# 自动控制原理

# Principle of Automatic Control

# 第三章 CHAPTER 3

## 连续时间控制系统的时域分析

# 稳定高阶系统的近似

- 对于实际物理世界中更常见的高阶系统
- 常用稳定的一阶或二阶控制系统近似稳定的高阶控制系统
- 主导极点思想，忽略非主导极点和零点
- 将一阶或二阶系统的动态性能指标公式用于高阶系统
- 利用计算机仿真考察近似的程度

# 稳定高阶系统的近似

- 高阶系统自由响应各分量的衰减快慢由系统极点的位置决定
  - 极点在S平面左半部离虚轴越远，相应的分量衰减越快，对系统的影响越小
- 各分量所对应的系数取决于系数的零、极点分布。
  - 若一对零极点互相很接近，则在输出*y*(*t*)中与该极点对应的分量就几乎被抵消。
  - 当某极点靠近零点而远离其他极点和原点，则相应的系数越小，该自由分量的影响就小。
  - 若某极点远离零点和其他极点，越接近原点，则相应的系数就越大，该自由分量的影响也就越大。
- 系统的零、极点共同决定了系统自由响应曲线的形状。

对于系数很小（影响很小）的分量、远离虚轴衰减很快的分量常常可以忽略，此时高阶系统就可用低阶系统来近似估计。

# 稳定高阶系统的近似

**主导极点**（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（1个或2个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的1/5）

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{10(s-(-8))}{\left(s-(-20)\right)\left(s-(-1+2\mathrm{j})\right)\left(s-(-1-2\mathrm{j})\right)}$$

$-1\pm 2\mathrm{j}$是一对主导极点

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{80(0.125s+1)}{20\left(0.05s+1\right)\left(s^2+2s+5\right)}$$

$$\approx\frac{4}{s^2+2s+5}$$

增益不变

根轨迹增益变

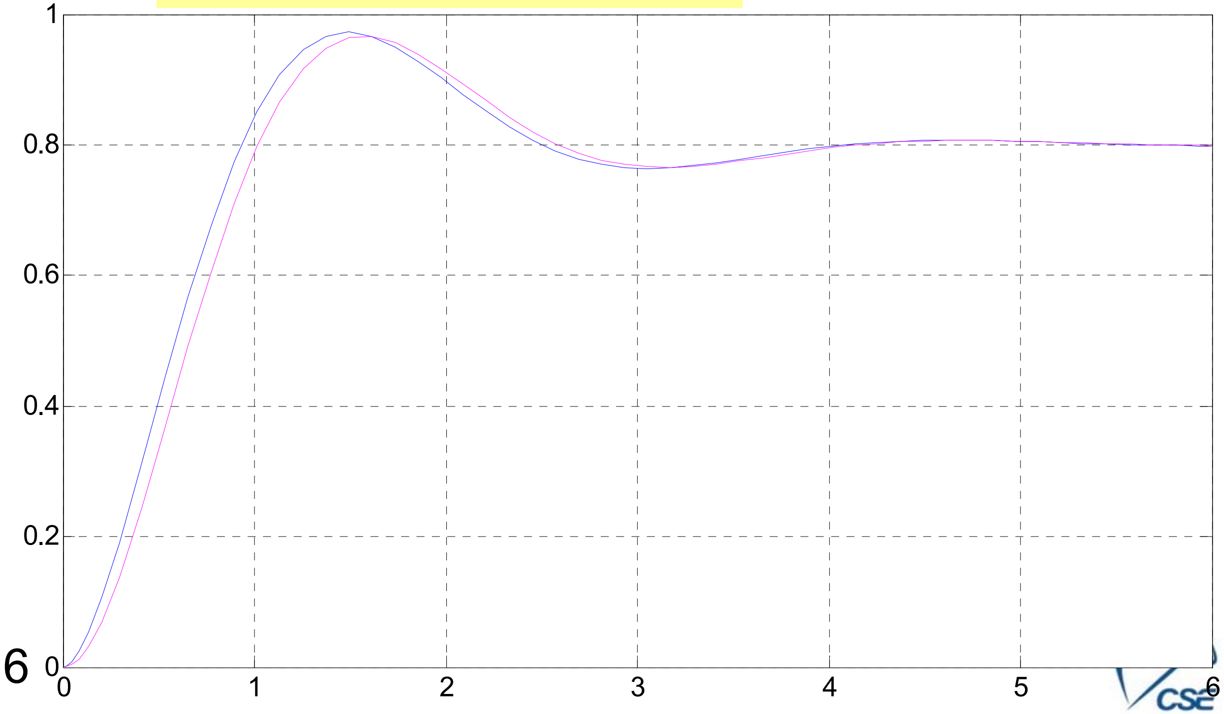
# 稳定高阶系统的近似

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)\left(s^2+2s+5\right)} \approx \frac{4}{s^2+2s+5} = 0.8\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{5} = 2.24$$
$$\zeta = 0.45$$

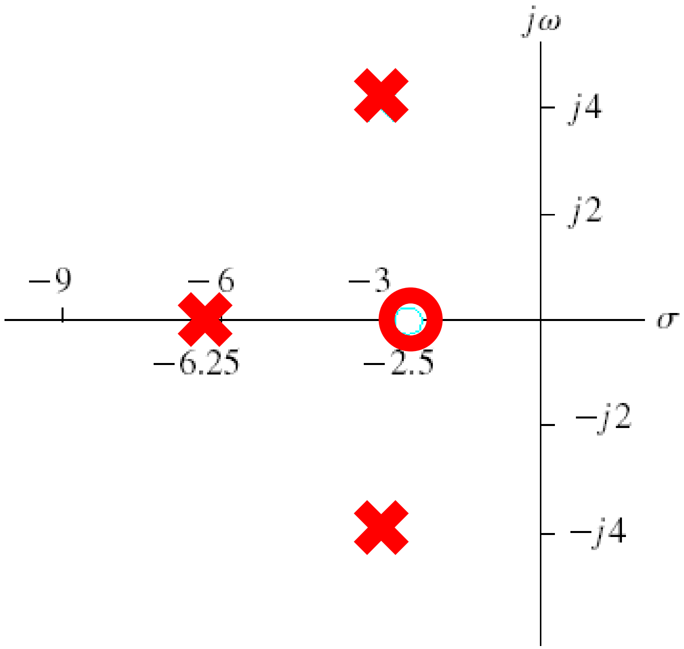
$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 20.53\%$$
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4$$

近似程度好



# 稳定高阶系统的近似

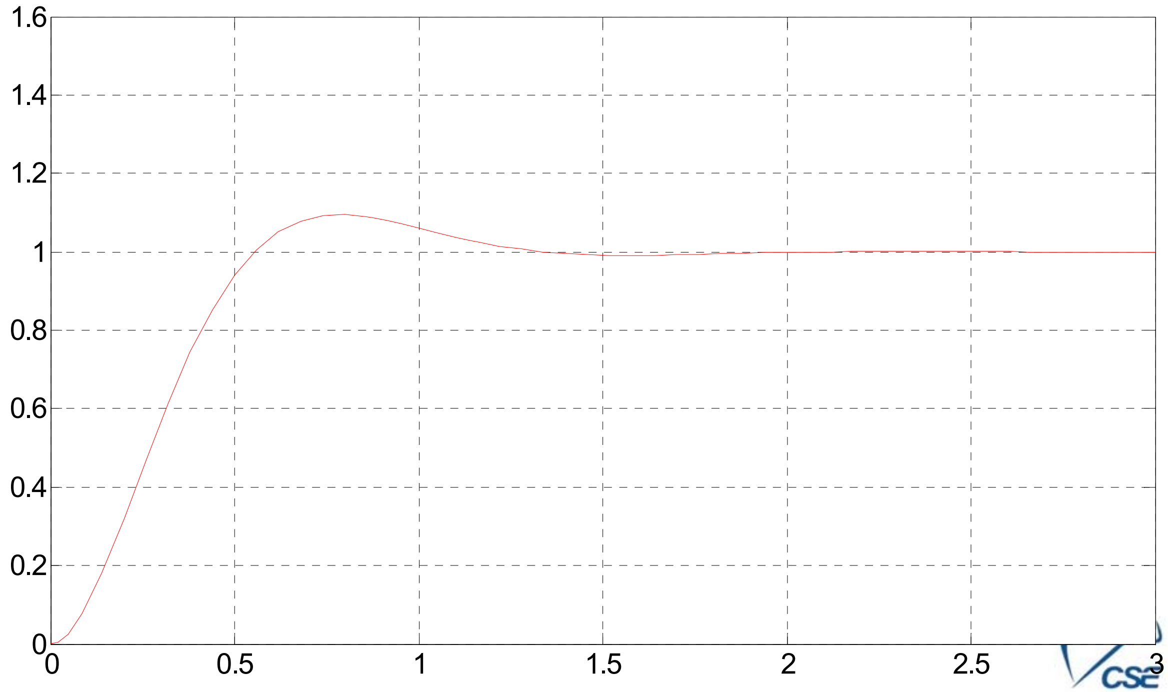
➢ 例：第三个极点和零点对二阶系统的影响




$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$=\frac{62.5\times 2.5(0.4s+1)}{6.25(s^2+6s+25)(0.16s+1)}\approx\frac{25}{s^2+6s+25}$$

$$\sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$



# 稳定高阶系统的近似

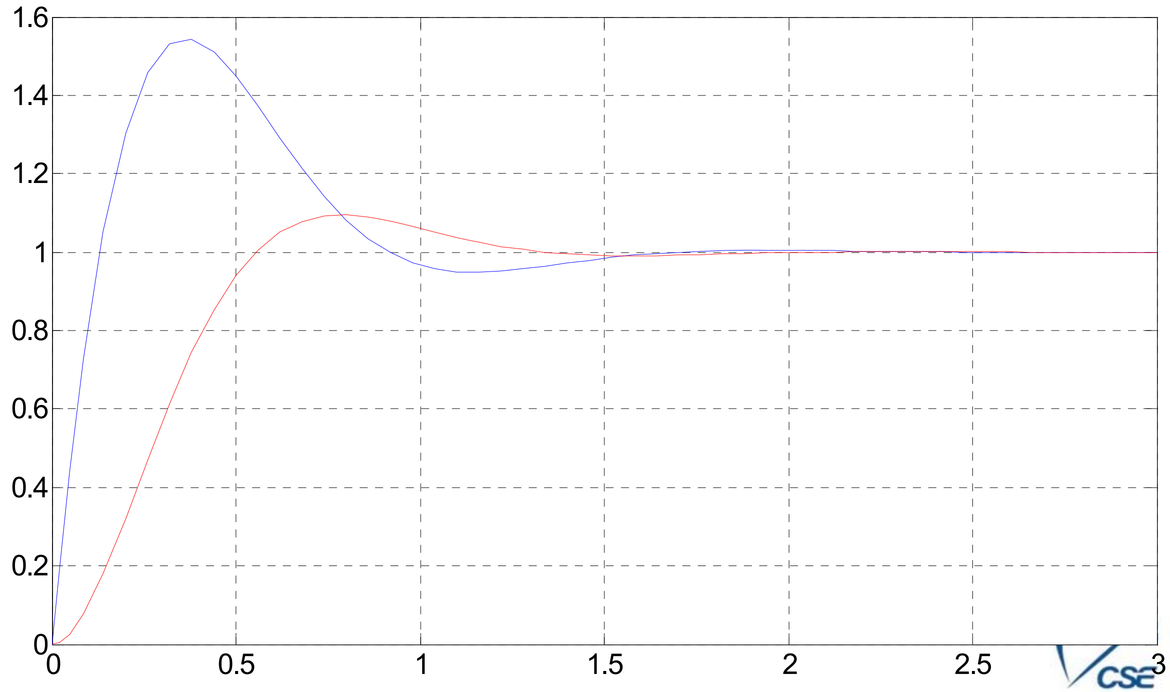
## (1) 不忽略零点-2.5

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \qquad \sigma = 9.5\%, T_s = 1.2s$$

$$\Phi(s) = \frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$= \frac{62.5(s+2.5)}{6.25(s^2+6s+25)(0.16s+1)} \approx \frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \qquad \sigma = 55\%, T_s = 1.33s$$

**零点：**
**使超调量加大**
**调节时间增加**



# 稳定高阶系统的近似

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \qquad \sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$

**(2) 不忽略极点-6.25**

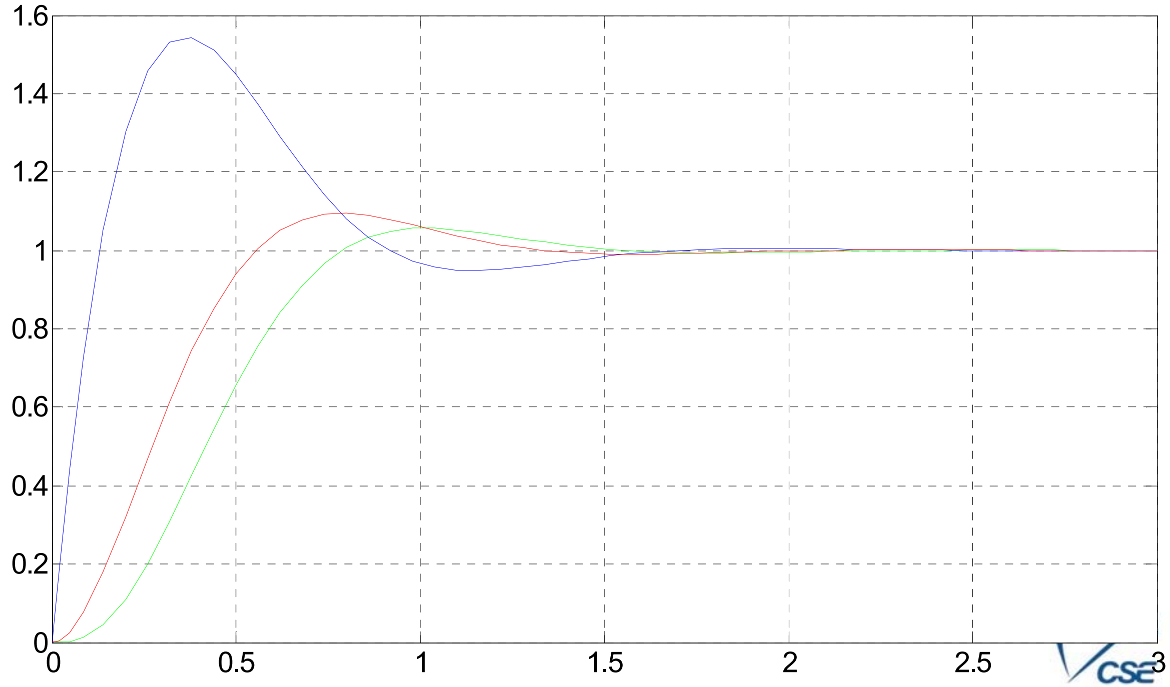
$$\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \qquad \sigma=55\%, T_s=1.33s$$

$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$=\frac{62.5\times 2.5(0.4s+1)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)} \approx \frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\sigma=5.5\%, T_s=1.4s$$

**极点：**
**使超调量减小**
**调节时间增加**



# 稳定高阶系统的近似

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \quad \sigma = 9.5\%, T_s = 1.2s$$

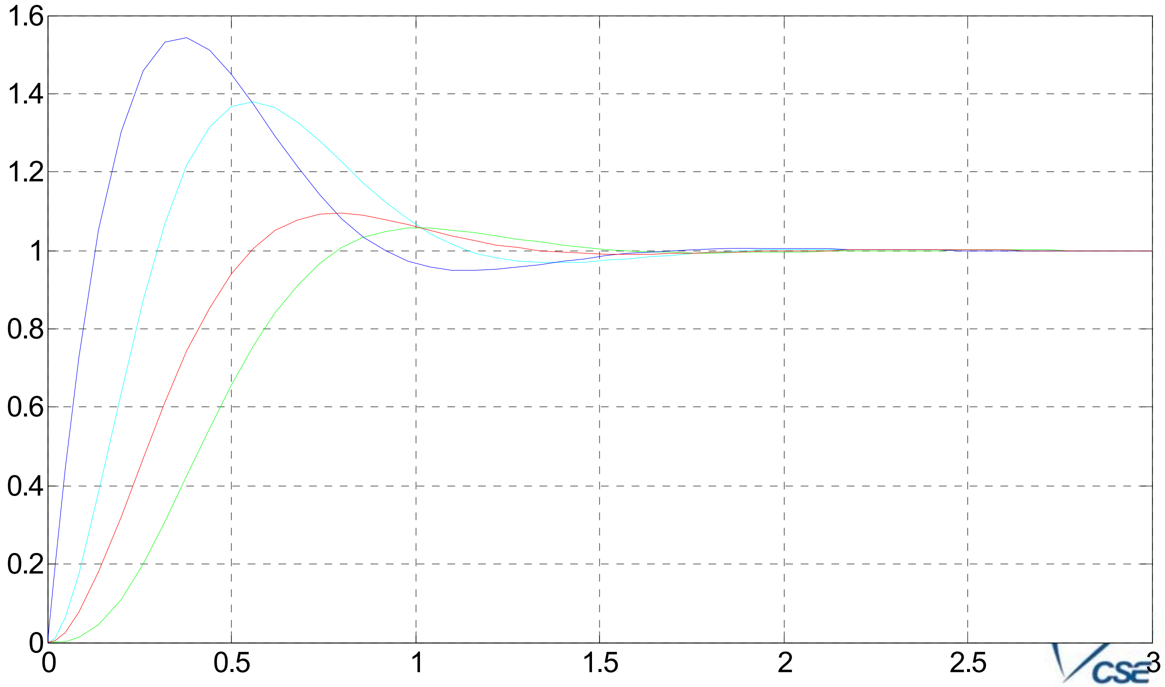
**(3) 不忽略零点和极点**

$$\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \quad \sigma = 55\%, T_s = 1.33s$$

$$\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)} \quad \sigma = 5.5\%, T_s = 1.4s$$

$$\sigma = 38\%, T_s = 1.6s$$




– 增加零点使超调量加大

调节时间增加

– 增加极点使超调量减小

调整时间增加

# 状态空间模型的解算问题

## 状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$ 状态方程

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$ 输出方程

已知初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$　$t\geq 0$

求$\boldsymbol{x}(t)$　$t\geq 0$

- 首先考虑齐次状态方程，即输入变量 $u(t)=0$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

– 如果 $n=1$，则状态方程为标量方程，表示了一个一阶系统。可以很容易求得标量方程的解

$$\dot{x}(t)=ax(t) \Rightarrow x(t)=e^{at}x(0)$$

– 假定初始时刻为 $t_0$，对于任意初始条件 $x(t_0)$，如果 $x(t_0)$ 已知，则有

$$x(t)=e^{a(t-t_0)}x(t_0)$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ ⟹ $x(t) = e^{at}x(0)$

指数函数 $e^{at}$ 的性质：$\dfrac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$

. 如果 $n \neq 1$ $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t), A \in R^{n\times n}$

设 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\})$ 都是定义在区间 $(a,b)$ 上的函数，

则 $m \times n$ 矩阵 $X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$

称为定义在区间 $(a,b)$ 上的矩阵值函数

若 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\})$ 在区间 $(a,b)$ 上均可导

则 $X(t)$ 在区间 $(a,b)$ 上可导

$X(t)$ 的导数 $\dfrac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_{11}(t)}{dt} & \dfrac{dx_{12}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_{1n}(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_{21}(t)}{dt} & \dfrac{dx_{22}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_{2n}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{dx_{m1}(t)}{dt} & \dfrac{dx_{m2}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}$

$$\frac{d(At^q)}{dt} = \frac{d\left[a_{ij}t^q\right]}{dt} = \left[qa_{ij}t^{q-1}\right] = qAt^{q-1}$$

指数函数 $e^{at}$ 的性质：$\frac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), A \in R^{n\times n}$

能否将 $e^{at}$ 推广到方阵？

定义一种矩阵函数 $Y = f(X)$: $R^{n\times n} \to R^{n\times n}$ 具有性质 $\frac{df(At)}{dt} = Af(At)$?

**复变函数对指数的定义**

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots, z\text{为复数}$$

$\forall X \in R^{n\times n}$，定义矩阵指数函数

$$\exp[X] = e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^k}{k!} + \cdots$$

$$\forall A \in R^{n\times n}, \forall t \in (0,\infty), e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots\right)$$

$$= A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \cdots + \frac{kA^kt^{k-1}}{k!} + \cdots$$

$$= A + A\frac{At}{1!} + A\frac{(At)^2}{2!} + \cdots + A\frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots = Ae^{At} = e^{At}A$$

# 状态转移矩阵

$\dot{x}(t) = ax(t)$ ⟹ $x(t) = e^{at}x(0)$

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ ⟹ $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0)$

- $A$ 是方阵，exp[$At$] 是与 $A$ 具有相同阶数的方阵

- 对于线性定常系统，exp[$At$] 称为系统的**状态转移矩阵** (state transition matrix, STM)，可记为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{At} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = e^{A(t-\tau)} = \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]$$

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

# 状态转移矩阵

如果 $t$ 和 $p$ 是相互独立的变量，则有

$$\exp[A(t+p)] = \exp[At]\exp[Ap]$$

证：$$e^{At} \cdot e^{Ap} = (I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots)(I + \frac{Ap}{1!} + \frac{(Ap)^2}{2!} + \frac{(Ap)^3}{3!} + \cdots)$$

$$= I + A(t+p) + A^2(\frac{t^2}{2!} + tp + \frac{p^2}{2!}) + A^3(\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{2!}t^2 p + \frac{1}{2!}tp^2 + \frac{p^3}{3!}) \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t+p)^k}{k!} = e^{A(t+p)}$$

基于上述结论，有

$$\exp[At]\exp[-At] = \exp[A0] = I$$

$$\exp[-At]\exp[At] = \exp[A0] = I$$

$$[\exp[At]]^{-1} = \exp[-At]$$

# 状态转移矩阵的计算

➢ 对于给定的矩阵 $A$，计算 STM 闭合形式的方法：

1) 方法 1——直接计算

2) 方法 2—— 利用拉普拉斯变换

3) 方法 3——矩阵 $A$ 对角化

4) 方法 4——Cayley-Hamilton 定理

# 状态转移矩阵的计算1）直接计算

用定义式 $e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$

**例 1** 假定 $A$ 矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求exp[$At$]

**解：**

$$\because \ A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 及 \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\therefore \ A = A^3 = A^5 = \cdots \quad 及 \quad A^2 = A^4 = A^6 = \cdots$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots \\ 0 & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \\ 0 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{at}x(0)$$

- 求解 S 域内的解，有

$$\dot{x}(t) = ax(t) \xrightarrow{\text{LT}} sX(s) - x(0) = aX(s)$$

$$x(t) = L^{-1}[(s-a)^{-1}]x(0)$$

- 比较通过不同方式求得的解，它们应该相等。于是：

$$\boxed{e^{at} = L^{-1}[(s-a)^{-1}]}$$

# 状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

设 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\},\ j \in \{1,\cdots,n\},\ \ t \in (0,\infty))$的拉氏变换为 $X_{ij}(s)$，

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

的拉氏变换定义为

$$X(s) = L[X(t)] = \begin{bmatrix} X_{11}(s) & X_{12}(s) & \cdots & X_{1n}(s) \\ X_{21}(s) & X_{22}(s) & \cdots & X_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1}(s) & X_{m2}(s) & \cdots & X_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

相应地， $X(s)$的反拉氏变换定义为

$$X(t) = L^{-1}[X(s)] = \begin{bmatrix} L^{-1}[X_{11}(s)] & L^{-1}[X_{12}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{1n}(s)] \\ L^{-1}[X_{21}(s)] & L^{-1}[X_{22}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{2n}(s)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L^{-1}[X_{m1}(s)] & L^{-1}[X_{m2}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{mn}(s)] \end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

若 $X(t)$的拉氏变换为 $X(s)$，则 $\dfrac{dX(t)}{dt}$的拉氏变换为

$$
\begin{bmatrix}
L\left[\dfrac{dx_{11}(t)}{dt}\right] & L\left[\dfrac{dx_{12}(t)}{dt}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{dx_{1n}(t)}{dt}\right] \\
L\left[\dfrac{dx_{21}(t)}{dt}\right] & L\left[\dfrac{dx_{22}(t)}{dt}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{dx_{2n}(t)}{dt}\right] \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
L\left[\dfrac{dx_{m1}(t)}{dt}\right] & L\left[\dfrac{dx_{m2}(t)}{dt}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{dx_{mn}(t)}{dt}\right]
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
sX_{11}(s)-x_{11}(0) & sX_{12}(s)-x_{12}(0) & \cdots & sX_{1n}(s)-x_{1n}(0) \\
sX_{21}(s)-x_{21}(0) & sX_{22}(s)-x_{22}(0) & \cdots & sX_{2n}(s)-x_{2n}(0) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
sX_{m1}(s)-x_{m1}(0) & sX_{m2}(s)-x_{m2}(0) & \cdots & sX_{mn}(s)-x_{mn}(0)
\end{bmatrix}
$$

$$=sX(s)-X(0)$$

**微分性质依然成立**

**类似可证，线性性质也依然成立**

若 $X(t)$的拉氏变换为 $X(s)$，则 $AX(t)B$的拉氏变换为 $AX(s)B$

# 状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

- 对比标量方程和状态方程，状态方程的解类似于标量方程的解；利用拉普拉斯变换求解状态方程

$n=1$ $\quad \dot{x}(t) = ax(t) \longrightarrow x(t) = e^{at}x(0)$

$\vdots$

$n\neq1$ $\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \longrightarrow \boldsymbol{x}(t) = \underline{e^{\boldsymbol{A}t}}\,\boldsymbol{x}(0)$

LT

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \underline{L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]}\,\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$$

于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]$$

# 状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

例 假定 $A$ 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求$\exp[At]$

解：

$$\because \boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 0 & -1 & s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2-1} & \frac{1}{s(s^2-1)}\\ 0 & \frac{s}{s^2-1} & \frac{1}{s^2-1}\\ 0 & \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{s^2-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})-\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})\\ 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-1\\ 0 & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\ 0 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

例　假定 $A$ 矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$，求$\exp[At]$

解：

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$$

$$e^{At}=\boldsymbol{\Phi}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{3}{s+2}-\dfrac{2}{s+3} & \dfrac{6}{s+2}-\dfrac{6}{s+3} \\ \dfrac{-1}{s+2}+\dfrac{1}{s+3} & \dfrac{-2}{s+2}+\dfrac{3}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t} \\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

如果 $A$ 是对角阵，则 $\exp[At]$ 也是对角阵

$$\boldsymbol{A} = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] \Leftrightarrow e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]$$

证：

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\exp\begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 t^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 t^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

定理：当且仅当$A \in R^{n\times n}$有$n$个独立（线性无关）的特征向量时，存在非奇异方阵$T$使$T^{-1}AT$为对角矩阵，其中，$T$ 的各列即是这$n$ 个特征向量

例：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

能否对角化？

若能，求变换阵

解：$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)^2$

求$\lambda$=5的特征向量，$(\lambda I - A)\phi = 0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = 0$$

用高斯消去法，得$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = 0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}q\\ q\\ q\end{bmatrix}, 0 \neq q \in C$.取$q=1$，$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

求$\lambda=-1$的特征向量，$\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\-q_1-q_2\end{bmatrix},0\neq\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}\in C^2$

取$q_1=1,q_2=0,\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，取$q_1=0,q_2=1,\begin{bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

3个线性无关的特征向量$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$　　$A$可对角化

变换阵$T$即由$n$个线性无关的特征向量构成

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

定理：属于不同特征值的特征向量是线性无关的

推论：若$A\in R^{n\times n}$有$n$个互异特征值，$A$可对角化

形为 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ 的矩阵称为约当块

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} & \frac{1}{2!}\frac{d^2(\lambda^m)}{d\lambda^2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}(\lambda^m)}{d\lambda^{n-1}} \\ & \lambda^m & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^m & \ddots & \frac{1}{2!}\frac{d^2(\lambda^m)}{d\lambda^2} \\ & & & \ddots & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} \\ & & & & \lambda^m \end{bmatrix}$$

$$\exp\left[\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} t\right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda t} \\ & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

由若干个约当块为对角块组成的块对角阵称为约当形矩阵

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&4&1&0\\0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{t}&te^{t}&0&0&0&0\\0&e^{t}&0&0&0&0\\0&0&e^{4t}&0&0&0\\0&0&0&e^{4t}&te^{4t}&\dfrac{t^2e^{4t}}{2}\\0&0&0&0&e^{4t}&te^{4t}\\0&0&0&0&0&e^{4t}\end{bmatrix}$$

定理：$\forall A\in R^{n\times n}$，存在非奇异方阵$T$使$T^{-1}AT$为约当形矩阵

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

对于任意非奇异矩阵 $T$，有

$$\exp[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t] = \boldsymbol{T}^{-1}\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{T}$$

即 $$\boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t]\boldsymbol{T}^{-1} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

证：

$$(T^{-1}AT)^m = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT) = T^{-1}A^mT$$

$$\begin{aligned}
\exp[T^{-1}ATt] &= I + \frac{T^{-1}ATt}{1!} + \frac{(T^{-1}ATt)^2}{2!} + \cdots \\
&= T^{-1}T + T^{-1}\frac{At}{1!}T + T^{-1}\frac{(At)^2}{2!}T + \cdots \\
&= T^{-1}\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots\right)T = T^{-1}\exp[At]T
\end{aligned}$$

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$,求$e^{At}$

解：$A$可对角化，$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\quad \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{5t} & & \\ & e^{-t} & \\ & & e^{-t}\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+2e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+2e^{-t}\end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

对于友矩阵 $A(A=A_C)$，当矩阵具有$n$个不同的特征值 $\lambda_i$ 时，可以很容易地求得 $T$（称为 Vandermonde 矩阵，即范德蒙矩阵）

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1}AT = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$$

# 状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

设$a_{ij}(\lambda)(i\in\{1,\cdots,m\},j\in\{1,\cdots,n\})$均为多项式，以$a_{ij}(\lambda)$为元素的$m\times n$矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为$\lambda$矩阵或多项式矩阵

多项式$a_{ij}(\lambda)(i\in\{1,\cdots,m\},j\in\{1,\cdots,n\})$中的最高次数称为$A(\lambda)$的次数

如：方阵$A$的特征矩阵$\lambda I-A$是1次$\lambda$矩阵

如果$m\times n$维矩阵$A(\lambda)$的次数为$k$，则$A(\lambda)$可表示为

$$A(\lambda)=A_k\lambda^k+A_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+A_1\lambda+A_0$$

其中$A_i(i\in\{1,\cdots,k\})$是$m\times n$常数矩阵，并且$A_k$为非零矩阵

如：$A(\lambda)=\begin{bmatrix} -\lambda+1 & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

## ➢ 凯莱-哈密尔顿(Cayley-Hamilton)定理

设$n\times n$维矩阵$A$的特征方程为 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

则 $\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=0$

证 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{adj(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$ ⇒ $adj(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\cdot(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$

*adj*($\lambda I$-$A$)是$\lambda$的$n$-1次矩阵 ⇒ $\mathrm{adj}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}_{n-1}\lambda^{n-1}+\boldsymbol{B}_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+\boldsymbol{B}_1\lambda+\boldsymbol{B}_0$

$$(B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0)(I\lambda-A)$$
$$=B_{n-1}\lambda^n+(B_{n-2}-B_{n-1}A)\lambda^{n-1}+(B_{n-3}-B_{n-2}A)\lambda^{n-2}+\cdots+(B_0-B_1A)\lambda-B_0A$$
$$=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)I$$
$$=I\lambda^n+a_{n-1}I\lambda^{n-1}+\cdots+a_1I\lambda+a_0I$$

$$\begin{aligned}
&B_{n-1}=I\\
&B_{n-2}-B_{n-1}A=a_{n-1}I\\
&B_{n-3}-B_{n-2}A=a_{n-2}I\\
&\quad\vdots\\
&B_0-B_1A=a_1I\\
&-B_0A=a_0I
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&B_{n-1}A^n=A^n\\
&B_{n-2}A^{n-1}-B_{n-1}A^n=a_{n-1}A^{n-1}\\
&B_{n-3}A^{n-2}-B_{n-2}A^{n-1}=a_{n-2}A^{n-2}\\
&\quad\vdots\\
&B_0A-B_1A^2=a_1A\\
&-B_0A=a_0I
\end{aligned}$$

等式相加，得

$\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=0$

# 状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

- **凯莱-哈密尔顿(Cayley-Hamilton)定理**

设$n\times n$维矩阵$A$的特征方程为 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

则， $\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=0$

$$A^n=-a_{n-1}A^{n-1}-\cdots-a_1A-a_0I$$

$$A^{n+1}=AA^n=A(-a_{n-1}A^{n-1}-a_{n-2}A^{n-2}\cdots-a_1A-a_0I)$$

$$=-a_{n-1}A^n-a_{n-2}A^{n-1}-\cdots-a_1A^2-a_0A$$

$$=-a_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1}-a_{n-2}A^{n-2}-\cdots-a_1A-a_0I)-a_{n-2}A^{n-1}-\cdots-a_1A^2-a_0A$$

$$=(a_{n-1}^2-a_{n-2})A^{n-1}+(a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-3})A^{n-2}+\cdots+(a_{n-1}a_1-a_0)A+a_{n-1}a_0I$$

$$\vdots$$

- **推论1：矩阵$A$的 $k(k\geq n)$ 次幂可表示为$A$的 $(n-1)$ 阶多项式**

$$\boldsymbol{A}^k=\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{mk}\boldsymbol{A}^m,k\geq n$$

# 状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

- **推论1：矩阵$A$的 $k(k\ge n)$ 次幂可表示为$A$的 $(n-1)$ 阶多项式**

$$A^k = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{mk} A^m, k \ge n$$

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1} + \frac{1}{n!}A^nt^n + \frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}t^{n+1} + \cdots$$

$$= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{mn}A^m + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{m,n+1}A^m + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

- **推论2：矩阵指数 $e^{At}$ 可表示为$A$的 $(n-1)$ 阶多项式**

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

# 状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

➢ **推论2：矩阵指数 $e^{At}$ 可表示为$A$的 ($n$-1) 阶多项式**

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$$

如何确定$\alpha_k(t)$?

考虑$A$有$n$个互异特征值的情况，存在$T$使$T^{-1}AT=\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]=\Lambda$

$$T^{-1}e^{At}T=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)T^{-1}A^kT \Leftrightarrow e^{\Lambda t}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)\Lambda^k$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=\alpha_0(t)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}+\alpha_1(t)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_1 t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}$$

$$e^{\lambda_2 t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_2+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_n t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_n+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

# 状态转移矩阵的计算4）Cayl

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

**例 5** 假定 $A$ 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$，求exp[$At$]

**解：** 特征方程为 $|\lambda I - A| = \lambda^2+5\lambda+6=0$

特征方程根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-2t}\\ e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & \\ & 3e^{-2t}-2e^{-3t}\end{bmatrix}+(e^{-2t}-e^{-3t})\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

# 状态空间模型的解算

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　已知初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$,求$\boldsymbol{x}(t)$　$t \geq 0$

– 方法 1 直接求解方程（时域）

$$A(t) = B(t)C(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) & f(t) \\ g(t) & h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t)e(t)+b(t)g(t) & a(t)f(t)+b(t)h(t) \\ c(t)e(t)+d(t)g(t) & c(t)f(t)+d(t)h(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dot{a}(t)e(t)+a(t)\dot{e}(t)+\dot{b}(t)g(t)+b(t)\dot{g}(t) & \dot{a}(t)f(t)+a(t)\dot{f}(t)+\dot{b}(t)h(t)+b(t)\dot{h}(t) \\ \dot{c}(t)e(t)+c(t)\dot{e}(t)+\dot{d}(t)g(t)+d(t)\dot{g}(t) & \dot{c}(t)f(t)+c(t)\dot{f}(t)+\dot{d}(t)h(t)+d(t)\dot{h}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{a}(t) & \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) & \dot{d}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) & f(t) \\ g(t) & h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) & \dot{f}(t) \\ \dot{g}(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}C(t) + B(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$$

设$m \times n$矩阵值函数$M(t)$和$n \times p$矩阵值函数$N(t)$均可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(t)N(t)] = \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}N(t) + M(t)\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = A(\beta) - A(\alpha)$$

对于矩阵值函数$A(t) = [a_{ij}(t)]$,定义$\int_\alpha^\beta A(t)\mathrm{d}t = \left[\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right]$

$$\int_\alpha^\beta AB(t)C\mathrm{d}t = A\int_\alpha^\beta B(t)\mathrm{d}tC$$

# 状态空间模型的解算

$e^{-At}$ 是方阵，$x(t)$ 是 $n\times1$ 的状态向量，于是有

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=e^{-At}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]$$

对于状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

将该方程在 0 到 $t$ 的时间区间上进行积分

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$e^{At}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)]=e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right]$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\quad t\geq0$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ t\geq t_0$$

状态转移方程

令 $\beta=t-\tau$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)d\beta$$

# 状态空间模型的解算

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau=\underline{\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)}+\underline{\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\underline{\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)}+\underline{\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{Bu}(t-\beta)d\beta}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_{zi}(t)+\boldsymbol{x}_{zs}(t)$$

零状态响应：$x(0)=0$

零输入响应：$u(t)=0$

全响应 = 零输入响应+零状态响应

# 状态空间模型的解算

例　初始状态$x_1(0)=2, x_2(0)=1$，求单位阶跃 $u(t)=1$ 作用下的$y(t)$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

解：由前例

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\because \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}3e^{-2\beta}-2e^{-3\beta} & 6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -e^{-2\beta}+e^{-3\beta} & -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot 1\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}12e^{-2t}-10e^{-3t}\\ -4e^{-2t}+5e^{-3t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}12e^{-2t}-10e^{-3t}\\ -4e^{-2t}+5e^{-3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+9e^{-2t}-8e^{-3t}\\ -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+9e^{-2t}-8e^{-3t}\\ -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}+2=3+6e^{-2t}-4e^{-3t}$$

# 状态空间模型的解算

– 方法 2　利用拉普拉斯变换（S 域）

状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

LT

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} BU(s)$$
$$= \Phi(s) x(0) + \Phi(s) BU(s)$$

$LT^{-1}$

$$x(t) = \Phi(t) x(0) + L^{-1}[\Phi(s) BU(s)]$$

# 状态空间模型的解算

**例** 初始状态$x_1(0)=2, x_2(0)=1$，求单位阶跃 $u(t)=1$ 作用下的$y(t)$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

$$\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{BU}(s)$$

**解：** 由前例 $\boldsymbol{\Phi}(s)=\dfrac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{X}(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}2s+16\\ s-2\end{bmatrix}+\frac{1}{s(s^2+5s+6)}\begin{bmatrix}6\\ s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+16s+6}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=3+6e^{-2t}-4e^{-3t}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+16s+6}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}+\frac{2}{s}=\frac{5s^2+25s+18}{s(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s}+\frac{6}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

# 状态空间模型的解算

**例** 已知系统的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-2e^{-2t} & 3e^{-t}-3e^{-2t} \\ -4e^{-2t}+4e^{-t} & -3e^{-2t}+4e^{-t} \end{bmatrix}$$

请求出$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$和$A$。

**解**: (1) 根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)=\begin{bmatrix} 3e^{t}-2e^{2t} & 3e^{t}-3e^{2t} \\ -4e^{2t}+4e^{t} & -3e^{2t}+4e^{t} \end{bmatrix}$$

(2)关于$\boldsymbol{\Phi}(t)$的微分有

$$\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{A}t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{A}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)\right|_{t=0}=\boldsymbol{A}\exp(0)=\boldsymbol{A}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}=\left.\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix} -3e^{-t}+4e^{-2t} & -3e^{-t}+6e^{-2t} \\ 8e^{-2t}-4e^{-t} & 6e^{-2t}-4e^{-t} \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Thanks !