线性规划问题的性质

定理1 若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。

定理2 线性规划的可行域顶点与基可行解对应。

定理3 若线性规划问题有最优解，一定存在一个最优解是基可行解。

定理1

定理1 若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。

证明思路：

1。明确可行域的范围，即可行解的两个约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b} \qquad x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n$$

2．根据凸集的定义，证明任意两点连线上的点 $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}_1+(1-a)\boldsymbol{x}_2$，都满足这两个约束条件。

引理：基可行解的性质

引理1：若rank$A$=m，则可行解$\boldsymbol{x}$为基可行解

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}$的正分量所对应的系数列向量线性独立。

证明思路：

1） $\Rightarrow$必要性证明：基可行解的定义

2）$\Leftarrow$充分性证明：

$\boldsymbol{x}$是基可行解$\Leftarrow$ $\boldsymbol{x}$是基解$\Leftarrow$ 构造$\boldsymbol{x}$对应的基

假设$\boldsymbol{x}$正分量个数为k，可知$k\leq m$；

如果k=m，可直接视正分量对应的列向量为基；

如果k<m，总可补充m-k个列向量构成基。

定理2：可行域顶点的代数表达

定理2：x是可行解，则x是可行域顶点$\Leftrightarrow$ x是基可行解。

证明思路：

考察逆否命题：　x不是可行域顶点$\Leftrightarrow$ x不是基可行解

1）　x不是基可行解$\Rightarrow$ x不是可行域顶点

x不是基可行解

$\Rightarrow$ x正分量对应的系数列向量线性相关

$\Downarrow$　构造两个可行点

$\Rightarrow$ x为两可行点的凸组合

$\Rightarrow$ x不是顶点

可行点的构造

设可行解 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0]^T$ 不是基可行解

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r}\delta_i \boldsymbol{p}_i = 0 \quad \delta_i\text{不全为}0$$

可构造两个可行点：

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=[(x_1+\mu\delta_1),\cdots,(x_r+\mu\delta_r),0,\cdots,0]^T$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=[(x_1-\mu\delta_1),\cdots,(x_r-\mu\delta_r),0,\cdots,0]^T$$

其中μ满足 $\min\limits_i(x_i\pm\mu\delta_i)\geq 0$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(1)}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

2） 可行解$\boldsymbol{x}$不是可行域顶点 $\Rightarrow \boldsymbol{x}$不是基可行解

设 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0]^T$不是可行域顶点

$\Rightarrow \boldsymbol{x}$为两可行点的凸组合，设$\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{y}+(1-a)\boldsymbol{z}$，有

$$\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_r,0,\cdots,0]^T \qquad \boldsymbol{z}=[z_1,\cdots,z_r,0,\cdots,0]^T$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{p}_j=\sum_{j=1}^{r} y_j\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b} \qquad \sum_{j=1}^{n} z_j\boldsymbol{p}_j=\sum_{j=1}^{r} z_j\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{r}(y_j-z_j)\boldsymbol{p}_j=0$$

y_j- z_j不全为0

正分量对应的列向量线性相关

$\Rightarrow \boldsymbol{x}$不是基可行解

定理3

若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。

证明思路：

若最优值$\boldsymbol{x}^*$不是顶点，则存在两个可行解

$$(\boldsymbol{x}^* \pm \mu\boldsymbol{\delta}) \geq 0$$

因为$\boldsymbol{cx}^*$最大，有

$$\boldsymbol{cx}^* \geq \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}^* \pm \mu\boldsymbol{\delta}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c}\mu\boldsymbol{\delta} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x}^* \pm \mu\boldsymbol{\delta}$ 均为最优解，不断扩展，必达顶点。