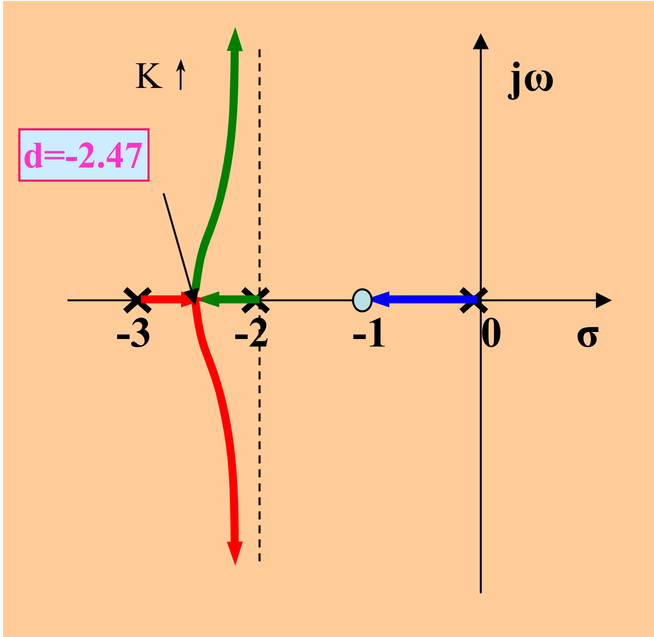
分离角:

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$

方法 2

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=\frac{s(s+2)(s+3)}{s+1}$$

$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=r}=0$$

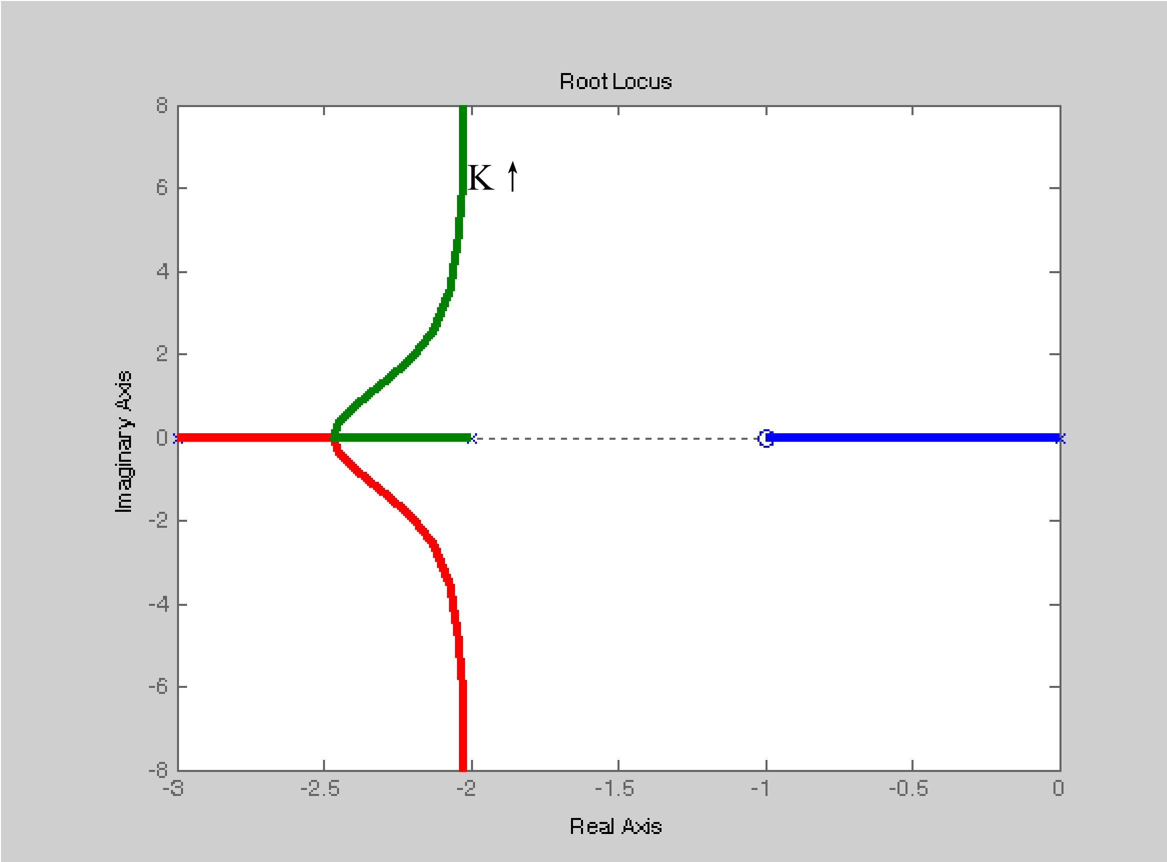


根轨迹图

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例5-8 用MATLAB绘制的根轨迹

$$G(s)\,H(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例5-9 开环传递函数 G(s)H(s), 绘制根轨迹.

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

1）：开环极点 $n=3,\quad p_1=-1,\quad p_2=-2,\quad p_3=-3$

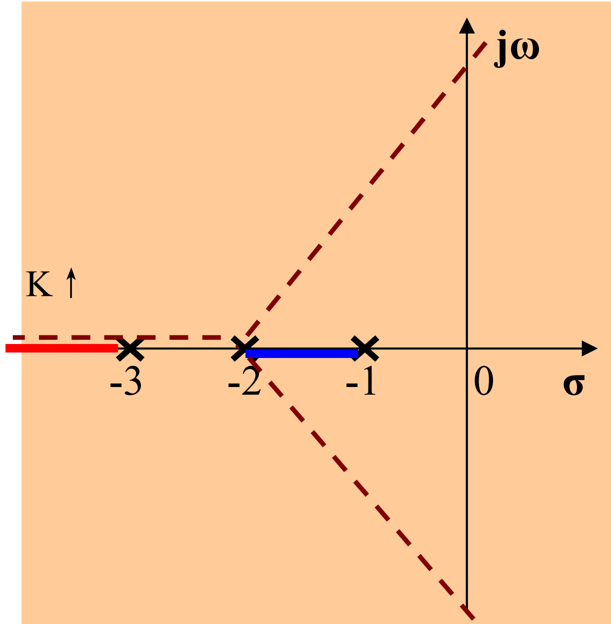
2）：开环零点 $w=0$

3）：实轴上的根轨迹 [-1, -2], [-3, -∞]

4）：渐近线

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{3}=\begin{cases}60^\circ\\180^\circ\\-60^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-1-2-3}{3-0}=-2$$



根轨迹（K>0）——绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

5）分离点：

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+3}=0 \Rightarrow 3r^2+12r+11=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1=-1.42 \\ r_2=-2.58 \end{cases}$$

d_2=-2.58 因为不在根轨迹上，舍弃

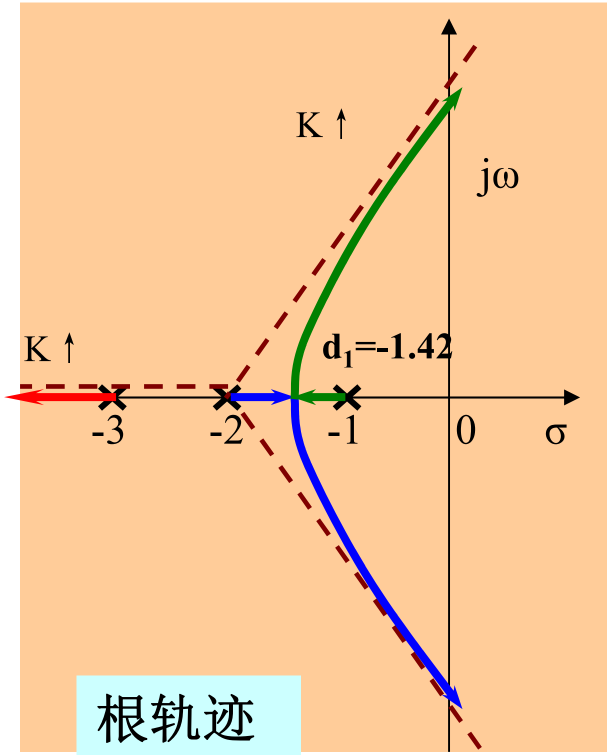
分离角：

$$\frac{(2h+1)180°}{2}=\begin{cases} 90° \\ -90° \end{cases}$$

方法 2:

$$W(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)}=(s+1)(s+2)(s+3)$$

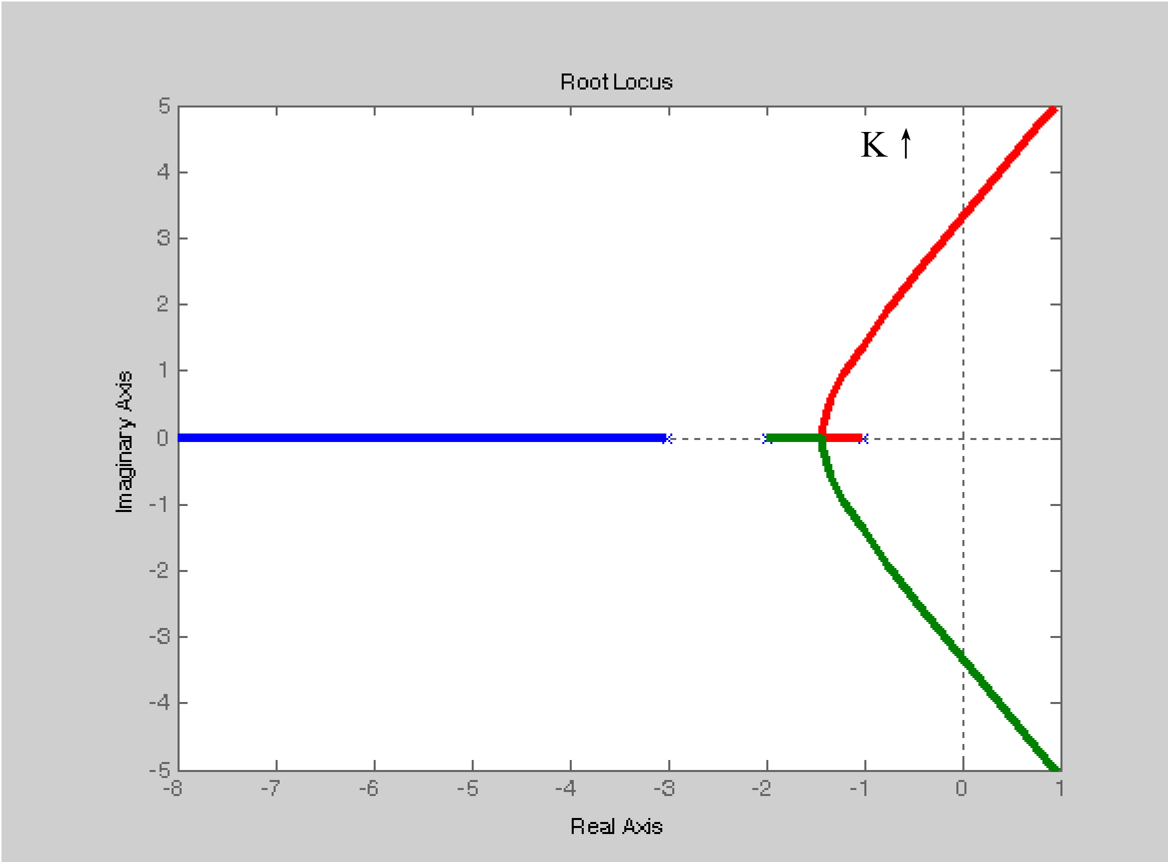
$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=r}=0$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例5-9 用MATLAB绘制的根轨迹

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则 5

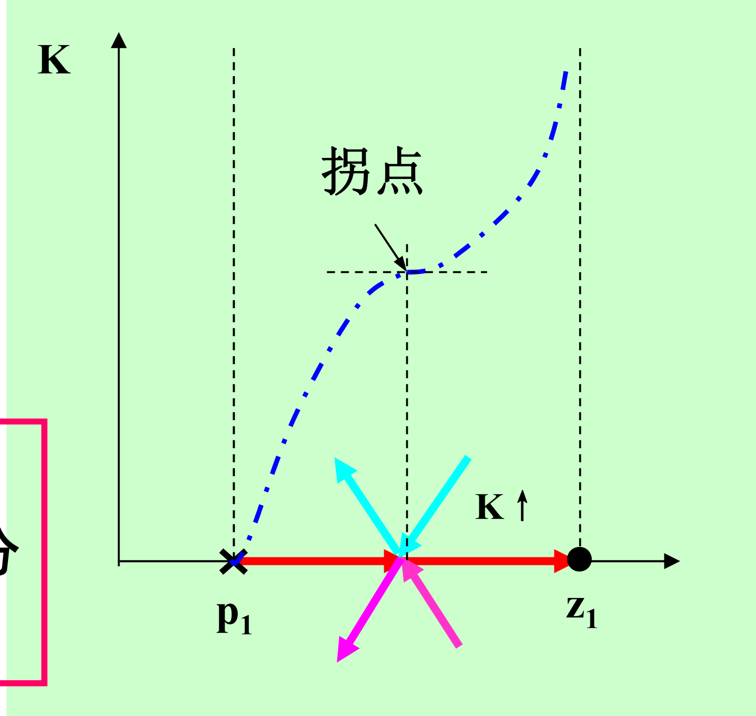
法则5: 根轨迹的分离点和分离角

更复杂情况:

K会出现拐点

出现3条或以上分支的实分离点

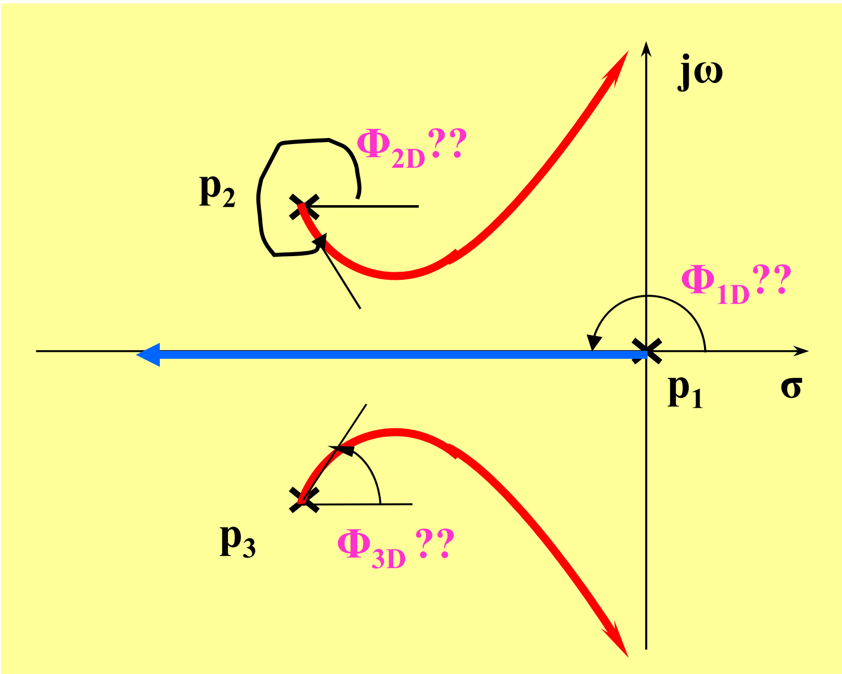
如果在根轨迹上的给定点处W(s)的y-1 阶导数等于零，则有 y条根轨迹分支在该点相聚又分离



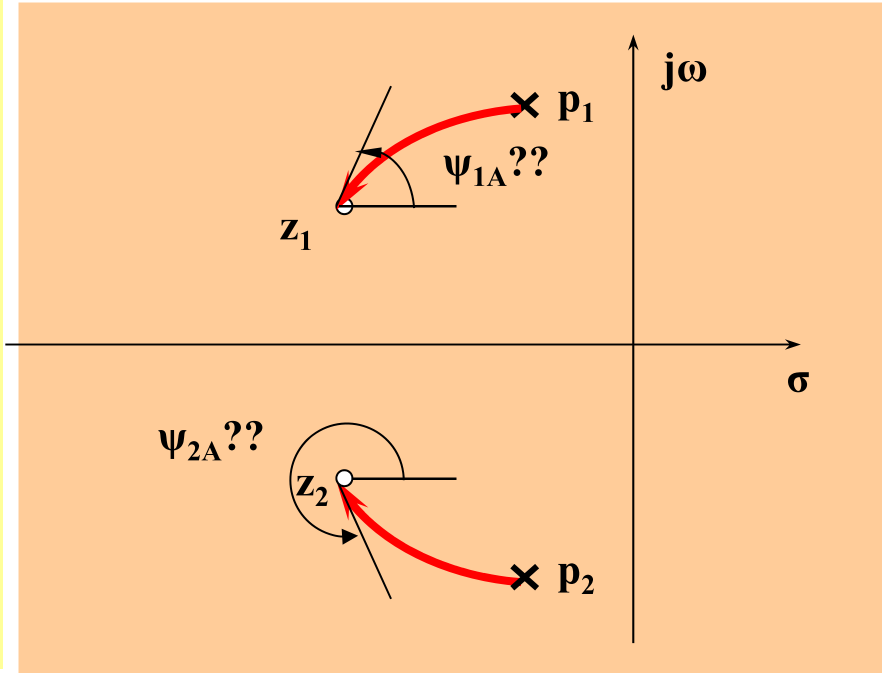
根轨迹（K>0)－－绘制法则6

法则 6: 出射角(起始角)及入射角 (终止角)

问题: 根轨迹离开极点或到达零点的方向角?



Angle of Departure（出射角）

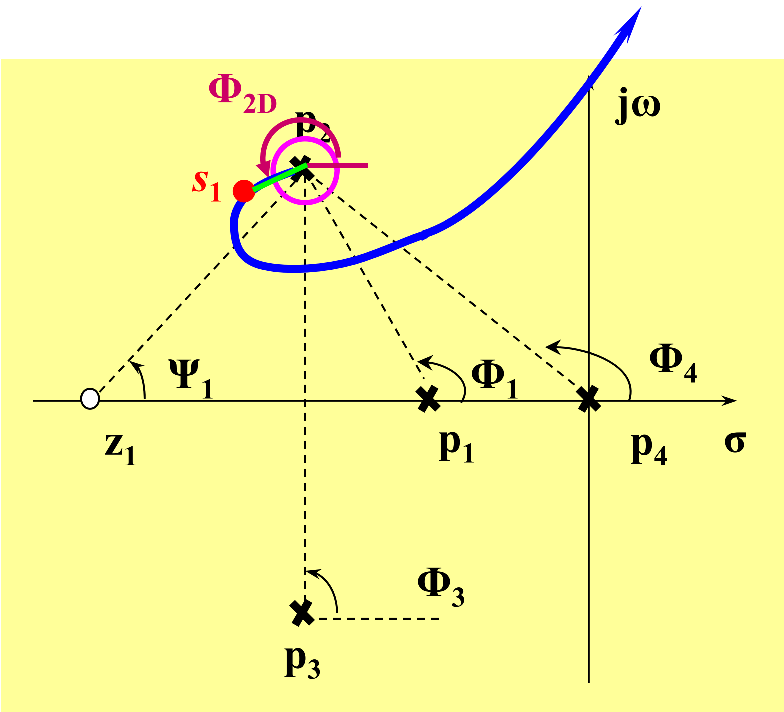


Angle of Approach （入射角）

根轨迹（K>0）－－绘制法则6

法则 6: 出射角及入射角

假设： 开环系统有四个极点和一个零点



在根轨迹上选点s_1距p_2足够近

$$相角条件:\angle(s_1-z_1)-\sum_{i=1}^{4}\angle(s_1-p_i)=(2h+1)180^\circ$$

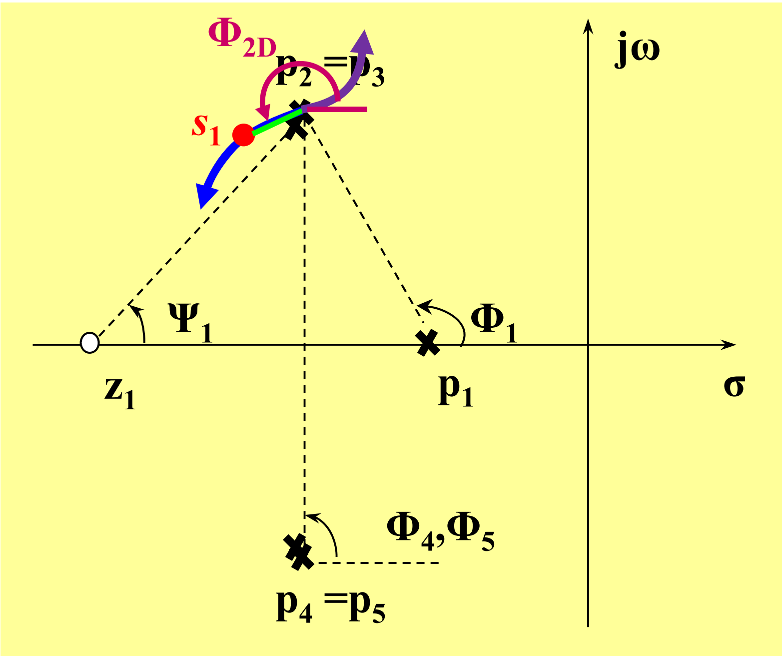
当$s_1\to p_2$时：
$$\angle(s_1-z_1)=\angle(p_2-z_1)=\psi_1$$
$$\angle(s_1-p_1)=\angle(p_2-p_1)=\phi_1$$
$$\angle(s_1-p_2)=\Phi_{2D}=出射角$$
$$\angle(s_1-p_3)=\angle(p_2-p_3)=\phi_3$$
$$\angle(s_1-p_4)=\angle(p_2-p_4)=\phi_4$$

$$\psi_1-\phi_1-\phi_{2D}-\phi_3-\phi_4=(1+2h)180^\circ$$

$$出射角\phi_{2D}=-(1+2h)180^\circ+\psi_1-\phi_1-\phi_3-\phi_4$$
$$=180^\circ+\psi_1-\phi_1-\phi_3-\phi_4$$

法则 6: 出射角及入射角

假设： 开环系统有五个极点和一个零点



根轨迹自p_2=p_3出发有2条分支

在根轨迹上选点s_1距p_2足够近

$$\psi_1 - \phi_1 - 2\phi_{2D} - \phi_4 - \phi_5 = (1+2h)180°$$

$$\text{出射角}\,\phi_{2D} = \frac{(1+2k)180° + \psi_1 - \phi_1 - \phi_3 - \phi_4}{2}$$

$$k \in \{0,1\}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则6

法则 6: 出射角及入射角

结论1: 根轨迹离开*q*重开环极点p_d的出射角（起始角）

$$\phi_{p_d} = \frac{(1+2k)180^\circ + \sum_{j=1}^{w} \angle(p_d - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ p_i \neq p_d}}^{n} \angle(p_d - p_i)}{q} \qquad k \in \{0,1,\cdots,q-1\}$$

结论2: 根轨迹到达*q*重开环零点z_d的入射角（终止角）

$$\psi_{z_d} = \frac{(1+2k)180^\circ + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_d - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z_d}}^{w} \angle(z_d - z_j)}{q} \qquad k \in \{0,1,\cdots,q-1\}$$

根轨迹（K>0）－－绘制法则7

法则 7: 根轨迹与虚轴的交点(产生无阻尼振荡点）

方法: 根轨迹与虚轴相交，意味着闭环系统有虚根. 因此, 令 s=jω 代入特征方程 1+G(s)H(s)=0来计算根轨迹与虚轴的交点.

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0 \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{Re}\left[1+G(j\omega)H(j\omega)\right]=0\\ \mathrm{Im}\left[1+G(j\omega)H(j\omega)\right]=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\omega=\pm\omega_c\\ K=K_c\end{cases}$$

$s=\pm j\omega_c$ 对应于根轨迹穿越虚轴的点。
K_c 表示穿越虚轴的点对应的参数

根轨迹（K>0）－－绘制法则7举例

例 5-9-1: 开环传递函数 G(s)H(s), 试求根轨迹与虚轴的交点

$$G(s)\,H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

特征方程

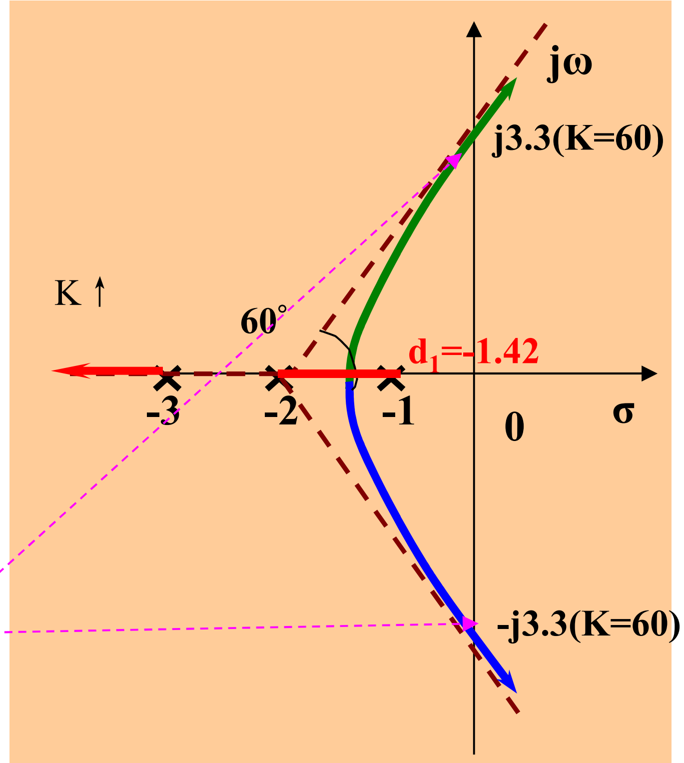
$$s^3+6s^2+11s+K+6=0$$

令s=jω 代入特征方程:

$$-j\omega^3-6\omega^2+j11\omega+K+6=0$$

$$\begin{cases} 11\omega-\omega^3=0 \\ K+6-6\omega^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1=0 \quad \text{(放弃)} \\ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{11}=\pm 3.3 \\ K=60 \end{cases}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则8

法则 8: 根轨迹的交叉点

幅值条件: $|G(s)H(s)| = 1$

相角条件: $\angle G(s)H(s) = (1+2h)180°, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow \text{Let}: W(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{j=1}^{w}(s-z_j)} = -K$$

1) 非交叉点

当s满足相角条件时，该点在根轨迹上。如果在该点处 $dW(s)/ds \neq 0$, 则仅有一条根轨迹分支经过该点.

根轨迹（K>0）－－绘制法则8

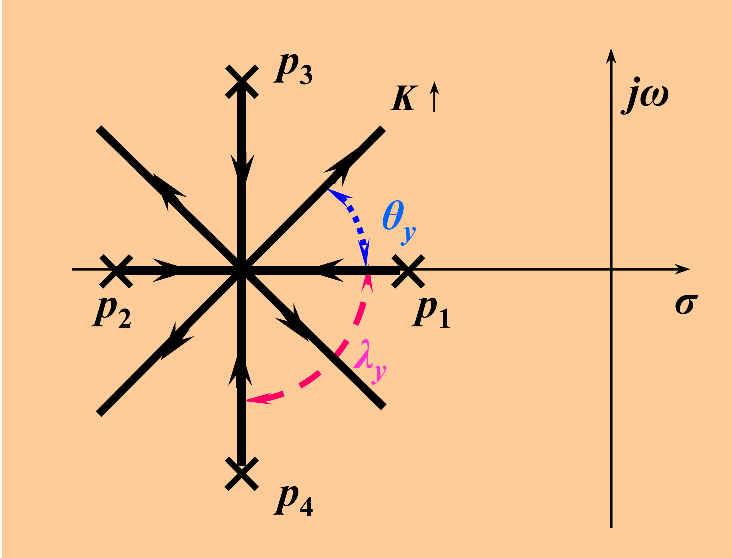
法则 8: 根轨迹的交叉点

2) 交叉点

如果在根轨迹上的给定点处$W(s)$ 的 y-1 阶导数等于零, 则有 y条根轨迹分支在该点相聚又分离, 因此, 在该点处根轨迹汇合。

进入该点的两条相邻的根轨迹夹角设定为 λ_y。

离开该点的根轨迹分支与邻近的进入该点的根轨迹分支的夹角设定为 θ_y。



$$\lambda_y = \pm\frac{360^\circ}{y}$$

$$\theta_y = \pm\frac{180^\circ}{y}$$

根轨迹（K>0）——绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$

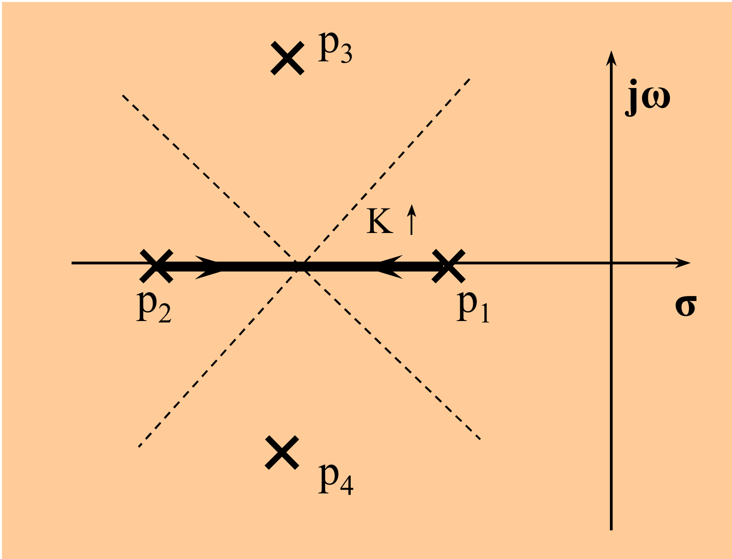
开环极点: $n=4,\quad p_1=-2,\quad p_2=-4,\quad p_{3,4}=-3\pm j1$

开环零点: $w=0$

渐近线:

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2k)180^\circ}{4}=\begin{cases}45^\circ\\135^\circ\\-135^\circ\\-45^\circ\end{cases}$$

$$\sigma_0=\frac{-2-4-3-3}{4-0}=-3$$



根轨迹（K>0）— — 绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$

出射角

$$\begin{aligned}\phi_{p_3} &= 180° - \angle(p_3-p_1) - \angle(p_3-p_2) - \angle(p_3-p_4)\\ &= 180° - arctg(-1) - arctg(1) - 90°\\ &= -90°\end{aligned}$$

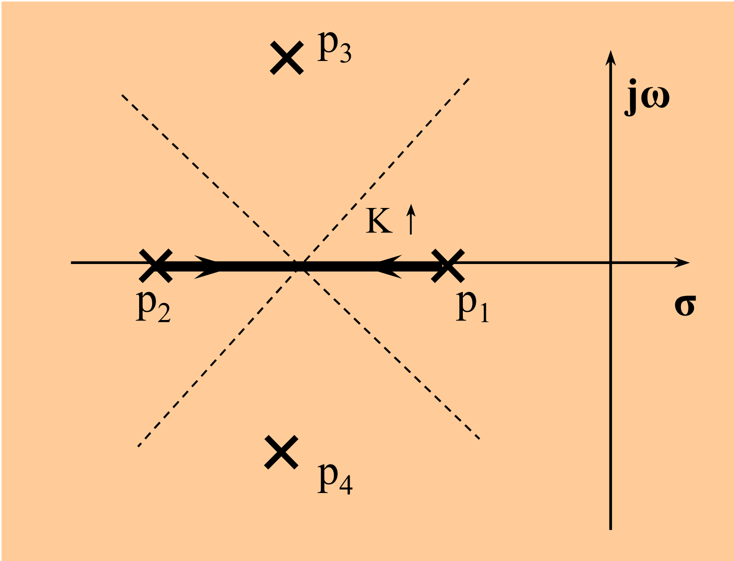
$$\phi_{p_4} = 90°$$

实轴上的分离点（方法1）

$$\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+4}+\frac{1}{r+3+j1}+\frac{1}{r+3-j1}=0$$

$$r=-3$$

$$p_{3,4}=-3\pm j1$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$

实轴上的分离点（方法2）：

$$W(s)=(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)=(s^2+6s+8)(s^2+6s+10)$$

$$W'(s)\big|_{s=-3}=\left[(2s+6)(s^2+6s+10)+(s^2+6s+8)(2s+6)\right]\big|_{s=-3}=0$$

$$W''(s)\big|_{s=-3}=2(2s^2+12s+18)+(2s+6)(4s+12)\big|_{s=-3}=0$$

$$W'''(s)\big|_{s=-3}=\left[2(4s+12)+(16s+48)\right]\big|_{s=-3}=0$$

$W^{(4)}(s)\big|_{s=-3}=24$ ⇒ y=4 ⇒

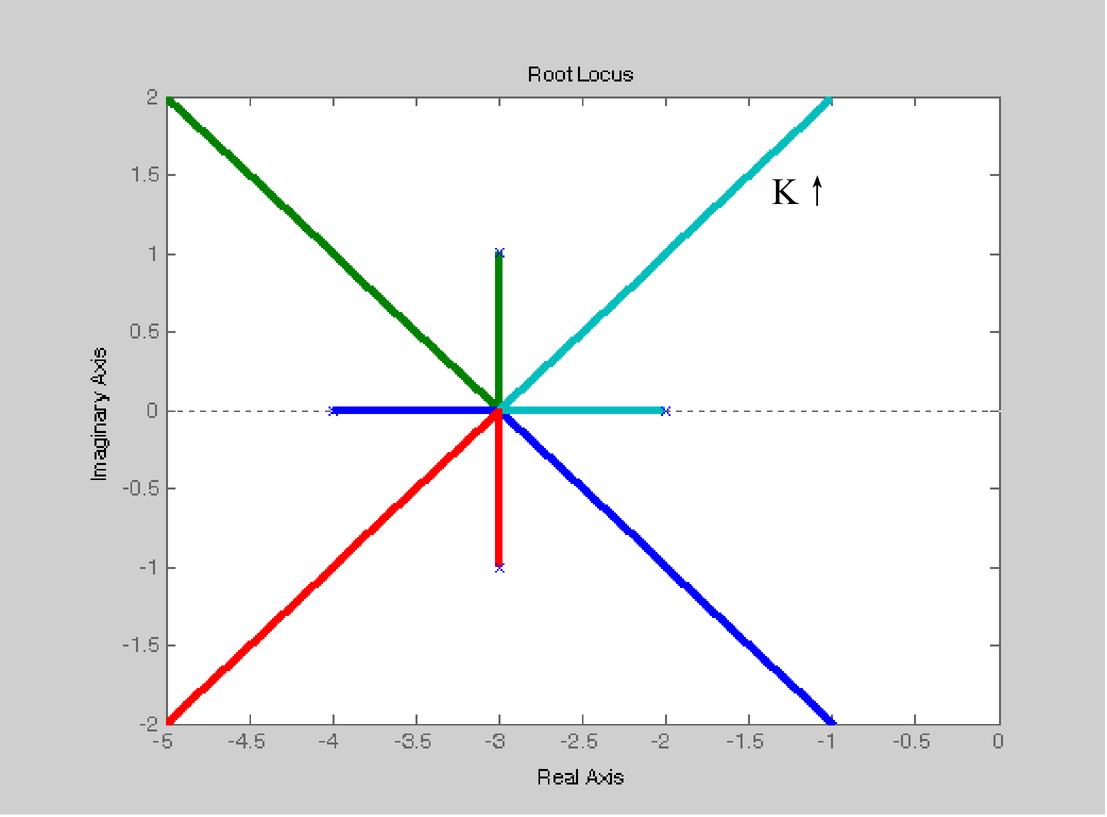
进入实分离点的轨线方向角0°, 90°, 180°, 270°

离开实分离点的轨线方向角45°, 135°, 225°, 315°

根轨迹（K>0）－－绘制法则举例

例 5-10: 绘制G(s)H(s)的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+10)}$$



根轨迹（K>0）－－绘制法则9

法则 9:系统根之和的守恒（**n-2>=w**时）

考虑如下形式的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \quad w\le n-2$$

闭环特征方程

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

其中 λ_i 是根轨迹上对应于同一K值的n个点

根轨迹（K>0）－－绘制法则9

法则 9: 系统根之和的守恒（n-2>=w时）

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K\prod_{i=1}^{w}(s-z_i)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

方程两侧表示为多项式形式

$$\left(s^n-\sum_{j=1}^{n}p_j s^{n-1}+\cdots\right)+K\left(s^w-\sum_{i=1}^{w}z_i s^{w-1}+\cdots\right)=s^n-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^{n-1}+\cdots$$

对于$w\le$ n-2的开环传递函数, 令方程两端 s^{n-1} 的系数相等，可以得到

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}p_j=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}$$

p_j 表示所有的开环极点

λ_j 表示闭环特征方程的根

结论：对于w ≤ n-2的开环传递函数，当K由0变化到∞时, 系统的根之和是常数. 换句话说, 系统的根之和与K无关

小结：根轨迹绘制法则

- 法则 1: 根轨迹的分支数、对称性和连续性
- 法则 2: 根轨迹的起点、终点
- 法则 3: 根轨迹的渐近线
- 法则 4: 实轴上的根轨迹
- 法则 5: 根轨迹的分离点/会合点
- 法则 6: 复数极点 (或零点)的出射角(入射角)
- 法则 7: 根轨迹与虚轴的交点
- 法则 8: 根轨迹的交叉点
- 法则 9: 系统根之和守恒

注意：根轨迹是一种几何图解法：绘制出根轨迹后，根轨迹上任一点s对应的K值都可由幅值定理求出：

$$K_1 = \frac{|s_1 - p_1|\cdot|s_1 - p_2|\cdots|s_1 - p_n|}{|s_1 - z_1|\cdot|s_1 - z_2|\cdots|s_1 - z_w|} = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s_1 - p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s_1 - z_j|}$$

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

例5-11 开环传递函数$G(s)H(s)$，绘制根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

1)开环极点: $n=2, p_1=-1+j, p_2=-1-j$

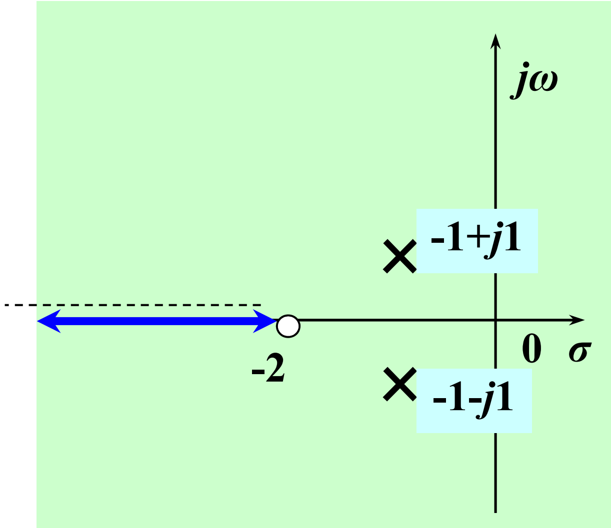
开环零点: $w=1, z_1=-2$

2) 两条根轨迹

3) 实轴上的根轨迹(-∞,-2]

4) 渐近线夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{1}=180^\circ$$



根轨迹（$K>0$）—— 绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

5) 实轴上的分离点d

$$\frac{1}{d+1-j1}+\frac{1}{d+1+j1}=\frac{1}{d+2}$$

或者

$$-K=\frac{s^2+2s+2}{s+2}$$

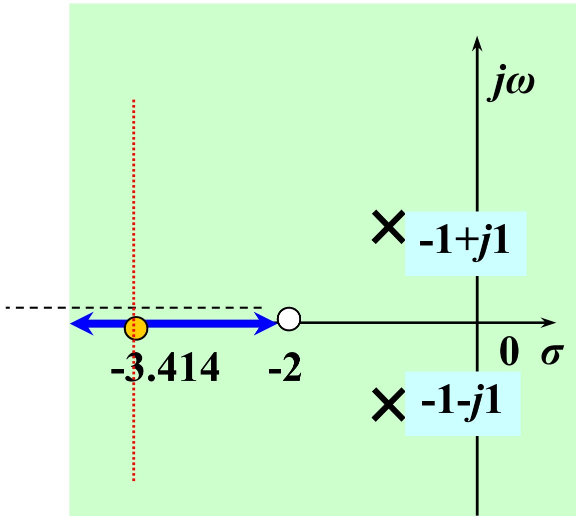
$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=0 \quad\Rightarrow\quad d^2+4d+2=0$$

$d_1=-3.414$

$d_2=-0.586$ 舍弃

分离角：

$$\frac{(2h+1)180^\circ}{l}=\frac{(2h+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$



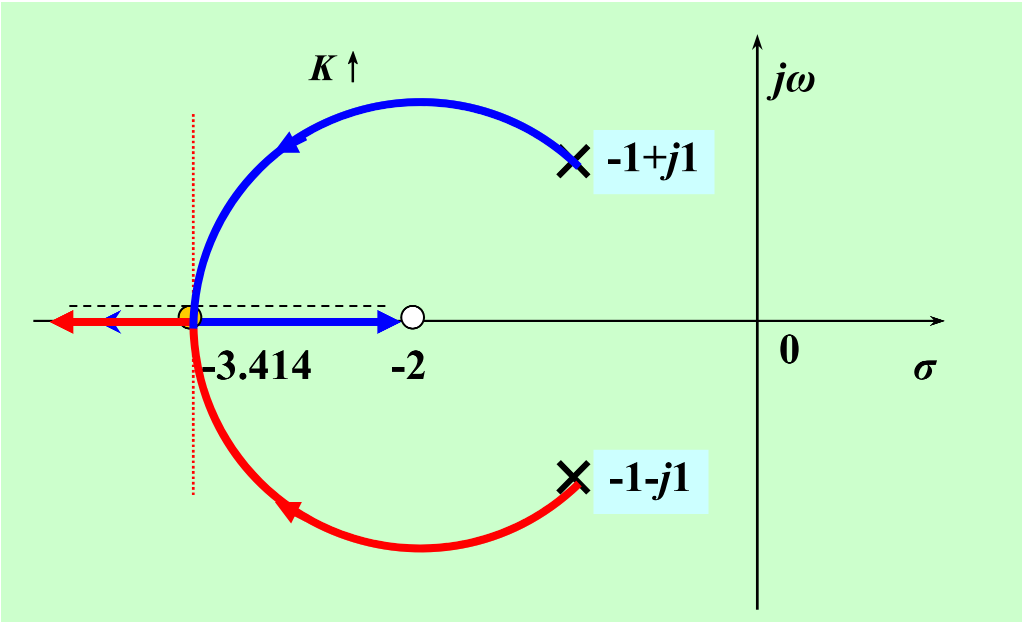
根轨迹（*K*>0）—— 绘制法则举例

6) 极点–1+*j*1处的出射角Φ_{1_D}

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$\phi_{1_D}=(1+2h)180^\circ+\psi_1-\phi_2=(1+2h)180^\circ+45^\circ-90^\circ=135^\circ$$

类似地，极点 –1-*j*1处的出射角是 –135°．



可以证明，这个系统的根轨迹是以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

如何证明？

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

可以证明，这个系统的根轨迹上以(-2, j0) 为圆心，以1.414为半径的圆

方法 1

$$z_1=-2,\ p_1=-1+j1\quad p_2=-1-j1$$

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$$

假设$s=u+jv$ 是根轨迹上的一个点，根据相角条件

$$\angle(s-z_1)-\angle(s-p_1)-\angle(s-p_2)=\pm180^\circ$$

将 z_1, p_1, p_2 和$s=u+jv$ 代入上述方程

$$\angle(u+2+jv)-\left[\angle(u+1+j(v-1))+\angle(u+1+j(v+1))\right]=\pm180^\circ$$

$$tg^{-1}\frac{v}{u+2}-\left[tg^{-1}\frac{v-1}{u+1}+tg^{-1}\frac{v+1}{u+1}\right]=\pm180^\circ$$

应用公式

$$tg^{-1}x\pm tg^{-1}y=tg^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp x\cdot y}$$

根轨迹（*K*>0）—— 绘制法则举例

$$tg^{-1}\frac{\dfrac{v}{u+2}-\dfrac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}}{1+\dfrac{v}{u+2}\cdot\dfrac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}}=\pm180^\circ$$

$$\frac{v}{u+2}-\frac{2v(u+1)}{(u+1)^2-(v^2-1)}=0$$

$$u^2+4u+2+v^2=0$$

$$(u+2)^2+v^2=(\sqrt{2})^2$$

这已是圆的方程

即已证明，这个系统的根轨迹是以(-2, *j*0) 为圆心，以1.414为半径的圆

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

方法 2　假设$s=u+jv$ 是根轨迹上的一个点, 将它代入特征方程

$$s^2+s(K+2)+2K+2=0$$

$$(u+jv)^2+(u+jv)(K+2)+2K+2=0$$

令方程的实部和虚部分别为零，有

$$u^2-v^2+u(K+2)+2K+2=0$$

和 $$2uv+v(K+2)=0$$

即 $$K=-2u-2$$

$$u^2+v^2+4u+2=0$$

$$(u+2)^2+v^2=(\sqrt{2})^2$$

结论：由两个开环极点（实极点或复数极点）和一个开环实零点组成的二阶系统，只要实零点没有位于两个实极点之间，当开环根轨迹增益由零变到无穷大时，复平面上的闭环根轨迹，一定是以实零点为圆心，以实零点到分离点的距离为半径的一个圆（当开环极点为两个实极点时）或圆的一部分（当开环极点为一对共轭复数极点时）。

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

例5-12 开环传递函数$G(s)H(s)$, 试绘制根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

1)开环极点: $n=4,\ p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-1+j1,\ p_4=-1-j1$

开环零点: $w=0$

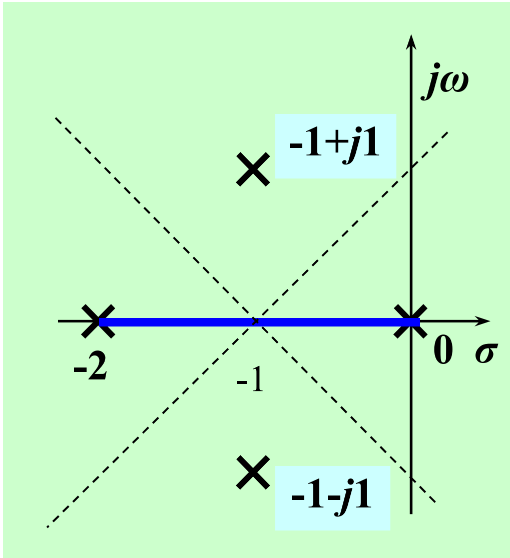
2) 有四条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹：[-2, 0]

4) 渐近线的夹角与交点

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{4}=\pm45^\circ,\pm135^\circ$$

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{n-w}=\frac{0-2-1-1}{4}=-1$$



根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

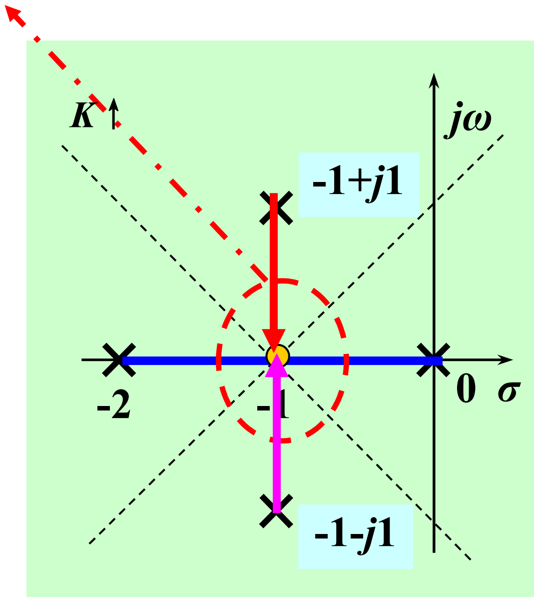
5) 实轴上的分离点

$$\frac{d}{ds}[(s(s+2)(s^2+2s+2)]\Big|_{s=d}=0$$

$$d^3+3d^2+3d+1=0$$

$$d_1=d_2=d_3=-1$$

4重 极点: 有4 条根轨迹分支在该点会合



分离角: $\frac{(2h+1)180°}{l}=\frac{(2h+1)180°}{4}=\begin{cases}\pm45°\\ \pm135°\end{cases}$

6) 极点–1+j1处的出射角 Φ_{3_D}

$$\begin{aligned}\varphi_{3_D}&=(1+2h)180°-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_4)\\&=(1+2h)180°-(135°+45°+90°)\\&=-90°\end{aligned}$$

类似地,

极点-1-j1处的出射角为 90°．

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

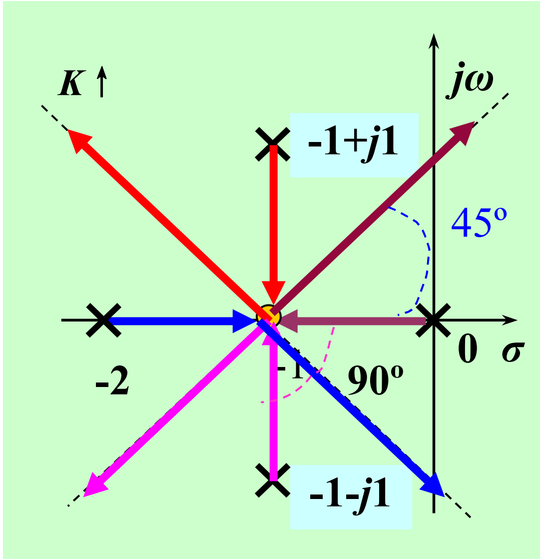
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

6-1) 进入该点的相邻两条根轨迹分支的夹角

$$\lambda_4=\pm\frac{360^\circ}{4}=\pm 90^\circ$$

6-2) 离开该点的一条根轨迹分支与相邻的进入该点的根轨迹分支的夹角

$$\theta_4=\pm\frac{180^\circ}{4}=\pm 45^\circ$$



根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

7) 根轨迹与虚轴的交点

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)+K}$$

特征方程:

$$\Delta(s)=s^4+4s^3+6s^2+4s+K$$

Routh表:

s^4	1	6	K
s^3	4	4	
s^2	5	K	
s^1	$\frac{20-4K}{5}$		
s^0	K		

$$\frac{20-4K}{5}=0 \quad \Rightarrow \quad K=5$$

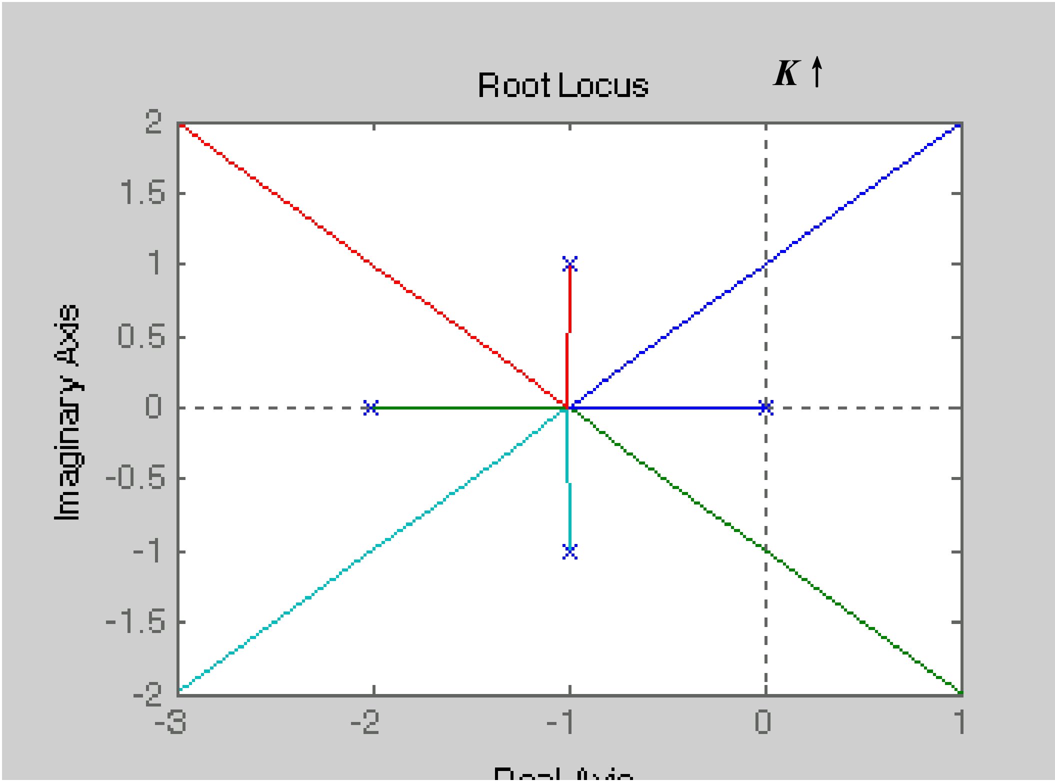
由 s^2 行构造的辅助方程：

$$5s^2+K=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{\frac{K}{5}}=\pm j1$$

根轨迹（K>0）—— 绘制法则举例

根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$



当 K>5, 系统将不稳定.

绘制根轨迹（$K>0$）的方法小结（1）

- 根轨迹的起止：起于开环极点，终于开环零点或无穷远点
- 根轨迹的分支数：=max(n, w)

  当$n>w$时，等于开环极点数；当$w>n$时，等于开环零点数
- 根轨迹的对称性：关于实轴对称
- 实轴上的根轨迹：当右面的开环零极点之和为奇数的部分
- 根轨迹的渐近线：当$n>w$时，共有（n-w）条：

  与实轴的夹角为 $\gamma=\dfrac{\pm(2h+1)180^\circ}{n-w}$ 交点为 $\sigma_0=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(p_i)-\sum_{j=1}^{w}\mathrm{Re}(z_i)}{n-w}$

- 分离点与会合点（必是 l 重根）

  由 $\dfrac{d[-K(s)]}{ds}=0$ 确定，且与实轴成 $\theta=\dfrac{\pm 180^\circ}{l}$ 角度离开（会合）

  或 $$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{w}\frac{1}{s-z_j}}$$

绘制根轨迹（K＞0）的方法小结（2）

- 与虚轴的交点：由Routh判据求得，或直接将$s=j\omega$代入特征方程求出特征根

- 出射角与入射角

  自复极点的p_k的出射角

$$\phi_{p_k}=\pm 180°+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_k-z_j)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\angle(p_k-p_i)$$

  至复零点的z_k的入射角

$$\psi_{z_k}=\pm 180°+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k-p_i)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{w}\angle(z_k-z_j)$$

注意：根轨迹是一种几何图解法：绘制出根轨迹后，任一点s_1的K值K_1都可由幅值定理求出：

$$K_1=\frac{|s_1-p_1|\cdot|s_1-p_2|\cdots|s_1-p_n|}{|s_1-z_1|\cdot|s_1-z_2|\cdots|s_1-z_w|}=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s_1-p_i|}{\prod_{j=1}^{w}|s_1-z_j|}$$

Thanks!