滤波器

主 讲 教 师 ： 于 淼

目录

模拟滤波器

二、巴特沃思低通滤波器

- 以**巴特沃思函数**作为滤波器的传递函数
- 该函数以最高阶泰勒级数的形式来逼近理想矩形特性

模拟滤波器

1、巴特沃思低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

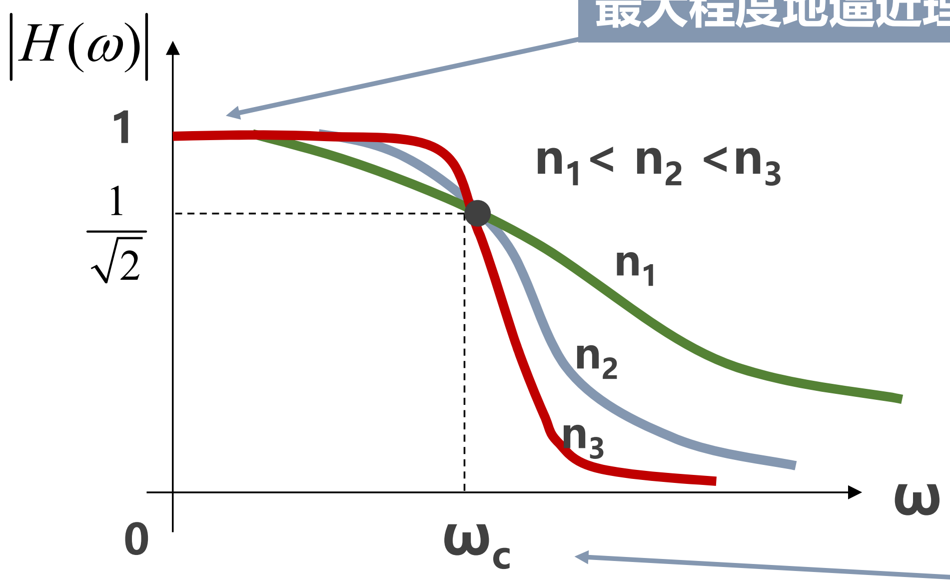
$$\begin{aligned}\alpha &= -20\lg|H(\omega_p)| \\ &= -20\lg|H(\omega_c)| \\ &= -20\lg\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

- n为滤波器的阶数
- ω_c为滤波器的截止频率，当$\omega = \omega_c$时，$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$，所以$\omega_c$对应的是滤波器 - 3dB点

模拟滤波器

1、巴特沃思低通滤波器的幅频特性

幅值函数单调递减，在ω=0处具有最大值1，最大程度地逼近理想低通特性



阶数n增加时，通带幅频特性变平，阻带幅频特性衰减加快，过渡带变窄，趋于理想低通特性

ω趋于无穷时，幅值趋于零

- 在ω_c处，$|H(\omega_c)| = 0.707$ $|H(\omega_c)|$比$|H(0)|$下降了3dB
- 所有阶次幅频特性曲线均经过点（ω_c，0.707）

模拟滤波器

2、巴特沃思低通滤波器阶次的确定

- 在工程设计中常用**衰减函数**来描述滤波器的幅频特性：

$$\alpha = -20\lg\left|H(\omega)\right| = -20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}\right) = -20\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

模拟滤波器

2、巴特沃思低通滤波器阶次的确定

$$\alpha_p = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

$$\alpha_s = 10\lg\left[1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2n}\right]$$

$$n = \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

n应当为整数

$$n = \left[\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_c}\right)}\right]+1$$

模拟滤波器

3、巴特沃思低通滤波器的零极点分布

$$|H(s)|^2 = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}\right]_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+(-1)^n\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

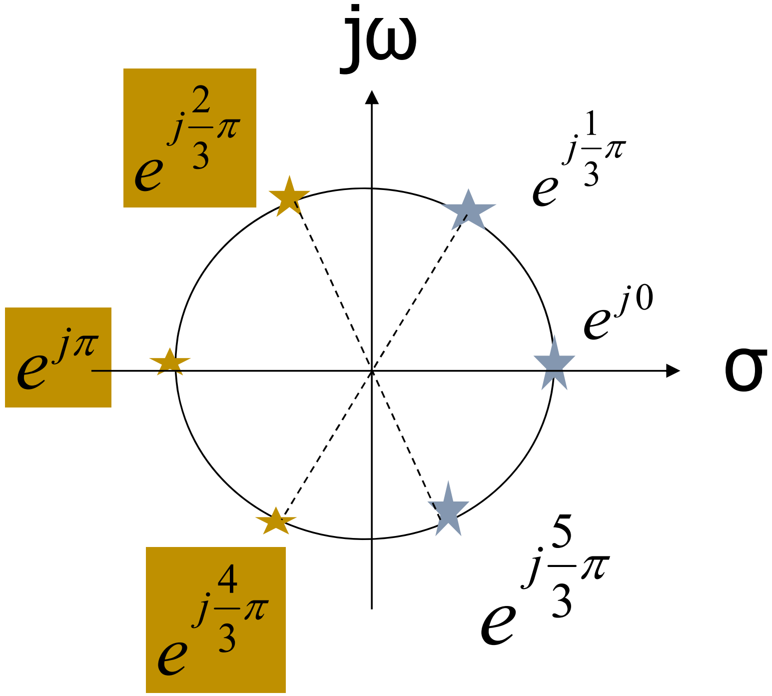
$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2n} = \begin{cases} +1 & n=\text{奇数} \\ -1 & n=\text{偶数} \end{cases}$$

$$S_k = \omega_c e^{j\left(\frac{k\pi}{n}\right)},\ n=\text{奇数}$$

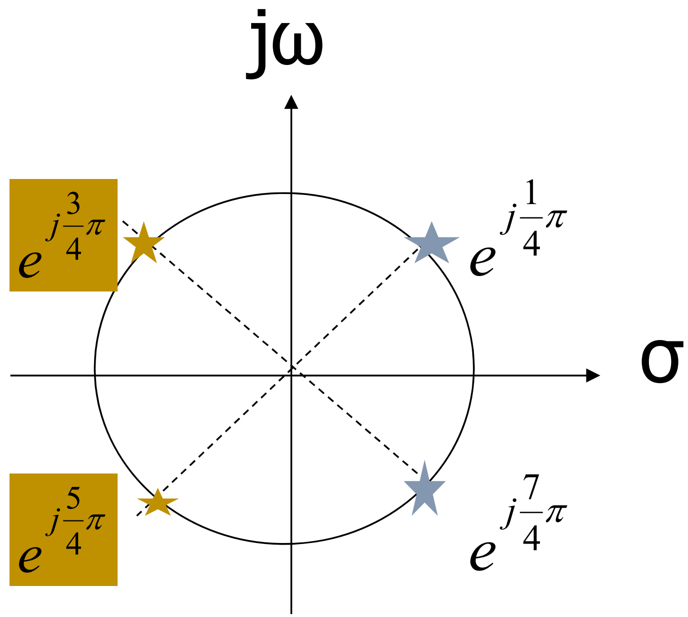
$$S_k = \omega_c e^{j\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)},\ n=\text{偶数}$$

模拟滤波器

3、巴特沃思低通滤波器的零极点分布



n=3



n=2

模拟滤波器

3、巴特沃思低通滤波器的零极点分布

- H(s)H(-s)的2*n*个极点以 $\frac{\pi}{n}$ 为间隔均匀分布在半径为ω_c的圆上，这个圆称为巴特沃思圆
- 所有极点以jω轴为对称轴成对称分布， jω轴上没有极点
- 当*n*为奇数时，有两个极点分布在 $s=\pm\omega_c$ 的实轴上；*n*为偶数时，实轴上没有极点。所有复数极点两两呈共轭对称分布

模拟滤波器

4、巴特沃思低通滤波器的传递函数

- 取全部左半平面的极点为H(s)的极点，则

$$H(s)=\frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^{n}(s-s_k)}$$

为使滤波器设计具有通用性，需将频率进行归一化处理，选择ω_c为参考频率，则归一化复频率为

$$\bar{s}=\frac{s}{\omega_c}$$

模拟滤波器

4、巴特沃思低通滤波器的传递函数

巴特沃思多项式

- 当n为偶数时

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n/2}\left(\bar{s}^{2}-2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\bar{s}+1\right)}$$

- 当n为奇数时

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(\bar{s}+1)\left(\bar{s}^{2}-2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\bar{s}+1\right)}$$

模拟滤波器

5、归一化频率的各阶巴特沃思多项式

n	巴特沃思多项式
1	$\bar{s}+1$
2	$\bar{s}^2+\sqrt{2}\bar{s}+1$
3	$\bar{s}^3+2\bar{s}^2+2\bar{s}+1$
4	$\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1$
5	$\bar{s}^5+3.236\bar{s}^4+5.236\bar{s}^3+5.236\bar{s}^2+3.236\bar{s}+1$
6	$\bar{s}^6+3.864\bar{s}^5+7.464\bar{s}^4+9.141\bar{s}^3+7.464\bar{s}^2+3.864\bar{s}+1$
7	$\bar{s}^7+4.494\bar{s}^6+10.103\bar{s}^5+14.606\bar{s}^4+14.606\bar{s}^3+10.103\bar{s}^2+4.464\bar{s}+1$
8	$\bar{s}^8+5.126\bar{s}^7+13.137\bar{s}^6+21.846\bar{s}^5+25.688\bar{s}^4+21.846\bar{s}^3+13.137\bar{s}^2+5.126\bar{s}+1$

模拟滤波器

例1 求三阶巴特沃思低通滤波器的传递函数，设 $\omega_c = 1rad/s$

- 解：n=3为奇数，则幅度平方函数为 $|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\omega^6}$

$$\omega^2 = -s^2$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1-s^6}$$

六个极点分别为

$$s_{p1} = \omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad s_{p2} = -\omega_c \quad s_{p3} = -\omega_c e^{j\frac{\pi}{3}} \quad s_{p4} = -\omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$s_{p5} = \omega_c \quad s_{p6} = \omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}$$

取位于s平面左半平面的极点，可得系统传递函数

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{(s-\omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}})(s+\omega_c)(s+\omega_c e^{j\frac{\pi}{3}})} = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

模拟滤波器

例2 若巴特沃思低通滤波器的频域指标为：当 $\omega_1 = 2rad/s$ 时，其衰减不大于3dB；当 $\omega_2 = 6rad/s$ 时，其衰减不小于30dB。求此滤波器的传递函数

- 解 :令 $\omega_c = \omega_1 = \omega_p = \omega_{3dB} = 2rad/s$ $\omega_s = \omega_2 = 6rad/s$

归一化后的频域指标为 $\varpi_c = \frac{\omega_p}{\omega_c} = 1,$ $\alpha_p = 3dB$ $\varpi_s = \frac{\omega_2}{\omega_c} = 3,$ $\alpha_s = 30dB$

可求得该滤波器的阶数为

$$n = \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg\frac{\omega_s}{\omega_c}} = \frac{\lg\sqrt{10^3 - 1}}{\lg 3} \approx 3.143$$

取n=4，查表可得此滤波器归一化传递函数为

模拟滤波器

$$H(\bar{s})=\frac{1}{\bar{s}^4+2.613\bar{s}^3+3.414\bar{s}^2+2.613\bar{s}+1}$$

- 通过反归一化处理，令 $s=\bar{s}\omega_c$ ，可求出实际滤波器的传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{\omega_c}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^4+2.613\left(\frac{s}{2}\right)^3+3.414\left(\frac{s}{2}\right)^2+2.613\left(\frac{s}{2}\right)+1}$$

$$=\frac{16}{s^4+5.226s^3+13.656s^2+20.904s+16}$$

作业

给定滤波特性的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(1-\omega^2)^2}{(16+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

求具有最小相位特性的滤波器系统函数

设计巴特沃兹低通滤波器，技术要求如下：

$$\omega_p = 6k \quad rad/s \quad \alpha_p = 3\mathrm{dB}$$

$$\omega_s = 15k \quad rad/s \quad \alpha_s = 20\mathrm{d}B$$

谢谢大家