离散信号的分析

主讲教师：齐冬莲

目录

离散信号的Z变换

- *从DTFT到Z变换*
- *Z变换的收敛域*
- Z变换的几何表示
- Z变换的性质
- *Z反变换*
- 单边Z变换
- Z变换与其他变换的关系

离散信号的Z域分析

一、从DTFT到Z变换

- 增长型的离散信号x(n)的傅里叶变换是不收敛的
- 为了满足收敛条件，类似拉普拉斯变换，将x(n)乘以一个衰减的实指数信号r^{-n} $(r>1)$，使信号$x(n)\, r^{-n}$满足收敛条件

离散信号的Z域分析

DTFT:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

离散信号的Z域分析

- x(n) r ⁻ⁿ的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left(x(n)r^{-n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\underline{\left(re^{j\Omega}\right)}^{-n}$$

令复变量 $z=re^{j\Omega}$

定义离散时间信号(序列)x(n)的Z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

Z变换

离散信号的Z域分析

反DTFT

$$x(n)r^{-n}=\mathcal{F}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(z)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(z)(re^{j\Omega})^n d\Omega$$

对Ω在0~2π内积分，对应了沿|z|=r的圆逆时针环绕一周的积分

$$z=re^{j\Omega}$$

$$dz=jre^{j\Omega}d\Omega=jzd\Omega$$

$$d\Omega=\frac{1}{j}z^{-1}dz$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

Z反变换

离散信号的Z域分析

二、Z变换的收敛域

收敛域：当 x(n)为有界时，令下述级数收敛的z 的所有可取值的集合

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^{2}}+\cdots$$

1）比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

2) 根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

$\rho<1$ → 级数收敛

$\rho>1$ → 级数不收敛

$\rho=1$ → 可能收敛

离散信号的Z域分析

例1：

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

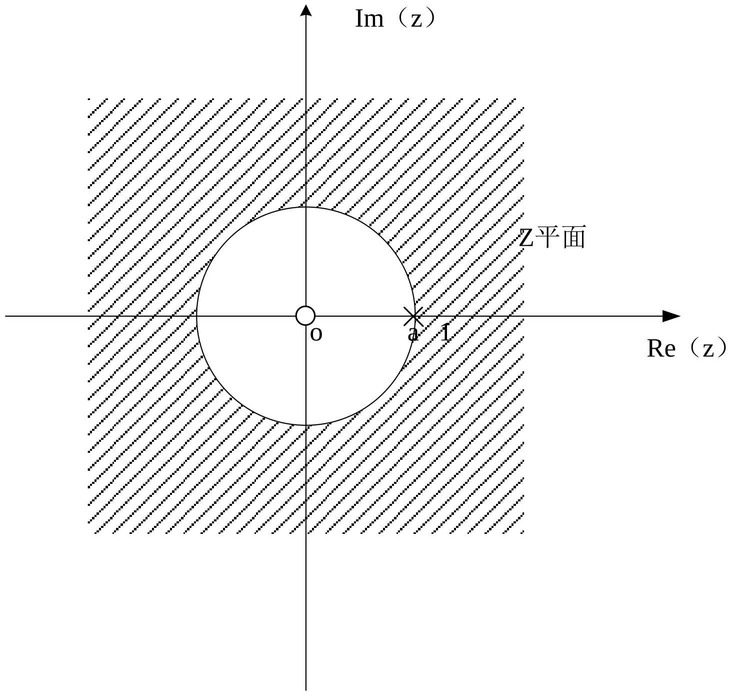
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|az^{-1}\right| = \rho$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|az^{-1}\right|^n} = \left|az^{-1}\right| = \rho$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$|z| > |a|$$

$$\Rightarrow \quad |a| < |z|$$



离散信号的Z域分析

例2：设序列x(n)= $-a^n u(-n-1)$ ，求其Z变换。比较其和例1所得结果的不同

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-a^n z^{-n}\right)$$

$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-a^{-m}z^{m})=\sum_{m=0}^{\infty}[-\left(a^{-1}z\right)^m]+a^0z^0=1-\sum_{m=0}^{\infty}(a^{-1}z)^m$$

$$X(z)=1-\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=1-\frac{a}{a-z}=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

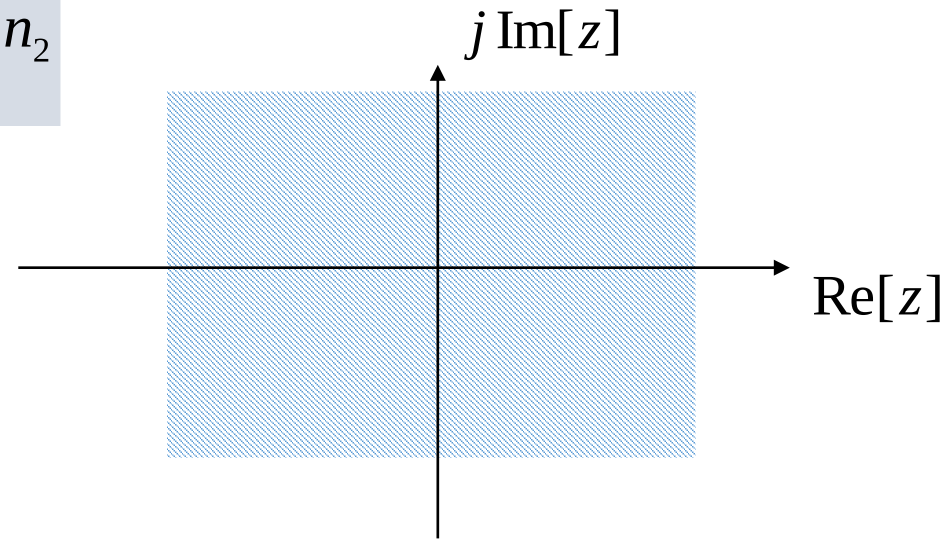
$$|z|<|a|$$

离散信号的Z域分析

几类序列的收敛域

（1）有限长序列：在有限区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}\qquad n_1\le n\le n_2$$



只要级数的每一项有界，则级数就收敛

$$\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

X(n)有界

$$\left|z^{-n}\right|<\infty \;\Rightarrow\; 0<\left|z\right|<+\infty$$

收敛域为除了0和∞ 的整个z 平面

离散信号的Z域分析

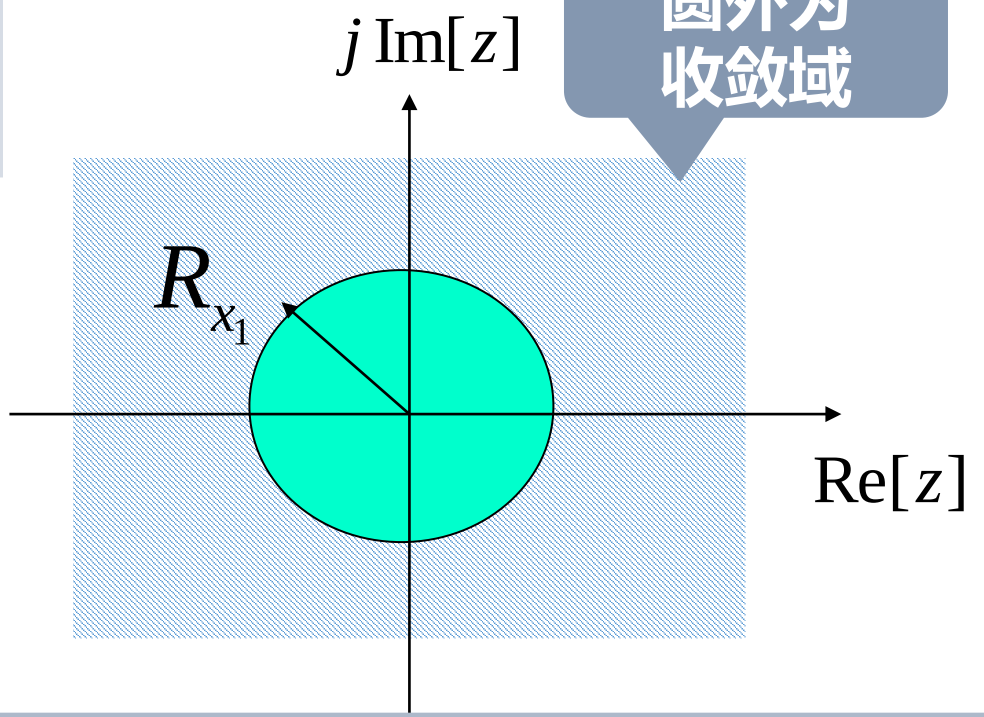
（2）右边序列：只在 $n \geq n_1$ 区间内，有非零有限值的序列

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \leq n \leq \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = R_{x_1} < |z|$$

收敛半径



收敛域为

$$R_x < |z| < \infty$$

若 $n_1 > 0$，则收敛域还包括 $|z| = \infty$

离散信号的Z域分析

（3）左边序列：只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列 x(n)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

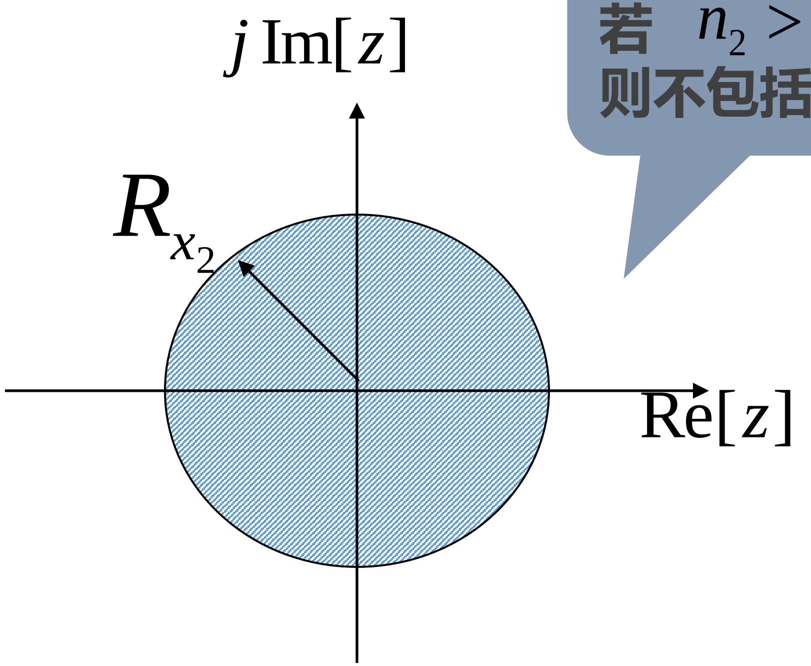
$$X(z) \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m) z^{m} \overset{n=m}{=} \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| x(-n) z^{n} \right|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| x(-n) \right|} < |z|^{-1}$$

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| x(-n) \right|}} = R_{x_2}$$

收敛半径



圆内为收敛域，
若 $n_2 > 0$
则不包括z=0点

离散信号的Z域分析

（4）双边序列：在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

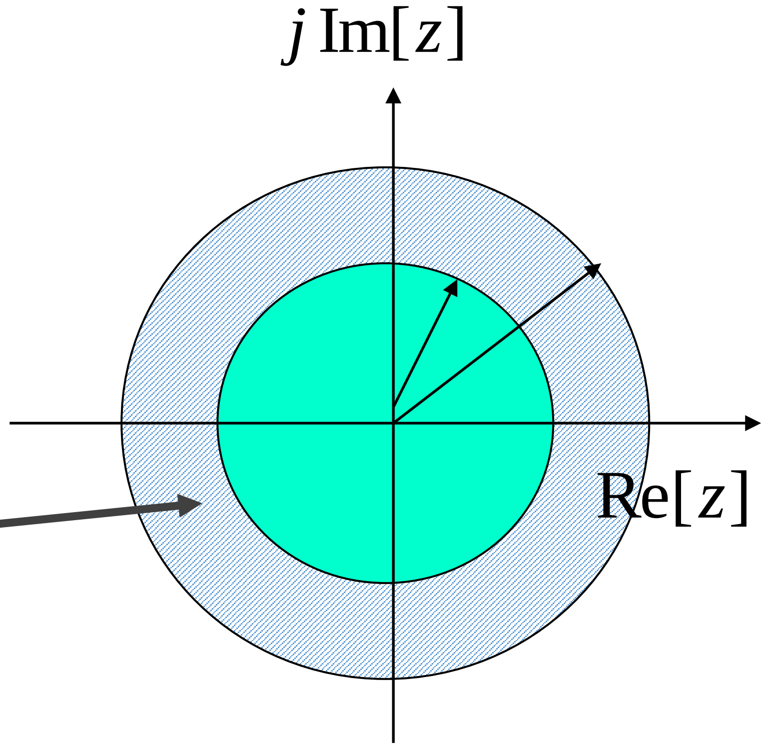
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

圆内收敛

圆外收敛

$R_{x_2} > R_{x_1}$ 有环状收敛域

$R_{x_2} < R_{x_1}$ 没有收敛域



离散信号的Z域分析

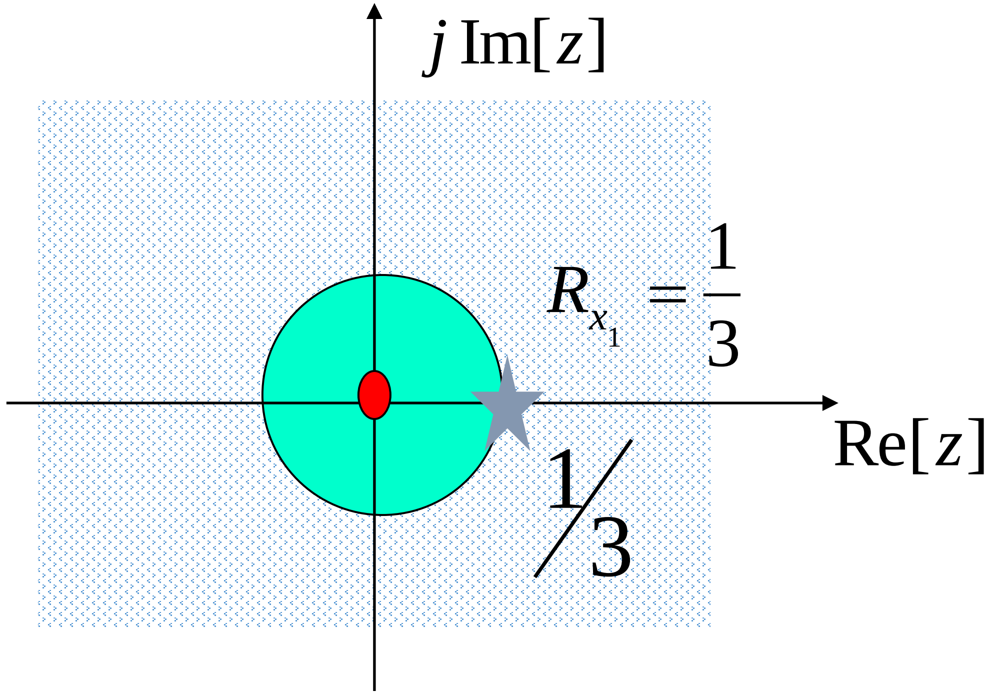
例3： (1) $x(n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$

右边序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$R_{x_1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore |z|>\frac{1}{3}$$



离散信号的Z域分析

例4: $(2)\quad x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(-n-1)$

左边序列

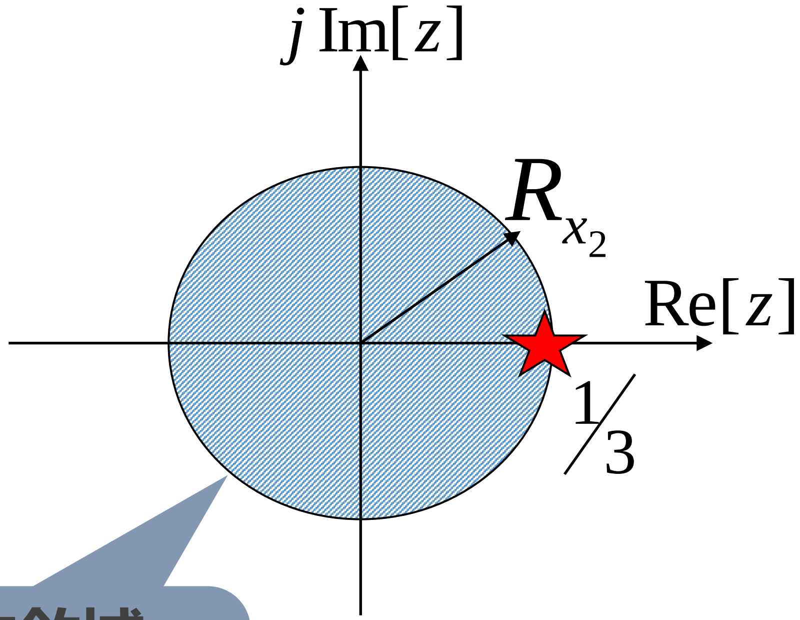
$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}\overset{n=-m}{=}-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$=1-\sum_{m=0}^{\infty}(3z)^{m}=1-\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(3z)^{n}\right|}<1$$

$$|z|<\frac{1}{3}=R_{x_2}$$

收敛半径



圆内为收敛域，
若 $n_2>0$
则不包括z=0点

离散信号的Z域分析

例5：$X(z)=\sum_{n=0}^{8}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}=\frac{z^{8}-(\frac{1}{3})^{8}}{z^{7}(z-\frac{1}{3})}$ 有限长序列

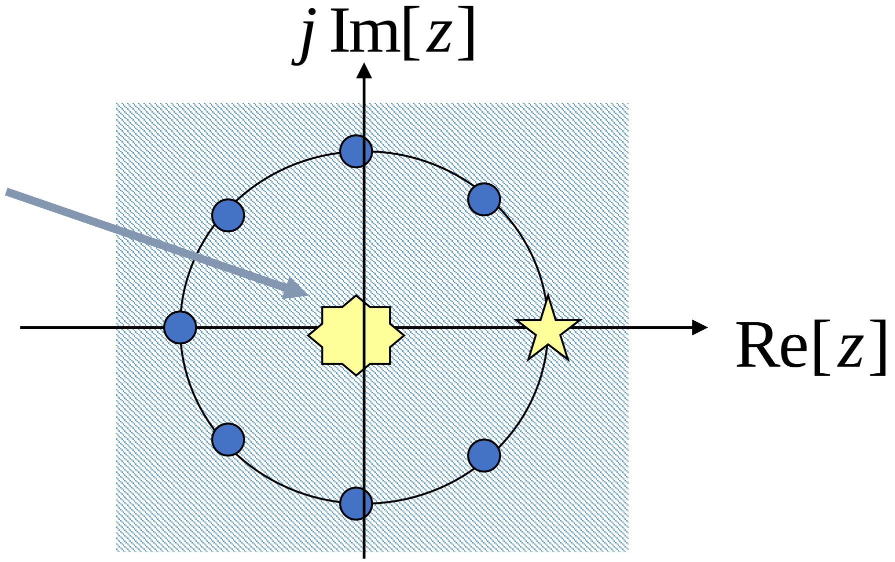
收敛域为除了 0 和∞ 的整个 z 平面

$$z^{8}=(\tfrac{1}{3})^{8}e^{j2k\pi}$$

$$z=\tfrac{1}{3}e^{j\frac{2k\pi}{8}} \rightarrow \text{8个零点}$$

$$z=0 \rightarrow \text{7阶极点}$$

$$z=\tfrac{1}{3} \rightarrow \text{一阶极点}$$



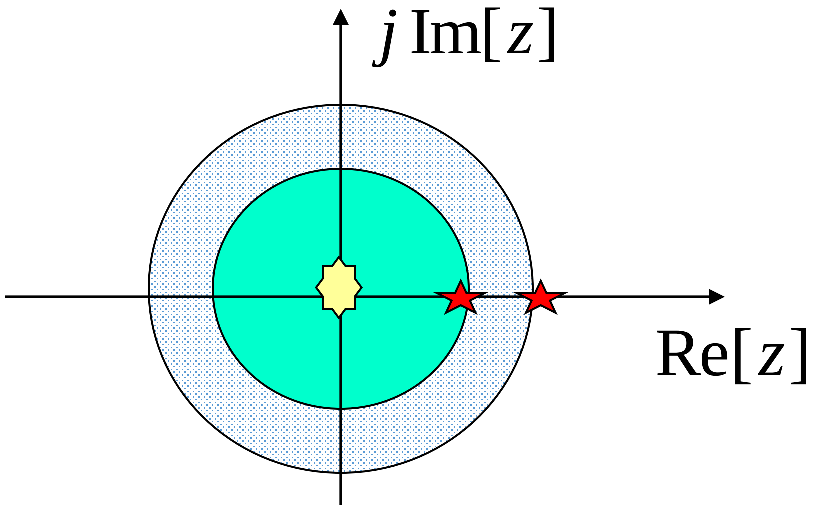
离散信号的Z域分析

例6： $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}$$

$$=\frac{-z}{z-3}+\frac{1}{z-\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{8}{3}z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$



$$\frac{1}{3}<|z|<3$$

谢谢大家