系统的时域响应类型及单位冲激响应

线性时不变处理系统分析方法

- 时域法分析
- 频域法分析
- 复频域分析

- 线性时不变系统响应类型
- 线性时不变系统的单位冲激响应
- 线性时不变系统的一般时域响应分析
- 频率响应
- 无失真传输
- 理想低通滤波器
- 微分方程的复频域求解
- 传递函数

信号的线性系统处理

一、时域分析法

- 线性时不变系统响应类型
- 线性时不变系统的单位冲激响应
- 线性时不变系统的一般时域响应

信号的线性系统处理

（一）线性时不变系统响应类型

- 线性时不变动态系统表示方法
- 线性时不变动态系统的响应类型

信号的线性系统处理

1、线性时不变动态系统表示方法

- 对于连续系统，由线性常系数微分方程描述：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

- 对于离散系统，由线性常系数差分方程描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- **起始松弛** ：
  - 如果系统输出的初始条件为零，即

$$x(t)=0 \quad t<0 \rightarrow y(t)=0 \quad t<0$$

或

$$x(n)=0 \quad n<0 \rightarrow y(n)=0 \quad n<0$$

通常叫做“ **起始松弛** ”。

如何求解线性时不变动态系统的输出呢？

考虑一个极端情况：

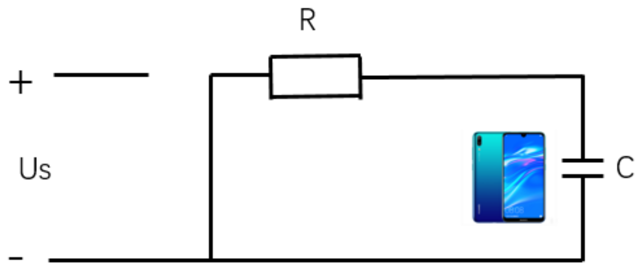
当一个系统没有输入，仅仅靠自身的初始能量的情况下，系统输出响应是什么呢？

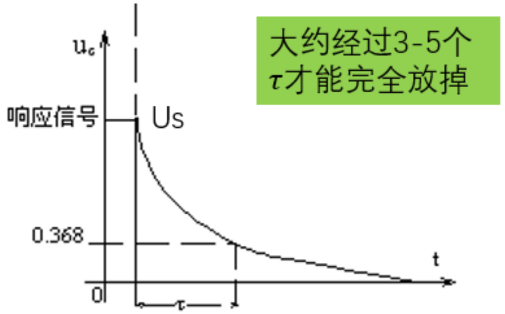
2、求解线性时不变动态系统的输出

- **零输入响应（靠状态）：**
  - **没有外加激励信号的作用，只有起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。相当于本次输入为零系统仍有的输出，称之为“零输入响应”。**

电容C放电过程-----零输入响应

C放电





电容C端电压变化过程

零输入响应：$u_C(t) = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$（$t \geq 0$，$\tau = RC$）

手机满电开始放电过程

考虑另外一个极端情况：

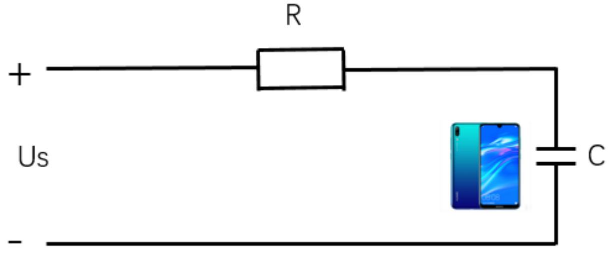
当一个系统没有初始能量，仅仅靠外界输入的情况下，系统输出响应是什么呢？

2、线性时不变动态系统的输出

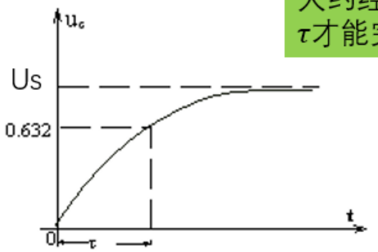
- **零状态响应（靠输入）：**
  - **系统在“起始松弛”(即零初始条件)情况下，系统对本次输入激励的响应，称之为“零状态响应”。**

电源Us给电容C充电过程-----零状态响应

C没电了



大约经过3-5个τ才能完全充满



电容C端电压变化过程

零状态 响应：$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$（$t \geq 0$， $\tau = RC$）

手机电量为零开始充电过程

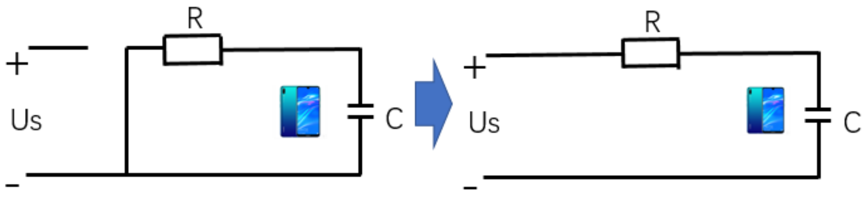
考虑一般的情况下：

一个系统既有初始能量，又有外界输入的情况下，

系统输出响应是什么呢？

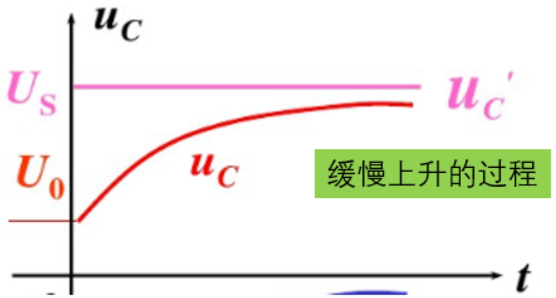
- **全响应输出：**
  - **实际系统中，往往存在当前输入激励作用前，系统以及具有非零能量的情形，即使系统没有激励，仍会有输出，这种输出我们称之为全响应输出，那么如何求解呢？**

电容C放电时又充电过程-----全响应



手机还有电时加油充电过程

C放电中充电



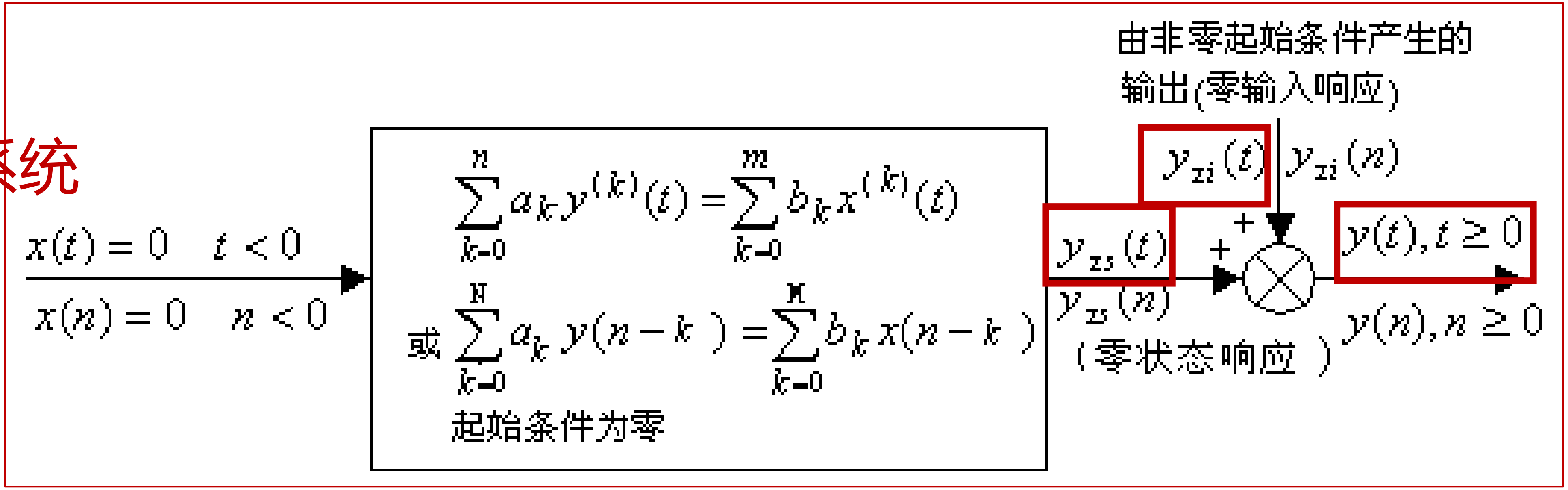
电容C端电压变化过程

全响应：$u_C(t) = \overbrace{U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}^{零状态响应} + \overbrace{[u_C(0+)]e^{-\frac{t}{\tau}}}^{零输入响应}$（$t \geq 0$，$\tau = RC$）

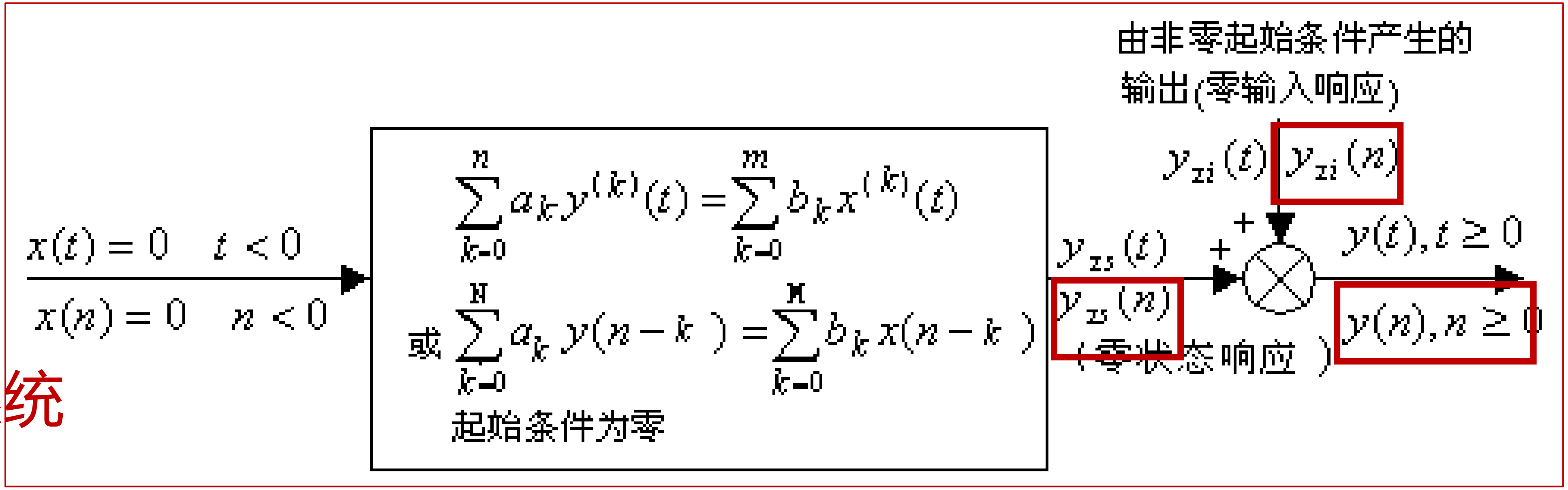
既然是线性时不变系统，必然满足叠加性，那么输出将包括零状态响应和零输入响应两部分

- **系统响应表达式 ：**
  - **系统响应 = 零输入响应 + 零状态响应**

连续系统



- **系统响应表达式 ：**
  - 系统响应 = 零输入响应 + 零状态响应



离散系统

在信号与系统研究中，重点关心系统在零初始状态下，针对输入激励的响应，即零状态响应分析

零状态响应分析

- 针对单位冲激信号的响应分析
- 针对一般激励信号的响应分析

零状态响应分析

针对单位冲激信号的响应分析

针对一般激励信号的响应分析

信号的线性系统处理

（二）线性时不变系统的单位冲激响应（或单位脉冲响应）

- **1、定义**
  - **连续系统的单位冲激响应**：连续系统在零初始条件下，对激励为单位冲激函数δ(t)所产生的响应，记为h(t)。
  - **离散系统的单位脉冲响应**：离散系统在零初始条件下，对激励为单位脉冲序列δ(n)所产生的响应，记为h(n)。

信号的线性系统处理

2、线性时不变连续系统的单位冲激响应

- （1）表达式
  - 对于线性时不变连续系统

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \boxed{y^{(k)}(t)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \boxed{x^{(k)}(t)}$$

y(t)=h(t)　　x(t)=δ(t)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{h^{(k)}(t)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{\delta^{(k)}(t)}$$

那么，h(t)如何求呢？

$$\sum_{k=0}^{n} \underline{a_k h^{(k)}}(t) = \sum_{k=0}^{m} \underline{b_k \delta^{(k)}}(t)$$

t>0时，x(t)=δ(t)及其各阶导数均为0，h(t)满足

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = 0$$

这是一个齐次微分方程，h(t) 应具有齐次微分方程解的基本形式

- **当系统具有*n* 个不同的单特征根λ_i时，h(t) 应具有如下函数形式**

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

信号的线性系统处理

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$$

- （2）h(t)的特点：
  - 应具有齐次微分方程解的基本形式。
  - 根据方程两边函数项匹配的原则，h(t)为:
    - n>m时，h(t)对应δ(t)的一次及以上的积分，而不会出现δ(t)及其导数。因此h(t)具有如下形式，并且该形式是物理上可实现的系统:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

信号的线性系统处理

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underline{h^{(k)}(t)} = \sum_{k=0}^{m} b_k \underline{\delta^{(k)}(t)}$$

- （2）h(t)的特点：
  - 应具有齐次微分方程解的基本形式。
  - 根据方程两边函数项匹配的原则，h(t)为:
    - n=m时，h(t)对应着δ(t)，除了基本形式外，还包括δ(t)项，但不包括δ(t)的导数项，因此具有如下形式：

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

信号的线性系统处理

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta^{(k)}(t)$$

- （2）h(t)的特点：
  - 应具有齐次微分方程解的基本形式。
  - 根据方程两边函数项匹配的原则，h(t)为:

    n<m时， h(t)对应着δ(t)及其各阶导数项，除了基本形式外，还包括δ(t)项，以及δ(t)直至m-n阶的导数项，因此具有如下形式：

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

例2　试求如下微分方程所描述的系统的单位冲激响应h(t)

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$$

- 解：首先系统对应的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+3=0$
- 求得其两个特征根分别为： $\lambda_1=-1$　$\lambda_2=-3$
- h(t)应具有如下形式： $h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$
- 将其代入原方程　： $h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$
- 根据h(t)可以求解出h'(t)和h"(t)的形式，代入上式

u′（t)=δ(t)
分步微分法

例2　试求如下微分方程所描述的系统的单位冲激响应h(t)

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$$

- 解：首先系统对应的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+3=0$
- 求得其两个特征根分别为： $\lambda_1=-1$　$\lambda_2=-3$
- h(t)应具有如下形式： $h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$
- 将其代入原方程 ： $h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

u′ (t)=δ(t)

- 根据h(t)可以求解出h′(t)和h″(t)的形式，代入上式

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

- 方程两边各奇异函数项系数相等，有$A_1=A_2=1/2$

$$h(t)=(\tfrac{1}{2}e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

信号的线性系统处理

（3）当n>m时，求h(t) 的经典方法和步骤(待定系数法)

1-列系统微分方程

2-求微分方程的特征根

3-写出齐次解待定系数形式

4-求各阶导数

5-代入微分方程

6-两边奇异函数的系数平衡，可求出系数

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

A_i

连续系统的单位冲激响应h(t) → 待定系数法 u'(t)=δ(t)

以上是连续系统的单位冲激响应，那么，离散系统呢？

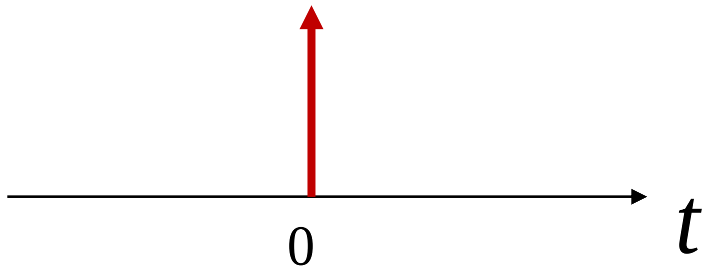
信号的线性系统处理

3、线性时不变离散系统的单位脉冲响应

（1）δ(t)和δ(n)的区别

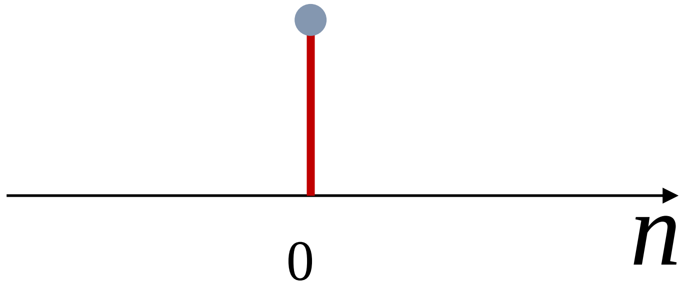
- 单位冲激信号δ(t)的定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \qquad (t=0)$$
$$\delta(t)=0 \qquad (t\neq 0)$$



- 单位脉冲序列δ(n) 的定义

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



信号的线性系统处理

3、线性时不变离散系统的单位脉冲响应

- （2）表达式　对于线性时不变离散系统

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k x(n-k)$$

y(n)=h(n)　　x(n)=δ(n)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta(n-k)$$

那么，h(n)如何求呢？

信号的线性系统处理

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^{m} b_k \delta(n-k)$$

3、线性时不变离散系统的单位脉冲响应

- （3）根据离散差分方程求解理论，h(n)具有如下特点：

$$h(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^{\ n} u(n) & n > m \\ \sum_{j=0}^{m-n} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^{\ n} u(n) & n \le m \end{cases}$$

离散系统的单位冲激响应h(n) → 迭代法 h(-n)=0, δ(0)=1, δ(n)=0,u(t)=1

例3 线性时不变因果离散系统的差分方程为 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

试求出该系统的单位脉冲响应h(n)。

- 系统的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$
- 求得两个特征根分别为 $\lambda_1=3,\lambda_2=2$
- h(n)为 $h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$
- 满足方程 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$
- 利用迭代法确定h(n)中各个系数，即令n=2,1,0，可得h(2),h(1),h(0)的具体数值

离散系统的单位冲激响应h(n) → 迭代法 $h(-n)=0,\ \delta(0)=1,\ \delta(n)=0$

例3 线性时不变因果离散系统的差分方程为 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

试求出该系统的单位脉冲响应h(n)。

- 系统的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$
- 求得两个特征根分别为 $\lambda_1=3, \lambda_2=2$
- h(n)为 $h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$
- 满足方程 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$
- 利用迭代法确定h(n)中各个系数，即令n=2,1,0，可得h(2),h(1),h(0)的具体数值
  - $h(0)=5h(-1)-6h(-2)+\delta(0)-3\delta(-2)=0-0+1-0=1$
  - $h(1)=5h(0)-6h(-1)+\delta(1)-3\delta(-1)=5-0+0-0=5$
  - $h(2)=5h(1)-6h(0)+\delta(2)-3\delta(0)=25-6+0-3=16$

离散系统的单位冲激响应h(n) → 迭代法 h(-n)=0, δ(0)=1, δ(n)=0

例3 线性时不变因果离散系统的差分方程为 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

试求出该系统的单位脉冲响应h(n)。

- 系统的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$
- 求得两个特征根分别为 $\lambda_1=3, \lambda_2=2$
- h(n)为 $h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$
- 满足方程 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$
- 利用迭代法确定h(n)中各个系数，即令n=2,1,0，可得h(2),h(1),h(0)的具体数值，然后代入h(n)中，联立方程即可得系数
- C0+A1+A2=1
- 3A1+2A2=5
- 9A1+4A2=16

离散系统的单位冲激响应h(n) → 迭代法 h(-n)=0, δ(0)=1, δ(n)=0

例3　线性时不变因果离散系统的差分方程为 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

试求出该系统的单位脉冲响应h(n)。

- 系统的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$
- 求得两个特征根分别为 $\lambda_1=3, \lambda_2=2$
- h(n)为 $h(n)=C_0\delta(n)+A_1 3^n u(n)+A_2 2^n u(n)$
- 满足方程 $h(n)-5h(n-1)+6h(n-2)=\delta(n)-3\delta(n-2)$
- 利用迭代法确定h(n)中各个系数，即令n=2,1,0，可得h(2),h(1),h(0)的具体数值，然后代入h(n)中，联立方程即可得系数

$$C_0=-1/2, A_1=2, A_2=-1/2$$

- 系统的单位脉冲响应为 $h(n)=-0.5\delta(n)+2\cdot 3^n u(n)-0.5\cdot 2^n u(n)$

本节内容小结

- 系统的响应类型
  - 零输入
  - 零状态
  - 全响应
- 针对单位冲激信号的响应分析
  - 单位冲激响应
  - 单位脉冲响应