第五章 根轨迹分析法

Chapter 5 Root Locus

第五章内容

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计

基于根轨迹的补偿器设计

问题：由根轨迹(仅调整根轨迹增益)不能得到满意的控制性能，如何处理？

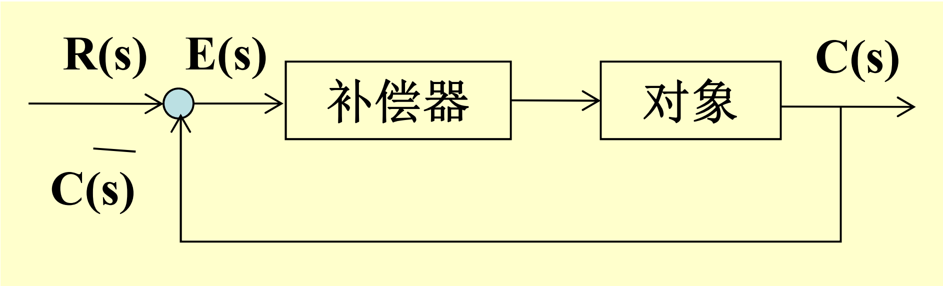
改造根轨迹的形状，使改造后的根轨迹穿过期望的闭环极点

控制系统补偿（也称控制系统校正）： 通过引入适当类型、适当参数值的附加装置（校正装置或补偿器），改变系统不可变动部分（由控制对象、执行机构和量测部件组成）的特性，使加入装置后的控制系统能满足事先要求的性能指标

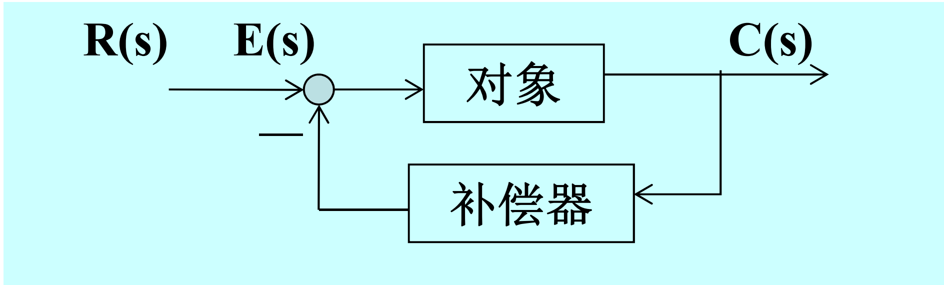
补偿（校正）的目的是使系统稳定，具有满意的动态响应，以及有足够大的增益保证稳态误差不超过某个给定的最大值

控制系统补偿（校正）是控制系统综合的关键环节

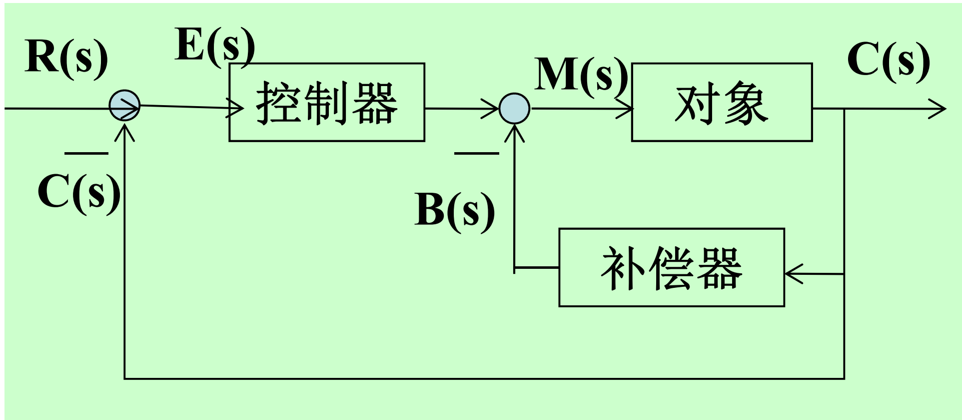
基于根轨迹的补偿器设计



串联补偿



反馈补偿

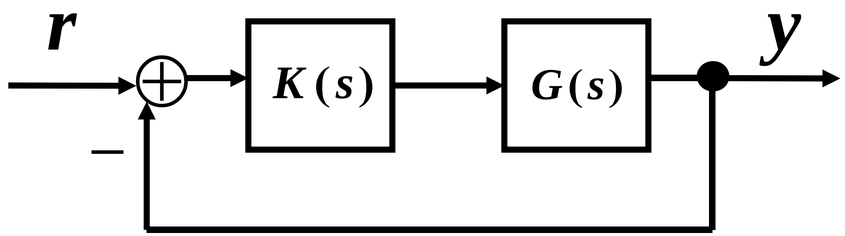


局部反馈补偿

....

基于根轨迹的补偿器设计

当动态系统不满足要求时，可以设计一个串联补偿器



设计补偿器的第一步 是确定它的结构

K(s)的结构可由以下三者描述：

- 根轨迹增益
- 零点
- 极点

基于根轨迹的补偿器设计

补偿器常见的结构:

1) 单位反馈系统回路增益中的积分器意味着对阶跃响应的零稳态误差（参见介绍系统型别时的内容）

2) 还有一个重要的控制器结构就是仅有原点处的零点: 微分控制

3) 在控制领域中比例、积分、微分控制是非常重要的，这三种模式一起作用，称为 PID 控制器

4) 增加一个稳定零点和一个稳定极点，来形成如下控制器结构

$$K(s) = K\frac{s+z}{s+p}$$

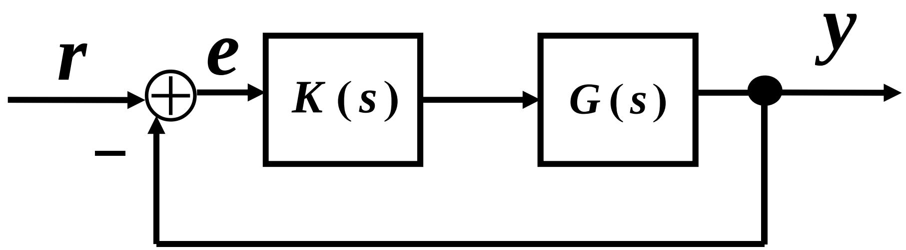
- 当零点的幅值小于极点的幅值时，称为超前（lead）控制器.
- 否则，称为滞后（lag）控制器.

基于根轨迹的补偿器设计

常见结构对瞬态响应与稳态响应的影响如下表所示

控制器	瞬态响应	稳态（对阶跃响应的误差）
比例 (P)	加大反馈	通常非零
微分 (D)	增大阻尼和稳定性	通常非零
积分 (I)	降低稳定性	零稳态误差
PI	P，I结合	结合P, I
PD	P, D结合	结合P, D
PID	P, I, D结合	结合P, I, D
Lead	降低上升时间，加大阻尼	通常非零
Lag	降低稳定性	减小误差

例5-29 考虑如下标准系统



其中 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$; $R(s)=\dfrac{1}{s}$; $E(s)=\dfrac{1}{1+K(s)G(s)}R(s)$;

试分析常见的一些控制器结构K(s)对系统的影响。

基于根轨迹的补偿器设计

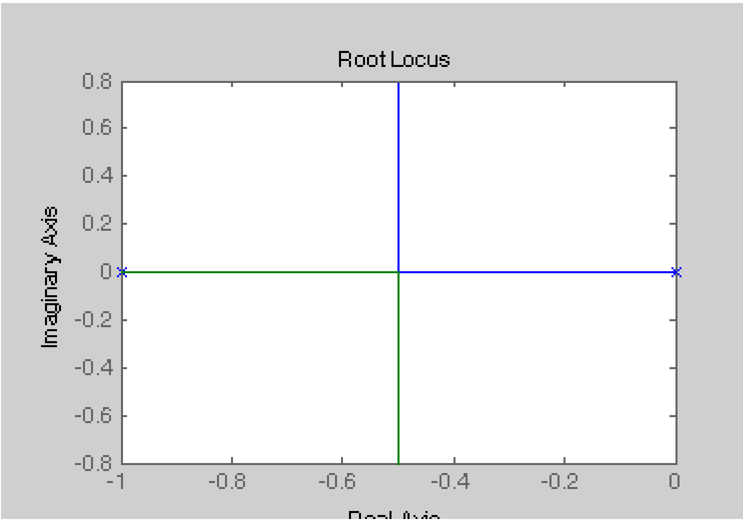
解：1) 比例控制(P)

$$K(s)G(s)=\frac{K}{s(s+1)};\quad E(s)=\frac{1}{1+K(s)G(s)}R(s)$$

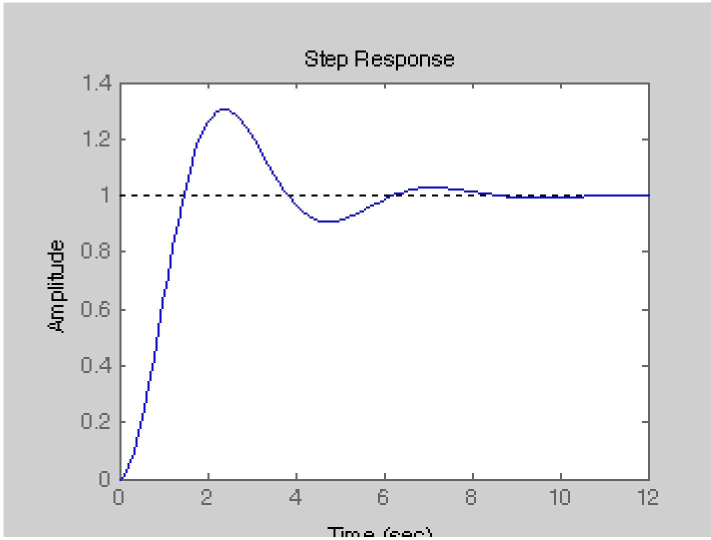
稳态误差：

$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+K(s)G(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2+s}{s^2+s+K}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示。若K=2，单位阶跃响应如图所示



K=2



基于根轨迹的补偿器设计

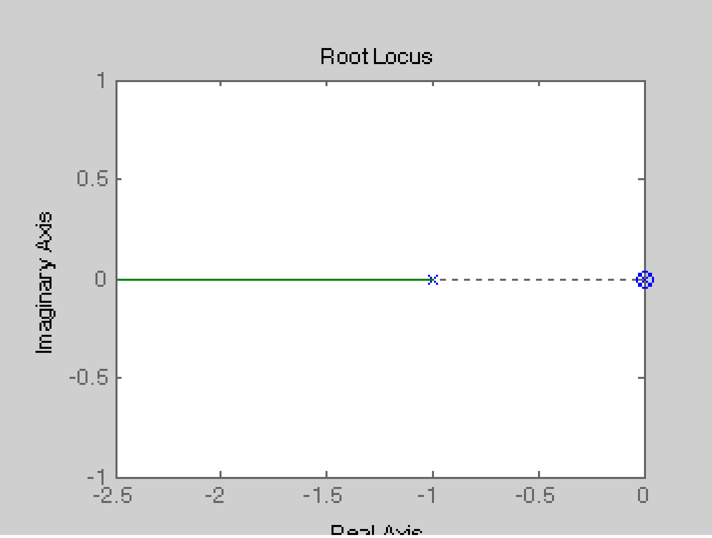
2) 微分控制(D)

$$K(s)=Ks \Rightarrow K(s)G(s)=\frac{Ks}{s(s+1)}=\frac{K}{s+1}$$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

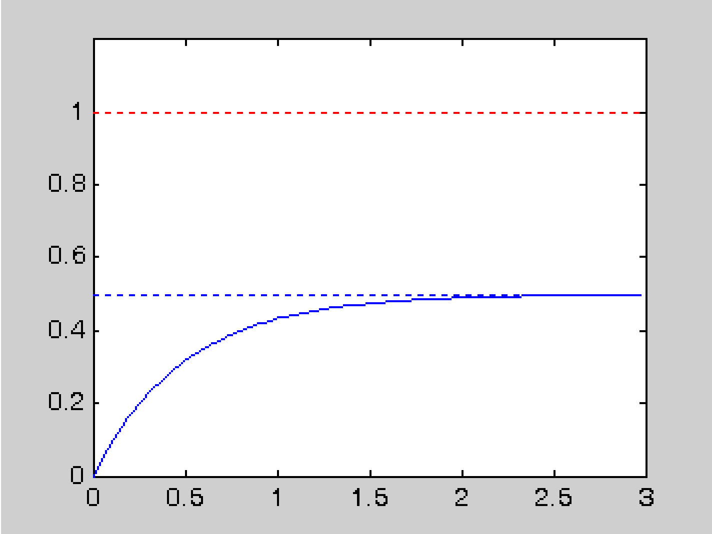
稳态误差：$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+K(s)G(s)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{s+1}{s+1+K}\right)=\frac{1}{K+1}$$

系统的根轨迹如图示



若K=1，单位阶跃响应如图所示

K=1



基于根轨迹的补偿器设计

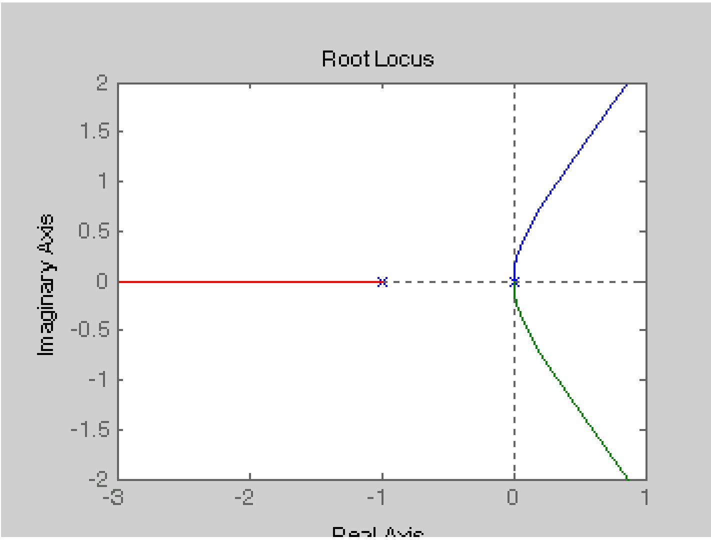
3) 积分控制(I)

$$K(s)=\frac{K}{s}\Rightarrow K(s)G(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}$$

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

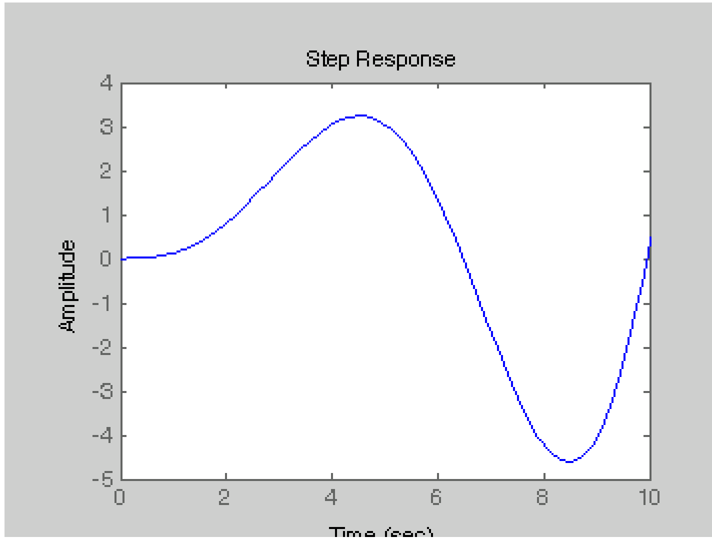
注：闭环系统不稳定！

系统的根轨迹如图示



若K=1，单位阶跃响应如图所示

K=1



4) 比例积分控制(PI)(Ti1=2)

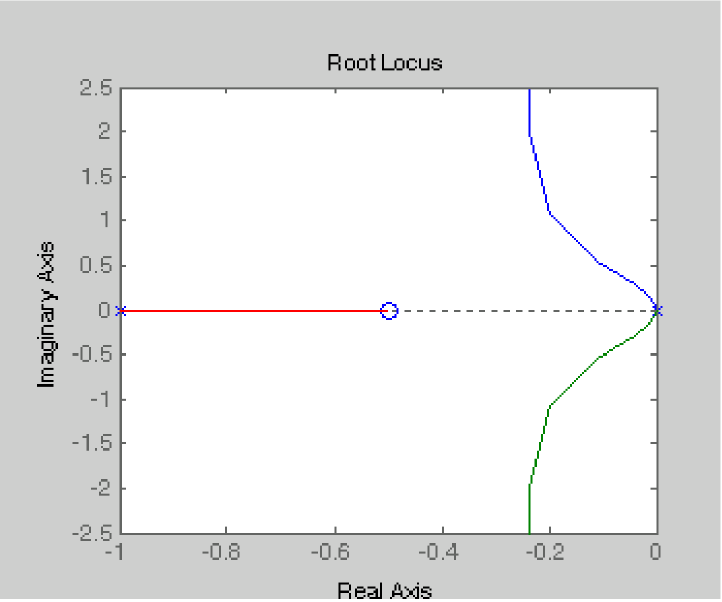
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

$$K(s)=K\left(1+\frac{0.5}{s}\right)=K\frac{s+0.5}{s}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+0.5}{s^2(s+1)}$$

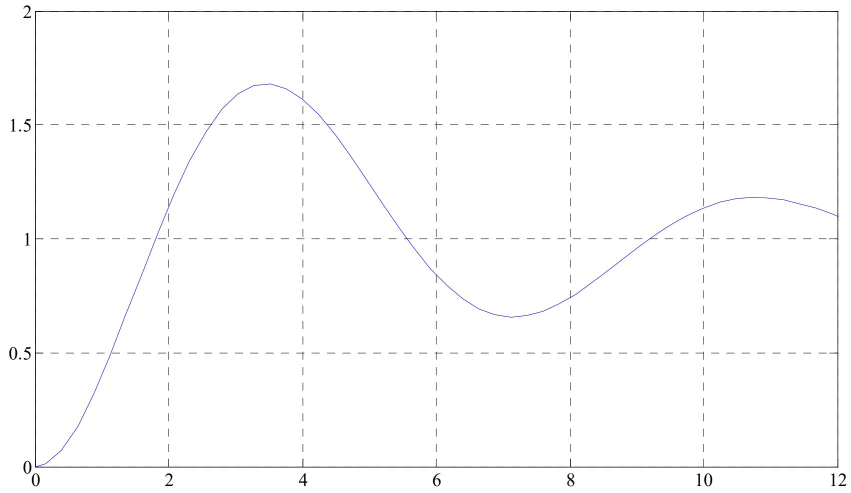
注：稳态误差为零.

系统的根轨迹如图示

若K=1，单位阶跃响应如图所示



K=1



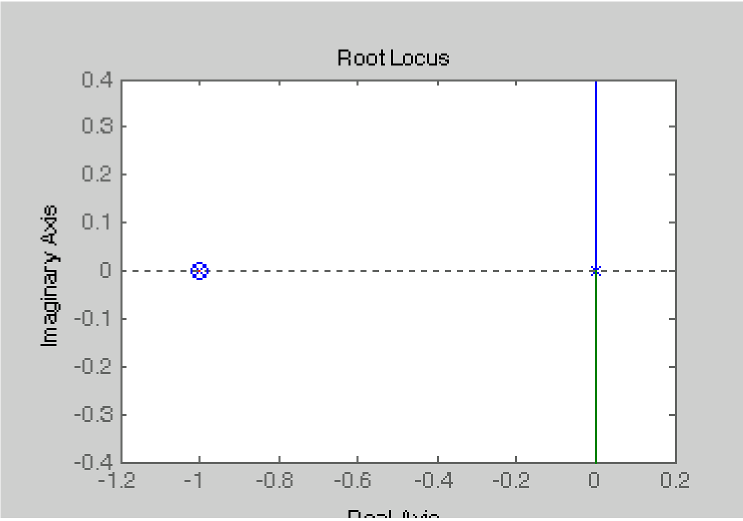
4) 比例积分控制(PI)(Ti2=1)

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

$$K(s)=K\left(1+\frac{1}{s}\right)=K\frac{s+1}{s}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{K}{s^2}$$

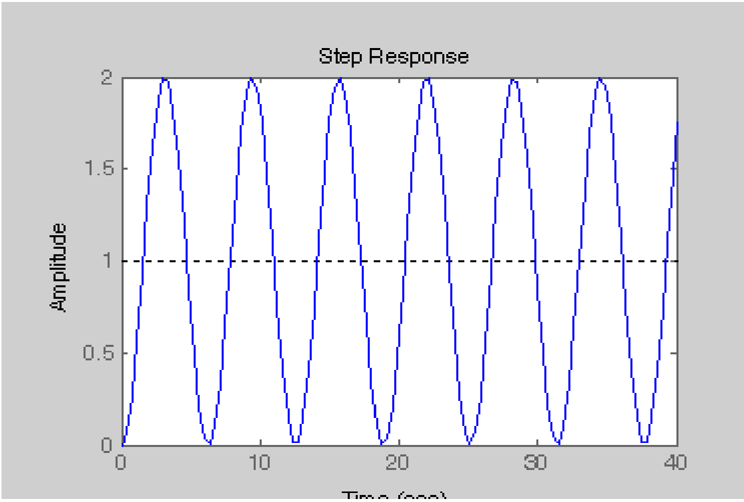
注：闭环系统临界稳定.

系统的根轨迹如图示



若K=1，单位阶跃响应如图所示

K=1



5) 比例微分控制(PD)(Td=1)

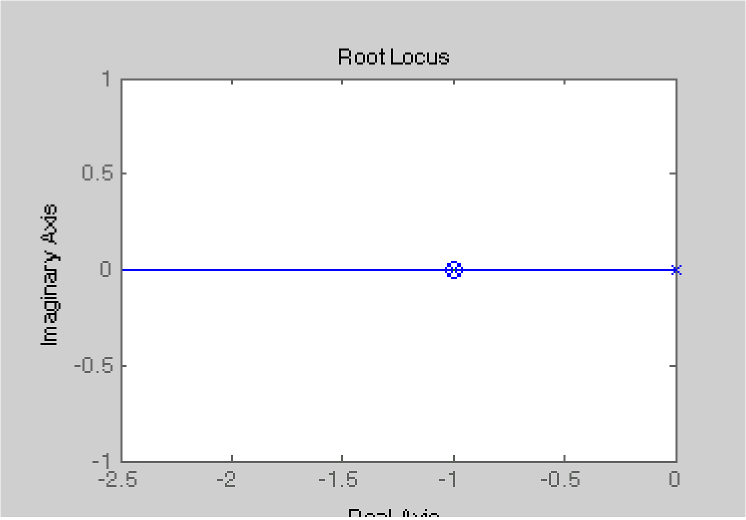
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

$$K(s)=K(1+s)\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+1}{s(s+1)}=\frac{K}{s}$$

稳态误差

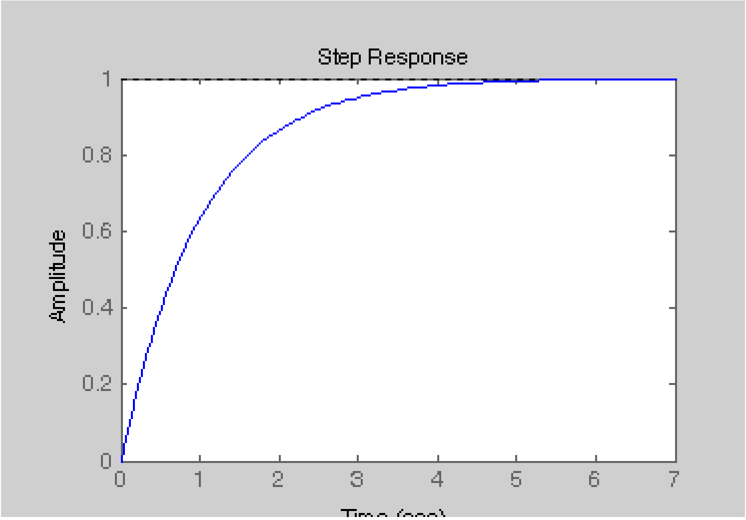
$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K}{s+K}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示



若K=1，单位阶跃响应如图所示

K=1



基于根轨迹的补偿器设计

6) 比例微分积分控制(PID)

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

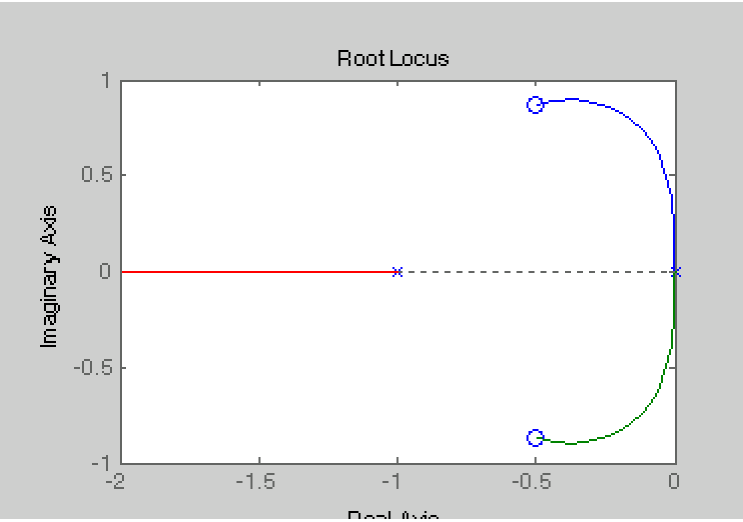
$$K(s)=K\left(1+\frac{1}{s}+s\right)\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)}$$

稳态误差

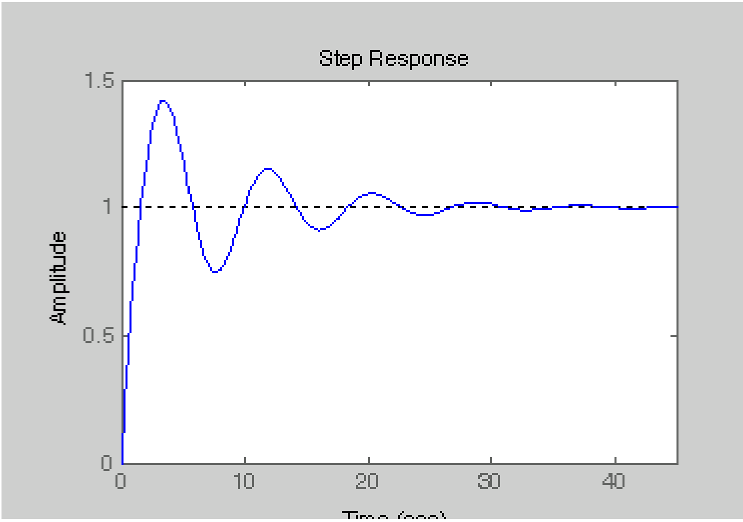
$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K(s^2+s+1)}{s^2(s+1)+K(s^2+s+1)}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示

若K=1，单位阶跃响应如图所示



K=1



基于根轨迹的补偿器设计

7) 超前补偿

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

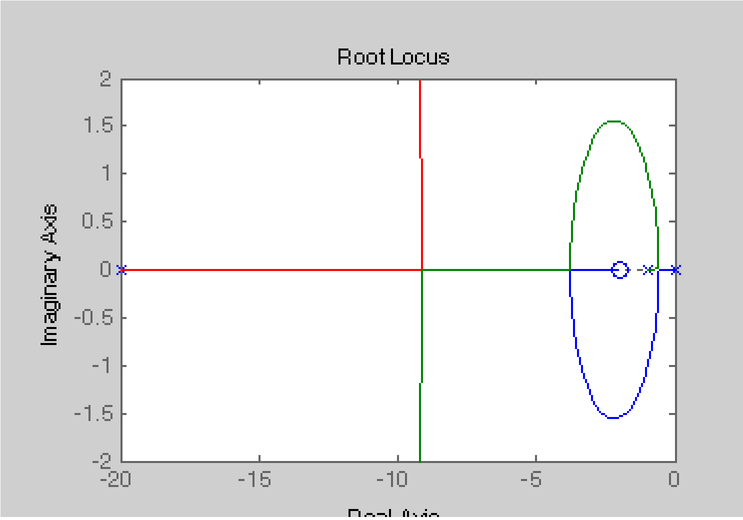
$$K(s)=K\frac{s+2}{s+20}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+2}{s(s+1)(s+20)}$$

稳态误差

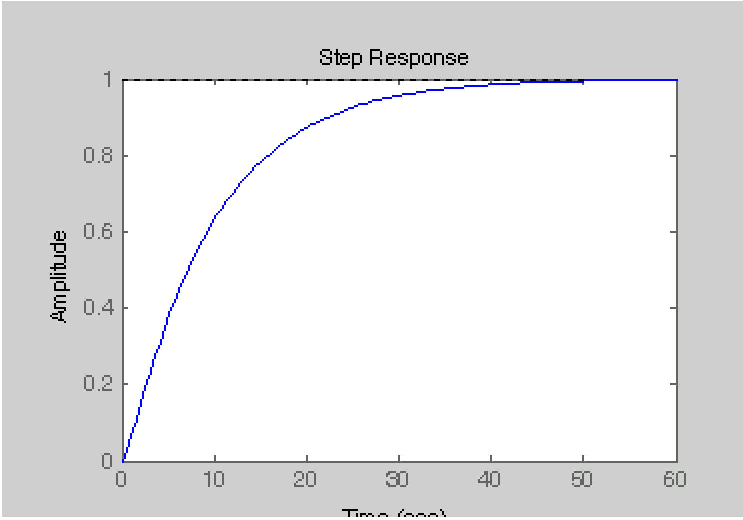
$$e_p(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left(1-\frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+20)+K(s+2)}\right)=0$$

系统的根轨迹如图示

若K=1，单位阶跃响应如图所示



K=1



基于根轨迹的补偿器设计

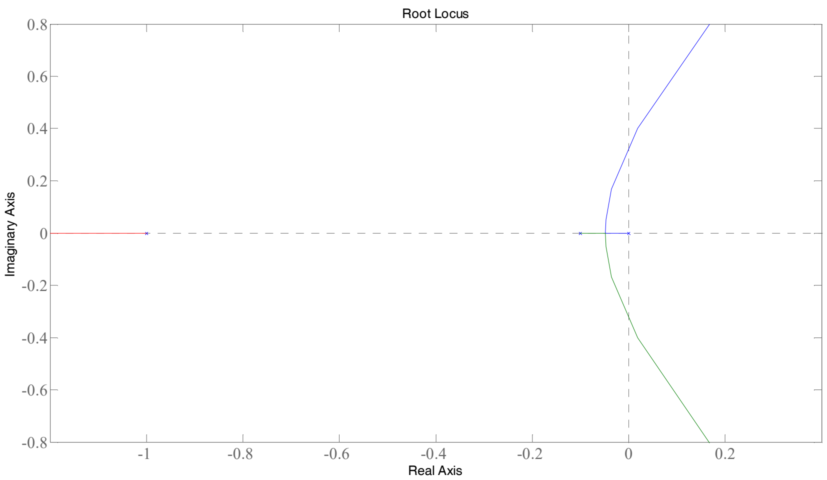
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

8) 滞后补偿

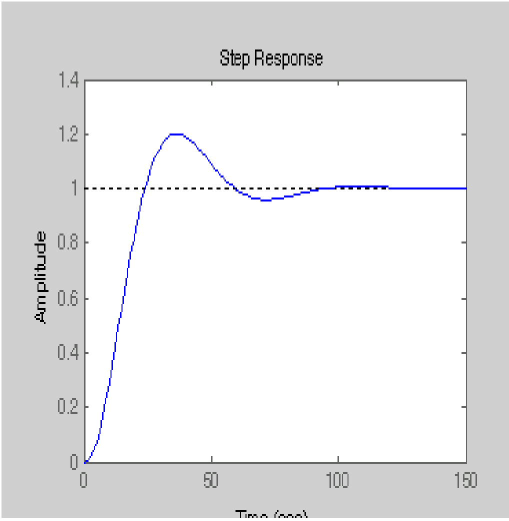
$$K(s)=K\frac{s+10}{s+0.1}\Rightarrow K(s)G(s)=K\frac{s+10}{s(s+1)(s+0.1)}$$

注：闭环系统仅当K较小时稳定

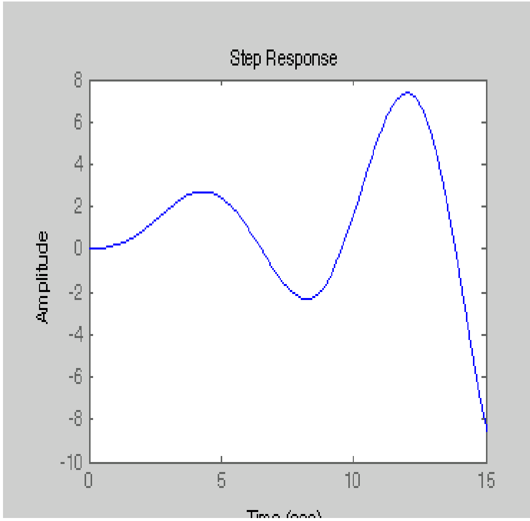
系统的根轨迹如图示



若K不同，其单位阶跃响应如图所示



K=0.001



K=0.1

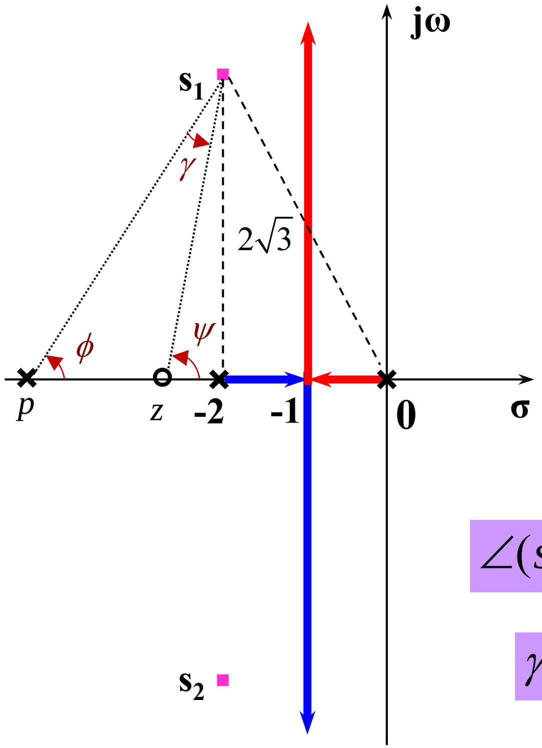
基于根轨迹的补偿器设计

例 给定负反馈控制系统的开环传递函数$G_p(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$，试用根轨迹方法设计串联校正，使闭环系统的主导极点满足$\zeta=0.5$和$\omega_n=4$

解 校正前闭环系统的根轨迹

$p_1=0, p_2=-2$

期望闭环主导极点$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-2\pm j2\sqrt{3}$



期望闭环主导极点不在根轨迹上

$$\angle(s-z_1)+\cdots+\angle(s-z_w)-\angle(s-p_1)-\cdots-\angle(s-p_n)=(2h+1)180°$$

$$-\angle(s_1-p_1)-\angle(s_1-p_2)=-120°-90°=-210°$$

需要补偿$+30°$，才能等于$-180°$

超前补偿$\dfrac{s-z}{s-p}, p<z<0$

$$\angle(s_1-z)-\angle(s-p)-\angle(s_1-p_1)-\angle(s-p_2)=\psi-\phi-120°-90°=-180°$$

$\gamma=\psi-\phi=30°$ 补偿器不唯一 任取$z<0$,由$\gamma=30°$可求得p

基于根轨迹的补偿器设计

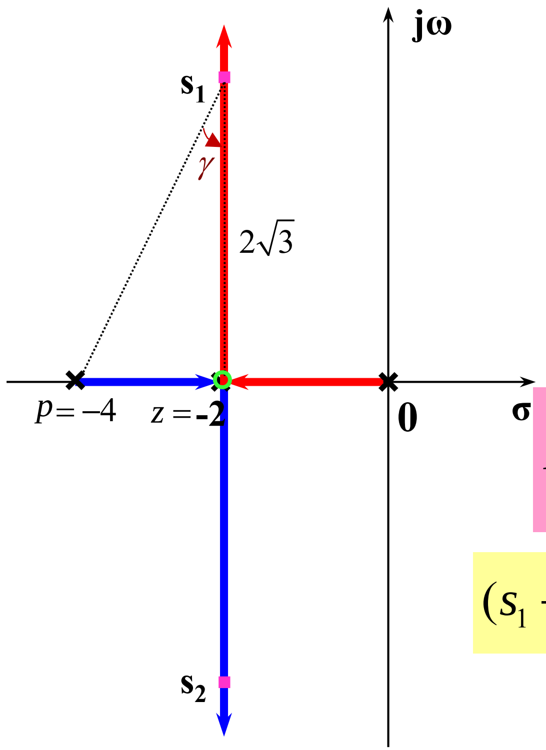
例 给定负反馈控制系统的开环传递函数$G_p(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$，试用根轨迹方法设计串联校正，使闭环系统的主导极点满足$\zeta=0.5$和$\omega_n=4$

解 现取$z=p_2=-2$

稳定的零极点对消在控制实践中常用

由几何图形得$p=-4$

$s_{1,2}$在校正后的根轨迹上



幅值条件$\dfrac{4K^*}{\left|\left(-2+j2\sqrt{3}\right)+4\right|\left|-2+j2\sqrt{3}\right|}=1\Rightarrow K^*=4$

补偿器$K^*\dfrac{s-z}{s-p}=\dfrac{4(s+2)}{s+4}$

代数法：稳定的零极点对消$z=-2$

$$K(s)G_p(s)=K^*\frac{s+2}{s-p}\frac{4}{s(s+2)}=-1$$

$$(s_1-p)s_1+4K^*=0\Rightarrow\left(-2+j2\sqrt{3}-p\right)\left(-2+j2\sqrt{3}\right)+4K^*=0$$

$p=-4$，$K^*=4$

Thanks !