第七章 动态规划

- 动态规划问题的基本概念和基本原理
- 动态规划模型的建立与求解
- 应用举例

例1：问题的引出

例1：某运输公司有500辆运输卡车，超负荷运输（每天满载行驶500km以上）时，年利润25万元/辆，卡车的年损坏率为0.3；低负荷运输（每天行驶300km以下），年利润16万元/辆，年损坏率为0.1。现要求制定5年计划，如何分配不同负荷下的卡车数量，使5年的总利润最大。

例1的线性规划模型

$$\max z = \sum_{i=1}^{5}(25x_{ih} + 16x_{il})$$

s.t. $x_{ih} + x_{il} = x_{ia} \qquad i = 1\cdots5$

$$x_{ia} = (1-0.3)x_{i-1,h} + (1-0.1)x_{i-1,l} \qquad i = 2\cdots5$$

$$x_{1a} = 500$$

$$x_{ih}, x_{il}, x_{ia} \geq 0$$

特点：递推关系

动态规划的应用对象

美国数学家R. Bellman 于50年代提出动态规划

应用对象：多阶段决策优化

阶段类型：

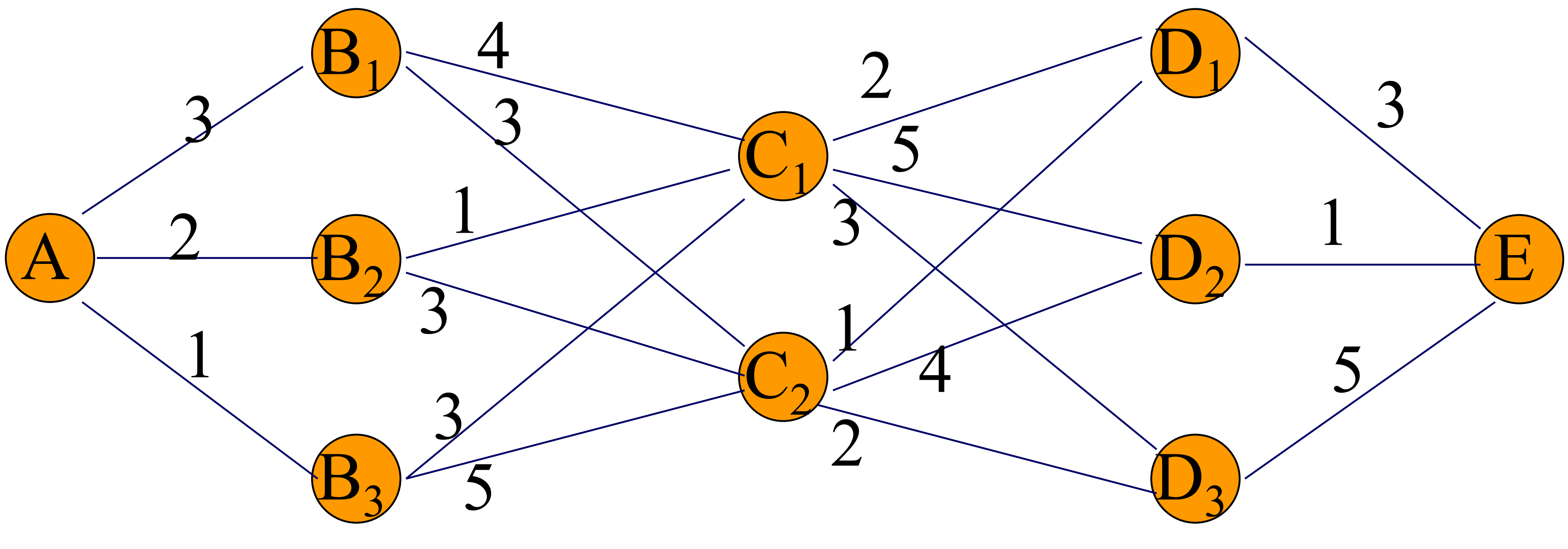
1）时间阶段

2）空间阶段

3）求解阶段

例2：最短路线问题

沿着线路网络，在A、E之间铺设一条管路，如何使总长度最小。



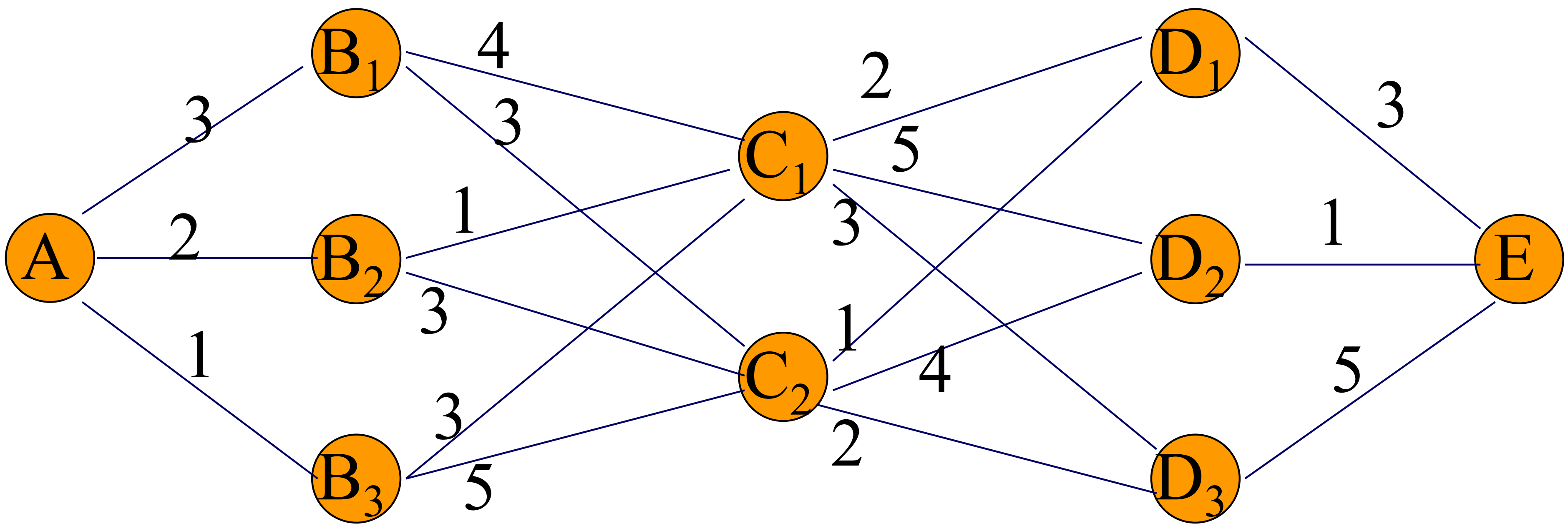
动态规划的基本概念

1。阶段
2。状态
3。决策和策略
4。状态转移方程
5。指标函数

阶段

1。阶段：

问题过程，按时间、空间的特征分解成若干相互联系的阶段。



状态

2。状态：

k阶段开始时的客观条件，记位$s_k \in \mathrm{S_k}$。

$\mathrm{S_k}$为k阶段状态集合。

如例2中，　$S_1=\{A\}$

$S_2=\{B_1，B_2, B_3\}$

$S_3=\{C_1，C_2\}$

$S_4=\{D_1，D_2，D_3\}$

注意：上述定义将导致问题的逆序求解，顺序求解时状态定义为阶段结束时的客观条件。

决策

3。决策：

依据状态做出的决定，记为$u_k(s_k)\in D_k(s_k)$，$D_k\,(s_k)$为状态s_k的允许决策集合。

例2中：

$D_1(A)=\{B_1，B_2, B_3\}$ $u_1(A)=B_i$ $i=1,2,3$

$D_2(B_1)=\{C_1，C_2\}$ $u_2(B_1)=C_i$ $i=1,2$

……

状态转移方程

描述当前状态在给定决策下转移至下一阶段的过程：

$$s_{k+1}=T_k(s_k, u_k(s_k))$$

状态转移方程给出了一种一步递推关系。

在例2中：

$$s_{k+1}= u_k(s_k)$$

状态的无后效性

动态规划要求问题具有无后效性：

给定某阶段的状态s_k，则以后各阶段的状态s_l（$l>k$）都只受s_k的影响，与之前的状态无关。

问题：如果不满足无后效性如何处理？

策略

各阶段决策依次构成的决策序列。记为

$$p_{1,n}=\{u_1(s_1),\ u_2(s_2),\ldots,\ u_n(s_n)\}\in P$$

P为允许策略集合。

例2中

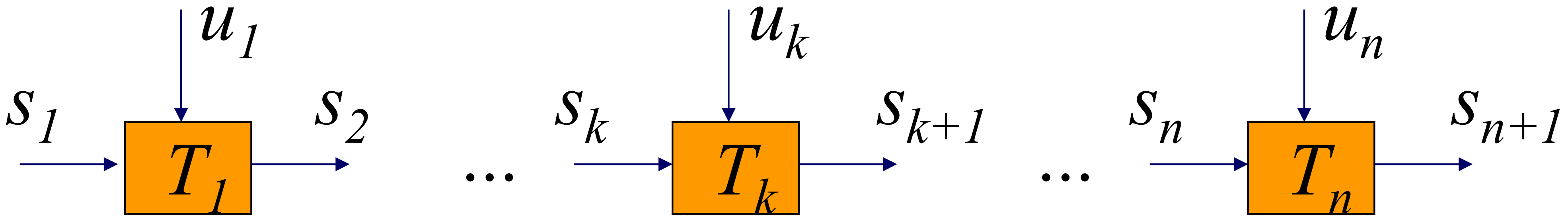
允许策略的总数为：3×2 ×3 ×1=18

动态规划的目的是要选择最优的一种策略

子过程与子策略

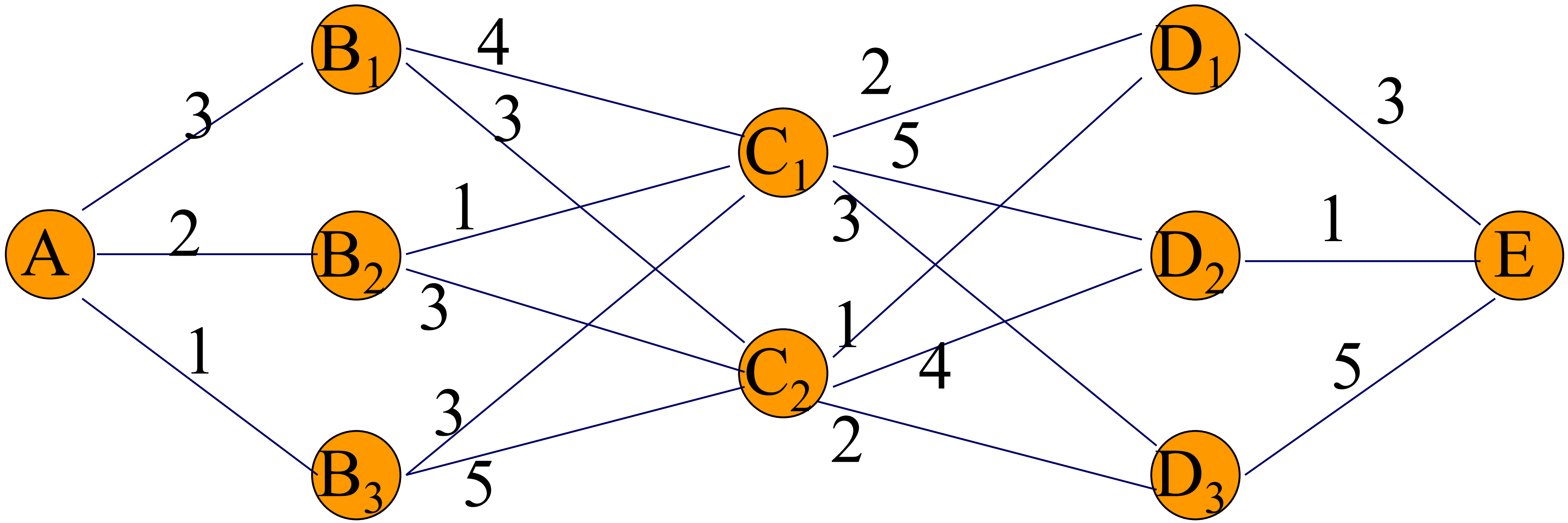
后部子过程策略，从k阶段开始到终了阶段的决策子序列，记为

$$p_{k,n}(s_k)=\{u_k(s_k), u_{k+1}(s_{k+1}),\ldots, u_n(s_n)\}\in P_{k,n}(s_k)$$



子策略的指标函数

评价沿子策略$p_{k,n}$过程性能优劣的函数，记为$V_{k,n}(s_k, p_{k,n})$。



$$V_{4,4}(D_1, p_{4,4}) = V_{4,4}(D_1, u_4) = v_4(D_1, E) = 3$$

指标函数的可分离性

为了实现动态规划的递推结构，要求

指标函数具有可分离性

$$V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) = \varphi_k(s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n}))$$

φ_k是$V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$的严格单调函数。

指标函数的常见形式

φ_k的常见的形式有：

$$V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) = V_{k,k}(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$$

$$= v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$$

$$= \sum_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$$

阶段指标函数

指标函数的常见形式

$$V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) = V_{k,k}(s_k, u_k) V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$$

$$= \prod_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$$

最优策略与最优指标函数

最优指标函数：

$$f_k(s_k) = V_{k,n}(s_k, p_{k,n}^*) = \underset{p_{k,n} \in P_{k,n}}{opt} V_{k,n}(s_k, p_{k,n})$$

$p^*_{k,n}$为最优策略

系统的整体优化目标：

$$f_1(s_1) = \underset{p_{1,n} \in P_{1,n}}{opt} V_{1,n}(s_1, p_{1,n}) = V_{1,n}(s_1, p_{1,n}^*)$$

最优化原理

最优化原理：

最优策略的子策略是对应子问题的最优策略。

$$V_{1,n}(s_1, p^*_{1,n}) = \mathop{opt}_{p_{1,k-1} \in P_{1,k-1}} \left(V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + \mathop{opt}_{p_{k,n} \in P_{k,n}} V_{k,n}(s_k, p_{k,n}) \right)$$

最优化原理只是策略最优的一个必要条件

最优化定理

最优化定理：

策略$p^*_{1,n}$是最优策略的充要条件是，对于所有的k，都有：

$$V_{1,n}(s_1, p^*_{1,n}) \quad \boxed{f_1(s_1)}$$

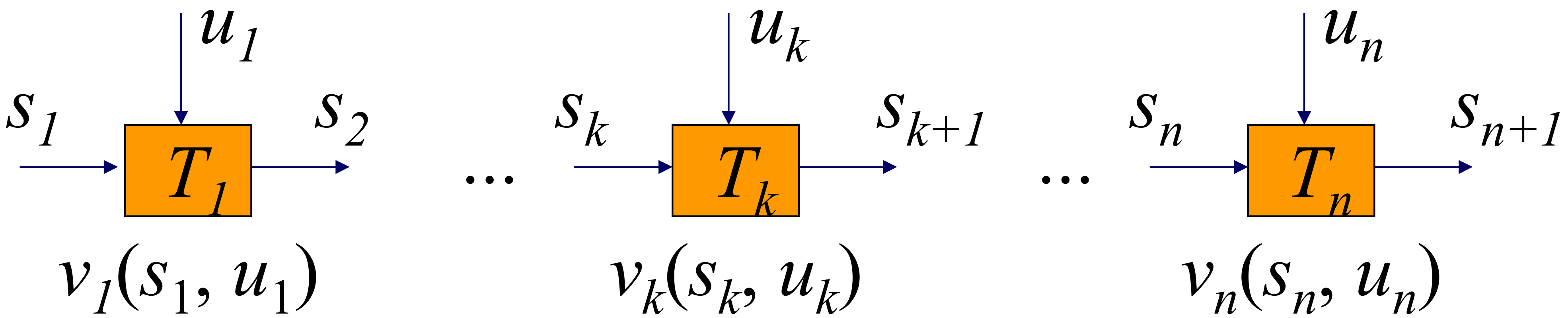
$$= \underset{p_{1,k-1}\in P_{1,k-1}}{opt}\left(V_{1,k-1}(s_1, p_{1,k-1}) + \underset{p_{k,n}\in P_{k,n}}{opt} V_{k,n}(s_k, p_{k,n})\right) \quad \boxed{f_k(s_k)}$$

逆序解法

逆序解法：

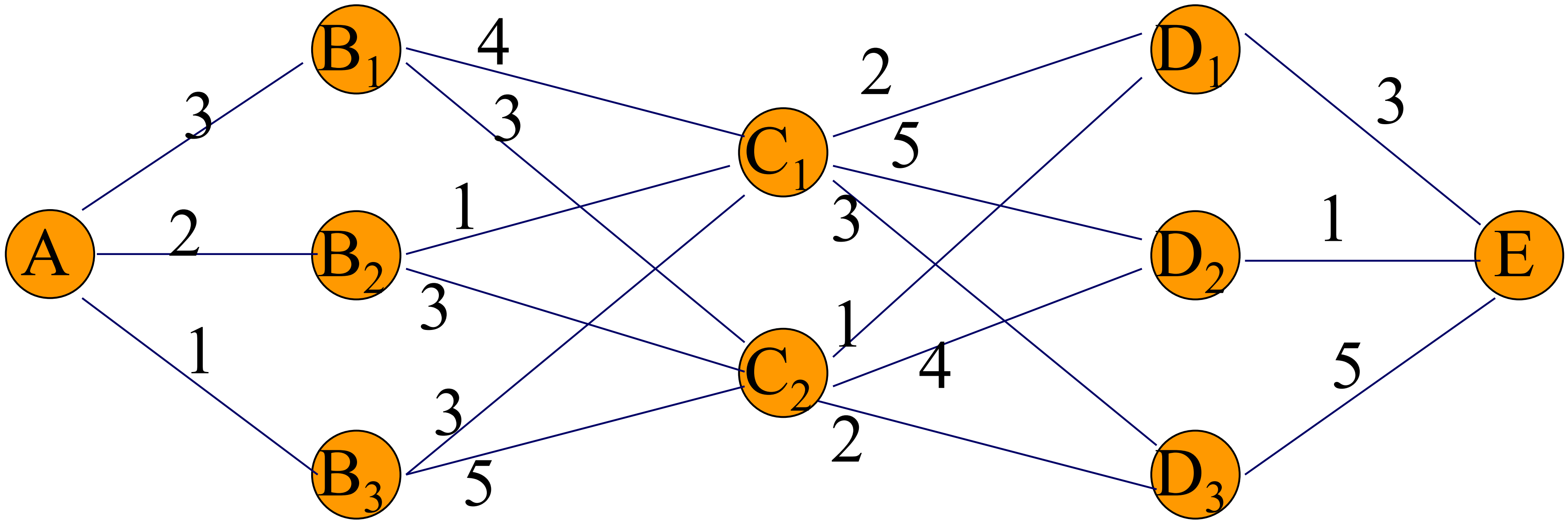
$$f_k(s_k)=\underset{u_k\in D_k(s_k)}{opt}\left(v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\right)$$

$$f_{n+1}(s_{n+1})=0$$

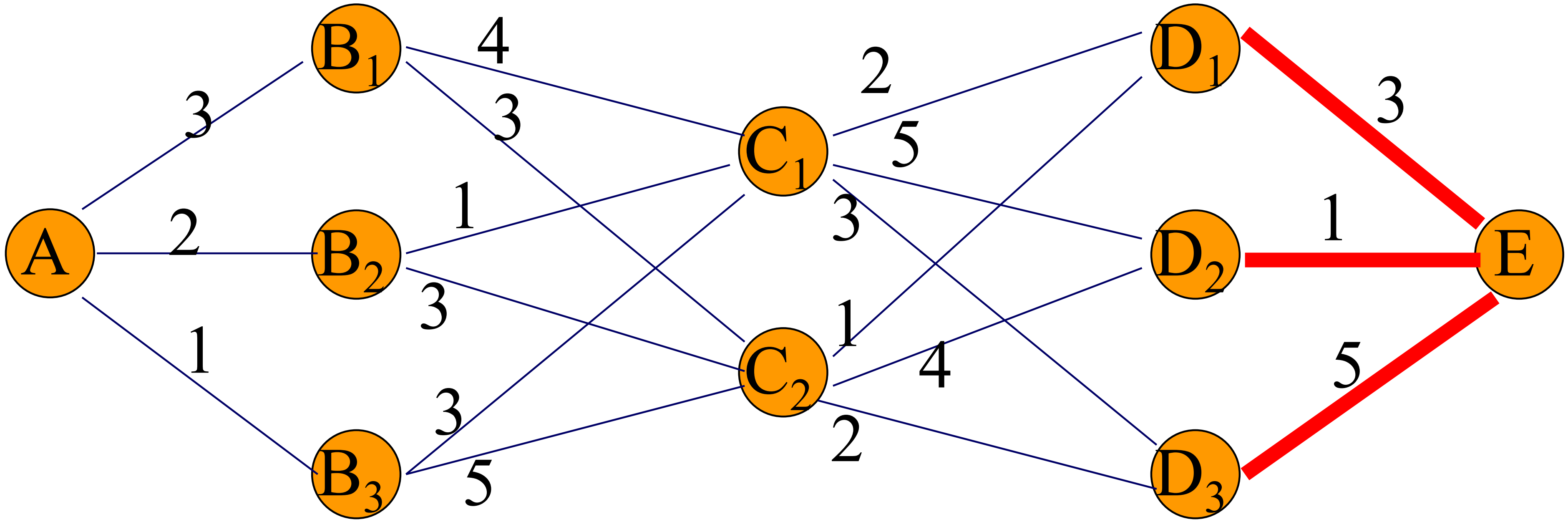


例2：逆序法解

沿着线路网络，在A、E之间铺设一条管路，如何使总长度最小。



第1步

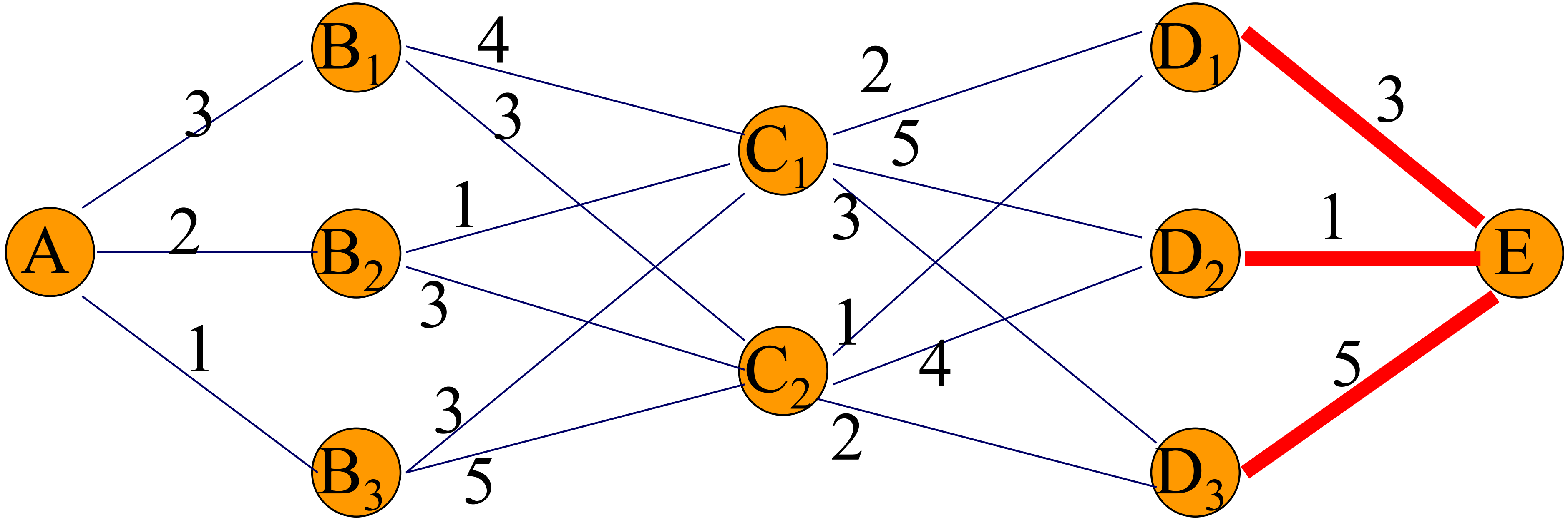


$S_4=\{D_1，D_2，D_3\}$，$u_4(s_4)=\{ E \}$,

$$f_4(s_4)=\min_{u4 \in D4(s4)}\{ v_4(s_4, u_4)+f_5(s_5)\}$$

$f_4(D_1)= v_4(D_1, E)=3$, $f_4(D_2)=1$, $f_4(D_3)=5$

第2步

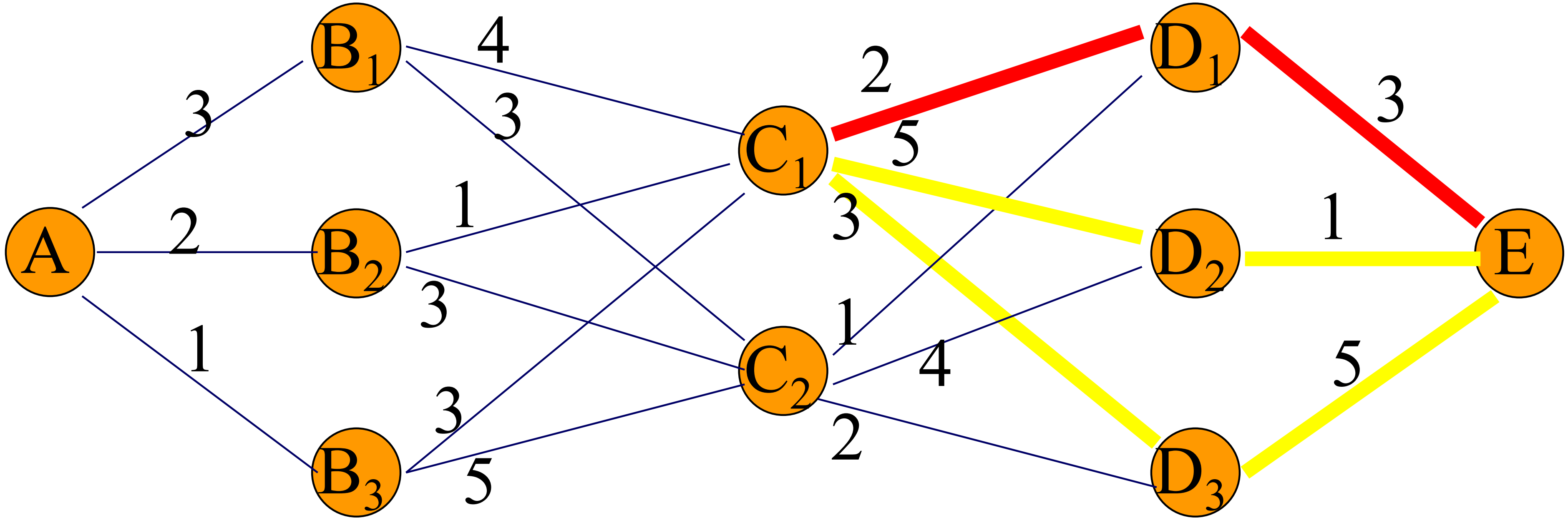


$S_3=\{C_1, \ C_2\}$

$$f_3(s_3)=\min_{u3\,\in D3\,(s3)}\{\,v_3(s_3,u_3)+f_4(s_4)\}$$

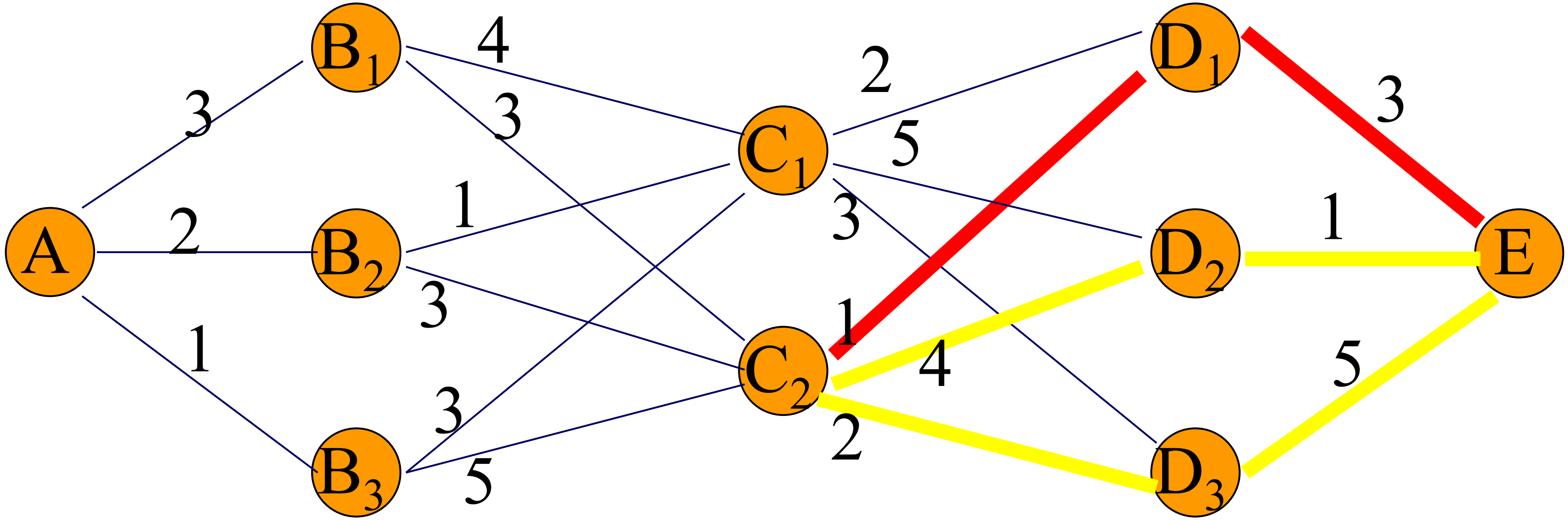
$D_3(C_1)=\{D_1, \ D_2, \ D_3\}$; $D_3(C_2)=\{D_1, \ D_2, \ D_3\}$

第2步（1）



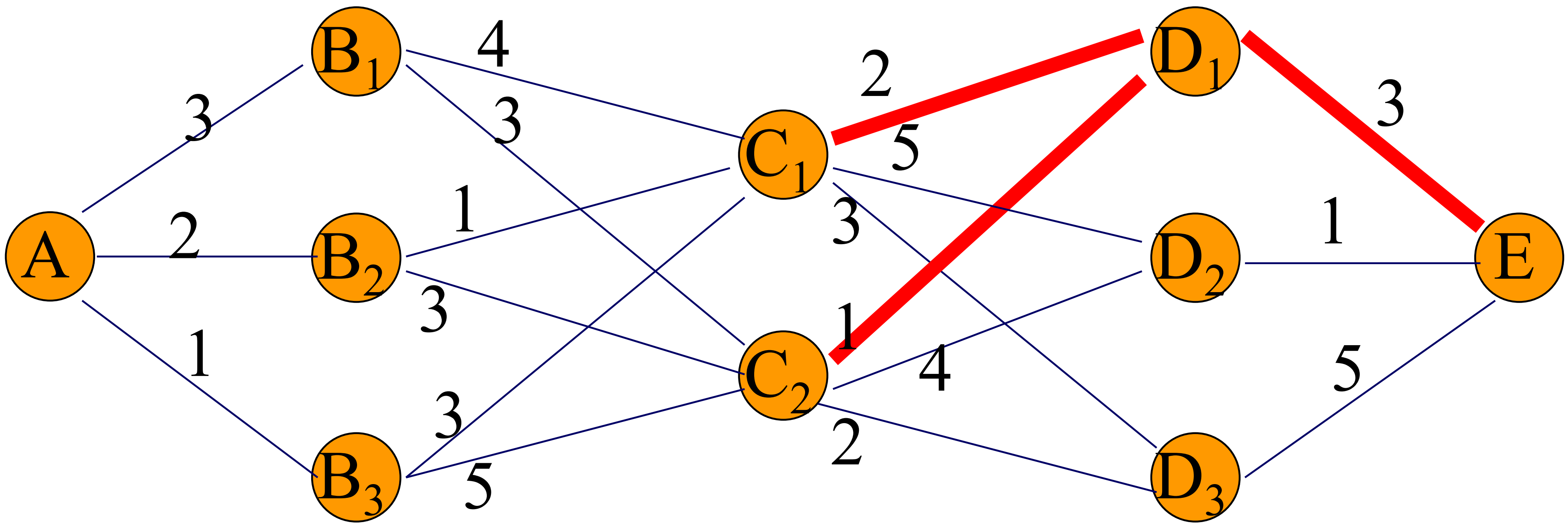
$$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix} v_3(C_1,D_1)+f_4(D_1) \\ v_3(C_1,D_2)+f_4(D_2) \\ v_3(C_1,D_3)+f_4(D_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2+3 \\ 5+1 \\ 3+5 \end{Bmatrix}=5$$

第2步（2）



$$f_3(C_2) = \min\begin{Bmatrix} v_3(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ v_3(C_2, D_2) + f_4(D_2) \\ v_3(C_2, D_3) + f_4(D_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+3 \\ 4+1 \\ 2+5 \end{Bmatrix} = 4$$

第3步

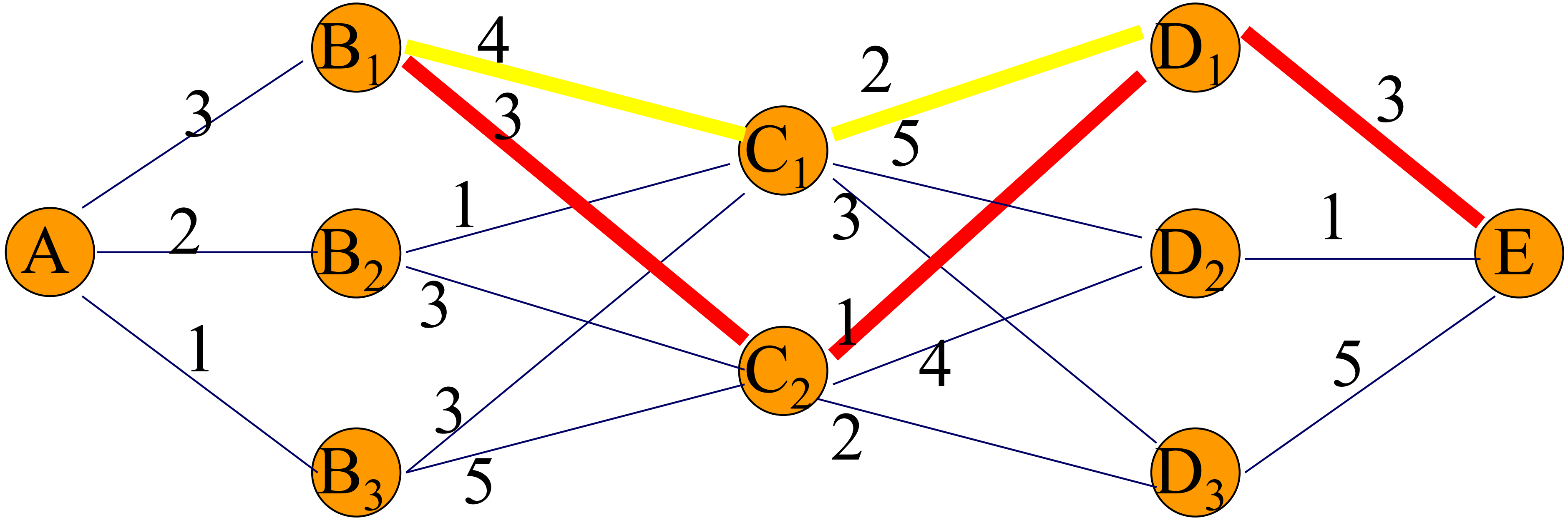


$$S_2=\{B_1,\ B_2,\ B_3\}$$

$$f_2(s_2)=\min_{u2\in D2(s2)}\{v_2(s_2,u_2)+f_3(s_3)\}$$

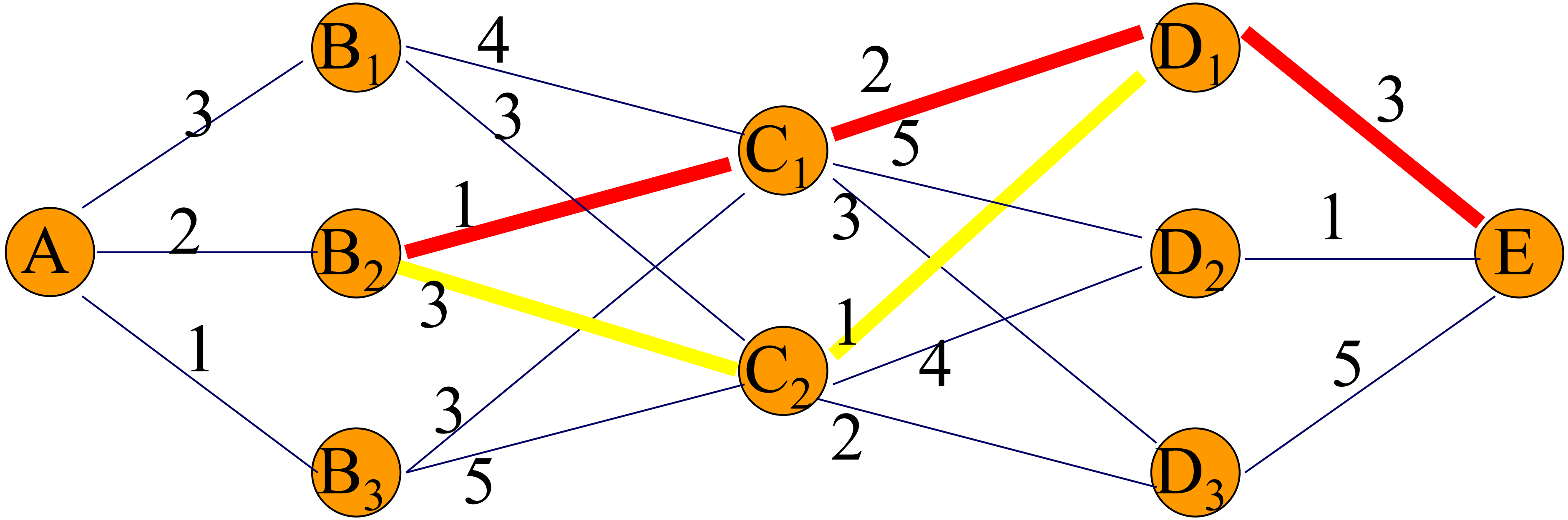
$$D_2(B_1)=\{C_1,C_2\};\ D_2(B_2)=\{C_1,C_2\};\ D_2(B_3)=\{C_1,C_2\}$$

第3步(1)



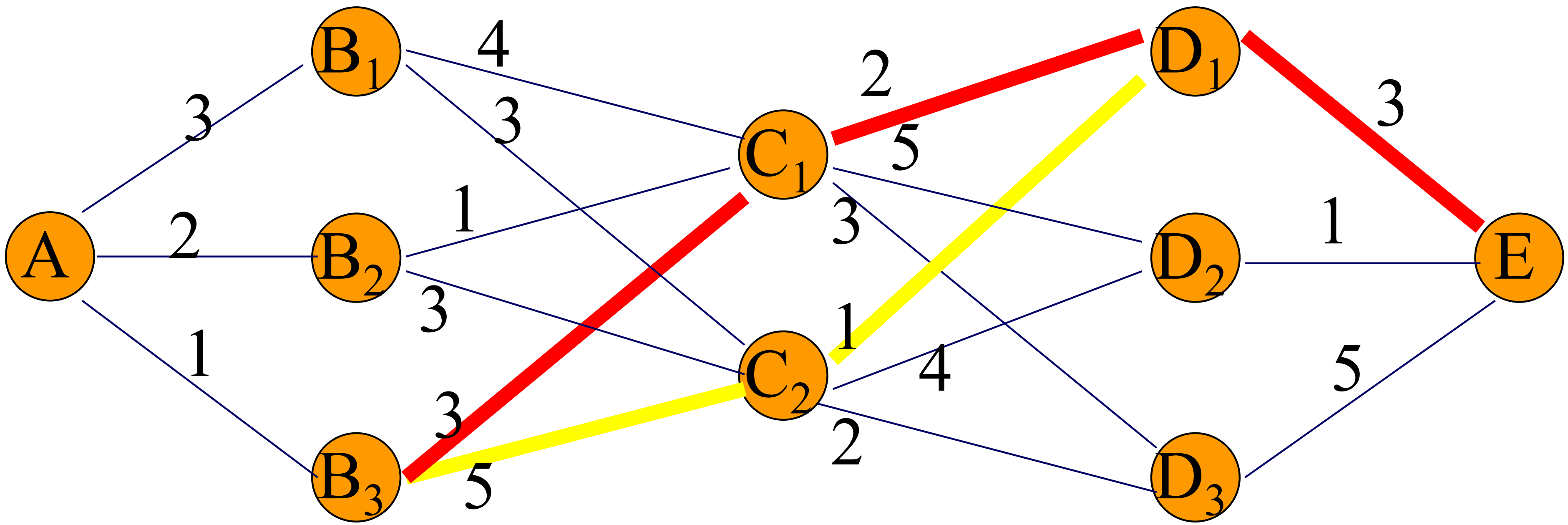
$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix} v_2(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ v_2(B_1,C_2)+f_3(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4+5 \\ 3+4 \end{Bmatrix}=7$$

第3步(2)



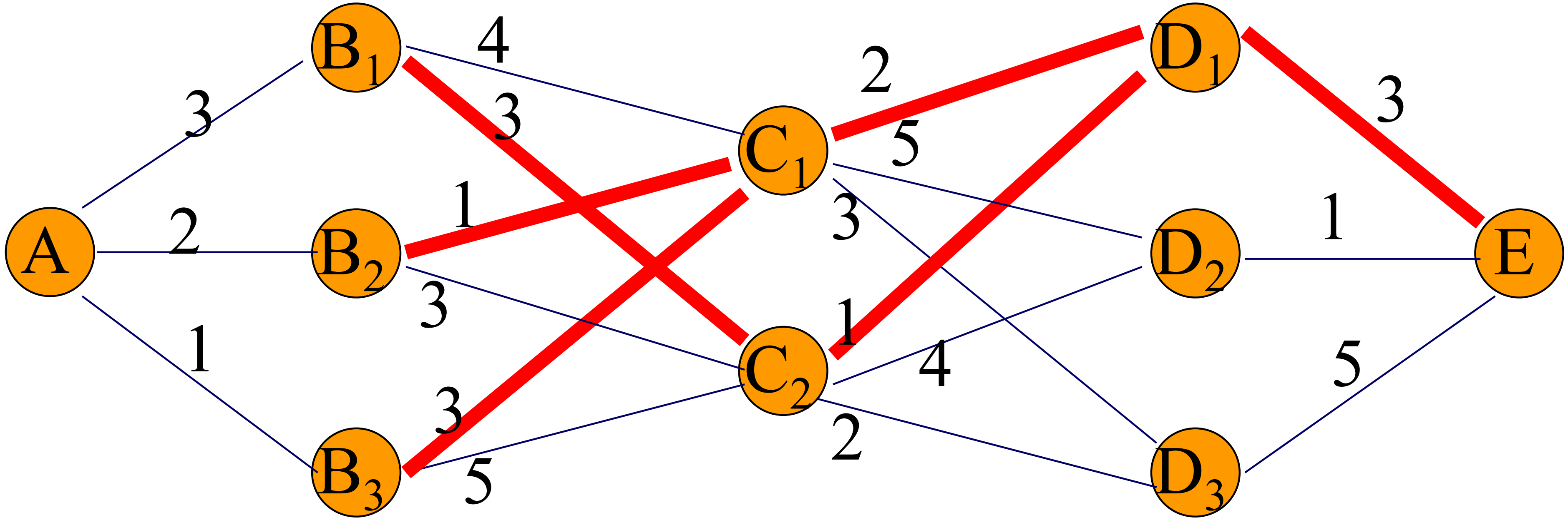
$$f_2(B_2) = \min\begin{Bmatrix} v_2(B_2, C_1) + f_3(C_1) \\ v_2(B_2, C_2) + f_3(C_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+5 \\ 3+4 \end{Bmatrix} = 6$$

第3步(3)



$$f_2(B_3) = \min\begin{Bmatrix} v_2(B_3, C_1) + f_3(C_1) \\ v_2(B_3, C_2) + f_3(C_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3+5 \\ 5+4 \end{Bmatrix} = 8$$

第4步

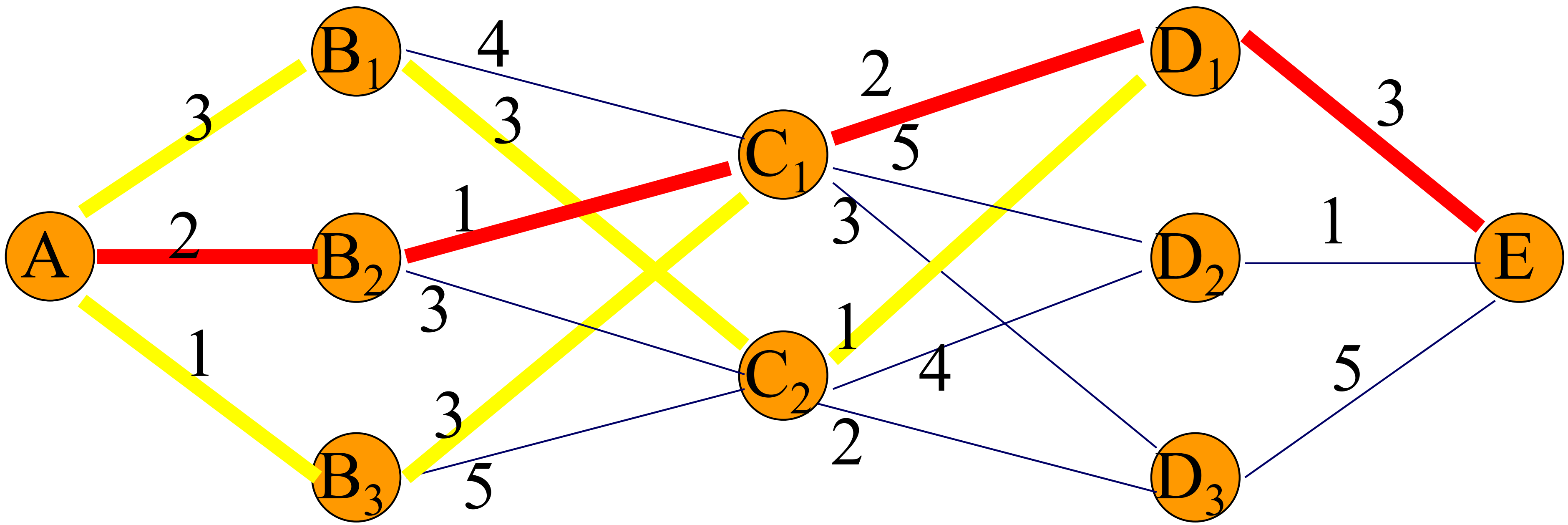


$$S_1=\{A\}$$

$$f_1(s_1)=\min_{u2\in D1(s1)}\{\,v_1(s_1,u_1)+f_2(s_2)\}$$

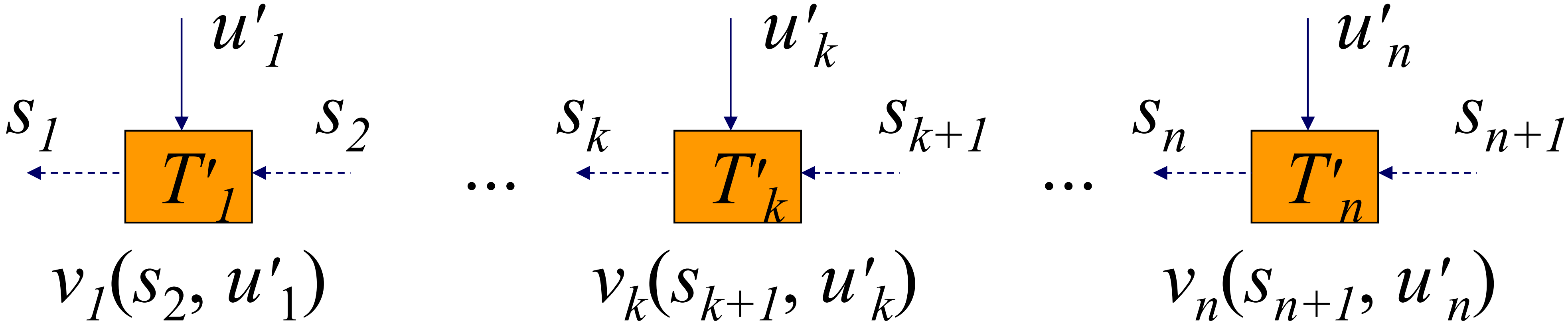
$$D_1(A)=\{B_1,B_2,B_3\}$$

第4步(1)



$$f_1(A)=\min\begin{Bmatrix} v_1(A,B_1)+f_2(B_1) \\ v_1(A,B_2)+f_2(B_2) \\ v_1(A,B_3)+f_2(B_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+7 \\ 2+6 \\ 1+8 \end{Bmatrix}=8$$

顺序解法



状态转移方程： $s_{k+1}=T_k(s_k, u_k(s_k))$

$\Leftrightarrow s_k=T'_k(s_{k+1}, u'_k(s_{k+1}))$

阶段指标函数： $v_k(s_k, u_k) \Leftrightarrow v_k(s_{k+1}, u'_k)$

最优指标函数： $f_k(s_{k+1})$表示起点s_1到s_{k+1}的最优效益值

顺序解法迭代方式

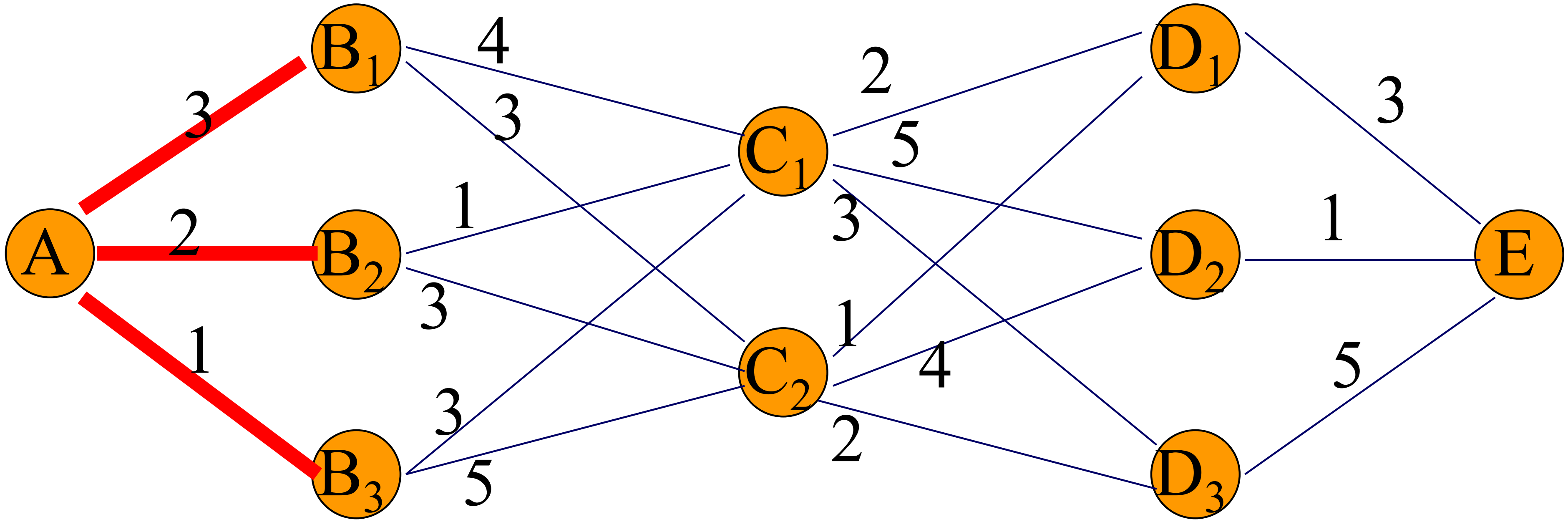
顺序解法迭代方式：

$$f_k(s_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k(s_{k+1})}{opt} \left(v_k(s_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(s_k) \right)$$

$$f_0(s_1) = 0$$

k阶段状态

第1步

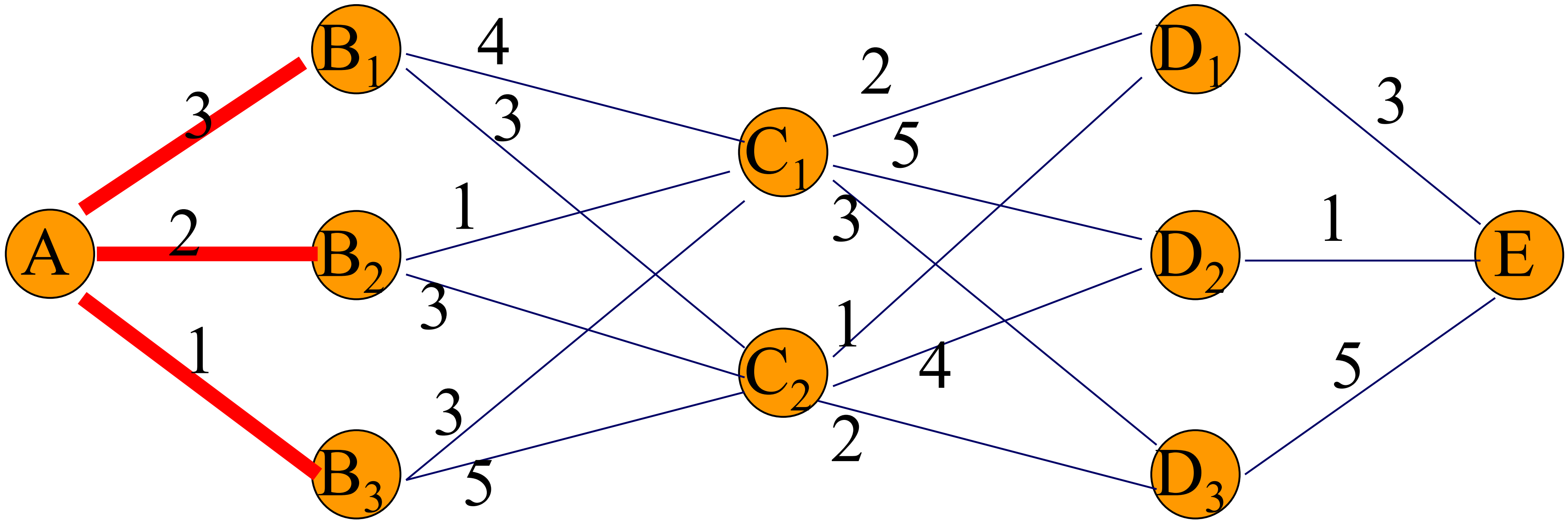


$S_2=\{B_1, B_2, B_3\}$， $u_1(s_2)=\{A\}$,

$f_1(s_2)=v_1(s_2, u_1)$

$f_1(B_1)=v_1(B_1, A)=3$, $f_1(B_2)=2$, $f_1(B_3)=1$

第2步

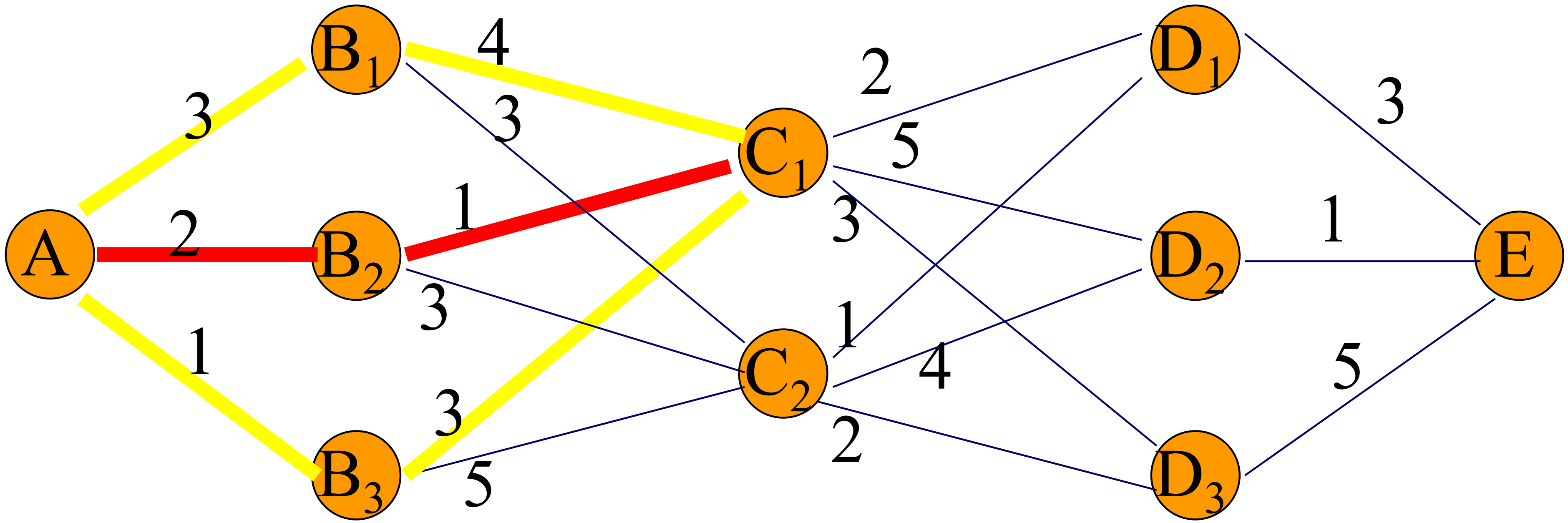


$S_3=\{C_1，\ C_2\}$

$$f_2(s_3)=\min_{u_2\in D_2(s_3)}\{v_2(s_3,u_2)+f_1(s_2)\}$$

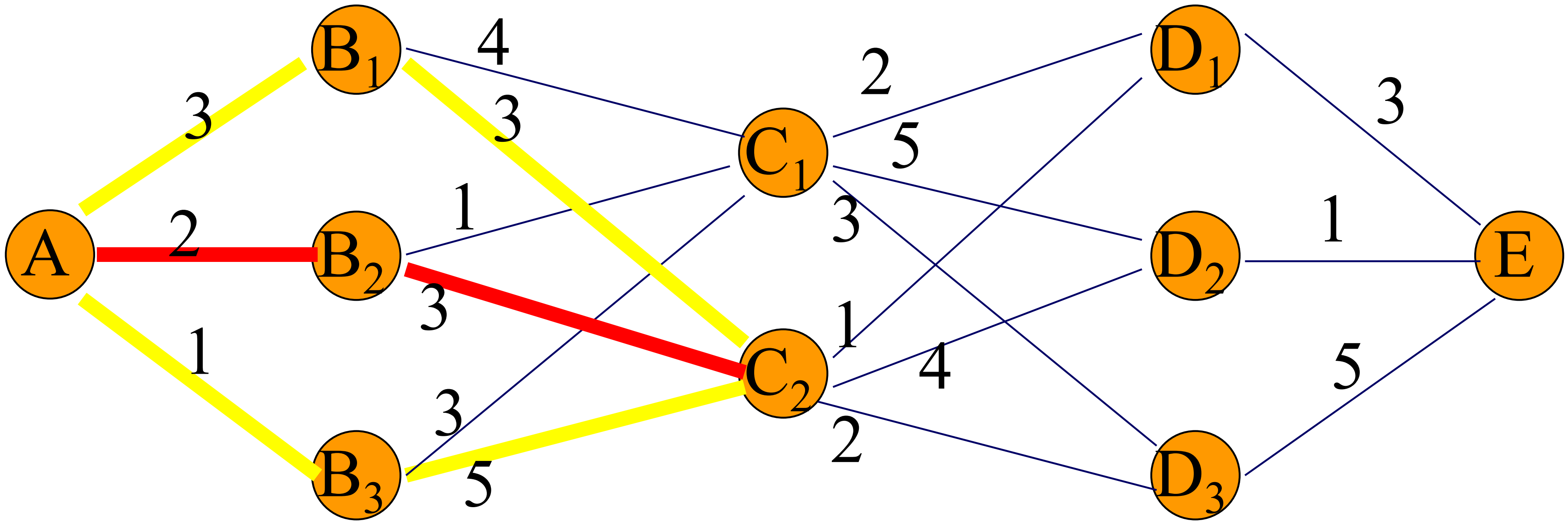
$D_2(C_1)=\{B_1，\ B_2，\ B_3\}$; $D_2(C_2)=\{B_1，\ B_2，\ B_3\}$

第2步（1）



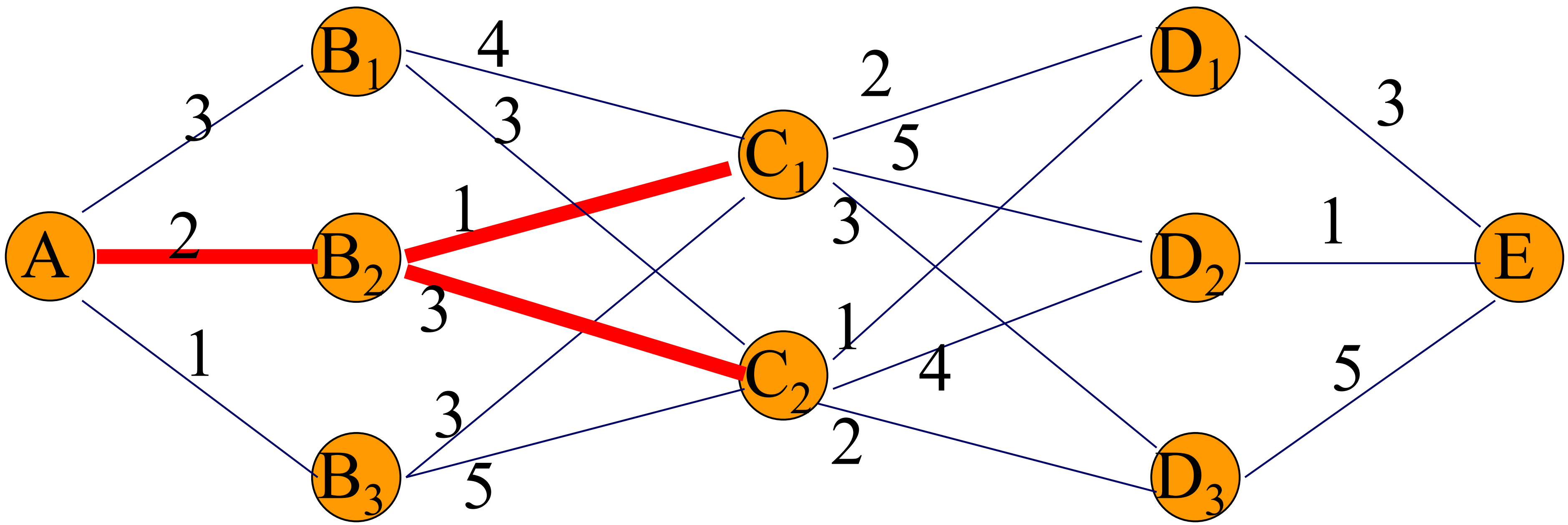
$$f_2(C_1)=\min\begin{Bmatrix} v_2(C_1,B_1)+f_1(B_1) \\ v_2(C_1,B_2)+f_1(B_2) \\ v_2(C_1,B_3)+f_1(B_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 4+3 \\ 1+2 \\ 3+1 \end{Bmatrix}=3$$

第2步（2）



$$f_2(C_2)=\min\begin{cases} v_2(C_2,B_1)+f_1(B_1) \\ v_2(C_2,B_2)+f_1(B_2) \\ v_2(C_2,B_3)+f_1(B_3) \end{cases}=\begin{cases} 3+3 \\ 3+2 \\ 5+1 \end{cases}=5$$

第3步

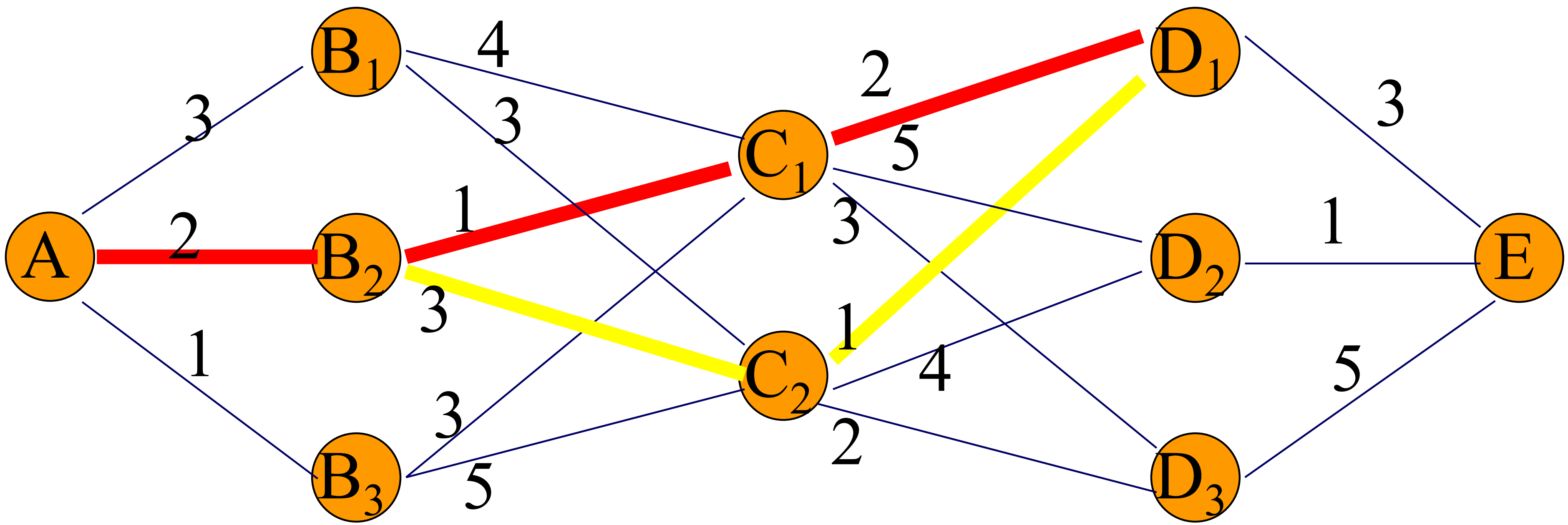


$S_4=\{D_1，\ D_2，\ D_3\}$

$$f_3(s_4)=\min_{u_3\in D_3(s_4)}\{\ v_3(s_4,u_3)+f_2(s_3)\}$$

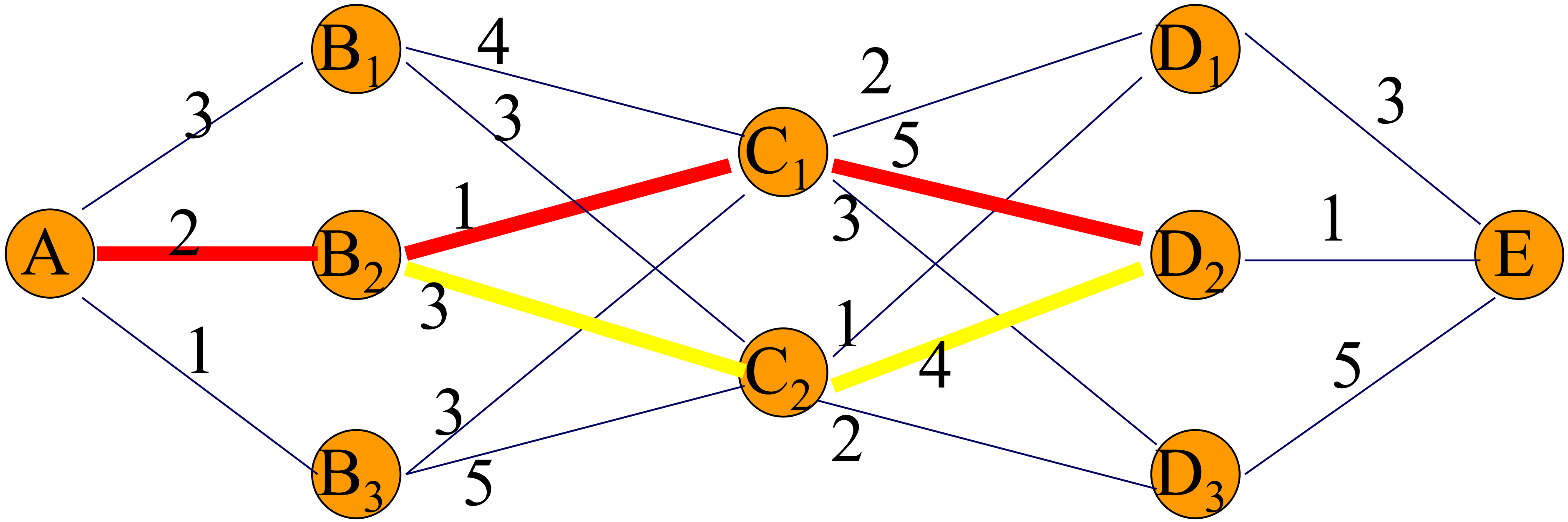
$D_3(D_1)=\{C_1,C_2\}$; $D_3(D_2)=\{C_1,C_2\}$; $D_3(D_3)=\{C_1,C_2\}$

第3步(1)



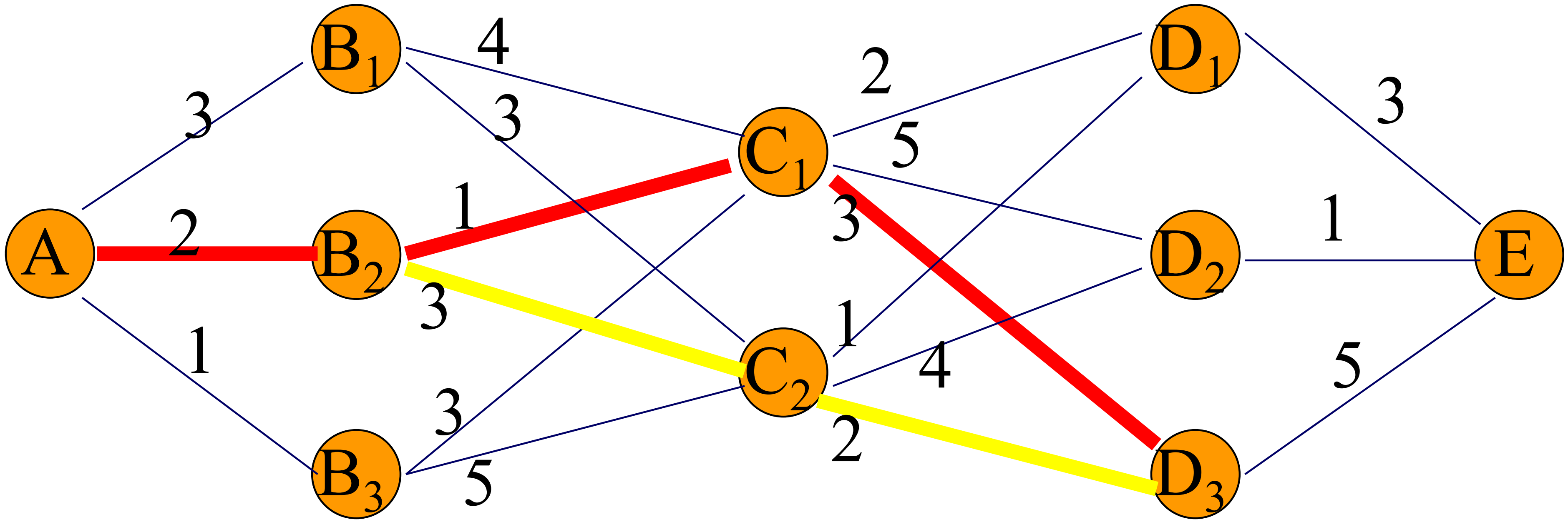
$$f_3(D_1)=\min\begin{Bmatrix} v_3(D_1,C_1)+f_2(C_1) \\ v_3(D_1,C_2)+f_2(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2+3 \\ 1+5 \end{Bmatrix}=5$$

第3步(2)



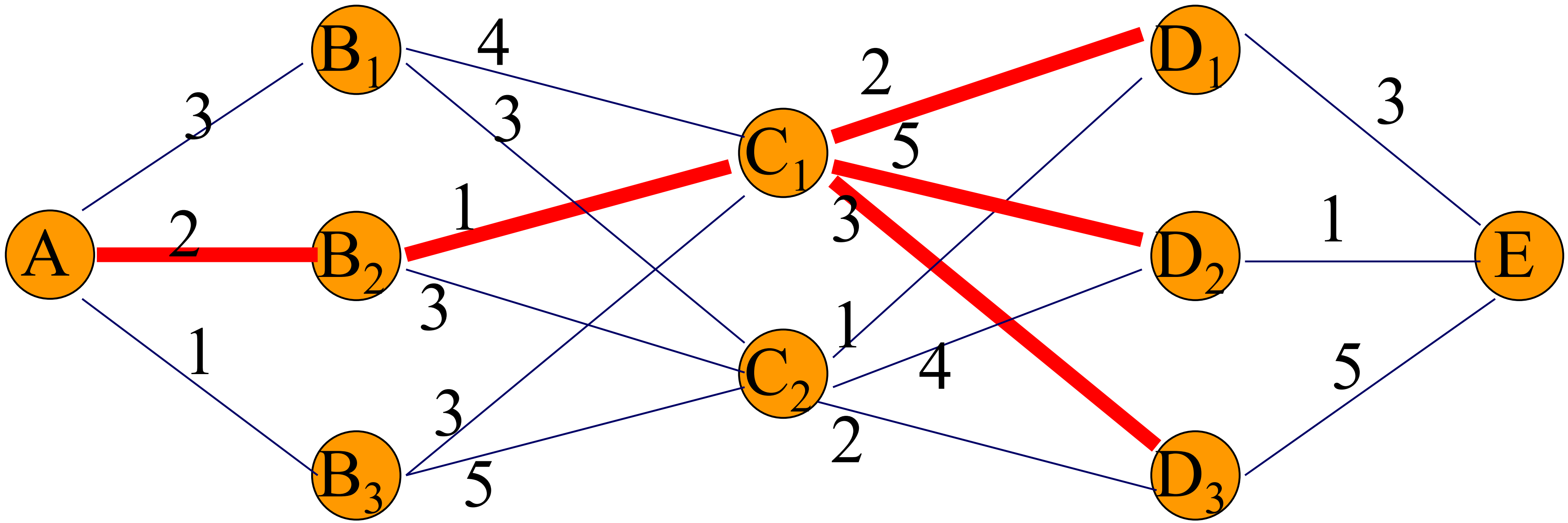
$$f_3(D_2)=\min\begin{Bmatrix} v_3(D_2,C_1)+f_2(C_1) \\ v_3(D_2,C_2)+f_2(C_2) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 5+3 \\ 4+5 \end{Bmatrix}=8$$

第3步(3)



$$f_3(D_3) = \min \begin{Bmatrix} v_3(D_3, C_1) + f_2(C_1) \\ v_3(D_3, C_2) + f_2(C_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3+3 \\ 2+5 \end{Bmatrix} = 6$$

第4步

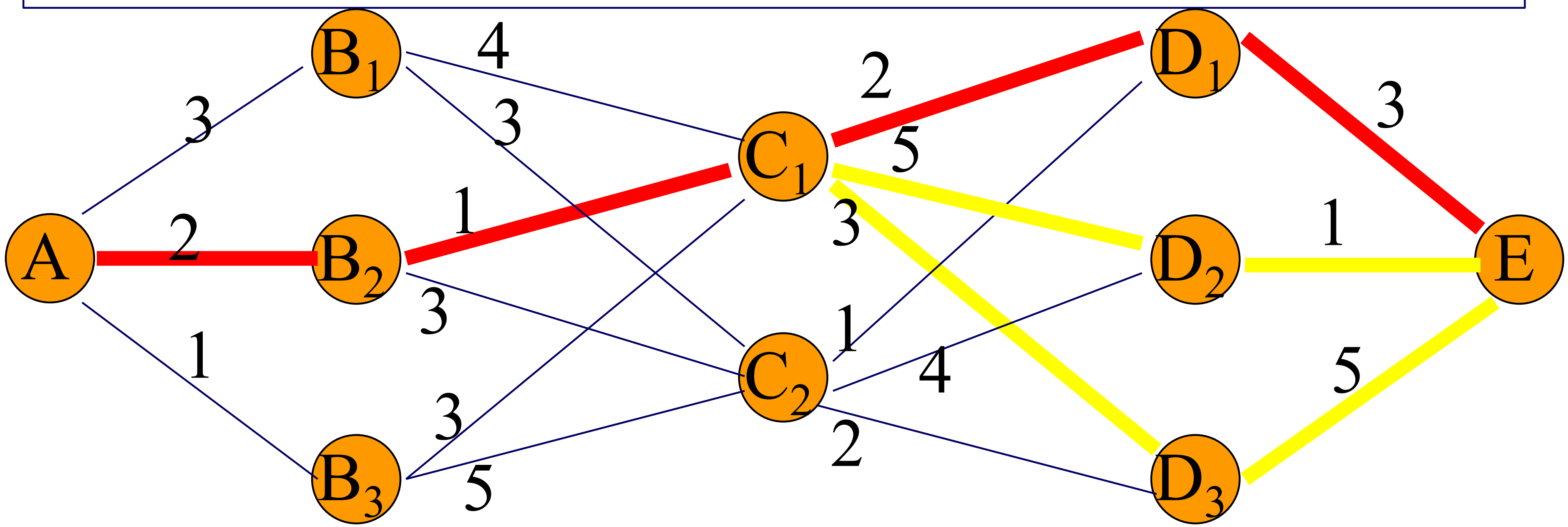


$S_4=\{E\}$

$$f_4(s_5)=\min_{u4\in D4(s5)}\{ v_4(s_5, u_4)+f_3(s_4)\}$$

$D_1(E)=\{D_1,D_2,D_3\}$

第4步(1)



$$f_4(E)=\min\begin{Bmatrix} v_4(E,D_1)+f_3(D_1) \\ v_4(E,D_2)+f_3(D_2) \\ v_4(E,D_3)+f_3(D_3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+5 \\ 1+8 \\ 5+6 \end{Bmatrix}=8$$

顺序解法和逆序解法比较

顺序解法和逆序解法无本质区别

若初始状态给定时，用逆序解法比较简单。反之，用顺序解法简单。

例1：运营规划问题

例1：某运输公司有500辆运输卡车，超负荷运输（每天满载行驶500km以上）时，年利润25万元/辆，卡车的年损坏率为0.3；低负荷运输（每天行驶300km以下），年利润16万元/辆，年损坏率为0.1。现要求制定5年计划，如何分配不同负荷下的卡车数量，使5年的总利润最大。

例1分析

阶段k：五年计划，$k=1,2,\ldots,5$

状态变量s_k：第k年度初完好的卡车数目

决策变量u_k：第k年度初超负荷运行的卡车数目

$0 \le u_k \le s_k$

已知初始状态变量$s_1 = 500$

终止状态s_5未知

故选用逆序解法。

状态转移方程：$s_{k+1}=(1-0.3)u_k + (1-0.1)(s_k-u_k)$

$$=0.9s_k-0.2u_k$$

注：由于损失率是一个估计，所以s_k、 u_k可看作连续状态变量

阶段指标函数：第k年度的阶段效益

$$v_k(s_k, u_k)=25u_k+16(s_k-u_k) =16s_k+9u_k$$

最优指标函数值的递推方程：

$$f_k(s_k)=\max_{u_k\in D_k(s_k)}\{ v_k(s_k, u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

$$f_6(s_6)=0$$

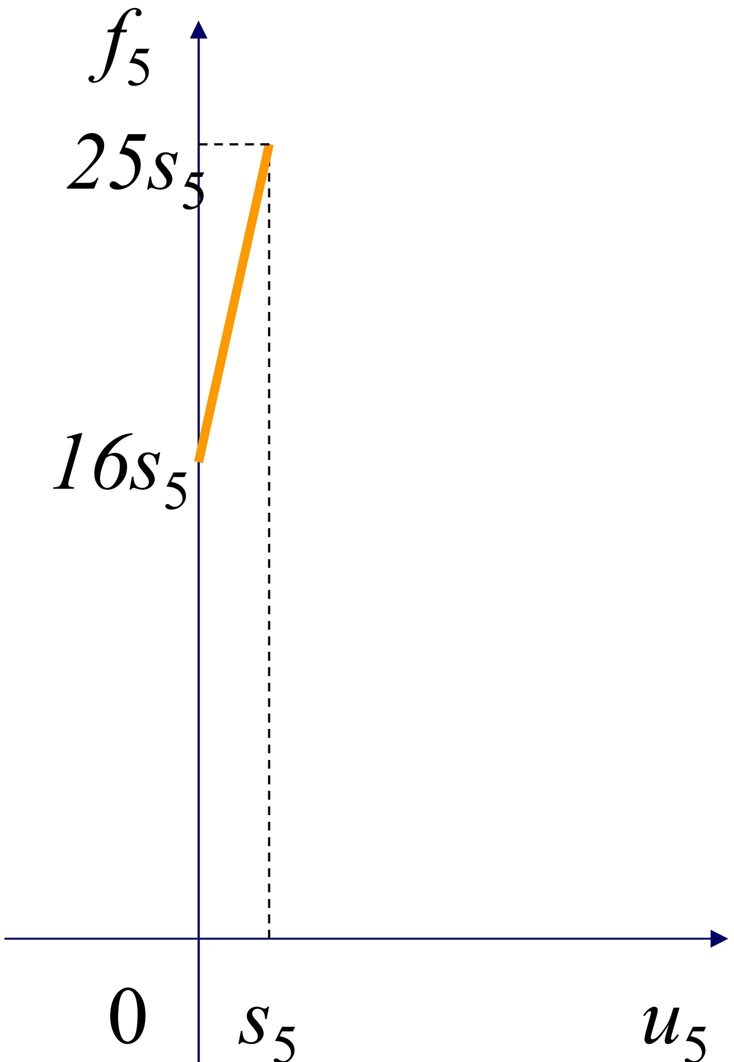
第1步:$k=5$

$$f_5(s_5)=\max_{0\le u5\le S5}\{v_5(s_5,u_5)+f_6(s_6)\}$$

$$=\max_{0\le u5\le S5}\{16s_5+9u_5+0\}$$

$$u_5^*=s_5$$

$$f_5(s_5)=25s_5$$



第2步:$k=4$

$$f_4(s_4)=\max_{0\le u4\le S4}\{v_4(s_4,u_4)+f_5(s_5)\}$$

$$=\max_{0\le u4\le S4}\{16s_4+9u_4+25s_5\}$$

$$=\max_{0\le u4\le S4}\{16s_4+9u_4+25(0.9s_4-0.2u_4)\}$$

$$=\max_{0\le u4\le S4}\{38.5s_4+4u_4\}$$

$u_4^*=s_4$ $\quad$ $f_4(s_4)=42.5s_4$

第3步:$k=3$

$$f_3(s_3)=\max_{0\le u3\le S3}\{v_3(s_3,u_3)+f_4(s_4)\}$$

$$=\max_{0\le u3\le S3}\{16s_3+9u_3+42.5(0.9s_3-0.2u_3)\}$$

$$=\max_{0\le u3\le S3}\{54.25s_3+0.5u_3\}$$

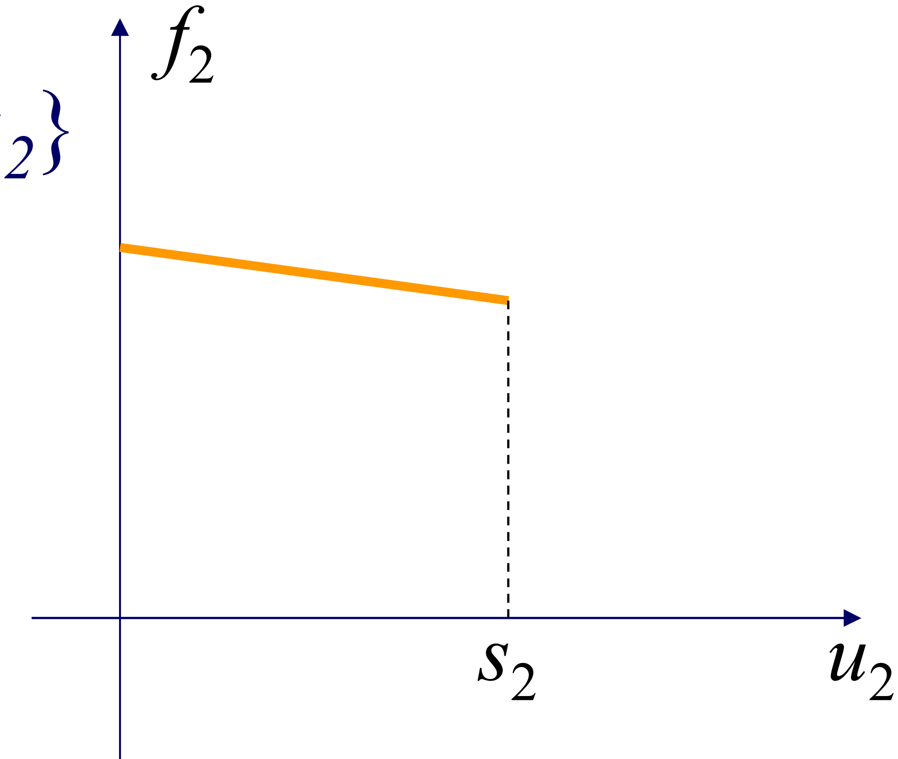
$u_3^*=s_3$ $\quad f_3(s_3)=54.75s_3$

第4步:$k=2$

$$f_2(s_2)=\max_{0 \le u2 \le S2}\{ v_2(s_2, u_2)+ f_3 (s_3)\}$$

$$=\max_{0 \le u2 \le S2}\{16s_2+9u_2 + 54.75 (0.9s_2-0.2u_2)\}$$

$$=\max_{0 \le u2 \le S2}\{65.275s_2-1.95u_2\}$$



$u_2^* =0$ $\quad$ $f_2(s_2)= 65.275s_2$

第5步:$k=1$

$$f_1(s_1)=\max_{0 \le u1 \le S1}\{ v_1(s_1, u_1)+f_2(s_2)\}$$

$$=\max_{0 \le u1 \le S1}\{74.7475s_1-4.055u_1\}$$

$u_1^*=0$

$f_1(s_1)= 74.7475s_1$

$= 74.7475\times 500=37373.75$万元

最优策略

s_1=500 u_1^*=0 全部低负荷运行

s_2= $0.9s_1-0.2\,u_1^*=450$ u_2^*=0

s_3=405 u_3^*=405 全部超负荷运行

s_4=283.5 u_4^*= 283.5

s_5=198.45 u_5^*= 198.45

s_6=138.15

例3 背包问题

$$\max \ z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10$$

$$x_j \ge 0 \quad \text{且为整数}$$

$$j = 1, 2, 3$$

动态规划问题解法

转化为动态规划模型：

阶段： 分为3个阶段 $k = 1, 2, 3$

状态变量s_k：k阶段时的资源剩余， 则s_1=10

决策变量u_k： k阶段的资源消耗单位， $u_k= x_k$

状态转移方程：$s_2=s_1-3u_1$; $s_3=s_2-4u_2$

阶段指标： 各阶段的价值$v_1(s_1, u_1)=4u_1$;

$v_2(s_2, u_2)=5u_2$; $v_3(s_3, u_3)=6u_3$

递推方程

逆序法解：

$$f_k(s_k) = \max_{0 \le u_k \le \left[\frac{s_k}{a_k}\right]} \left(v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \right)$$

$$f_4(s_4) = 0$$

第1步

$k=3$

$$f_3(s_3) = \max_{0 \le x_3 \le [s_3/5]} \{ 6x_3 + f_4(s_4) \} = \max_{0 \le x_3 \le [s_3/5]} \{ 6x_3 \}$$

s_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_3	0	0	0	0	0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 2
$f_3(s_3)$	0	0	0	0	0	6	6	6	6	6	12
x_3^*	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2

第2步

$k = 2$

$$f_2(s_2) = \max_{0 \le x_2 \le [s_2/4]} \{ 5x_2 + f_3(s_2 - 4x_2) \}$$

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_2	0	0	0	0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 2	0 1 2	0 1 2
s_3	0	1	2	3	4 0	5 1	6 2	7 3	8 4 0	9 5 1	10 6 2
v_2+f_3	0	0	0	0	0 5	6 5	6 5	6 5	6 5 10	6 11 10	12 11 10
$f_2(s_2)$	0	0	0	0	5	6	6	6	10	11	12
x_2^*	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	0

第3步

$k=1$

$$f_1(s_1) = \max_{0 \le x_1 \le [10/3]} \{ 4x_1 + f_2(s_1 - 3x_1) \}$$

s_1	10			
x_1	0	1	2	3
s_2	10	7	4	1
v_1+f_2	12	10	13	12
$f_1(s_1)$	13			
x_1^*	2			

线性规划与动态规划

线性规划是有特定数学模型的单阶段优化问题，存在一般性解法，但只适合本类问题

动态规划是没有特定数学模型的多阶段优化问题，仅提供优化思想，无一般性解法，但适应面广，可解决一些非线性问题。

例4 离散系统最优控制

例4：一阶系统

$$x(k+1)=2x(k)+u(k)$$

$$x(0)=1$$

求最优控制u*，使下列目标最小：

$$\min J=\sum_{k=0}^{2}[x^2(k)+u^2(k)]$$

问题分析

阶段： 分为3个阶段 $k = 0, 1, 2$

状态变量x_k

决策变量u_k

状态转移方程： $x_{k+1} = 2x_k + u_k$

阶段指标函数： $v_k = x_k^2 + u_k^2$

最优指标函数$J_k^*(x_k)$: 阶段k到阶段2的阶段最优指标函数值

迭代方程

迭代方程：

$$J_k^*(x_k)= min\{(x_k^2 + u_k^2) + J_{k+1}^*(x_{k+1})\}$$

$$J_3^*(x_3)=0$$

第1步

$k=2$

$$J_2^*(x_2)=\min_{u_2}\{[x_2^2+u_2^2]+J_3^*(x_3)\}$$

$$\Rightarrow \qquad u_2{}^*=0$$

$$J_2^*(x_2)=x_2^2$$

第2步

$k=1$

$$J_1^*(x_1)=\min_{u_1}\{[x_1^2+u_1^2]+J_2^*(x_2)\}$$

$$=\min_{u_1}\{[x_1^2+u_1^2]+[2x_1+u_1]^2\}$$

$$\Rightarrow \qquad u_1{}^*=-x_1$$

$$J_1^*(x_1)=3x_1^2$$

第3步

$k = 0$

$$J_0^*(x_0) = \min_{u_0}\{[x_0^2 + u_0^2] + J_1^*(x_1)\}$$

$$= \min_{u_0}\{[1 + u_0^2] + 3(2 + u_0)^2\}$$

$x(0) = 1$

$\Rightarrow \quad u_0{}^* = -3/2$

$\Rightarrow \quad u_1{}^* = -1/2$