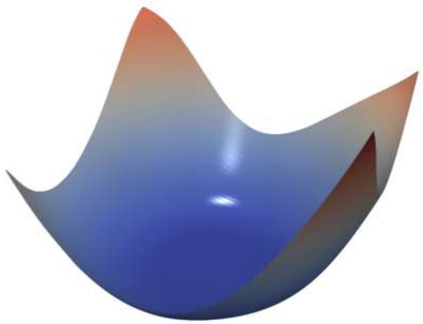
第六章 非线性规划

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
- 非线性规划数值解法
- 非线性规划与人工智能



非线性规划的解析解法

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
  - 无约束极值问题
    - 一阶条件
    - 二阶条件
  - 有约束极值问题：
    - 等式约束
    - 不等式约束 （**Kuhn-Tucker**条件）
    - 一般约束
- 凸规划

非线性规划的数学模型

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

s.t.

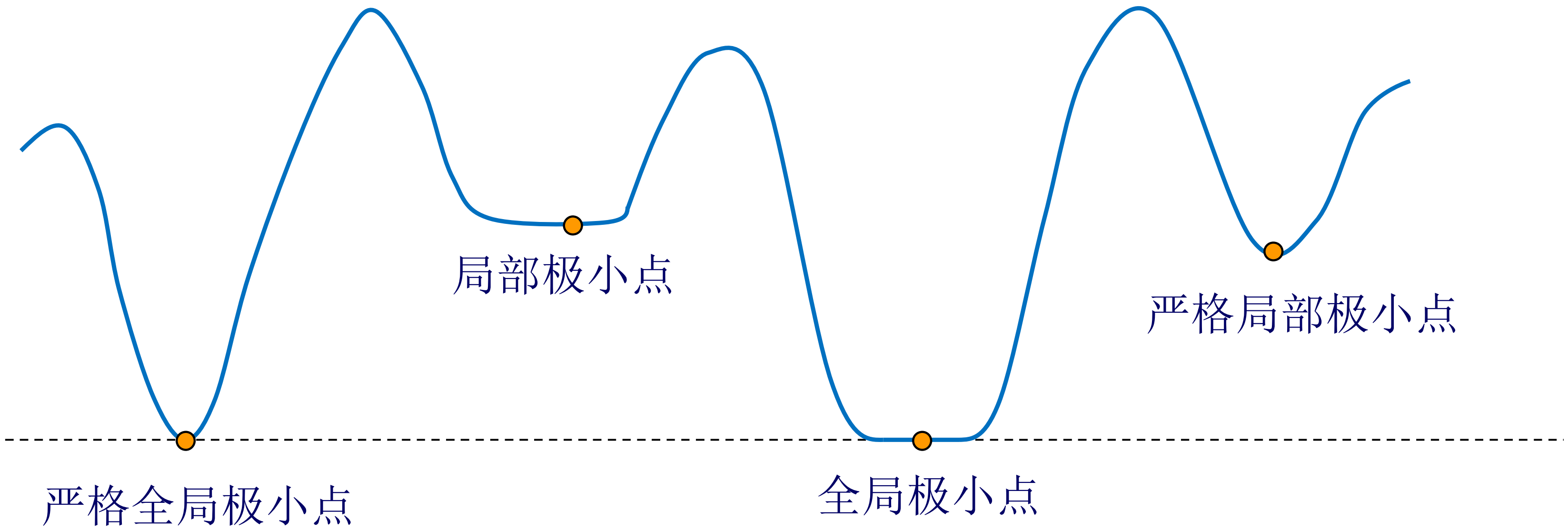
$$h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

以求最小值为标准问题

非线性规划解的类型



- *局部极小点*： $\exists\varepsilon>0$，满足$f(\boldsymbol{x}^*)\le f(\boldsymbol{x})$， $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}^*,\varepsilon)\cap$可行域
- *全局极小点*（最小点）：$f(\boldsymbol{x}^*)\le f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in$可行域

严格极小点： “<”

问题：规划的目标是找哪一种极小点？

非线性规划的解析解

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
  - 无约束极值问题
    - 一阶条件
    - 二阶条件
  - 有约束极值问题：
    - 等式约束
    - 不等式约束 （**Kuhn-Tucker**条件）
    - 一般约束
- 凸规划

无约束极值问题

$$\min f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^n$$

- 一阶极值条件（必要条件）
- 二阶极值条件（必要条件、充分条件）

一阶极值条件（必要条件）

驻点条件 $$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}=\mathbf{0}$$

梯度 $$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \Delta\boldsymbol{x} + \mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$$

梯度的几何性质

- 假设$\boldsymbol{p}_t$为目标等值面上的切向矢量， λ为足够小的正数，有

$$f(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{p}_t) - f(\boldsymbol{x}) \approx \lambda\nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{p}_t = 0$$

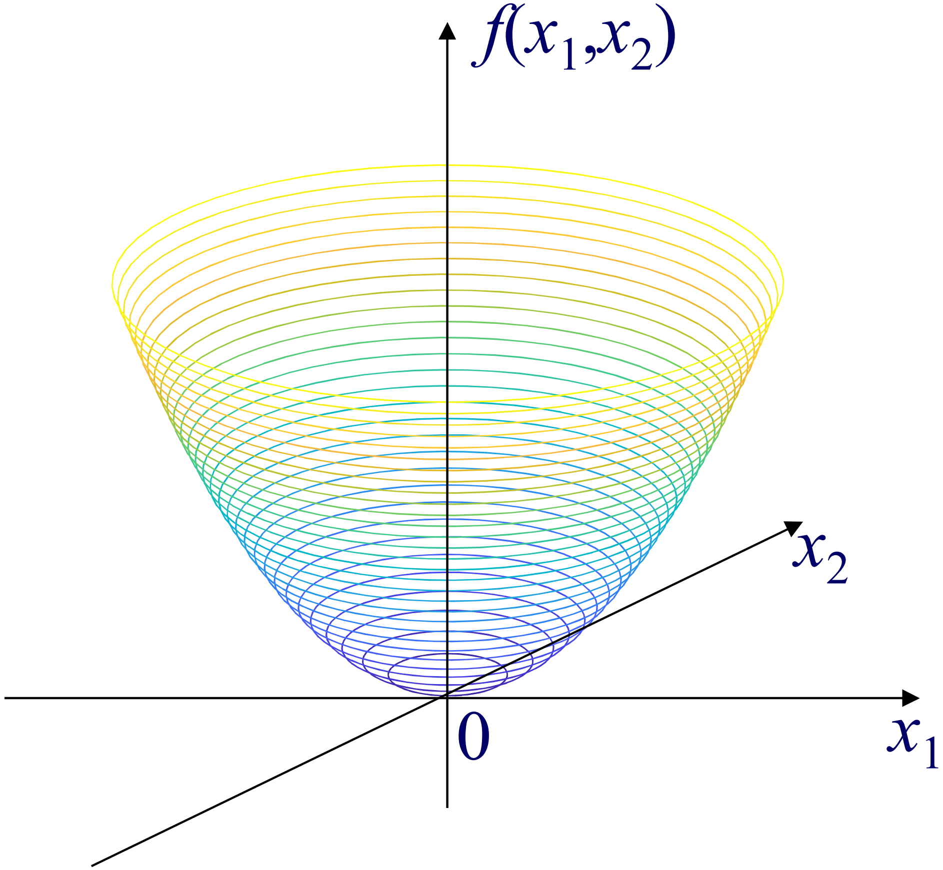
- $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$与目标函数等值面的切面正交，为等值面在$\boldsymbol{x}$的**法向量**

- $\boldsymbol{x}$的梯度方向$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{x}$点目标函数值$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **增长最快**的方向

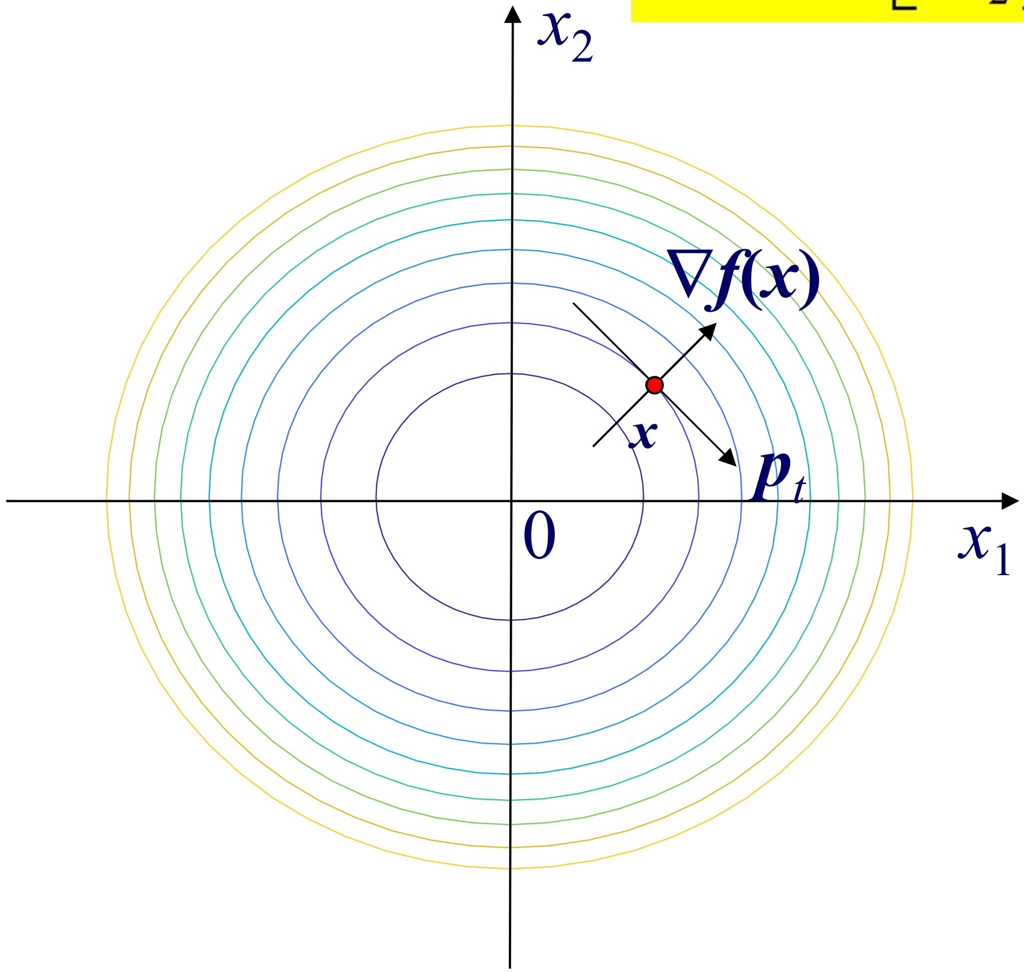
$$f(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{x}) \approx \lambda\nabla f(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{p}$$

梯度图示

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$$



$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$



无约束极值问题

$$\min f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^n$$

- 一阶极值条件（必要条件）
- 二阶极值条件（必要条件、充分条件）

Taylor公式的二阶展开

$$f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \Delta\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \Delta\boldsymbol{x} + \mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots \quad \cdots\cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Hesse Matrix

二阶极小值条件（必要条件）

$$f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})^T \Delta\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} + \mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$$

$$\boxed{\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=\mathbf{0} \qquad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \ge 0}$$

局部极小值⇒“≥”半正定

严格局部极小值⇒“>”正定

局部极大值⇒“≤”半负定

严格局部极大值⇒“<”负定

为什么不是充分条件？

矩阵的正定与负定

二次型： $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$ $\boldsymbol{A}$为对称矩阵

$\forall \boldsymbol{x}\neq 0$ $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0 \Longrightarrow \boldsymbol{A}>0$ 正定矩阵

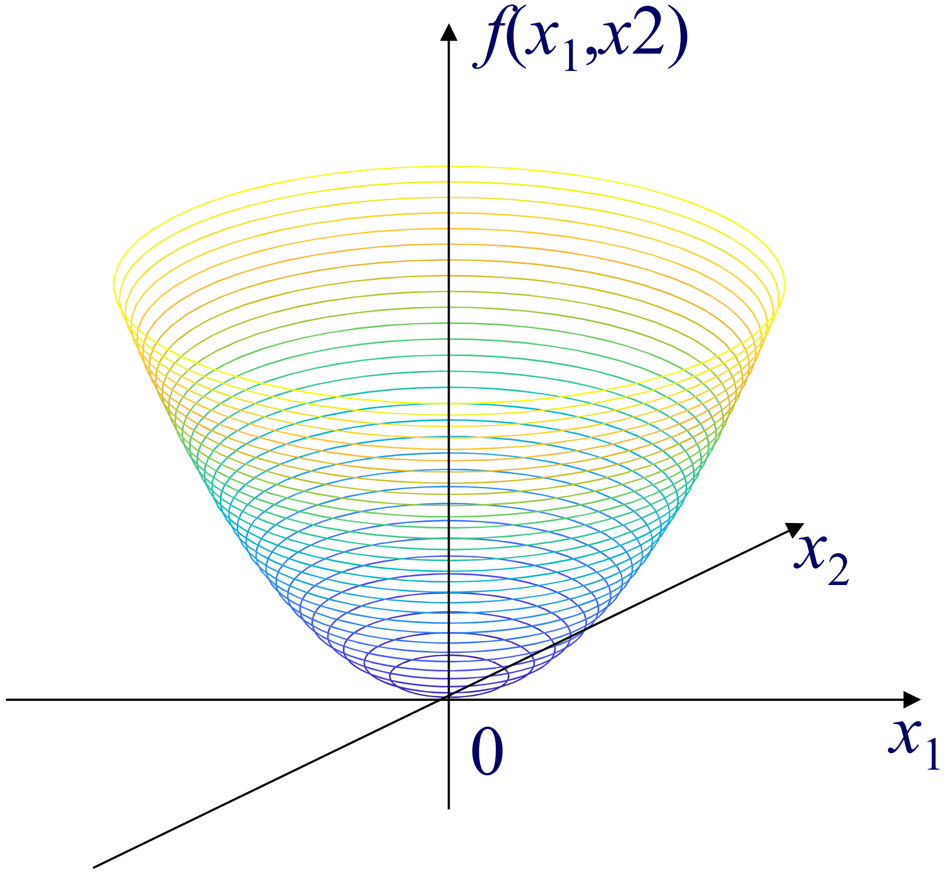
$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{A}\geq 0$ 半正定矩阵

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0 \Longrightarrow \boldsymbol{A}<0$ 负定矩阵

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{A}\leq 0$ 半负定矩阵

例1：Hesse矩阵为正定阵

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

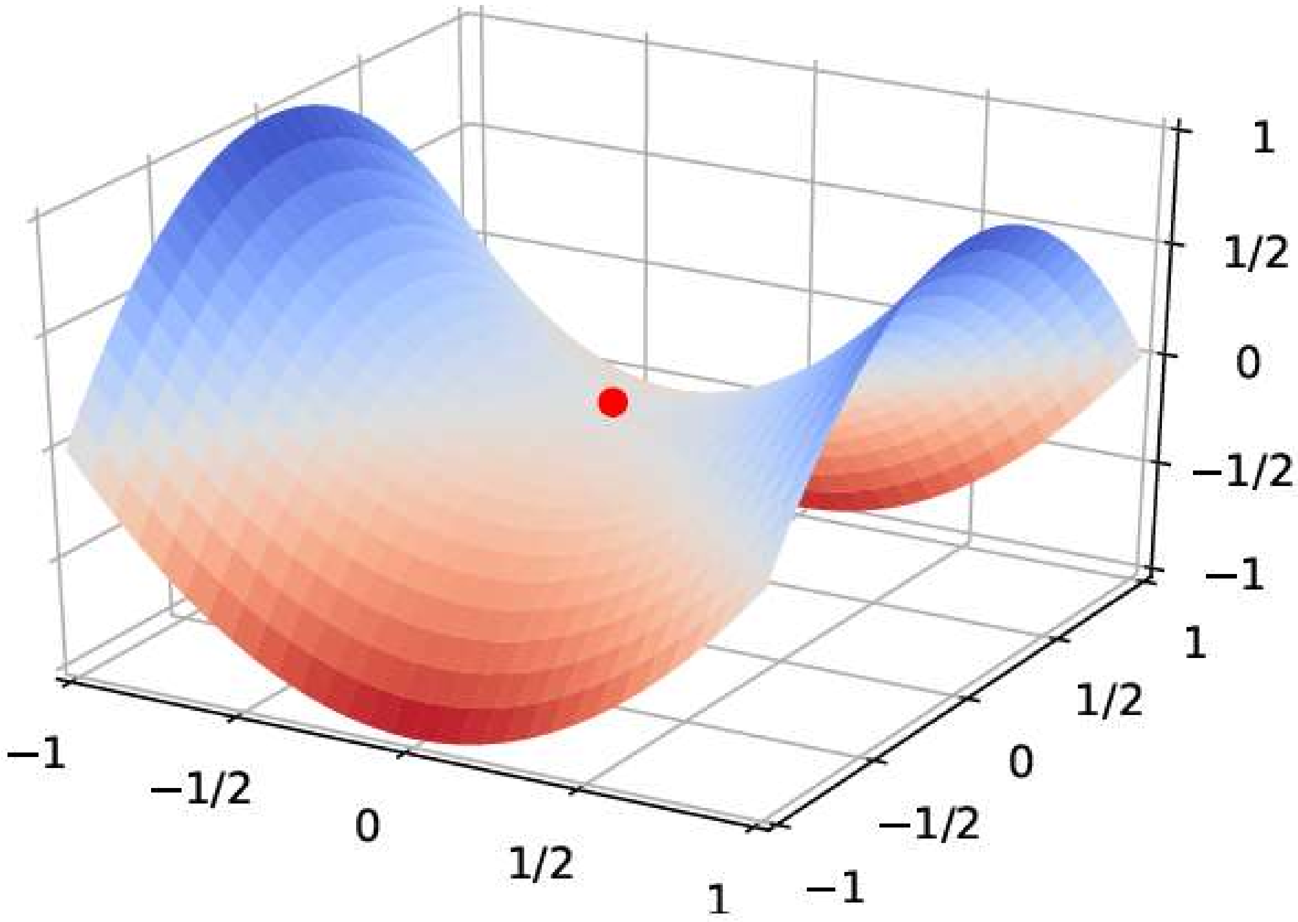


$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例2：鞍点

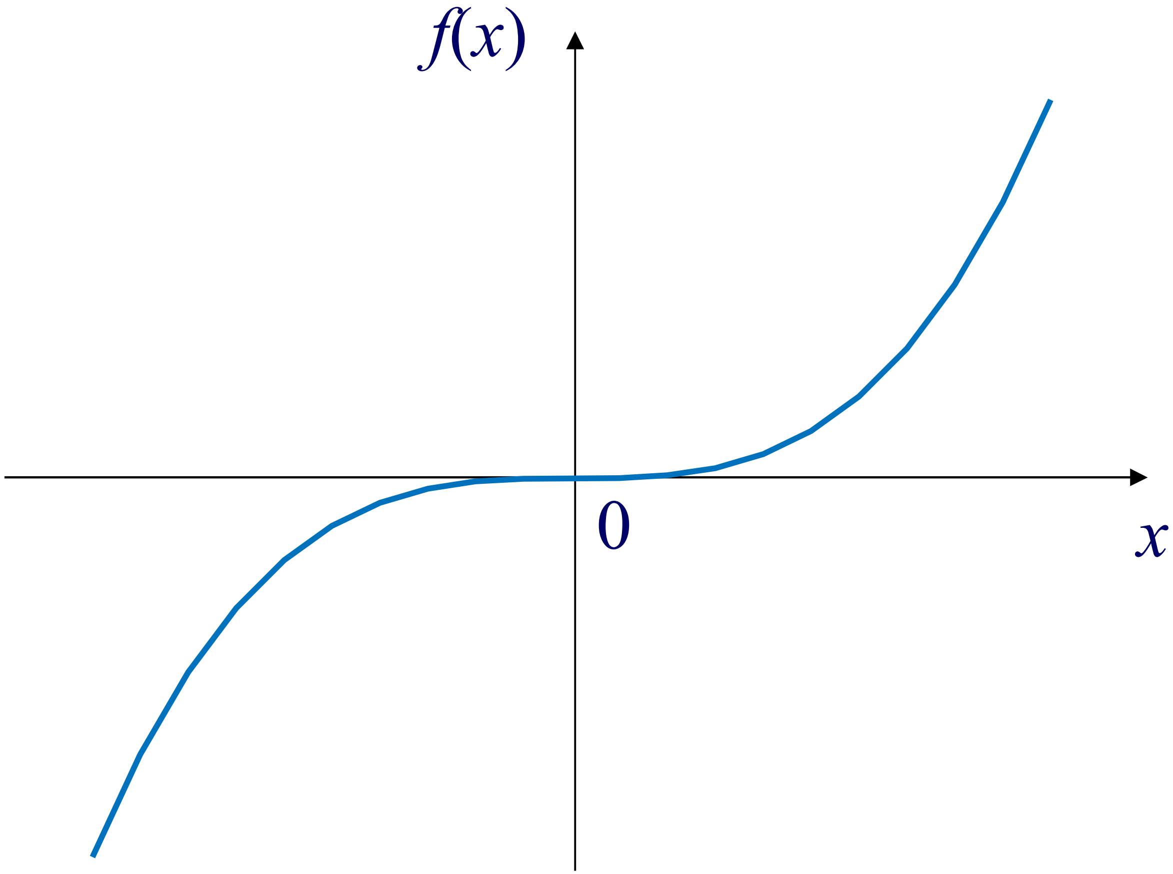
$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2^2$$



$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

例3：必要非充分举例



$f(x)=x^3$

$\nabla f(x)=3x^2$

$\nabla^2 f(x)=6x$

如果进一步满足x^*邻域内的所有点的$\nabla^2 f(x)\geq 0$，则$\nabla f(x^*)=0$且$\nabla^2 f(x^*)\geq 0$是x^*是极小值的充分条件。（应用不方便！）

二阶极小值条件（充分条件）

$$f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^T\Delta\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^T\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}+\mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$$

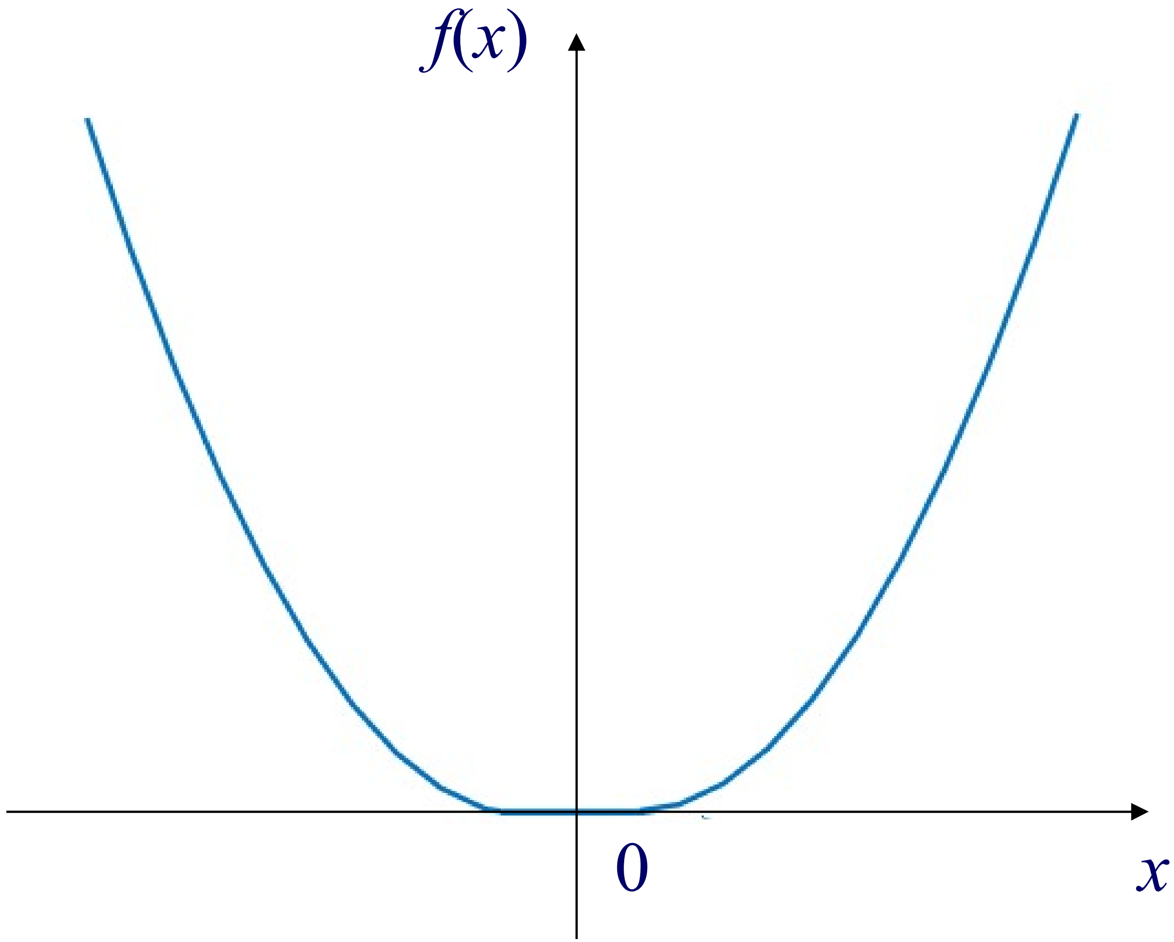
$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=\mathbf{0} \qquad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)>0$$

“>” 正定⇒严格局部极小值

“<” 负定⇒严格局部极大值

“=” 需检验更高阶导数项

例4 充分非必要举例



$\nabla f(0) = 0$

$\nabla^2 f(0) = 0$

小结

无约束极小值问题的最优性条件

■一阶必要条件：（局部极小值/局部极大值）

$$\nabla f(x^*)=0$$

■二阶必要条件：（局部极小值）

$$\nabla f(x^*)=0 \text{且} \nabla^2 f(x^*)\geq 0$$

■二阶充分条件：（严格局部极小值）

$$\nabla f(x^*)=0 \text{且} \nabla^2 f(x^*)>0$$

非线性规划的解析解

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
  - 无约束极值问题
    - 一阶条件
    - 二阶条件
  - 有约束极值问题：
    - 等式约束
    - 不等式约束 （**Kuhn-Tucker**条件）
    - 一般约束
- 凸规划

等式约束极值问题

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

s.t. $h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

s.t. $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0$

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Lagrange函数法

定义Lagrange函数

$$\min L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}^T$$

求无约束极值问题：

$$\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{x^*} = \mathbf{0} \Longrightarrow \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\lambda^*} = \mathbf{0} \Longrightarrow h_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

非线性规划的解析解

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
  - 无约束极值问题
    - 一阶条件
    - 二阶条件
  - 有约束极值问题：
    - 等式约束
    - 不等式约束（**Kuhn-Tucker**条件）
    - 一般约束
- 凸规划

不等式约束极值问题

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

s.t. $g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

思考：能否如线性规划化为等式约束的问题？

求解思路

- 直观思想：邻域内不存在可行的更优解

- 不存在同时满足以下两个条件的方向
  - 可行点的可行方向
  - 目标函数的下降方向

- 最优性条件
  - **Fritz John**条件
  - **Kuhn-Tucker**条件

可行方向

可行点$\boldsymbol{x}^{(0)}$的可行方向$\boldsymbol{p}$是$\boldsymbol{x}^{(0)}$ 沿$\boldsymbol{p}$方向移动无限小步后仍在可行域$\boldsymbol{R}$内的方向（约束函数值增大方向），数学上可表述为：

$\exists \lambda_0 > 0$，对于$\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$，有：

$$\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p} \in R \text{，} \qquad R = \{\boldsymbol{x} \mid g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0, j = 1, 2, \ldots, l\}$$

即 $$g_j(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p}) \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

思考：可否直接用∃λ>0，满足所有 $g_j(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p}) \geq 0$ 定义？

可行方向判别条件

$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^{(0)})^T \boldsymbol{p} > 0$　　$\forall j \in J(\boldsymbol{x}^{(0)})$　　$J(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \{j \mid g_j(\boldsymbol{x}^{(0)})=0, j = 1, 2, \ldots, l\}$

起作用约束集合

证明：　　根据**Taylor**公式，有

$$g_j(\boldsymbol{x}^{(0)}+\lambda \boldsymbol{p}) = g_j(\boldsymbol{x}^{(0)}) + \lambda \nabla g_j(\boldsymbol{x}^{(0)})^T \boldsymbol{p} + O(\lambda)$$

$\|\boldsymbol{p}\| = 1$

当λ足够小时，如果 $j \notin J$ ，假设$\boldsymbol{g_j(x)}$连续，有

$$g_j(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p}) \geq 0$$

如果，$j \in J$ ，当 $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^{(0)})^T \boldsymbol{p} > 0$时，也有

$$g_j(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p}) \geq 0$$

几何含义：与所有起作用约束梯度方向一致，使$\boldsymbol{g_j(x) \geq 0}$

下降方向

定义：令目标函数值 $\boldsymbol{f(x^{(0)})}$ 下降的方向，满足

$\exists\lambda_0 > 0$，对于 $\forall\lambda \in (0, \lambda_0]$，有 $f(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{p}) < f(\boldsymbol{x}^{(0)})$

判别条件：$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})^T \boldsymbol{p} < 0$

证明：**Taylor**公式

$$f(\boldsymbol{x}^{(0)} + \lambda \boldsymbol{P}) = f(\boldsymbol{x}^{(0)}) + \lambda \nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})^T \boldsymbol{p} + O(\lambda)$$

几何含义：与目标函数负梯度方向一致

局部极小值存在的直观条件

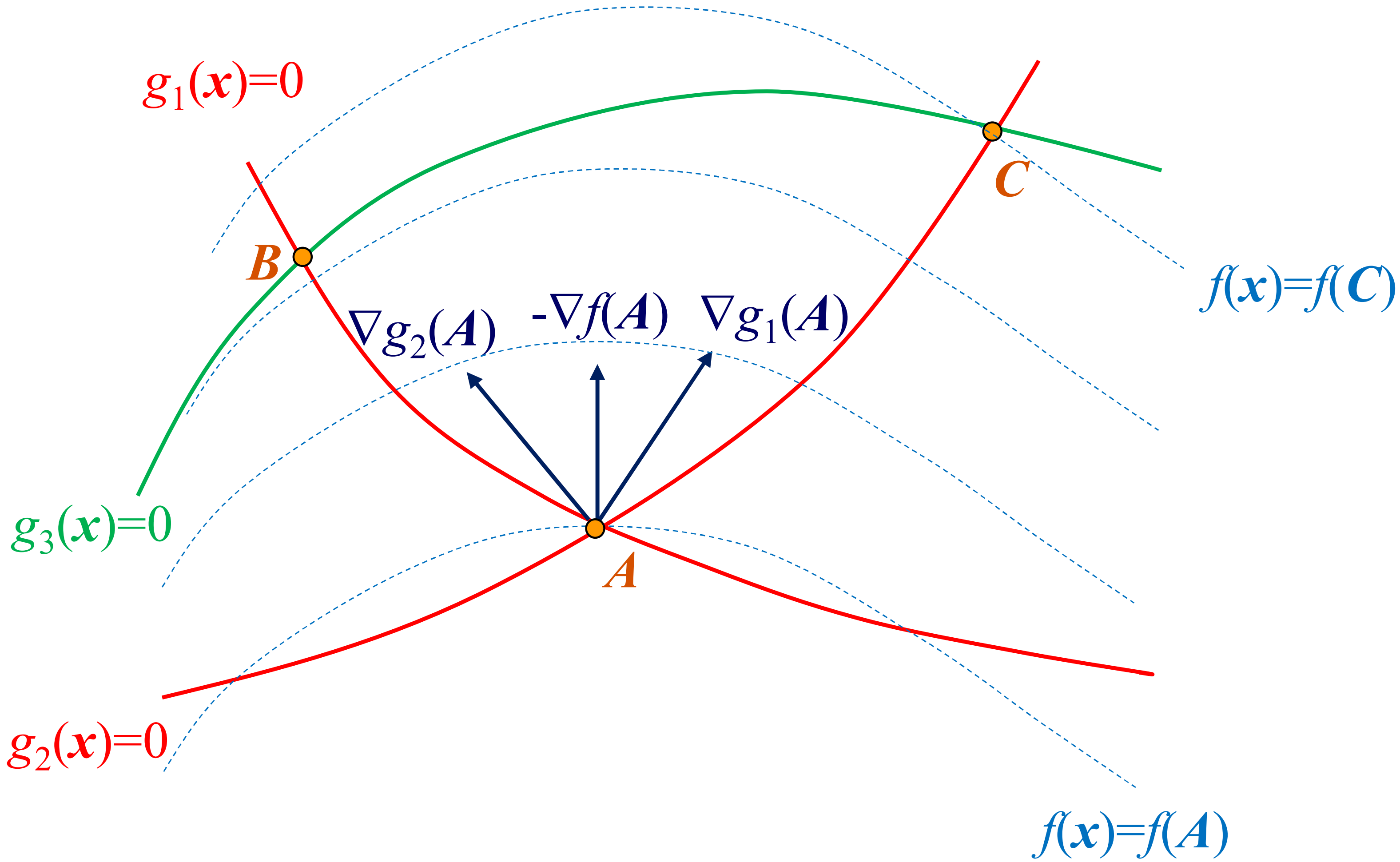
不存在*可行下降方向**p***，即不存在同时满足下面两类不等式的方向。

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{P} < 0$$

$$-\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{P} < 0 \qquad j \in J(\boldsymbol{x}^*) \qquad J\text{为起作用约束集合}$$

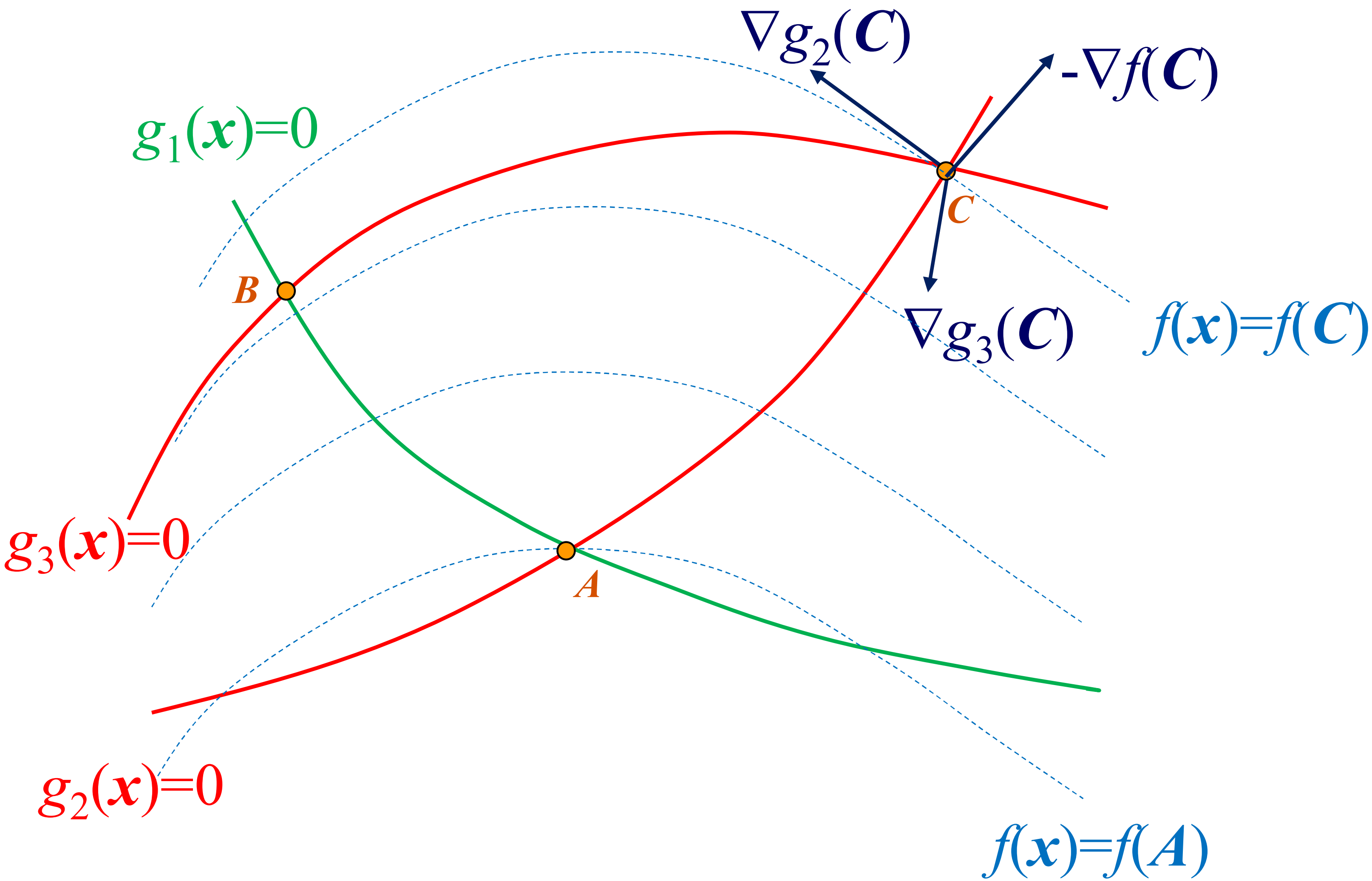
- 几何含义：***p***与上述梯度方向均成钝角

图示1：有可行下降方向



$g_1(\boldsymbol{x})=0$
$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C})$
C
B
$\nabla g_2(\boldsymbol{A})$
$-\nabla f(\boldsymbol{A})$
$\nabla g_1(\boldsymbol{A})$
$g_3(\boldsymbol{x})=0$
A
$g_2(\boldsymbol{x})=0$
$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{A})$

图示2：无可行下降方向



$\nabla g_2(\boldsymbol{C})$
$-\nabla f(\boldsymbol{C})$
$g_1(\boldsymbol{x})=0$
C
B
$\nabla g_3(\boldsymbol{C})$
$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C})$
$g_3(\boldsymbol{x})=0$
A
$g_2(\boldsymbol{x})=0$
$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{A})$

Gordan引理

- $\boldsymbol{a}_j$为一组已知向量，不存在向量$\boldsymbol{p}$，使

$$\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{p} < 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

同时成立的充要条件：

存在不全为零的非负实数$\mu_j \geq 0$，使

$$\sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{a}_j = 0$$ 正线性相关（**positive linear dependence** ）

几何含义：$\boldsymbol{a}_j$不可能分布在任何超平面的同一侧

正线性相关的性质

正线性相关：存在不全为零的非负实数$\mu_j \geq 0$，使

$$\sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{a}_j = 0$$

性质**1**：正线性相关的要求比线性相关更强。

正线性相关⇒线性相关。

性质**2**、正线性相关与负线性相关等价。

性质**3**：若部分$\boldsymbol{a}_j$正线性相关，则所有$\boldsymbol{a}_j$正线性相关。

Fritz John条件

- 若$\boldsymbol{x}^*$是局部极小点，则存在不全为零的非负实数$\mu_j \geq 0$，$j \in J(\boldsymbol{x}^*)$，使

$$\mu_0 \nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j \in J} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

思考：Fritz John条件为什么不是极小点的充分条件？

缺点：需要事先确定起作用约束集

Fritz John定理

- 若x^*是局部极小点，存在不全为零的非负实 $\mu_j \geq 0$，$j=1,2,\ldots,l$，使

Fritz John条件

$$\begin{cases} \mu_0 \nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} & \text{Lagrange函数驻点条件} \\ \mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,l & \text{互补松弛条件} \\ \mu_j \geq 0 \quad j = 0,1,\ldots,l & \text{强非负条件} \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{l} \mu_j \neq 0$$

上述条件隐含了如下事实：$j \notin J(\boldsymbol{x}^*) \Rightarrow g_j(\mathbf{x}^*) > 0 \Rightarrow \mu_j = 0$

Kuhn-Tucker定理

- 若x^*是局部极小点，起作用约束的$\nabla g_j(x^*)$线性无关[*约束规格(constraint qualification)*]，则下列**Kuhn-Tucker**条件成立：

Kuhn-Tucker条件
$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = \mathbf{0} \\ \mu_j^* g_j(x^*) = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,l \\ \mu_j^* \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,l \end{cases}$$

Lagrange函数驻点条件

互补松弛条件

非负条件

可全为0

Karush(1939)
Kuhn-Tucker (1951)

思考1：上述条件有什么含义？

思考2：多了约束规格，Kuhn-Tucker条件是否是极小点的必要条件？

KT条件的矩阵形式

$$\boldsymbol{\gamma}^* = \begin{bmatrix} \gamma_1^* \\ \gamma_2^* \\ \vdots \\ \gamma_m^* \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) \\ h_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu}^* = \begin{bmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \\ \vdots \\ \mu_l^* \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_l(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(\boldsymbol{x}) & \nabla h_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & \nabla h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(\boldsymbol{x}) & \nabla g_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & \nabla g_l(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^T$$

梯度矩阵与雅可比矩阵是转置关系

KT条件的矩阵形式

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{*T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

注意：互补松弛性条件包含l个等式！

$$diag(\boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} \mu_1^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_l^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^*(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ g_l^*(\boldsymbol{x}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1^* g_1^*(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ \mu_l^* g_l^*(\boldsymbol{x}^*) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \geq \mathbf{0}$$

可行解条件

举例

$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2$$

s.t. $x_2 \le x_1 + 2$

$x_2 \ge x_1^2 + 1$

$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$

目标函数、约束函数

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2 \\ -x_1^2 + x_2 - 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -2x_1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KT条件的矩阵形式

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)\gamma^* - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2x_1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{\mu}^* = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2 & -x_1^2 + x_2 - 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \ge \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\mu}^* \ge 0$$

KT条件的代数形式

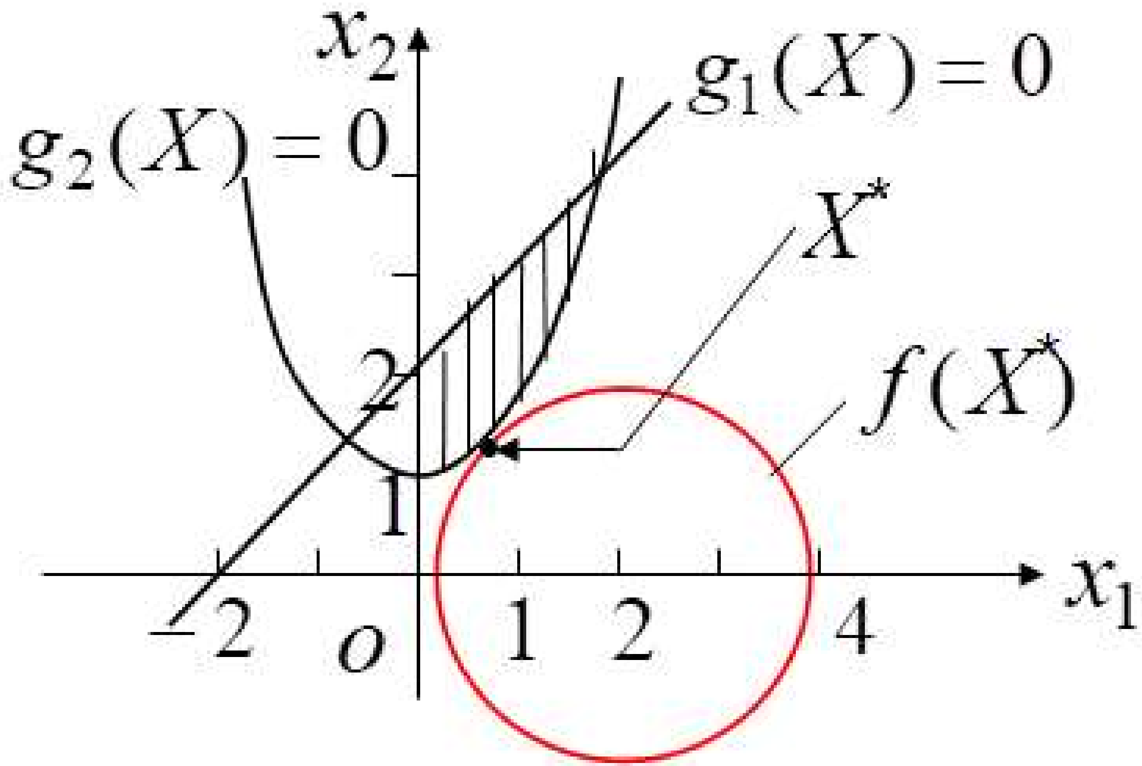
$$\begin{cases} 2(x_1-2)-\mu_1+2\mu_2 x_1-\mu_3=0 \\ 2x_2+\mu_1-\mu_2-\mu_4=0 \\ \mu_1(x_1-x_2+2)=0 \\ \mu_2(-x_1^2+x_2-1)=0 \\ \mu_3 x_1=0 \\ \mu_4 x_2=0 \end{cases}$$

6个变量、6个方程

$$\begin{cases} \mu_j \geq 0 \qquad j=1,2,.3,4 \\ x_2 \leq x_1+2 \qquad x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq x_1^2+1 \qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

不等式条件

图示



求解

观察可得： $\mu_1=\mu_3=\mu_4=0$

所以有： $(1+\mu_2)x_1-2=0$

$$2x_2-\mu_2=0$$

$$-x_1^2+x_2-1=0$$

求解得： $\mu_2^*=2.6219$ $x_1^*=0.5536$ $x_2^*=1.3064$

$$f(\boldsymbol{x}^*)=3.7989$$

非线性规划的解析解

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
  - 无约束极值问题
    - 一阶条件
    - 二阶条件
  - 有约束极值问题：
    - 等式约束
    - 不等式约束（**Kuhn-Tucker**条件）
    - 一般约束
- 凸规划

一般约束极值问题

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

s.t. $h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

求解思路：化为不等式约束极值问题

等价不等式约束极值问题

$$\min f(\boldsymbol{x})$$

s.t.

$$h_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$-h_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

KT条件推导

➢根据Kuhn-Tucker条件，有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu'^*_i \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu''^*_i \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu^*_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} (\mu'^*_i - \mu''^*_i) \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu^*_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} \gamma^*_i \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu^*_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

$\mu'^*_i \geq 0 \quad \mu''^*_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^*_i$无符号约束 $\quad i = 1, 2, \ldots, m$

一般约束下的KT条件

➢ 若$\boldsymbol{x}^*$是局部极小点， 等式约束梯度$\nabla h_i(\boldsymbol{x}^*)$和起作用约束梯度$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)$线性无关，则下列条件成立：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^* \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$ Lagrange驻点条件

$$\mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$ 互补松弛条件

$$\mu_j^* \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$ 非负条件

广义Lagrange函数法

定义Lagrange函数

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i h_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j g_j(\boldsymbol{x})$$

γ_i*和μ_j*称为广义Lagrange乘子

类似无约束极值问题，得到：

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^* \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

Lagrange驻点条件

$\mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*)=0 \quad j = 1,2,\ldots,l$ 互补松弛条件

$\mu_j^* \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,l$ 非负条件

$h_i(\boldsymbol{x}^*)=0 \quad i = 1,2,\ldots,m$

$g_j(\boldsymbol{x}^*) \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,l$

可行性条件

KT条件的矩阵形式

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)\gamma^* - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{0}$$ Lagrange驻点条件

$$\boldsymbol{\mu}^{*T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = 0$$ 或 $$diag(\boldsymbol{\mu}^*)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$ 互补松弛条件

$\mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*)=0$ $\quad$ $j = 1, 2, \ldots, l$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq 0$$ 非负条件

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

可行性条件

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*) \geq \boldsymbol{0}$$

非线性规划的解析解

- 非线性规划问题及其数学模型
- 非线性规划解析解法
  - 无约束极值问题
    - 一阶条件
    - 二阶条件
  - 有约束极值问题：
    - 等式约束
    - 不等式约束 （**Kuhn-Tucker**条件）
    - 一般约束
- 凸规划

凸规划

$$\min f(\boldsymbol{x})$$ 凸函数

s.t. $h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$ 线性函数

$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, l$ 凹函数

$$\boldsymbol{x} \in R^n$$

凸函数与凹函数

- 凸函数为满足下列条件的函数：

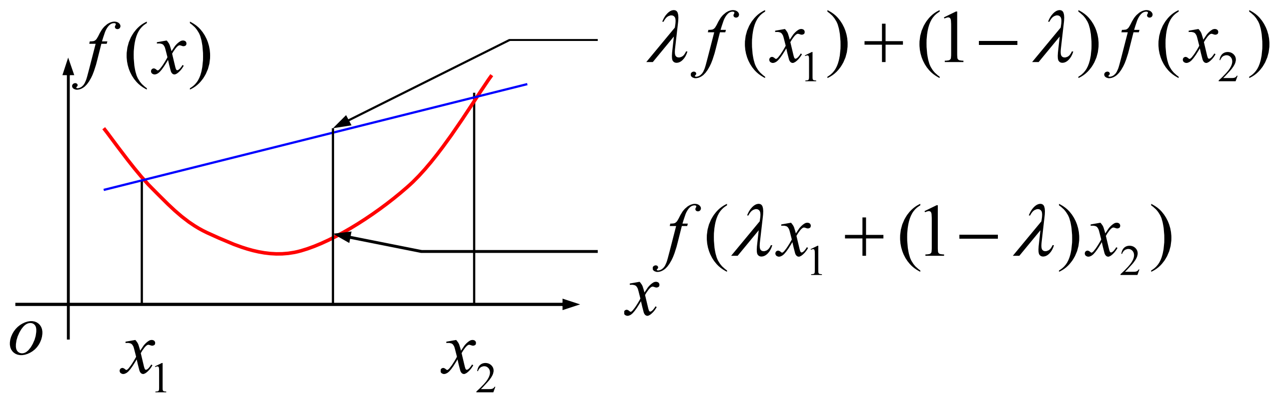
$$f[\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2] \le \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2) \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in R^n$$

- “<”：严格凸函数
- “≥”：凹函数
- “>”：严格凹函数

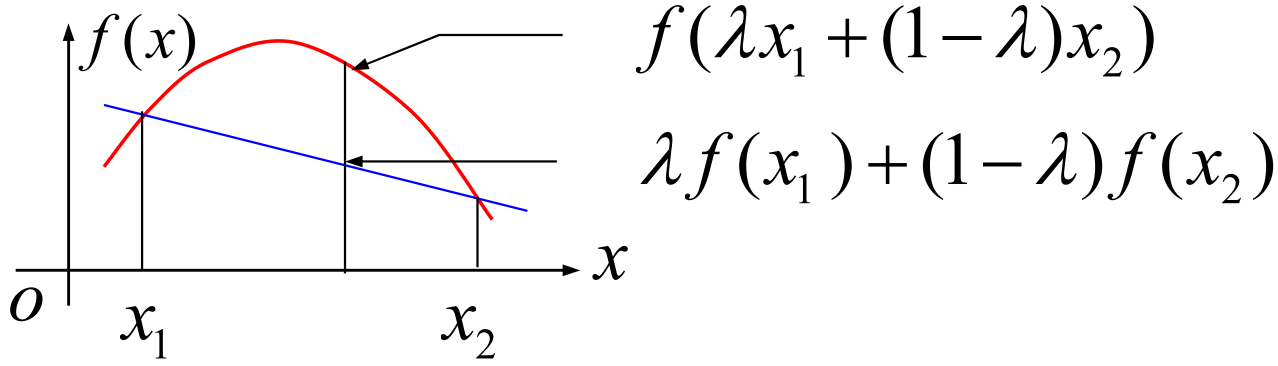
注意：线性函数既是凸函数，又是凹函数，所以线性规划是凸规划。

凸函数和凹函数图示

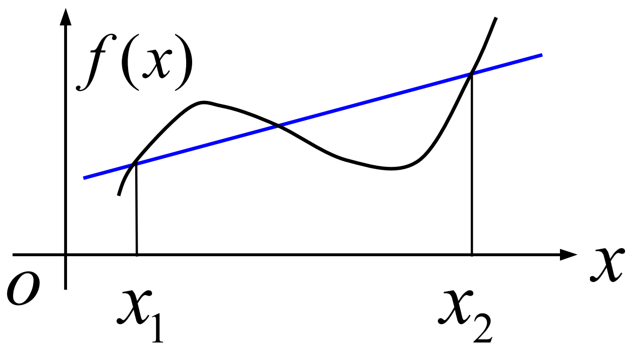
凸函数



凹函数



非凸非凹函数



凸函数判定条件（充要条件）

- 一阶条件

$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in R^n$ 恒有 $f(\boldsymbol{x}_2) \geq f(\boldsymbol{x}_1) + \nabla f(\boldsymbol{x}_1)^T(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$

几何意义：任何一点的切线在凸函数曲线的下方

- 二阶条件

$\forall \boldsymbol{x} \in R^n$ 恒有 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \geq 0$

几何意义：函数曲线向上弯曲

- **”>”**：严格凸函数
- **”$\leq$”**：凹函数
- **“<“**：严格凹函数
- **“=“**：线性函数

二次函数为凸函数的充要条件

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+r$$ **H**为对称矩阵

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\mathbf{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{X})=\mathbf{H}\geq 0$$ **H**为半正定矩阵

凸函数的性质

- 凸函数非负线性组合仍为凸函数

$$\gamma_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \gamma_2 f_2(\boldsymbol{x}) \qquad \gamma_i \ge 0$$

- 若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是定义在凸集$\boldsymbol{R}_C$上的凸函数，则其$\beta$水平集$\boldsymbol{S}_\beta$为凸集。

$$S_\beta = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \le \beta, \boldsymbol{x} \in R_C\}$$

β水平集

- 对于凸函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，若存在$\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{R}^n$满足

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \ge 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in R^n$$

充要条件！

$$f(\boldsymbol{x}_2) \ge f(\boldsymbol{x}_1) + \nabla f(\boldsymbol{x}_1)^T (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$$

则$\boldsymbol{x}^*$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的全局最小点。

推论1：对于凸目标函数，$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=0$ 是$\boldsymbol{x}^*$为极小值的充要条件。

推论2：对于凸目标函数，局部极小点也是全局最小点。

凸集性质

- 凸规划的可行域为凸集

$$h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad -g_j(\boldsymbol{x}) \le 0$$

各约束的0水平集为凸集

凸集的交集为凸集

- 如果最优解存在，最优解集合也为凸集

$$f[\lambda \boldsymbol{x}_1^* + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2^*] \le \lambda f(\boldsymbol{x}_1^*) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2^*) = f(\boldsymbol{x}_1^*) = f(\boldsymbol{x}_2^*) \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$\Rightarrow \quad f[\lambda \boldsymbol{x}_1^* + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2^*] = f(\boldsymbol{x}_1^*) = f(\boldsymbol{x}_2^*)$$

最优解的连线段均为最优解

推论：线性规划问题的最优解集为所有最优顶点构成的多边形。（归纳法证）

$$\boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{r} a_i \boldsymbol{x}_i^* \qquad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1 \qquad 0 \le a_i \le 1 \qquad i = 1, \cdots, r$$

凸规划性质

- 任何局部极值解也是全局最优解 （目标函数为凸函数）

  局部极小点和全局最小点连线的目标函数值相同

- 若目标函数为严格凸函数，则如果全局最优解存在，必为唯一全局最优解。（反证法）

$$f[\lambda \boldsymbol{x}_1^* + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2^*] < \lambda f(\boldsymbol{x}_1^*) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2^*) = f(\boldsymbol{x}_1^*) = f(\boldsymbol{x}_2^*)$$

  最优解的唯一性为数值解法提供了方便。

- 凸规划下的**KT**条件为最优解的充要条件

KT条件的充分性证明

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^* \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad \mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad \mu_j^* \ge 0$$

***f*(*x*)是凸函数** $\Rightarrow$ $f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}^*) + \nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$

$$= f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^* \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

$h_i(x)$线性函数且$h_i(x)=0$ $\Rightarrow$ $\nabla h_i(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = h_i(\boldsymbol{x}) - h_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$

$g_j(x)$是凹函数 $\Rightarrow$ $\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \ge g_j(\boldsymbol{x}) - g_j(\boldsymbol{x}^*)$

根据互补松弛性条件 $\mu_j^* g_j(x^*)=0$ 且$g_j(x) \ge 0$，有

$$f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* \left[g_j(\boldsymbol{x}) - g_j(\boldsymbol{x}^*) \right] = f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{x}^*)$$

举例

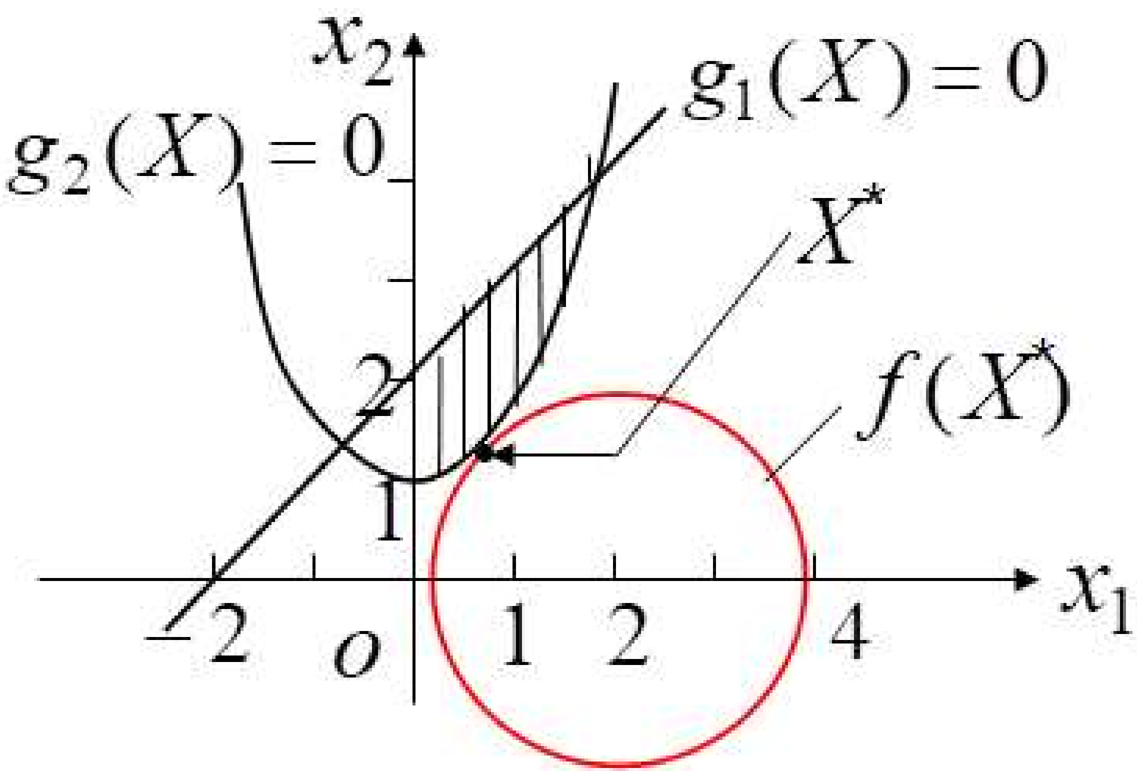
$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2$$

s.t. $x_2 \le x_1 + 2$

$x_2 \ge x_1^2 + 1$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$



凸规划判断

$$f(\boldsymbol{x})=(x_1-2)^2+x_2^2 \Rightarrow \nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2(x_1-2)\\2x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}>0$$

$$g_1(\boldsymbol{x})=x_1-x_2+2 \Rightarrow \nabla g_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 g_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$g_2(\boldsymbol{x})=-x_1^2+x_2-1 \Rightarrow \nabla g_2(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-2x_1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 g_2(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-2&0\\0&0\end{bmatrix}\le 0$$

$$g_3(\boldsymbol{x})=x_1 \Rightarrow \nabla g_3(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 g_3(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$g_4(\boldsymbol{x})=x_2 \Rightarrow \nabla g_4(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \nabla^2 g_4(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$