自动控制原理

Principle of Automatic Control

第三章 CHAPTER 3

连续时间控制系统的时域分析

传递函数的各种形式

$$传递函数G(s)=\frac{\beta_m s^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}\qquad(\alpha_n\neq 0,\beta_m\neq 0,n\geq m)$$

$$=d+\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

特征多项式

特征方程

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$$

零极点型 $$=\frac{K_r(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

根轨迹增益K_r，零点$z_1,\cdots,z_m$是分子方程的根，极点$p_1,\cdots,p_n$是特征方程的特征根

零极点在复平面上，虚部非零的零点共轭出现，虚部非零的极点共轭出现

增益

$$=\frac{K\prod_k(T_k s+1)\prod_l(T_l^2 s^2+2\zeta T_l s+1)}{\prod_i(T_i s+1)\prod_j(T_j^2 s^2+2\zeta T_j s+1)}s^q$$

比例环节：$K\quad(K\neq 0)$

积分/微分环节：$s^{\pm 1}$

惯性环节：$\dfrac{1}{Ts+1}\quad(T\neq 0)$

振荡环节：$\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}\quad(T>0,-1\leq\zeta<1)$

二阶微分环节：$T^2s^2+2\zeta Ts+1\quad(T>0,-1\leq\zeta<1)$

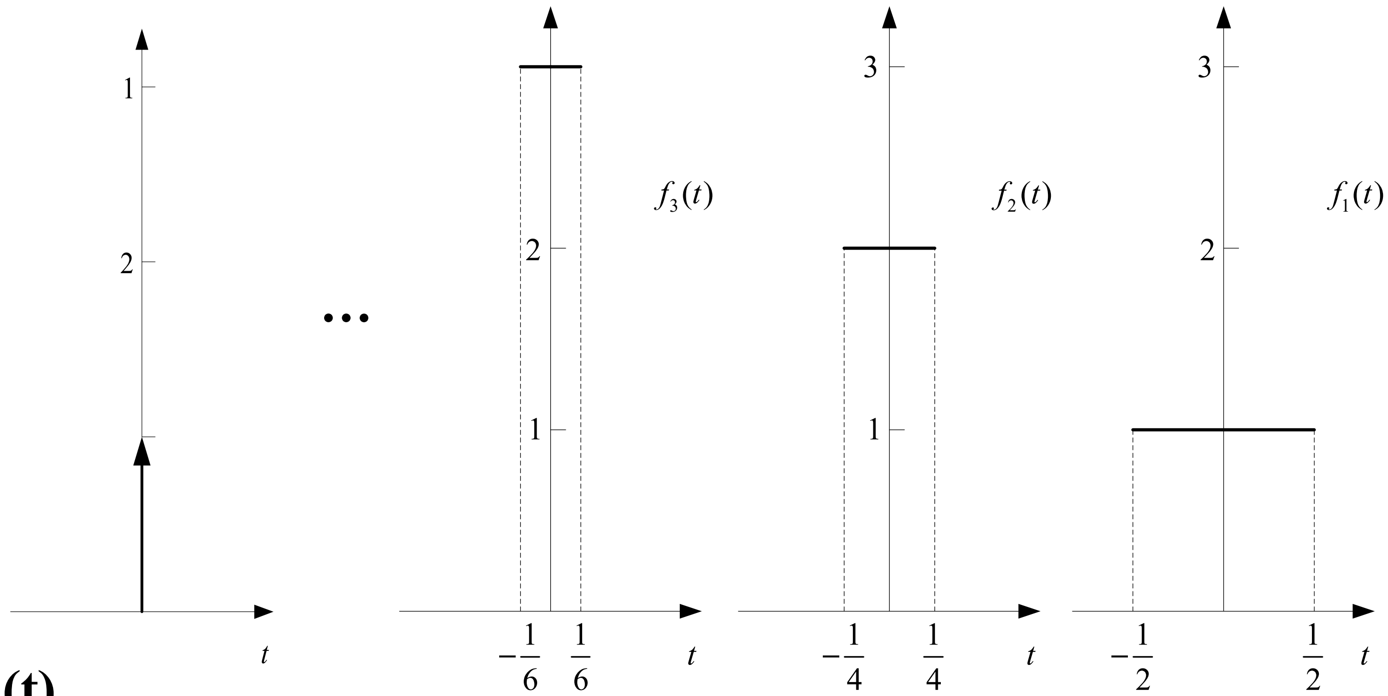
一阶微分环节：$Ts+1\quad(T\neq 0)$

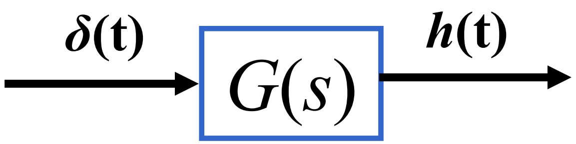
单位脉冲及响应

- 单位脉冲

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

幅值=∞
宽度=0
面积=1

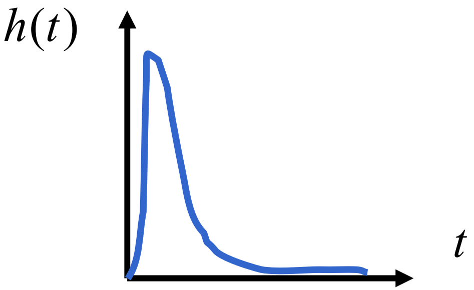




$$R(s)=L\{\delta(t)\}=1$$

$$H(s)=G(s)R(s)=G(s)$$

$$h(t)=L^{-1}[G(s)]$$



系统的单位脉冲响应（零初始条件下） $\xrightarrow{\text{拉氏变换}}$ 系统的传递函数

系统的传递函数 $\xrightarrow{\text{拉氏反变换}}$ 系统的单位脉冲响应（零初始条件下）

部分分式法

例 求系统$\dfrac{2s^2+4s+3}{s^2+3s+2}$在零初始条件下的单位脉冲响应$h(t)$ $\quad(t\geq 0)$

解 用部分分式法+单边拉氏变换

$$\frac{2s^2+4s+3}{s^2+3s+2}=2+\frac{-2s-1}{s^2+3s+2}=2+\frac{P(s)}{Q(s)}=2+\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s+2}$$

常用待定系数法求部分分式的系数

$\lambda_1=-1$和$\lambda_2=-2$是$Q(s)$的根

$$\boxed{\text{若}\lambda_i\text{是}Q(s)\text{的单根，}\quad c_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\frac{P(s)}{Q(s)}=\mathrm{Res}\left[\frac{P(s)}{Q(s)},\lambda_i\right]}$$

$$c_1=\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{-2s-1}{(s+1)(s+2)}=1,\quad c_2=\lim_{s\to -2}(s+2)\frac{-2s-1}{(s+1)(s+2)}=-3$$

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{2s^2+4s+3}{s^2+3s+2}\right]=L^{-1}[2]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{-3}{s+2}\right]=2\delta(t)+e^{-t}-3e^{-2t}$$

对应于$Q(s)$的根λ_i，信号中的成分$e^{\lambda_i t}$是信号的模态

系统在零初始条件下单位脉冲响应的模态，也是系统的模态

部分分式法

例 求系统$\dfrac{1}{(s+2)^3(s+3)}$在零初始条件下的单位脉冲响应$h(t)$ $(t\ge 0)$

解 $\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{1}{(s+2)^3(s+3)}=\dfrac{c_{13}}{(s+2)^3}+\dfrac{c_{12}}{(s+2)^2}+\dfrac{c_{11}}{s+2}+\dfrac{c_2}{s+3}$

$\lambda_1=-2$是$Q(s)$的3重根，$\lambda_2=-3$是$Q(s)$的单根 $c_2=\lim\limits_{s\to -3}(s+3)\dfrac{P(s)}{Q(s)}=-1$

$$\boxed{\text{若}\lambda_i\text{是}Q(s)\text{的}m\text{重根，}\ c_{ik}=\lim_{s\to\lambda_i}\frac{1}{(m-k)!}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}(s-\lambda_i)^m\frac{P(s)}{Q(s)}}$$

$$c_{13}=\lim_{s\to -2}(s+2)^3\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}=1,c_{12}=\lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}(s+2)^3\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}=-1,c_{11}=1$$

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right]+L^{-1}\left[\frac{-1}{(s+2)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]+L^{-1}\left[\frac{-1}{s+3}\right]=\frac{t^2}{2}e^{-2t}-te^{-2t}+e^{-2t}-e^{-3t}$$

对应于$Q(s)$的m重根λ_i,信号中的成分$e^{\lambda_i t}$、$te^{\lambda_i t}$、$\cdots$、$t^{m-1}e^{\lambda_i t}$是信号的模态

部分分式法

$Q(s)$是实系数多项式，复数根共轭出现，且共轭复根的重数相同、对应分式系数共轭，基于欧拉公式亦可用前述方法处理共轭复根

$$L^{-1}\left[\frac{1-2j}{(s+1+2j)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{3+j}{s+1+2j}\right]+L^{-1}\left[\frac{1+2j}{(s+1-2j)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{3-j}{s+1-2j}\right]$$

模态

$$=(1-2j)te^{(-1-2j)t}+(3+j)e^{(-1-2j)t}+(1+2j)te^{(-1+2j)t}+(3-j)e^{(-1+2j)t}$$

$$=te^{-t}[(1-2j)e^{-j2t}+(1+2j)e^{j2t}]+e^{-t}[(3+j)e^{-j2t}+(3-j)e^{j2t}]$$

$$=te^{-t}[(1-2j)(\cos 2t-j\sin 2t)+(1+2j)(\cos 2t+j\sin 2t)]$$
$$+e^{-t}[(3+j)(\cos 2t-j\sin 2t)+(3-j)(\cos 2t+j\sin 2t)]$$

$$=te^{-t}(2\cos 2t-4\sin 2t)+e^{-t}(6\cos 2t+2\sin 2t)$$

部分分式法

例 系统的传递函数$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$,已知$y(0^-)=3,\dot{y}(0^-)=-5$,

求系统在输入$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\ t, t\geq 0\end{cases}$下的输出响应$y(t)$ $(t\geq 0)$

解 原方程$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=u(t)$

考虑给定初始条件，利用拉氏变换的微分定理

$$\left[s^2Y(s)-sy(0^-)-\dot{y}(0^-)\right]+3\left[sY(s)-y(0^-)\right]+2Y(s)=U(s)$$

$$\left[s^2Y(s)-3s+5\right]+3\left[sY(s)-3\right]+2Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

给定初始条件和给定输入下的系统输出称为全响应

$$\left(s^2+3s+2\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}+3s+4$$

$$Y(s)=\frac{3s^3+4s^2+1}{s^2\left(s^2+3s+2\right)}$$

$$\frac{3s^3+4s^2+1}{s^2\left(s^2+3s+2\right)}=\frac{0.5}{s^2}-\frac{0.75}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{1.75}{s+2}$$

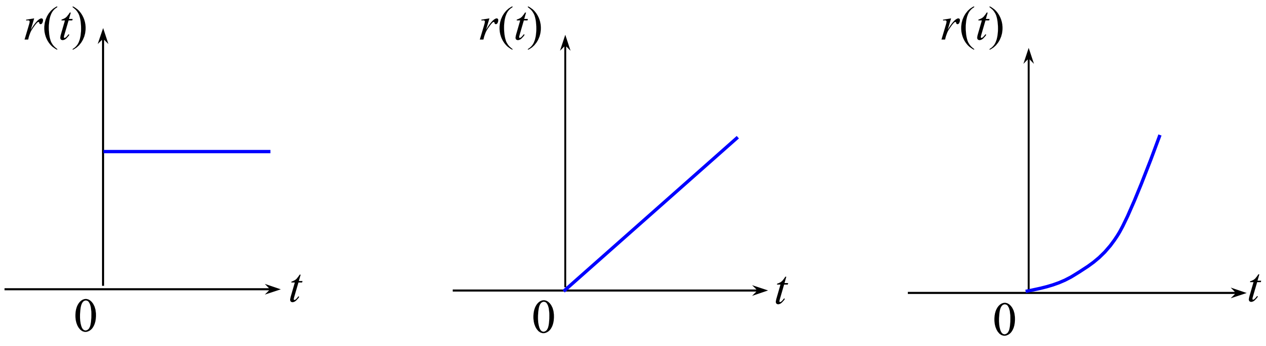
$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=0.5t-0.75+2e^{-t}+1.75e^{-2t}$$

典型输入

- 正弦函数 （Sinusoidal ）
- 阶跃函数（ Step）
- 斜坡函数（ Ramp）
- 抛物线函数（Parabolic）

"最不利"的输入信号：突变→阶跃，周期性→正弦函数

典型输入



- **单位阶跃**

$$u_{-1}(t)=\begin{cases}1, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

- **阶跃** $r(t)=ku_{-1}(t)$

$$R(s)=L[r(t)]=\frac{k}{s}$$

- **斜坡** $r(t)=ktu_{-1}(t)$

$$R(s)=L[r(t)]=\frac{k}{s^2}$$

- **抛物线**

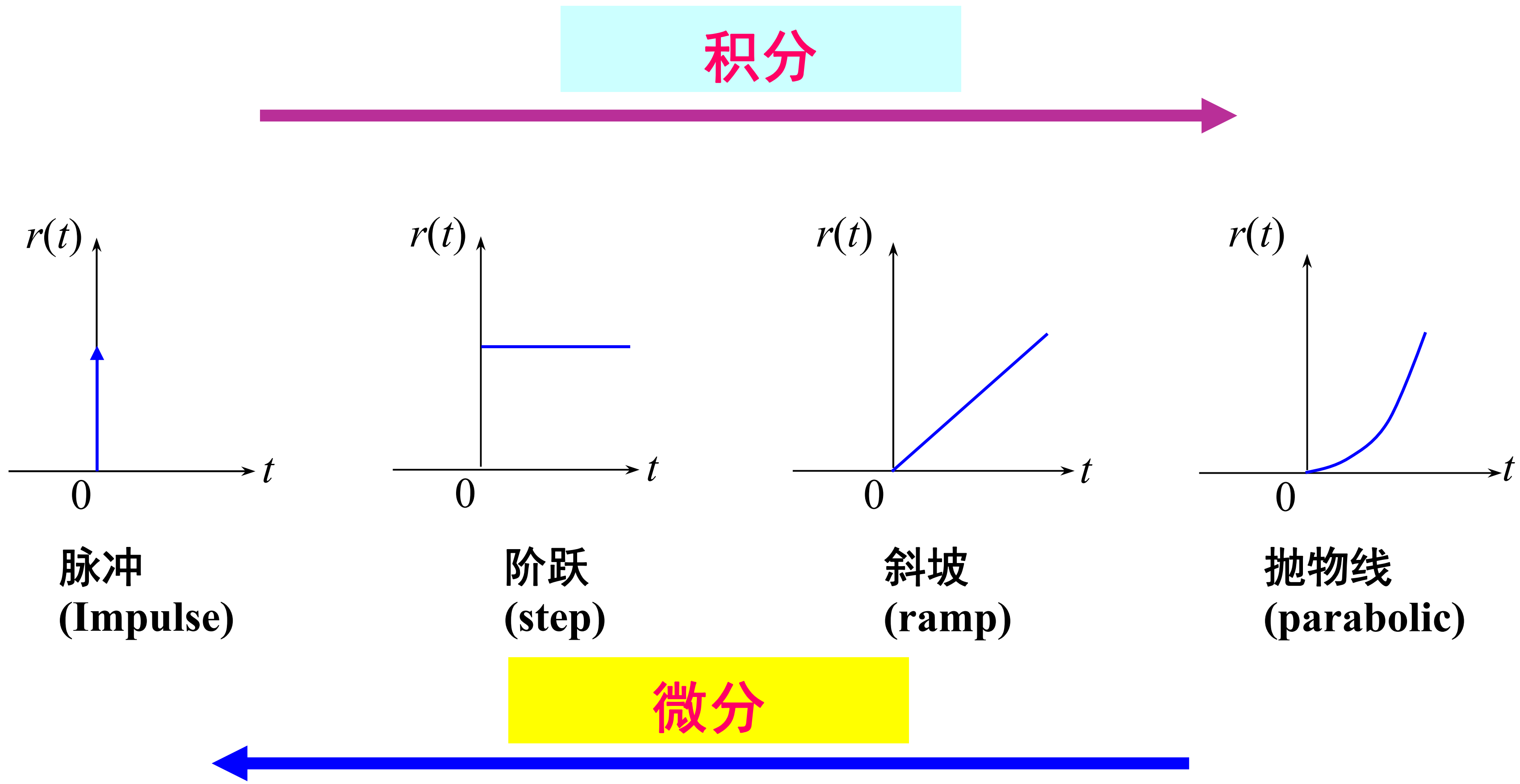
$$r(t)=\frac{k}{2}t^2u_{-1}(t)$$

$$R(s)=L[r(t)]=\frac{k}{s^3}$$

当k=1时，相应的有单位斜坡、单位抛物线

典型输入

- 脉冲、阶跃、斜坡、抛物线函数之间可以通过微分或积分进行转换



典型输入

- 正弦函数

$$r(t) = k\sin\omega_0 t \cdot u_{-1}(t)$$

LT

$$R(s) = L[r(t)] = \frac{k\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

- 正弦信号是频率分析的测试输入信号，并且通常用来模拟周期输入信号
- 对于线性系统，可将输入信号分解成典型信号的叠加。求系统响应时先求出系统在各信号单独作用下的输出，然后将它们叠加就得到系统总的响应。

典型输入的自由响应及强迫响应

某典型输入$u(t)$和一个LTI系统$G(s)$满足下列2个模态不重叠条件之一：

1) $u(t)=k\sin\omega_0 t\cdot u_{-1}(t)$，$G(s)$不含$\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}$

2) $u(t)$为阶跃、斜坡或抛物线输入，$G(s)$不含$\dfrac{1}{s}$

任给初始条件，对$G(s)$输入$u(t)$，可得到相应的全响应$y(t)$，则

$y(t)=y_b(t)+y_{ss}(t)$

$y_b(t)$：$y(t)$中由$G(s)$模态组成的部分，称为自由响应（通解）

$y_{ss}(t)$：$y(t)$中由非$G(s)$模态组成的部分，称为强迫响应（特解）

若典型输入和系统满足模态不重叠条件，则典型输入的全响应可分解为自由响应和强迫响应

典型输入的自由响应及强迫响应

典型输入自由响应和强迫响应的求法：求出全响应后分解

例 系统的传递函数$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2+3s+2}$,已知$y(0^-)=3,\dot{y}(0^-)=-5,$

求系统在典型输入斜坡输入下的自由响应和强迫响应

解 全响应$y(t)=L^{-1}\left[\dfrac{0.5}{s^2}\right]+L^{-1}\left[\dfrac{-0.75}{s}\right]+L^{-1}\left[\dfrac{2}{s+1}\right]+L^{-1}\left[\dfrac{1.75}{s+2}\right]$

$$=0.5t-0.75+2e^{-t}+1.75e^{-2t}$$

系统$\dfrac{1}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$的模态是$e^{-t}$和$e^{-2t}$，满足模态不重叠条件

自由响应$y_b(t)=2e^{-t}+1.75e^{-2t}$

强迫响应$y_{ss}(t)=0.5t-0.75$

零输入响应？
零状态响应？

典型输入的自由响应及强迫响应

正弦输入强迫响应的一种求法：频率特性函数方法

LTI系统对正弦函数$k\sin\omega_0 t$的强迫响应$y_{ss}(t)=k_2\sin(\omega_0 t+\phi)$

同频、变幅、相移

$$\text{传递函数}G(s)=\frac{\beta_m s^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_n s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}\qquad(\alpha_n\neq 0,\beta_m\neq 0,n\geq m)$$

$$\text{频率特性函数}G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=\frac{\beta_m(j\omega)^m+\beta_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+\beta_1(j\omega)+\beta_0}{\alpha_n(j\omega)^n+\alpha_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+\alpha_1(j\omega)+\alpha_0}$$

$\forall\omega>0$，$G(j\omega)$是一个复数

$|G(j\omega)|$表示对$\sin\omega t$的幅值放大倍数

$\angle G(j\omega)$表示对$\sin\omega t$的相移

强迫响应$y_{ss}(t)=k|G(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\angle G(j\omega_0))$

典型输入的自由响应及强迫响应

非正弦输入强迫响应的一种求法：时域构造方法

➢ 微分方程的一般形式为

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = r(t)$$

r(t)具有幂级数形式：

$$r(t) = R_0 + R_1 t + \frac{R_2 t^2}{2!}$$

假设强迫响应与r(t)有相同的形式

$$y(t)_{ss} = c_0 + c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!}$$

典型输入的自由响应及强迫响应

$$a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = r(t)$$

$$y(t)_{ss} = c_0 + c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} \quad (**)$$

$$r(t) = R_0 + R_1 t + \frac{R_2 t^2}{2!} \quad (*)$$

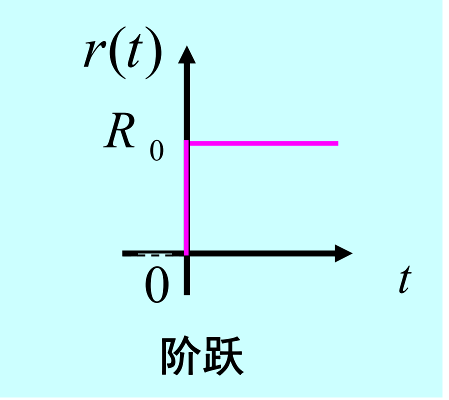
信号式（*）与假设的解式（**） 代入 原微分方程

➢ 令方程左右两端具有关于 t 的相同阶次项的相应系数相等可得系数 $c_0, c_1, \ldots\ldots, c_k$

典型输入的自由响应及强迫响应

➢ **阶跃函数输入信号：**

$$r(t) = R_0 u_{-1}(t)$$



$$y(t)_{ss} = c_0$$

$$\underbrace{a_v D^v y(t) + a_{v-1} D^{v-1} y(t) + \cdots +}_{0} a_0 D^0 y(t) = R_0$$

$$y(t)_{ss} = c_0 = \frac{R_0}{a_0}$$

典型输入的自由响应及强迫响应

➢ 单位斜坡函数输入信号：

$$r(t) = tu_{-1}(t)$$

$$y(t)_{ss} = c_0 + c_1 t$$

$$a_v D^v y_{ss}(t) + a_{v-1} D^{v-1} y_{ss}(t) + \cdots + a_0 y_{ss}(t) = t$$

t^0: $a_1 c_1 + a_0 c_0 = 0$

t^1: $a_0 c_1 = 1$

$$c_0 = -\frac{a_1 c_1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{a_0}$$

$$y(t)_{ss} = -\frac{a_1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0} t$$

单位抛物线函数输入下的强迫响应见(3-25)，自行推导。

稳定系统

LTI系统稳定是指该系统在任意初始条件下对任意典型输入的自由响应收敛到零，即

$$\lim_{t\to\infty} y_b(t) = 0$$

$y_b(t)$由系统模态构成，$y_b(t)$收敛到零意味着系统的每个模态均收敛到零

1）λ是系统的m重实特征根

其涉及的模态为$e^{\lambda t}$、$te^{\lambda t}$、$\cdots$、$t^{m-1}e^{\lambda t}$

a)$\lambda > 0$时，模态均发散

b)$\lambda = 0$时，$e^{\lambda t}$收敛到1

c)$\lambda < 0$时，模态均收敛到零（指数增长远快于多项式增长）

稳定系统

2）$\lambda=\alpha\pm \mathrm{j}\beta$是系统的$m$重“复特征根”

其涉及的模态为$e^{(\alpha\pm \mathrm{j}\beta)t}$、$te^{(\alpha\pm \mathrm{j}\beta)t}$、…、$t^{m-1}e^{(\alpha\pm \mathrm{j}\beta)t}$,分式系数亦共轭

$$
\begin{aligned}
&(c_k + jd_k)t^{k-1}e^{(\alpha+j\beta)t} + (c_k - jd_k)t^{k-1}e^{(\alpha-j\beta)t} \\
&= (c_k + jd_k)t^{k-1}e^{\alpha t}e^{j\beta t} + (c_k - jd_k)t^{k-1}e^{\alpha t}e^{-j\beta t} \\
&= t^{k-1}e^{\alpha t}\left[(c_k + jd_k)(\cos\beta t + j\sin\beta t) + (c_k - jd_k)(\cos\beta t - j\sin\beta t)\right] \\
&= t^{k-1}e^{\alpha t}(2c_k\cos\beta t - 2d_k\sin\beta t)
\end{aligned}
$$

a)$\alpha>0$时，模态发散

b)$\alpha=0$时，模态不收敛

c)$\alpha<0$时，模态收敛到零

LTI系统稳定当且仅当系统的特征值均具有负实部

稳定系统

对于闭环系统： 全响应=自由响应+强迫响应

用反馈控制来满足

在模态不重叠条件下

全响应模态=自由响应模态∪强迫响应模态

由动态系统决定

非期望的模态

由参考输入决定

是期望的模态

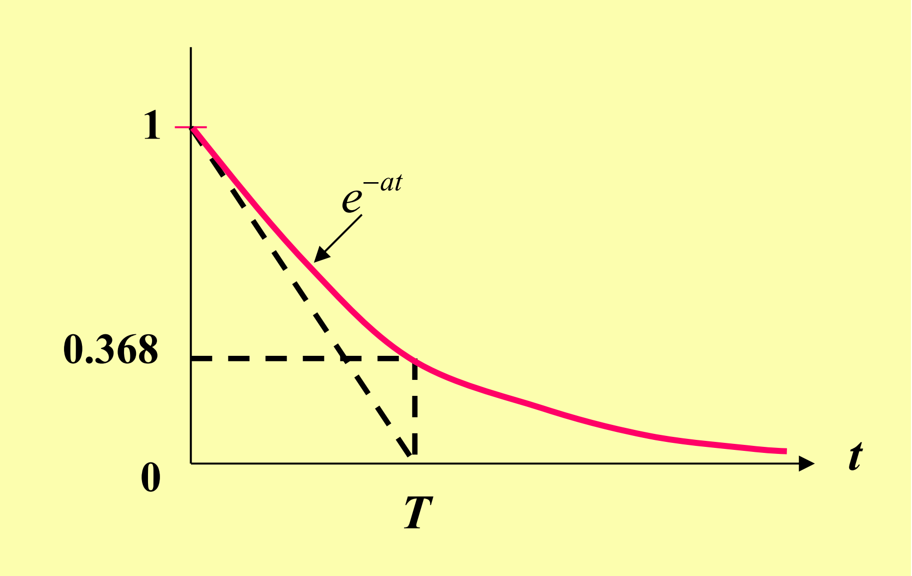
非期望的模态必须收敛到0 → 闭环系统稳定

反馈控制的首要目标：闭环系统稳定

在闭环系统稳定的前提下，再考虑响应速度和跟踪误差等其它性能

稳定单实根的时间常数

- 对于稳定G(s)的单实根$\lambda=-a\ (a>0)$，相应的模态$e^{\lambda t}=e^{-at}$是自由响应的成分之一
  - 时间常数 T：$T=\dfrac{1}{|\lambda|}=\dfrac{1}{a}$

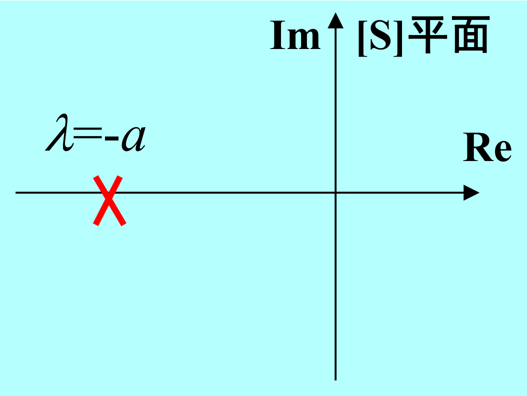


几何解释一：过点(0,1)作e^{-at}的切线

切线的斜率 $\left.\dfrac{de^{-at}}{dt}\right|_{t=0}=-ae^{-at}\Big|_{t=0}=-a$

切线方程：$y-1=-a(x-0)\Rightarrow y=-ax+1$

切线与横轴的交点$(x_h,0)$，$0=-ax_h+1\Rightarrow x_h=\dfrac{1}{a}=T$



几何解释二：$e^{-at}\Big|_{t=T}=e^{-a/a}=e^{-1}=0.368$

衰减到初值的36.8%所需的时间

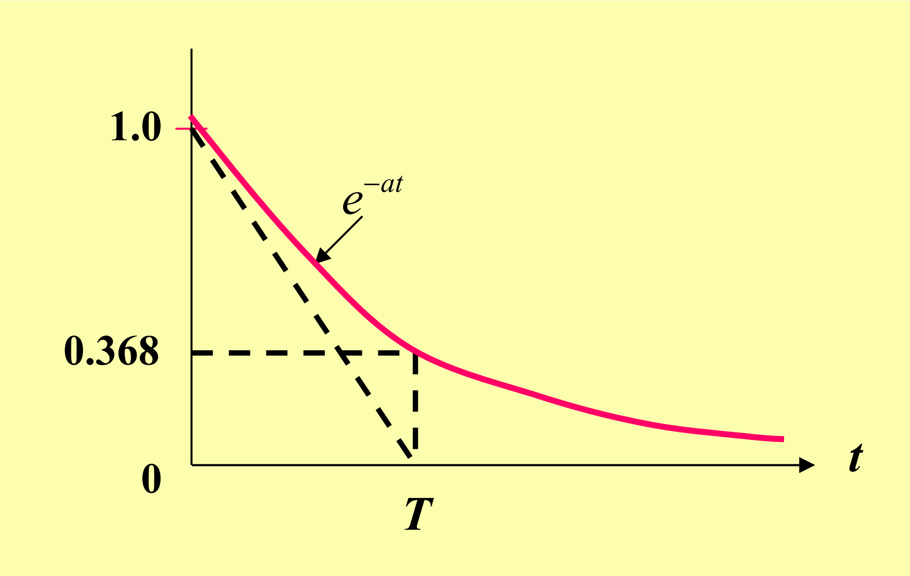
稳定单实根的时间常数

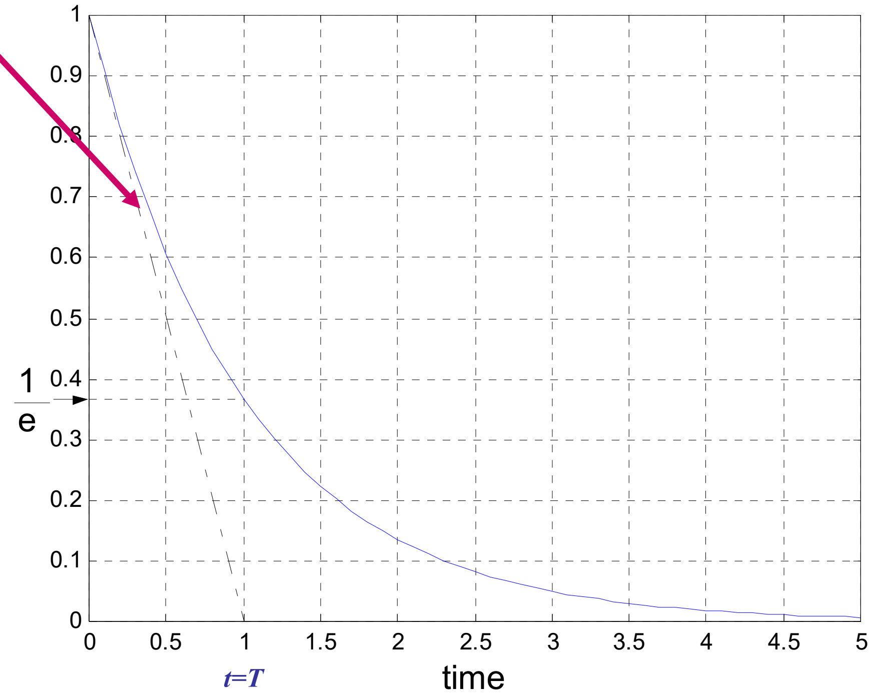
- 从几何上看，Ae^{-at}曲线在 t=0 处的切线与时间轴的相交点的值等于**时间常数 T**
- 在一个**时间常数**所对应的时间区间内，指数函数 e^{-at} 的值将从 1 下降至 0.368

◆ 例：

$A=1, a=?$

T 的图解测定



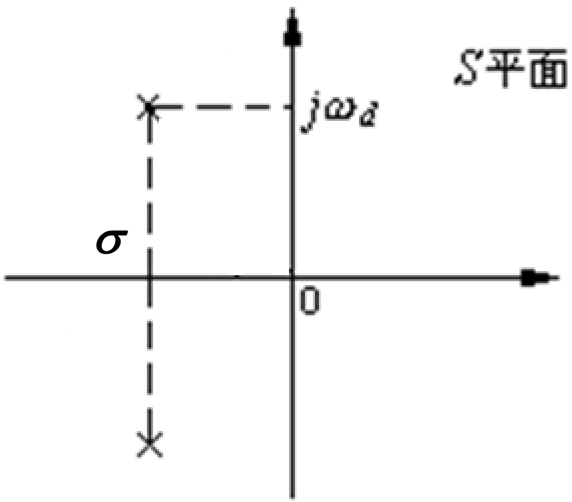


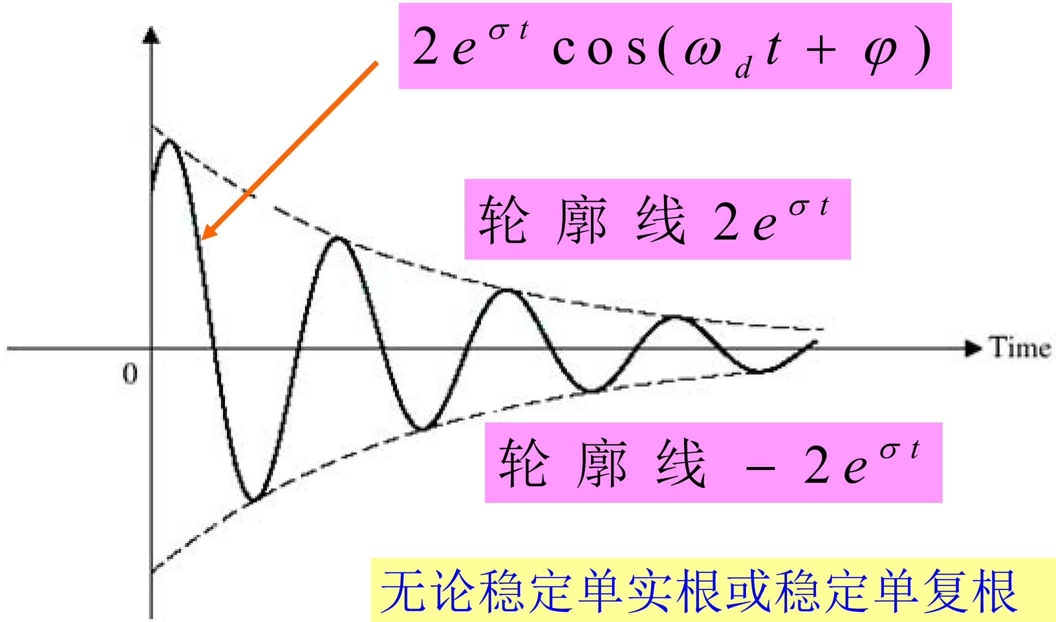
稳定单复根的时间常数

对于稳定$G(s)$的单复根$\lambda=\sigma\pm j\omega_d \quad (\sigma<0)$，相应的模态$e^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega_d)t}+e^{-j\phi}e^{(\sigma-j\omega_d)t}$是自由响应的成分之一

- **时间常数 *T*:** $\boxed{T=\dfrac{1}{|\sigma|}}$

模态$e^{j\phi}e^{(\sigma+j\omega_d)t}+e^{-j\phi}e^{(\sigma-j\omega_d)t}=e^{\sigma t}(e^{j(\phi+\omega_d t)}+e^{-j(\phi+\omega_d t)})=2e^{\sigma t}\cos(\omega_d t+\phi)$





无论稳定单实根或稳定单复根时间常数都是根与虚轴距离的倒数

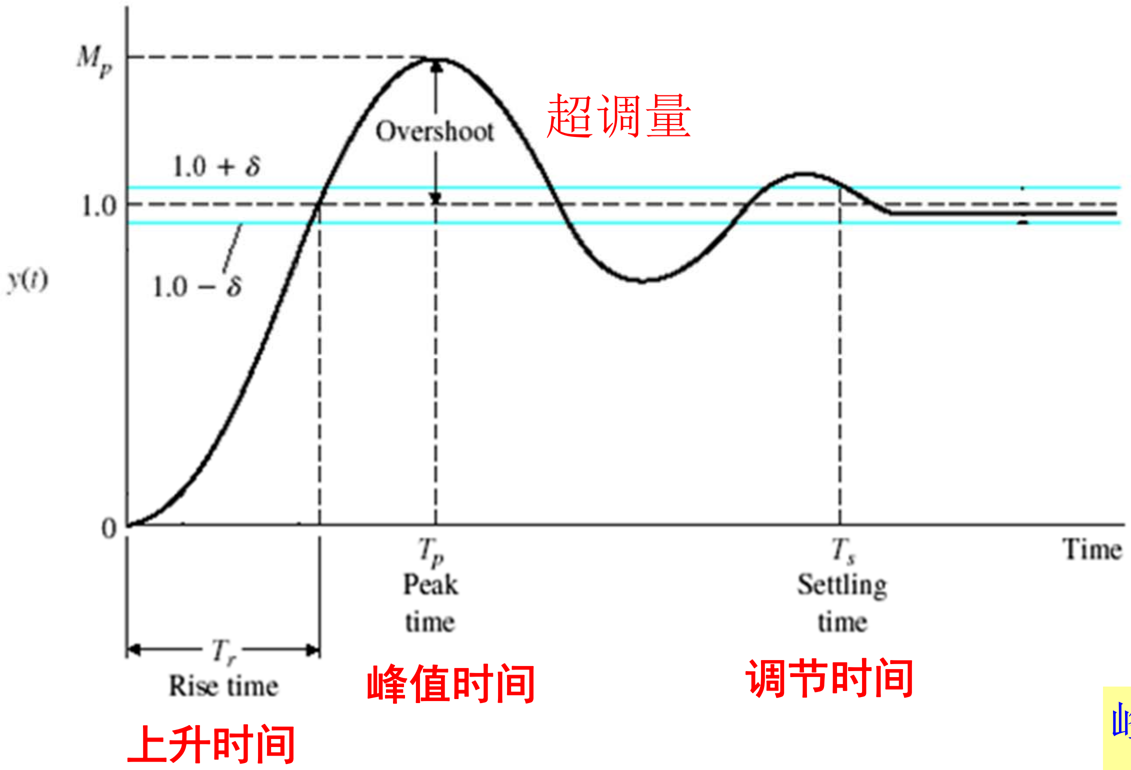
系统的动态性能指标

考察稳定系统在零初始条件下的单位阶跃响应曲线

- **基于动态特征的性能指标**
  - 超调量(最大偏差) (Overshoot)
  - 调节时间 (Settling Time)
  - 峰值时间 (Peak Time)
  - 上升时间 (Rise time)

  …

- **基于偏差总量的性能指标**
  - 平方误差积分指标 (ISE) $J_1 = \int_0^\infty e^2(t)dt$
  - 时间乘平方误差积分指标 (ITSE) $J_2 = \int_0^\infty te^2(t)dt$
  - 绝对误差积分指标 (IAE) $J_3 = \int_0^\infty |e(t)|dt$
  - 时间乘绝对误差积分指标 (ITAE) $J_4 = \int_0^\infty t|e(t)|dt$



系统在零初始条件下的单位阶跃响应

上升时间T_r：
对于衰减振荡过渡过程，指第一次到达1的时间；

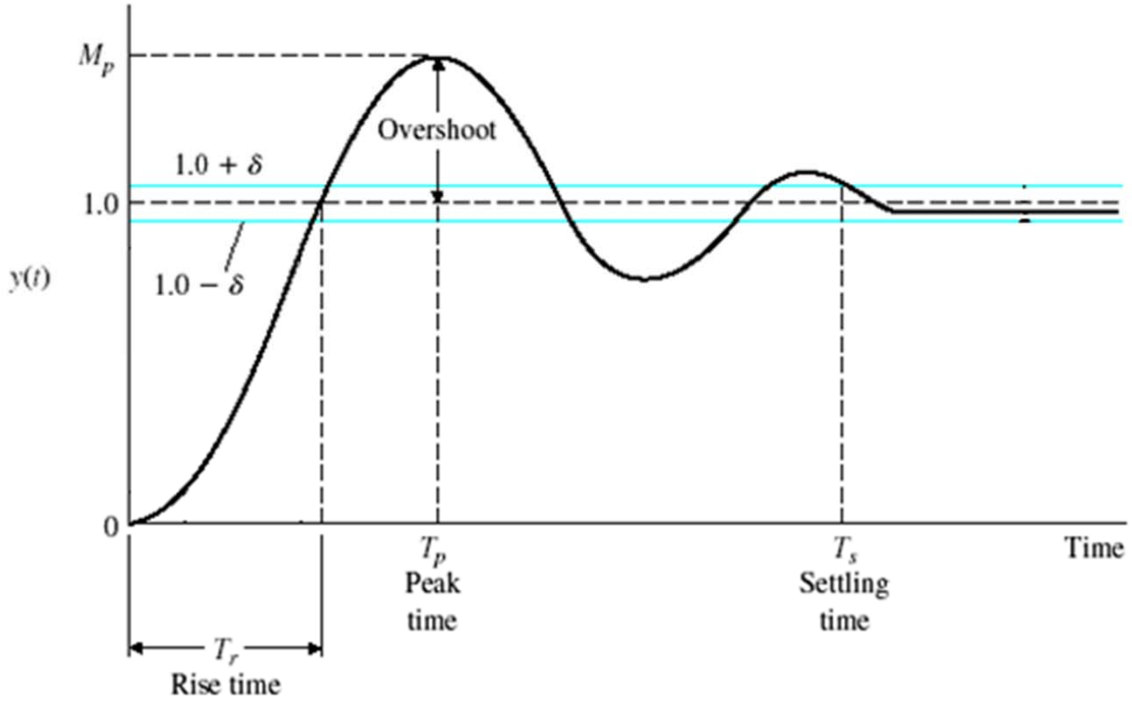
对于非振荡过渡过程，指从0.1到0.9所需的时间

峰值时间T_p：到达第一峰值的时间

超调量$\sigma\%$：第一峰值$M_p = y(T_p)$与稳态值$y(\infty)$之差，通常用百分比的形式表示

$$\sigma\% = \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

调节时间T_s（又称回复时间或过渡过程时间）：最后一次进入区间$(y(\infty)-\delta, y(\infty)+\delta)$的时间，$\delta$通常取$y(\infty)$的5%或$y(\infty)$的2%



- **延迟时间T_d** :第一次到达稳态值的50%的时间
- **衰减比n** 记第二峰值时间为$T_q, n=[y(T_p)-y(\infty)]:[y(T_q)-y(\infty)]$
  - 当n＝1时，过渡过程为等幅振荡
  - 当n>1时，n愈小，过渡过程的衰减程度也愈小
  - 过程控制一般希望控制系统的过渡过程稍带振荡，约对应于4：1~10：1的衰减比

一阶系统的响应分析

- 系统传递函数的极点决定了系统自由响应的特点
- 对于没有零点的一阶系统（惯性环节），系统具有一个极点

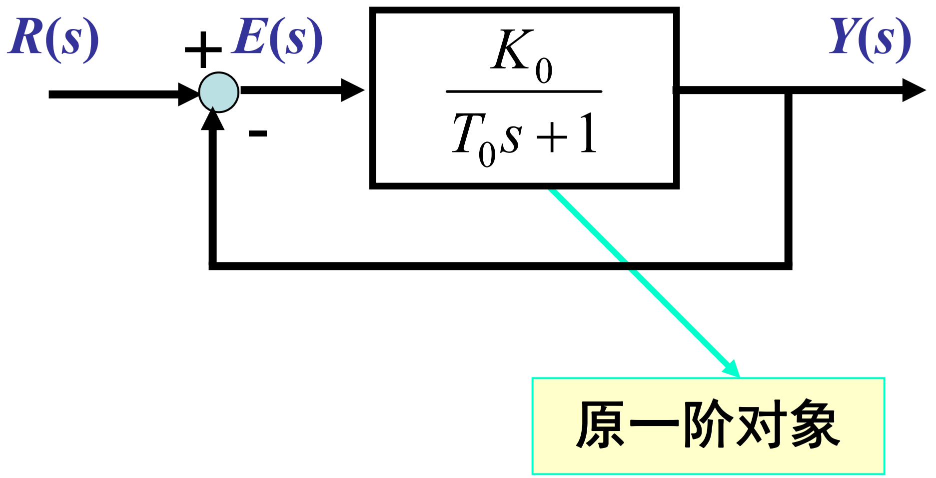
$$G(s)=\frac{K_r}{s-p}=\frac{K}{Ts+1},\quad p\text{ 为非零实数}$$

$$p<0\text{表示系统稳定，时间常数}T=\frac{1}{-p}$$

$$p>0\text{表示系统不稳定，这时}T<0$$

一阶系统的响应分析

- 由一阶稳定对象组成的单位负反馈闭环系统仍然是一阶稳定系统，只是系统增益和时间常数变小，为原值的**1/(1+K_0)**



闭环传递函数 $G(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K_0}{T_0 s+1}}{1+\frac{K_0}{T_0 s+1}}=\frac{K_0}{T_0 s+1+K_0}=\frac{K}{Ts+1},\quad T_0>0$$

其中，$K=\frac{K_0}{1+K_0},\quad T=\frac{T_0}{1+K_0}$

一阶系统的响应分析

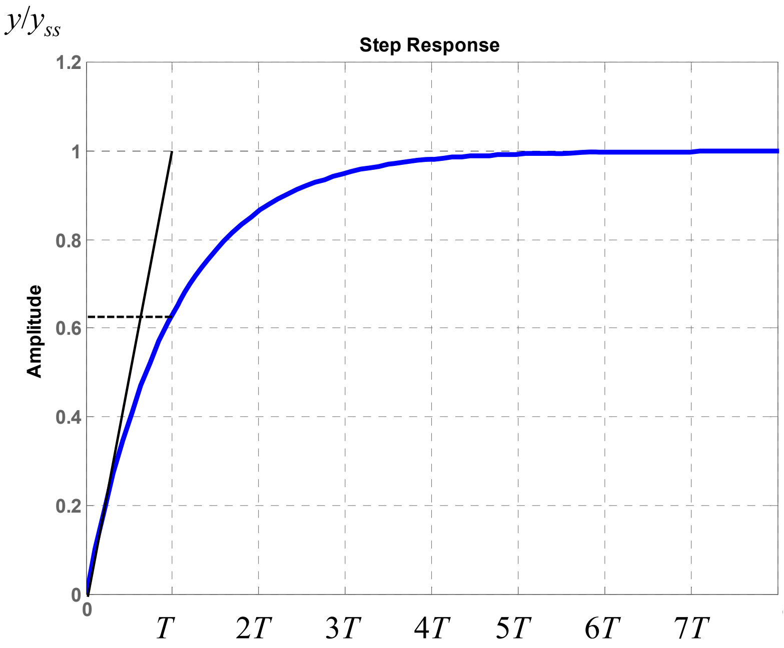
1. 如果 r 为单位阶跃函数：$r(t)=1$

零初始条件下，一阶稳定系统的阶跃响应为

强迫　　自由

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{Ts+1}=\frac{K}{s}-\frac{K}{s+\frac{1}{T}}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=K-Ke^{-\frac{t}{T}}$$



当 $t=0$, $y(0)=0$, $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\dfrac{K}{T}$

当 $t=T$, $y(T)=K(1-e^{-1})=0.632K$

当 $t\to\infty$, $y(\infty)=K$ $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t\to\infty}=0$

当 $t=3T$, $y(t)=0.95K$

$t=4T$, $y(t)=0.982K$

$t=5T$, $y(t)=0.993K$

不存在峰值时间T_p、超调量σ与衰减比n；

$$T_d=0.69T \qquad T_s=\begin{cases}3T; & \delta=5\%y(\infty)\\ 4T; & \delta=2\%y(\infty)\end{cases}$$

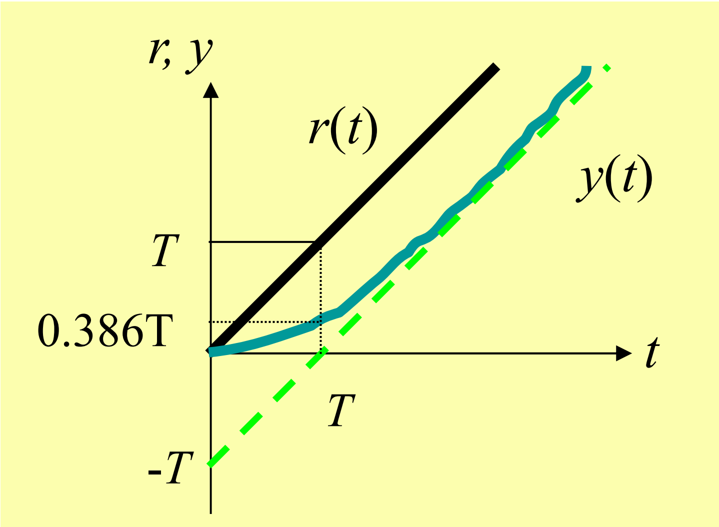
$$T_r=2.20T$$

一阶系统的响应分析

2. 如果 r 为单位斜坡函数：$r(t)=t$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$



斜坡响应为

$$y(t)=\underbrace{t-T}_{\text{强迫}}+\underbrace{Te^{-\frac{t}{T}}}_{\text{自由}}$$

一阶系统的响应分析

系统输入 $t\geq 0$		系统响应 $t\geq 0$
单位脉冲 $r(t)=\delta(t)$	⇒	$y_\delta(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}=g(t)$
↑ D		↑ D
单位阶跃 $r(t)=u(t)=1$	⇒	$y_u(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$
↑ D		↑ D
单位斜坡 $r(t)=t$	⇒	$y_{r=t}(t)=(t-T)+Te^{-\frac{t}{T}}$
↑ D		↑ D
单位抛物线 $r(t)=t^2/2$	⇒	$y_{x=\frac{t^2}{2}}(t)=\left(\frac{t^2}{2}-Tt+T^2\right)-T^2e^{-\frac{t}{T}}$

- 线性系统对输入信号导数（积分）的响应，可通过系统对输入信号的响应进行微分（积分--积分常数则由初始条件决定）求得。

一阶系统的响应分析

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

3. 如果 *r* 为单位正弦函数：$r(t)=\sin\omega t$

$$Y(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{-T\omega}{T^2\omega^2+1}\frac{s-\frac{1}{T}}{s^2+\omega^2}+\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

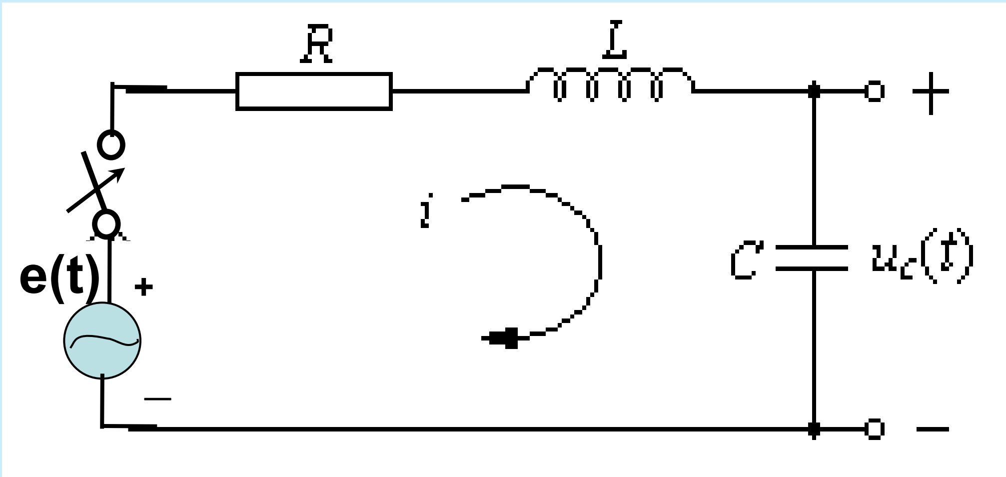
$$y(t)=\underbrace{\frac{-1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}\sin(\omega t+\phi)}_{\text{强迫}}+\underbrace{\frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}e^{-\frac{t}{T}}}_{\text{自由}}\qquad 其中，\ \phi=\arctan(-\omega T)$$

二阶系统的响应分析

➢ 回顾第2章的例子

• 例1. R-L-C 串联电路

$$LC\frac{du_c^{\ 2}(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e$$

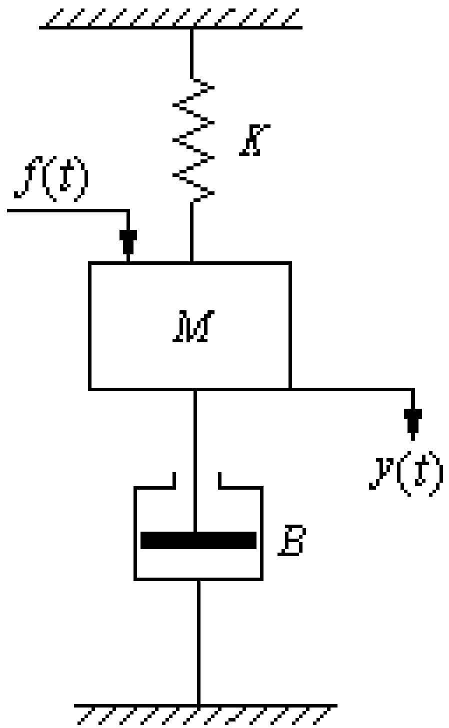


二阶系统的响应分析

➢ 回顾第2章的例子

- **例2. 质量-弹簧-阻尼系统**

$$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

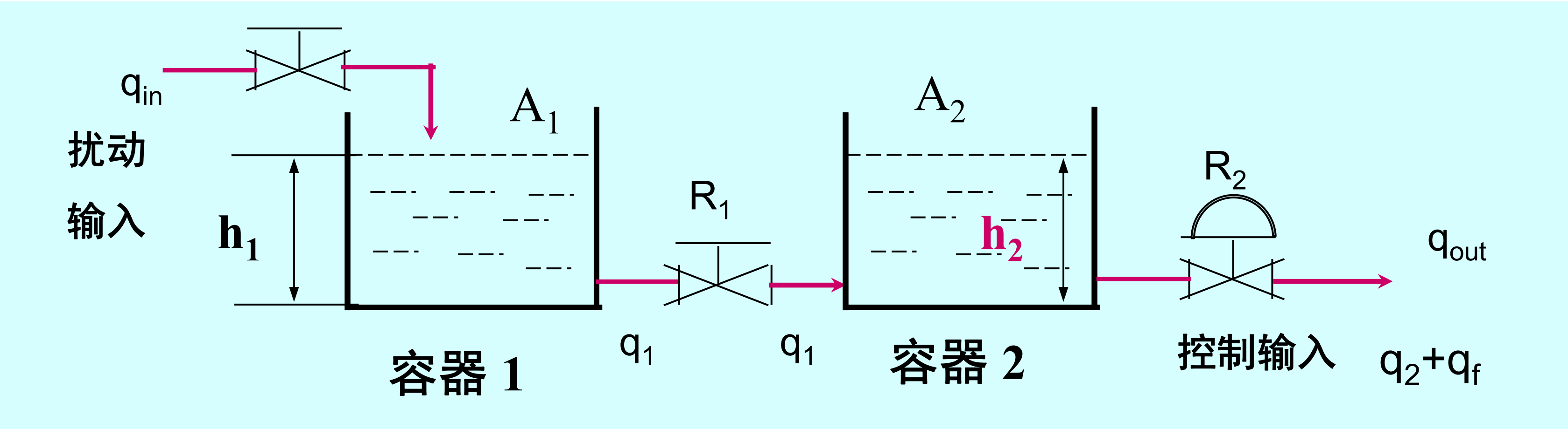


二阶系统的响应分析

➢ 回顾第2章的例子

- **例3. 液位系统**

$$R_1A_1R_2A_2\frac{d^2h_2}{dt^2}+(R_1A_1+R_2A_2+R_2A_1)\frac{dh_2}{dt}+h_2=R_2q_{in}-R_2q_f-R_1A_1R_2\frac{dq_f}{dt}$$



所有这些常见例子均为稳定的二阶系统

二阶系统的响应分析

- 对于没有零点的二阶系统，系统具有两个极点

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}, \quad T > 0$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

二阶系统的标准形式

ζ是无量纲的阻尼比（阻尼系数），$\omega_n = \dfrac{1}{T} > 0$称为自然频率

圆频率ω（弧度/秒）

普通频率f（次/秒或赫兹）

$f = \dfrac{1}{\tau}, \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{\tau}, \tau$是周期

二阶系统的响应分析

- **例1. R-L-C 串联电路** $LC\dfrac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\dfrac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e$

$$G(s)=\frac{Uc(s)}{E(s)}=\frac{1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

自然频率 $\omega_n=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

阻尼比 $\zeta=\dfrac{R/L}{2\omega_n}=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

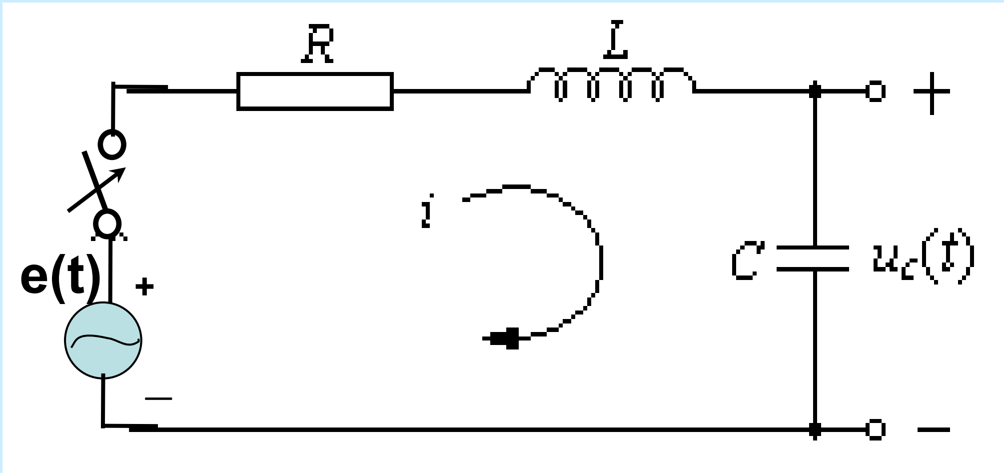
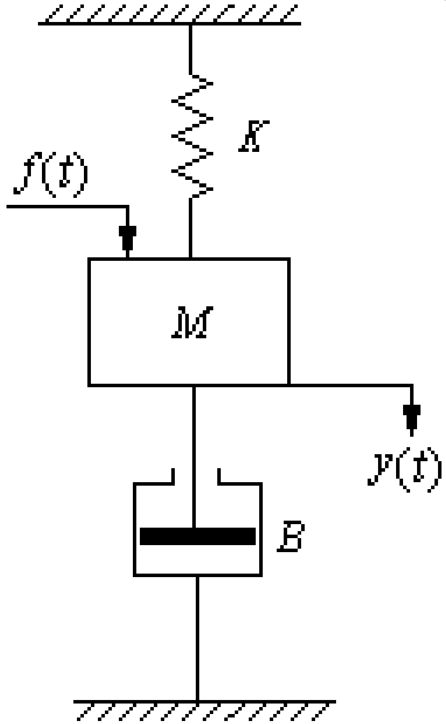


Fig .3

二阶系统的响应分析

- 例2. 质量-弹簧-阻尼系统



$$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{K}\frac{\frac{K}{M}}{s^2+\frac{B}{M}s+\frac{K}{M}}=\frac{1}{K}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

其中，自然频率

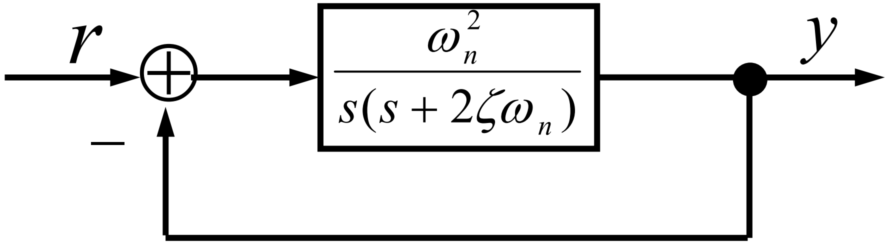
$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}$$

阻尼比

$$\zeta=\frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

二阶系统的响应分析

- 具有标准形式的二阶系统还可以表示为如下图所示的单位反馈系统结构



$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

原系统 $\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$ 不稳定

- 由二阶对象组成的单位反馈闭环系统仍然是二阶系统

二阶系统的响应分析

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- $\zeta>1$时，系统具有两个不同的实根

$$s_{1,2}=-(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n$$

2个互异的负实根，系统稳定

- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应为

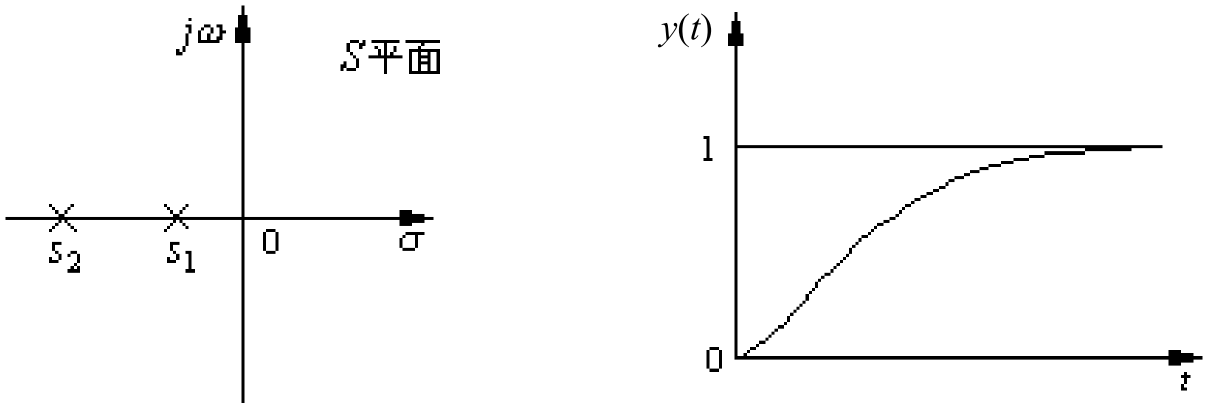
$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{[2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})]^{-1}}{s+(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}+\frac{[2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]^{-1}}{s+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n}$$

LT^{-1}

$$y(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right)$$

二阶系统的响应分析

- ζ>1时，系统特征方程的根在 S 平面的分布及响应曲线



(a) 根分布　　(b) 单位阶跃响应

此时的系统响应称为过阻尼响应

二阶系统的响应分析

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

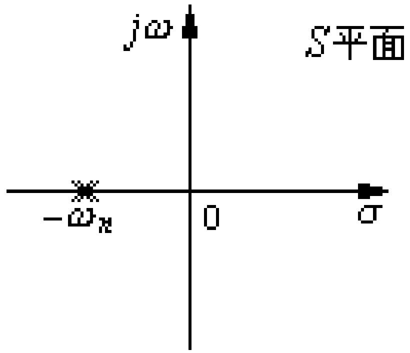
- ζ=1时，系统特征方程具有两个相等的实根 $s_{1,2}=-\omega_n$ 2重负实根，系统稳定
- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应为

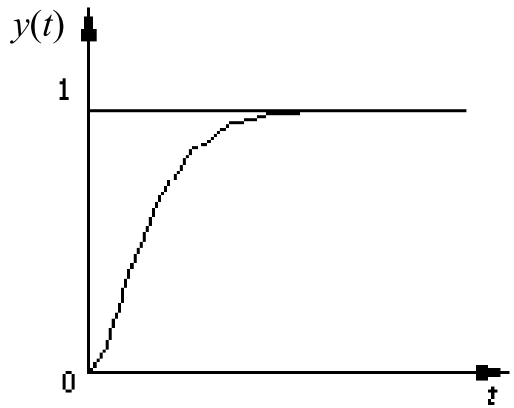
$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}-\frac{1}{s+\omega_n}$$

LT^{-1}

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

- 此时，系统响应称为临界阻尼响应





二阶系统的响应分析

- 0<ζ<1时，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)}$$

$$s_1,s_2=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

1对共轭负实部根，系统稳定

- 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应的传递函数为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

LT^{-1}

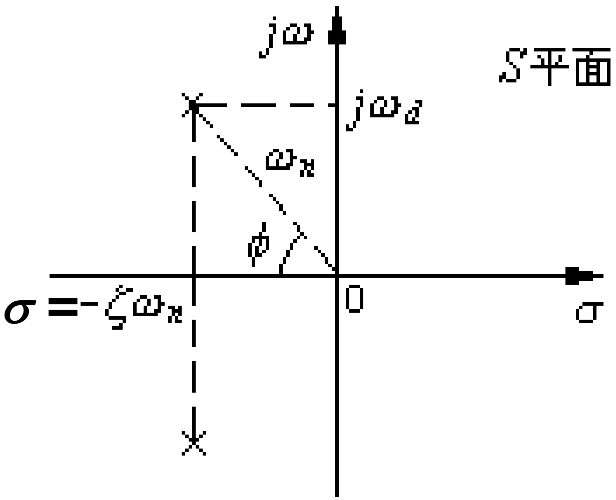
$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t)$$

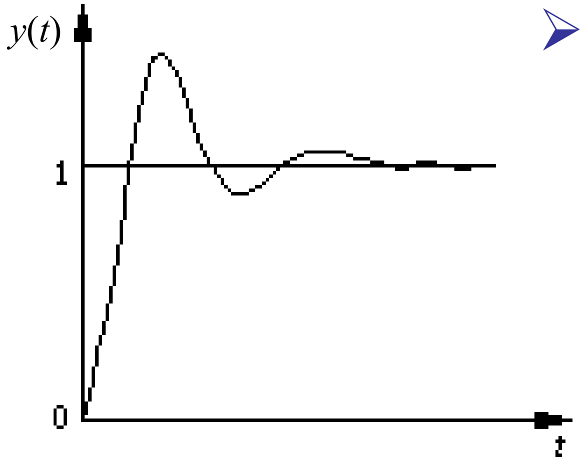
$$=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

二阶

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)}$$

$$\boxed{y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})}$$





- 此时，系统响应称为欠阻尼响应

$$s_1,s_2=\sigma\pm j\omega_d=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sigma=-\zeta\omega_n$$

衰减（阻尼）震荡频率 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\omega_n=\sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}=|s_1|=|s_2|$$

$$\phi=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

- 衰减振荡过程，其振荡频率为有阻尼振荡频率ω_d ，而其幅值则按$e^{\sigma t}$衰减，两者均由参数阻尼比ζ和自然频率ω_n决定

二阶系统的响应分析

➢ $\zeta=0$时，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s-j\omega_d)(s+j\omega_d)}$$

$$s_1,s_2=\pm j\omega_n$$

1对共轭虚根，系统临界稳定

➢ 如果系统输入为单位阶跃函数，则零初始条件下系统响应的传递函数为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

LT^{-1}

$$\boxed{y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1-\cos\omega_n t}$$

➢ 响应曲线将以自然频率 ω_n作等幅振荡

二阶系统的响应分析

- $\zeta<0$时，系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$

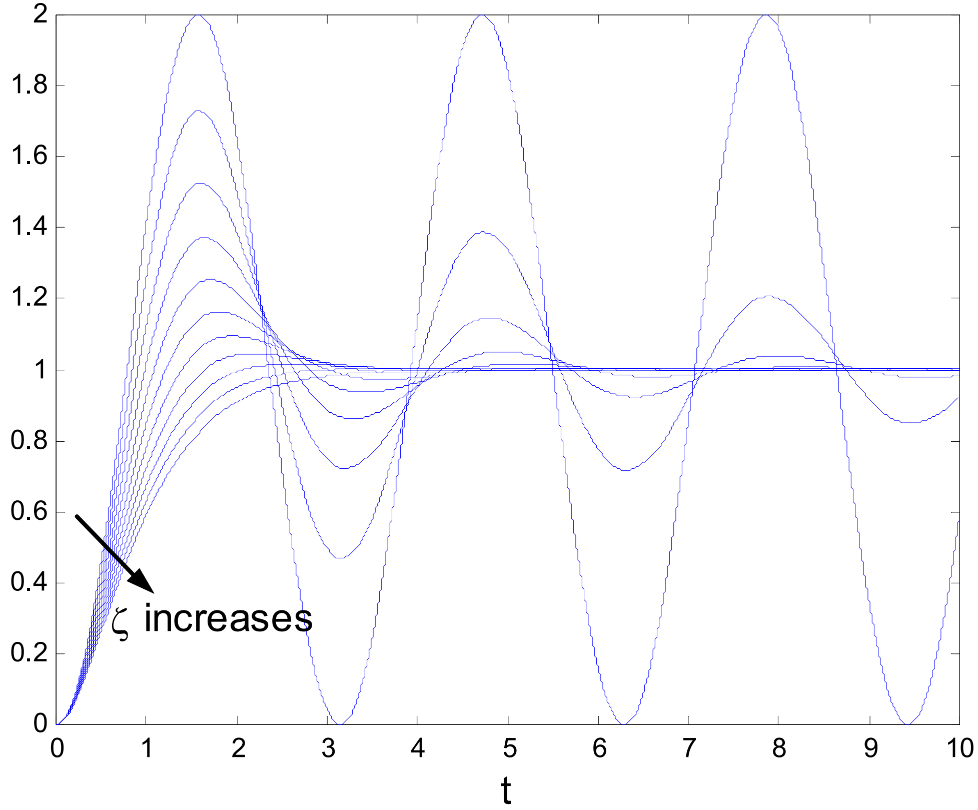
$$s_1,s_2=\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n$$

2个正实部根，系统不稳定

二阶系统的响应分析

- 不同的 ζ 取值下的单位阶跃响应

$0 \leq \zeta$



二阶系统的响应分析

- 阻尼比 ζ 与系统特征方程根在 S 平面 中位置的关系
  - $\zeta<0$，特征方程有2个正实部根，系统响应发散(不稳定)
  - $\zeta=0$，特征方程有1对共轭虚根，系统响应为等幅振荡(临界稳定)响应
  - $0<\zeta<1$，特征方程有1对共轭负实部根，系统响应为欠阻尼响应
  - $\zeta=1$，特征方程有相等负实根，系统响应为临界阻尼响应
  - $\zeta>1$，特征方程有不等负实根，系统响应为过阻尼响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **上升时间**：响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间（过阻尼系统）；或响应从零第一次上升到终值所需的时间（欠阻尼系统）。

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)$$

$$y(T_r)=1$$

$$\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_r+\phi)=0$$

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_r+\phi=\pi$$

$$\boxed{T_r=\frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

其中，

$$\phi=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **峰值时间**：系统响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

$$y_u(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$\frac{dy_u(t)}{dt}=y_\delta(t)=\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)-\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)$$

其中，$\phi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$$\frac{dy_u(t)}{dt}=0\Rightarrow\zeta\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)=\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)\Rightarrow\tan(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\Rightarrow\tan(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\phi)=\tan\phi\Rightarrow\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t=0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots$$

T_p是第一次达到峰值的时间$\Rightarrow\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_p=\pi\Rightarrow T_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi}{\omega_d}$

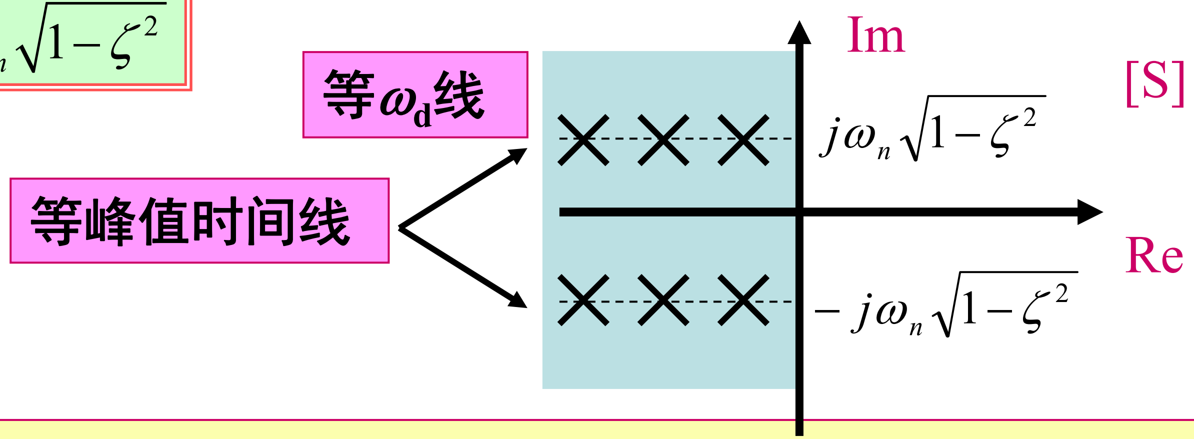
- **峰值时间是阻尼振荡频率ω_d（$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$）的函数**

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **峰值时间**：系统响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

$$y_u(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



峰值时间 T_p与阻尼振荡频率 ω_d 成反比。当 ω_n一定，ζ越小，T_p也越小。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **超调量：**响应的最大偏离量与终值的差同终值的比。

- 最大偏离量

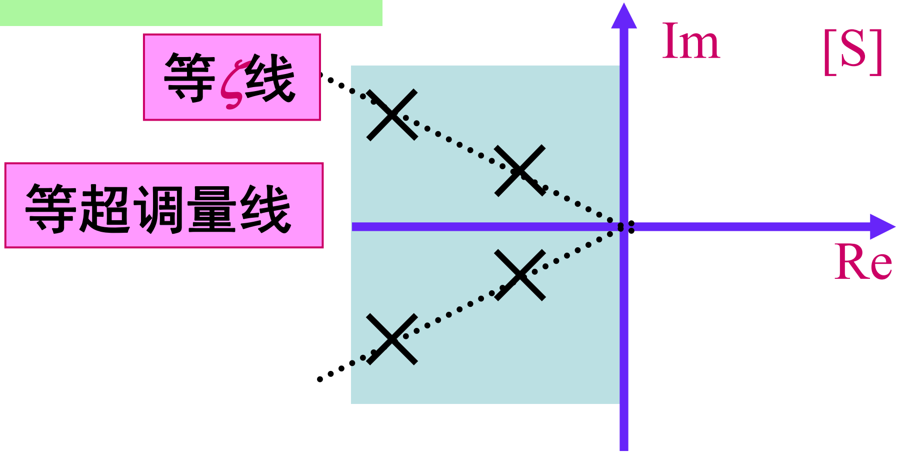
$$M_p = y(T_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \phi\right)$$

$$= 1 + e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

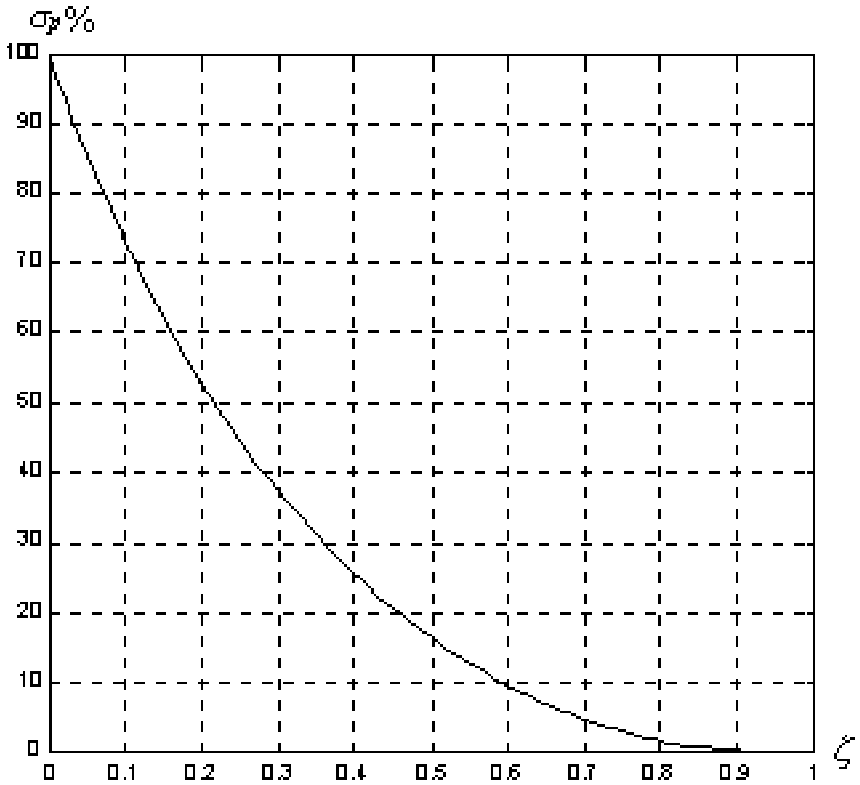
- 超调量

$$\sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



超调量完全由ζ决定，ζ越小，超调量越大。当ζ=0时，σ %=100%，当ζ=1时，σ % =0。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



σ% 和 ζ 的关系

$$\sigma = \frac{y(T_p) - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **调节时间：响应到达并保持在终值±5%（±2%）内所需的最短时间。**

- 误差表达式

$$
\begin{aligned}
e(t) &= r(t) - y(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \qquad (t \geq 0)
\end{aligned}
$$

- 考虑到系统时间响应曲线总是在包络线的两条分支之间变化

$$
\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \beta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right| \leq \left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right| \leq 0.05, 或 0.02
$$

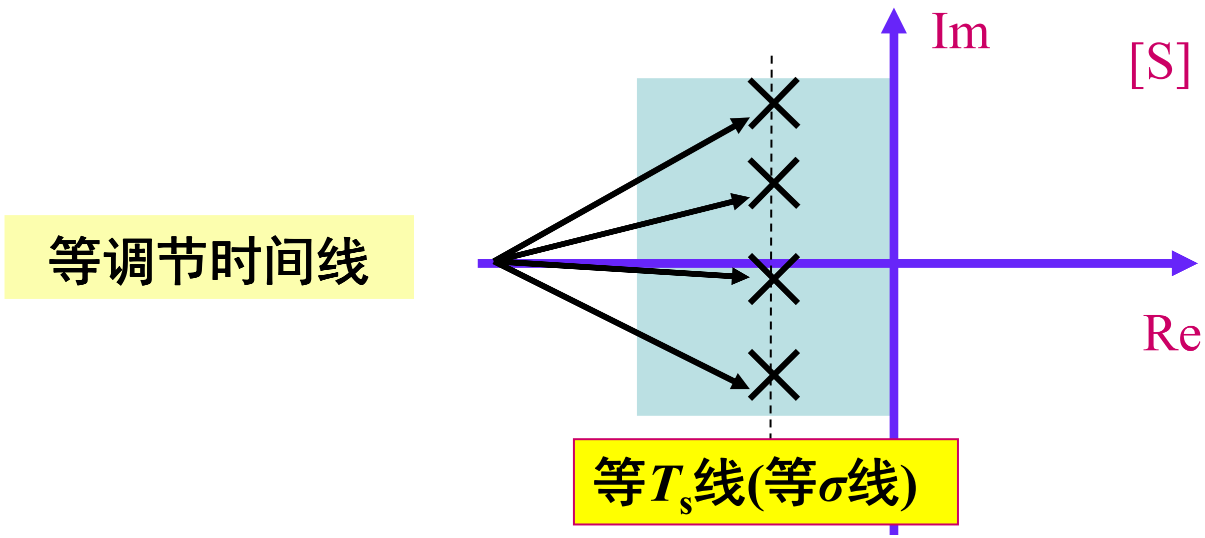
欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- 通常利用两个近似公式计算调节时间

$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right| = 0.05 \Rightarrow \zeta\omega_n T_s \approx 3 \Rightarrow T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$ 对于 5% 误差

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ 对于 2% 误差

- 调节时间仅仅取决于复数共轭极点的实部 $\zeta\omega_n$



欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- **衰减比：**同方向过渡过程曲线上的相邻两个波峰之比

第3峰值（第2波峰）时间$T_3 = \dfrac{3\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$y(T_3) = 1 + e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$n = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

与超调量σ类似，与阻尼比ζ之间有一一对应的关系

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

- 对于不包含零点的欠阻尼二阶系统，动态性能指标的**精确公式**

$$M_p = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_r = \frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$n = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$ 对于 5% 误差

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$ 对于 2% 误差

通常还用：$T_s \approx \dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

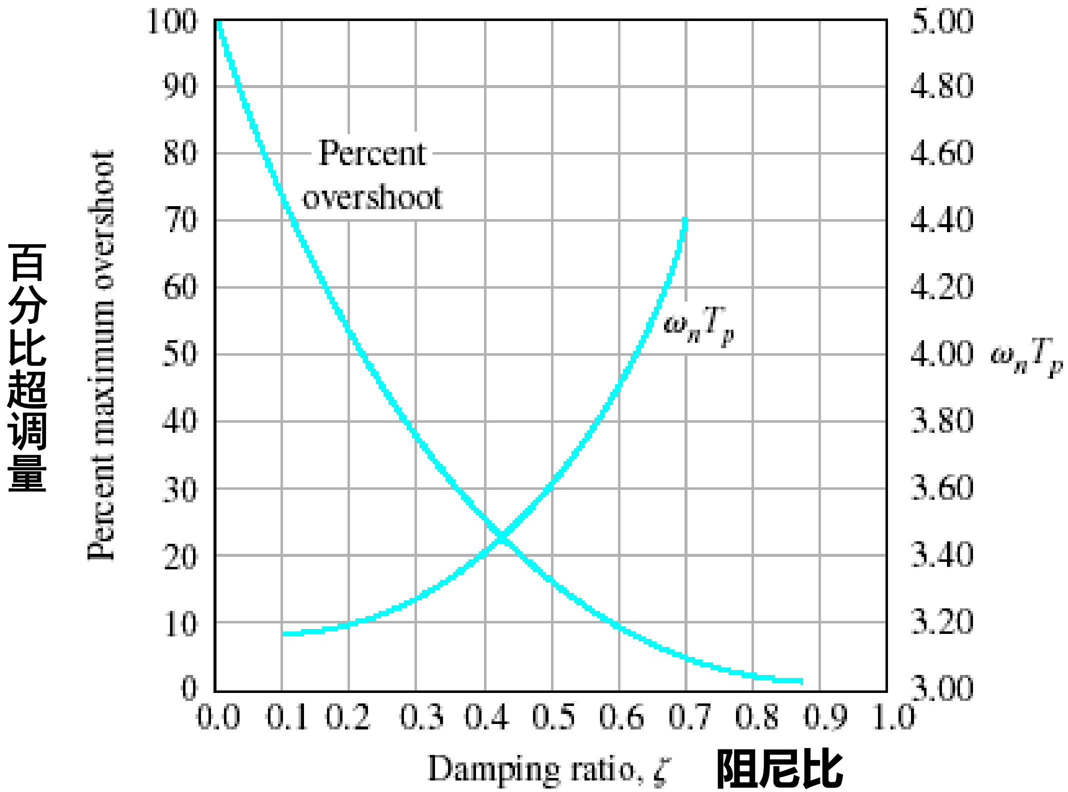
$$T_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\qquad T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\qquad T_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- **如何选取ζ和ω_n来满足系统设计要求？性能指标与ζ和ω_n的关系如下：**
  - 当ω_n一定，要减小T_r和T_p，必须减少ζ值，要减少 T_s则应增大ζ值，而且ζ值有一定范围，不能过大。
  - 增大ω_n，能使T_r，T_p和T_s都减小。
  - 最大超调量σ只由ζ决定，ζ越小，σ越大。所以，一般先根据σ的要求选择ζ值，在实际系统中，ζ值一般在0.5～0.8之间。

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

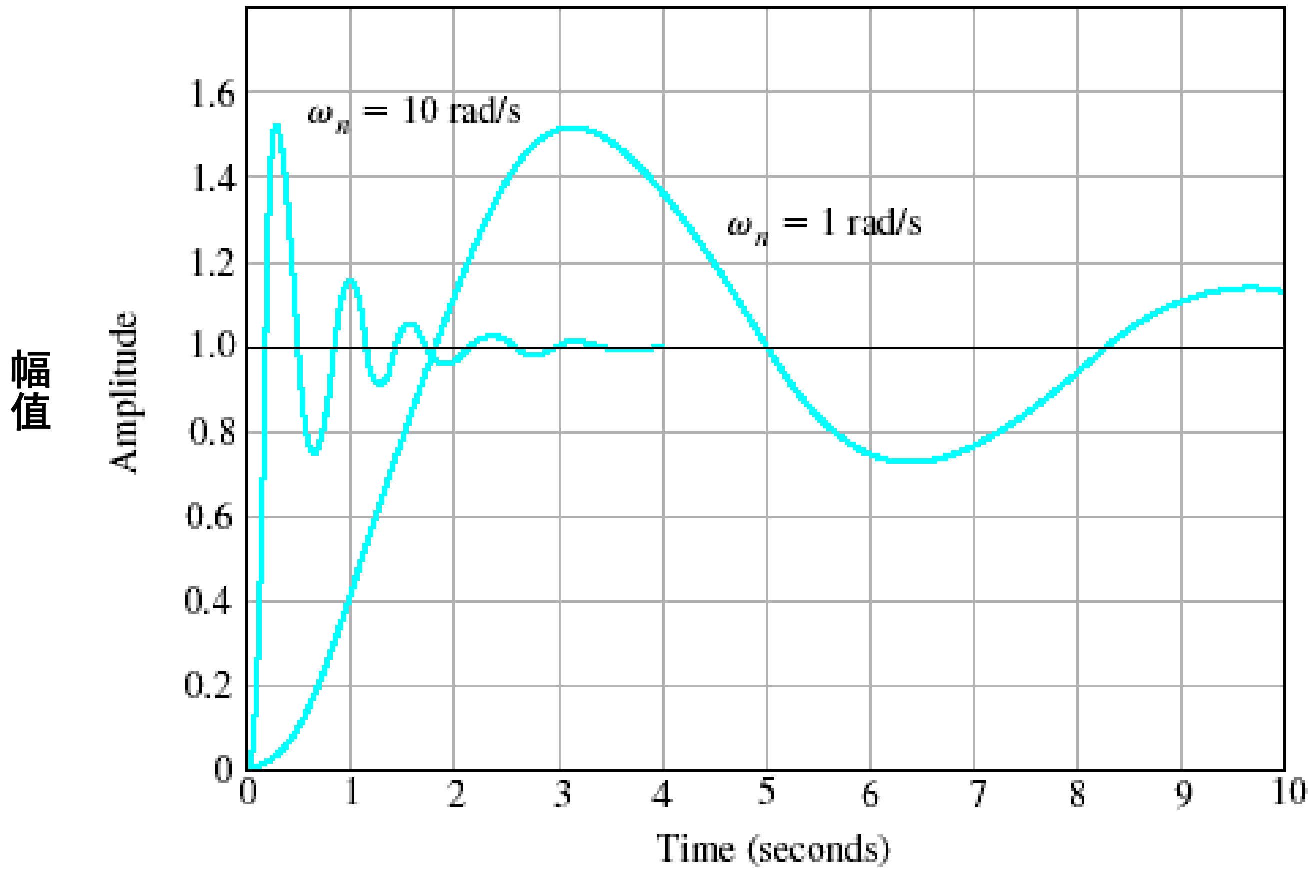


Percent overshoot and normalized peak time versus damping ratio ζ for a second-order system

二阶系统的百分比超调量、归一化峰值时间与阻尼比的关系

从控制系统设计目标来说，峰值时间与超调量之间具有相互矛盾的关系，因此在设计的时候要考虑到两者之间的折中。

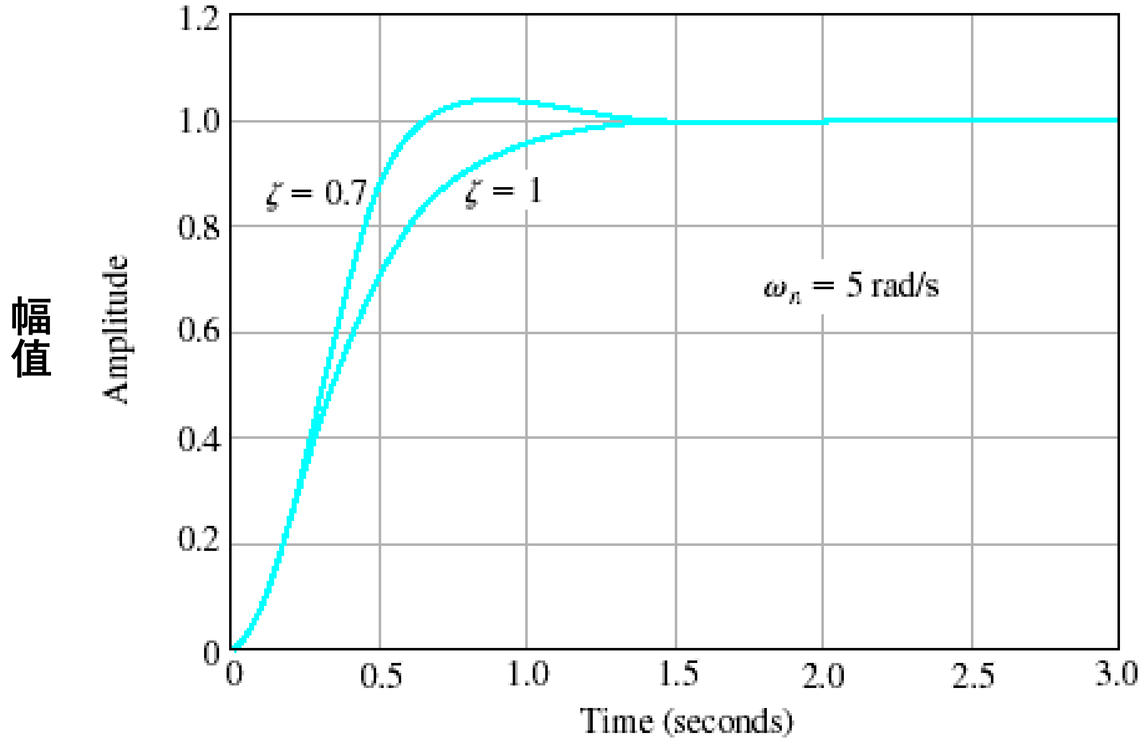
欠阻尼二阶系统的动态性能指标



The step response for $\zeta = 0.2$ for $\omega_n = 1$ and $\omega_n = 10$.

阶跃响应

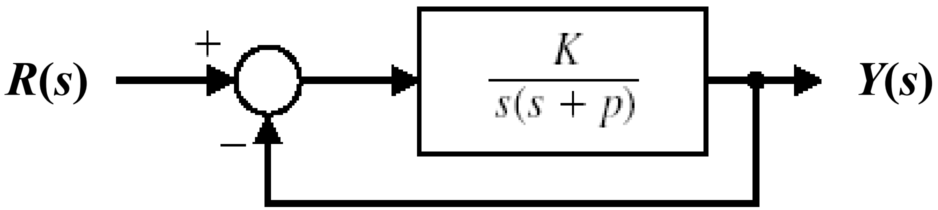
欠阻尼二阶系统的动态性能指标



The step response for $\omega_n = 5$ with $\zeta = 0.7$ and $\zeta = 1$.

阶跃响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



$$G_o(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

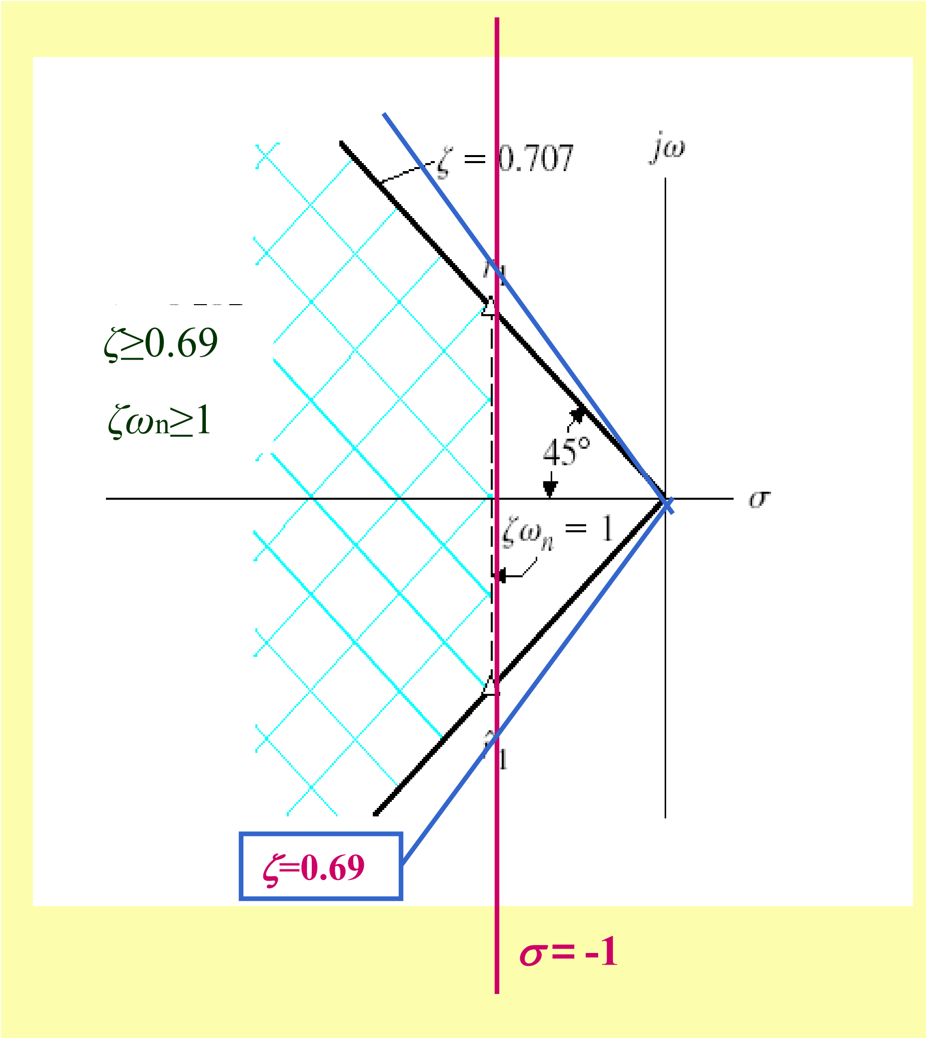
选择增益 *K* 和参数 *p*，使得百分比超调量小于 5%，调节时间（考虑 2% 误差）小于 4 秒。

解：

$$\because \quad \sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\le 0.05$$

$$\ln 0.05\ge-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\Rightarrow\zeta^2\ge 0.477\Rightarrow\zeta\ge 0.69$$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



$$\zeta \geq 0.69$$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4 \Longrightarrow \zeta\omega_n \geq 1$$

闭环系统特征根

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j \Longrightarrow T_s = 4 \quad \sigma = 4.3\%$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \omega_n = \sqrt{2}$$

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

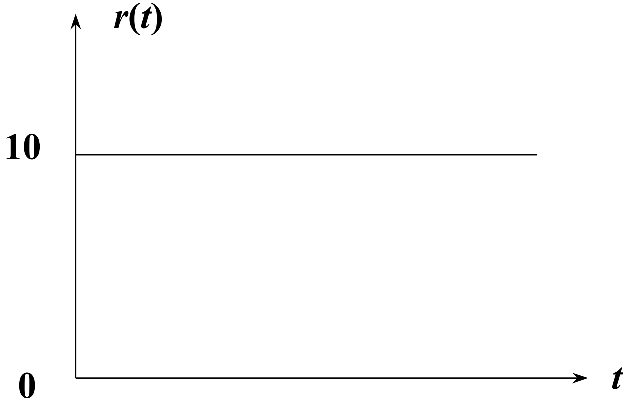
$\boxed{K=2，p=2}$

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

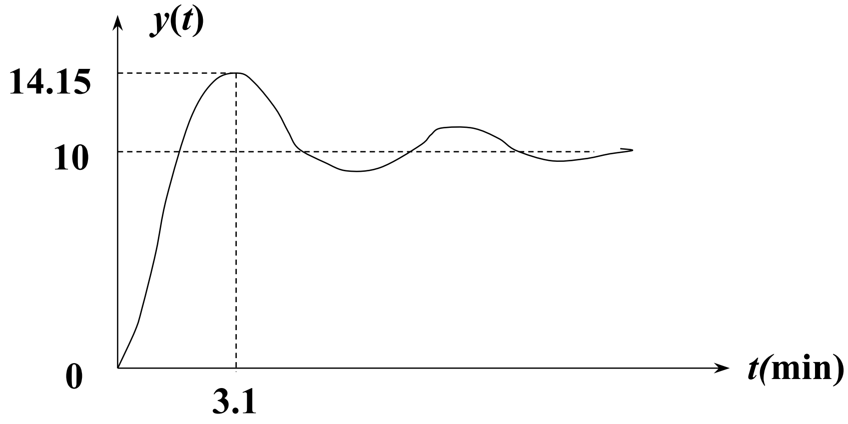
❖（1997年考研题）设某一单位反馈的二阶系统的阶跃响应曲线如图示，试确定此该系统的开环传递函数。提示：

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



系统输入曲线



系统响应曲线

欠阻尼二阶系统的动态性能指标

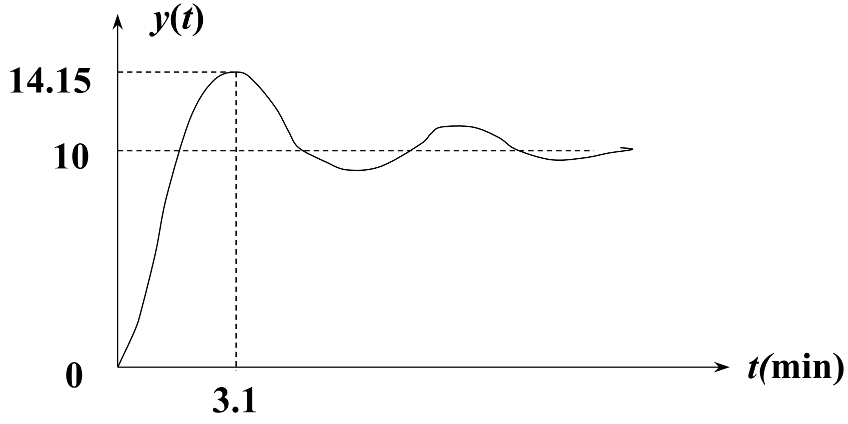
由图直接可得： $\sigma = \dfrac{14.15-10}{10} = 0.415; T_p = 3.1$

由 $\sigma = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.415$ $\quad T_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.1$

解之： $\zeta = 0.27 \quad \omega_n = 1.05$

故：系统开环传递函数：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} = \frac{1.1025}{s(s+0.567)}$$

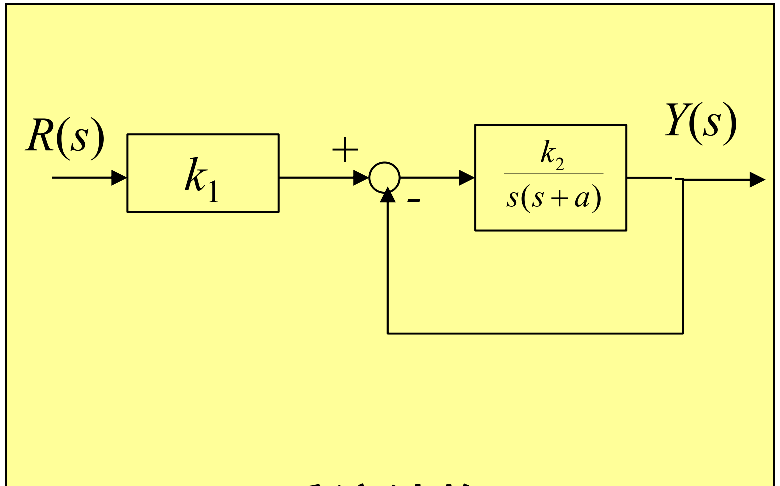


系统响应曲线

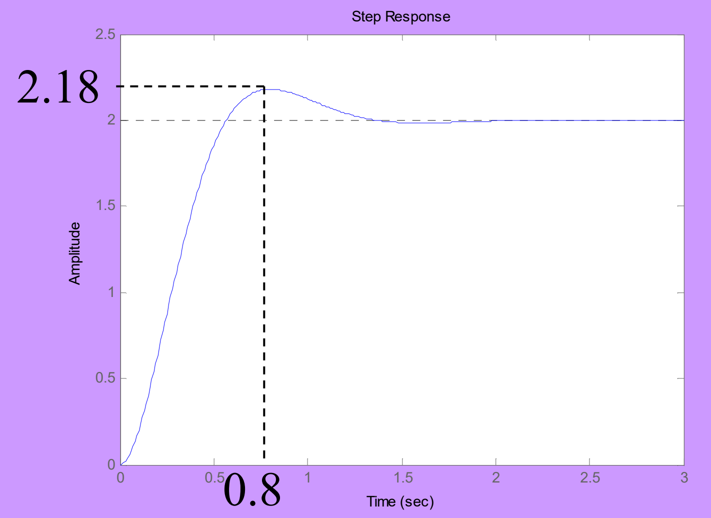
欠阻尼二阶系统的动态性能指标

❖（2005年考研题）系统结构及其单位阶跃响应如图。试求k_1、k_2和a值。[提示：0<ζ<1时，标准二阶系统的单位响应]

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

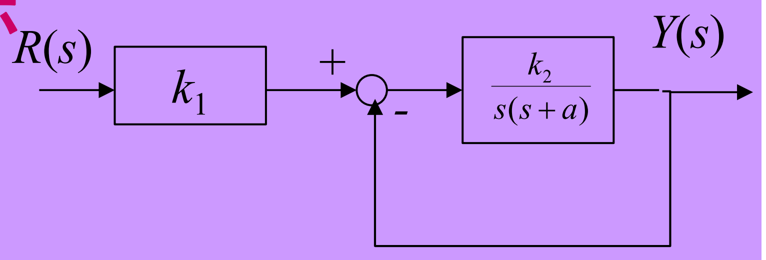


系统结构



单位阶跃响应

欠阻尼二阶系统的动态性能指标



系统结构

解：

$$G(s)=\frac{k_1\times\dfrac{k_2}{s(s+a)}}{1+\dfrac{k_2}{s(s+a)}}=\frac{k_1k_2}{s^2+as+k_2}$$

$$k_1=2$$

$$\therefore\begin{cases}\omega_n^2=k_2\\ 2\zeta\omega_n=a\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{2.18-2}{2}=9\%=e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}\Rightarrow\zeta=0.608$$

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.8\Rightarrow\omega_n=4.946$$

$$\therefore\ k_2=\omega_n^2=24.463$$
$$a=2\zeta\omega_n=6.014$$

Thanks !