离散信号的分析

主 讲 教 师： 齐 冬 莲

离散信号的Z域分析

三、Z变换的几何表示

- 在Z平面内分别用“O”和“×”标出X(z)的零点和极点的位置，并指出收敛域ROC，构成Z变换的几何表示
- 在极点处X(z)不收敛，因而收敛域内没有极点，而且收敛域的边界总是以极点为界

离散信号的Z域分析

四、Z变换的基本性质

- 线性和时移特性
- Z 域尺度变换
- Z 域微分
- 时间翻转
- 卷积和乘积
- 共轭
- 初值定理和终值定理

离散信号的Z域分析

例7：设 $x(n)=a^n u(n), y(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$

求x(n)*y(n)

$$X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

时移性

线性

$$\mathcal{Z}[ab^{n-1}u(n-1)]=a\mathcal{Z}[b^{n-1}u(n-1)]=\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}} \quad |z|>|b|$$

$$Y(z)=\mathcal{Z}[y(n)]=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}}=\frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}[x(n)*y(n)]=X(z)Y(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$$x(n)*y(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)Y(z)\right]=b^n u(n)$$

离散信号的Z域分析

五、Z反变换

（1）幂级数展开法

（2）部分分式法

（3）留数法（略）

离散信号的Z域分析

（1）幂级数展开法

- **例 9** 已知 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ ，收敛域为 $|z|>1$ ，

应用幂级数展开方法，求其Z反变换。

- 解：根据其收敛域是 $|z|>1$，必然是右边序列，此时X(z)为z的降幂级数，将X(z)的分子分母多项式按z降幂排列进行长除

离散信号的Z域分析

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}$$

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
\hline
z^2-2z+1 \,\big) & z \\
 & z-2+z^{-1} \\
\hline
 & 2-z^{-1} \\
 & 2-4z^{-1}+2z^{-2} \\
\hline
 & 3z^{-1}-2z^{-2} \\
 & 3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3} \\
\hline
 & 4z^{-2}-3z^{-3}
\end{array}$$

$$X(z)=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}$$

$$\Rightarrow$$

$$x(n)=nu(n)$$

离散信号的Z域分析

（2）部分分式法

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

只有一阶极点

$$k\le r \quad A_0=\frac{b_0}{a_0}$$

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{A_mz}{z-p_m}$$

$$k>r \quad A_0=0$$

$$X(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{1-p_mz^{-1}}$$

离散信号的Z域分析

（2）部分分式法

例

$$X(z)=\frac{5z}{7z-3z^2-2}\qquad (\frac{1}{3}<|z|<2)\qquad x(n)=?$$

双边序列

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

右边序列

左边序列

$$x(n)=(\tfrac{1}{3})^n u(n)-2^n u(-n-1)$$

离散信号的Z域分析

（3）留数法

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\sum_{\mathrm{m}}[X(z)z^{n-1}\ \text{在C内极点的留数}]$$

$$=\sum_{\mathrm{m}}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

用留数求围线积分

一阶极点：

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=[(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

S 阶极点：

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}[X(z)z^{n-1}(z-z_m)^s]\right\}_{z=z_m}$$

离散信号的Z域分析

六、单边z变换

- 定义为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 单边Z变换和双边Z变换的差别在于，单边Z变换求和仅在n的非负值上进行，而不管n<0时x(n)是否为零

离散信号的Z域分析

单边z变换的性质

单边Z变换的绝大部分性质与双边Z变换对应的性质相同，

与双边z变换不同的性质有

- 时移定理
- 初值定理
- 终值定理

离散信号的Z域分析

1、时移定理

若x(n)是双边序列，其单边Z变换为X(z)，则序列左移后，它的单边Z变换为

$$\mathcal{Z}\left[x(n+m)u(n)\right]=z^{m}\left[X\left(z\right)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

若x(n)是双边序列，其单边Z变换为X(z)，则序列右移后，它的单边Z变换为

$$\mathcal{Z}\left[x(n-m)u(n)\right]=z^{-m}\left[X\left(z\right)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

离散信号的Z域分析

2、初值定理

- 对于因果序列x(n)，若其单边Z变换为X(z)，而且存在，则 $\lim_{z \to \infty} X(z)$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X\left(z\right)$$

离散信号的Z域分析

3、终值定理

对于因果序列x(n)，若其单边Z变换为X(z)，而且 $\lim\limits_{n \to \infty} x(n)$ 存在，则

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} [(z-1)X(z)]$$

作业与预习

- P188：
  - 习题18(1)(3)(5)、20、21
  - 习题27、28（MATLAB）
- 预 习：信号处理基础

谢谢大家