



自动控制原理

Principle of Automatic Control





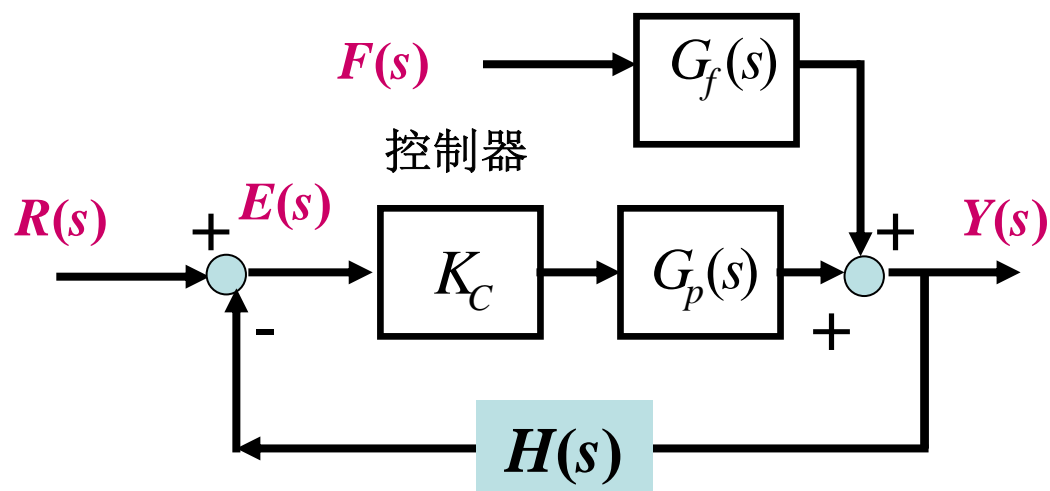
第四章 CHAPTER 4

连续时间控制系统的稳定性与稳态误差



稳态误差

- 控制系统的性能：**稳** **快** **准**



- 典型输入的全响应=自由响应+强迫响应

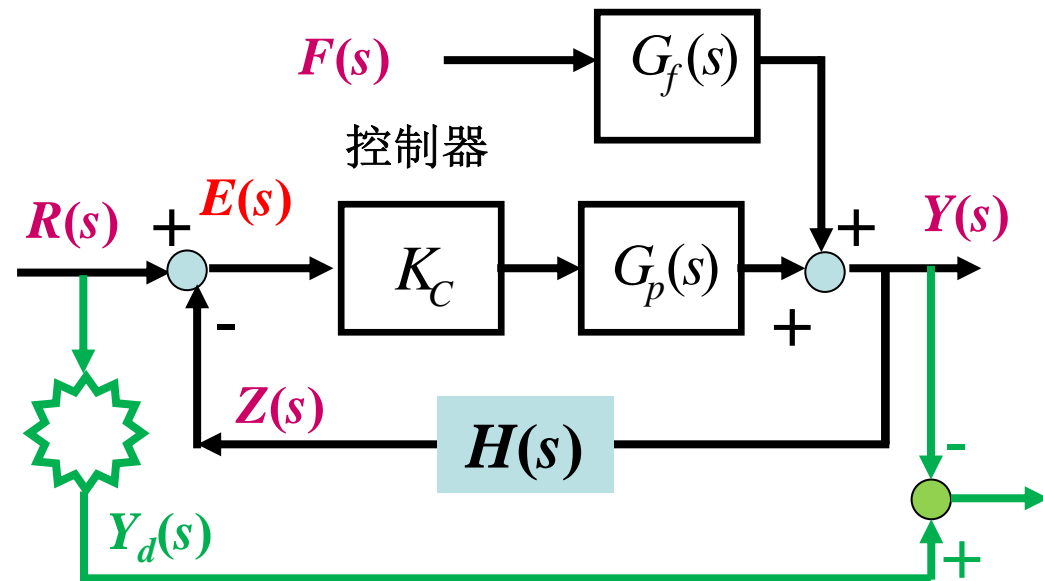
$$y(t) = y_{ss}(t) + y_{tr}(t)$$

- 对于**稳定系统**，自由响应将最终衰减至零，即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss}(t)$$

稳态误差

系统误差有两种定义方法



- 从输出端定义，将误差定义为期望输出与实际输出之差 $e(t) = y_d(t) - y(t)$ 但这种误差通常无法直接得到
- 从输入端定义，将误差定义为输入信号与反馈信号之差 $e(t) = r(t) - z(t)$ $E(s) = R(s) - Z(s) = R(s) - H(s)Y(s)$

从输入端定义的误差又称为**偏差**，偏差可直接得到，常为工程上采用

- 如果系统是**单位负反馈系统**，则 $z(t) = y(t)$ ， $r(t) = y_d(t)$ ，两种定义方法无差别
- 本课程采用从输入端定义的方法
- **稳态误差**（静态误差或余差）定义为 $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - z(t)]$

稳态误差

➤ 系统输出 $Y(s) = Y_r(s) + Y_f(s)$

➤ 系统误差的拉普拉斯变换形式为

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = R(s) - H(s)Y_r(s) - H(s)Y_f(s) = E_r(s) + E_f(s)$$

由参考输入产生

$$\begin{aligned} E_r(s) &= R(s) - H(s)Y_r(s) \\ &= R(s) - H(s)Y_r(s) \\ &= R(s) - H(s) \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s) \\ &= \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s) \end{aligned}$$

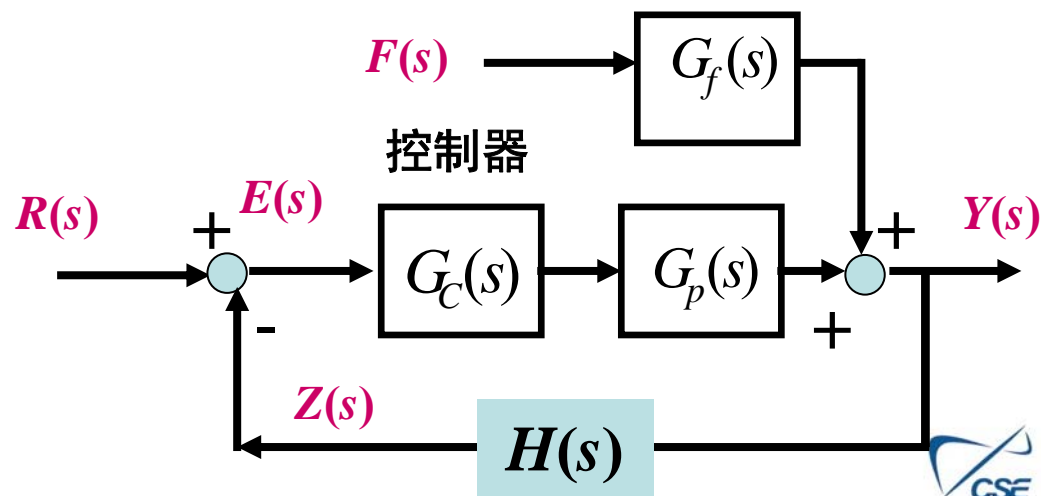
$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$$

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssf}$$

由扰动产生

$$E_f(s) = -H(s)Y_f(s) = \frac{-G_f(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} F(s)$$

$$e_{ssf} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t)$$





终值定理方法

• 终值定理： 若 $L[f(t)] = F(s)$ 且 $F(s)$ 满足下列条件之一：

(1) $F(s)$ 的所有极点在左半开平面

(2) $F(s)$ 有一个极点在原点，其它极点在左半开平面
则 $f(t)$ 存在有界终值并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

终值定理的等价表述：

若 $L[f(t)] = F(s)$ 且 $sF(s)$ 的所有极点在左半开平面
则 $f(t)$ 存在有界终值并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$



如图系统, 已知 $G_p(s) = \frac{3}{10s+1}$, $G_f(s) = \frac{2}{5s+1}$, $H(s) = \frac{0.5}{0.3s+1}$, $G_c(s) = \frac{2s+1}{s}$, 求如下情形的余差

- (1) $r(t) = u_{-1}(t), f(t) = 0.5u_{-1}(t)$
- (2) $r(t) = u_{-2}(t), f(t) = 0.5u_{-1}(t)$
- (3) $r(t) = \sin t, f(t) = 0.5u_{-1}(t)$

解 (1)

$$E_r(s) = R(s) - H(s)Y_r(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s) = \frac{1}{1 + \frac{2s+1}{s} \cdot \frac{3}{10s+1} \cdot \frac{0.5}{0.3s+1}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3s^2 + 10.3s + 1}{3s^3 + 10.3s^2 + 4s + 1.5}$$

$10.3 \times 4 > 3 \times 1.5 \Rightarrow E_r(s)$ 的极点均在左半开平面

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s) = 0$$

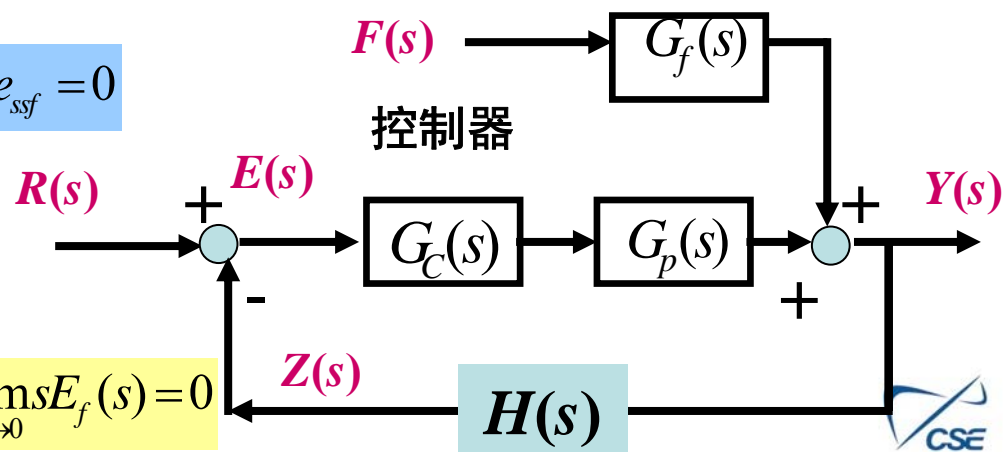
$$E_f(s) = -H(s)Y_f(s) = \frac{-G_f(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} F(s) = \frac{-5s - 0.5}{15s^4 + 54.5s^3 + 30.3s^2 + 11.5s + 1.5}$$

x^4	15	30.3	1.5
x^3	54.5	11.5	
x^2	27.13	1.5	
x^1	8.49		
x^0	1.5		

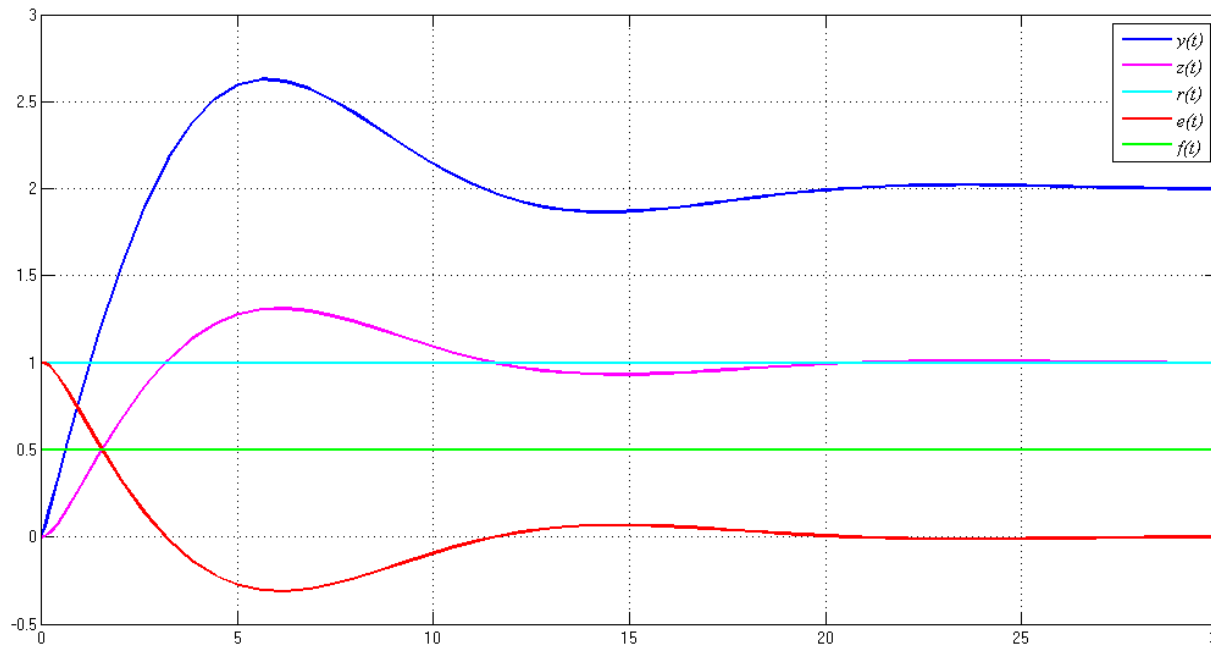
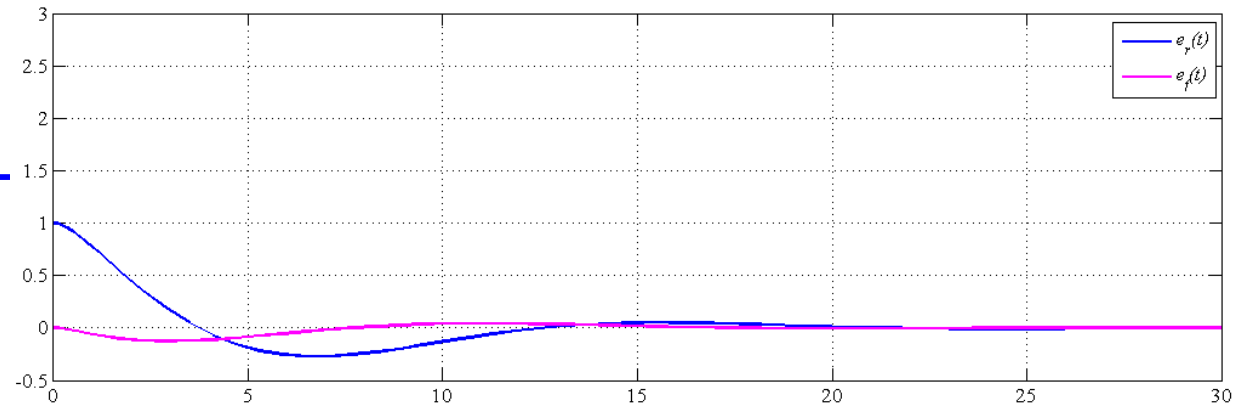
$$\text{余差 } e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssf} = 0$$

$E_f(s)$ 的极点均在左半开平面

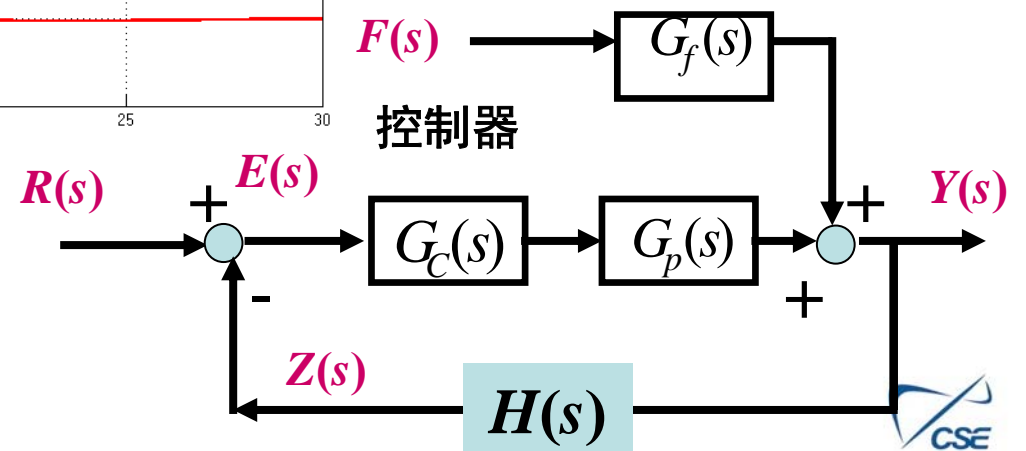
$$e_{ssf} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_f(s) = 0$$



终值定理方法

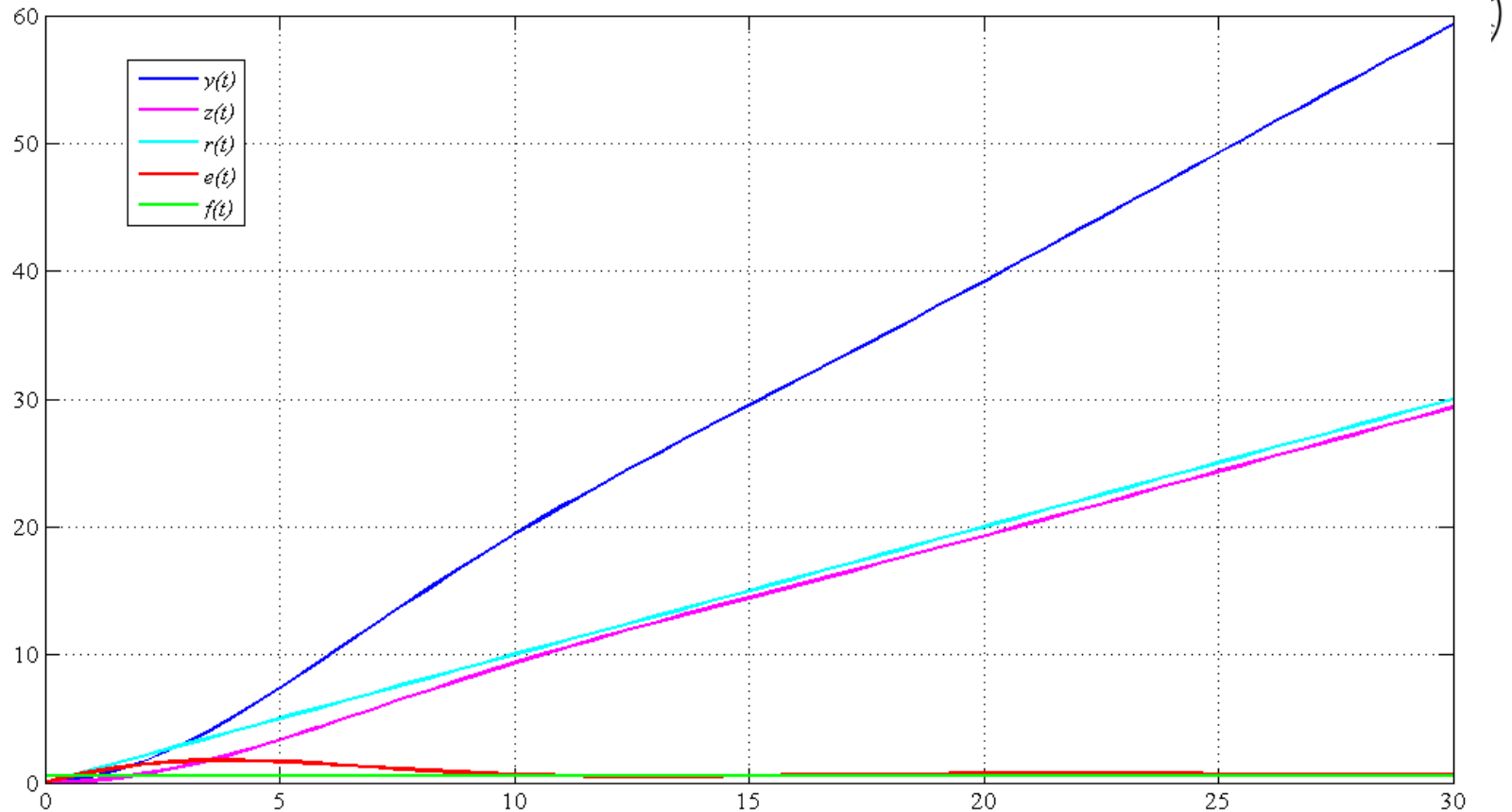


余差 $e_{ss} = 0$



终值定理

(2)



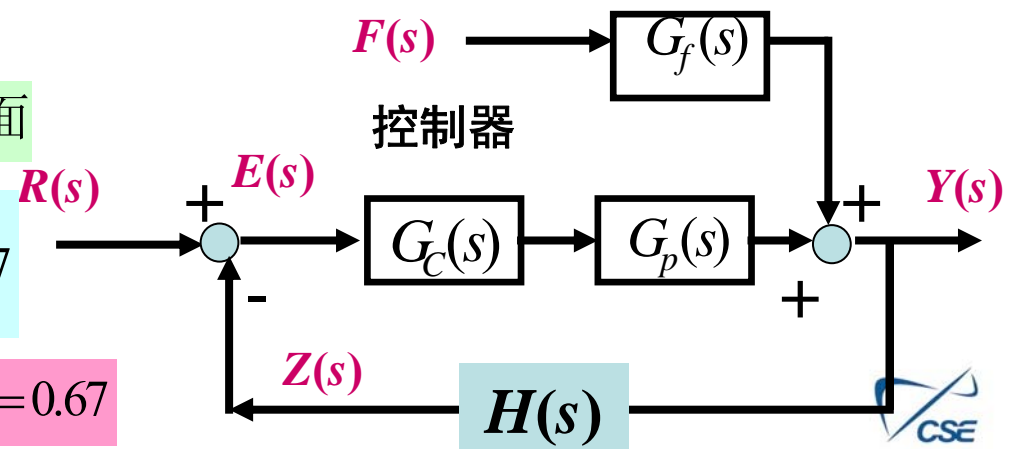
$$E_r(s) = \frac{3s^2 + 10.3s + 1}{3s^3 + 10.3s^2 + 4s + 1.5} \cdot \frac{1}{s}$$

$E_r(s)$ 有一极点在原点, 其它极点均在左半开平面

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^2 + 10.3s + 1}{3s^3 + 10.3s^2 + 4s + 1.5} \cdot \frac{1}{s} = 0.67$$

$E_f(s)$ 与 (1) 同, $e_{ssf} = 0$

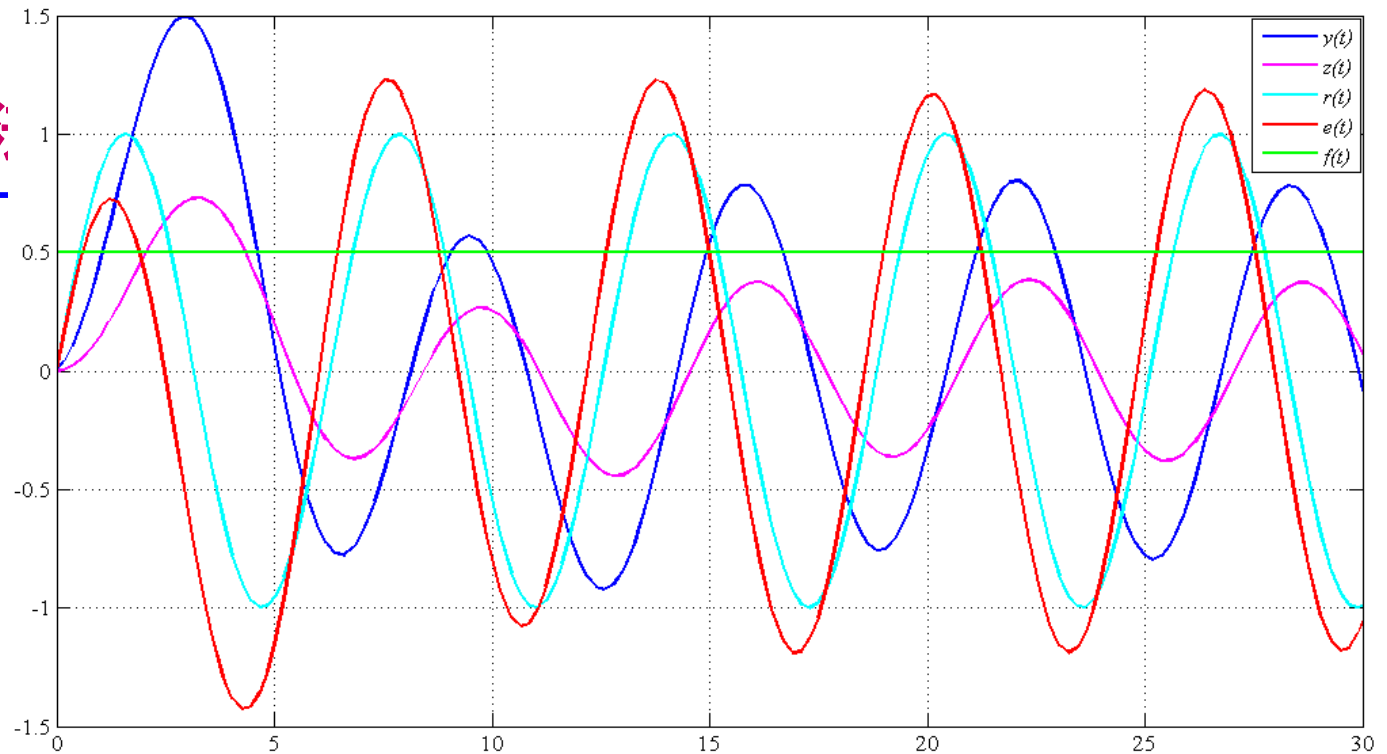
余差 $e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssf} = 0.67$



终值定理方法

x^5	3	7	4
x^4	103	118	15
x^3	1	1	
x^2	1	1	
x^1	2	0	
x^0	1		

(3)



$$E_r(s) = \frac{1}{1 + \frac{2s+1}{s} \frac{3}{10s+1} \frac{0.5}{0.3s+1}} \frac{1}{s^2+1}$$

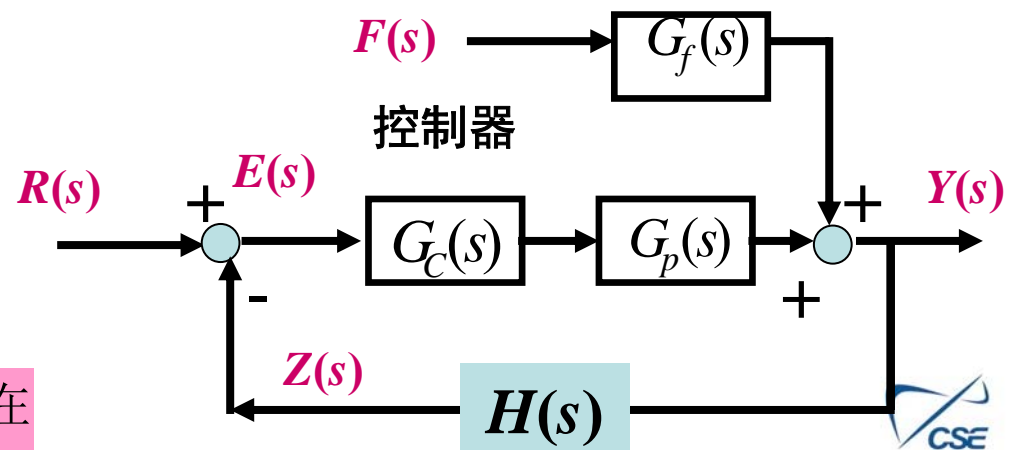
$$= \frac{3s^3 + 10.3s^2 + s}{3s^5 + 10.3s^4 + 7s^3 + 11.8s^2 + 4s + 1.5}$$

$E_r(s)$ 有一对极点在虚轴上, $e_r(t)$ 有界但不收敛
 e_{ssr} 不存在, 终值定理不能用

$E_f(s)$ 与 (1) 同, $e_{ssf} = 0$

余差 e_{ss} 不存在

稳态误差不仅取决于输入 $r(t)$ 和 $f(t)$, 还取决于系统传递函数





如图系统, 已知 $G_p(s) = \frac{3}{10s+1}$, $G_f(s) = \frac{2}{5s+1}$, $H(s) = \frac{0.5}{0.3s+1}$, $G_c(s) = 2$, 求如下情形的余差
 $r(t) = u_{-1}(t)$, $f(t) = 0.5u_{-1}(t)$

解

$$E_r(s) = \frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s) = \frac{1}{1+2 \cdot \frac{3}{10s+1} \cdot \frac{0.5}{0.3s+1}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3s^2 + 10.3s + 1}{s(3s^2 + 10.3s + 4)}$$

$E_r(s)$ 有一极点在原点, 其它极点均在左半开平面

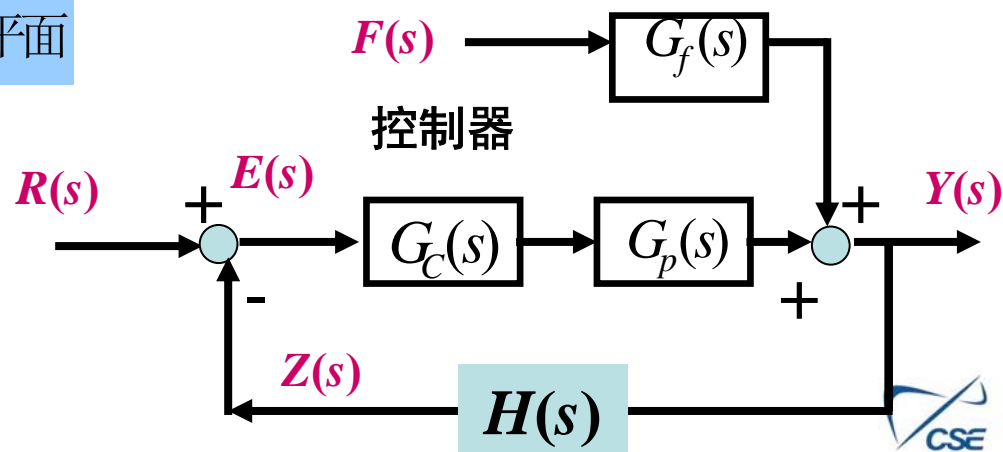
$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s) = 0.25$$

$$E_f(s) = \frac{-G_f(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)} F(s) = \frac{-5s-0.5}{s(15s^3 + 54.5s^2 + 30.3s + 4)}$$

$E_f(s)$ 有一极点在原点, 其它极点均在左半开平面

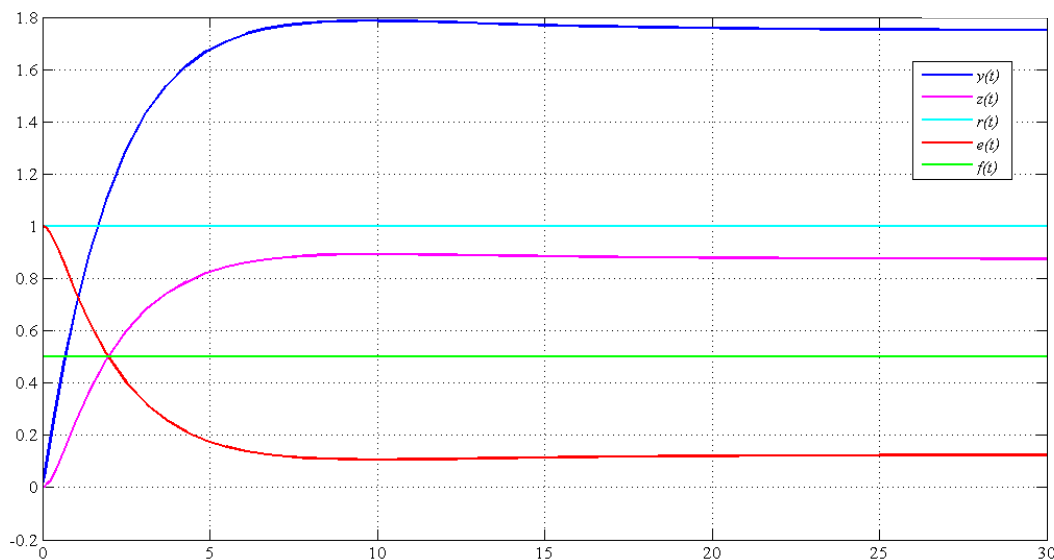
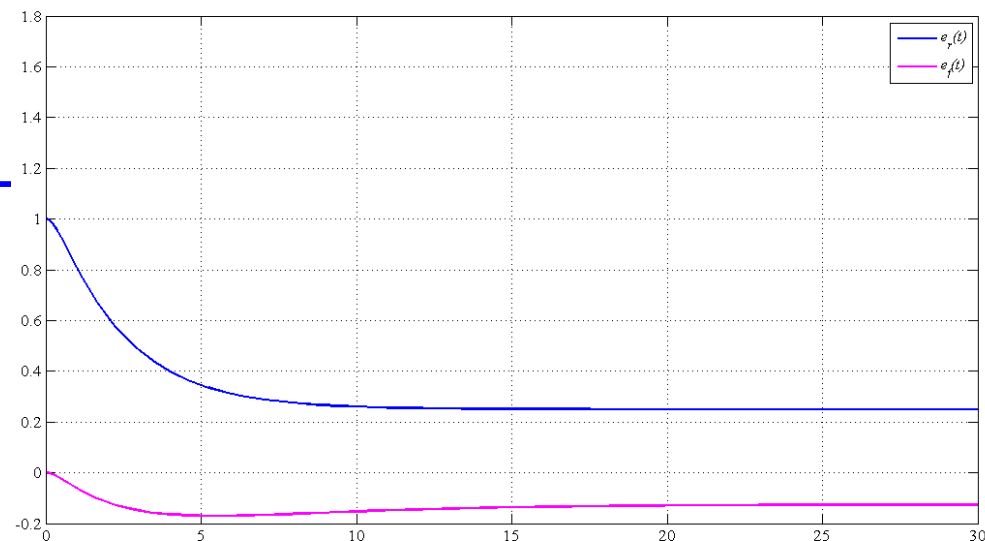
$$e_{ssf} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_f(s) = -0.125$$

$$\text{余差 } e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssf} = 0.125$$

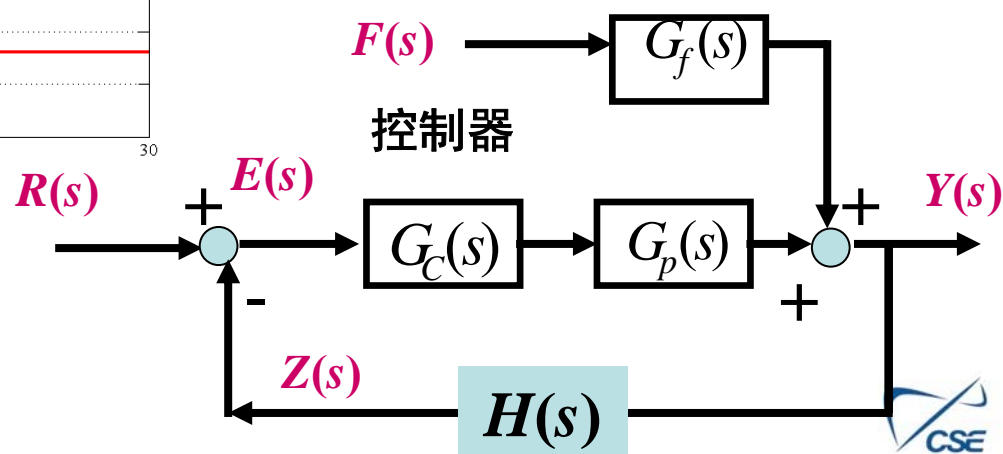


终值定理方法

在闭环系统中，若参考输入和干扰均为阶跃，
控制器中的积分可使 e_{ssr} 、 e_{ssf} 和 e_{ss} 均等于零



余差 $e_{ss} = 0.125$



单位负反馈系统的型别

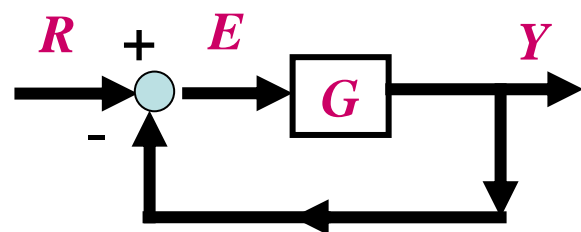
➤ 对于下图所示的**单位负反馈系统**（称为“跟踪系统”），系统的开环传递函数为： $G(s)=Y(s)/E(s)$ ，仅考虑参考输入

开环传递函数

$$G(s) = \frac{K \prod_k (T_k s + 1) \prod_l (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}{\prod_i (T_i s + 1) \prod_j (T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)} s^q = \frac{K \beta(s)}{s^m \alpha(s)} \quad m = -q$$

若 $s = 0$ ，则 $\alpha(s) = \beta(s) = 1$

$$\text{闭环传递函数 } \Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$



单位负反馈系统

称 K 是闭环系统 $\Phi(s)$ 的**开环增益**

称 $m \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 是闭环系统 $\Phi(s)$ 的**型别**

实际中，闭环控制系统的型别多为 0、1 或 2，称之为“0”型系统、“1”型系统或“2”型系统

“0”型系统的开环增益 K 也记为 K_0

“1”型系统的开环增益 K 也记为 K_1

“2”型系统的开环增益 K 也记为 K_2

单位负反馈系统的型别

当 $m \geq 0$ 时

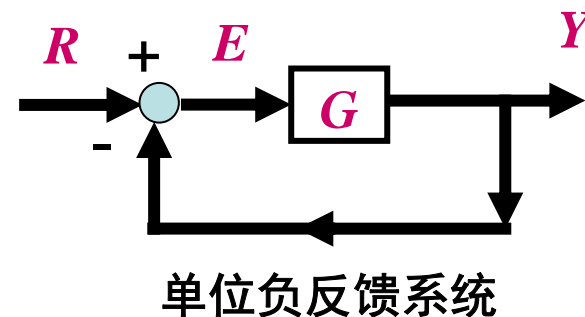
$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} = \frac{R(s)}{1 + \frac{K\beta(s)}{s^m\alpha(s)}} = \frac{s^m\alpha(s)R(s)}{s^m\alpha(s) + K\beta(s)} = \frac{s^m\alpha(s)R(s)}{A(s)}$$

当闭环系统稳定时， $A(s) = 0$ 的根均在左半开平面

若 e_{ss} 存在

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^m\alpha(s)R(s)}{s^m\alpha(s) + K\beta(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{m+1}}{s^m + K} R(s)$$

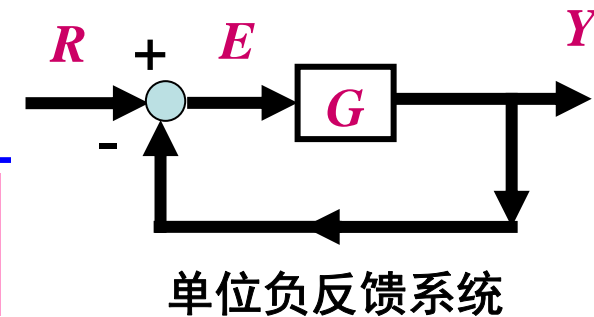
用上面公式，可在阶跃、斜坡、抛物线等输入下对**各型别系统**进行分析



0型系统 (m=0)

$$E(s) = \frac{s^m \alpha(s) R(s)}{A(s)}$$

$$\text{若 } e_{ss} \text{ 存在, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{m+1}}{s^m + K} R(s)$$



➤ **阶跃输入:** $r(t)=R_0, R(s)=R_0/s$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{\alpha(s)}{A(s)} \frac{R_0}{s}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + K_0} \frac{R_0}{s} = \frac{R_0}{1 + K_0} \neq 0$$

能有差跟踪阶跃, 余差与 R_0 和 K_0 有关

➤ **斜坡输入:** $r(t)=R_1 t, R(s)=R_1/s^2$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{\alpha(s)}{A(s)} \frac{R_1}{s^2}$ 不满足终值定理条件

$e(t)$ 中有模态 t (斜坡模态), $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$

不能跟踪斜坡

➤ **抛物线输入:** $r(t)=0.5 R_2 t^2, R(s)=R_2/s^3$

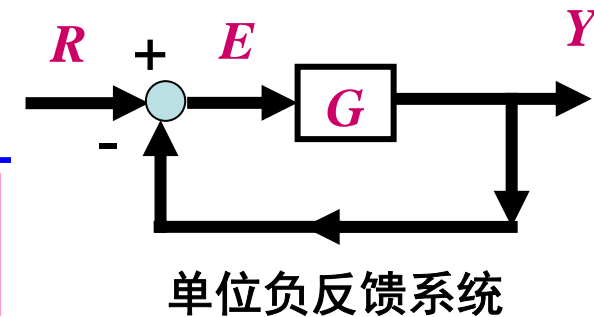
同理可证, $e(t)$ 中有模态 t^2 (抛物线模态), $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$

不能跟踪抛物线

1型系统 (m=1)

$$E(s) = \frac{s^m \alpha(s) R(s)}{A(s)}$$

$$\text{若 } e_{ss} \text{ 存在, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{m+1}}{s^m + K} R(s)$$



➤ **阶跃输入:** $r(t)=R_0, R(s)=R_0/s$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + K_1} \frac{R_0}{s} = 0$$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{s\alpha(s)}{A(s)} \frac{R_0}{s}$ 满足终值定理条件

能无差跟踪阶跃

➤ **斜坡输入:** $r(t)=R_1 t, R(s)=R_1/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s + K_1} \frac{R_1}{s^2} = \frac{R_1}{K_1}$$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{s\alpha(s)}{A(s)} \frac{R_1}{s^2}$ 满足终值定理条件

能有差跟踪斜坡, 余差与 R_1 和 K_1 有关

➤ **抛物线输入:** $r(t)=0.5R_2 t^2, R(s)=R_2/s^3$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{s\alpha(s)}{A(s)} \frac{R_2}{s^3}$ 不满足终值定理条件

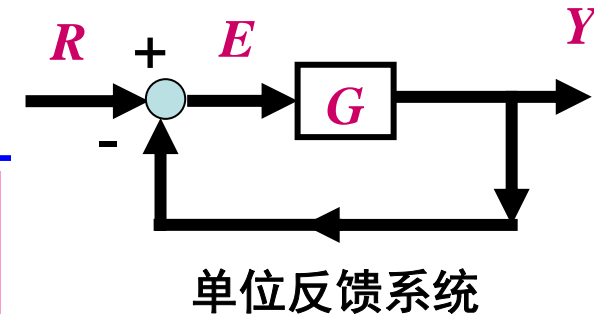
$e(t)$ 中有模态 t (斜坡模态), $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$

不能跟踪抛物线

2型系统 (m=2)

$$E(s) = \frac{s^m \alpha(s) R(s)}{A(s)}$$

$$\text{若 } e_{ss} \text{ 存在, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{m+1}}{s^m + K} R(s)$$



➤ **阶跃输入:** $r(t)=R_0, R(s)=R_0/s$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{s^2 + K_2} \frac{R_0}{s} = 0$$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{s^2 \alpha(s)}{A(s)} \frac{R_0}{s}$ 满足终值定理条件

能无差跟踪阶跃

➤ **斜坡输入:** $r(t)=R_1 t, R(s)=R_1/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{s^2 + K_2} \frac{R_1}{s^2} = 0$$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{s^2 \alpha(s)}{A(s)} \frac{R_1}{s^2}$ 满足终值定理条件

能无差跟踪斜坡

➤ **抛物线输入:** $r(t)=0.5R_2 t^2, R(s)=R_2/s^3$

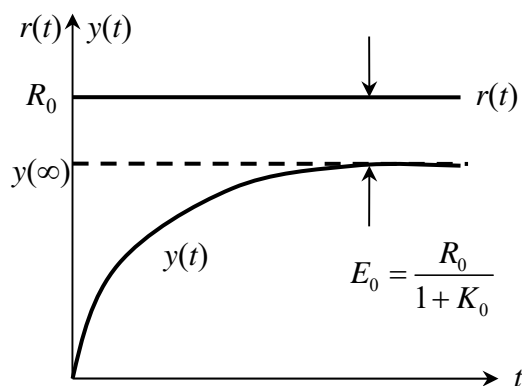
闭环稳定 $\Rightarrow E(s) = \frac{s^2 \alpha(s)}{A(s)} \frac{R_2}{s^3}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{s^2 + K_2} \frac{R_2}{s^3} = \frac{R_2}{K_2}$$

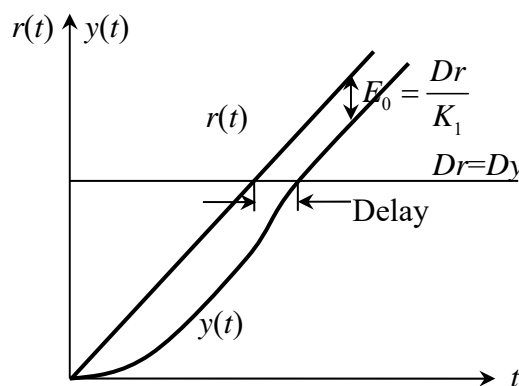
能有差跟踪抛物线, 余差与 R_2 和 K_2 有关

误差系数

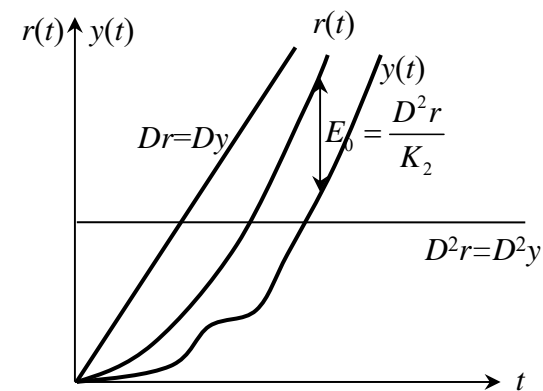
- 系统误差系数是在给定的参考输入（常数或慢时变）下，单位负反馈稳定控制系统稳态精度的一种度量



0型系统对阶跃输入的响应



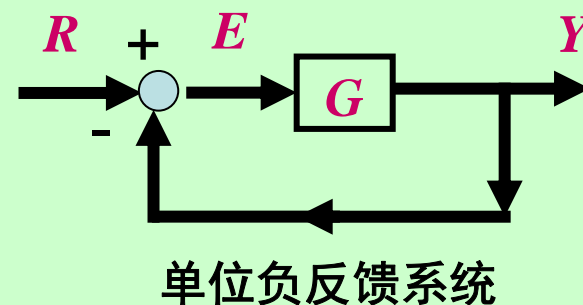
1型系统对斜坡输入的响应



2型系统对抛物线输入的响应

对稳定单位负反馈系统输入 $\frac{R_p}{s^{p+1}}$ ，若余差 e_{ss} 为有界常数，则强迫输出（强迫响应）的 p 阶微分必为常数

$$\frac{\text{稳态输出的 } p \text{ 阶微分}}{e_{ss}} = \text{常数}$$



单位负反馈系统

阶跃误差系数（位置误差系数）

➤ 误差系数与系统型别无关，据输入的形式来定义，如阶跃、斜坡和抛物线

➤ 误差系数只针对稳定的单位负反馈系统

$$\text{阶跃误差系数定义为 } K_p = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{e_{ss}}$$

仅适用于阶跃输入

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{R_0}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_0 \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_0}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} R_0 \right]$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_0 \right] / \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} R_0 \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

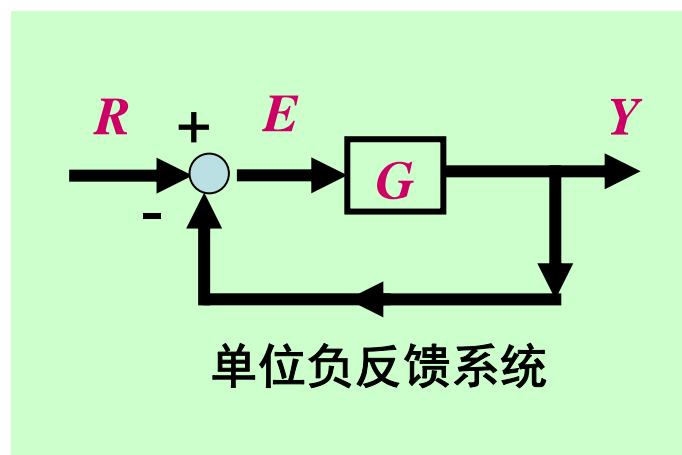
$$G(s) = \frac{K \beta(s)}{s^m \alpha(s)}$$

$$K_p = \begin{cases} K_0 \\ \infty \\ \infty \end{cases}$$

0 型系统

1 型系统

2 型系统





斜坡误差系数（速度误差系数）

$$\text{斜坡误差系数定义为 } K_v = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy(t)}{dt}}{e_{ss}}$$

仅适用于斜坡输入

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{R_1}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_1 \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s} \right]$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_1 \right] / \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$$

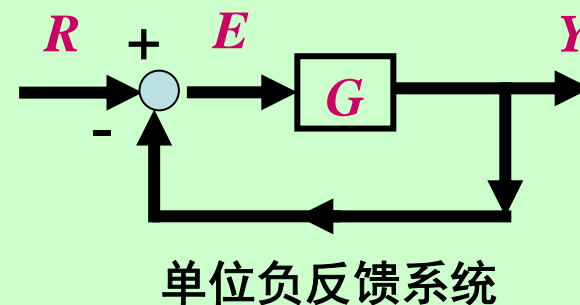
$$sG(s) = s \frac{K \beta(s)}{s^m \alpha(s)}$$

$$K_v = \begin{cases} 0 \\ K_1 \\ \infty \end{cases}$$

0 型系统

1 型系统

2 型系统





抛物线误差系数（加速度误差系数）

$$\text{抛物线误差系数定义为 } K_a = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2 y(t)}{dt^2}}{e_{ss}}$$

仅适用于抛物线输入

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s^3 Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^3 \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)} \frac{R_2}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)} R_2 \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G(s)} \frac{R_2}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + G(s)} \frac{R_2}{s^2} \right]$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)}{1 + G(s)} R_2 \right] \bigg/ \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + G(s)} \frac{R_2}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

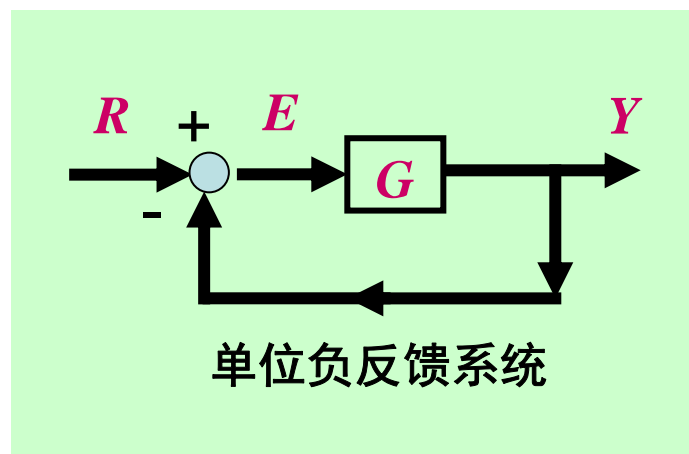
$$s^2 G(s) = s^2 \frac{K \beta(s)}{s^m \alpha(s)}$$

$$K_a = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ K_2 \end{cases}$$

0 型系统

1 型系统

2 型系统



型别-误差系数方法

系统 型别	误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	阶跃输入 $R_0(t)$	斜坡输入 $R_1 t$	抛物线输入 $\frac{R_2}{2} t^2$
0	K_0	0	0	$\frac{R_0}{1 + K_p}$	∞	∞
1	∞	K_1	0	0	$\frac{R_1}{K_v}$	∞
2	∞	∞	K_2	0	0	$\frac{R_2}{K_a}$



型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{50}{(0.1s + 1)(2s + 1)}$$

试求位置 (step) 误差系数 K_p ，速度 (ramp) 误差系数 K_v ，加速度 (parabolic) 误差系数 K_a

解：首先判断系统的稳定性

$m=0$ ，这是“0”型系统，

位置误差系数 K_p

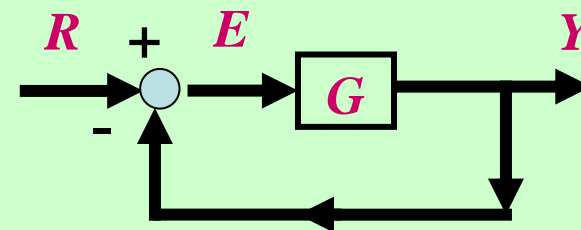
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{50}{(0.1s + 1)(2s + 1)} = 50$$

速度误差系数 K_v

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = 0$$

加速度误差系数 K_a

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = 0$$



单位负反馈系统



型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

试求位置误差系数 K_p ，速度误差系数 K_v ，加速度误差系数 K_a

解：首先判断系统的稳定性

$m=1$ ，这是“1”型系统，

位置误差系数 K_p

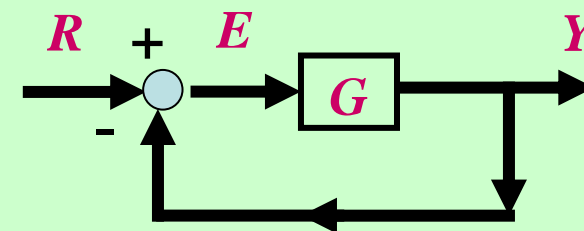
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

速度误差系数 K_v

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)} = \frac{K}{200}$$

加速度误差系数 K_a

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = 0$$



单位负反馈系统



型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

试求位置误差系数 K_p ，速度误差系数 K_v ，加速度误差系数 K_a

解： 首先判断系统的稳定性

$m=2$ ，这是“2”型系统，

位置误差系数 K_p

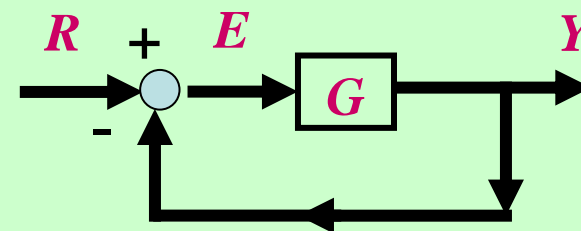
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

速度误差系数 K_v

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \infty$$

加速度误差系数 K_a

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)} = 1$$



单位负反馈系统



型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{100}{(0.1s + 1)(s + 5)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时，系统的稳态误差

解：首先判断系统的稳定性

因为 $m=0$ ，这是“0”型系统，故有

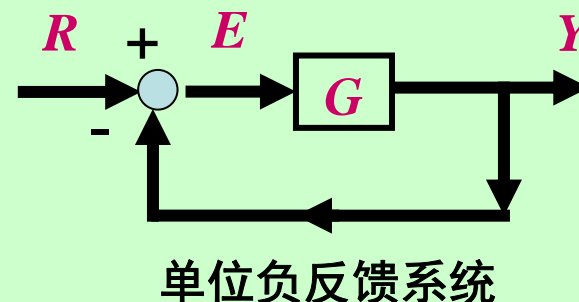
位置误差系数 K_p

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100}{(0.1s + 1)(s + 5)} = 20$$

速度误差系数 K_v 与加速度误差系数 K_a 均为零。又因是线性系统，满足迭加原理，故当输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时，系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \infty$$

这是因为“0”型系统不能跟踪斜坡输入与抛物线输入之故





型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{50}{s(0.1s + 1)(s + 5)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时，系统的稳态误差

解： 首先判断系统的稳定性

因为 $m=1$ ，这是“1”型系统，故有

位置误差系数 K_p

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$$

速度误差系数 K_v

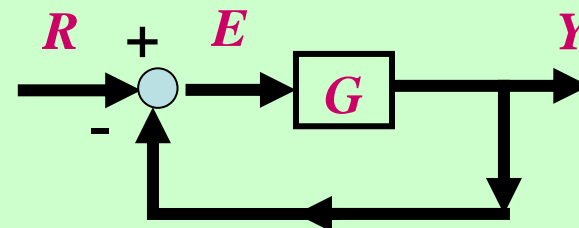
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{50}{s(0.1s + 1)(s + 5)} = 10$$

加速度误差系数 K_a 为零。当输入为 $r(t) = 2t$ 时，系统稳态误差：

$$e(\infty) = \frac{R_1}{K_v} = \frac{2}{10} = 0.2$$

当输入为 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ $e(\infty) = \infty$

因“1”型系统不能跟踪抛物线输入



单位负反馈系统



型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时，系统的稳态误差

解： 首先判断系统的稳定性

因为 $m=2$ ，这是“2”型系统，故有

位置误差系数 K_p 与速度误差系数 K_v

$$K_p = K_v = \infty$$

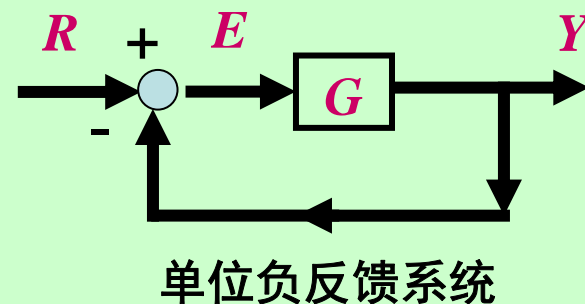
加速度误差系数 K_a

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)} = 0.1$$

当输入为 $r(t) = 2t$ $e(\infty) = 0$

当输入为 $r(t) = 2 + 2t + t^2$

$$e(\infty) = \frac{R_2}{K_a} = \frac{2}{0.1} = 20$$





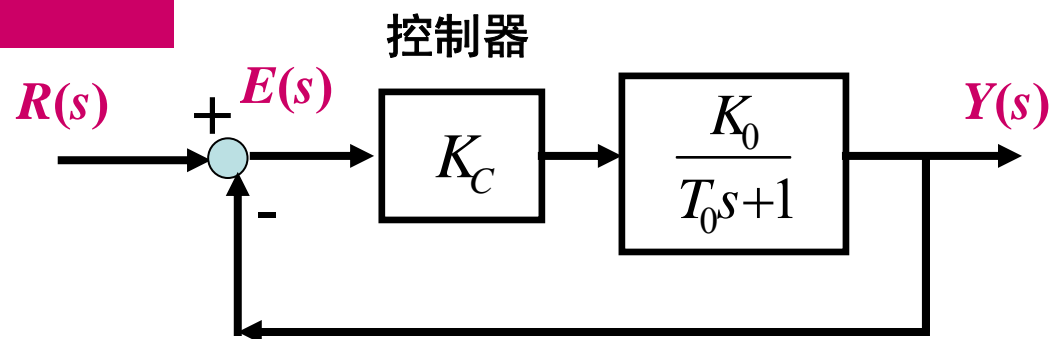
型别-误差系数方法

- m 型系统可以以零稳态误差跟踪具有 t^{m-1} 及更低次形式的输入
- m 型系统可以跟踪具有 t^m 形式的输入，但存在常数稳态误差
- m 型系统不能跟踪具有 t^{m+1} 及更高次形式的输入，因为稳态误差趋向于无穷值

型别-误差系数方法

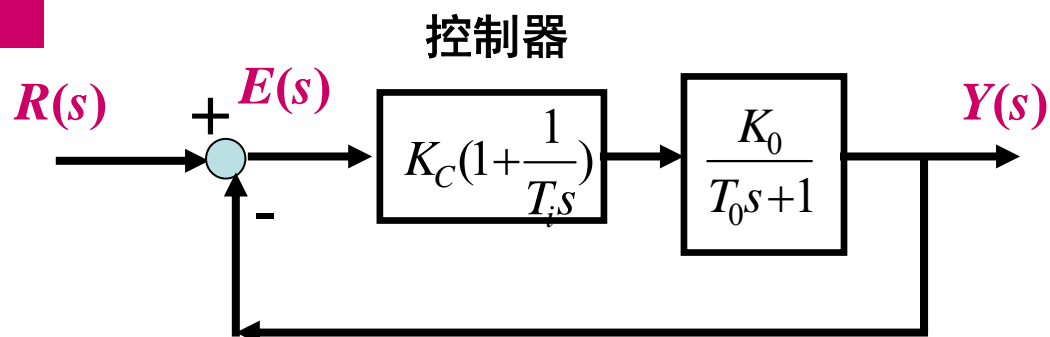
考虑比例控制器

0 型系统 !



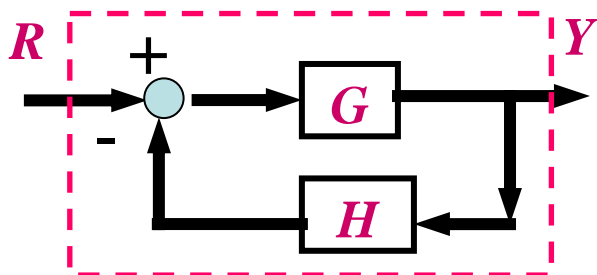
应用比例积分控制器

1 型系统 !

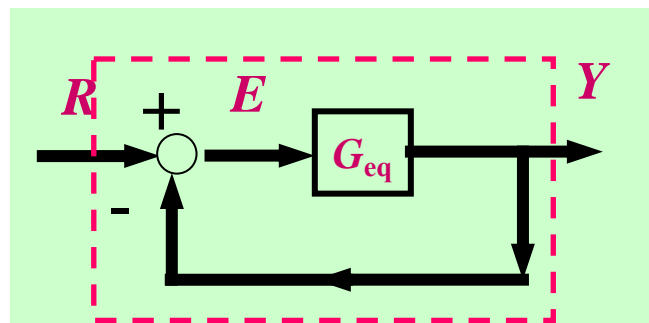


非单位负反馈系统

- 非单位负反馈系统可以通过数学变换转换为等价的单位负反馈系统，再通过分析等价系统的型别和稳态误差系数来分析原系统的误差。



非单位负反馈系统



单位负反馈系统

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)}$$

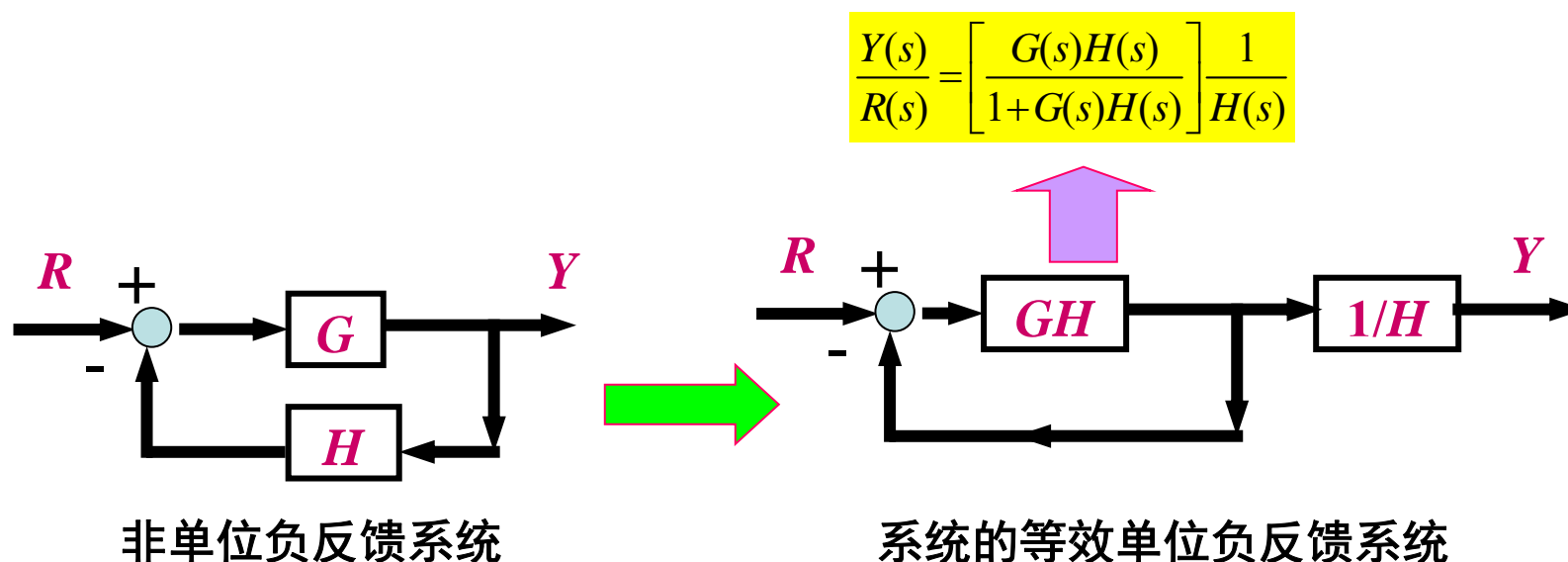


$$G_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s) - N(s)}$$

- 当非单位负反馈系统稳定时，其稳态性能特征可以基于上式进行分析

非单位负反馈系统

➤ 非单位负反馈系统的等效表示



➤ 当 H 为常数时，有利于利用单位负反馈系统方法进行系统设计。

Thanks !