信号分析与处理

第二章离散时间信号的频域分析

DFT和FFT

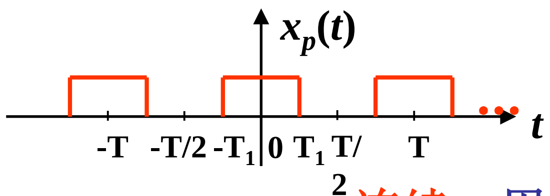
The Frequency Domain Analysis of Discrete Signal

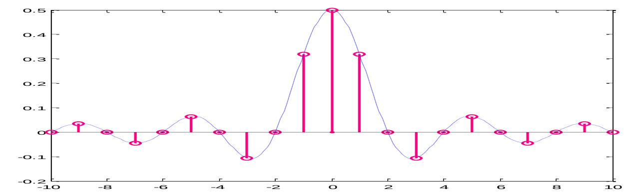
信号的频谱特征

- 连续时间信号的频谱是非周期的
- 离散时间信号的频谱是周期的
- 周期信号具有离散频谱
- 非周期信号具有连续频谱

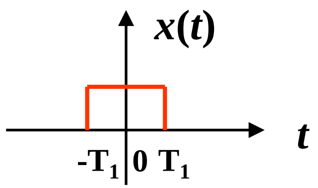
总结 傅里叶级数与傅里叶变换

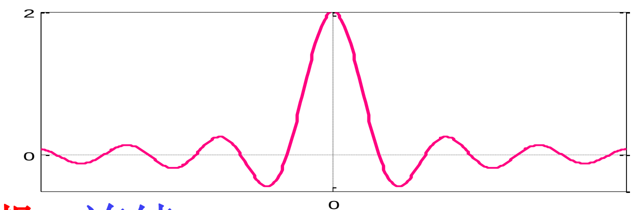
时域　　　　　　　　　　　　　　　　频域



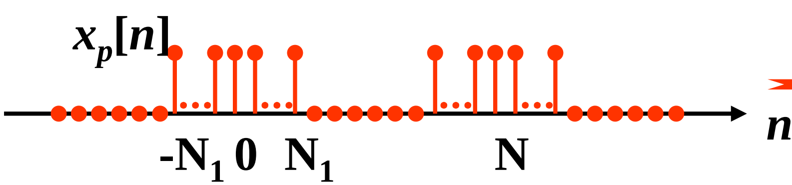


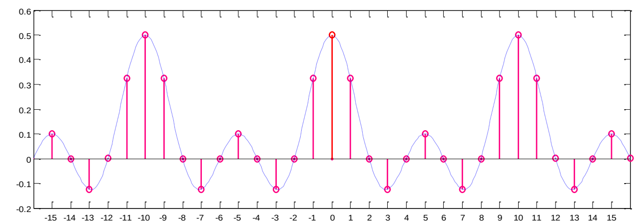
连续、周期 ⟷ 非周期、离散



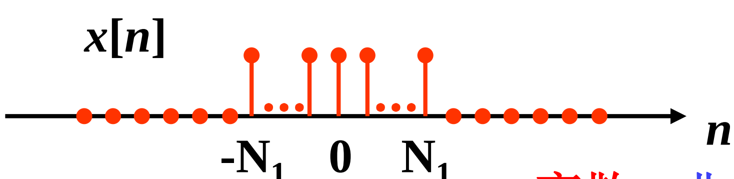


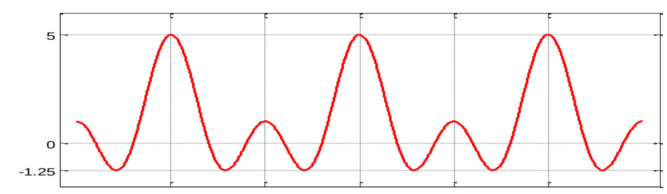
连续、非周期 ⟷ 非周期、连续





离散、周期 ⟷ 周期、离散





离散、非周期 ⟷ 周期、连续

傅立叶变换的离散性和周期性

时域周期性——频域离散性

时域离散性——频域周期性

时域非周期——频域连续性

时域连续性——频域非周期

本章主要内容

离散傅立叶变换（DFT)

- 从有限长序列的DTFT到DFT
- 从DFS到DFT
- DFT的性质

从有限长序列的DTFT到DFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

- **非周期信号的频谱是频率的连续函数，无法用计算机计算**
- **离散信号的DTFT，是Ω的连续周期函数。需要一种时域和频域上都是离散的傅里叶变换对，实现计算机的快速计算，即DFT**

❖ 连续CFS-离散DFS

T：采样周期
T_0=NT（连续信号周期
T_0对应N个采样点）

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$t = nT$ $\quad dt\rightarrow T \quad \int_0^{T_0}\rightarrow\sum_{n=0}^{N-1}$

$$X\left(k\frac{2\pi}{N\boxed{T}}\right)=\frac{1}{NT}\sum_{n=0}^{N-1}x(n\boxed{T})e^{-jk\frac{2\pi}{NT}nT}\cdot T$$

$$\Omega_0=\omega_0 T=\frac{2\pi}{N}$$

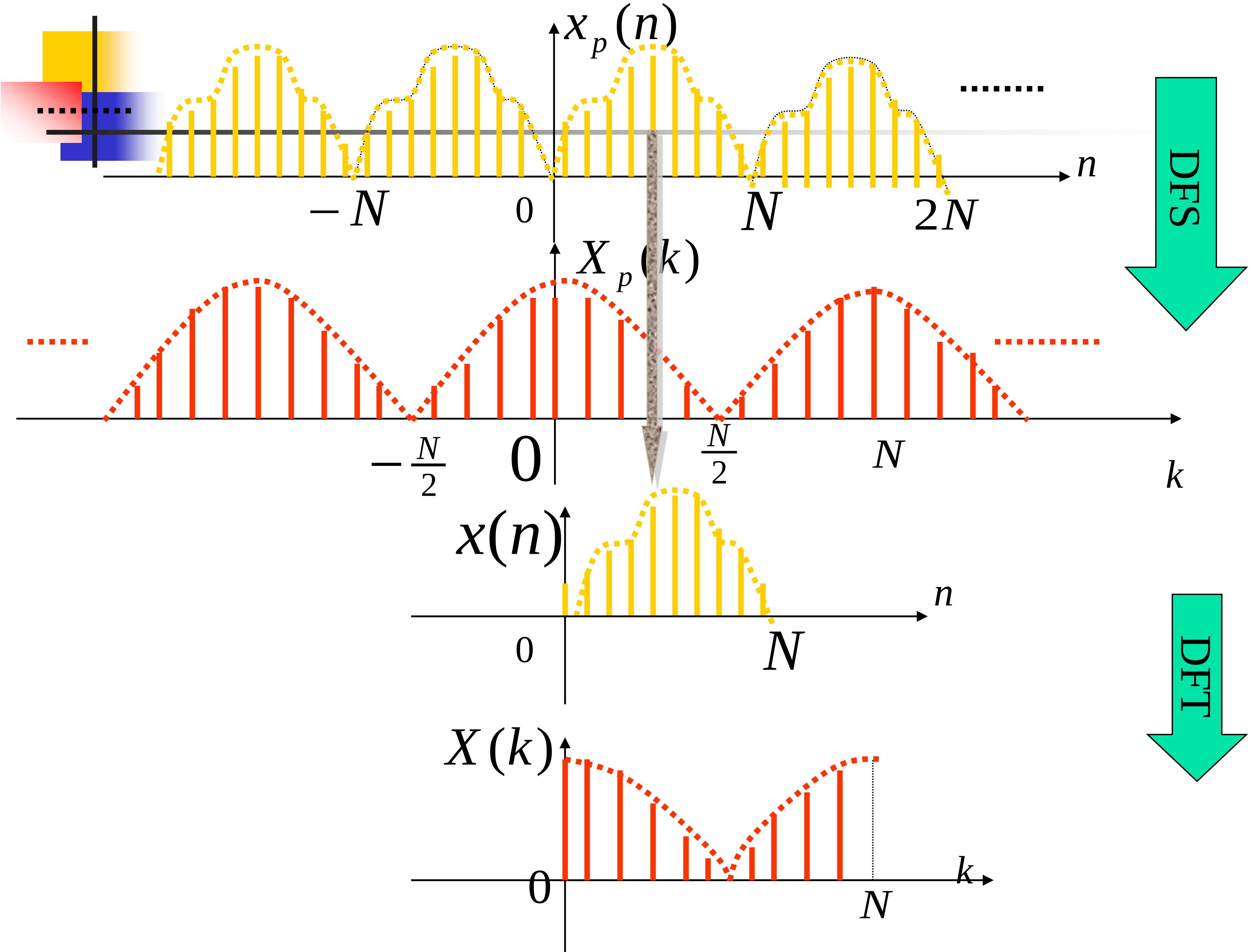
离散时间
周期信号的频
谱是一个以N为周
期的周期性离散频
谱，各谱线之
间的间隔为
Ω0＝2π/N

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$e^{j\Omega_0 n}=e^{j\Omega_0(n+N)}=e^{j(\Omega_0\pm 2k\pi)n}$$

$$X((k+N)\Omega_0)=X(k\Omega_0)$$



$x_p(n)$
n
$-N$
0
N
$2N$
DFS
$X_p(k)$
$-\frac{N}{2}$
0
$\frac{N}{2}$
N
k
$x(n)$
n
0
N
DFT
$X(k)$
k
0
N

从DFS到DFT

DFT可看作以有限长序列x(n)为一个周期，进行周期延拓后所形成的周期序列$x_p(n)$的离散频谱

- 设 $\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k\Omega_0)$

$$x(n) = R_N(n)\tilde{x}_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}_N(n), & n = 0 \sim N-1 \\ 0, & n = \text{其他} \end{cases}$$

$R_N(n)$为矩形序列

$$X(k) = R_N(k)\tilde{X}_N(k\Omega_0) = \begin{cases} \tilde{X}_N(k\Omega_0), & k = 0 \sim N-1 \\ 0, & k = \text{其他} \end{cases}$$

- **x(n)、X(k)分别称作 $\tilde{x}_N(n)$ 、 $\tilde{X}_N(k)$ 的主值**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{-nk} \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{nk}$$

DFT

IDFT

从DFS到DFT

DFS: $$X(k\Omega_0)=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

非周期序列的DTFT是信号的频谱密度，将1/*N*移到 x(n) 中，不会改变信号的性质和物理含义

$$X(k\Omega_0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\Omega_0 nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

从DTFT 采样 到DFT

能量有限、时间长度为L的有限长序列的DTFT为

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\Omega n}$$

频率离散化（采样） $k\Omega_0=k2\pi/N\rightarrow\Omega$

$$X(k\frac{2\pi}{N})=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jk2\pi n/N}$$

频率采样点数N已知，2π/N为定数

$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jk2\pi n/N}$$

N点DFT是有限长序列（L≤N）的DTFT的均匀取样值，也就是非周期序列频谱的样值

DFT小结

- DFT 是 DFS 的主值序列
- DFS 是严格按傅立叶分析的概念得来的
- DFT 只是一种借用形式，一种算法
- 用DFT 计算信号的频谱时
  - 时域离散化时需满足时域采样定理
  - 频域离散化时需满足频域采样定理
  - 对周期信号要截取整周期

时域和频域采样定理

- 对于频谱受限的信号x(t)，如果其最高频率分量为ω_m，为了保留原信号的全部信息，或能无失真地恢复原信号，在通过采样得到离散信号时，其采样频率应满足$\omega_s \geq 2\omega_m$

  。

- 对于一个长度为（$-t_m$ t_m）的时限信号x(t)，为了能够从频域样本集合完全恢复原信号的频谱，其频域的采样间隔必须满足 $\omega_0 \leq \dfrac{\pi}{t_m}$

DFT的性质

- 线性
- 圆周移位
- 圆周卷积

(1) 线性

如果$x_1(n)$、$x_2(n)$长度不同，长度短的序列要补零，使它与另一序列长度相同

- 若

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

- 那么

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xleftrightarrow{DFT} aX_1(k) + bX_2(k)$$

离散傅立叶变换（DFT)-余数运算

（1）余数运算

如果$n=n_1+mN$，$0\le n_1\le N-1$，m为整数。则有：

$$((n))_N = (n_1)$$

此运算符表示n被N除，商为m，余数为n_1

（n_1）是 $((n))_N$ 的解，或称作取余数，或称作n对N取模值

$$n = 25, N = 9$$

$$n = 25 = 2 \times 9 + 7 = 2N + n_1$$

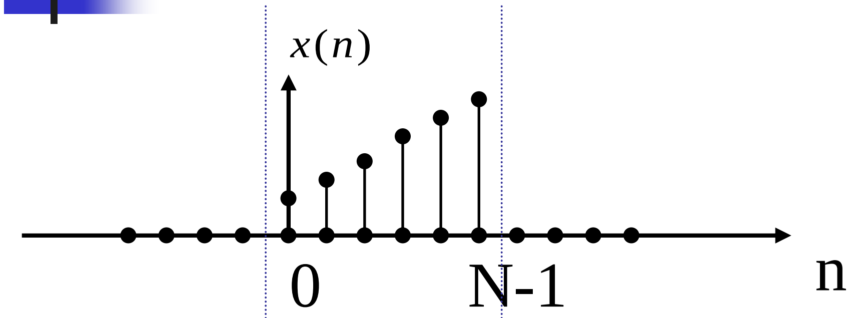
$$((25))_9 = 7$$

$$n = -4, N = 9$$

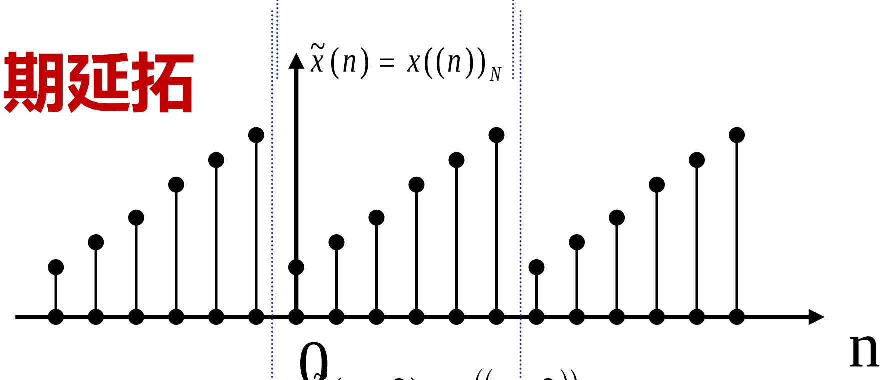
$$n = -4 = -9 + 5 = -N + 5$$

$$((-4))_9 = 5$$

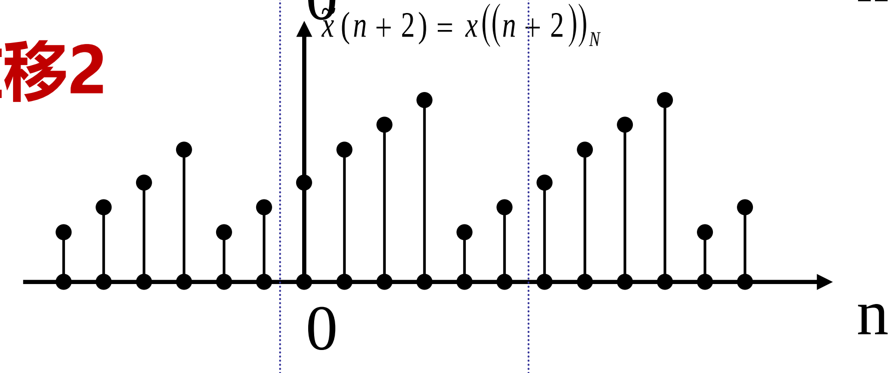
2. $x((n))_N = x(n_1)$含义



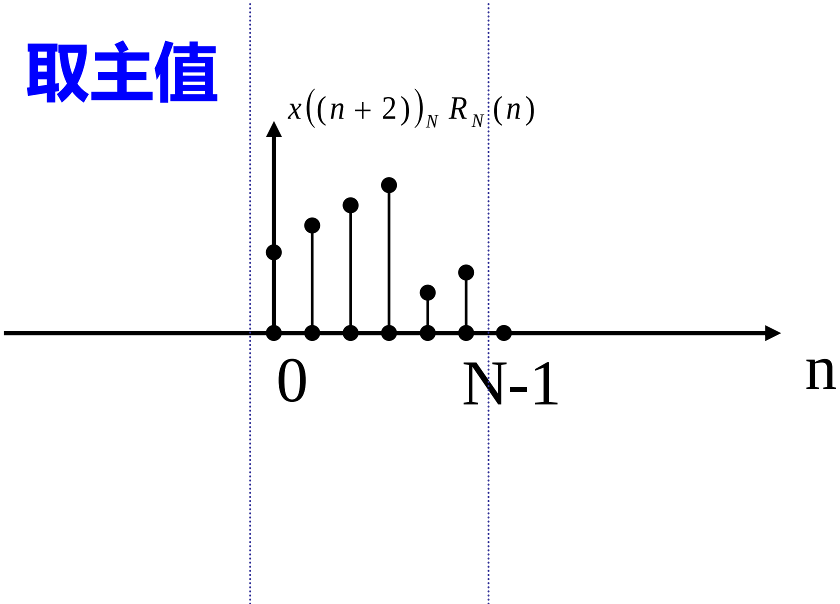
周期延拓



左移2



取主值



圆周位移的概念

- 有限长序列 $x(n)$

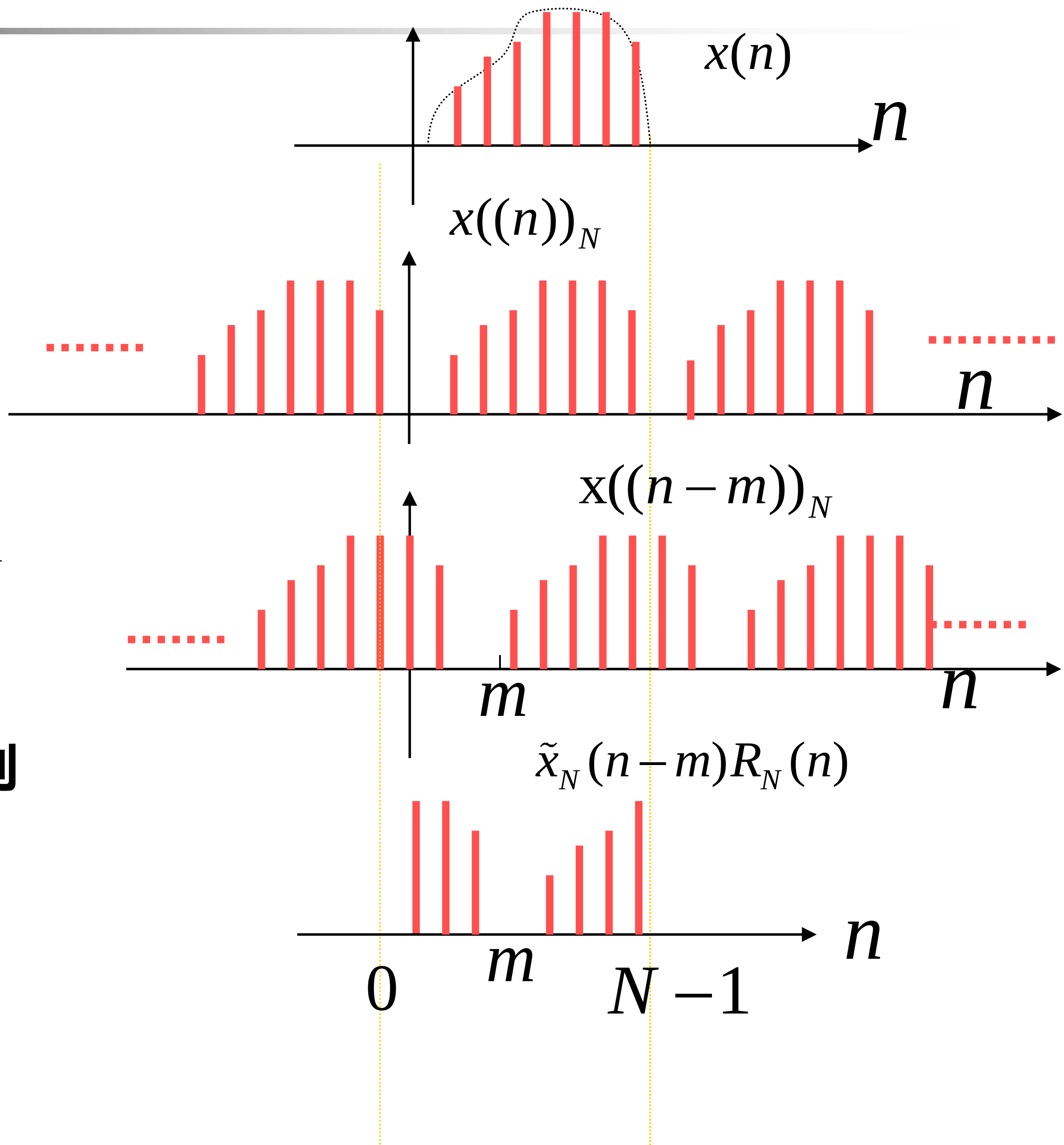
  $0 \le n \le N-1$

- 周期延拓 $x((n))_N$

- 线性位移 $\mathrm{x}((n-m))_N$

- 加窗，得到圆周位移序列

  $x((n-m))_N R_N(n)$



(2)圆周移位

- 序列x(n)的圆周位移定义

$$x((n-n_0))_N R_N(n)=\tilde{x}_N(n-n_0)R_N(n)$$

- n_0是位移值，$R_N(n)$是矩形序列

x(n)周期延拓、移位、取主值

圆周移位

时移特性

若

$$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k)$$

$$y(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

则

$$\boxed{Y(k) = e^{-j\Omega_0 mk} X(k)}$$

证明?

频移特性

若 $x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k)$

则

$$\boxed{e^{j\Omega_0 k_0 n} x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X((k-k_0))_N \mathrm{R}_N(\mathrm{k})}$$

证明?

时域圆周卷积定理

x(n)和h(n)必须长度相等，圆周卷积后所得序列长度与原序列相同。短序列需补零

- **N点圆周卷积的定义**

$$x(n)\otimes h(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x((n-m))_N R_N(n)$$

- 若 $\boxed{y(n)=x(n)\otimes h(n)}$

- 则 $Y(k)=X(k)H(k)$

例6 计算$x_1(n)$、$x_2(n)$的*N*点圆周卷积，其中

$$x_1(n)=x_2(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

- 解： **$x_1(n)$、$x_2(n)$的*N*点DFT为**

$$X_1(k)=X_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}w_N^{-nk}=\begin{cases}N & k=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

- 有

$$X(k)=X_1(k)X_2(k)==\begin{cases}N^2 & k=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

- $x_1(n)$、$x_2(n)$ 的*N*点圆周卷积是X(k)的反DFT变换

$$x(n)=\begin{cases}N & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

频域圆周卷积定理

- 若 $$y(n)=x(n)h(n)$$
- 则 $$Y(k)=\frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}X(l)H((k-l))_N\,\mathrm{R}_N(k)$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}H(l)X((k-l))_N R_N(k)$$

2、快速傅立叶变换（FFT）

- DFT的计算量
- DFT的特点及FFT的思想
- 基-2算法的FFT的基本思路
- FFT算法的特点

DFT的计算量

- **DFT**

$$w_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{-nk} \qquad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{nk}$$

- **N点DFT的计算量：**
  - **计算一个X(k)值需要进行N次复数相乘，N-1次复数相加**
  - **对于N个X(k)点，完成全部DFT运算共需N^2次复数相乘和N(N-1)次复数加法**
  - **N＝1024时, 需要1,048,576次复数乘法, 即4,194,304次实数乘法**

2、DFT的特点及FFT的思想

$$w_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$ **特性**

- **正交性** $$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk}(W_N^{mk})^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 1, & n-m=lN \\ 0, & n-m\neq lN \end{cases}$$
- **周期性** $$W_N^{r+mN} = W_N^r$$
- **对称性** $$W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$$
- **可约性** $$W_N^{rn} = W_{N/r}^n \quad W_{rN}^{rn} = W_N^n$$

$$W_N^0 = 1,\ W_N^N = W_N^0 = 1,\ W_N^{mN} = 1$$

$$W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1,\ W_N^{(mN+N/2)} = -1$$

2、DFT的特点及FFT的思想

- 1965年，J. W. Cooley和J. W. Tukey巧妙应用DFT中W因子的周期性及对称性提出了最早的FFT，这是基于时间抽取的FFT。具有里程碑式的贡献(运算量缩短两个数量级)
- 1966年，G. Sand提出了基于频率抽取的FFT算法
- 1975年，Winogard提出WFTA法，1977年Kolha和Parks提出素因子算法（PFA）
- 1984年，P. Dohamel和H. Hollmann提出分裂基快速算法，进一步减少了计算量，提高了计算速度（目前最理想的算法)

2、DFT的特点及FFT的思想

FFT算法分成两大类：

- **针对N等于2的整数次幂的算法，如：基2算法、基4算法、实因子算法和分裂基算法**
- **针对N不等于2的整数次幂的算法，如：以Winograd为代表的一类算法(素因子法PFA、Winograd算法WFTA)**

3、基-2算法的FFT的基本思路

基2 FFT算法也称Cooley－Tukey(库利－图基)算法

- 序列的长度是2的整数幂时, 将x(n)分解（抽取）成较短的序列，然后从这些序列的DFT中求得X(k)的方法

(1)按时间抽取的FFT算法

$$X(k)=\sum_{n=0}^{4-1}x(n)W_4^{kn}$$

- 以 $N=2^2=4$ 为例的DFT（16次复数乘法）

$$k=0 \quad X(0)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^0+x(2)W_4^0+x(3)W_4^0$$

$$k=1 \quad X(1)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^1+x(2)W_4^2+x(3)W_4^3$$

$$k=2 \quad X(2)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^2+x(2)W_4^4+x(3)W_4^6$$

$$k=3 \quad X(3)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^3+x(2)W_4^6+x(3)W_4^9$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$W_N^0 = 1$$

$$W_N^{mN} = 1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & 1 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$W_N^{(mN + N/2)} = -1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & -1 & W_4^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & W_4^3 & -1 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$W_N^{(r+N/2)} = -W_N^r$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & -1 & \boxed{-W_4^1} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \boxed{-W_4^1} & -1 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

只和$x(0), x(2)$ 有关

第二行和第三行互换
第二列和第三列互换
x(1)和x(2)互换
矩阵等式不变

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W_4^1 & -W_4^1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W_4^1 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(1) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

只和 $x(1), x(3)$ 有关

1次复数乘法

N点的DFT是否可以分成两组N/2点的DFT?

- 设序列x(n)的长度为$N=2^r$，x(n)被分解（抽取）成两个子序列，每个长度为N/2.

- 第一个序列g(n)由x(n)的偶数项组成：

$$g(n)=x(2n) \qquad n=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

- 第二个序列h(n)由x(n)的奇数项组成

$$h(n)=x(2n+1) \qquad n=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

x(n)的N点的DFT表示为:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}g(r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}h(r)W_N^{(2r+1)k}$$

$$=\boxed{\sum_{r=0}^{N/2-1}g(r)W_{N/2}^{rk}}+W_N^{k}\boxed{\sum_{r=0}^{N/2-1}h(r)W_{N/2}^{rk}}$$

$$=\underbrace{G(k)}_{\text{N/2点的DFT}}+W_N^{k}\underbrace{H(k)}_{\text{N/2点的DFT}}\quad k=0,1,2\ldots N$$

$$X(k)=G(k)+W_N^K H(k) \quad (k=0,1,2\ldots\tfrac{N}{2}-1)$$

主值周期为N/2的X（k）

$$G(k+\frac{N}{2})=G(k)$$

$$H(k+\frac{N}{2})=H(k)$$

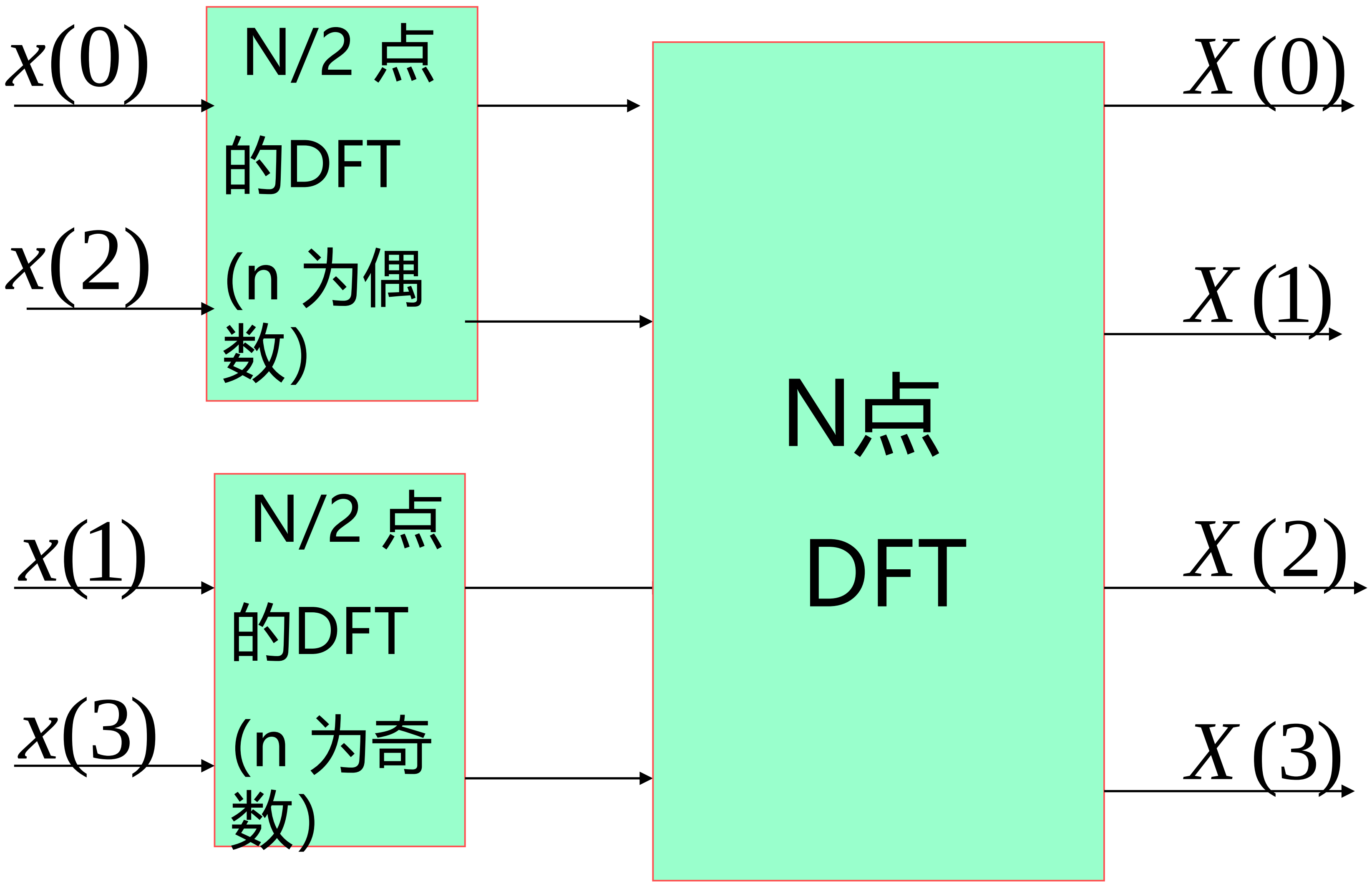
$$W_N^{(k+\frac{N}{2})}=W_N^{\frac{N}{2}}W_N^k=-W_N^k$$

如果N/2为偶数，还可以再次进行分解，直到只剩下2点的DFT

$$X(k+\tfrac{N}{2})=G(k)-W_N^K H(k) \quad (k=0,1,2\ldots\tfrac{N}{2}-1)$$

另外主值周期N/2点的X(k)

N=4为例DFT分组

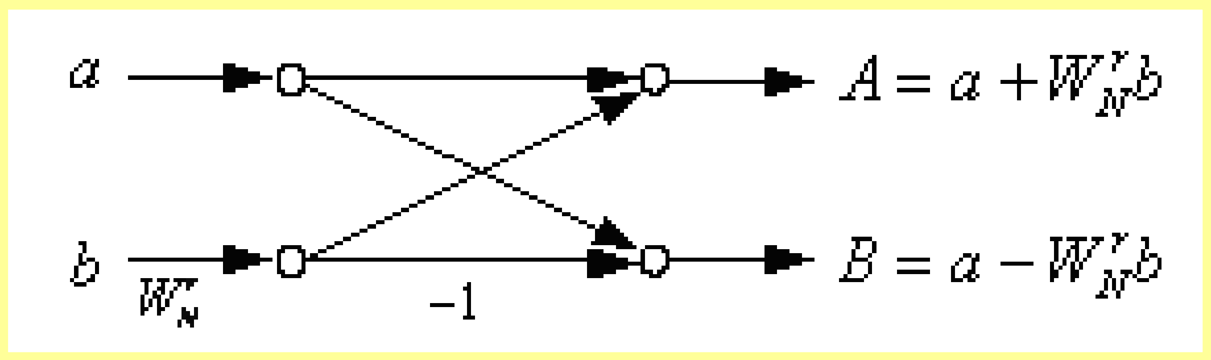


4、FFT算法的特点

基本运算单元为一个蝶形，第m级的蝶形

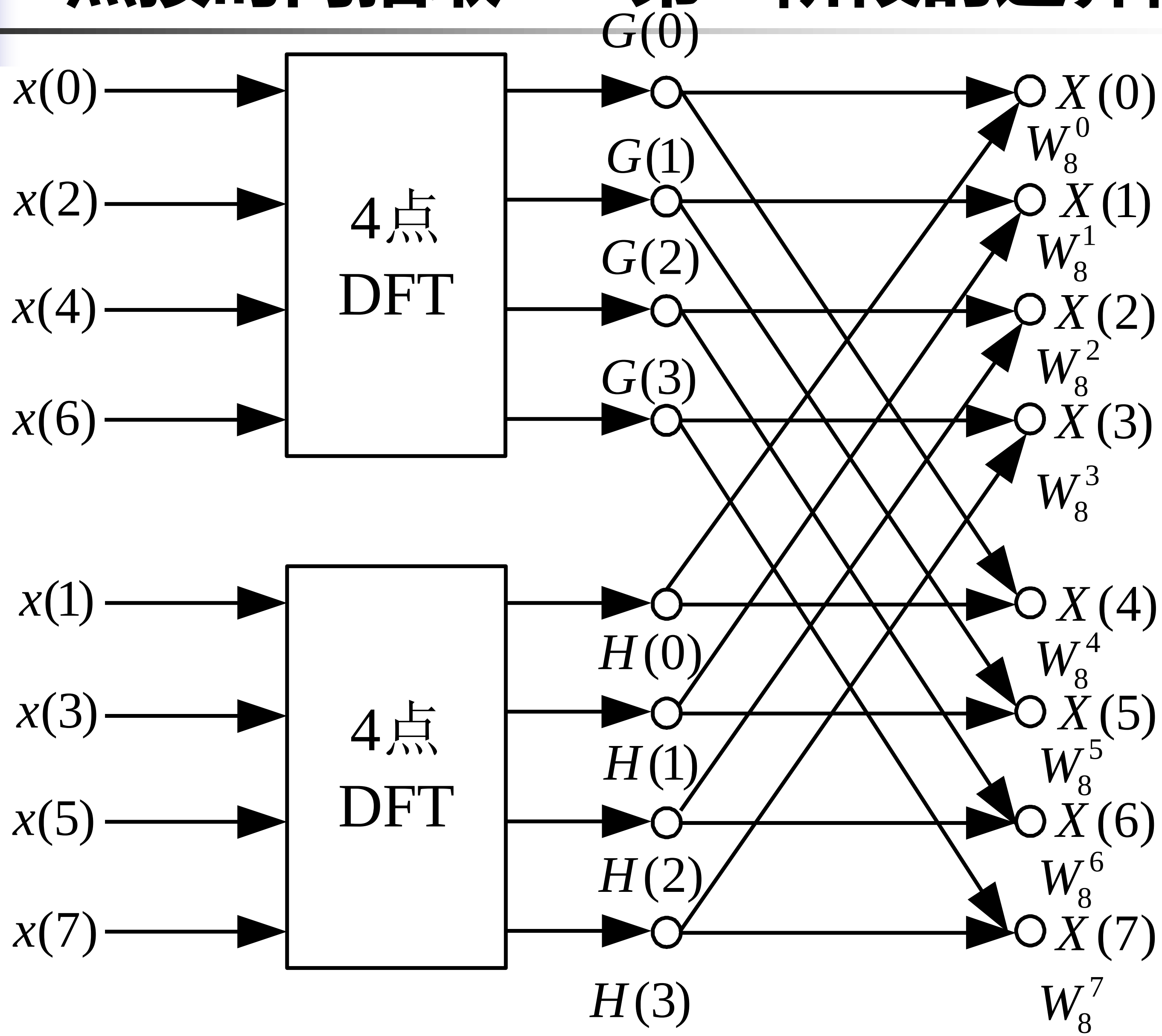
上节点

下节点



- **每一蝶形是独立的**
- **每一级中有N/2个蝶形**

8点按时间抽取FFT第一阶段的运算框图



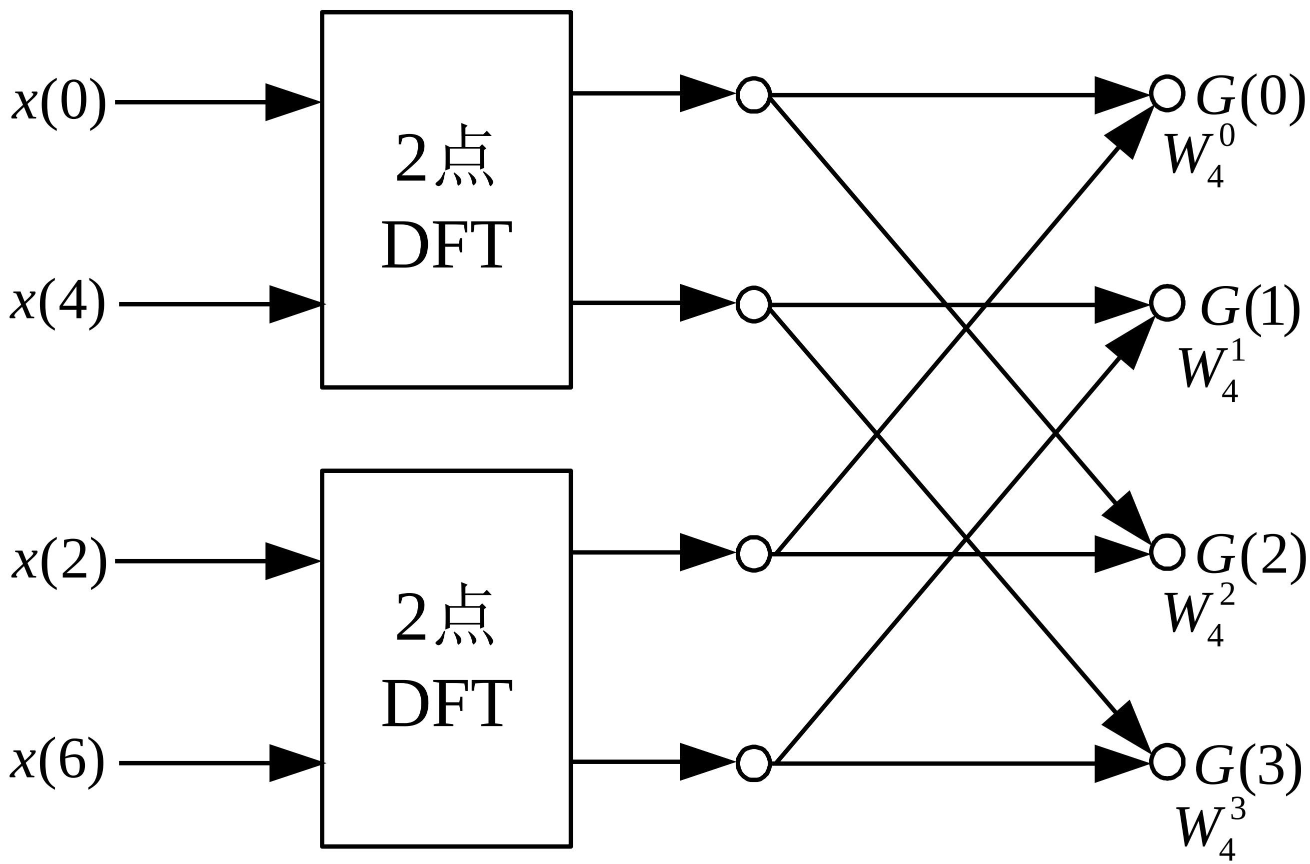
4、FFT算法的特点

由于 $N=2^M$，$\frac{N}{2}=2^{M-1}$ 仍为偶数，因此，两个 $\frac{N}{2}$ 点DFT又可同样进一步分解为4个 $\frac{N}{4}$ 点的DFT。

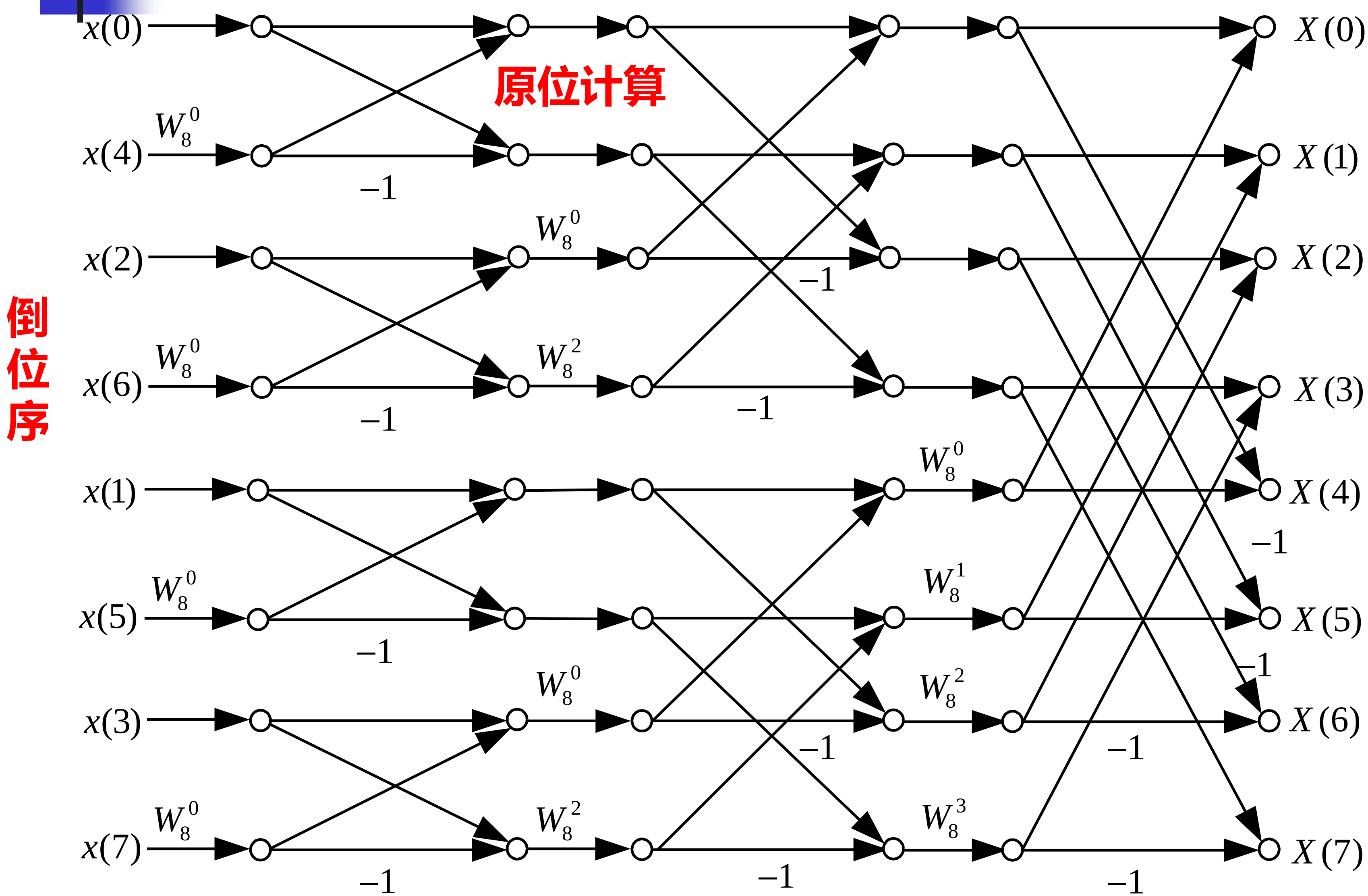
$$\begin{cases} x_1(2l)=x_3(l) \\ x_1(2l+1)=x_4(l) \end{cases} \quad l=0,1,\dots,N/4-1$$

$$\begin{cases} X_1(k)=X_3(k)+W_{N/2}^{k}X_4(k) \\ X_1(k+\frac{N}{4})=X_3(k)-W_{N/2}^{k}X_4(k) \end{cases} \quad k=0,1,\dots,\frac{N}{4}-1$$

按时间抽取FFT将4点DFT分解为两个2点DFT

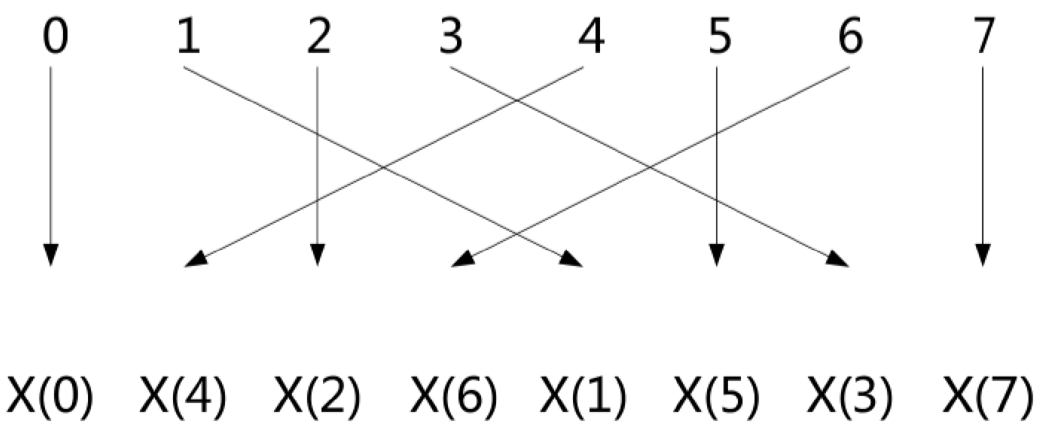


一个完整的8点基2按时间抽取FFT



FFT的码址倒序

自然顺序	二进制表示	码位倒置	码位倒置顺序
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7



FFT的计算量

从上述分析过程可知，在$N=2^M$时，每一级都由N/2个蝶形运算构成，即每级都需要N/2次复数乘和N次复数加，所以总的复数乘的次数为：

$$\frac{N}{2}\bullet M=\frac{N}{2}\log_2 N$$

总的复数加的次数为：

$$N\bullet M=N\log_2 N$$

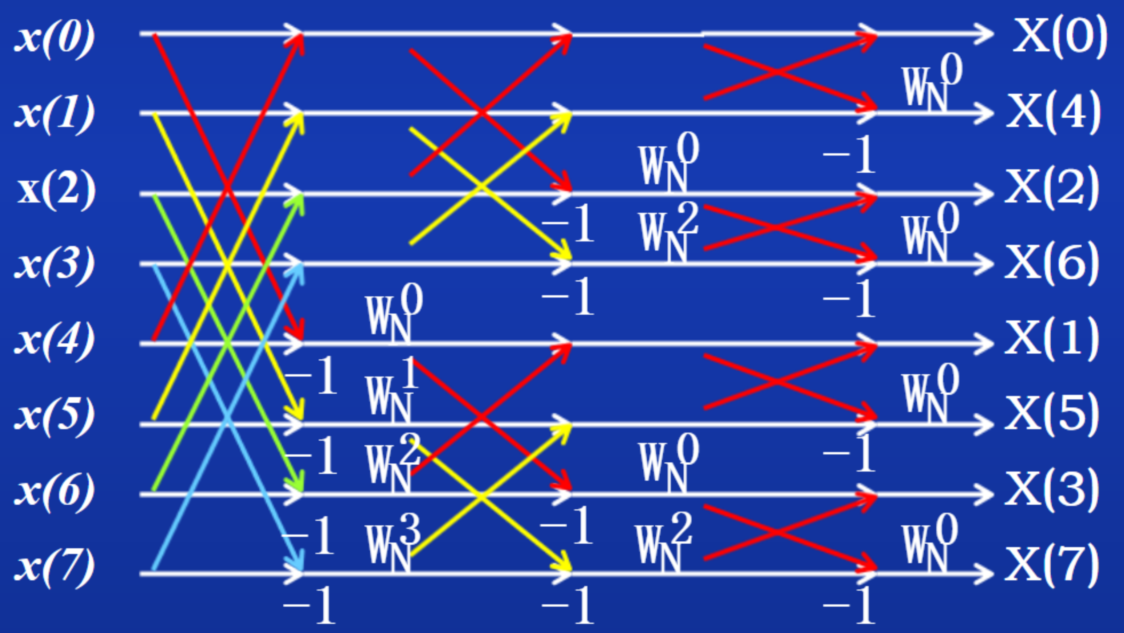
直接计算时复数乘的次数为N^2，加为N(N-1)次。当N>>1时，$N^2 \gg \frac{N}{2}\log_2 N$，使运算量大大减少。

基于频域抽取的FFT（DIF）

$$X(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+(-1)^{k}x(n+\frac{N}{2})\right]W_N^{nk}$$

再将N/2点DFT按k的奇偶分解为两个N/4点的DFT,如此进行下去,直至分解为2点DFT。

以下是8点的DIF-DFT流程:



快速离散傅里叶反变换IFFT

FFT算法，同样可以适用于离散博里叶反变换(IDFT)运算，并简称为IFFT，即快速博里叶反变换，从IDFT公式看：

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$

而DFT公式

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

比较以上两式可知，只要把DFT运算中的每一个系数W_N^{kn} 换成 W_N^{-kn} ，并且最后再乘以常数1/N，则

FFT应用中的注意事项

- 信号离散时，采样频率要满足奈奎斯特频率
- N一定是2的整数次幂，若不是，要补若干个零，凑成2的整数次幂
- 数据长度要取得足够长

NT_s：数据的实际长度

φ ：频率分辨率，DFT中谱线间的最小间隔，等于信号基波频率f_0 $\varphi = \dfrac{1}{NT_s}$

FFT的应用

- 利用FFT求线性卷积
- 利用FFT求线性相关
- 利用FFT作连续时间信号的频谱分析
  - 时间有限信号
  - 频率有限信号
  - 连续周期信号

FFT的应用

令 $N = 2^m \geq M + L - 1$

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L \leq n \leq N-1 \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & M \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

则 $y(n) = x(n) * h(n) = x(n) \, Ⓝ \, h(n)$

1) $H(k) = FFT[h(n)]$ $\quad \frac{N}{2}\log_2 N$

2) $X(k) = FFT[x(n)]$ $\quad \frac{N}{2}\log_2 N$

3) $Y(k) = H(k)X(k)$ $\quad N$

4) $y(n) = IFFT[Y(k)]$ $\quad \frac{N}{2}\log_2 N$

总运算量：$m_F = 3 \times \frac{N}{2}\log_2 N + N$ 次乘法

连续信号离散化时

- 采样频率：必须满足采样定理，否则容易引起频谱混叠。

- 采样信号的截断长度：必须取信号的一个基本周期或基本周期的整数倍长度， 否则容易引起频谱泄露。

由于截取信号长度不当，从原来比较集中的谱线，出现了分散的扩展谱线

时限连续信号

- 一般时限信号具有无限带宽，根据时域采样定理，无论怎样减小采样间隔Ts，都不可避免产生频谱混叠。且过度减小采样间隔，会极大地增加DFT计算工作量和计算机存储单元，实际应用中不可取
- 解决方法：
  - 利用抗混叠滤波器去除连续信号中次要的高频成分，再进行采样
  - 选取合适的Ts ，使混叠产生的误差限制在允许范围之内

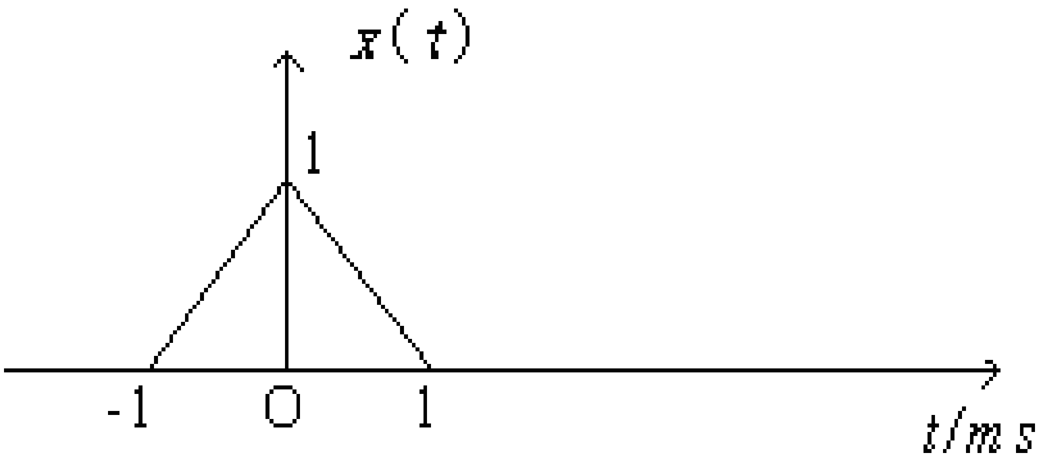
频率有限信号

- 带限信号的采样频率选取比较容易，但一般带限信号时宽无限，不符合DFT在时域对信号的要求，要进行加窗截断
- 离散周期信号当长度截断不当时会产生频谱泄漏现象
- 处理方法：
  - 加大窗宽，减少谱峰下降和频带扩展的影响，但是信号时宽加大，经采样后增大序列长度，增加DFT的计算量及计算机存储单元
  - 选取形状合适的窗函数。矩形窗在时域的突变导致了频域中高频成分衰减慢，造成的频谱泄漏最严重，而三角形窗、升余弦窗（Haning窗）、改进的升余弦窗（Hamming窗）等在频域有较低的旁瓣，使频谱泄漏现象减弱

连续周期信号

- 连续周期信号是非时限信号，作DFT处理时也要加窗截断
- 当截断长度正好是信号周期时，不会产生频谱泄漏，但当截断长度不是信号周期时，会产生频谱泄漏
- 处理方法：合理地选取截断长度（整周期截断）

例1 利用DFT/FFT求图示三角脉冲的频谱，假设信号最高频率取 $f_m = 25kHz$ ， 要求谱率分辨率f_0 = 100Hz



- **解**：由f_m得出对最大采样间隔Ts的要求

$$T_s \le \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{2\times 25\times 10^3} = 0.02ms$$

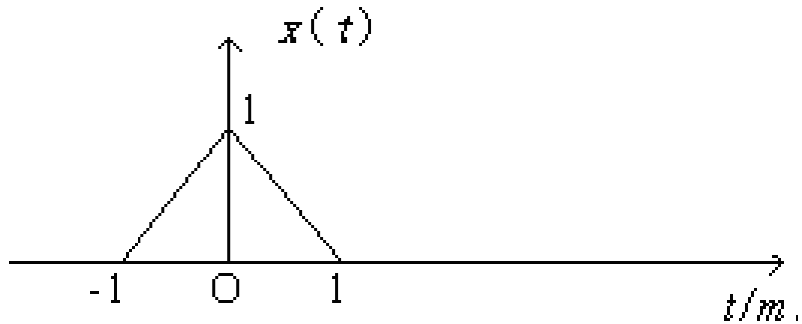
- 由频率分辨率决定数据记录长度 $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{100} = 10ms$

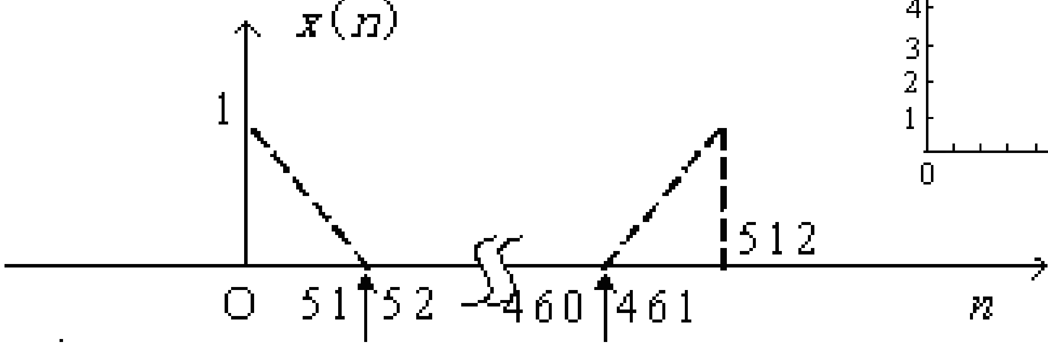
- 采样点数 $N = \frac{T_0}{T_s} \ge \frac{10}{0.02} = 500$

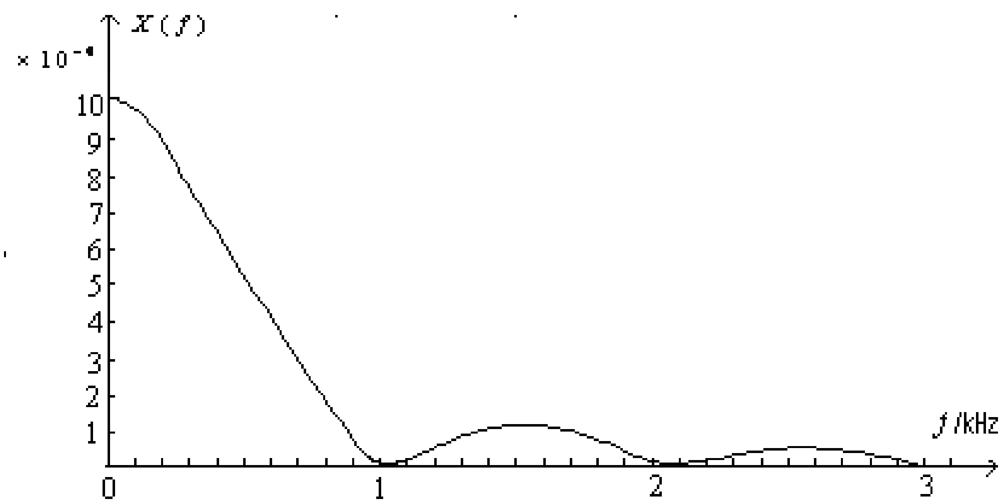
- 取$N = 512 = 2^9$，便于基2-FFT运算，由于N修正了， Ts也应修正为

$$T_s = \frac{T_0}{N} = \frac{10\times 10^{-3}}{512} = 19.53125\ \mu s$$

- x(t)采样后经过周期延拓，然后取主值区间所得x(n)(n:0-511)。经FFT运算后得到如下图所示的频谱，它是对X(kf_0)的幅值乘上Ts因子，然后画出的包络线

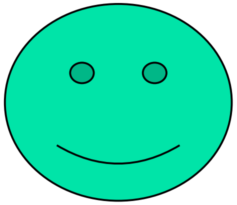






课后作业

- 作业：P187
  - 习题12、13、17



- 课后预习：
  - Z变换