第五章 根轨迹方法

Chapter 5 Root Locus

第五章内容

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

系统性能分析——回顾

稳（稳定性）

全部闭环极点位于左半开平面

快（暂态性能）

主导极点（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（1个或2个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的1/5）

主导根轨迹分支：根轨迹中最接近于虚轴的1条或2条根轨迹分支

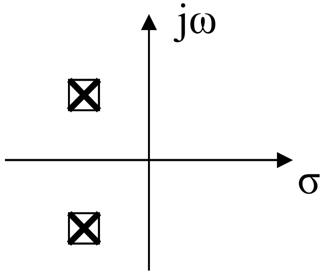
二阶系统的标准形式

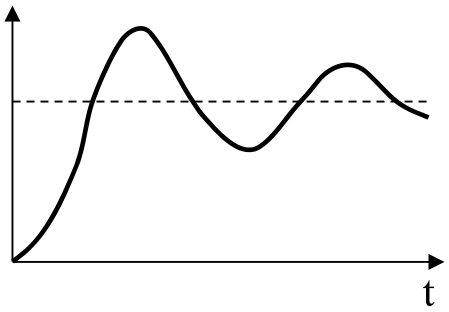
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

阻尼比：ζ

自然频率：ω_n

系统性能分析——回顾

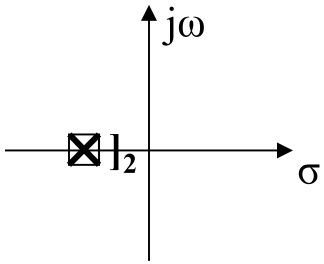


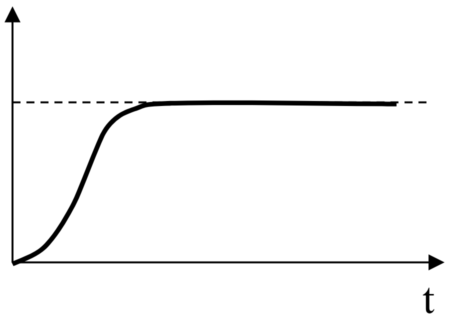


欠阻尼， $\sigma = -\zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

0<ζ <1

$\boldsymbol{s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d}$

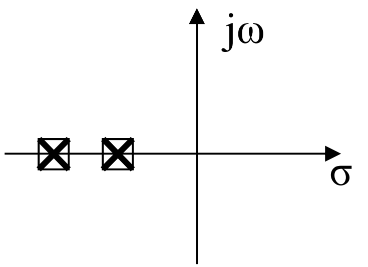


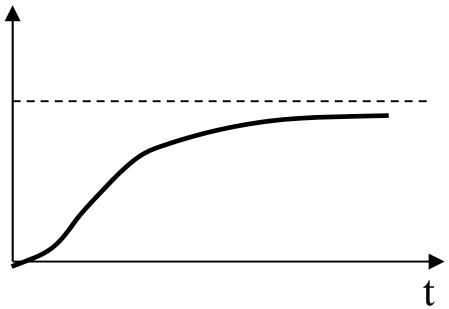


临界阻尼， $\sigma = -\zeta\omega_n$

ζ =1

$\boldsymbol{s_{1,2} = \sigma}$



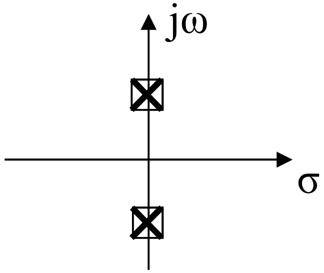


过阻尼

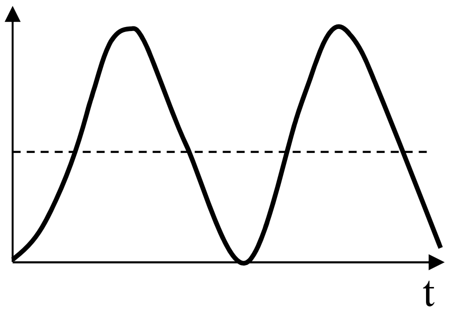
ζ>1

$\boldsymbol{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$

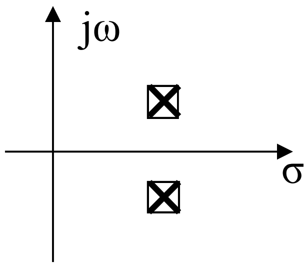
系统性能分析——回顾

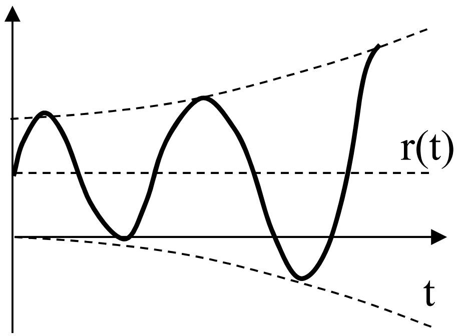


$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

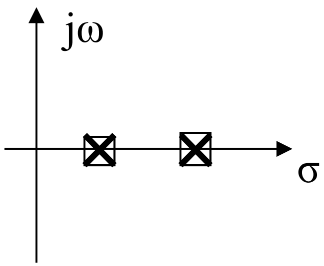


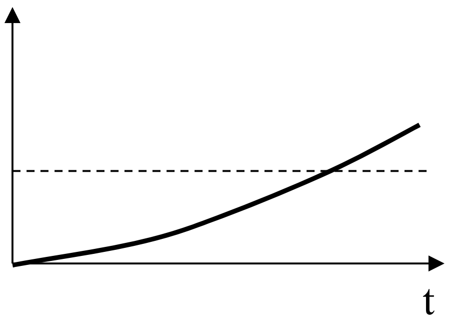
ζ=0　无阻尼





-1<ζ<0　指数增大震荡





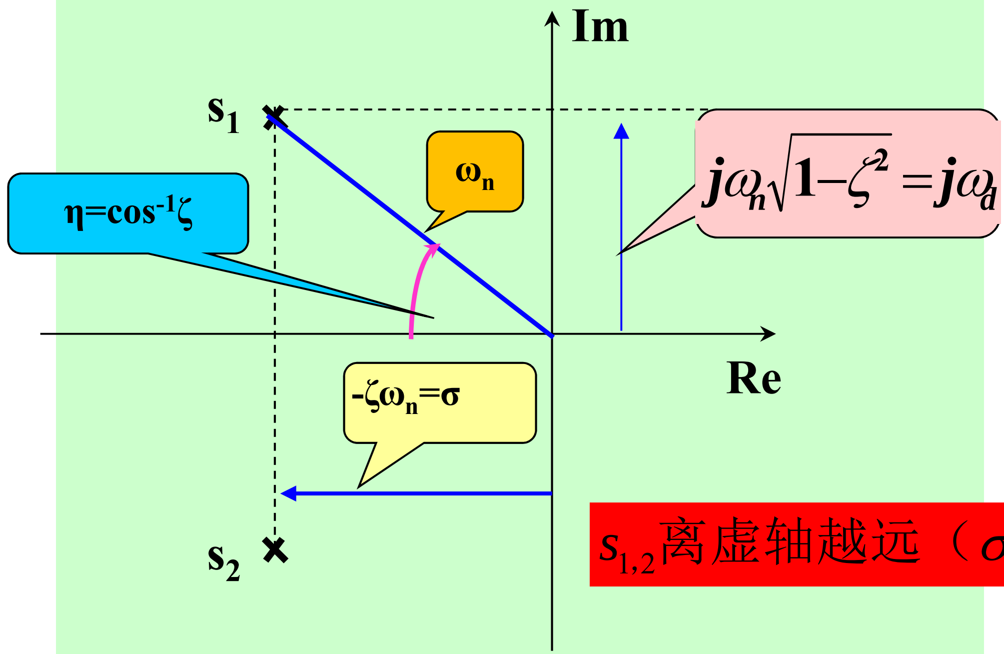
ζ<-1　指数增大

根轨迹概述——根轨迹定性分析

工程上常设计闭环极点，目标为带合适阻尼比的欠阻尼系统$(0<\zeta<1)$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\sigma \pm j\omega_d$$

$\eta\in(0,\pi/2)$代表负实轴与向量s_1的夹角（顺时针方向为正）



角η越大（ζ越小），则超调越大

$s_{1,2}$离虚轴越远（σ越小或$|\sigma|$越大），则调节时间越短

系统性能分析——回顾

准（稳态性能）

单位负反馈系统的“型”取决于原点处的开环极点

无位于原点的开环极点，0型系统

有1个位于原点的开环极点，1型系统

有2个位于原点的开环极点，2型系统

…

单位负反馈系统的稳态误差系数与根轨迹增益有关

单位负反馈系统开环传递函数$G(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s+10)(s+0.5)}$

0型系统

稳态位置误差系数$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G(s)=\dfrac{K\times 2}{10\times 0.5}=0.4K$

系统性能分析——核心步骤

通常由系统的动态性能指标来在主导根轨迹分支上确定主导极点

一般步骤：

动态性能指标：调节时间t_s，超调σ%，上升时间t_r，峰值时间t_p

↕

阻尼比ζ, 自然频率ω_n, 阻尼振荡频率ω_d, 主导极点实部σ

↕

在主导根轨迹分支上选择合适的主导极点

↕

基于主导极点, 应用幅值条件计算相应的根轨迹增益

系统性能分析——核心步骤

其它根轨迹分支上的特征根可以用下列任一方法求取:

方法 1: 确定其它根轨迹分支上的点,使其满足具有与主导极点相同的根轨迹增益

方法2: 如果除了一个实根或者一对共轭复根之外,其余特征根均已知,则可用下列任一方法确定未知的特征根

1） 除以由已知特征根构成的特征多项式,商为未知特征根构成的多项式

2） 对于$m \le n-2$的系统,采用规则 9 求取系统的特征根

系统性能分析——举例

例5-24 已知负反馈控制系统前向通道传递函数G(s)与反馈通道传递函数H(s),绘制根轨迹，并给出单位阶跃响应c(t)(其中主导极点的ζ=0.5)

$$G(s)=\frac{K_1}{s(s^2/2600+s/26+1)},\quad K_1>0 \qquad H(s)=\frac{1}{0.04s+1}$$

???

解：将G(s)、 H(s)重写

$$G(s)=\frac{2600K_1}{s(s^2+100s+2600)} \qquad H(s)=\frac{25}{s+25}$$

则

$$G(s)H(s)=\frac{65000K_1}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}=\frac{K}{s^4+125s^3+5100s^2+65000s}$$

$$K=65000K_1$$

系统性能分析——举例

1)开环极点: $n=4 \quad p_1=0, p_2=-25, p_3=-50+j10, p_4=-50-j10$

开环零点: $w=0$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

2) 4条根轨迹分支

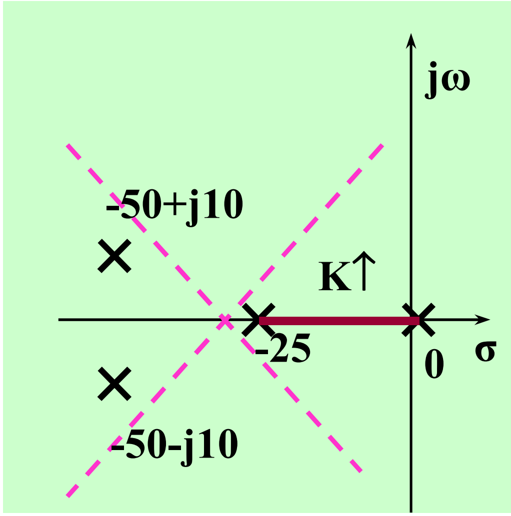
3) 实轴上的根轨迹: [-25，0]

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{4}=\pm 45^\circ,\pm 135^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{n-w}=\frac{0-25-50-50}{4}=-31.25$$



系统性能分析——举例

5) 实轴上的分离点d

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+25}+\frac{1}{d+25-j10}+\frac{1}{d+25+j10}=0$$

方法 2

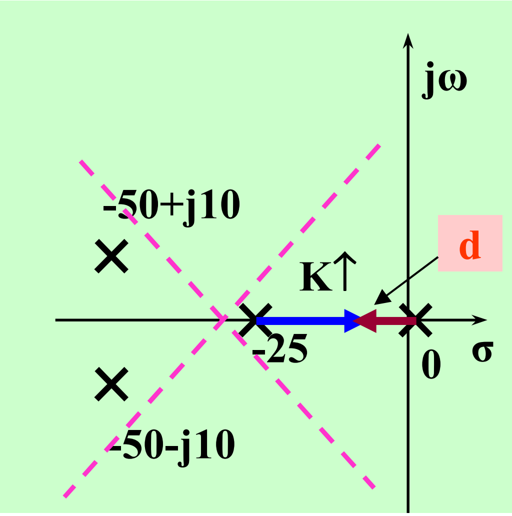
$$-K=s^4+125s^3+5100s^2+65000s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=4d^3+375d^2+10200d+65000=0$$

$d=-9.15$

分离角:

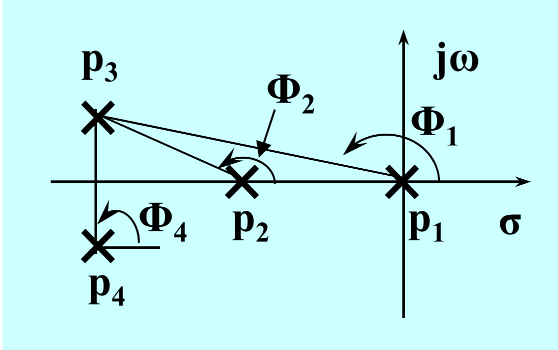
$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l}=\frac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$$



6) 极点 –50+j10 处的出射角 Φ_{3_D}

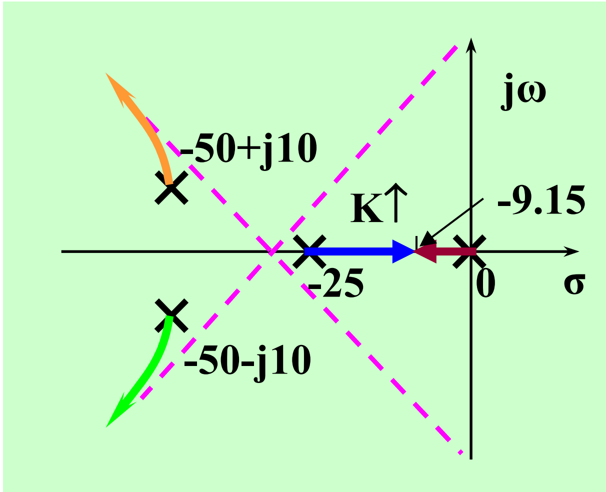
$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\begin{aligned}\phi_{3_D}&=(1+2h)180^\circ-(\phi_1+\phi_2+\phi_4)\\&=(1+2h)180^\circ-(168.7^\circ+158.2^\circ+90^\circ)\\&=123.1^\circ\end{aligned}$$



同样地,

极点–50-j10处的出射角为 –123.1°



7) 根轨迹与虚轴的交点:

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\Delta(s)=s^4+125s^3+5100s^2+65000s+65000K_1$$

根据Routh表:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5100 & 65000K_1 \\ s^3 & 1 & 520(after\ \ division\ \ by\ \ 125) & \\ s^2 & 1 & 14.2K_1(after\ \ division\ \ by\ \ 4580) & \\ s^1 & 520-14.2K_1 & & \\ s^0 & 14.2K_1 & & \end{array}$$

$$520-14.2K_1=0 \quad \Rightarrow \quad K_1=36.6$$

由s² 行构造辅助方程：

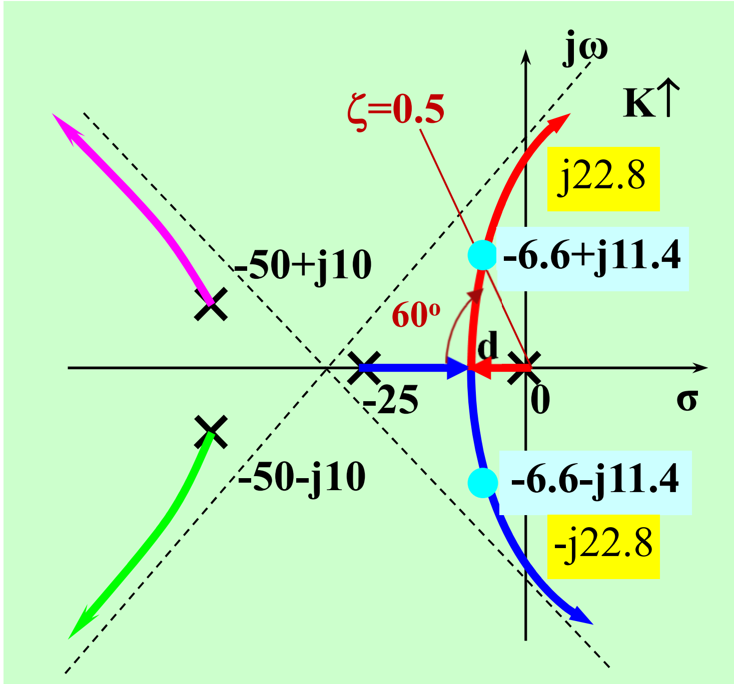
$$s^2+14.2K_1=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{14.2K_1}=\pm j22.8$$

系统性能分析——举例

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

8) 绘制ζ=0.5的射线，其中η

$$\eta=\cos^{-1}0.5=60°$$



由图可以得到主导极点

$$s_{1,2}=-6.6\pm j11.4$$

9) 增益

$$K=65000K_1=\left(|s|\cdot|s+25|\cdot|s+50-j10|\cdot|s+50+j10|\right)\Big|_{s=-6.6+j11.4}$$

$K = 598800 = 65000K_1$，　$K_1 = 9.21$

系统性能分析——举例

10)满足幅值K=598800的其余特征根

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

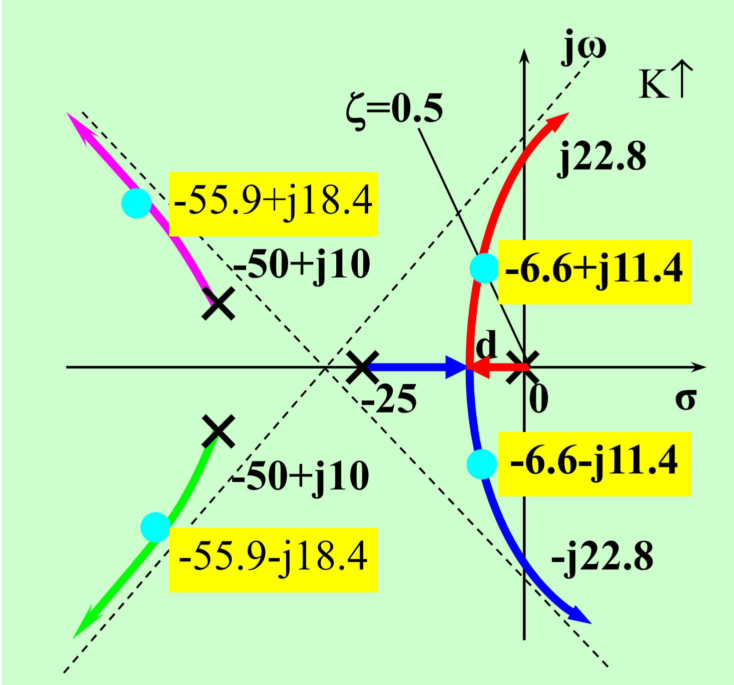
$$1+G(s)H(s)=s^4+125s^3+5100s^2+65000s+598800=0$$

$$\frac{s^4+125s^3+5100s^2+65000s+598800}{(s+6.6+j11.4)(s+6.6-j11.4)}$$

$$=\frac{s^4+125s^3+5100s^2+65000s+598800}{s^2+13.2s+173.52}$$

$$=s^2+111.8s+3463$$

$$\therefore s_{3,4}=-55.9\pm j18.4$$



方法 2

因为满足分母阶次n>=分子阶次w+2，故可用法则九（根之和）法则来确定根的实部

方法 2

由法则九（根之和）

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$0-25+(-50+j10)+(-50-j10)$$
$$=(-6.6+j11.4)+(-6.6-j11.4)+(\sigma+j\omega_d)+(\sigma-j\omega_d)$$

$$s_{3,4}=-55.9\pm j18.4$$

$$\Phi(s)=\frac{G}{1+GH}=\frac{\frac{N_1}{D_1}}{1+\frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}}=\frac{N_1D_2}{\text{closed-loop roots}}$$

$$G(s)=\frac{2600K_1}{s(s^2+100s+2600)}\qquad H(s)=\frac{25}{s+25}$$

11) 闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{24040(s+25)}{s^4+125s^3+5100s^2+65000s+65000K_1}$$

12) 阶跃响应c(t)

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{24040(s+25)}{(s+6.6+j11.4)(s+6.6-j11.4)(s+55.9+j18)(s+55.9-j18)}$$

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+6.6-j11.4}+\frac{A_2}{s+6.6+j11.4}+\frac{A_3}{s+55.9-j18}+\frac{A_4}{s+55.9-j18}$$

$$A_0=1.0 \quad A_1=0.604\angle(-201.7^\circ) \quad A_3=0.14\angle(-63.9^\circ)$$

可以忽略

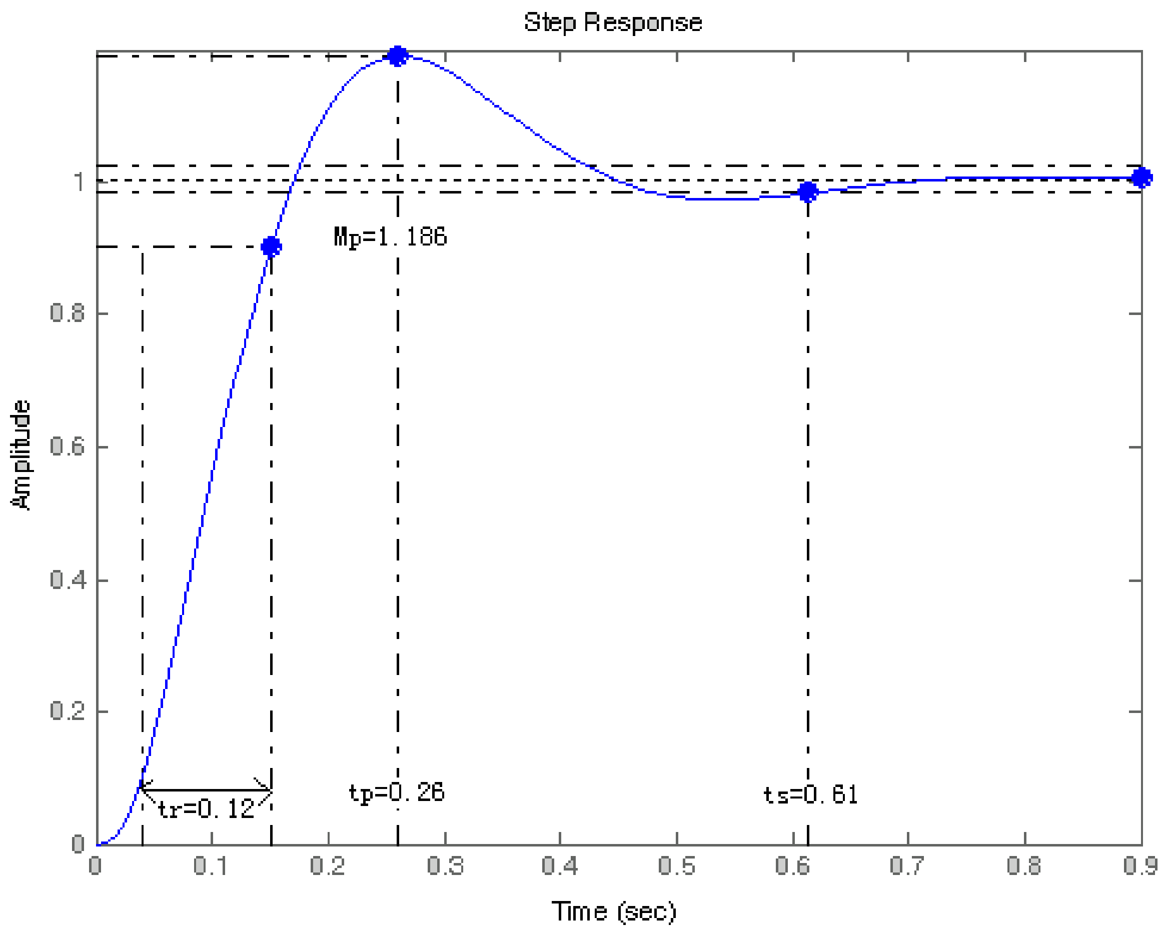
响应c(t)

$$c(t)=1+1.21e^{-6.6t}\sin(11.4t-111.7^\circ)+0.28e^{-55.9t}\sin(18t+26.1^\circ)$$

系统性能分析——举例

仿真c(t)

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$



例5-26 已知某单位负反馈控制系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s-1)},K>0$

(1) 绘制根轨迹

(2) 对任意K，系统是否稳定？若否,则确定使系统稳定的K值范围
确定使闭环系统持续振荡的参数 K 和频率 ω

(3) 若调节时间4s， 确定K值和对应的特征根

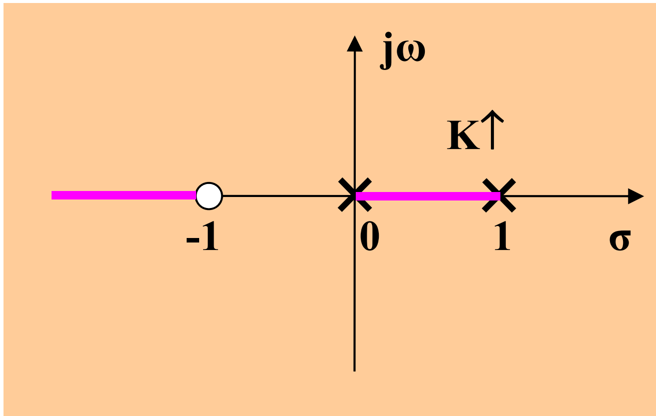
解: (1) 绘制根轨迹

1) 开环极点: $n=2,\quad p_1=0,\quad p_2=1$

开环零点: $w=1,z_1=-1$

2) 2条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹: (-∞ ,-1], [0, 1]



系统性能分析——举例

4) 渐近线与实轴的夹角

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

$$\gamma=\frac{(1+2h)180^\circ}{n-w}=\frac{(1+2h)180^\circ}{1}=180^\circ$$

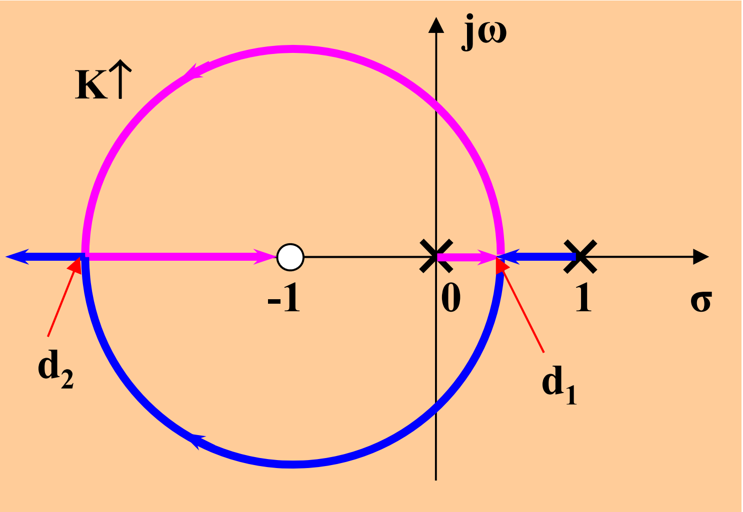
5) 实轴上的分离点*d*

$$\because -K=\frac{s(s-1)}{s+1}$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d}=s^2+2s-1=0$$

$$d_1=-1+\sqrt{2}=0.414$$
$$d_2=-1-\sqrt{2}=-2.414$$

分离角：$\dfrac{(2k+1)180^\circ}{l}=\dfrac{(2k+1)180^\circ}{2}=\begin{cases}90^\circ\\-90^\circ\end{cases}$



根轨迹的主要部分是以(-1,j0)为圆心,以 1.414 为半径的圆

(2) 确定闭环系统稳定的K值范围,以及使系统等幅振荡(持续振荡)的K和频率ω.

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

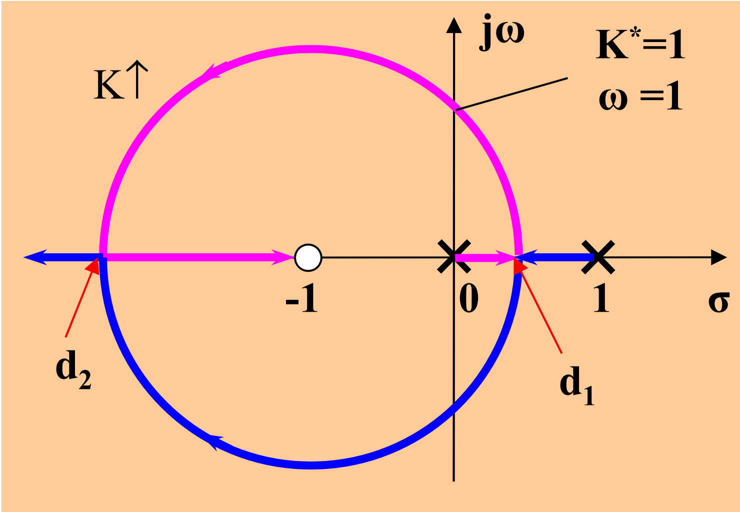
或者:从特征方程:

$$\Delta(s)=s^2+(K-1)s+K=0$$

很容易获得临界稳定的K为1,当K>1,系统稳定.

当K=1,等幅振荡的频率为ω=1

$$K^*=\frac{|s-p_1|\cdot|s-p_2|}{|s-z|}=\frac{\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{2}}=1$$



系统性能分析——举例

(3) 调节时间4s. 确定K值和相应的特征根

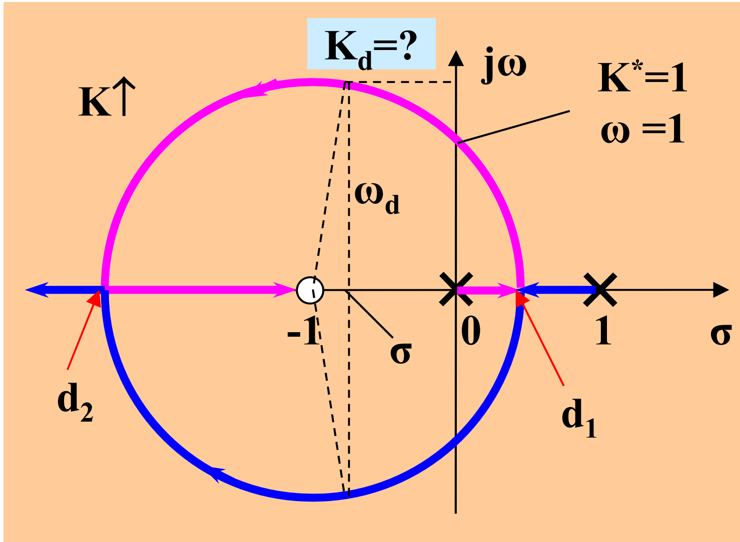
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

$$t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=4 \quad \Rightarrow \quad \sigma=-\zeta\omega_n=-0.875$$

由图，根据三角形以及半径1.414

$$\omega_d^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-(1+\sigma)^2=1.984$$

$$\omega_d=1.41$$



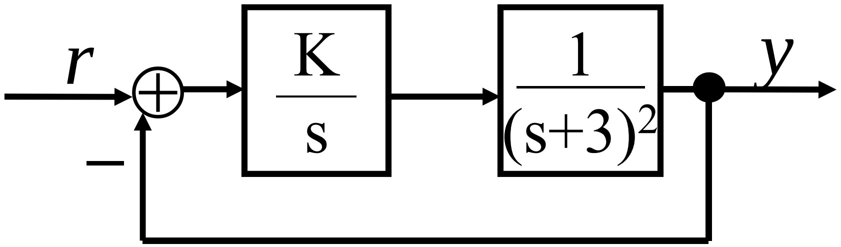
相应的特征根

$$s_{1,2}=-0.875\pm j1.41$$

运用幅值条件

$$K_d=\frac{\sqrt{0.875^2+1.41^2}\cdot\sqrt{1.875^2+1.41^2}}{\sqrt{2}}=2.753$$

例5-27 已知某单位负反馈闭环系统如图所示（K>0）



请由根轨迹确定使系统工作在**欠阻尼状态下的K值范围**，且系统在斜坡输入下的稳态误差小于0.2

解：开环传递函数G(s)

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)^2}$$

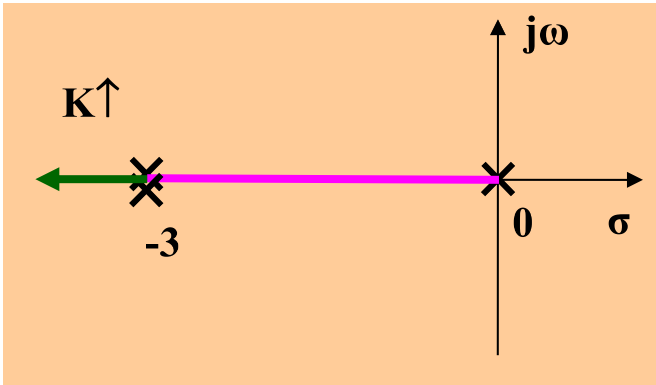
(1) 绘制根轨迹

1) 开环极点： $n=3,\quad p_1=0,\quad p_{2,3}=-3$

开环零点： $w=0$

2) 3条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹(-∞, -3) , [-3, 0]



系统性能分析——举例

4) 渐近线与实轴的夹角与交点

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{3} = \pm 60, 180^\circ \quad \sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{n} = -2$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$

5) 实轴上区间[-3， 0]的分离点*d*

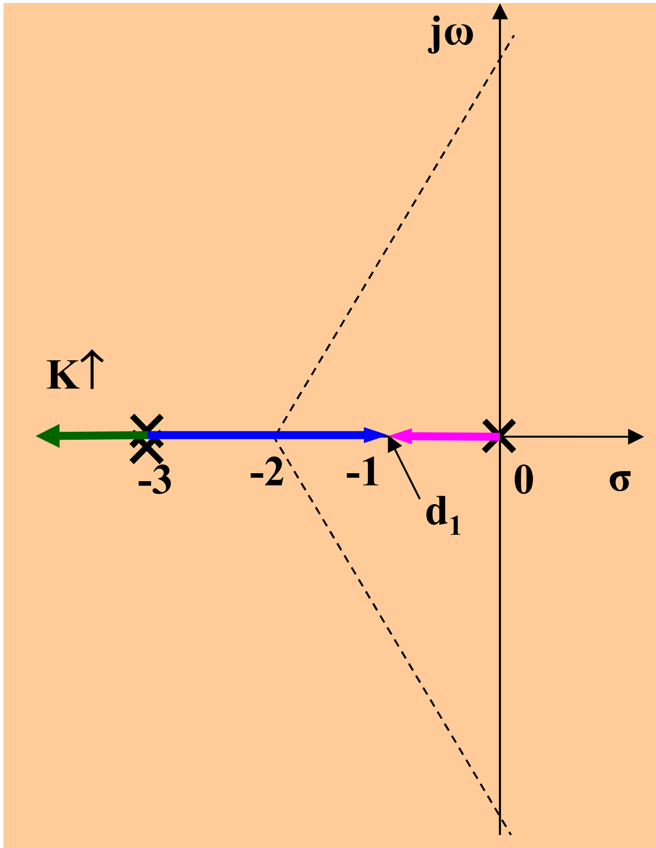
$$-K = s^3 + 6s^2 + 9s$$

$$\left.\frac{d(-K)}{ds}\right|_{s=d} = 3s^2 + 12s + 9 = 0$$

$$d_1 = -1$$
$$d_2 = -3$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$



6) 根轨迹与虚轴的交点

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)^2}$$

特征方程:

$$\Delta(s)=s^3+6s^2+9s+K$$

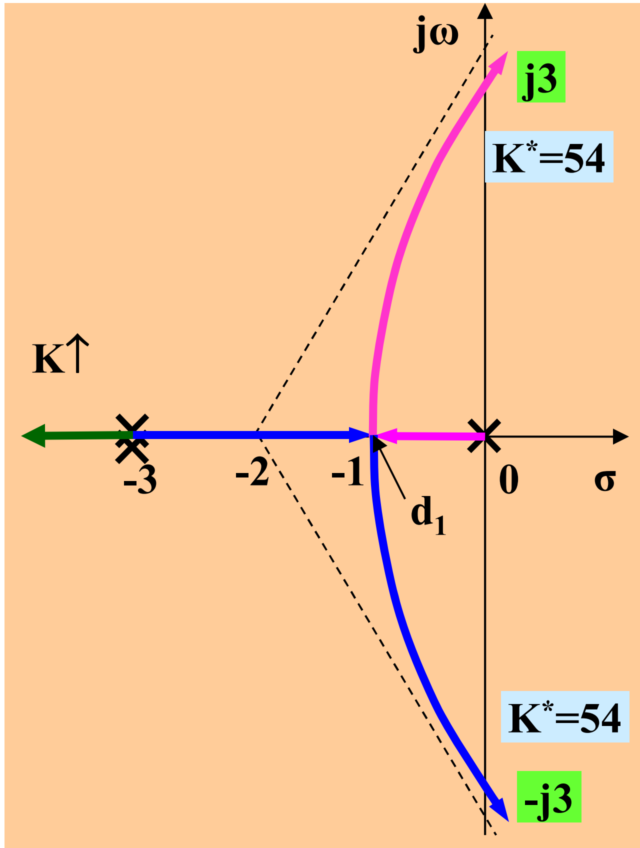
Routh表:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 6 & K \\ s^1 & \dfrac{54-K}{6} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

$K=54$

由s² 行构造辅助方程：

$$6s^2+K=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j\sqrt{\frac{K}{6}}=\pm j3$$



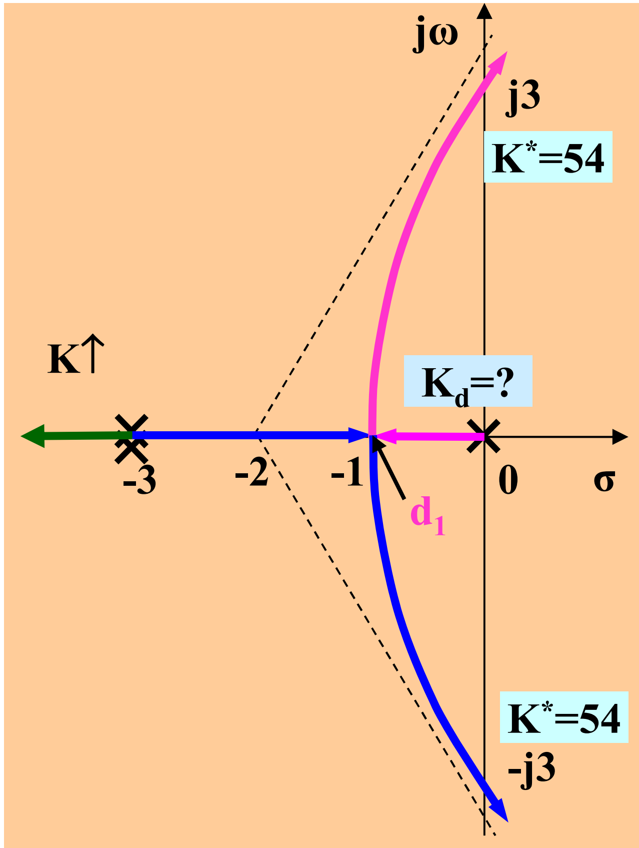
系统性能分析——举例

$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)^2}$$

(2) 由根轨迹，系统在欠阻尼状态下的K值范围

d_1处的K值 $$K_d=\left|s(s+3)^2\right|_{s=d_1=-1}=4$$

$$\therefore 4<K<54$$ 系统欠阻尼



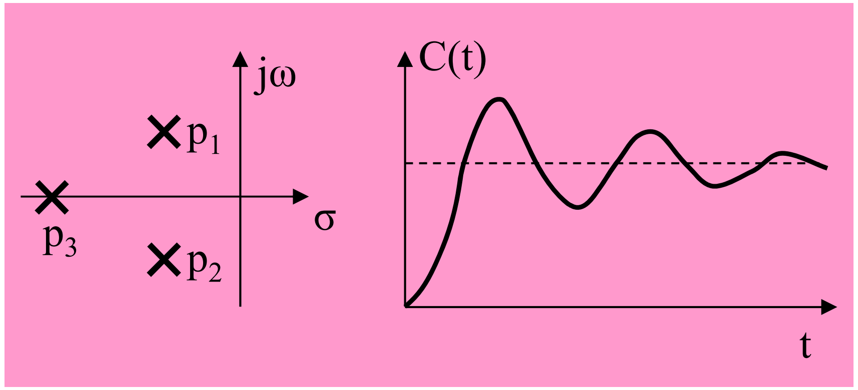
(3) 如果输入是斜坡函数，稳态误差 e_{ss} 为 (系统是 1型)

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)}=\frac{9}{K}\le 0.2 \Rightarrow K\ge 45$$

因此，满足要求的K值范围 $45\le K\le 54$

系统性能分析——附加极点

考虑一个具有复数极点和一个附加负实数极点p_3的系统，如图所示，闭环传递函数为



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s-p_3)}$$

$$K=-\omega_n^2 p_3$$

单位阶跃输入下的系统输出响应为

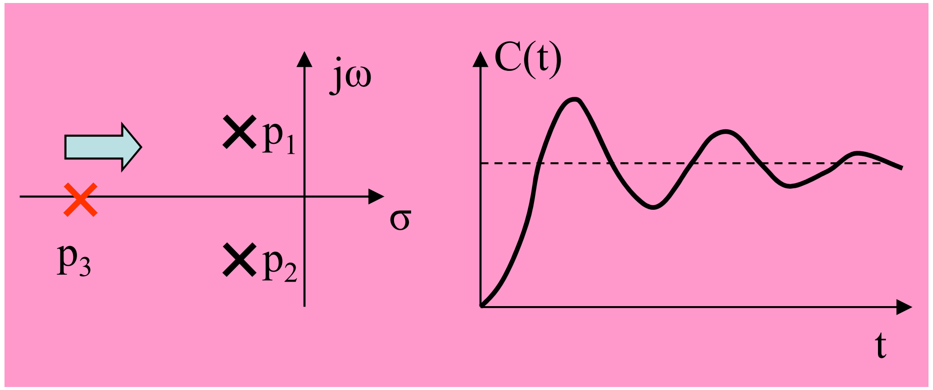
$$c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right)+A_3e^{p_3 t}$$

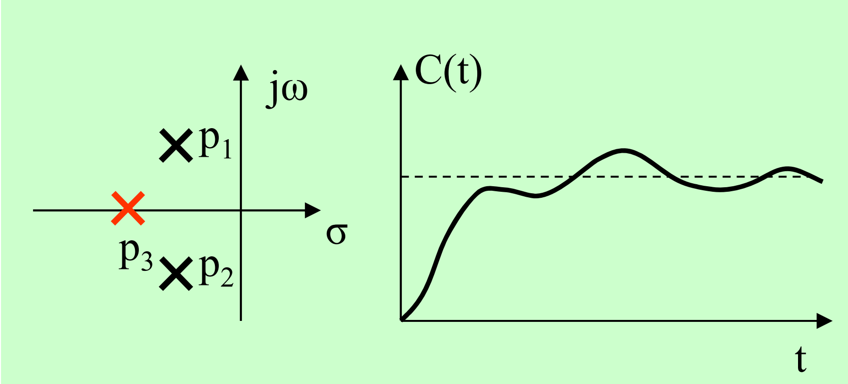
$$A_3=\left.\frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{-\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}<0$$

系统性能分析——附加极点

系统的响应：

$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi\right) + A_3 e^{p_3 t}$$



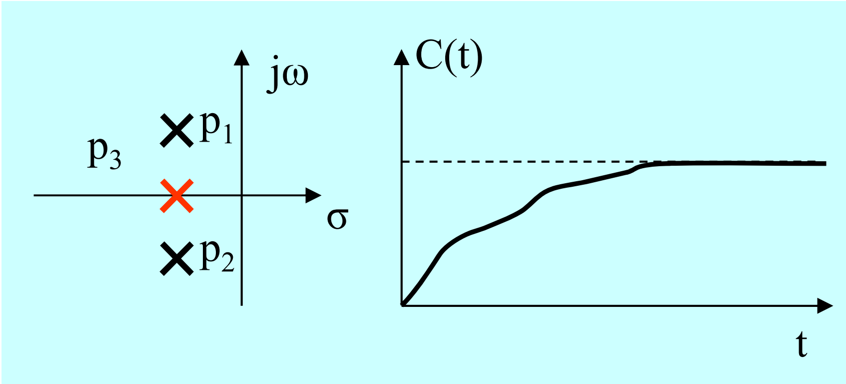


- 当极点p_3 向右侧移动，$|A_3|$增大，超调减少
- 当p_3接近但仍然在复数极点的左侧时，时域上第一个峰值小于稳态值，最大超调可能出现在第二个峰值或后面的峰值

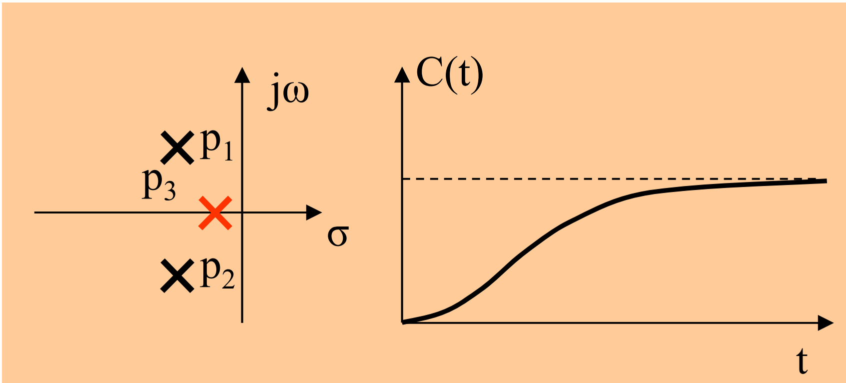
$$A_3 = \left.\frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3} = \left.\frac{-\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3} < 0$$

系统性能分析——附加极点

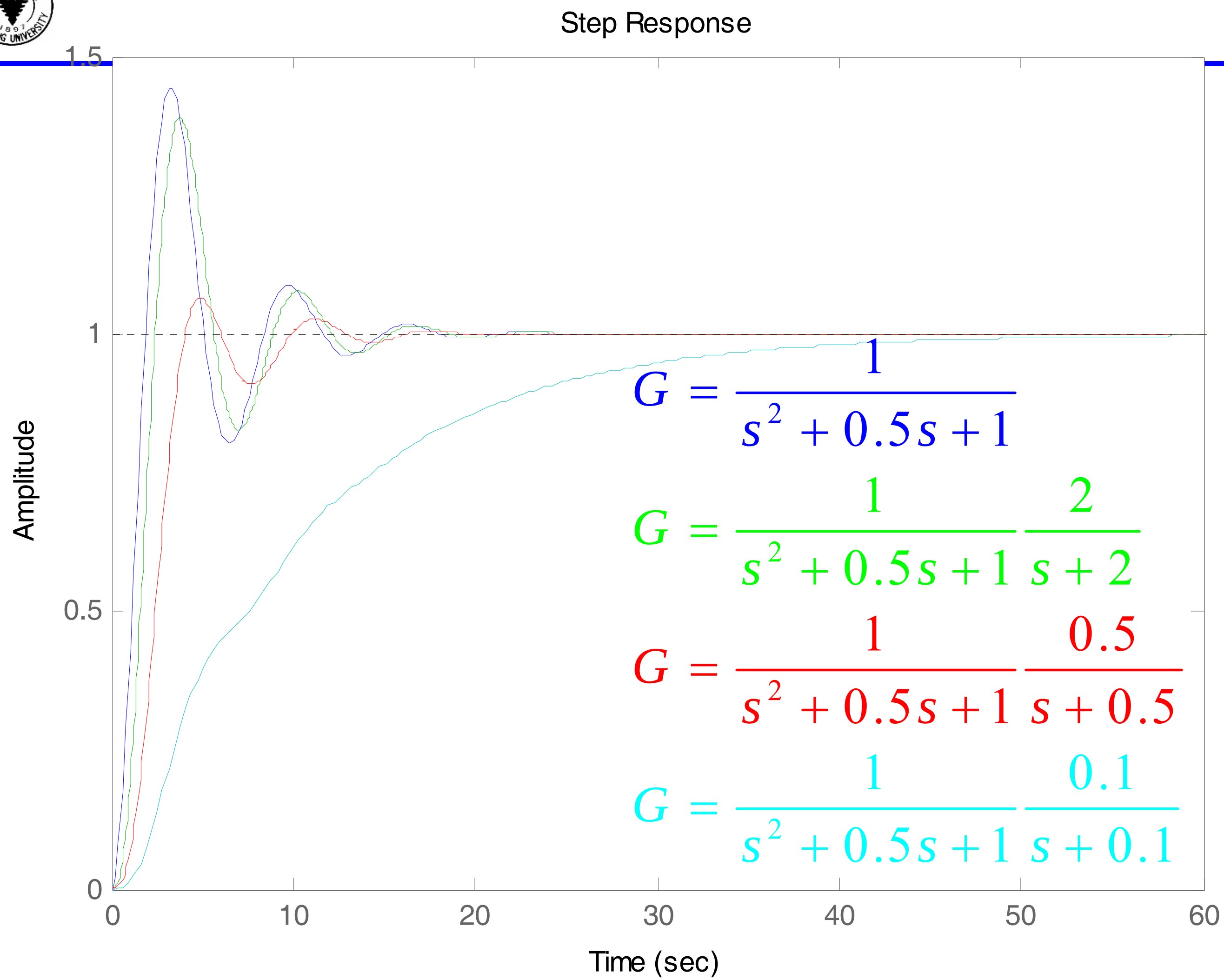
系统的响应：



- 当p_3位于复数极点在实轴的投影处，响应是单调的，没有超调。相当于临界阻尼，复数极点则导致时域响应出现波纹(ripple)



- 当p_3位于复数极点的右侧，则p_3的作用反而超过其它2个极点，系统响应特点为过阻尼


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.5
1
1.5
10
20
30
40
50
60
$G = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$
$G = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}\frac{2}{s + 2}$
$G = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}\frac{0.5}{s + 0.5}$
$G = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}\frac{0.1}{s + 0.1}$

结论:

❖ 由实数极点p_3 作用的瞬态项为 $A_3 e^{p_3 t}$,其中 A_3 <0, 因此超调 M_p 减少

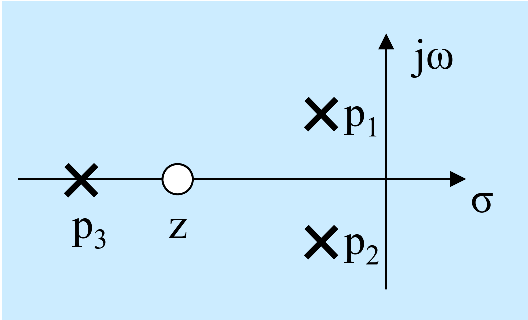
❖ 幅值A_3 取决于p_3 相对于复数极点的位置. p_3 越靠左侧, 幅值 A_3 越小, 对系统响应的影响越小.

❖ 若p_3在复数极点p_1和p_2左侧5倍以远的位置，对系统响应的影响可以忽略不计

除了增加实数极点之外，再增加一个实数零点，则会进一步影响系统的瞬态响应

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K(s-z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s-p_3)}$$

$$K=\frac{\omega_n^2 p_3}{z}$$



单位阶跃响应

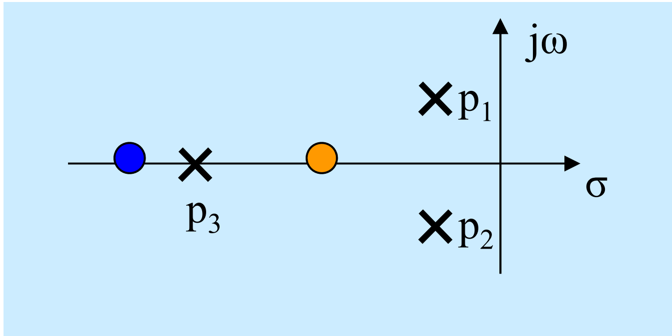
$$c(t)=1+2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi\right)+A_3e^{p_3t}$$

$$A_3=\left.\frac{\omega_n^2\frac{p_3}{z}(s-z)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}\right|_{s=p_3}=\left.\frac{\omega_n^2\left(\frac{p_3}{z}-1\right)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=p_3}=K_1\left(\frac{p_3}{z}-1\right)$$

$$K_1>0$$

系统性能分析——附加极点与零点

$$A_3 = K_1\left(\frac{p_3}{z} - 1\right)$$



A_3 的符号取决于实数零极点的相对位置

1) 若零点z在p_3的左侧，则A_3 为负

2) 若零点z在p_3的右侧，则A_3 为正

3) 若零点z接近于p_3, 则A_3 很小，这项瞬态响应则相对较小

结论:

- 若零点 z 在极点p_3的左侧，A_3 为负，且响应与仅有复数极点的系统响应相似，但超调减小
- 若零点z 在极点p_3的右侧，A_3 为正，超调比仅有复数极点的系统响应大

例5-28 考虑一单位负反馈系统开环传递函数为

$$G_x(s)=\frac{K_x}{s(s^2+4.2s+14.4)}=\frac{K_x}{s(s+2.1+j3.1607)(s+2.1-j3.1607)}$$

设计控制器，使闭环系统满足：

$$K_1=K_x/14.4,\quad K_1\geq 1.5s^{-1}$$

$$1<M_p\leq 1.123,$$

$$t_s\leq 3s\quad e(t)_{ss}=0,$$

$$t_p\leq 1.6s$$

系统性能分析——附加极点举例

确定 $\zeta, \omega_d, \omega_n$ 　　采用下列几个式子

$$M_p = 1.123 = 1 + \exp\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \rightarrow \zeta = 0.555$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \rightarrow \omega_d > 1.9636$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \rightarrow \omega_n > 2.4024$$

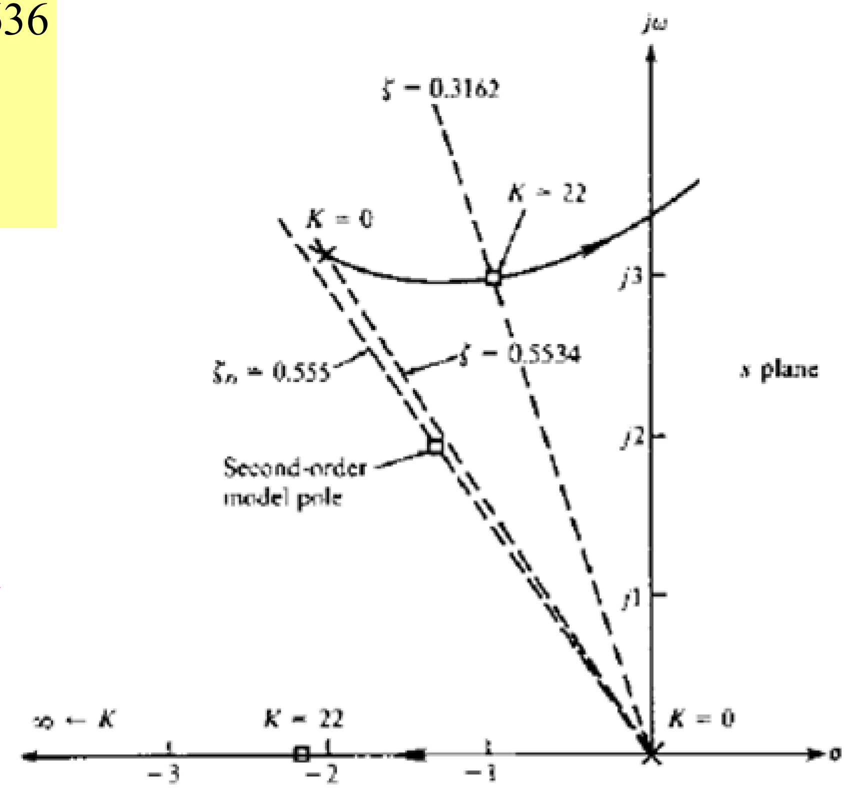
$K_1 = K_x/14.4$，$1 < M_p \le 1.123$,

$t_s \le 3s \quad e(t)_{ss} = 0$,

$t_p \le 1.6s$，$K_1 \ge 1.5s^{-1}$

闭环系统的主导极点：

$$s_{1,2} = -1.3333 \pm j1.9984$$



由图可以看出：无法得到期望的主导极点，必须进行再次设计

$K_1 = K_x / 14.4$， $1 < M_p \le 1.123$,
$t_s \le 3s \quad e(t)_{ss} = 0$,
$t_p \le 1.6s$, $\quad K_1 \ge 1.5s^{-1}$

第二次设计：

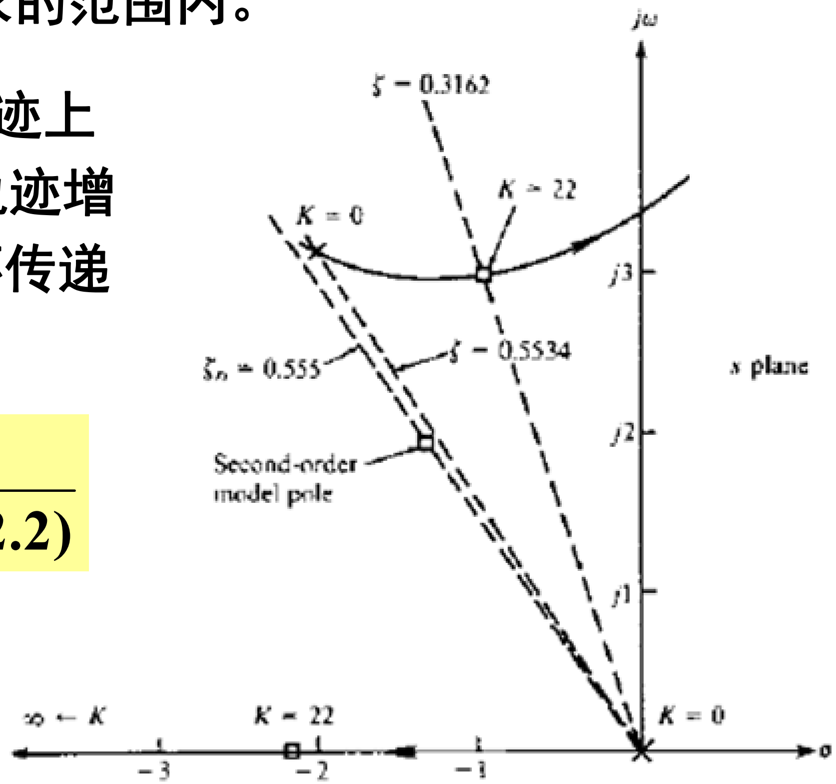
由于第三个根p_3对应瞬态响应 $A_3 e^{p_3 t}$ ，若该瞬态响应为负，则将降低由复数极点产生的超调，因此，可以选择较小的阻尼比ζ，第三个极点的作用是使得超调在要求的范围内。

为了同时满足K_1>1.5，因此根轨迹上的根选择 $s_{1,2} = -1 \pm j3$，相应的根轨迹增益K_x=22（使得K_1=1.528），闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{22}{(s+1-j3)(s+1+j3)(s+2.2)}$$

单位阶跃输入下：

$$M_p \approx 1.123, \quad t_p \approx 1.51s, t_s \approx 2.95s$$



Thanks!