连续信号的分析

主 讲 教 师 ： 于 淼

目录

1 周期信号的频谱分析

2 非周期信号的频谱分析

3 傅里叶变换的性质

连续信号的频域分析

傅立叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1822年首次发表在《热的分析理论》
- 拉格朗日反对发表
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件

两个最主要的贡献

- 周期信号都可表示为谐波关系的正弦信号的加权和
- 非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示

连续信号的频域分析

一、*周期信号的频谱分析*

- 周期信号的傅立叶级数展开式
- 周期信号的频谱
- 周期信号的功率分配

连续信号的频域分析

1、周期信号的傅立叶级数展开式

（1）三角函数的傅立叶级数

周期为T_0的周期信号x(t)，如果满足<u>狄里赫利条件</u>，都可以分解成三角函数表达式：

周期：$T_0 = 2\pi / \omega_0$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

直流分量

基波分量 n =1

谐波分量 n>1

连续信号的频域分析

狄利赫利条件

- 在一个周期内只有有限个间断点
- 在一个周期内有有限个极值点
- 在一个周期内函数绝对可积，即

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|dt < \infty$$

- 通常周期信号都满足这些条件

连续信号的频域分析

（1）三角函数的傅立叶级数

直流系数

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt$$

余弦分量系数

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos n\omega_0 t dt$$

正弦分量系数

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

连续信号的频域分析

（2）傅立叶级数的三角形式

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

$$\begin{cases}A_0=a_0\\ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \varphi_n=-\arctan\dfrac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

$n=1,2,\cdots$

连续信号的频域分析

(3）傅立叶级数的指数形式

运算比较方便

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

复傅里叶系数

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

连续信号的频域分析

2、周期信号的频谱

（1）相关定义

- ***基波信号、谐波信号：*** 周期信号可以分解为一系列正弦型信号之和：

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

- 表明一个周期为T_0的信号，除直流分量外，包含有频率为原信号频率以及原信号频率的整数倍的一系列正弦型信号，分别将它们称为***基波信号***（n=1,也称为一次谐波信号），二次谐波信号（n=2）,以及三次、四次……***谐波信号***，它们的 ***振幅*** 分别为对应的A_n，相位为φ_n

连续信号的频域分析

2、周期信号的频谱

- ***频谱函数***: 指数形式的傅立叶级数表达式中复数量

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{2}A_n e^{j\varphi_n}$$

随频率 $n\omega_0$ 的分布称为信号的***频谱***，也称为周期信号的***频谱函数***

- ***幅度频谱、相位频谱***:

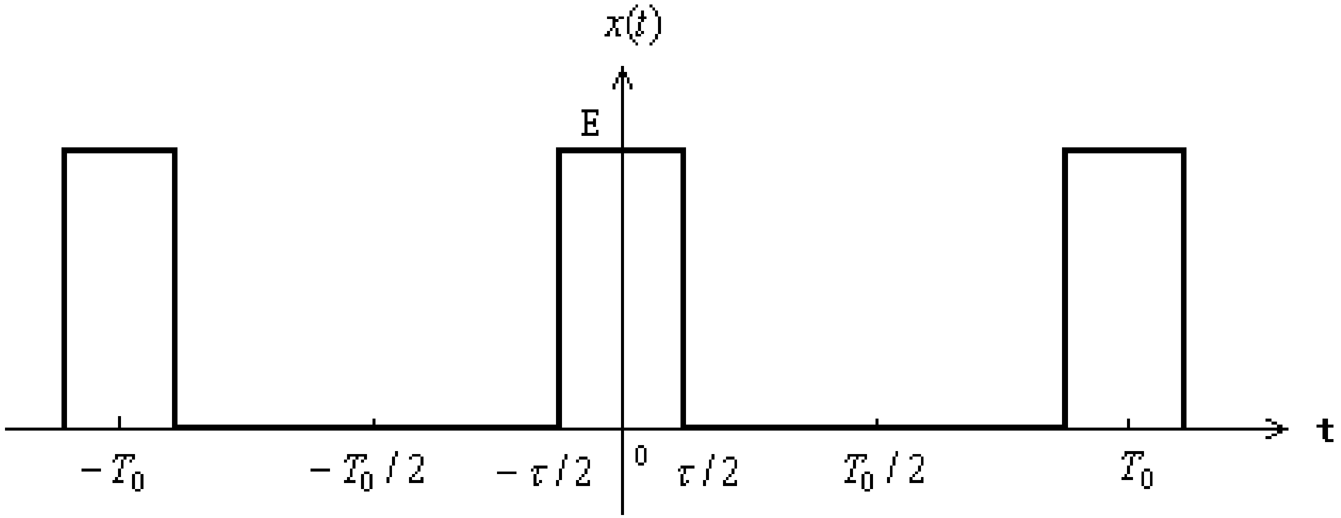
由于 $X(n\omega_0)$ 包含了幅度和相位的分布，通常把幅度 $|X(n\omega_0)|$ 随频率的分布称为幅度频谱，简称***幅频***，相位 φ_n 随频率的分布称为相位频谱，简称***相频***

- ***频谱图***：以频率为横坐标，各谐波分量幅度或相位为纵坐标，画出幅频和相频的变化规律，称为信号的***频谱图***

连续信号的频域分析

例 1：

- *求下图所示的周期矩形脉冲信号的复指数形式傅立叶级数表示式。*



连续信号的频域分析

解：如图所示的矩形脉冲信号在一个周期内可表示为

$$x(t)=\begin{cases}E & -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

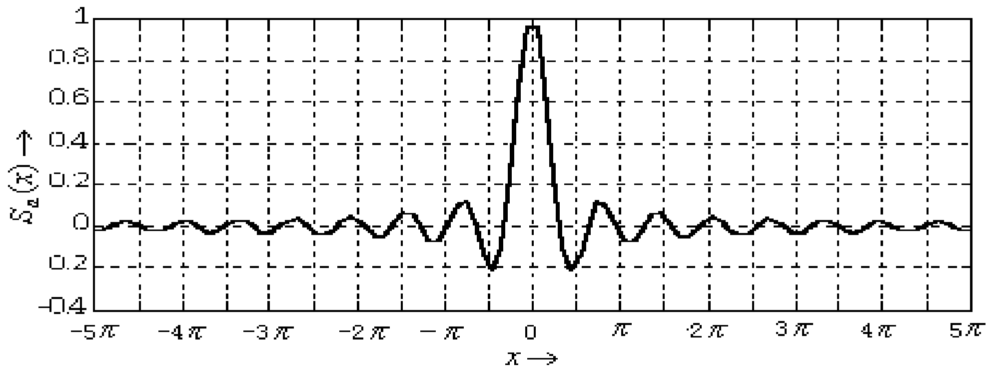
- 求复傅立叶系数

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ee^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{E}{T_0}\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{E\tau}{T_0}\frac{\sin\frac{1}{2}n\omega_0\tau}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}$$

连续信号的频域分析

- 出现 $\dfrac{\sin\ x}{x}$ 形式的函数，在信号理论中经常遇到，称为取样函数，记作Sa(x)。
- Sa(x)是偶函数，当 $x \to 0$ 时， Sa(x)=1为最大值，随着 $|x|$ 的增大而总趋势衰减， $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$ 为过零点，每2π起伏一次。



连续信号的频域分析

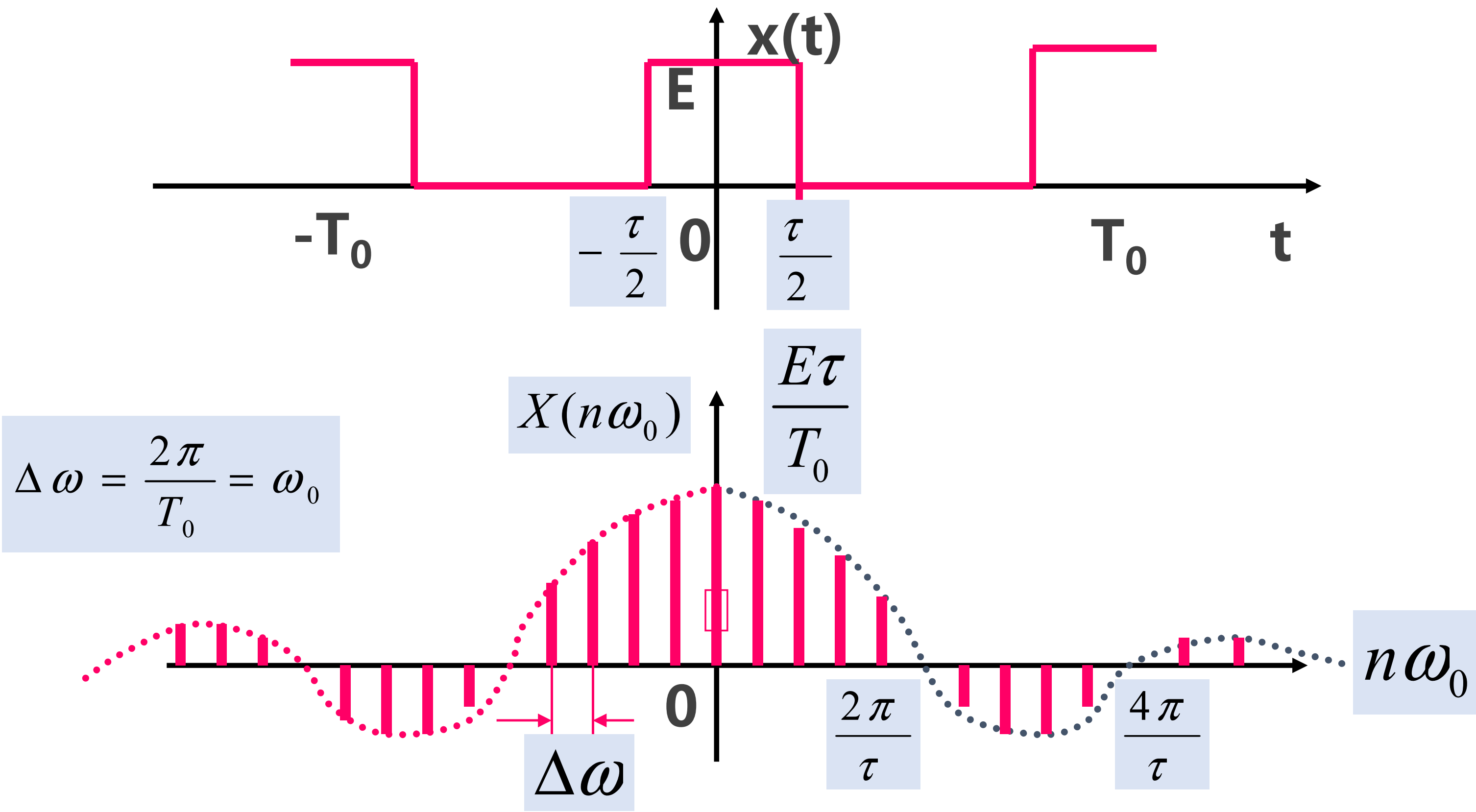
- 因此，有

$$X(n\omega_0) = \frac{E\tau}{T_0} Sa(\frac{n\omega_0\tau}{2})$$

- 周期矩形脉冲信号复指数形式傅立叶级数展开式为

$$x(t) = \frac{E\tau}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

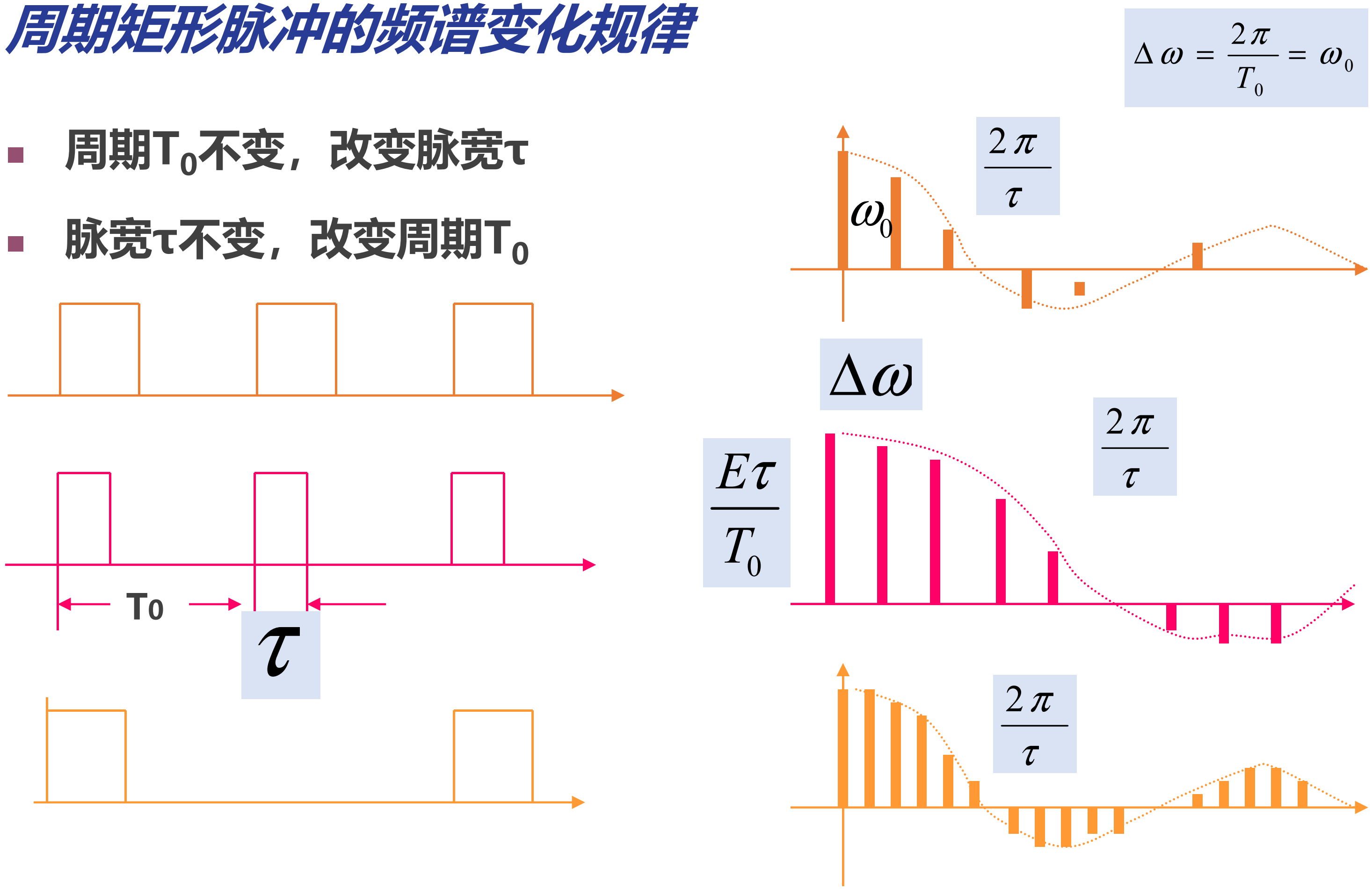
连续信号的频域分析


x(t)
E
-T0
0
T0
t
$-\frac{\tau}{2}$
$\frac{\tau}{2}$
$\frac{E\tau}{T_0}$
$X(n\omega_0)$
$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$
$\Delta\omega$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$n\omega_0$

连续信号的频域分析

周期矩形脉冲的频谱变化规律

- 周期T_0不变，改变脉宽τ
- 脉宽τ不变，改变周期T_0



连续信号的频域分析

周期矩形脉冲信号的频谱特点

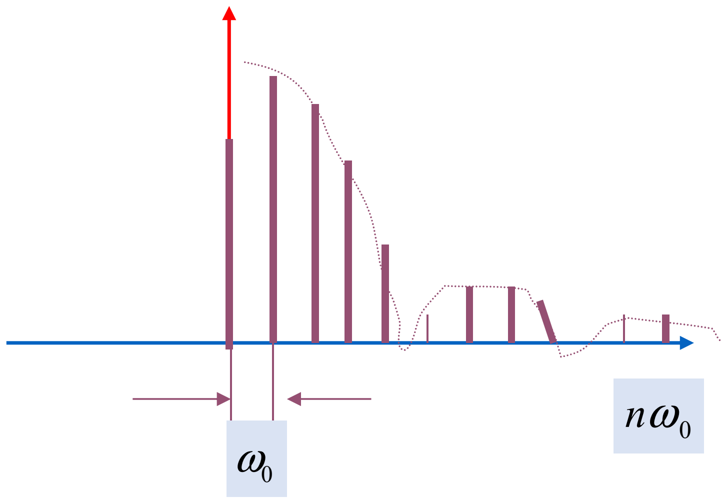
- ***离散性***：频谱是非周期性的离散的线状频谱，连接各谱线顶点的曲线 $Sa(\frac{n\pi\tau}{T_0})$ 为频谱的包络线，***过零点为*** $\omega=\frac{2n\pi}{\tau}$
- ***谐波性***：谱线以基波频率为间隔等距离分布，表明周期矩形脉冲信号只包含直流分量、基波分量和各次谐波分量。
- ***收敛性***：谱线幅度整体上具有减小的趋势。
- ***主要能量在第一过零点内***。***频带宽度为*** $\omega_b=\frac{2\pi}{\tau}$

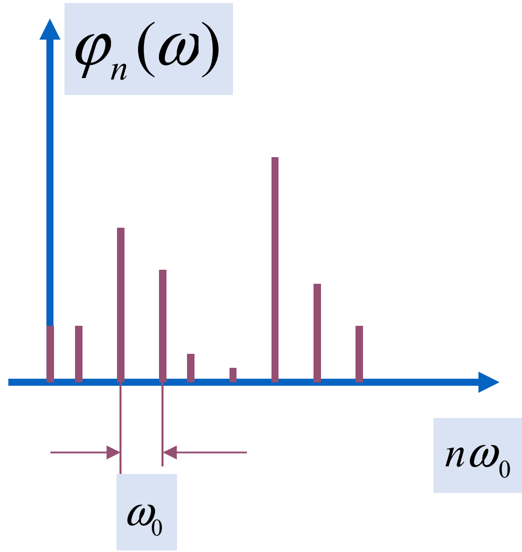
在允许一定失真时，只需传送带宽内各频率分量就行；当信号通过系统时，要求系统带宽与信号带宽匹配，若系统的带宽小于信号的带宽，信号中包含的一部分能量就不能顺利通过系统

连续信号的频域分析

2、周期信号的频谱特征

- 以上三个特点是任何满足狄里赫利条件的周期信号的频谱所共同具有的特征
- 周期信号的谱线只出现在基波频率的整数倍的频率处





连续信号的频域分析

例3 求出复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的频谱

- 复傅立叶系数为

$$X(n\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j(1-n)\omega_0 t}dt$$

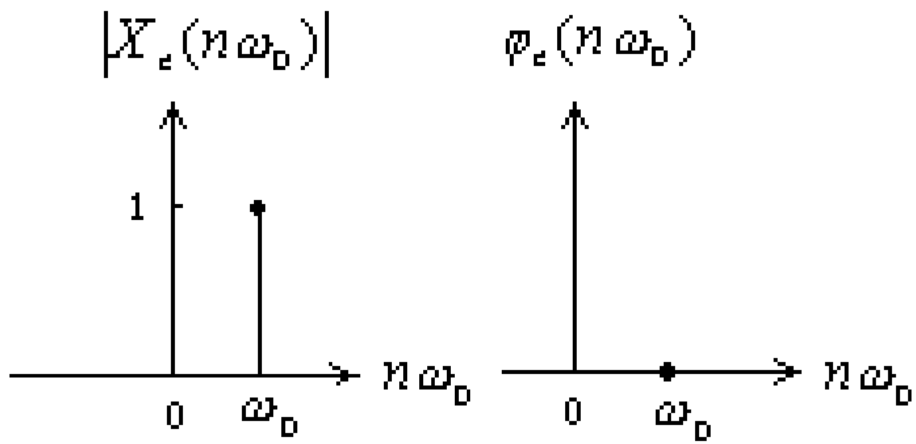
$$=\frac{1}{T_0 j(1-n)\omega_0}e^{j(1-n)\omega_0 t}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}=\frac{1}{2j(1-n)\pi}[e^{j(1-n)\pi}-e^{-j(1-n)\pi}]$$

$$=\frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi}$$

$$=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

连续信号的频域分析

- 仅在 ω_0 处有幅度为1的分量，说明复指数信号是正弦信号的一种表现形式



连续信号的频域分析

3、周期信号的功率分配

- **P为周期信号的平均功率**

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t)dt$$

- **将** $x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ **代入，有**

$$p = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} [\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)]^2 dt = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2$$

表明周期信号在时域的平均功率等于信号所包含的直流、基波及各次谐波的平均功率之和，反映了周期信号的平均功率对离散频率的分配关系，称为功率信号的帕斯瓦尔公式

连续信号的频域分析

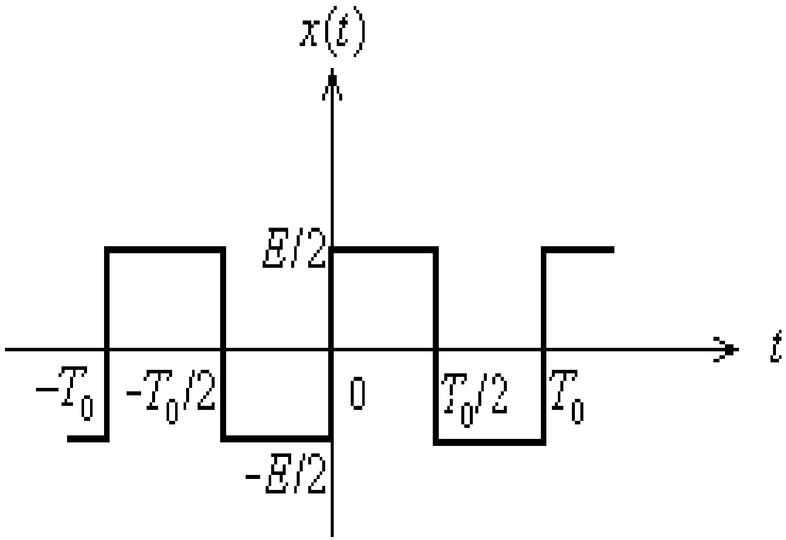
4、周期信号的傅立叶级数近似

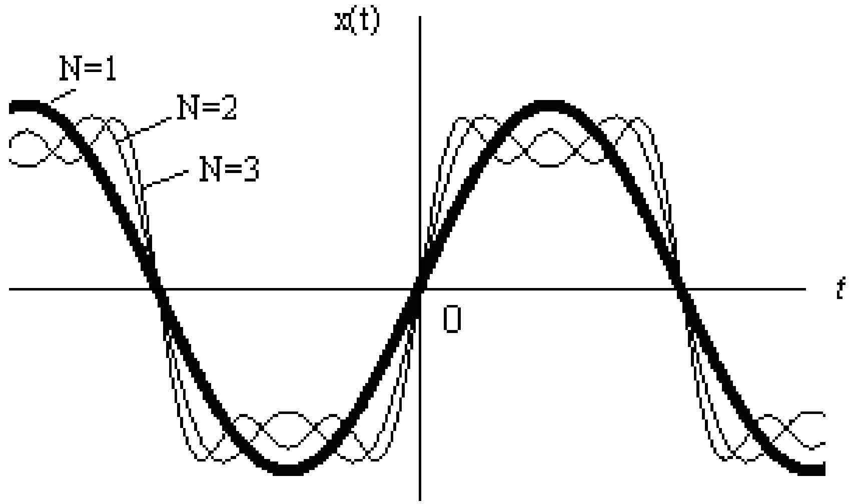
一般情况下一个周期信号是由无穷多项正弦型信号（直流、基波及各项谐波）组合而成，换言之，一般情况下，无穷多项正弦型信号的和才能完全逼近一个周期信号。如果采用有限项级数表示周期信号，势必产生表示误差

连续信号的频域分析

4、周期信号的傅立叶级数近似

- 周期方波信号的三角形傅立叶级数展开式





连续信号的频域分析

4、周期信号的傅立叶级数近似

- ***周期方波信号的三角形傅立叶级数展开式***

- **傅立叶级数所取项数越多，叠加后波形越逼近原信号，两者之间的均方误差越小**

- **当信号为方波等脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部。所以，波形变化愈激烈，所包含的高频分量愈丰富；变化愈缓慢，所包含的低频分量愈丰富**

- **组成原信号的任一频谱分量（包括幅值、相位）发生变化时，信号的波形也会发生变化**

谢谢大家