信号分析与处理

第三章 离散时间信号的分析

第四节 离散信号的Z域分析

主要内容

- 双边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质
- z反变换
- 单边z变换及其性质

基本内容

- **双边z变换**
  - 定义
  - 与离散时间傅里叶变换DTFT的关系
  - 与离散傅里叶变换DFT的关系
  - 与拉普拉斯变换S的关系
  - 常见信号的z变换

双边z变换

——与离散时间Fourier变换DTFT的关系

离散时间信号的傅里叶变换**DTFT**：

综合公式：$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

分析公式：$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

若 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|<\infty$（**X[n]**绝对可和） 则处处收敛， X($e^{j\omega}$)是ω的连续函数

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2<\infty$（**X[n]**平方可和） 则均方收敛， X($e^{j\omega}$)可能存在跳变点

用有限项分析公式近似频谱时，存在吉布斯现象

双边z变换

———与离散时间Fourier变换DTFT的关系（1）

- 引入衰减的实指数加权因子r^{-n}(r>0) 后的DTFT变换

$$X\left(\boxed{re^{j\omega}}\right)=F\{x[n]r^{-n}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]r^{-n}\}e^{-jn\omega}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\{r^{-n}e^{-jn\omega}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

令$z=re^{j\omega}$

- 一个离散时间信号x[n]的z变换定义为

$$X(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

记为：

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

或 $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)$

- 可见，**X(z)是z的一个幂级数。z^{-n}的系数就是x[n]的值。**

- 信号x[n]的z变换实际上是广义的DTFT变换，**当r=1即为DTFT变换。**

双边z变换

——与离散时间Fourier变换DTFT的关系（2）

➢ 设 r 取值满足DTFT变换收敛

令$z=re^{j\omega}$
$dz=jre^{j\omega}d\omega$
$d\omega=(1/jz)dz$

$$X(re^{j\omega})=F\{x[n]r^{-n}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]r^{-n}\}e^{-jn\omega}$$

$$x[n]r^{-n}=F^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$$

$$x[n]=r^{n}F^{-1}\{X(\boxed{re^{j\omega}})\}$$

$$x[n]=r^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

Z变换的反变换

$$X(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

Z变换的正变换

$$X(z)=Z\{x[n]\}$$

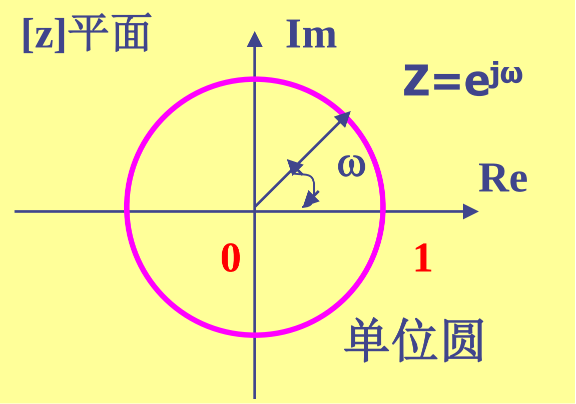
或 $x[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)$

➢ 因DTFT变换必须考虑收敛问题，故z变换存在收敛性问题，要给出ROC（r范围）。

双边z变换

——与离散时间Fourier变换DTFT的关系（3）

➢ 在连续的情况下，当 **s=jω** **(**即实部为**0)** 时，**虚轴上的Laplace变换就是Fourier变换**；而在离散时间系统，当 $z=e^{j\omega}$时(即|z|=1)时，z变换就演变为离散时间**Fourier**变换——即在复数z平面上，**DTFT变换是在单位圆上的z变换。**



双边z变换

——与离散Fourier变换DFT的关系

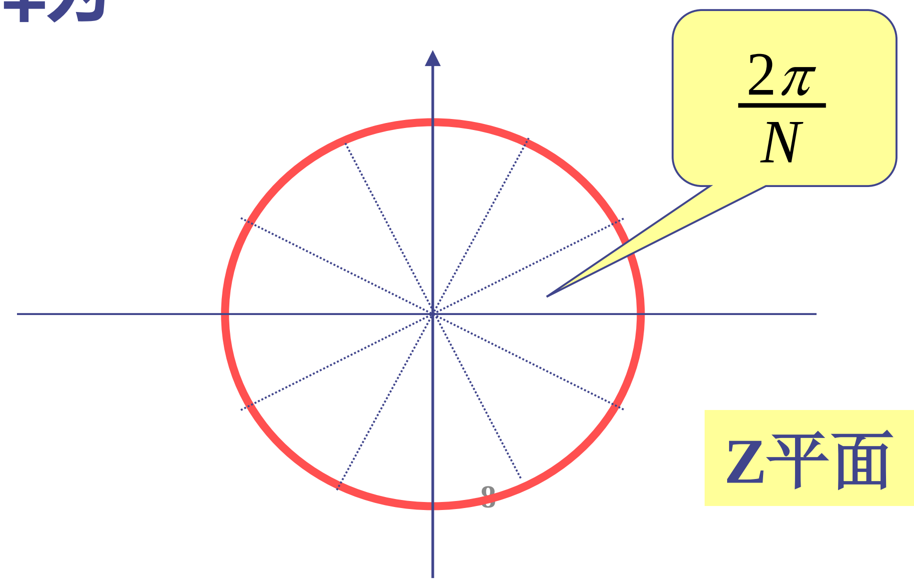
$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\Big|_{W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} = DFT[x(n)] = X(k)$$

有限长序列的Z变换的抽样为

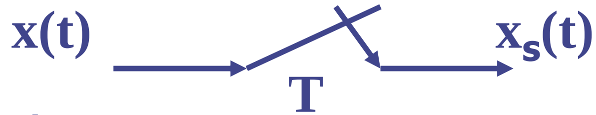
$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(k)}$$

x(n)的Z变换在
单位圆上均匀抽样
即为它的DFT

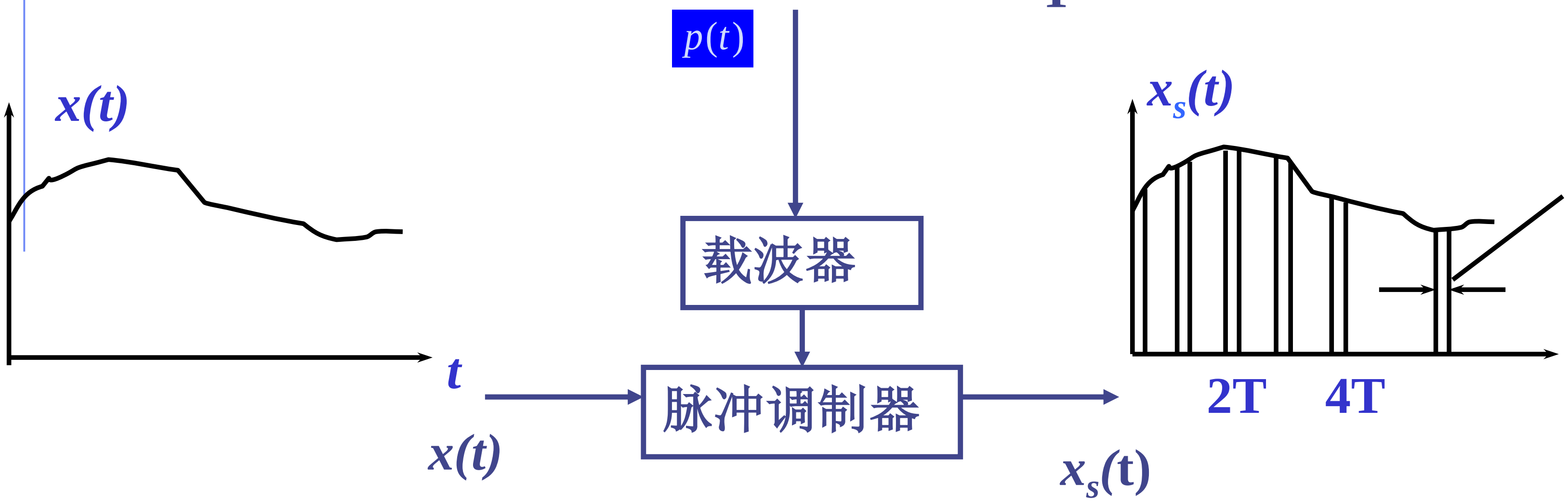


Z变换与拉普拉斯变换的关系(1)

抽样信号$x_s(t)$的Laplace变换



$x_s(t) = \delta_T(t)x(t)$



$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_s(s) = L\{x_s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-nsT} \overset{令z=e^{sT}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

Z变换与L变换的关系(2)

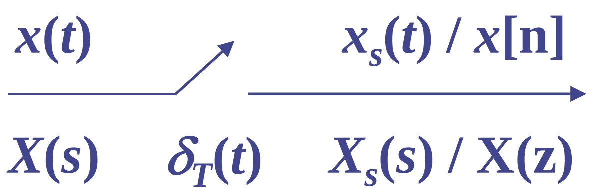
若连续时间信号x(t)经均匀抽样构成序列x[n]，且已知L[x(t)]=X(s)，

讨论能否借助X(s)写出X(z)=Z[x[n]]？

$z = e^{sT}$

$s = \frac{1}{T}\ln z$

$X(z) = X(s)\big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$?



$X(z) = X_s(s)\big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$

$X_s(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s)$

$L\{u(t)\} = \frac{1}{s};\quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$

$Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}; |z| > 1$

Z变换与L变换的关系(3)

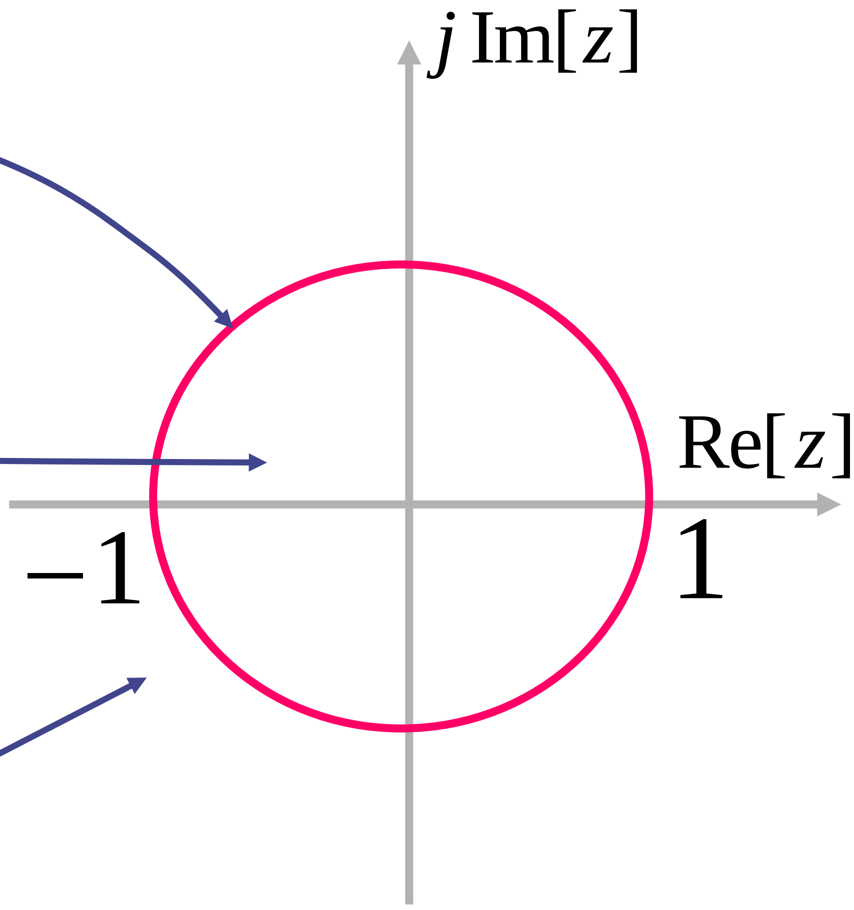
(1) $\sigma = 0 \quad s = j\omega$

$$|z| = e^{\sigma T} = 1$$

(2) $\sigma < 0 \quad s = \sigma + j\omega$

$$|z| < 1$$

(3) $\sigma > 0 \quad |z| > 1$



Z变换与L变换的关系(3)

$$z = e^{ST} \qquad s = \frac{1}{T}\ln z$$

T是序列的时间间隔

重复频率 $$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

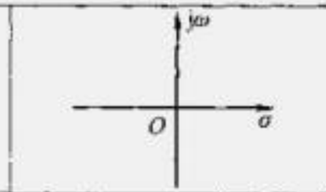
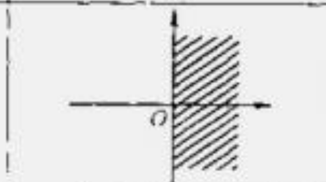
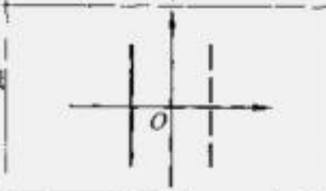
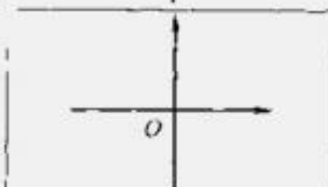
$$s = \sigma + j\omega \qquad z = re^{j\theta}$$

$$Z = e^{sT} = e^{(s+jn\omega_s)T}$$

$$re^{j\theta} = e^{(\sigma+j\omega)T}$$

$$r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \qquad \theta = \omega T = 2\pi\frac{\omega}{\omega_s}$$

表 8-6　z 平面与 s 平面的映射关系

s 平面($s=\sigma+j\omega$)		z 平面($z=re^{j\theta}$)
虚　轴 $\begin{pmatrix}\sigma=0\\ s=j\omega\end{pmatrix}$		
左半平面 ($\sigma<0$)		
右半平面 ($\sigma>0$)		
平行于虚轴的直线 (σ 为常数)		
实　轴 $\begin{pmatrix}\omega=0\\ s=\sigma\end{pmatrix}$		
平行于实轴的直线 (ω 为常数)		
通过 $\pm j\frac{k\omega_s}{2}$ 平行于实轴的直线 ($k=1,3,\cdots$)		

Z变换与L变换的关系(4)

$s=\sigma+j\omega$

$z=re^{j\theta}$

$re^{j\theta}=e^{(\sigma+j\omega)T}$

$r=e^{\sigma T}=e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}}$

$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}$

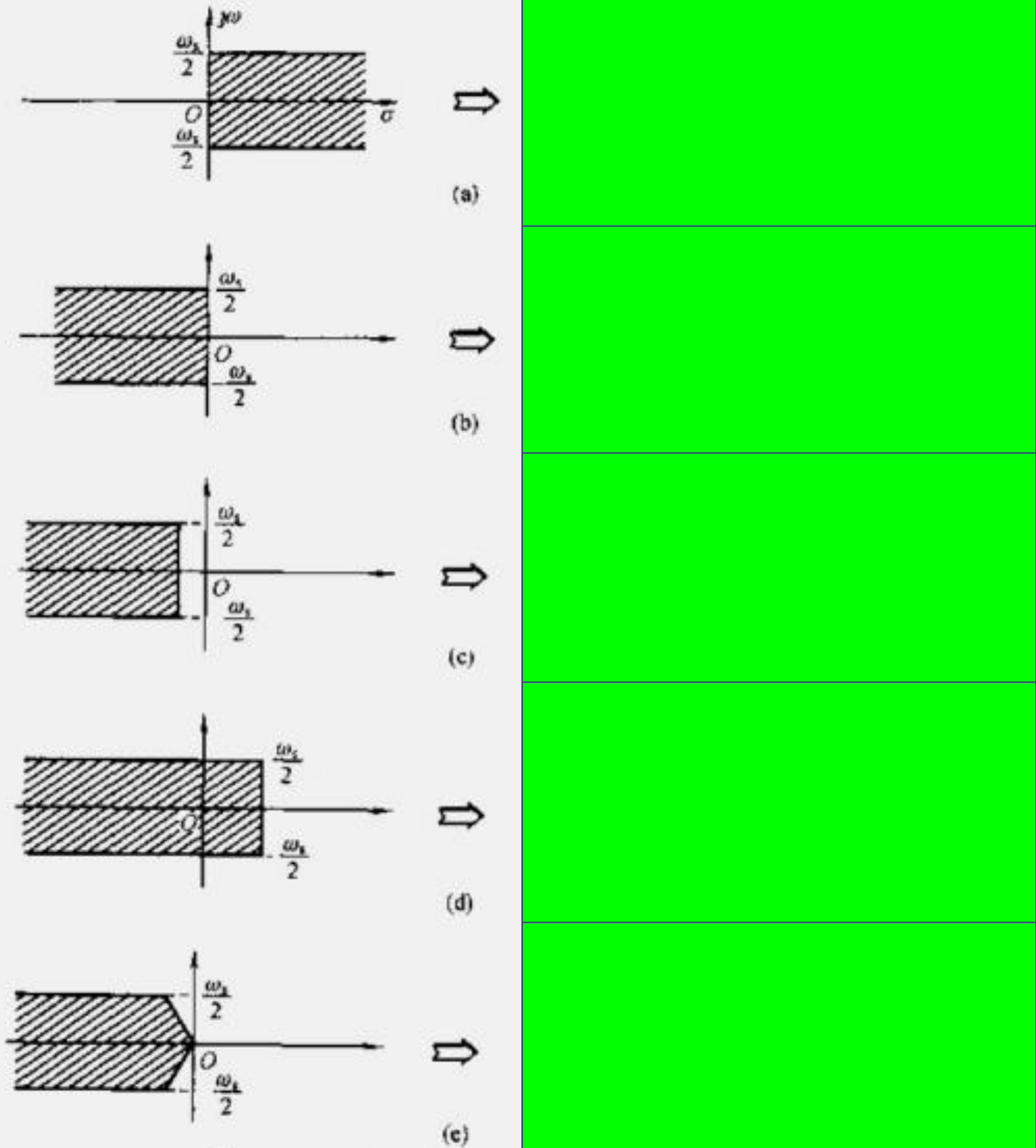


图 8－11　z 平面与 s 平面的映射关系举例

双边z变换

——常见信号的 z 变换（1）

例1：设信号 $x[n]=a^n u[n]$ **求X(z)。**（右边序列）

解:

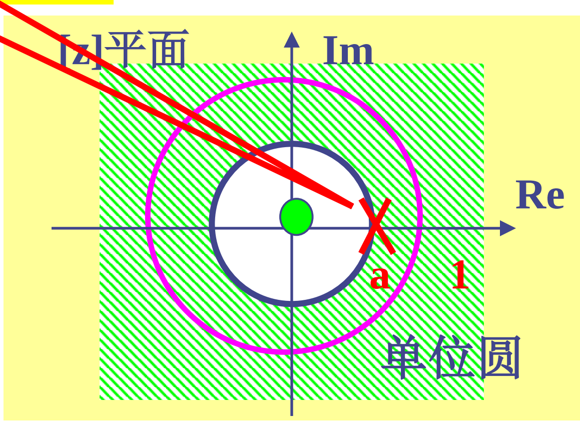
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

- 欲使X(z)收敛，由几何级数收敛定理，须满足|a/z|<1, 即|z|>|a|

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\boxed{\frac{z}{z-a}};|z|>|a|$$

可用零极点表示

- 特别地，当a=1， x[n]为单位阶跃序列



- 当0<|a|<1时，收敛域如图示， ROC包含单位圆，DTFT变换收敛。
- 当|a|>1，ROC不包含单位圆，信号的DTFT变换不收敛。

双边z变换

——常见信号的 z 变换（2）

例2：设信号 $x[n]=-a^n u[-n-1]$ 求X(z)。（左边序列）

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^n z^{-n}) \overset{令m=-n}{=} \sum_{m=1}^{+\infty}-a^{-m}z^{m}=\sum_{n=0}^{+\infty}-a^{-n}z^{n}+a^0z^0$$

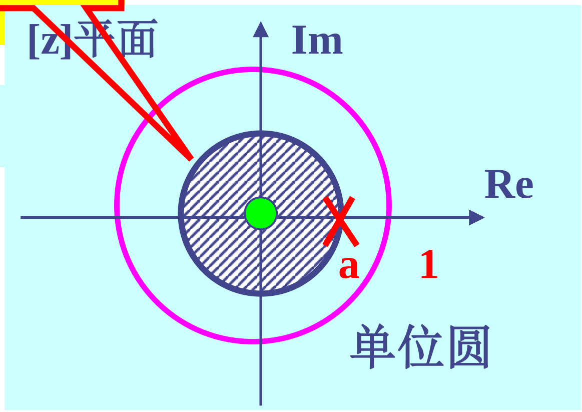
$$=1-\sum_{n=0}^{+\infty}a^{-n}z^{n}$$

➢ 欲使X(z)收敛，由几何级数收敛定理，须满足|z/a|<1, 即|z|<|a|

$$X(z)=1-\frac{1}{1-za^{-1}}=1-\frac{a}{a-z}=\frac{1}{1-az^{-1}};\boxed{|z|<|a|}$$

➢当0<|a|<1时，收敛域如图示，DTFT变换不收敛

➢ 当|a|>1, 原信号的DTFT变换收敛。



双边z变换
——常见信号的 z 变换（3）

例1 设信号 $x[n]=a^n u[n]$ 求X(z)。（右边序列）

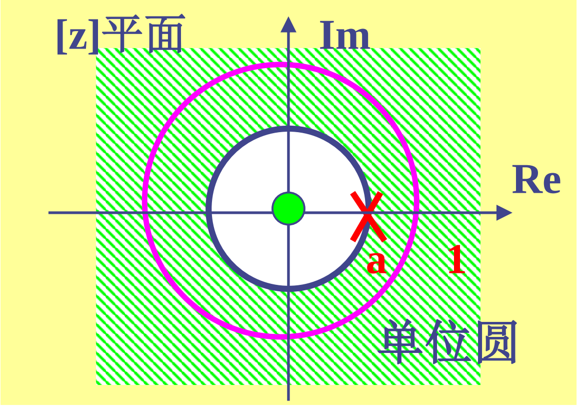
例2 设信号 $x[n]=-a^n u[-n-1]$ 求X(z)。（左边序列）

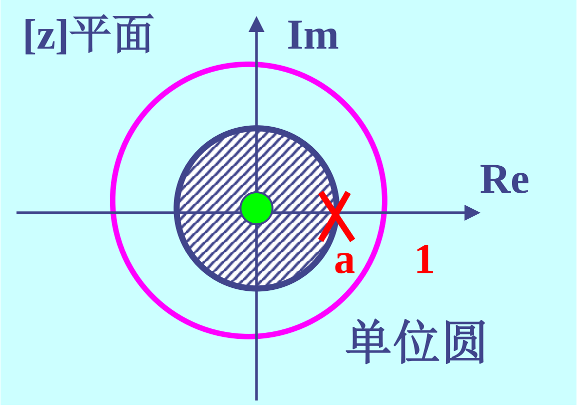
$$X(z)=\frac{z}{z-a}$$

- X(z)的代数形式完全一样，但由于收敛域不同，它们代表的原信号序列是不同的。

结论: (1) 一定要指出ROC。

(2) X(z)是有理分式时可用零极点表示。





双边z变换

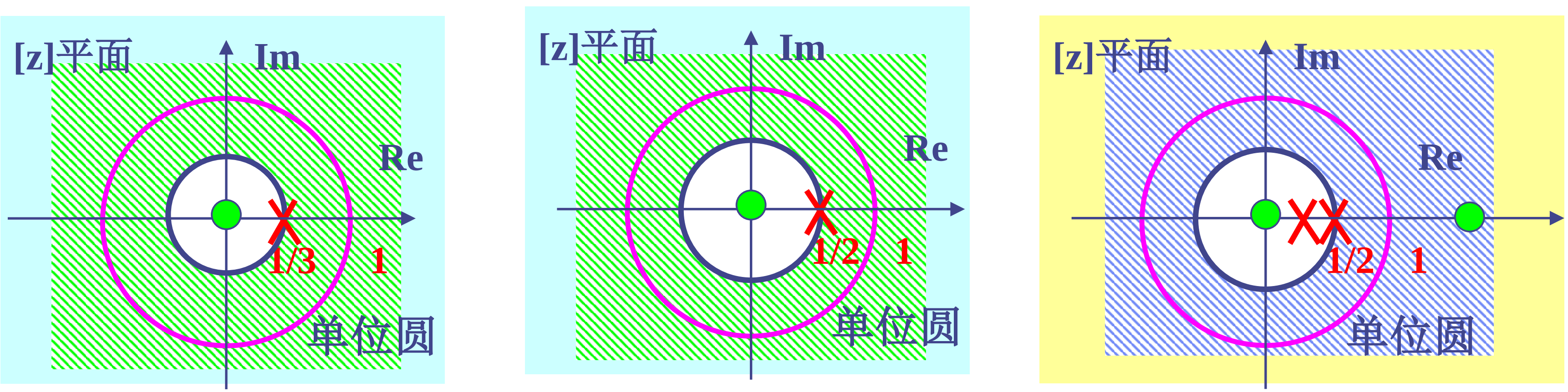
——常见信号的 z 变换（4）

例3 设信号 $x[n]=7(\frac{1}{3})^n u[n]-6(\frac{1}{2})^n u[n]$ **求X(z)。**

解:

$$X(z)=7\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n z^{-n}-6\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}=\frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

ROC: |z|>1/2



$X_1(z)$的零极点图与收敛域　$X_2(z)$的零极点图与收敛域　$X(z)$的零极点图与收敛域

主要内容

- 双边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质
- z反变换
- 单边z变换及其性质

z变换的收敛域（1）

- **Z变换的定义式：**

$$X(z) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- 只有级数收敛，**z**变换才有意义，即要求 **x[n]r⁻ⁿ**的**DTFT**变换收敛。 **z**变换的**ROC**由这些**z=re^{jω}**组成，在这些**z** 值上，**x[n]r⁻ⁿ**的绝对可和

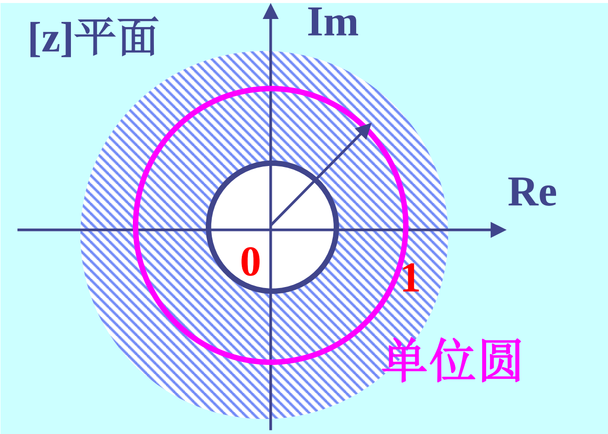
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$$

- 由上知， **z**变换的收敛域仅决定于 **r=|z|**，与**ω**无关。

z变换的收敛域（2）

➢ 性质1 X(z)的收敛域ROC是在 z 平面内以原点为中心的圆环。

ROC必须仅由一个单一的圆环组成。某些情况下，ROC的内圆边界向内延伸到原点；而在另一些情况，外圆边界可以向外延伸到无限远。



➢ 性质1 X(s)的收敛域在 s 平面上由平行于虚轴 jω 的带状区域组成（即收敛域与S的虚部无关，因为在X(s)的ROC内的这些s值都是绝对可积的，该条件只与实部有关）。

➢ 性质2 对有理 z 变换来说，ROC内不包括任何极点(因为在极点处，则X(z)为无穷大，根据定义， z 变换不收敛）。

➢ 性质2 对有理Laplace变换来说，ROC内不包括任何极点(因为若包含一个极点，则X(s)在该点为无穷大，积分不收敛）。

z变换的收敛域（3）

➢ **性质3** 若 $x[n]$是一个有限长序列（$n_1<n<n_2$），则$X(z)$的ROC是整个z平面。可能除去$z=0$和$z=\infty$。

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n=n_2} x[n]z^{-n}$$

➢ 此为有限项级数，只要其中每一项有界，级数就收敛。

➢ 要求$|z^{-n}|<\infty$, $n_1<n<n_2$, 显然，$0<|z|<\infty$ 均满足。ROC至少除0或∞

(1)若$n_1>0$, ROC: $0<|z|\leq\infty$，除$z=0$外z平面

(2)若$n_2<0$, ROC: $0\leq|z|<\infty$，除$z=\infty$外z平面

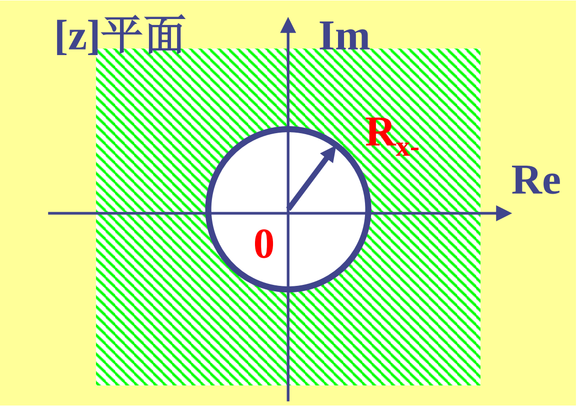
(3)若$n_1<0$, $n_2>0$, ROC: $0<|z|<\infty$，除$z=0,z=\infty$外z平面

➢ **性质3** 若 $x(t)$是时限的，且绝对可积，则其$X(s)$的ROC是整个s平面。直观理解：时限信号$x(t)(T_1\leq t\leq T_2)$，乘以衰减因子$e^{-\sigma t}$（$\sigma>0$—指数衰减；$\sigma<0$—指数增长），因为$x(t)$是时限的，$e^{-\sigma t}x(t)$ 不可能无界，所以一定可积。

z变换的收敛域（4）

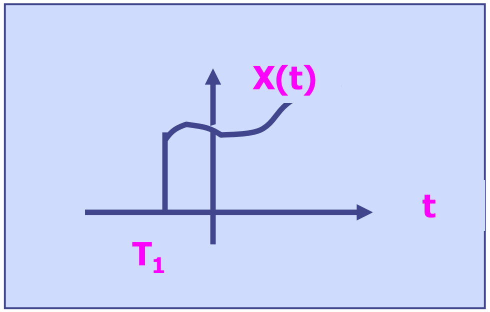
- **性质4** 若**x[n]**是右边序列信号，且 **|z|=r_0** 的圆位于**ROC**内，则 **|z|>r_0** 的全部有限的**z** 值都一定在这个**ROC**内。

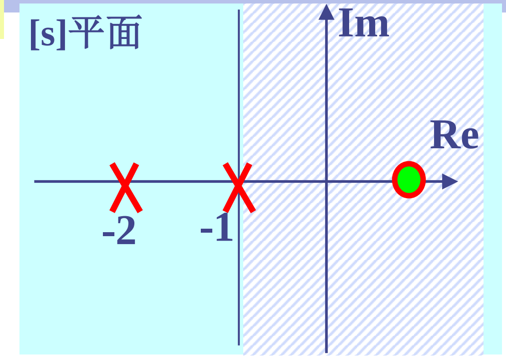
指**n<N_1, x[n]=0**的信号



- **性质4** 若**x(t)**是右边信号，且**X(s)**存在，则**X(s)**的**ROC**一定在其最右边极点的右边。

指**t<T_1, x(t)=0**的信号



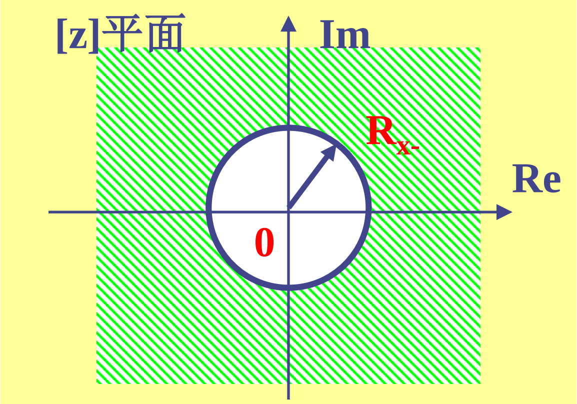


z变换的收敛域（4）

➢ 性质4　若$x[n]$是右边序列信号，且$|z|=r_0$的圆位于ROC内，则$|z|>r_0$的全部有限的z 值都一定在这个ROC内。

指$n<N_1$, $x[n]=0$的信号

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=N_1}^{-1}x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$



➢ 若$|z|=r_0$位于ROC内, 则$x[n]r_0^{-n}$绝对可和。

考虑：因为$|z|=r_1>r_0$，第二项随 n 增加，r_1^{-n}衰减比得r_0^{-n}快。

当 $N_1>0$, 第一项不存在；

当 $N_1<0$, 第一项是有限序列，其收敛域是除∞以外的整个Z平面。

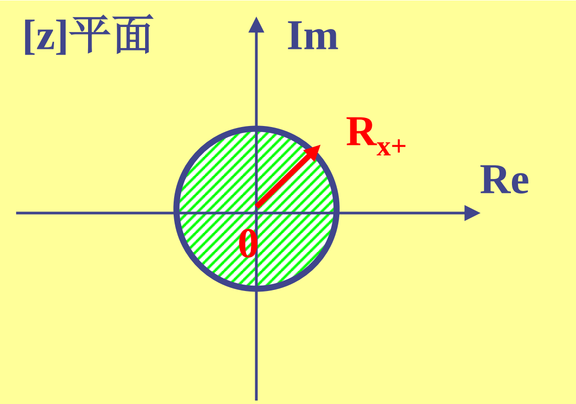
$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x[n]z^{-n};ROC:R_{x^-}<|z|<\infty\ \ (\text{不一定包括}\ z=\infty)$$

对于因果序列，因为$n<0$, $x[n]=0$　$ROC:R_{x^-}<|z|$(包括$z=\infty$)

z变换的收敛域（5）

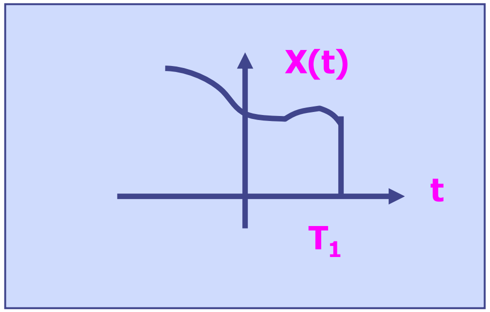
➢ **性质5** 若x[n]是左边序列信号，且|z|=r_0的圆位于ROC内，则0<|z|<r_0的全部有限的z值都一定在这个ROC内。

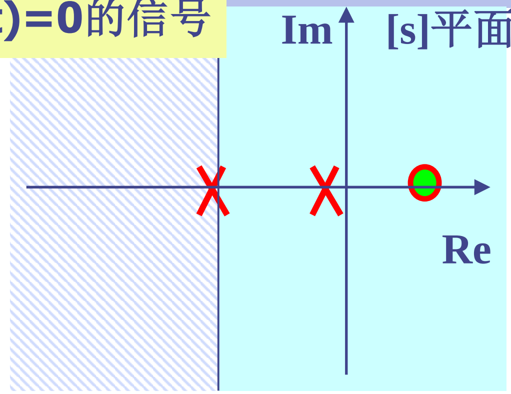
指n>N_2, x[n]=0的信号



➢ **性质5** 若x(t)是左边信号，且X(s)存在，则X(s)的ROC一定在其最左边极点的左边。

指t>T_2, x(t)=0的信号



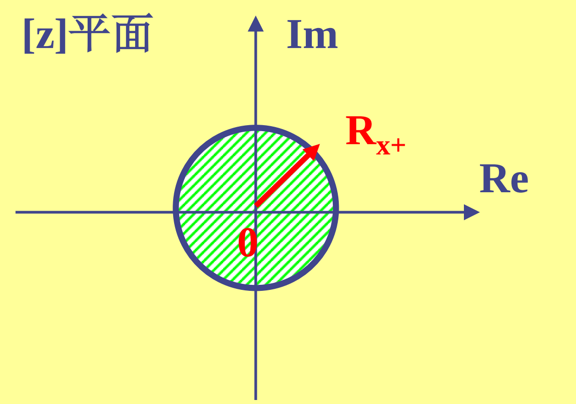


z变换的收敛域（5）

➢ 性质5 若x[n]是左边序列信号，且|z|=r_0的圆位于ROC内，则0<|z|<r_0的全部有限的z值都一定在这个ROC内。

指n>N_2, x[n]=0的信号

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}x[n]z^{-n}+\sum_{n=1}^{N_2}x[n]z^{-n}$$



➢ 当 $N_2>0$, 上式包括z的负幂次项，|z|→0, 这些项趋于无穷，所以一般的ROC不包括z=0 $0<|z|<R_{x^+}$

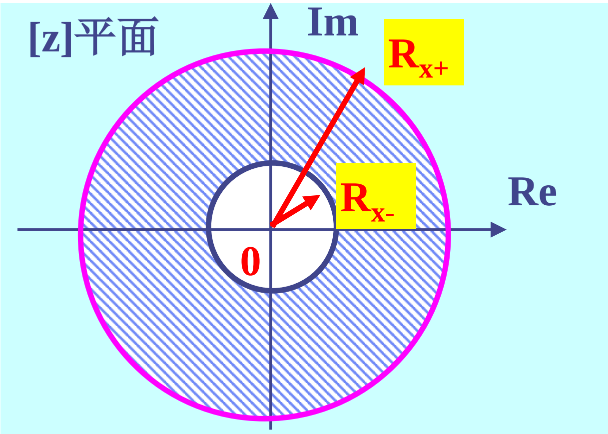
当 $N_2\le 0$, (即对所有n>0,x[n]=0)， ROC包括 z=0 $|z|<R_{x^+}$

z变换的收敛域（6）

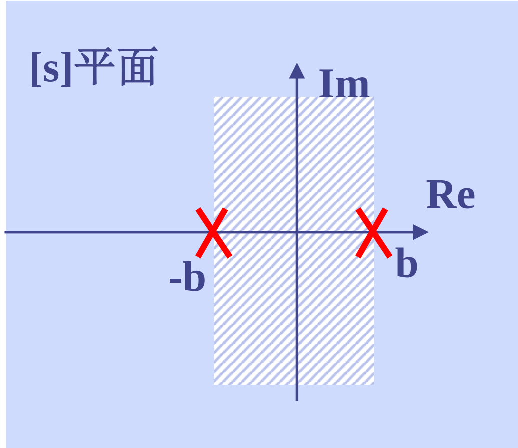
➢ **性质6** 若x[n]是双边序列，且|z|=r_0的圆位于ROC内，则该ROC一定是由包含|z|=r_0的圆环组成。

➢ 双边序列的ROC可以将x[n]表示成一个右边序列与一个左边序列之和来确定：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$



➢ 整个序列的ROC就是两部分ROC的相交部分： $R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$



➢ **性质6** 若x(t)是双边信号，且X(s)存在，则X(s)的ROC一定在由s平面的一条带状域所组成。

z变换的收敛域（7）

例5　设双边序列 $x[n]=b^{|n|}, b>0, -\infty<n<\infty$，求X(z)及收敛域。

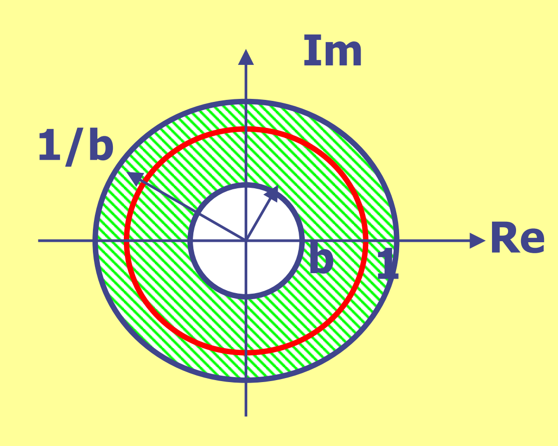
解：$x[n]=b^{|n|}=\boxed{b^n u[n]}+\boxed{b^{-n}u[-n-1]}$

（n ≥ 0，右边）（n<0，左边）

例1　ZT　　　ZT　例2

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}};|z|>b$$

$$X(z)=\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}};|z|<b^{-1}$$



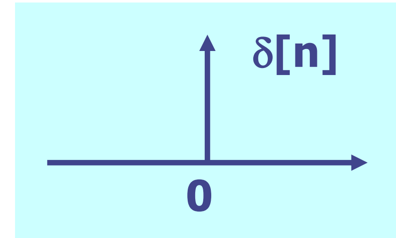
➢ 讨论　1）当b>1, 上述ROC无公共区（交集），z变换不收敛。

2）当b<1, 上述ROC有公共区（交集），z变换收敛。

$$X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}=\frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})};b<z<\frac{1}{b}$$

z变换的收敛域（8）

例6 求序列 $x[n]=\delta[n]$ 的z变换及收敛域。



解: 如果x[n]的Z变换将此序列看成是$n_1=n_2=0$时有限长序列的特例

$$Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=1;ROC为全部Z平面$$

左边序列

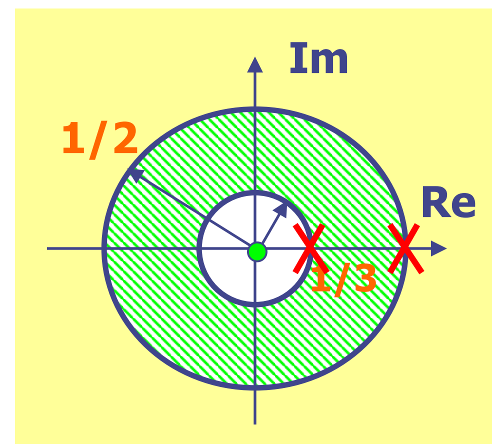
右边序列

例7 求序列 $x[n]=\boxed{(\frac{1}{2})^n u[-n-1]}+\boxed{(\frac{1}{3})^n u[n]}$ 的z变换及收敛域。

解:

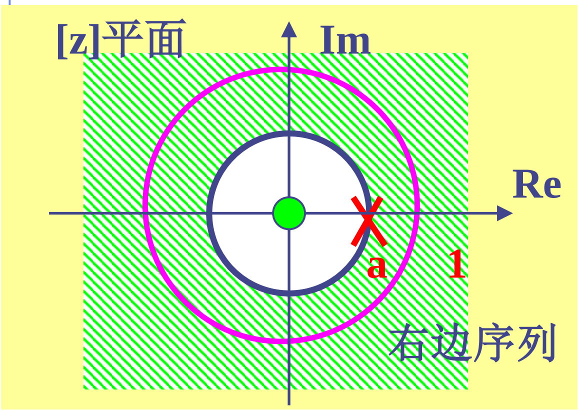
$$Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2}z^{-1})^n u[-n-1]+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3}z^{-1})^n u[n]$$

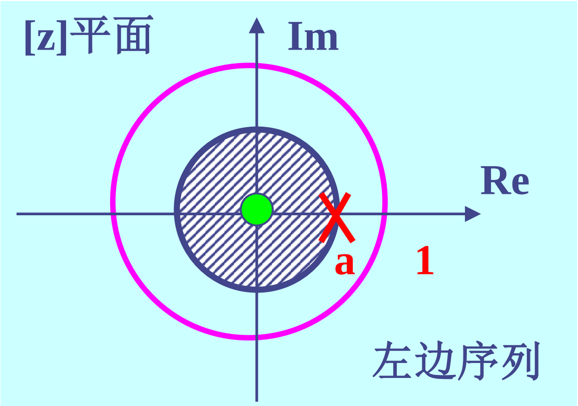
$$=\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{-\frac{1}{6}z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})};\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

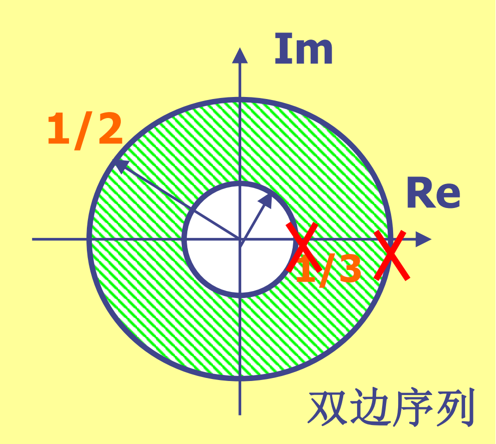


z变换的收敛域（9）

➢ **性质7** 若x[n]的z变换X(z)是有理的, 它的ROC就被极点所界定，或者延伸至无限远。







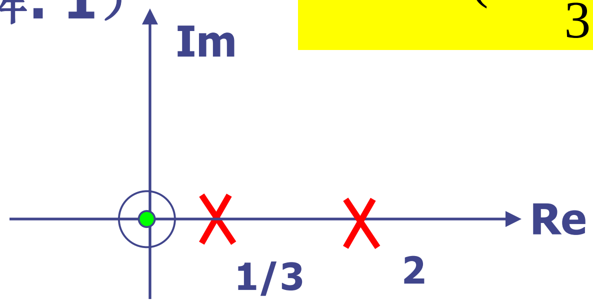
➢ **性质8（性质7与性质4的结合）** 若x[n]的z变换X(z)是有理的, 且x[n]是右边序列，则它的ROC就位于z平面内最外层极点的外边。且如x[n]是因果序列，ROC包括z=∞。

➢ **性质9（性质7与性质5的结合）** 若x[n]的z变换X(z)是有理的,且x[n]是左边序列，则它的ROC就位于z平面内最里层极点的非零极点的里边。且如x[n]是反因果序列（x[n]=0当n>0），则ROC也包括z=0。

z变换的收敛域（10）

例8 已知 $X(z)=\dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}$ 讨论与**X(z)**有关的可能的收敛域。

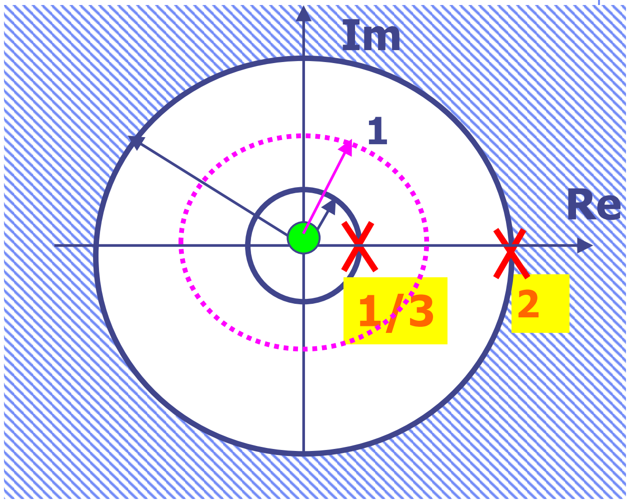
解: 1）



零极点图

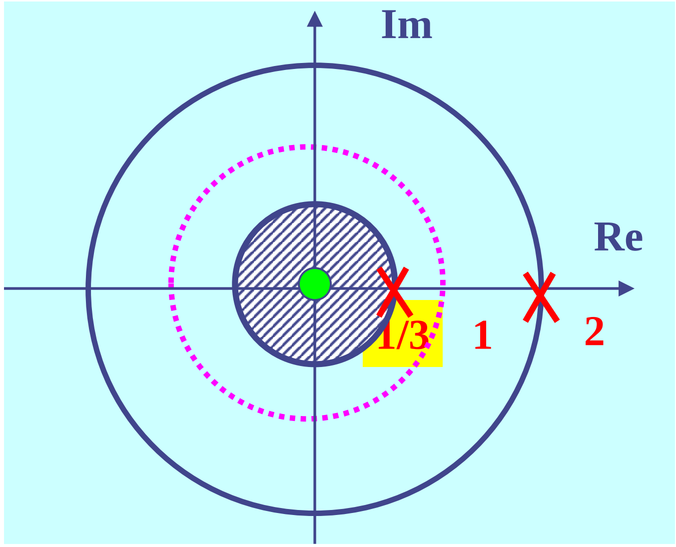
2）右边序列

ROC: |z|>2



3）左边序列

ROC: |z|<1/3



4）双边序列

ROC: 1/3 <|z|<2

图略

z变换的几何表示：零极点图

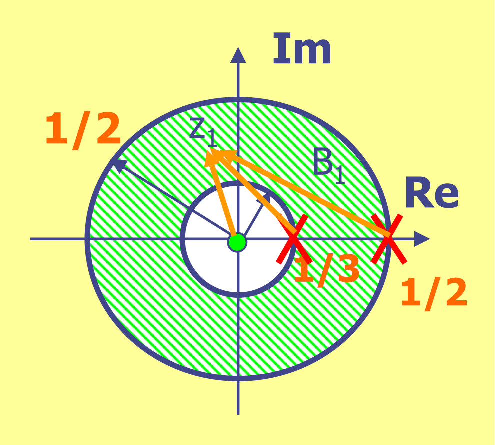
考虑：若$|z_1|=1$?

- 当Z变换式是有理的，即为复变量z的两个多项式之比：

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)},(n>m)$$

更常见或更方便

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z-p_j)}$$



- 在上式中，除去一个常数因子A外，分子分母多项式都能用它们的根----零点和极点----来表示，常数因子A只影响X(z)的大小，不影响X(z)的性质。在 z 平面上可以标出零极点位置—— **X(z)的零极点图。**

- 利用极零点图还可以进行Z变换的几何求值：对ROC中的任一点z_1满足：

$$\overrightarrow{z_1-0}=Ae^{j\theta};$$
$$\overrightarrow{z_1-1/3}=B_1e^{j\varphi_1};\overrightarrow{z_1-1/2}=B_2e^{j\varphi_2}$$

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=K\frac{A}{B_1B_2}\cdot\frac{e^{j\vartheta}}{e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

比较：拉普拉斯变换
——拉普拉斯变换的几何表示:零极点图

➢ 许多信号**x(t)**的**Laplace**变换式可表示成**s**的有理函数

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n},(n>m)$$

更常见或更方便

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$A=\frac{b_m}{a_n}\text{——常数}$$

➢ 在一个有理**Laplace**变换式中，除去一个常数因子**A**外，分子分母多项式都能用它们的根（零点和极点——零点z_i使**X(s)**为零；极点p_j使**X(s)**为无穷大）来表示，而常数因子**A**只影响**X(s)**的大小，不影响**X(s)**的性质。虽然**X(s)**不能像**F**变换画出幅度谱与相位谱，但在 **s** 平面上可以标出零极点位置（**X**—极点，**O**—零点），—— **X(s)**的零极点图。

主要内容

- 双边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质
- z反变换
- 单边z变换及其性质

$$x[n] \xleftrightarrow{ZT} X(z); ROC = R$$

z变换的性质（总结）

（1）线性 $a_1x_1[n]+a_2x_2[n] \xleftrightarrow{ZT} a_1X_1(z)+a_2X_2(z); \max(R_{x^-},R_{y^-})<|z|<\min(R_{x^+},R_{y^+})$

（2）时域平移性质 $x[n-m] \xleftrightarrow{ZT} z^{-m}X(z), R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

当m>0时为延迟；

当m<0时为超前。

（3）z域微分 $nx[n] \xleftrightarrow{ZT} -z\dfrac{dX(z)}{dz}; R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

（4） z域尺度变换特性 $a^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(\dfrac{z}{a}); R_{x^-}<\left|\dfrac{z}{a}\right|<R_{x^+}$

（5）时域扩展 $x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{Z} X(z^k); R_{k^-}<\left|z^k\right|<R_{k^+}$

（6）时域卷积 $x[n]*y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)\cdot Y(z); R_-<|z|<R_+; R_-=\max(R_{x^-},R_{y^-}), R_+=\min(R_{x^+},R_{y^+})$

（7）共轭序列性质 $x^*[n] \xleftrightarrow{ZT} X^*(z^*); R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$

（8）累加性质 $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z); ROC$至少包含$R\cap|z|>1$

常用Z变换

Transform pair Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m>0$) or ∞ (if $m<0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9. $[\cos\Omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\Omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\Omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\Omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\Omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\Omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\Omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

主要内容

- 双边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质
- z反变换
- 单边z变换及其性质

z反变换(1)

➢ z反变换定义

从给定**X(z)**, 求出原序列**x[n]**。

$$X(z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$x[n] \xrightarrow{\text{z-transform}} X(z)$

$x[n] \xleftarrow{\text{Inverse z transform}} X(z)$

$$x[n]=Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{2\pi}X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

➢ 三种方法：

➢幂级数法展开（又称综合除法或长除法）

➢部分分式法

➢围线积分法(留数法)

且由**X(z)**的**ROC**收敛域性质考虑**x[n]**的特性。

z反变换(2)

方法一：幂级数展开法（长除法）— *power-series* method (open form)

$$\because X(z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

➢ 按定义，只需要将X(z)展开成z^{-1}的幂级数之和，系数即为序列x[n]的值。

$$=\cdots\underbrace{x[-2]z^{2}+x[-1]z^{1}}_{z\text{的正次幂(左边序列)}}+x[0]z^{0}+\underbrace{x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}}_{z\text{的负次幂（右边序列）}}+\cdots$$

注意：

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

1）若X(z)为有理式，可直接用长除法；

2）根据收敛域判别x[n]的特性（左边、右边或双边），再展开为幂级数

如$|z|>R_{x-}$，则x[n]是右边（因果）序列—先将X(z)按z^{-1} 的升次幂排列

如$|z|<R_{x+}$，则x[n]必为左边序列—先将X(z)按z^{-1} 的降次幂排列

进行长除法

3）缺点：不易求得x[n]的闭合式。优点：可普遍适用，如非有理数X(z)。

z反变换(3)

例 已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2};|z|>1$ ，求其Z反变换x[n]。

解：因收敛域|z|>1且包含∞，x[n]必是因果序列一将X(z)按z $^{-1}$的升幂排列

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z}{z^2-2z+1}=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}$$

长除法

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots \\
1-2z^{-1}+z^{-2} & \overline{)\,z^{-1}} \\
 & \underline{z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}} \\
 & \quad 2z^{-2}-z^{-3} \\
 & \quad \underline{2z^{-2}-4z^{-3}+2z^{-4}} \\
 & \qquad 3z^{-3}-2z^{-4} \\
 & \qquad \underline{3z^{-3}-6z^{-4}+3z^{-5}} \\
 & \qquad\quad 4z^{-4}-3z^{-5} \\
 & \qquad\quad \vdots
\end{array}$$

故 $x[n]=nu[n]$

z反变换(4)

例 已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2};|z|<1$，求其Z反变换x[n]。

解:因|z|<1且包含0，x[n]必是反因果序列—将X(z)按z $^{-1}$ 的降幂排列

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z}{1-2z+z^2}=z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{-1}-nz^{-n}$$

长除法

$$
\begin{array}{r l}
 & z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots \\
1-2z+z^2 \,\big)\!\!\! & z \\
 & \underline{z-2z^2+z^3} \\
 & 2z^2-z^3 \\
 & \underline{2z^2-4z^3+2z^4} \\
 & 3z^3-2z^4 \\
 & \underline{3z^3-6z^4+3z^5} \\
 & 4z^4-3z^5 \\
 & \vdots
\end{array}
$$

故 $x[n]=-nu[-n-1]$

z反变换(5)

例已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2};|z|>1$ ，求其Z反变换x[n]。

解：因收敛域|z|>1且包含∞，x[n]必是因果序列—将X(z)按z $^{-1}$的升幂排列

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z}{z^2-2z+1}=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}$$

故 $x[n]=nu[n]$

例 已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2};|z|<1$ ，求其Z反变换x[n]。

解:因|z|<1且包含0，x[n]必是反因果序列—将X(z)按z $^{-1}$ 的降幂排列

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z}{1-2z+z^2}=z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{-1}-nz^{-n}$$

故 $x[n]=-nu[-n-1]$

X(z)相同形式，但ROC不同，代表的是不同的序列。

z反变换(6)

例已知 $X(z)=\lg(1+az^{-1});|z|>a$，求其Z反变换x[n]。

解：因 |z|>a，x[n]必是因果序列, 因X(z)是非有理数，不能直接应用长除法——将X(z)按泰勒级数展开，因公式为

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots,(-1<x\le 1)$$

且 |z|>a，所以 |az⁻¹|＜1，能运用公式 $\because X(z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$

$$X(z)=\ln(1+az^{-1})=az^{-1}-\frac{(az^{-1})^2}{2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(az^{-1})^n}{n},|az^{-1}|<1$$

故 $x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n} & ,n\ge 1\\ 0 & ,n\le 0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x[n]=(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}u[n-1]$

z反变换(7)

方法二：部分分式法— *partial-fractions* method (closed form)

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^{-M}+b_{m-1}z^{-(M-1)}+\cdots+b_1 z^{-1}+b_0}{a_n z^{-N}+a_{n-1}z^{-(N-1)}+\cdots+a_1 z^{-1}+a_0}$$

情况1）X(z)的分母多项式D(z)有N 个互异实根，即

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

当M>N，存在B_n

当M＝N，仅存在B_0

当M＜N，$B_n=0$

常用公式：$a^n u[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},|Z|>|a|$

例 已知 $X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)};|z|>2$ ，求其Z反变换x[n]。

解：因|z|>2，x[n]必是因果序列

$$X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}=10\left(\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}\right)$$

故： $x[n]=10(2^n-1)u[n]$

z反变换(8)

情况2）X(z)的分母多项式D(z)包含有重根，即

方法一：与Laplace法类似

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |Z| > |a|$$

方法二：如教材上的待定系数法

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

例已知 $X(z) = \dfrac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2}; |z| > 2$，求其Z反变换x[n]。

$$\frac{X(z)}{Z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{Z-p_k}$$

解：因|z|>2，x[n]必是因果序列

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{C_1}{z-2} + \frac{C_2}{(z-2)^2}$$

按前面方法易得 $A_1=-1$， $A_2=6$， $C_2=4$， $C_1=?$

取不等于极点的一个简单值代入原式，如：z=3

$$\frac{10}{6} = \frac{-1}{3} + \frac{6}{2} + \frac{C_1}{1} + \frac{4}{(1)^2}$$

$C_1=-5$

故：

$$x[n] = -\delta[n] + 6u[n] - 5\cdot 2^n u[n] + 2\cdot n\cdot 2^n \cdot u[n]$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |Z| > |a|$$

z反变换(9)

$X(z)Z^{n-1}$沿围线C的积分等于其在围线C内部各极点的留数之和乘以$2\pi j$

C是包围$X(z)Z^{n-1}$所有极点之逆时针闭合积分路线，通常选择z平面收敛域内以原点为中心的圆

方法三：围线积分法(留数法)

由X(z)的反变换的围线积分表示式

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}dz$$

$$x[n]=\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}$$

$$x[n]=\begin{cases}0, n<n_0\\ \sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}, n\ge n_0\end{cases}$$

当|z|>a，右边序列

$$x[n]=\begin{cases}-\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}, n<n_0\\ 0, n\ge n_0\end{cases}$$

当|z|<a，左边序列

若$X(z)z^{n-1}$在$z=p_m$处为单极点

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}=[(z-p_m)X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}$$

若$X(z)z^{n-1}$在$z=p_m$处为L重极点

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}=\frac{1}{(L-1)!}[\frac{d^{L-1}}{dz^{L-1}}(z-p_m)^L X(z)z^{n-1}]_{z=p_m}$$

z反变换(10)

例：已知 $X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)}$，收敛域 $|z|>2$ 用围线积分法求Z反变换

解 因为 $X(z)$ 的收敛域为 $|z|>2$，所以 $x[n]$ 必为因果序列。

$$X(z)z^{n-1}=\frac{z^2}{(z-1)(z+2)}z^{n-1}=\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z+2)}$$

当n>=-1,只有p1=1，p2=-2两个极点，得

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=1}=\frac{z^{n+1}}{z+2}\Big|_{z=1}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=-2}=\frac{z^{n+1}}{z-1}\Big|_{z=-2}=\frac{2}{3}(-2)^n$$

于是，得 $x[n]=[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n]u(n+1)$

实际上，当n=-1时，$x[n]=0$，因此上式可简化为

$$x[n]=[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n]u(n)$$

当n<-1时，在z=0处有极点存在，不难求出该极点的留数与其他两个留数的总和为零。实际上，由于收敛域为|z|>2，包含∞，因此Z变换不可能包含正幂次项，即：n<=-1时，x[n]=0 。最终答案即为上式

z反变换(11)

总结：由X(z)→x[n]三种方法

（先要由已知的Z变换式的收敛域确定原序列的特性）

（1）幂级数展开法（长除法）（左边序列——z^{-1}降幂

右边序列——z^{-1}升幂）

（2）部分分式法（查表法）

$$X_1(z)=\frac{z}{z-a}\xleftrightarrow{Z}a^n$$

（3）留数法

主要内容

- 双边z变换
- z变换的收敛域
- z变换的性质
- z反变换
- 单边z变换及其性质

单边z变换及其性质

—— 定义(1)

➢ 实际问题中常遇到的是因果序列：**n<0时：x[n]=0,** 定义：

$$\tilde{X}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \quad 或 \quad \tilde{X}(z)=Z\{x[n]u[n]\}$$

记：$x[n]\xleftrightarrow{uZ}\tilde{X}(z)$

求和在**n≥0**进行，不考虑**n<0**时**x[n]**的值

单边**Z**变换的收敛域总是位于某一个圆的外部。

例　求 $x[n]=a^n u[n+1]$ 的单边**Z**变换。

解：

$$\tilde{X}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n u[n+1]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}};|z|>|a|$$

注意到：实际上在**n=-1**处**x[n]**是有值并非等于**0**的。但如定义，单边**Z**变换的求和在**n≥0**进行，不考虑**n<0**时**x[n]**的值

单边z变换及其性质
——定义(2)

例　求单边Z变换 $\tilde{X}(z)=\dfrac{10z^2}{(z-1)(z+1)}$ 对应的因果序列x[n]。

解：Z变换式有2个极点在单位圆上，收敛域|z|>1，对应的序列为因果序列。采用部分分式求反变换以得x[n]

$$\frac{\tilde{X}(z)}{z}=\frac{10z}{(z-1)(z+1)}=\frac{5}{z-1}+\frac{5}{z+1};|z|>1$$

$$\tilde{X}(z)=\frac{5z}{z-1}+\frac{5z}{z+1};|z|>1$$

单边反变换

$$x[n]=5u[n]+5(-1)^n u[n],n\geq 0$$

注：若用长除法，则单边Z变换的幂级数展开式中不能包括z的正幂次项(有理分式排序时以z的降次幂排列)。

$$\tilde{X}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\boxed{\frac{z}{z-a}};|z|>|a|$$

$$\tilde{X}[z]=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots$$

单边z变换及其性质

- 性质(1)

$$uL\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = s^n \tilde{X}(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

- 单边Z变换的大部分性质与双边Z变换相同，但也有明显的不同——如时移性质，初值定理和终值定理对分析非零初始条件的系统十分重要。

1. 位(时)移性质

比较双边：$x[n-m] \xleftrightarrow{ZT} z^{-m}X(z), R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

设双边序列x[n]单边Z变换 $x[n] \xleftrightarrow{uZ} \tilde{X}(z)$

1) 序列左移后的单边Z变换（超前定理—前差分）

序列的初值

$$uZ\{x[n+m]\} = Z\{x[n+m]u[n]\} = z^m[\tilde{X}(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}]$$

$$= z^m \tilde{X}(z) - z^m \underline{x[0]} - z^{m-1}\underline{x[1]} - z^{m-2}\underline{x[2]} \cdots - z\underline{x[m-1]}$$

2) 序列右移后的单边Z变换（滞后定理—后差分）

序列的初值

$$uZ\{x[n-m]\} = z^{-m}[\tilde{X}(z) - \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k}]$$

$$= z^{-m}\{\tilde{X}(z) + \underline{x[-1]}z + \underline{x[-2]}z^2 + \cdots + \underline{x[-m]}z^m\}$$

若x[n]是因果序列，结果更简单，初值均为零。与双边Z变换的移位性质相同。

单边z变换及其性质
——性质(2)

2.初值定理

对于因果序列，即x[n]=0，当n<0时，若

$$x[n]\overset{uZ}{\longleftrightarrow}\tilde{X}(z);ROC=R$$

则有

$$x[0]=\lim_{n\to 0}x[n]=\lim_{z\to\infty}\tilde{X}(z)$$

证明：

$$\tilde{X}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

$$\lim_{z\to\infty}\tilde{X}(z)=x[0]$$

比较Laplace变换的初值与终值定理

$$\text{定理限制条件:}\begin{cases}t<0,x(t)=0\\ t=0,x(t)\text{不包含冲激或者高阶奇异函数}\end{cases}$$

初值定理：$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$;注意条件，要保证有确切的初值

终值定理：$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$;条件是$\lim_{t\to\infty}x(t)$存在

$\Leftrightarrow X(s)$的极点均在s平面的左半平面

单边z变换及其性质
——性质(4)

3. 终值定理

对于因果序列，且 $\tilde{X}(z)$ 的极点位于单位圆|z|=1以内(单位圆上最多在z=1处可有一阶极点），则有

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}[(z-1)\tilde{X}(z)]$$

证明：因为因果序列的Z变换与单边Z变换相同，利用Z变换的线性与因果序列的单边Z变换超前定理

$$uZ\{x[n+1]-x[n]\} = z\tilde{X}(z) - zx[0] - \tilde{X}(z) = (z-1)\tilde{X}(z) - zx[0]$$

即 $(z-1)\tilde{X}(z) = zx[0] + uZ\{x[n+1]-x[n]\}$ 对两边取极限

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\tilde{X}(z) = x[0] + \lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\{x[n+1]-x[n]\}z^{-n}$$

$$= x[0] + \{x[1]-x[0]+x[2]-x[1]+\cdots = x[0]-x[0]+x[\infty] = x[\infty]$$

终值定理只有当n→∞时x[n]收敛（稳定）才能应用。

课后作业

- **P188：**
  - **习题18(1)(3)(5)、20、21**
  - **习题27、28（MATLAB）**
- 预 习：信号处理基础