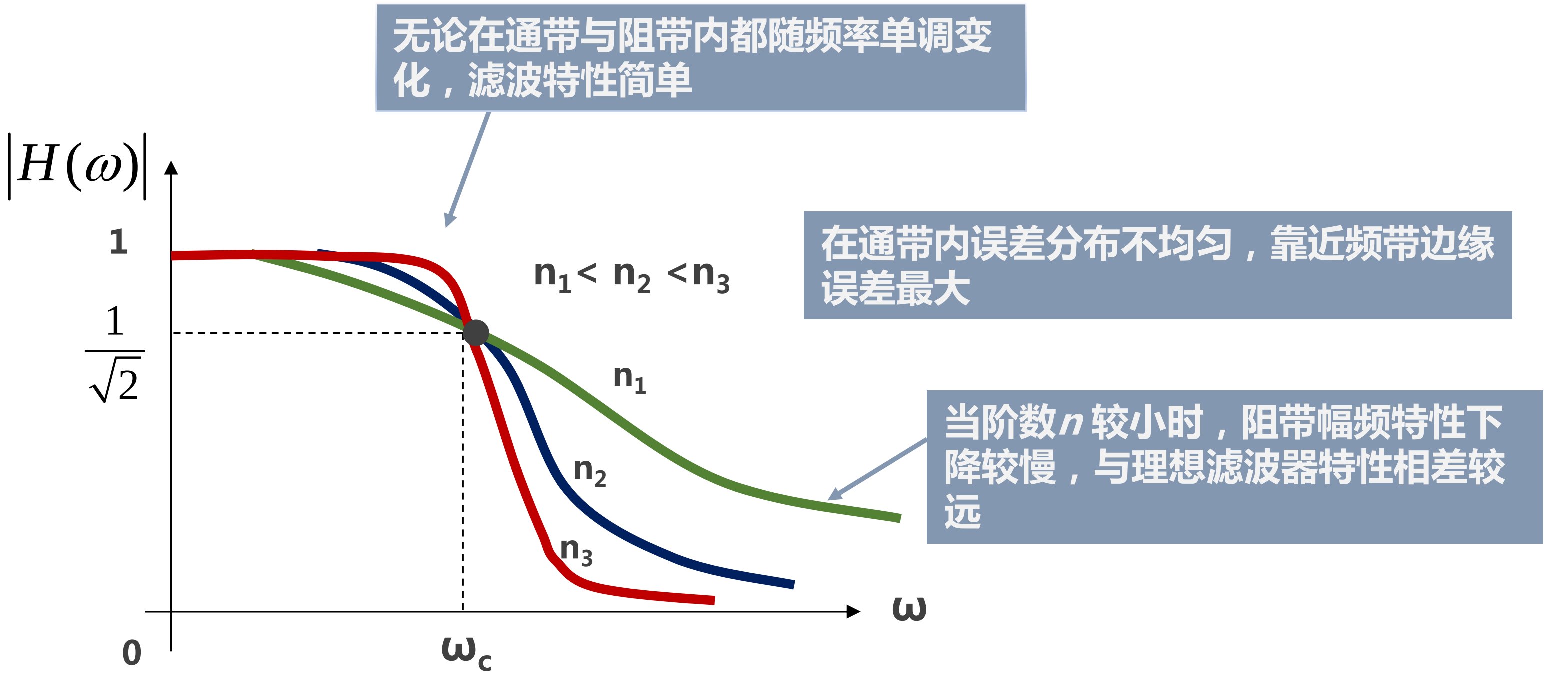
滤波器

主 讲 教 师 ： 于 淼

切比雪夫低通滤波器

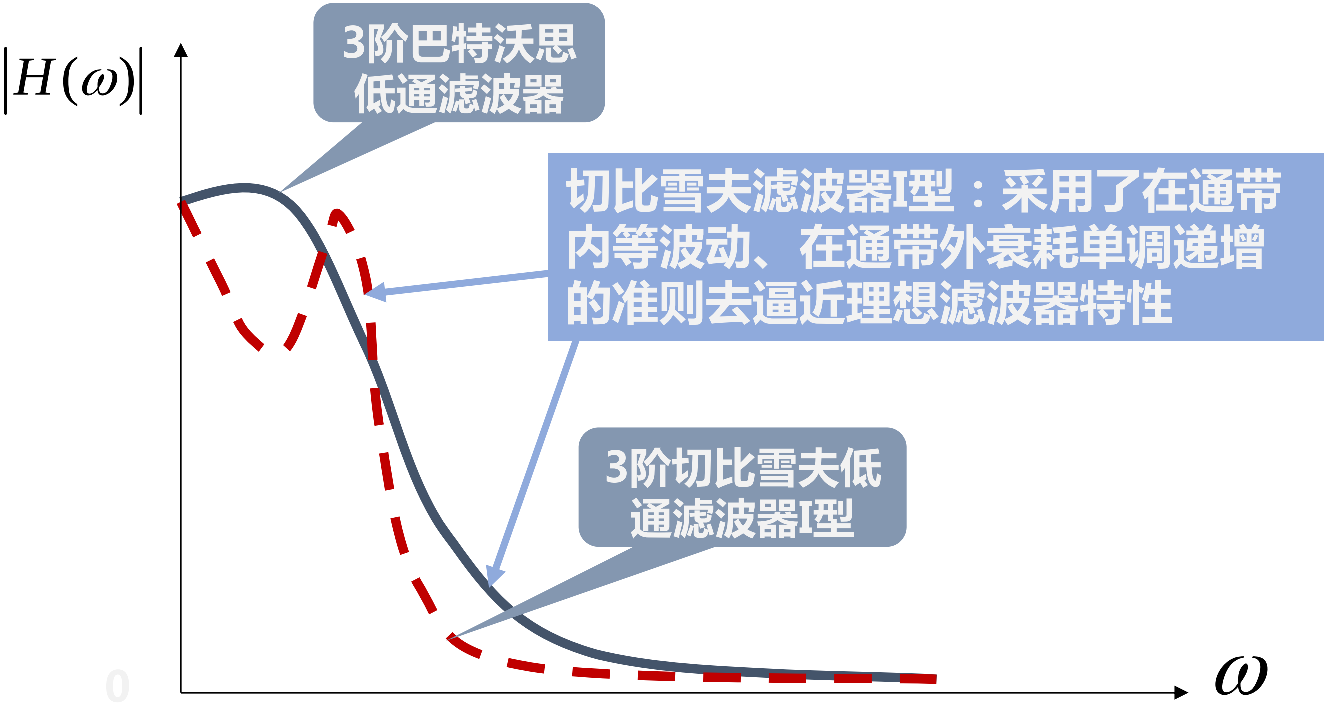
1、巴特沃思低通滤波器与切比雪夫低通滤波器的比较



若将误差均匀地分布在通带内，就可以设计出阶数较低的滤波器

切比雪夫低通滤波器

1、巴特沃思低通滤波器与切比雪夫低通滤波器的比较



切比雪夫II型：在通带内是单调的，在阻带内是等波纹

切比雪夫低通滤波器

2、切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^{\,2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

- ε是决定通带内起伏大小的波动系数，为小于1的正数；ω_c为通带截止频率；$T_n(\omega)$是*n*阶切比雪夫多项式

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos\left(n\cdot\cos^{-1}(\omega)\right) & |\omega|\le 1 \\ \cosh\left(n\cdot\cosh^{-1}(\omega)\right) & |\omega|>1 \end{cases}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

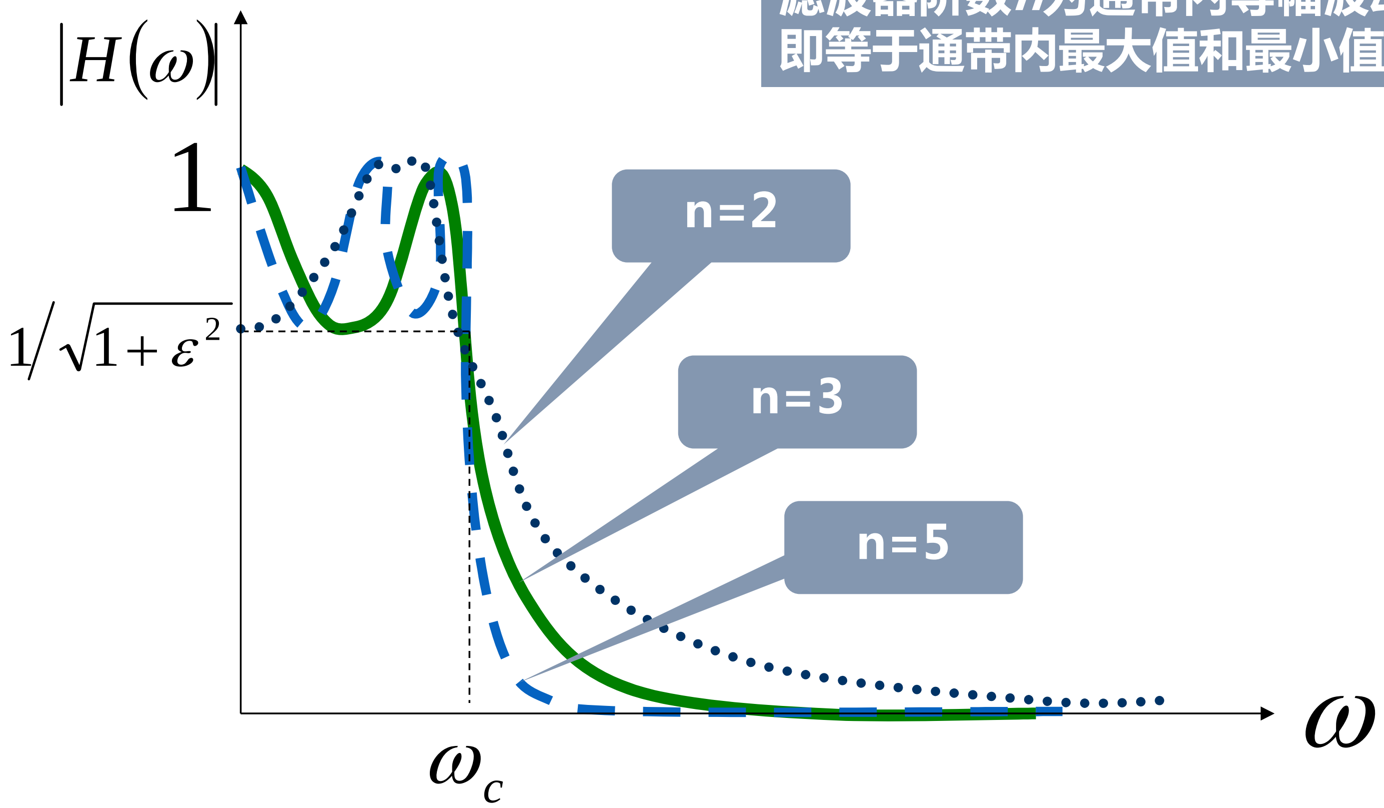
$$\cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$$

切比雪夫低通滤波器

2、切比雪夫低通滤波器的幅频特性

$\varepsilon\downarrow$

$1/\sqrt{1+\varepsilon^2}\uparrow$



滤波器阶数*n*为通带内等幅波动的次数，即等于通带内最大值和最小值的总数

切比雪夫低通滤波器

2、切比雪夫低通滤波器的幅频特性

- 当 $0 \le \omega \le \omega_c$ 时, $|H(\omega)|$ 在1与 $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ 之间等幅波动，ε愈小，波动幅度愈小
- 所有曲线在 $\omega = \omega_c$ 时通过 $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ 点
- 当ω=0时，若n为奇数,则 $|H(\omega)|$ =1；若*n*为偶数,则 $|H(\omega)| = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$；通带内误差分布是均匀的
- 当 $\omega > \omega_c$ 时，曲线单调下降，*n*值愈大，曲线下降愈快

切比雪夫低通滤波器

2、切比雪夫低通滤波器的幅频特性

- Ⅰ型切比雪夫滤波器有三个参数需要确定：波动系数ε，通带截止频率ω_c和阶数n
- 通带截止频率一般按照实际要求给定；ε表示通带内最大损耗，由容许的通带最大衰减 α_{max} 确定

切比雪夫低通滤波器

3、切比雪夫低通滤波器的阶次

切比雪夫滤波器的衰减函数定义为 $\alpha = -20\lg\left|H(\omega)\right|$ $= 10\lg\left(1+\varepsilon^2 T_n^{\;2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right)$

通带最大衰减 $\alpha_{\max}$ ，又称为**通带波纹**，定义为

$$\alpha_{\max} = \alpha_p = \alpha\big|_{\omega=\omega_c} = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\right)$$

波动系数ε为

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}} - 1}$$

切比雪夫低通滤波器

3、切比雪夫低通滤波器的阶次

- 由滤波器的通带截止频率ω_c及通带内允许的最大衰减 $\alpha_{\max}$ 和阻带下限截止频率 ω_s 及阻带内允许的最小衰减$\alpha_{\min}$，可以确定滤波器所需的阶数n

切比雪夫低通滤波器

3、切比雪夫低通滤波器的阶次

阻带内允许的最小衰减为 $$\alpha_{\min} = \alpha_s = 10\lg\left(1+\varepsilon^2\cosh^2\left(n\cdot\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)\right)\right)$$

滤波器的阶次为 $$n = \frac{\cosh^{-1}\left[\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_{\min}}-1\right)/\left(10^{0.1\alpha_{\max}}-1\right)}\right]}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}$$

求出的n不一定是整数，应当对其取整再加上1

切比雪夫低通滤波器

4、切比雪夫滤波器的极点分布

令jω=s，代入切比雪夫低通滤波器幅频特性函数

$$H(s)H(-s)=\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n{}^2\left(\dfrac{s}{j\omega_c}\right)}$$

归一化处理 ，将 s/ω_c 记为 $\bar{s}$

$$H(\bar{s})H(-\bar{s})=\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n{}^2\left(\dfrac{\bar{s}}{j}\right)}$$

切比雪夫低通滤波器

4、切比雪夫滤波器的极点分布

若极点 $s_k = \sigma_k + j\omega_k$

$$\sigma_k = \sin\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right) \quad \omega_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right)$$

令

$$\left.\begin{aligned} a &= \sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right) \\ b &= \cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\sigma_k^{\ 2}}{a^2} + \frac{\omega_k^{\ 2}}{b^2} = 1$$

I 型切比雪夫低通滤波器幅度平方函数极点分布在*s*平面的椭圆上

切比雪夫低通滤波器

5、切比雪夫滤波器的传递函数

求出幅度平方函数的极点后，取s左半平面的极点，即可求得滤波器系统传递函数

$$H(s)=\frac{K}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\cdots(s-s_{pn})}$$

若n为奇数，$\left|H(\omega)\right|_{\omega=0}=1$，则 $K=(-1)^n s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}$

若n为偶数，由于 $\left|H(\omega)\right|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ，$T_n(0)=1$ 则为通带最小值，有 $K=\frac{(-1)^n s_{p1}s_{p2}\cdots s_{pn}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

切比雪夫低通滤波器

5、切比雪夫滤波器的传递函数

1.通带波纹0.5dB（ $\mathcal{E}$ =0.34931）

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	2.86278							
2	1.51620	1.42562						
3	0.71569	1.53490	1.25291					
4	0.37905	1.02546	1.71687	1.19739				
5	0.17892	0.75252	1.30957	1.93737	1.17249			
6	0.09476	0.43237	1.17186	1.58976	2.17184	1.15918		
7	0.04473	0.28207	0.75565	1.64790	1.86941	2.41265	1.15122	
8	0.02369	0.15254	0.57356	1.14859	2.18402	2.14922	2.65675	1.14608

- 切比雪夫低通滤波器归一化H（s）分母多项式D（s）

切比雪夫低通滤波器

例5-4 试求二阶切比雪夫低通滤波器系统函数，已知通带波纹为1dB，归一化截止频率 $\omega_c = 1rad/s$ 。

解： $\alpha_{\max} = 1dB$ $\varepsilon^2 = 10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}} - 1 = 0.25892541$

因为 $\omega_c = 1rad/s$，查切比雪夫多项式表，有

$T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$ $T_2^2(\omega) = 4\omega^4 - 4\omega^2 + 1$

切比雪夫滤波器的幅度平方函数

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1.0357016\,\omega^4 - 1.0357016\,\omega^2 + 1.25892541}$$

令 $s^2 = -\omega^2$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1.0357016\,s^4 + 1.0357016\,s^2 + 1.25892541}$$

幅度平方函数的极点

切比雪夫低通滤波器

$$s_1 = 1.0500049 e^{j58.48^\circ}$$

$$s_2 = 1.0500049 e^{j121.52^\circ}$$

$$s_3 = 1.0500049 e^{-j121.52^\circ}$$

$$s_4 = 1.0500049 e^{-j58.48^\circ}$$

- 系统函数H(s)的极点由幅度平方函数的左半平面极点（s_2, s_3）决定，由于n为偶数，有

$$K = \frac{(-1)^n s_{p1} s_{p2} \cdots s_{pn}}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0.9826133$$

$$H(s) = \frac{0.9826133}{s^2 + 1.0977343s + 1.1025103}$$

谢谢大家