

第二章 线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



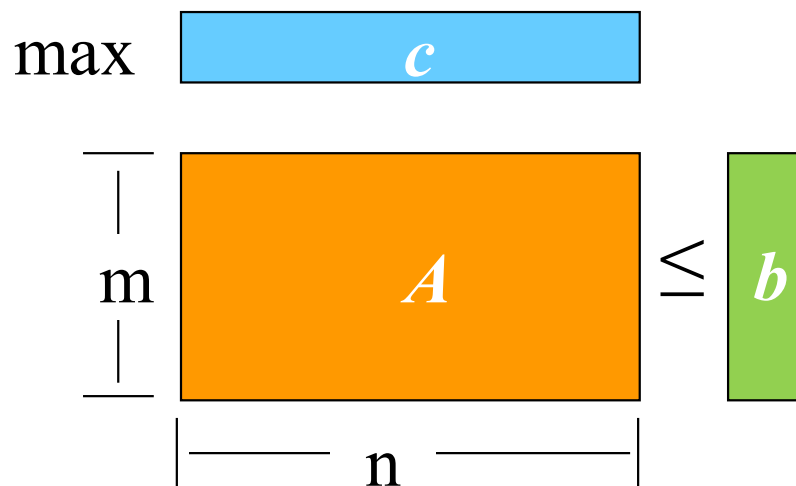
对偶的定义

原问题

$$\max z = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$s.t. \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

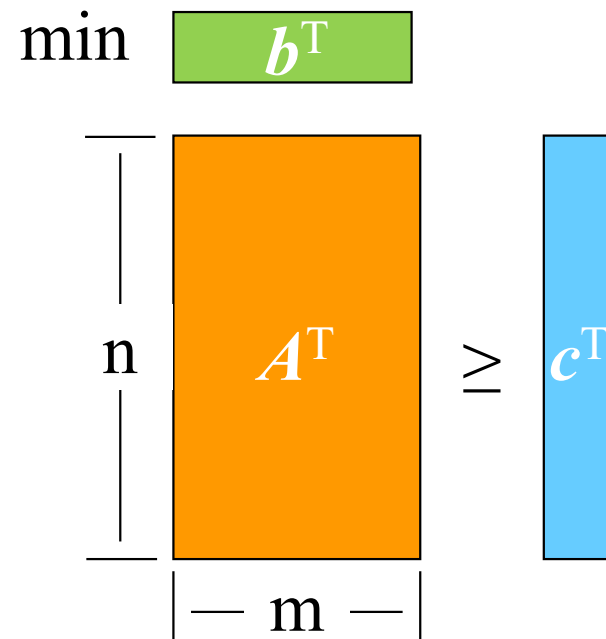


对偶问题

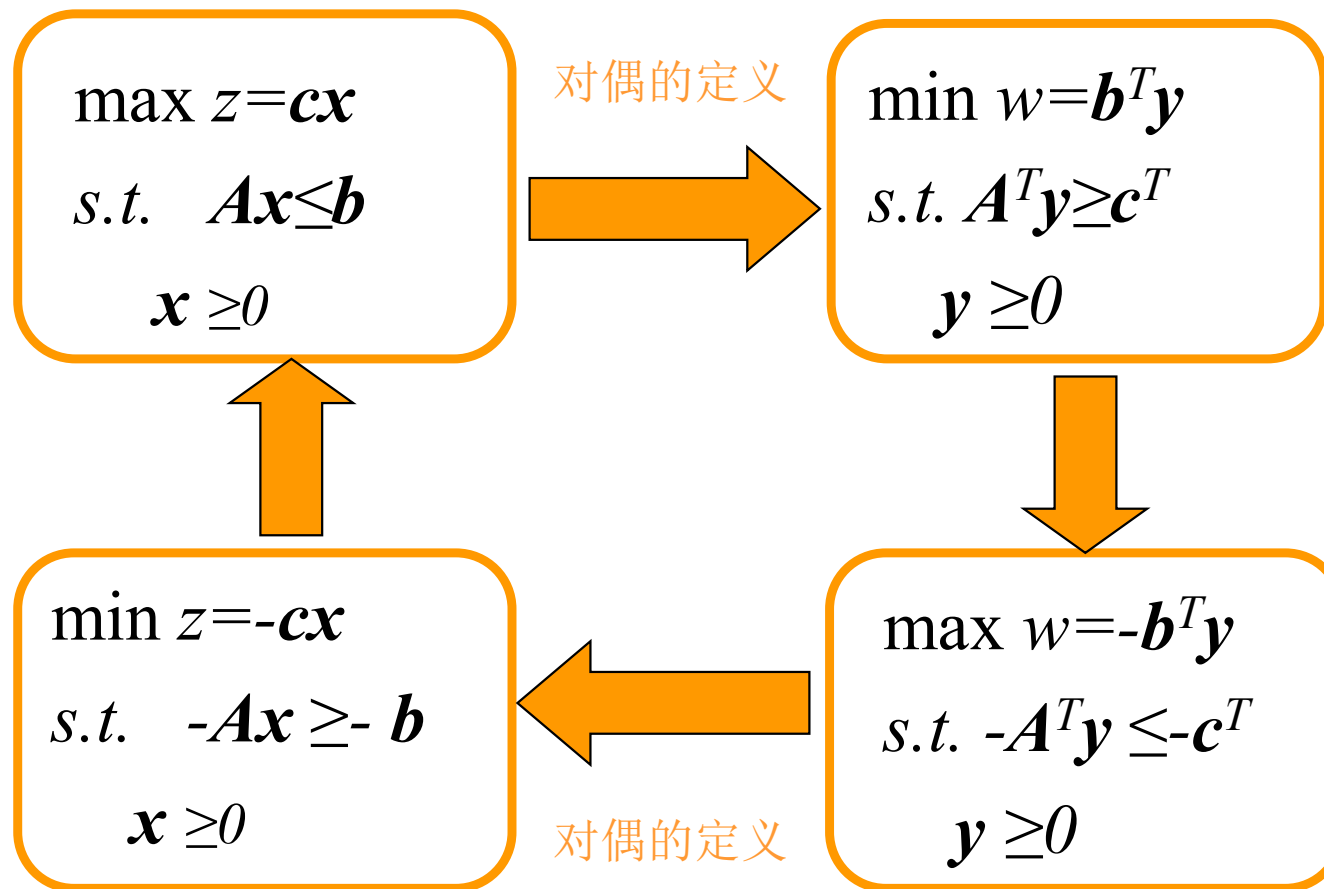
$$\min w = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$s.t. \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$



自返性



第二章 线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



对偶问题的性质

- 弱对偶性: $\mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$
- 最优性: $\mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}、\mathbf{y}$ 均为最优解
- 强对偶性: 设 $\mathbf{x}^0、\mathbf{y}^0$ 分别是原始问题和对偶问题的可行解, 则必存在最优解 $\mathbf{x}^*、\mathbf{y}^*$, 且有 $\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$
- 互补松弛性: 最优解的充要条件

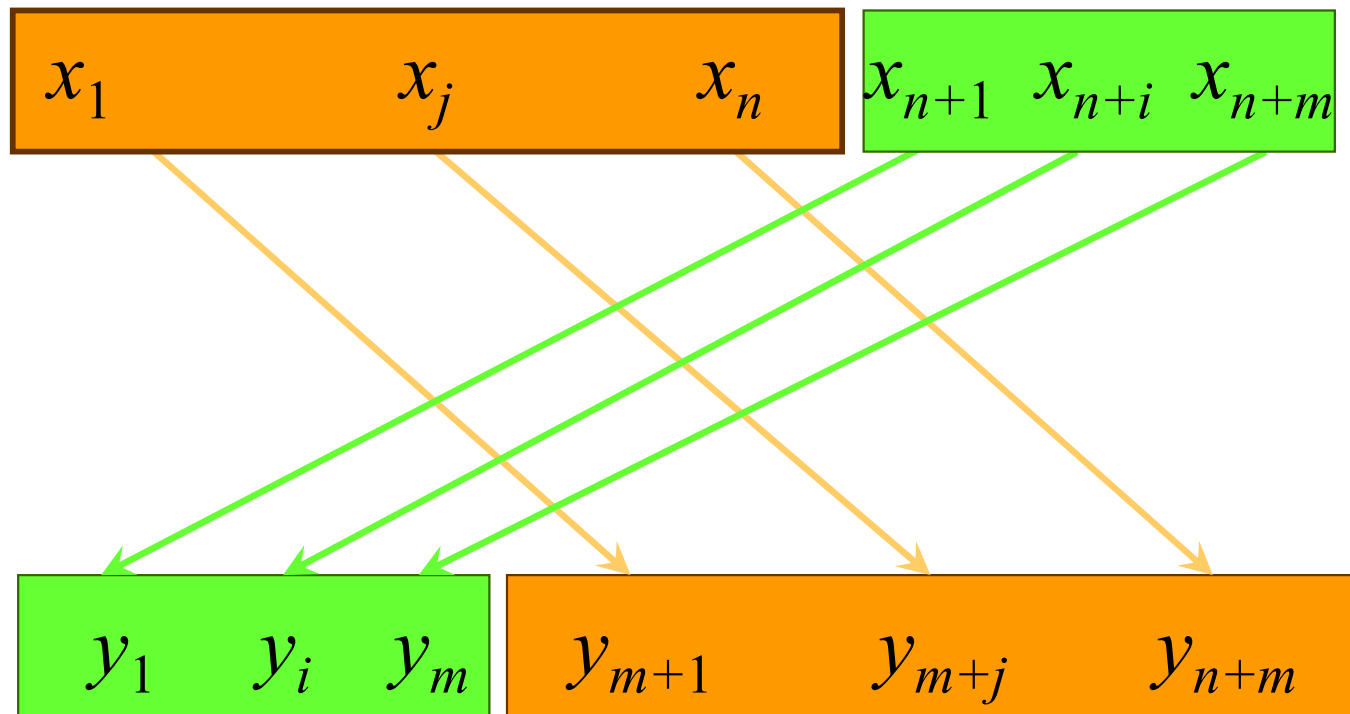
$$(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T\mathbf{y} = 0 \text{ 和 } \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}^T) = 0$$

$$\mathbf{x}_s^T\mathbf{y} = 0 \text{ 和 } \mathbf{x}^T\mathbf{y}_s = 0$$

原问题和对偶问题解的关系

- (1) 两个问题都有可行解， 则都有最优解。
- (2) 一个问题有无界解， 另一个问题必无可行解。
- (3) 两个问题都无可行解

原变量和对偶变量的对应关系



$$x_j y_{m+j} = 0 \quad y_i x_{n+i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m)$$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个一定等于0

互补松弛性定理的应用举例

例: $\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$(LP) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1 \dots 5) \end{cases}$$

用对偶理论求 (LP) 的最优解

对偶问题的解

解：对偶问题(DP)为：

$$\max w = 4y_1 + 3y_2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

①

$$y_1 - y_2 \leq 3$$

②

$$2y_1 + 3y_2 \leq 5$$

③

$$y_1 + y_2 \leq 2$$

④

$$3y_1 + y_2 \leq 3$$

⑤

$$y_1, y_2 \geq 0$$

其对偶解

$$y_1^* = 4/5$$

$$y_2^* = 3/5$$

$$w^* = 5$$

用对偶问题解求原问题解

将 y_1^* , y_2^* 代入, 知②, ③, ④为严格不等式

由 $\mathbf{x}^{*T}(\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* - \mathbf{c}^T) = 0$ 得: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

由 $(\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b})^T\mathbf{y}^* = 0$, y_1^* 、 $y_2^* > 0$, 知:

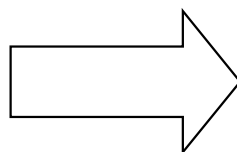
$$\begin{cases} x_1 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{x}^* = [1, 0, 0, 0, 1]^T$$

$$z^* = 5$$

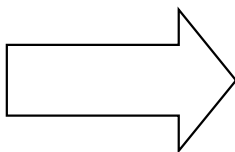
其他对偶关系

$$\begin{array}{ll}\max & z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0\end{array}$$



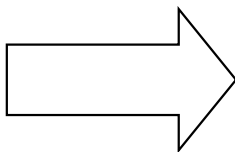
$$\begin{array}{ll}\min & w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{y} \geq 0\end{array}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$



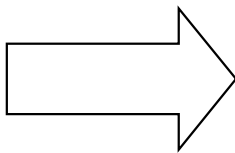
$$\mathbf{y} \leq 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$



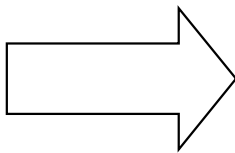
$$\mathbf{y} \text{ free}$$

$$\mathbf{x} \leq 0$$



$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{x} \text{ free}$$



$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T$$

原问题与对偶问题的对应关系

原问题

对偶问题

约束



原变量

原变量



约束

原变量



松弛变量

松弛变量



原变量

基解



检验数

检验数



基解

第二章 线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



基解和检验数对应关系举例

例：

$$\text{LP: } \begin{cases} \max z = 9x_1 + 5x_2 + 8x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{DP: } \begin{cases} \min w = 5y_1 + y_2 \\ 3y_1 + y_2 \geq 9 \\ y_1 + y_2 \geq 5 \\ y_1 + 8y_2 \geq 8 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

初始单纯形表

			9	5	8	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	5	3	1	1	1	0
0	x_5	1	1	1	8	0	1
	σ_j		9	5	8	0	0

最终单纯形表

			9	5	8	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	2	0	-2	-23	1	-3
9	x_1	1	1	1	8	0	1
	σ_j		0	-4	-64	0	-9

此时：原问题的最优解： $\mathbf{x}^*=[1, 0, 0, 2, 0]^T$, $z^*=9$

对偶问题的最优解

根据互补松弛性:

$$\begin{cases} x_j y_{m+j} = 0 & (j = 1 \cdots n) & x_{n+i} y_i = 0 & (i = 1 \cdots m) \\ x_j \longrightarrow y_{2+j} & (j = 1 \cdots 3) & x_{3+i} \longrightarrow y_i & (i = 1, 2) \end{cases}$$

$$n = 3, m = 2$$

$$x_1 \longrightarrow y_3 \quad x_2 \longrightarrow y_4 \quad x_3 \longrightarrow y_5$$

$$x_4 \longrightarrow y_1 \quad x_5 \longrightarrow y_2$$

$$\text{得: } \mathbf{y}^* = [0, 9, 0, 4, 64]^T$$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m \bar{c}_i a_{ij} = c_j - c_B p_j$$

单纯形法的矩阵描述

$$\sigma_j = c_j - c_B B^{-1} p_j$$

$$\sigma = c - c_B B^{-1} A$$

初始单纯形表

	c_B	c_N	0
$0 \quad x_s \quad b$	B	N	I
σ_j	c_B	c_N	0

迭代后单纯形表

	c_B	c_N	0
$c_B \quad x_B \quad B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	B^{-1}
σ_j	0	$c_N - c_B B^{-1}N$	$-c_B B^{-1}$

基解与检验数的对应关系

性质：单纯形表上，原问题的检验数对应对偶问题的一个基解

证明：对偶问题的约束方程 $A^T \mathbf{y} - \mathbf{y}_s = \mathbf{c}^T$

$$\text{记 } A = [B \ N] \quad \mathbf{y}_s = [\mathbf{y}_{sB}^T \ \mathbf{y}_{sN}^T]^T \quad \mathbf{c} = [\mathbf{c}_B \ \mathbf{c}_N]$$

约束方程可改写为：

$$B^T \mathbf{y} - \mathbf{y}_{sB} = \mathbf{c}_B^T$$

$$N^T \mathbf{y} - \mathbf{y}_{sN} = \mathbf{c}_N^T$$

基解与检验数的对应关系

$$B^T \mathbf{y} - \mathbf{y}_{sB} = \mathbf{c}_B^T$$

$$N^T \mathbf{y} - \mathbf{y}_{sN} = \mathbf{c}_N^T$$

取 $\mathbf{y}_{sB} = 0$ 为对偶问题的非基变量，可得唯一解：

m 个

$$\mathbf{y} = (\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1})^T, \quad \mathbf{y}_{sN} = -(\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N})^T$$

m 个

$n-m$ 个

可见 $[\mathbf{y}^T \quad \mathbf{y}_{sB}^T \quad \mathbf{y}_{sN}^T]^T$ 为对偶问题的基解。

单纯形表上的对应关系

原变量	x_B	x_N	x_s
检验数	0	$c_N - c_B B^{-1} N$	$-c_B B^{-1}$
对偶变量	$-y_{sB}$	$-y_{sN}$	$-y$

$$\begin{cases} \sigma_j = -y_{m+j} \\ \sigma_{n+i} = -y_i \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \end{cases}$$

对应关系与互补松弛性定理一致。

单纯形表同时给出了原问题和对偶问题的基解！

最优解的对应关系

当 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 为最优解时，有：

$$(\mathbf{c} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}) \leq 0$$

$$-\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \leq 0$$

此时， $\mathbf{y} = (\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1})^T$ 为原对偶问题可行解

而且是最优解，因为

$$w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{c} \mathbf{x} = z$$

最终单纯形表同时给出了原问题和对偶问题的最优解！

第二章 线性规划的对偶理论


- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



单纯形法思路的另一种解释

单纯形法思路：

单纯形法：找基 B ，满足 $B^{-1}b \geq 0$ ，若 $c - c_B B^{-1} A$ 不全 ≤ 0 ，（即检验数）。

迭代  保持 $B^{-1}b \geq 0$ ，使 $c - c_B B^{-1} A \leq 0$

保持 x 为可行解，使 y 演变为可行解

对偶单纯形法的思路

保持 \mathbf{y} 为可行解，使 \mathbf{x} 演变为可行解

对偶单纯形法：找基 B ，满足 $\mathbf{c} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq 0$ ，
但 $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ 不全 ≥ 0

迭代



保持 $\mathbf{c} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \leq 0$ ，使 $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq 0$

步骤1:构造初始可行解

1. 构造一个对偶问题的初始可行解，即要求全部 $\sigma_j \leq 0$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}$$

注意：有的问题难以找到初始可行解，就无法采用对偶单纯形法

举例

例：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

标准形式： $\max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始单纯形表

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1
	σ_j		-2	-3	-4	0	0

步骤2：相邻基可行解迭代

2. 如果所有的 $b_i > 0$ ，已是最优解

否则：(1)取 x_r 为出基变量，满足

$$b_r = \min_i \{b_i < 0\} \quad i = 1, \dots, m$$

(2)取 x_s 为入基变量，满足

$$\theta' = \frac{\sigma_s}{a_{rs}} = \min_i \left\{ \frac{\sigma_j}{a_{rj}} \mid a_{rj} < 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

可行性分析

如上选取的**目的**：保持 $\sigma_j' \leq 0$ ， y 为可行解

分析：

$$\sigma_j' = \sigma_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \sigma_s = a_{rj} \left\{ \frac{\sigma_j}{a_{rj}} - \frac{\sigma_s}{a_{rs}} \right\}$$

因为 $\sigma_j \leq 0$ ， a_{rs} 为主元素，有 $a_{rs} < 0$ ，

当 $a_{rj} \geq 0$ ： $\sigma_j / a_{rj} \leq 0$ ， $\sigma_s / a_{rs} \geq 0$ ，所以 $\sigma_j' \leq 0$

当 $a_{rj} < 0$ ： $\sigma_j / a_{rj} - \sigma_s / a_{rs} \geq 0$ ，所以 $\sigma_j' \leq 0$

确定主元素

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
	σ_j		-2	-3	-4	0	0

迭代后单纯形表

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	-5/2	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
	σ_j		0	-4	-1	0	-1

步骤3：最优性的检验

3. 最优性检验

判断迭代后所有的 $b_i' > 0$? 如果不满足, 继续迭代

确定主元素

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
	σ_j		0	-4	-1	0	-1

最终单纯形表

			-2	-3	-4	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
	σ_j		0	0	-9/5	-8/5	-1/5

$$\mathbf{x}^* = [11/5, 2/5, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{y}^* = [8/5, 1/5, 0, 0, 9/5]^T$$

第二章 线性规划的对偶理论

- 对偶问题定义
- 对偶问题的性质
- 单纯形表中的对偶解
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析



灵敏度分析

原始数据 A , b , c 一般为统计数据、量测值、专家评估数据, 不精确且有变动。

灵敏度分析指最优解在参数、约束条件或变量个数发生变化时的影响。

通常有两类问题:

- (1) 参数变化时, 最优解如何变?
- (2) 最优解/最优基保持不变, 参数变化的范围。

最终单纯形表

	c_1	c_2	\dots	c_j	\dots	c_n
c_B 基 b	x_1	x_2	\dots	x_j	\dots	x_n
c_1 x_1 c_2 x_2 \vdots \vdots c_m x_m	$B^{-1}b$ $B^{-1}A = B^{-1}[p_1, p_2, \dots, p_n]$					
σ_j	$c - c_B B^{-1}A$					

参数变化对解可行性的影响

① \mathbf{b} 的变化 : $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

② \mathbf{c} 的变化:

$$\sigma_A = \mathbf{c} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad \sigma_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

$$\sigma_j = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j$$

③ a_{ij} 的变化

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad \mathbf{p}_j' = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_j$$

变化的处理

原问题	对偶问题	处理
可行解	可行解	最优解/最优基不变
可行解	非可行解	用单纯形法迭代求解
非可行解	可行解	用对偶单纯形法迭代求解
非可行解	非可行解	重新编制单纯形表

灵敏度分析例

例：

原料 \ 产品	A	B	C	备用资源
甲	1	1	1	12
乙	1	2	2	20
利润	5	8	6	

问： 如何安排产品产量， 可获最大利润？

建模

解 $\max z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 \dots x_5 \geq 0 \end{cases}$$

最终单纯形表

			5	8	6	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_1	4	1	0	0	2	-1
8	x_2	8	0	1	1	-1	1
	σ_j		0	0	-2	-2	-3

C的灵敏度分析

(1)、非基变量系数 c_j

求最优方案不变的前提下， c_3 的改变范围

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= c_3 - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_3 \\ &= c_3 - [5 \quad 8] \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_3 - 8 \leq 0\end{aligned}$$

即 $c_3 \leq 8$

C的灵敏度分析

(2)、基变量系数 c_j

求保持最优方案不变, c_1 改变的变化范围。

$$\sigma_A = \mathbf{c} - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$$

$$= [c_1, 8, 6, 0, 0] - [c_1 \ 8] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0, 0, -2, -2c_1 + 8, c_1 - 8] \leq 0$$

$$\begin{cases} -2c_1 + 8 \leq 0 \\ c_1 - 8 \leq 0 \end{cases} \quad 4 \leq c_1 \leq 8$$

b 的灵敏度分析

保持最优方案不变，求 b_1 的变化范围。

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases} 2b_1 - 20 \geq 0 \\ -b_1 + 20 \geq 0 \end{cases} \quad \therefore 10 \leq b_1 \leq 20$$

A 的灵敏度分析

(计划生产的产品工艺结构改变)

(1)、非基变量 x_j 工艺改变

只影响单纯形表 \mathbf{p}_j 列, 即 σ_j .

关键看 $\sigma_j \leq 0$? 还是 > 0 ? 可用类似前述方法解决。

(2)、基变量 x_j 工艺改变, 具体分析

增加新变量的灵敏度分析

例 对于新产品D，已知1个单位D要消耗

甲：3 乙：2

问：保持原有生产比例，利润为多少时，投产产品D有利？

$$\begin{aligned}\text{解：} \quad \sigma_6 &= c_6 - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{p}_6 = c_6 - [5 \ 8] \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= c_6 - 12 > 0\end{aligned}$$

得 $c_6 > 12$

添加约束灵敏度分析

例 新增加电力约束：13

A、B、C每单位需电 2、1、3

问：原方案是否改变？

解：

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 13$$

原方案 A: 4 B: 8 C: 0

16 > 13 原方案要改变

算法小结

(1) 71年 Klee 变量 n 约束 $2n$

单纯形计算步骤 $O(2^n)$

(2) 79年 哈奇扬 椭球法 $O(n^6 L^2)$

82年 十一次国际数学规划会议 Fulkerson 奖

(3) 84年 Karmarkar 内点算法 $O(n^{3.5} L^2)$

88年 十三次国际数学规划会议

常用软件

LINGO: Linear Interactive and Discrete Optimizer

免费试用: 150 个约束、300个变量、30 整数变量
芝加哥大学开发

Matlab: Optimization Toolbox

Excel: Excel Solver

IBM CPLEX Optimizer: Matlab\Python\c++

免费版限 1000 个变量和 1000 个约束,
高校师生可使用教育版

GUROBI (美国)、COPT (杉数科技)

阿里、华为、中科院也有线性规划和整数规划产品