第二章连续信号的分析

第四节连续信号的复频域分析

主要内容

- 拉普拉斯变换
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 双边拉普拉斯变换的性质
- 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

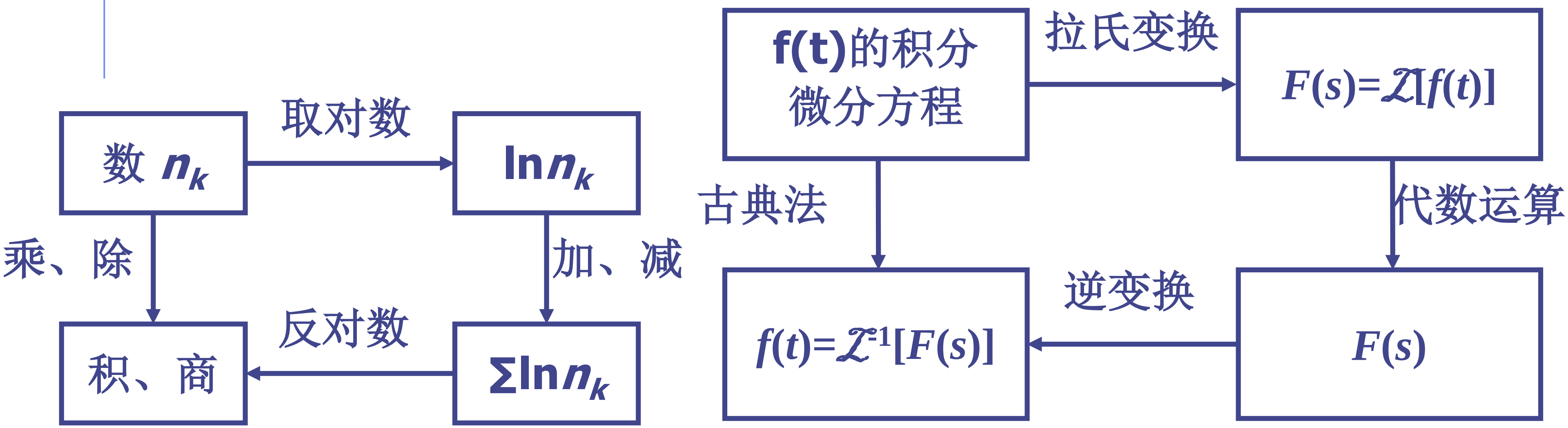
——基本内容

- **拉普拉斯变换**
  - 引言
  - 从**Fourier**变换到拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的收敛域
  - 拉普拉斯变换的几何表示
  - **x(t)**的时域特性与其拉普拉斯变换**X(s)**的收敛域的关系

拉普拉斯变换

——引言

- 19世纪末，英国工程师 O. Heaviside (1850-1925) 算子法
- P.S. Laplace (1749-1825) 数学依据 拉普拉斯变换



拉氏变换与对数变换的比较

拉普拉斯变换

——从Fourier变换到拉普拉斯变换（1）

Fourier变换

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$X(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$$

$$X(j\omega) = \boxed{|X(j\omega)|} e^{\boxed{j\theta(j\omega)}}$$

幅度谱　　相位谱

F变换把时域分析的卷积运算转化为频率域的乘积运算。

F变换为信号与系统的频域分析提供了手段，但进行F变换的前提是信号满足收敛条件

拉普拉斯变换

——从Fourier变换到拉普拉斯变换（2）

连续时间傅里叶变换收敛的条件为：

若x(t)能量有限 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt < \infty$ ，则x(t)与 $\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} dt$ 在能量上无差别，但不能保证在时域上处处相等。

狄里赫利条件

1）x(t)绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt < \infty$

2）在任何有限区间内，x(t)只有有限个最大值和最小值

3）在任何有限区间内，x(t)只有有限个不连续点，且不连续点上信号具有有限值。

一些常见的信号如阶跃、斜坡、周期都不满足绝对可积的条件，不能直接求F变换——虽然借助广义函数可求，然而出现冲激函数δ(t)

周期信号：$x(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi X_1(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

分析不可积原因：当 $t \to \pm\infty$，x(t)不趋于零，有的还增大

拉普拉斯变换

——从Fourier变换到拉普拉斯变换（3）

解决办法：引入衰减因子e$^{-\sigma t}$, 乘以x(t)，使 $t \to \pm\infty, x(t)e^{-\sigma t} \to 0$，可F变换

s

$$F\{x(t)e^{-\sigma t})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-t\boxed{(\sigma+j\omega)}}dt$$

$$X(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$L\{(x(t)\} = \boxed{X(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

双边**Laplace**变换正变换

X(t)的象函数

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma+j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega, 令s=\sigma+j\omega$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Laplace反变换

拉普拉斯变换

——从Fourier变换到拉普拉斯变换（5）

Fourier变换：

$$x(t) \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}\boxed{e^{j\omega t}}$$

将信号表示为无限多个频率为ω、复振幅为 $X(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}$ 的虚指数分量之和

F变换：时域与频域的联系, t, ω为实数

Laplace变换：

$$x(t) \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} X(s)\frac{ds}{2\pi j}\boxed{e^{st}}$$

将信号表示为无限多个复频为s、复振幅为 $X(s)\frac{ds}{2\pi j}$ 的复指数分量之和

L变换：时域与复频域的联系，t为实数，s为复数

F变换与L变换的关系

$$x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega}$$

注意：若x(t)=0当t<0,则 $X(s) = \int_{\boxed{0}}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$

单边Laplace变换

拉普拉斯变换

——从Fourier变换到拉普拉斯变换（6）

衰减因子$e^{-\sigma t}$

$$e^{st}=e^{(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}e^{j\omega t}$$

数学含义：

原函数乘以衰减因子以满足绝对可积条件

物理含义：频率ω变换为复频率s。

ω只能描述振荡的重复频率，

而s不仅描述重复频率，还描述振荡幅度的增长速率或衰减速率

稳定性的问题

拉普拉斯变换

——从算子符号法的概念引出拉普拉斯变换（1）

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\to X(s) \\ \frac{dx(t)}{dt} &\to sX(s) \end{aligned}\right\}$$

假定此变换可通过以下积分实现：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t,s)dt$$

$$\Rightarrow sX(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} h(t,s)dt = x(t)h(t,s)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h'(t,s)dt$$

要保证$x(t)\,h(t,s)$的积分收敛，规定：

当$t \to \pm\infty$时，$x(t)\,h(t,s) \to 0$

拉普拉斯变换

——从算子符号法的概念引出拉普拉斯变换（2）

$$sX(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h'(t,s)dt$$

$$\Rightarrow s\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t,s)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h'(t,s)dt$$

$$\Rightarrow sh(t,s) = -h'(t,s) = -\frac{dh(t,s)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh(t,s)}{h(t,s)} = -sdt \quad \overset{\text{积分}}{\Rightarrow} \quad \ln[h(t,s)] = -st$$

$$\Rightarrow h(t,s) = e^{-st} \qquad \Rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的收敛域（1）

双边Laplace变换正变换

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Laplace反变换

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} X(s)e^{st}ds$$

➢ 因为Fourier变换对某些信号不收敛而引入**衰减因子$e^{-\sigma t}$**, 乘以**x(t)**后再求**F**变换—— **Laplace变换**： $X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

➢ **问题:** Laplace变换一定收敛吗？ **回答:** 不一定。

显然：不同的 σ = Re{s} 对应不同的信号，Laplace变换存在收敛域问题

➢ **收敛域ROC** （Region of Convergence)概念：能使x(t)的Laplace变换存在的 s 值范围（σ = Re{s}）称为 x(t) 的Laplace变换ROC, 通常用 s 平面上的阴影表示。

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的收敛域（2）

例　设信号 $x(t)=e^{-at}u(t), a>0,$ 求**X(s)**及**ROC**。

解：

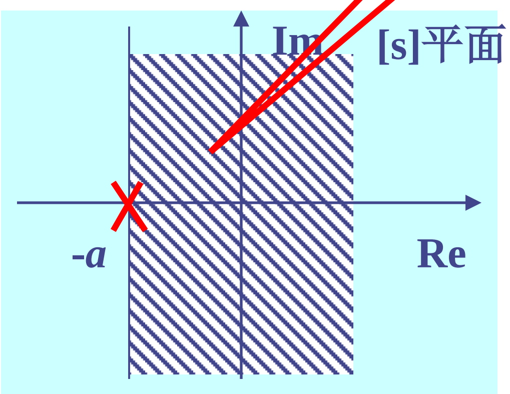
$$\because X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=-\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{a+j\omega},a>0$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}u(t)e^{-st}dt\overset{s=\sigma+j\omega}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}e^{-\sigma t}u(t)e^{-j\omega t}dt \qquad a+\sigma>0$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a+\sigma)t}u(t)e^{-j\omega t}dt=F\{e^{-(a+\sigma)t}u(t)\}=\frac{1}{a+\sigma+j\omega}=\frac{1}{s+a}, \qquad \boxed{\sigma>-a}$$

即： $x(t)=e^{-at}u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{1}{s+a}, \boxed{\mathrm{Re}\{s\}>-a}$

结论：Laplace变换对某些**Re{s}**收敛，对某些**Re{s}**不收敛。所以，在给出**L**变换的同时要给出变量 **s** 收敛域。显然σ＝0即为F变换。故，若收敛域包含jω轴，则F变换一定存在。



X(s)的收敛域示意图

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的收敛域（3）

例　　设信号 $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ 求X(s)。

解：

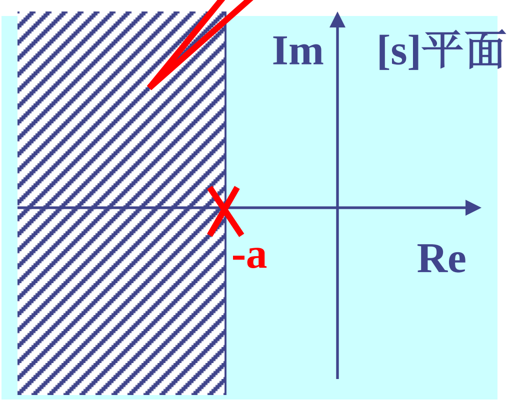
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}dt = -\frac{e^{-(a+s)t}}{-(s+a)}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s+a\} < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

要绝对可积的话，必须满足ROC条件。

即：$x(t) = -e^{-at}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$

对照：$x(t) = e^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$



X(t)的收敛域示意图

结论：Laplace变换式虽然相同，但ROC不同，它们表示了完全不同的原信号。

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的收敛域（4）

例　　设信号 $x(t)=e^{-b|t|},(b>0)$ 求X(s)及收敛域。

解：$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{bt}e^{-st}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-bt}e^{-st}dt$

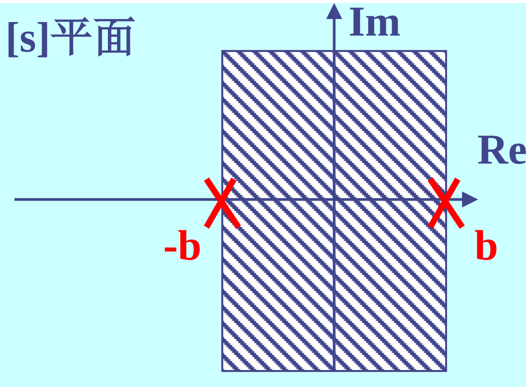
$=-\dfrac{e^{-(s-b)t}}{s-b}\Big|_{-\infty}^{0}-\dfrac{e^{-(s+b)t}}{s+b}\Big|_{0}^{\infty};$ 第1项ROC：$\mathrm{Re}\{s\}-b<0\Rightarrow\mathrm{Re}\{s\}<b$

第2项ROC：$\mathrm{Re}\{s\}+b>0\Rightarrow\mathrm{Re}\{s\}>-b$

$=\dfrac{-2b}{s^2-b^2},$　　整个积分的$ROC:-b<\mathrm{Re}\{s\}<b$

而当$b<0$时，X(s)不存在。

即：$x(t)=e^{-b|t|}(b>0)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\dfrac{-2b}{s^2-b^2},\quad -b<\mathrm{Re}\{s\}<b$



X(s)的收敛域示意图

结论：

并非所有的信号都存在**Laplace**变换，有一个收敛域**ROC**问题。

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的几何表示:零极点图

- 许多信号x(t)的Laplace变换式可表示成s的有理函数

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n},(n>m)$$

更常见或更方便

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$A=\frac{b_m}{a_n}\quad:\quad \text{常数}$$

- 在一个有理**Laplace**变换式中，除去一个常数因子**A**外，分子分母多项式都能用它们的根（零点和极点——零点z_i使**X(s)**为零；极点p_j使**X(s)**为无穷大）来表示，而常数因子**A**只影响**X(s)**的大小，不影响**X(s)**的性质。虽然**X(s)**不能像**F**变换画出幅度谱与相位谱，但在 **s** 平面上可以标出零极点位置（**X**—极点，**O**—零点），—— **X(s)**的零极点图。

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的收敛域及零极点图（1）

例　　求2个实指数信号之和的LT及ROC　$x(t)=3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)$

解：

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}[3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)]e^{-st}dt=3\int_{0}^{\infty}e^{-2t}u(t)e^{-st}dt-2\int_{0}^{+\infty}e^{-t}u(t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+1}=\frac{\boxed{s-1}}{\boxed{(s+2)}\boxed{(s+1)}};$$

第1项ROC：$\mathrm{Re}\{s\}>-2$

第2项ROC：$\mathrm{Re}\{s\}>-1$

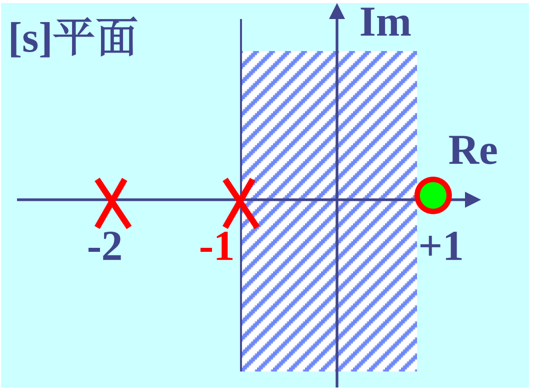
$$=\frac{s-1}{s^2+3s+2};$$ 整个积分的$ROC:\mathrm{Re}\{s\}>-1$

零点:o

极点:×

Laplace变换式常表示为s的2个多项式之比

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$



X(t)的收敛域示意图

拉普拉斯变换

——拉普拉斯变换的收敛域及零极点图（2）

例　求实指数复指数信号之和的LT及ROC

$$x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}(\cos 3t)u(t)$$

解：由欧拉公式：

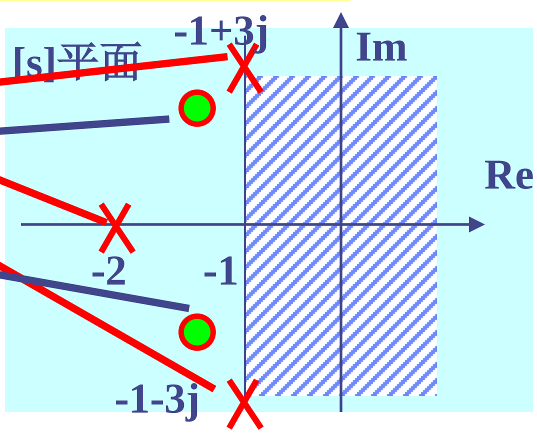
$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}u(t)]e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s+2}+\frac{1/2}{s+1-3j}+\frac{1/2}{s+1+3j}=\frac{\boxed{2s^2+5s+12}}{\boxed{(s^2+2s+10)}\boxed{(s+2)}}$$

$$\mathrm{ROC}:\mathrm{Re}\{s\}>-2;\mathrm{Re}\{s\}>-1;\mathrm{Re}\{s\}>-1\Rightarrow \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

极点

零点



X(t)的收敛域示意图

Laplace变换式常表示为s的2个多项式之比

<u>有理函数</u>

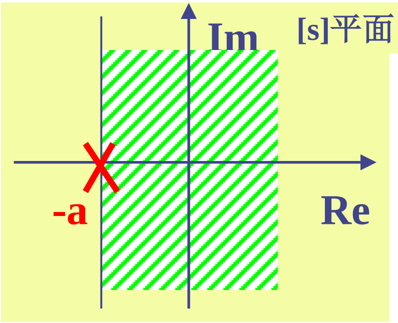
$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

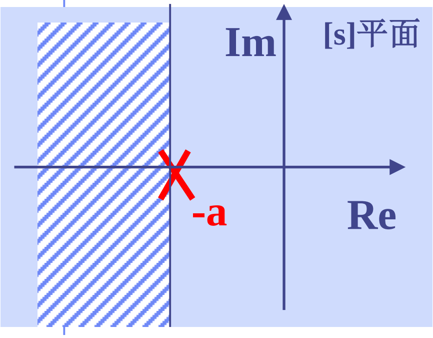
拉普拉斯变换

——x(t)的时域特性与其Laplace变换的ROC的关系(1)

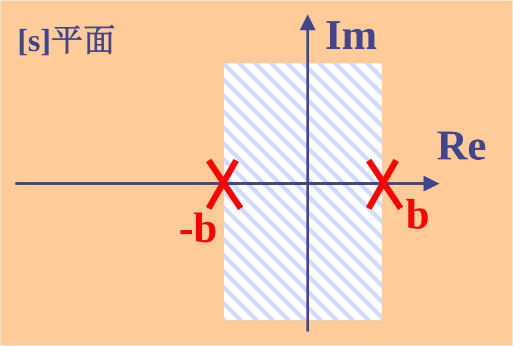
Review：

$$x(t)=e^{-at}u(t)\stackrel{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

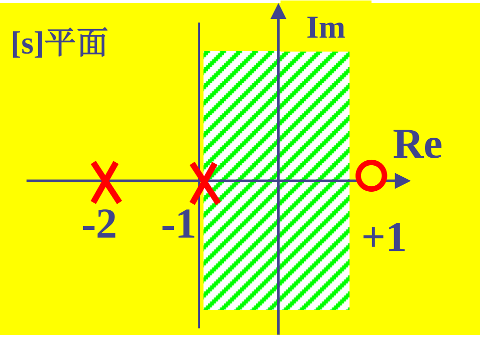




$$x(t)=-e^{-at}u(-t)\stackrel{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{1}{s+a},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-a$$



$$x(t)=e^{-|b|t(b>0)}\stackrel{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{-2b}{s^2-b^2},\quad \text{-b}<\mathrm{Re}\{s\}<\text{b}$$



$$x(t)=3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)\stackrel{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{s-1}{(s+2)(s+1)};\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

➢ **ROC的某些具体特性与x(t)的特性有关，**
ROC的边界位置可以由X(s)的极点决定。

拉普拉斯变换

——x(t)的时域特性与其Laplace变换的ROC的关系(2)

- **性质1** **X(s)**的收敛域在 **s** 平面上由平行于虚轴 **j**ω 的带状区域组成（**即收敛域与S的虚部无关，**因为在**X(s)**的**ROC**内的这些**s**值都是绝对可积的，该条件只与实部有关）。

- **性质2** 对有理**Laplace**变换来说，**ROC内不包括任何极点(**因为若包含一个极点，则**X(s)**在该点为无穷大，积分不收敛）。

- **性质3** 若 **x(t)**是时限的，且绝对可积，则其**X(s)**的**ROC**是整个**s**平面。

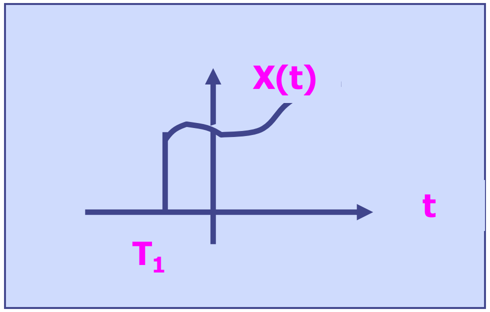
直观理解：时限信号**x(t)**($T_1 \le t \le T_2$)，乘以衰减因子$e^{-\sigma t}$（$\sigma>0$—指数衰减；$\sigma<0$—指数增长）, 因为**x(t)**是时限的，$e^{-\sigma t}x(t)$ 不可能无界，所以一定可积。

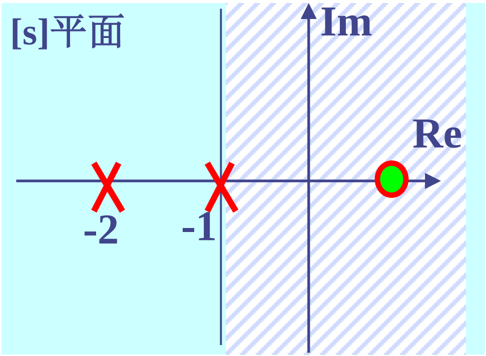
拉普拉斯变换

——x(t)的时域特性与其Laplace变换的ROC的关系(3)

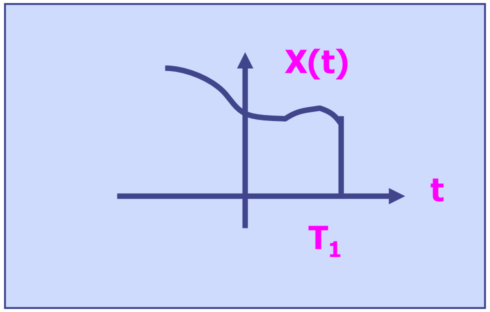
➢ **性质4** 若x(t)是右边信号，且X(s)存在，则X(s)的ROC一定在其最右边极点的右边。

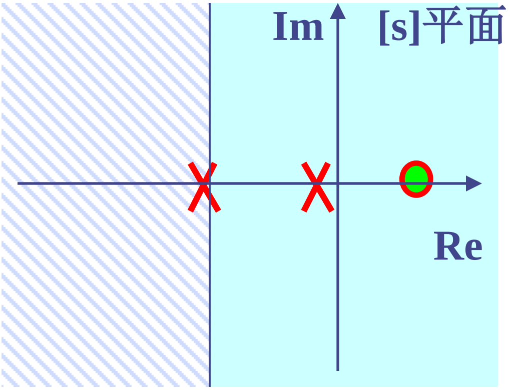
指t<T_1, x(t)=0的信号





➢ **性质5** 若x(t)是左边信号，且X(s)存在，则X(s)的ROC一定在其最左边极点的左边。

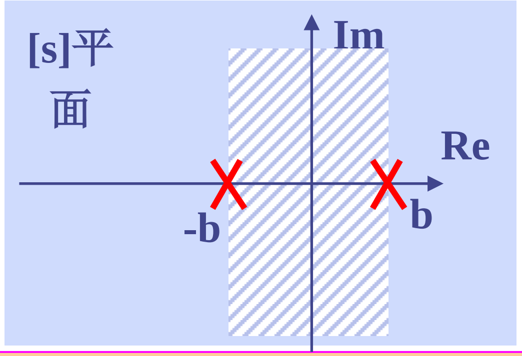




拉普拉斯变换

——x(t)的时域特性与其Laplace变换的ROC的关系(4)

➢ 性质6 若x(t)是双边信号，且X(s)存在，则X(s)的ROC一定在由s平面的一条带状域所组成。



➢ 一个信号x(t)要么不存在Laplace变换，否则就一定属于性质3~性质6这4类情况中的某一种，即整个s平面（有限长信号），某一左半平面（左边信号），某一右半平面（右边信号），带状收敛域（双边信号）。

例6-5 设 $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$，试画出该变换式的零极点图及其ROC的几种可能情况（P219例6－4）。

解: 极点s=-1, s=-2。画出零极点图后，分信号是右、左、双边3种情况讨论，由性质4~6可得到相应的ROC。参见P219图6－11。

主要内容

- 拉普拉斯变换
- 常用信号的拉普拉斯变换
  - 阶跃、指数、冲激、正弦。。。。
- 双边拉普拉斯变换的性质
- 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换
- **LTI**系统的复频域分析

常用信号的拉普拉斯变换
——由拉普拉斯变换定义推导(1)

（1）单位阶跃信号u(t)——（右边信号）

$$L\{u(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s};\ \mathrm{Re}\{s\}>0$$

（2）单边指数信号 $e^{-at}u(t)$ ——（右边信号）

$$L\{e^{-at}u(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\frac{1}{s+a};\ \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

（3）单位冲激信号δ(t)

$$L\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1;\ \ ROC\text{为整个s平面}$$

如果冲激出现在**$t=t_0(t_0>0)$**, 则 $L\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$

常用信号的拉普拉斯变换
——由拉普拉斯变换定义推导(2)

（4）信号$t^n u(t)$——（右边信号）

由分部积分法：

$$L\{t^n u(t)\} = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \int_0^\infty t^n \cdot \frac{1}{(-s)} \cdot de^{-st}$$

$$= -\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{n}{(-s)} \cdot t^{n-1} dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} L\{t^{n-1} u(t)\}$$

特别地：当n=1，为单位斜坡函数

$$L\{tu(t)\} = \frac{1}{s} L\{t^0 u(t)\} = \frac{1}{s} L\{u(t)\} = \frac{1}{s^2}; \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

当n=2，为抛物线函数

$$L\{t^2 u(t)\} = \frac{2}{s^3}; \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

⋮ ⋮

当n为任意值，则

$$L\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}; \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

常用信号的拉普拉斯变换
——由拉普拉斯变换定义推导(3)

（5）正弦信号$\cos\omega_0 t\cdot u(t)$——（右边信号）

$$L\{\cos\omega_0 t\cdot u(t)\}=\int_0^{\infty}\cos\omega_0 t\cdot e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-(s-j\omega_0)t}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-(s+j\omega_0)t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0}+\frac{1}{s+j\omega_0}\right)=\frac{s}{\underline{s^2+\omega_0^2}};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

同理：正弦信号$\sin\omega_0 t\cdot u(t)$——（右边信号）

注意到：$p_1, p_2=\pm j\omega_0$

$$L\{\sin\omega_0 t\cdot u(t)\}=\int_0^{\infty}\sin\omega_0 t\cdot e^{-st}dt=\frac{\omega_0}{\underline{s^2+\omega_0^2}};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

常用信号的拉普拉斯变换

——由拉普拉斯变换定义推导(4)

（6）衰减正弦信号$e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$——（右边信号）

$$L\{e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-at}\cdot\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-(s+a-j\omega_0)t}}{-(s+a-j\omega_0)}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-(s+a+j\omega_0)t}}{-(s+a+j\omega_0)}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^{\ 2}};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

注意到：$p_1, p_2=-a\pm j\omega_0$

同理：衰减正弦信号$e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)$——（右边信号）

$$L\{e^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\cdot u(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\cdot e^{-st}dt=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^{\ 2}};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

主要内容

- 拉普拉斯变换
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 双边拉普拉斯变换的性质
- 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换
- **LTI**系统的复频域分析

双边拉普拉斯变换的性质（1）

作用：利用拉普拉斯变换性质，可以简化求解过程

注意：(1)Laplace变换是Fourier变换的推广（X(s)=F{$e^{-\sigma t}$x(t)}），所以性质与F变换类似，不同处是Laplace变换要考虑收敛域问题；(2)单边Laplace变换与双边变换性质大部分相同，仅时域微分与时域积分不同

（1）线性

$$x_1(t) \xleftrightarrow{LT} X_1(s); ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{LT} X_2(s); ROC = R_2$$

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xleftrightarrow{LT} a_1X_1(s) + a_2X_2(s); ROC\text{至少包含}\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$$

交集

1） $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$ 小于R_1与R_2，ROC为交集；

2） $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 = \phi$ 说明 $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ 不存在；

3）在相加过程发生零极点相消，ROC可能扩大

双边拉普拉斯变换的性质（1-2）

例 已知

$$x_1(t) \xleftrightarrow{LT} X_1(s) = \frac{1}{s+1}; \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{LT} X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}; \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

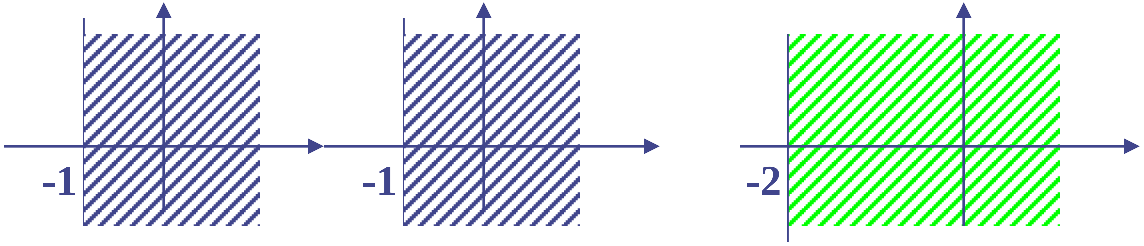
求**L{x_1(t)-x_2(t)}.**

解：

$$X(s) = L\{x_1(t) - x_2(t)\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}; \mathrm{Re\{s\} > \text{-}2}$$

$$\mathrm{Re\{s\} > \text{-}1; Re\{s\} > \text{-}1}$$

ROC示意图



注意：因为该例产生了零极点相消情况，所以收敛域扩大。

双边拉普拉斯变换性质（2）

（2）时域平移性质

$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

$$x(t)\xleftrightarrow{LT} X(s);ROC=R \quad \Rightarrow \quad x(t-t_0)\xleftrightarrow{LT} e^{-st_0}X(s),ROC=R$$

即，函数时移后的**Laplace**变换为原函数的**Laplace**变换式**X(s)**乘以**e^{-st0}**，而其收敛域不变——因为极点位置没有变化。

证明思路：**Laplace**变换的定义式＋变量替代

例 求**u(t-1)**的**Laplace**变换。

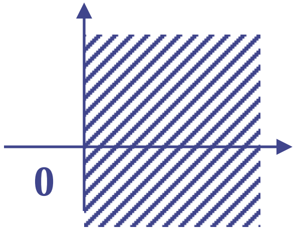
解： 因为单位阶跃信号**u(t)**

$$L\{u(t)\}=\frac{1}{s};\ \mathrm{Re}\{s\}>0$$

由时域平移性质得：

$$L\{u(t-1)\}=L\{u(t)\}\cdot e^{-s}=\frac{1}{s}\cdot e^{-s};\ \mathrm{Re}\{s\}>0$$

ROC示意图



双边拉普拉斯变换性质（3）

（3）S域平移性质

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$$

$$L\{x(t)\} = X(s); ROC = R \quad \Rightarrow \quad L\{x(t)\cdot e^{at}\} = X(s-a); ROC = R + \mathrm{Re}\{a\}$$

即，函数**x(t)**乘以**e^at**的**ROC**是**X(s)**的**ROC**在 **s** 域内平移**Re{a}**。

ROC：设**p**为**X(s)**的极点 ⇒ **X(s-a)**的极点为 **p+a(s-a=p)**

（**ROC**与**X(s)**的极点的实部有关）

例6-8 求 $e^{-at}\sin\omega t u(t)$, $e^{-at}\cos\omega t u(t)$ 的**Laplace**变换

解：$\because L\{\sin\omega_0 t\cdot u(t)\} = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}; \mathrm{Re}\{s\}>0$ $\quad L\{\cos\omega_0 t\cdot u(t)\} = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}; \mathrm{Re}\{s\}>0$

$$\therefore L\{e^{-at}\sin\omega t u(t)\} = L\{\sin\omega t u(t)\}\Big|_{s=s+a} = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}; \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$\therefore L\{e^{-at}\cos\omega t u(t)\} = L\{\cos\omega t u(t)\}\Big|_{s=s+a} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}; \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

双边拉普拉斯变换性质（4）

（4）尺度变换特性

$$x(at) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a}) \qquad \frac{1}{|a|} x(\frac{t}{a}) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(ja\omega)$$

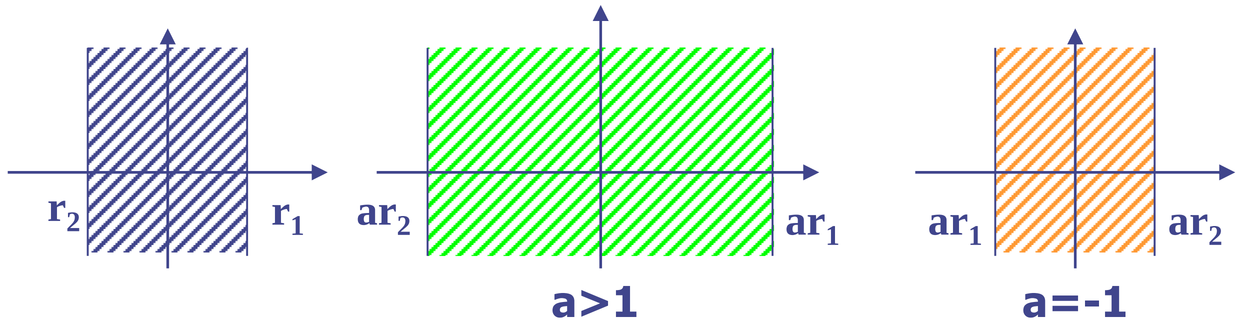
$$L\{x(t)\} = X(s); ROC = R \Rightarrow L\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a}); ROC = R_1 = R \cdot a$$

注：当**a>1**时，**X(s)**的**ROC**要扩大**a**的倍数；

当**a**＜**0**时，**ROC**要受到一个反褶＋尺寸变换；

（时间反转 ⇒ **ROC**的反转）

ROC示意图



双边拉普拉斯变换性质（5）

（5）时域微分

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

推广

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(j\omega)$$

$$L\{x(t)\} = X(s); ROC = R$$

$$L\{\frac{dx}{dt}\} = sX(s); ROC = R_1 包含 R$$

证明思路：对**Laplace**反变换式进行微分

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Laplace反变换

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st}ds$$

双边拉普拉斯变换性质（5-2）

ROC:

$$L\{\frac{dx}{dt}\} = sX(s); ROC = R_1 包含 R$$

若X(s)中无s=0的极点，则 R_1=R；

若X(s)中有s=0的一阶极点，则sX(s)中无s=0的极点，可能 $R_1 \supseteq R$ ；

若X(s)中有s=0的2阶及以上极点，则 R_1=R。

例6-9-1

$$x(t) = e^{-at}u(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s+a};\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{s}{s+a};\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

例6-9-2

$$u(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s};\ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} s \cdot \frac{1}{s} = 1;\ ROC为整个s平面$$

例6-9-3

$$x(t) = tu(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s^2}; \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) + t\delta(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} s \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s};\ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

双边拉普拉斯变换性质（6）

（6）s域微分

$$tx(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$L\{x(t)\} = X(s); ROC = R$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{dX(s)}{ds}; ROC = R$$

证明思路：对**Laplace**变换式进行微分

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

例6-10 求 $x(t) = te^{-at}u(t)$ 的**Laplace**变换。

解：

$$e^{-at}u(t) \overset{LT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s+a};\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$L\{te^{-at}u(t)\} = -\frac{d\{\frac{1}{s+a}\}}{ds} = \frac{1}{(s+a)^2};\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

....

更一般地

$$L\{\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(s+a)^n}; \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

双边拉普拉斯变换性质（7）

（7）时域卷积性质

$$x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)$$

$$L\{x_1(t)\}=X_1(s);ROC=R_1$$

$$L\{x_2(t)\}=X_2(s);ROC=R_2$$

$$L\{x_1(t)*x_2(t)\}=X_1(s)\cdot X_2(s);$$

ROC包含$R_1\cap R_2$

交集

1）若无零极点相消 $\mathrm{ROC}=\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2$

2）若发生零极点相消，**ROC**可能扩大，可能大于 $\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2$

➢ 时域卷积性质将卷积运算转化为**s**域的乘积运算，在**LTI**系统分析中非常重要。

双边拉普拉斯变换性质（8）

（8）时域积分性质

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

$$L\{x(t)\}=X(s);ROC=R$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}X(s);ROC包含\mathrm{R}\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$$

1）若无零极点相消 $\mathrm{ROC}=\mathrm{R}\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$

2）若发生零极点相消，ROC可能扩大，可能大于 $\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2$

例6-11 求 $x(t)*u(t)$ **的Laplace变换。** 由时域卷积性质

解： $\because u(t)\overset{LT}{\Leftrightarrow}\frac{1}{s};\ \mathrm{Re}\{s\}>0$ $\Rightarrow$ $x(t)*u(t)\overset{LT}{\Leftrightarrow}\frac{1}{s}X(s);ROC包含R\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)*u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{LT}{\Leftrightarrow}\frac{1}{s}X(s);ROC包含R\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$$

由时域积分性质

双边拉普拉斯变换性质（9）

（9）初值和终值定理

即x(t)当t→∞时的值

$x(0^+)$—即x(t)当t从正值方向趋于0时的值

定理限制条件：$\begin{cases} t<0, x(t)=0 \\ t=0, x(t)\text{不包含冲激或者高阶奇异函数} \end{cases}$

初值定理：$x(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$; 注意条件，要保证有确切的初值

终值定理：$x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=\lim\limits_{s\to 0} sX(s)$; 条件是$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$存在

$\Leftrightarrow X(s)$的极点均在s平面的左半平面（或原点处有1阶极点）

例6-12

$$X(s)=\frac{a_1}{s-s_1}+\frac{a_2}{s-s_2}+\cdots \overset{L^{-1}}{\Leftrightarrow} x(t)=a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+\cdots$$

$$x(\infty)\text{存在} \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} e^{s_it}\text{存在} \Leftrightarrow s_i\le 0$$

双边拉普拉斯变换性质（9-2）

例 $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}(\cos 3t)u(t)$ $x(0^+)=2$ 验证初值与终值定理

解： 由：

$$x(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)};\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

由初值定理与终值定理

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}=2$$

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}=0$$

双边拉普拉斯变换性质（9-2）

例

$$X(s)=\frac{1}{s(s-2)}$$

验证终值定理

解：

$$x(\infty)=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to\infty}sX(s)=\lim_{s\to\infty}s\frac{1}{s(s-2)}=-\frac{1}{2}$$

$$X(s)\overset{LT}{\longleftrightarrow}x(t)=\mathrm{L}^{-1}[\frac{1}{2}(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s})]=\frac{1}{2}[e^{2t}-1]u(t)$$

发散，终值定理不成立

$L\{x(t)\}=X(s);ROC=R$

双边拉普拉斯变换的性质（总结）

（1）线性 $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\xleftrightarrow{LT}a_1X_1(s)+a_2X_2(s);ROC$至少包含$\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2$

（2）时域平移性质 $x(t-t_0)\xleftrightarrow{LT}e^{-st_0}X(s),ROC=R$

（3）S域平移性质 $L\{x(t)\cdot e^{at}\}=X(s-a);ROC=R+\mathrm{Re}\{a\}$

（4）尺度变换特性 $L\{x(at)\}=\dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{s}{a});ROC=R_1=R\cdot a$

（5）时域微分 $L\{\dfrac{dx}{dt}\}=sX(s);ROC=R_1$包含$R$

（6）s域微分 $-tx(t)\xleftrightarrow{LT}\dfrac{dX(s)}{ds};ROC=R$

（7）时域卷积性质 $L\{x_1(t)*x_2(t)\}=X_1(s)\cdot X_2(s);ROC$包含$R_1\cap\mathrm{R}_2$

（8）时域积分性质 $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\xleftrightarrow{LT}\dfrac{1}{s}X(s);ROC$包含$\mathrm{R}\cap\{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$

主要内容

- 拉普拉斯变换
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 双边拉普拉斯变换的性质
- 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
  - 周期信号的Laplace变换
  - 抽样信号的Laplace变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换
- LTI系统的复频域分析

周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换

——周期信号的拉普拉斯变换(1)

前提：仅考虑在 **t≥0** 时存在的单边周期信号**x(t)**，即当**t<0**时，**x(t)=0**，这样的周期信号：**x(t)=x(t-T), t>0**

- 令第一个周期的函数为**x_1(t)**，且 $x_1(t)\xleftrightarrow{LT}X_1(s)$;有限信号$ROC:\mathrm{R}$

  求周期函数的X(s)

- **x(t)**可以看成是**x_1(t)**的移位加和，**X(t)=x_1(t)+ x_1(t-T)+ x_1(t-2T)+**……，可利用**L**变换的时移与线性性质，直接由**X_1(s)**得到**X(s),**或由定义求

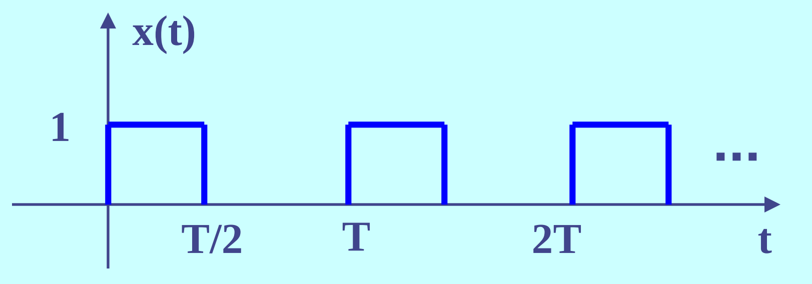
$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \int_0^T x(t)e^{-st}dt + \int_T^{2T} x(t)e^{-st}dt + \cdots \\
&= X_1(s) + X_1(s)e^{-sT} + X_1(s)e^{-2sT} + \cdots + X_1(s)e^{-nsT} + \cdots \\
&= X_1(s)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = X_1(s)\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1};\mathrm{Re}\{s\}>0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(t-nT) \xleftrightarrow{LT} X_1(s)\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1};\mathrm{Re}\{s\}>0
$$

周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换

——周期信号的拉普拉斯变换(2)

例　求如图示单边周期脉冲的Laplace变换.



解：　**X(t)**可以看成是单个脉冲

$$x_1(t)=u(t)-u(t-\frac{T}{2})$$

以**T**为周期进行周期性延拓的结果。

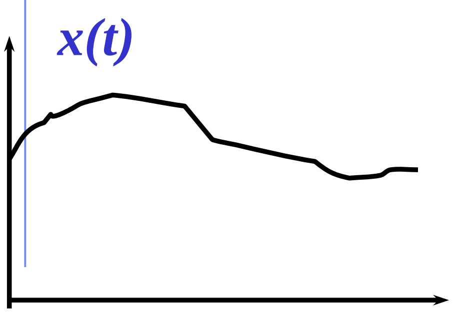
$$X_1(s)=L[u(t)-u(t-\frac{T}{2})]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-\frac{T}{2}s}=\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{s}$$

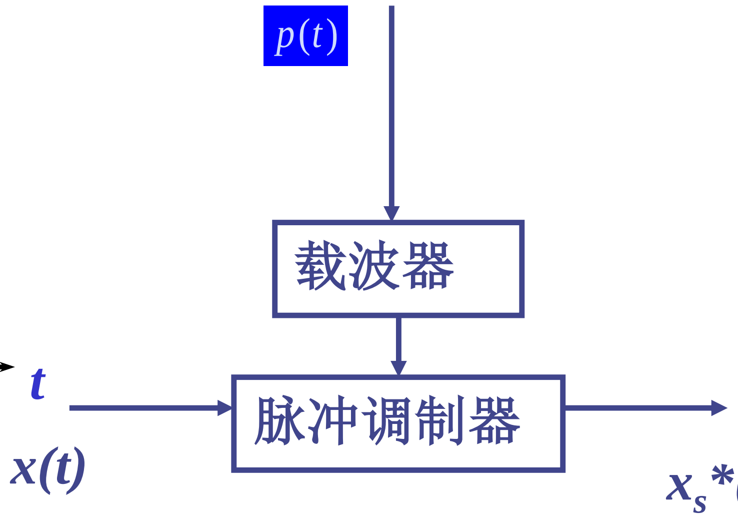
$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_1(t-nT)\overset{LT}{\longleftrightarrow}X_1(s)\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

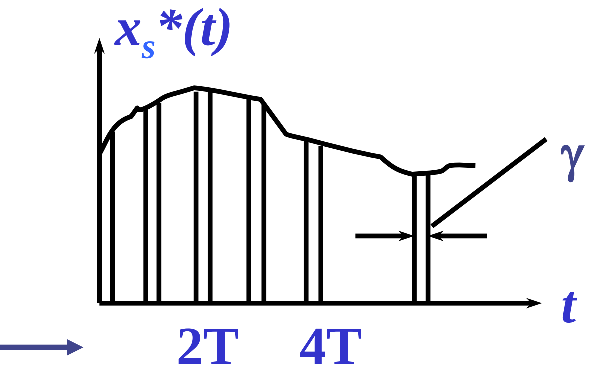
$$X(s)=\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{s}\cdot\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}=\frac{1}{s(1+e^{-\frac{T}{2}s})};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

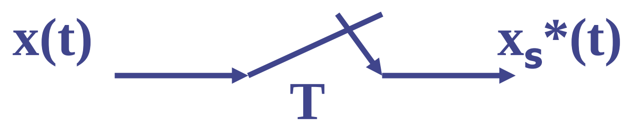
周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
——抽样信号的拉普拉斯变换(1)

前提：仅考虑在 $t\geq 0$ 时存在的单边抽样信号$x_s(t)$(当$t<0$时，$x_s(t)=0$)，

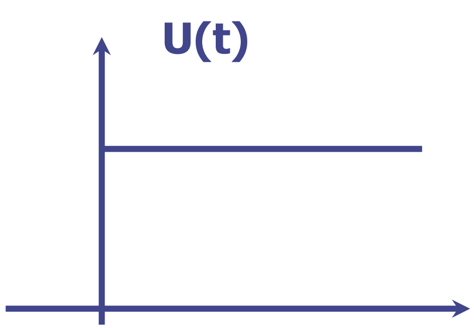


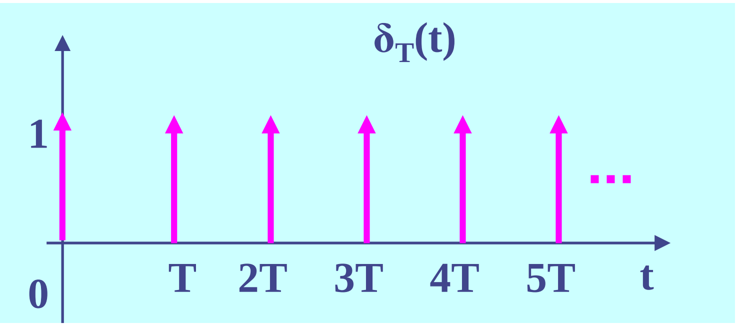






$$x_s^*(t) = p(t)x(t)$$





LT ??

周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
——抽样信号的拉普拉斯变换(2)

1) 考虑周期重复的单边冲激串 $x_1(t)=\delta_T(t)\cdot u(t)$ 的**Laplace**变换

$$x_1(t)=\delta_T(t)u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

方法一：由定义求

$$L\{\delta_T(t)u(t)\}=\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nsT}=\frac{1}{1-e^{-sT}};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

方法二：由周期信号性质求

$$L\{\delta_T(t)u(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nsT}\cdot\underline{L\{\delta(t)\}}=\frac{1}{1-e^{-sT}};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

第一个周期的**L**变换式为**1**

周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
——抽样信号的拉普拉斯变换(3)

2) 考虑抽样信号$x_s(t)$的Laplace变换

$$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_s(s)=L\{x_s(t)\}=\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-nsT}\overset{令z=e^{sT}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\boxed{z^{-n}}$$

Z的幂级数形式

例6-16 求指数抽样序列的Laplace变换.

解：$x_s(t)=e^{-at}\delta_T(t)u(t)$

$$X_s(s)=L\{x_s(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-aTn}e^{-nsT}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(a+s)nT}=\frac{1}{1-e^{-(a+s)T}}=\frac{1}{1-e^{-aT}\boxed{z^{-1}}}$$

主要内容

- 拉普拉斯变换
- 常用信号的拉普拉斯变换
- 双边拉普拉斯变换的性质
- 周期信号与抽样信号的拉普拉斯变换
- 拉普拉斯反变换
- 单边拉普拉斯变换

拉普拉斯反变换(1)

- 拉普拉斯反变换：X(s)→x(t)
  - 定义法：

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}X(\sigma_0+j\omega)e^{(\sigma_0+j\omega)t}d(\sigma_0+j\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{\sigma_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}X(\sigma_0+j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\quad \sigma_0\in ROC$$

有复数积分，求解复杂，一般不采用

√ 部分分式法

拉普拉斯反变换(2)

➢ 思路：许多信号**x(t)**的**Laplace**变换式可表示成**s**的有理函数

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n},(n>m)$$

因为**L**变换是线性变换，可将**X(s)**分解为低阶项**(**部分分式）的线性组合，其每一低阶项的**Laplace**变换由**L**变换性质或直接查表求反变换后再迭加得到**x(t).** 如以前提到的零极点形式即为一阶项的组合。

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$A=\frac{b_m}{a_n}\text{——常数}$$

所以要熟练掌握基本性质以及基本信号的**L**变换。下面分几种情况讨论。

拉普拉斯反变换(3)

情况1）X(s)的分母多项式**D(s)**有 **n** 个互异实根，即

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}$$

其中：$k_i=X(s)(s-p_i)\big|_{s=p_i}$

且 $\dfrac{k_i}{s-p_i}$ 的收敛域应包括**X(s)**的**ROC** （**X(s)**无零极点相消）

两种可能：**Re{s}>p**$_i$**(**右边信号**)**

Re{s}<p$_i$**(**左边信号**)**

由**ROC**性质，**X(s)**的每一项**ROC**都应包括**X(s)**的**ROC**，可以向左或向右或向两边延伸，直到被一个极点界定或至无穷远

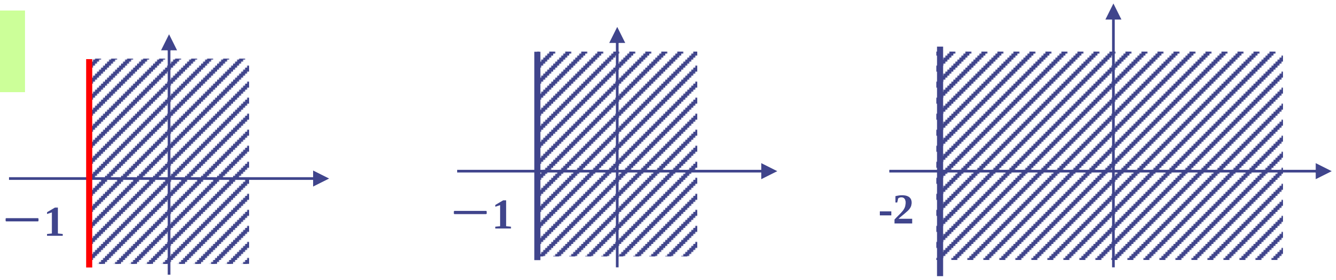
拉普拉斯反变换(4)

例 求 $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)};\mathrm{Re}\{s\}>-1$ 的Laplace反变换.

解： 由X(s)的ROC知原信号为右边信号

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2};\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

ROC示意图



X(s)的 ROC

1/(s+1)的 ROC

1/(s+2)的 ROC

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)};\mathrm{Re}\{s\}>-1\overset{L^{-1}}{\Leftrightarrow}x(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

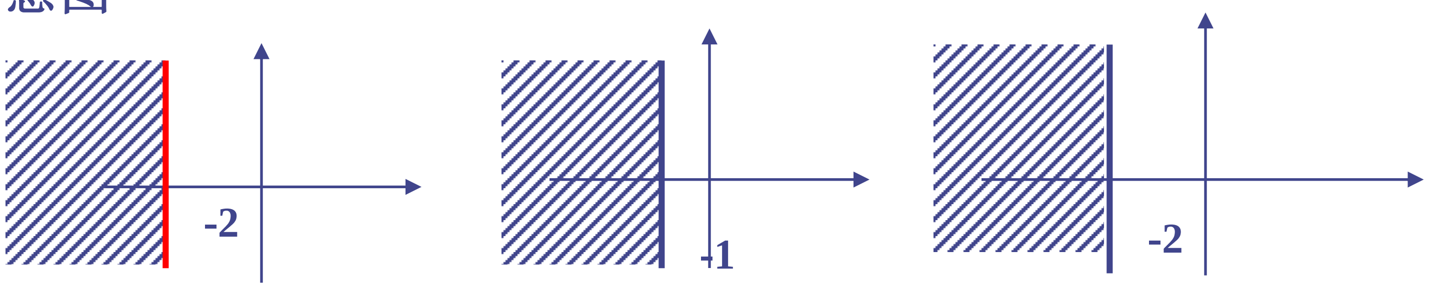
拉普拉斯反变换(5)

例　　　求 $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)};\mathrm{Re}\{s\}<-2$ 的Laplace反变换.

解：　由X(s)的ROC知原信号为左边信号

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2};\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

ROC示意图



X(s)的 ROC　　**1/(s+1)的 ROC**　　**1/(s+2)的 ROC**

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)};\mathrm{Re}\{s\}<-2 \overset{L^{-1}T}{\Leftrightarrow} x(t)=(-e^{-t}+e^{-2t})u(-t)$$

拉普拉斯反变换(6)

情况2）X(s)的分母多项式D(s)包含有重根，即

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)};\quad 在s=p_1处有k重根$$

$$=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\cdots+\frac{k_{1k}}{s-p_1}+\frac{B(s)}{\boxed{D_1(s)}}$$

与重根无关，按前无重根方法分解

如何求重根项的系数？

$$k_{11}=(s-p_1)^k X(s)\Big|_{s=p_1}$$

令：

$$X_1(s)=(s-p_1)^K X(s)=k_{11}+k_{12}(s-p_1)+k_{13}(s-p_1)^2+\ldots+k_{1K}(s-p_1)^{K-1}+(s-p_1)^K\frac{B(s)}{D_1(s)}$$

再对$X_1(s)$求导

$$k_{12}=\frac{dX_1(s)}{ds}\Big|_{s=p_1}$$

$$k_{13}=\frac{1}{2}\frac{d^2X_1(s)}{ds^2}\Big|_{s=p_1},\cdots,k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{(i-1)}X_1(s)}{ds^{i-1}}\Big|_{s=p_1}$$

$$i=1,2,\cdots,k$$

$$L\{\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\}=\frac{1}{(s+a)^n};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

拉普拉斯反变换(7)

例　　　求 $X(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3};\mathrm{Re}\{s\}>0$ 的Laplace反变换.

解：　由**X(s)**的**ROC**知原信号为右边信号

$$X(s)=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{s+1}+\frac{k_2}{s};\mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$k_2=sX(s)\big|_{s=0}=-2 \qquad k_{11}=(s+1)^3X(s)\big|_{s=-1}=3$$

$$k_{12}=\frac{d(s+1)^3X(s)}{ds}\bigg|_{s=-1}=\frac{d(\frac{s-2}{s})}{ds}\bigg|_{s=-1}=2$$

$$L\{\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\}=\frac{1}{(s+a)^n};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$k_{13}=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2(s+1)^3X(s)}{ds^2}\bigg|_{s=-1}=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2(\frac{s-2}{s})}{ds^2}\bigg|_{s=-1}=2$$

$$X(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3};\mathrm{Re}\{s\}>0\overset{L^{-1}}{\Leftrightarrow}x(t)=(\frac{3}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}+2e^{-t}-2)\cdot u(t)$$

拉普拉斯反变换(8)

情况3）X(s)的分母多项式D(s)包含有共轭复根，即

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{\boxed{(s^2+as+b)}D_1(s)}=\frac{N(s)}{\boxed{D_1(s)}(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta)}$$

与复根无关

方法一：

按部分分式的方法分解并求每项的系数，但因有复数，不甚方便

方法二：

将产生共轭复数的二次项配成相应的余弦或正弦的拉氏变换式，再求反变换，这种方法更为方便。

$$\because L\{e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0{}^2};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$s^2+as+b=(s+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$$

$$L\{e^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\cdot u(t)\}=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

拉普拉斯反变换(9)

例　　求 $X(s)=\dfrac{s+3}{s^3+3s^2+7s+5};\mathrm{Re}\{s\}>-1$ 的Laplace反变换.

解： 由X(s)的ROC,知s=-1是其一个极点

$$X(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)}=\frac{s+3}{(s+1)[(s+1)^2+4]}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2s+k_3}{(s+1)^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{-1}{2}\cdot s+\frac{1}{2}}{(s+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$\Downarrow$ L^{-1}

$$x(t)=\frac{1}{2}[e^{-t}-e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin 2t]\cdot u(t)$$

$$\because L\{e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0{}^2};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$L\{e^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\cdot u(t)\}=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2};\mathrm{Re}\{s\}>-a$$

拉普拉斯反变换(10)

总结：由X(S)→x(t)

（**1**）用部分分式法将**X(S)**展开成低阶项（实根、重根、复根）的迭加

（**2**）确定各低阶项变换式的收敛域

——由此可知时域信号的特性

（**3**）确定各低阶项变换式的反变换

若分子次数**m**≥分母次数**n**，先做长除法将分子次数降低，再用上法。

- 单边拉普拉斯变换
  - 定义
  - 性质

单边拉普拉斯变换

—— 定义(1)

- 实际问题中常遇到的是因果信号：**t<0**时：**x(t)=0，** 定义：

$$X(s)=\int_{\boxed{0^-}}^{\infty}x(t)e^{-st}dt \Rightarrow \tilde{X}(s)\overset{\Delta}{=}\int_{\boxed{0}}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

考虑在原点有冲激函数及其各阶导数

记：$x(t)\overset{uL}{\longleftrightarrow}\tilde{X}(s)$

- 双边**Laplace**变换与单边**Laplace**变换的异同：

1）积分下限不同；

2）对于**t<0**不同而**t≥0**相同的信号 **x(t)**，双边**L**变换不同，单边相同；

3）对于**t<0**为**0**的信号，双边和单边的**L**变换相同；

4）单边**L**变换的**ROC**一定在右半平面。

单边拉普拉斯变换

—— 定义(2)

例6-13 求 $x(t)=e^{-a(t+1)}u(t+1)$ 的双边与单边Laplace变换.

解： 双边变换：

$$\because\ x(t)=e^{-at}u(t)\overset{LT}{\Leftrightarrow}\frac{1}{s+a};\ \operatorname{Re}\{s\}>-a$$

由时移性质可得：

$$L\{e^{-a(t+1)}u(t+1)\overset{LT}{\Leftrightarrow}\frac{\boxed{e^{s}}}{s+a};\ \operatorname{Re}\{s\}>-a$$

!不同！

单边变换：

$$uL\{e^{-a(t+1)}u(t+1)\}=\int_0^{\infty}e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-a(t+1)}e^{-st}dt=e^{-a}\int_0^{\infty}e^{-(s+a)t}dt=\frac{\boxed{e^{-a}}}{s+a};\ \operatorname{Re}\{s\}>-a$$

可见，双边变换与单边变换不同。原因是当**t<0**时信号不为**0**

单边拉普拉斯变换

—— 定义(3)

- 单边拉普拉斯变换具有 $\sigma > \sigma_0$ 的收敛域。由于单边拉普拉斯变换的收敛域单值，所以在研究信号的单边拉普拉斯变换时，把它的收敛域视为变换式已包含了，一般不再另外强调。
- 信号的单边拉普拉斯变换可看成信号x(t)u(t)的双边拉普拉斯变换，可以用下式求出x(t)u(t)：

$$x(t)u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st}dt$$

式中的X(s)为单边拉普拉斯，称上式为单边拉普拉斯反变换.

- 单边拉普拉斯变换除时域微分和时域积分外，绝大部分性质与双边拉普拉斯变换相同，不再象双边拉普拉斯变换那样去强调收敛域。

单边拉普拉斯变换

—— 定义(3)

例6-14　求 $x(t)=\delta(t)+2\delta'(t)+e^{t}u(t)$ **的双边与单边Laplace变换.**

解： 由题知，该信号在原点包含奇异函数。因为**t<0**时信号为**0**，故双边**Laplace**变换与单边**Laplace**变换是一样的。

记： $x(t)\overset{uL}{\longleftrightarrow}\tilde{X}(s)=1+2s+\dfrac{1}{s-1}=\dfrac{s(2s-1)}{s-1};\mathrm{Re}(s)>1$

例6-15　求 $\tilde{X}(s)=\dfrac{s^2-3}{s+2}$ **的Laplace反变换.**

解： 单边**L**变换的**ROC**为最右边极点的右侧：**Re{s}>-2**

$$\tilde{X}(s)=\frac{s^2-3}{s+2}=A+Bs+\frac{C}{s+2}=-2+s+\frac{1}{s+2}$$

$$\therefore x(t)=-2\delta(t)+\frac{d\delta(t)}{dt}+e^{-2t}u(t);t>0^-$$

单边拉普拉斯变换——性质(1)

➢ 单边**Laplace**性质大部分与双边变换相同，主要区别在时域微分与时域积分性质——对分析非零初始条件的系统十分重要。

（1）时域微分

注意：不同点！

X(t)在0的取值

双边 $L\{x(t)\} = X(s)$ ⟹ $L\{\frac{dx}{dt}\} = sX(s)$

单边 $uL\{x(t)\} = \tilde{X}(s)$ ⟹ $uL\{\frac{dx(t)}{dt}\} = s\tilde{X}(s) \boxed{- x(0)}$

注：这里的**0**均指为**0⁻**

证明：由定义求**L**变换，用到分部积分法

$$uL\{\frac{dx(t)}{dt}\} = \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = s\tilde{X}(s) - x(0)$$

类似地，二阶微分：

$$uL\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\} = s^2\tilde{X}(s) - sx(0) - x'(0)$$

推广到**n** 阶导数

推广 ⟹

$$uL\{\frac{d^nx(t)}{dt^n}\} = s^n\tilde{X}(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

单边拉普拉斯变换——性质(2)

注：x(t)积分式在t=0的取值

（2）时域积分

双边 $L\{x(t)\}=X(s)$ $\Rightarrow$ $L\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\}=\frac{1}{s}X(s)$

单边 $uL\{x(t)\}=\tilde{X}(s)$ $\Rightarrow$ $uL\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\}=\frac{1}{s}\tilde{X}(s)+\frac{\boxed{\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau}}{s}$

证明：

$$uL\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\}=uL\{\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau\}=uL\{\boxed{x^{-1}(0)}+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau\}$$

常量

$$=\frac{1}{s}x^{-1}(0)+uL[\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau]$$

分部积分

$$uL\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\}=\frac{1}{s}x^{-1}(0)+\frac{1}{s}\tilde{X}(s)$$

时域微分与时域积分引入了信号的起始值，这给分析初始状态不为0的系统带来极大的方便——单边Laplace变换的最大优点！

单边拉普拉斯变换

——性质(3)

（3）时域平移性质

双边 $L\{x(t)\}=X(s)$ ⇒ $L\{x(t-t_0)\}=e^{-st_0}X(s)$

单边 $uL\{x(t)\}=\tilde{X}(s)$ ⇒ $uL\{x(t-t_0)\}=e^{-st_0}\tilde{X}(s)+\int_0^{t_0}x(t-t_0)e^{-st}dt$

证明：

$$uL\{x(t-t_0)\}=\int_0^{+\infty}x(t-t_0)e^{-st}dt \overset{令\tau=t-t_0}{=} \int_{-t_0}^{+\infty}x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau$$

$$=\int_{-t_0}^{0}x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau+\int_0^{+\infty}x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau$$

$$=\int_0^{t_0}x(t-t_0)e^{-st}dt+e^{-st_0}\tilde{X}(s)$$

当x(t)是因果信号且$t_0>0$时，单边拉氏变换的时延特性与双边拉氏变换一致

单边拉普拉斯变换
——性质(4)

（4）时域卷积性质—分析LTI系统非常有用的性质

若信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是单边信号，有当 $t<0$ 时，$x_1(t)=x_2(t)=0$，则有

$$uL\{x_1(t)\} = \tilde{X}_1(s)$$

$$uL\{x_2(t)\} = \tilde{X}_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad uL\{x_1(t) * x_2(t)\} = \tilde{X}_1(s) \cdot \tilde{X}_2(s)$$

- 注意前提条件，若有一个不满足，即上式不一定成立。

- 单边Laplace变换的其他性质与双边变换相同，不再一一列出。