连续信号的分析

主 讲 教 师 ： 于 淼

大纲

连续信号的时域描述和分析

- 时域描述
- 时域计算
- 信号的分解

连续信号的频域分析

- 周期信号的频谱分析
- 非周期信号的频谱分析
- 傅立叶变换的性质

连续信号的拉普拉斯变换分析

- 拉普拉斯变换
- 信号的复频域分析

连续信号的时域描述和分析

- 时域描述
  - 普通信号的时域描述
  - 奇异信号的时域描述
- 时域计算
  - 基本运算
  - 叠加和相乘
  - 微分和积分
  - 卷积运算
- 信号分解
  - 分解成冲激函数之和
  - 正交分解

连续信号的时域描述和分析

（一）时域描述

- ***普通信号的时域描述***
  - **正弦信号**
  - **指数信号**
- ***奇异信号的描述***
  - **单位斜坡信号**
  - **单位阶跃信号**
  - **单位冲激信号**

连续信号的时域描述和分析

1、普通信号：正弦信号

- 欧拉公式

$$e^{j(\omega_0 t+\phi)}=\cos(\omega_0 t+\phi)+j\sin(\omega_0 t+\phi)$$

- 取虚部则为正弦信号

$$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$$

LC电路响应信号；机械系统的简谐振动

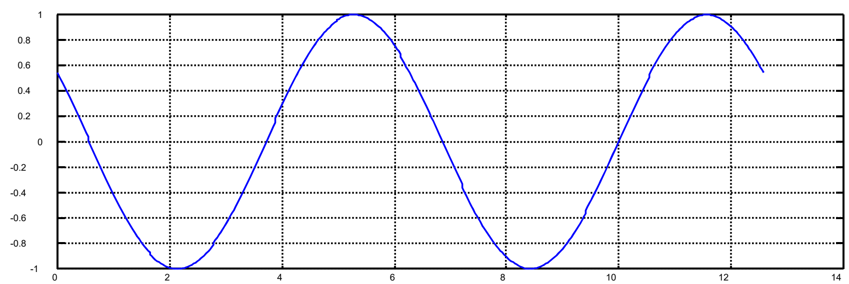
连续信号的时域描述和分析

1、普通信号：正弦信号

- 波形： ω_0 为基波频率， φ 为相位

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



- 两个同频率的正弦信号相加的结果**仍然是**正弦信号。
- 如果一个正弦信号的频率 f_1 是另一个正弦信号频率 f_0 的整数倍，则其合成信号是频率为f_0的非正弦周期信号。
- 正弦信号的微分和积分**仍然是**同频率的正弦信号。

连续信号的时域描述和分析

1、普通信号：复指数信号

- 数学描述： $$x(t) = Ae^{st}$$
- s为复数 $$s = \sigma + j\omega$$
- 若 σ=0,ω =0，则x(t)=A为直流信号
- 若σ≠0,ω =0，则 $x(t) = Ae^{\sigma t}$ 为***<u>实指数信号</u>***

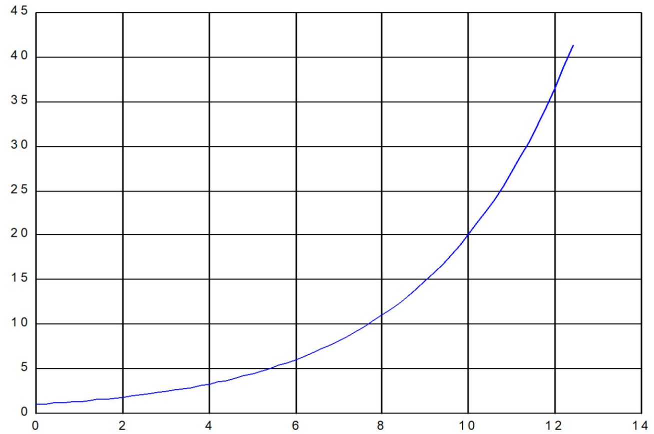
连续信号的时域描述和分析

1、普通信号：实指数信号

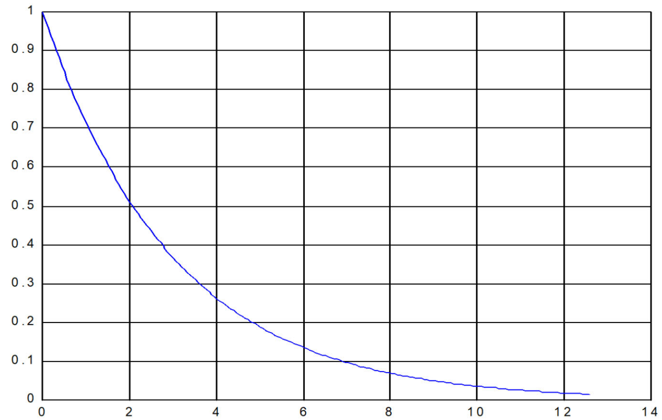
原子弹爆炸或化学链锁反应

放射性衰变，RC 电路或有阻尼的机械系统响应

- σ>0 ，*x(t)*随 *t* 的增加而指数增长



- σ<0， *x(t)*随 *t* 的增加而指数衰减



连续信号的时域描述和分析

1、普通信号：复指数信号

欧拉公式

$$x(t) = Ae^{st} = Ae^{\sigma t}e^{j\omega t}$$

$$= Ae^{\sigma t}\cos\omega t + jAe^{\sigma t}\sin\omega t$$

$$= \mathrm{Re}[x(t)] + j\,\mathrm{Im}[x(t)]$$

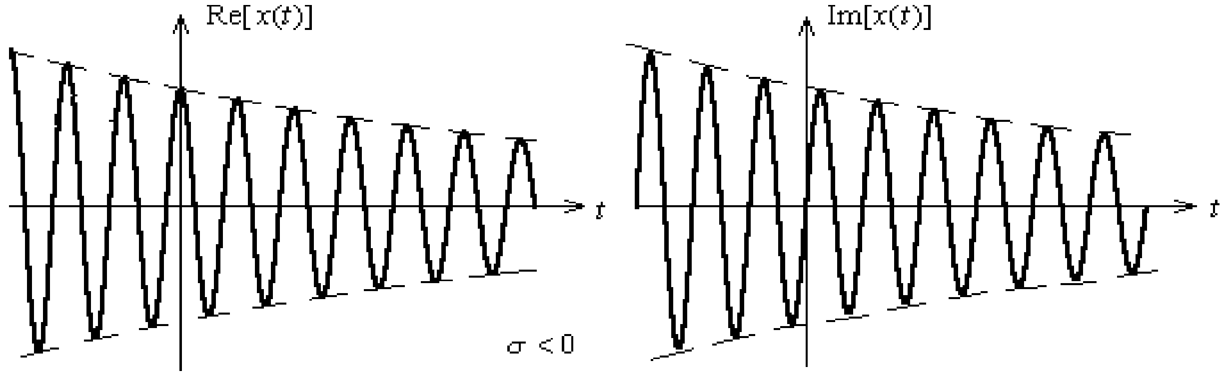
$$\mathrm{Re}[x(t)] = Ae^{\sigma t}\cos\omega t \qquad \mathrm{Im}[x(t)] = Ae^{\sigma t}\sin\omega t$$

连续信号的时域描述和分析

1、普通信号：复指数信号

研究复指数信号的意义：

- 实部和虚部表示了 ***指数包络的正弦型振荡***，这本身具有一定的实际意义。
- 把直流信号、指数信号、正弦型信号以及具有包络线的正弦型信号表示为统一的形式，使信号的数学运算简练和方便。



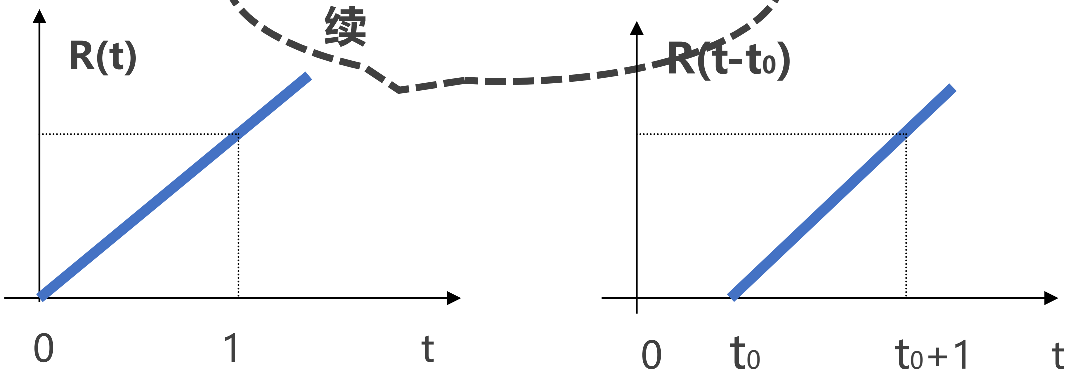
连续信号的时域描述和分析

本身、其导数或其积分有不连续点的函数

2、奇异信号：单位斜坡信号

- **定义**：从某一时刻开始随时间正比例增长的信号，其增长变化率为1。
- **数学描述：** $$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$
- **波形图**

斜坡信号的一阶导数在t=0处不连续



连续信号的时域描述和分析

2、奇异信号：单位阶跃信号

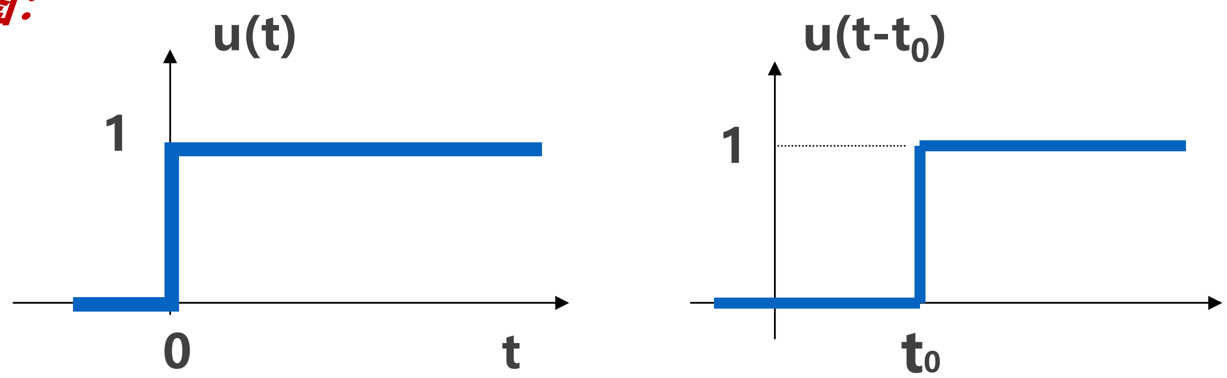
- **数学描述：**

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

- **物理意义：**

在t=0时刻对某一电路接入单位电源（可以是直流电压源，也可以是直流电流源），并且无限持续下去

- **波形图：**



连续信号的时域描述和分析

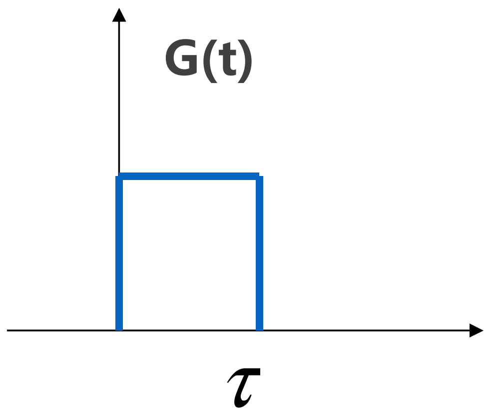
2、奇异信号：单位阶跃信号

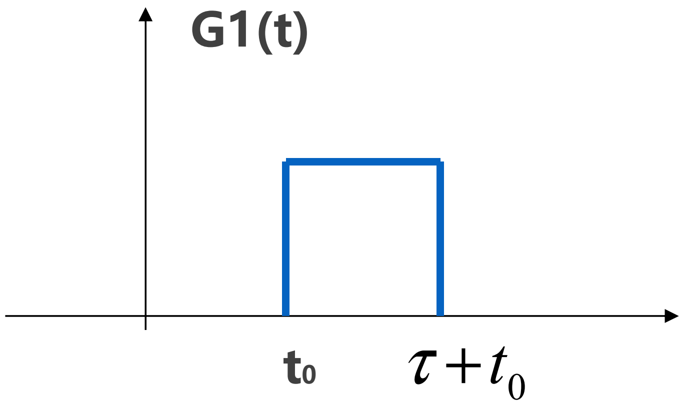
- ***单边特性：***信号在某接入时刻以前的幅度为0。可利用单边特性，用数学表达式描述信号的接入特性

- ***用阶跃信号表示矩形脉冲***

$$G(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

$$G_1(t) = u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)$$



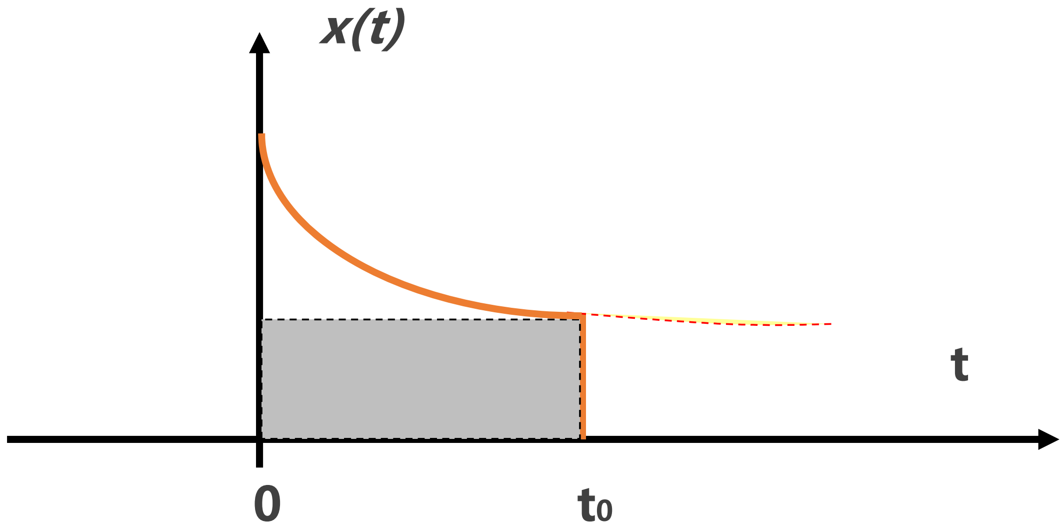


连续信号的时域描述和分析

2、奇异信号：单位阶跃信号

信号加窗或取单边

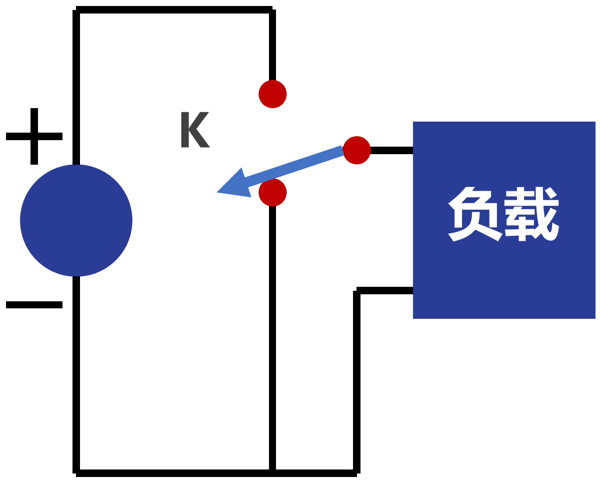
$$x(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$$

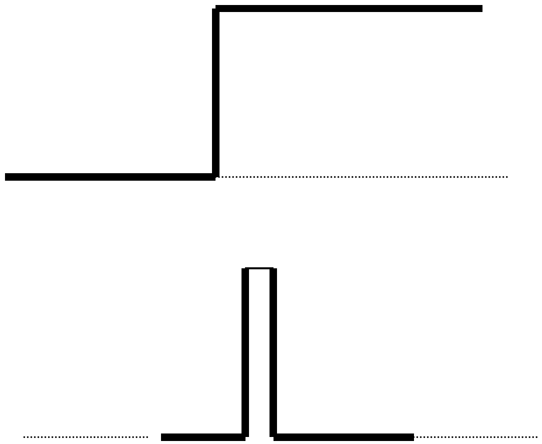


连续信号的时域描述和分析

2、奇异信号：单位阶跃信号

- 突然接入的直流电压
- 突然接通又马上断开电源





连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

- ***定义：*** 持续时间无穷小，瞬间幅度无穷大，涵盖面积恒为1的一种理想信号
- ***数学描述：*** 狄拉克定义

$$\left.\begin{aligned}\delta(t)=0 \quad t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\end{aligned}\right\}$$

- ***物理背景：***

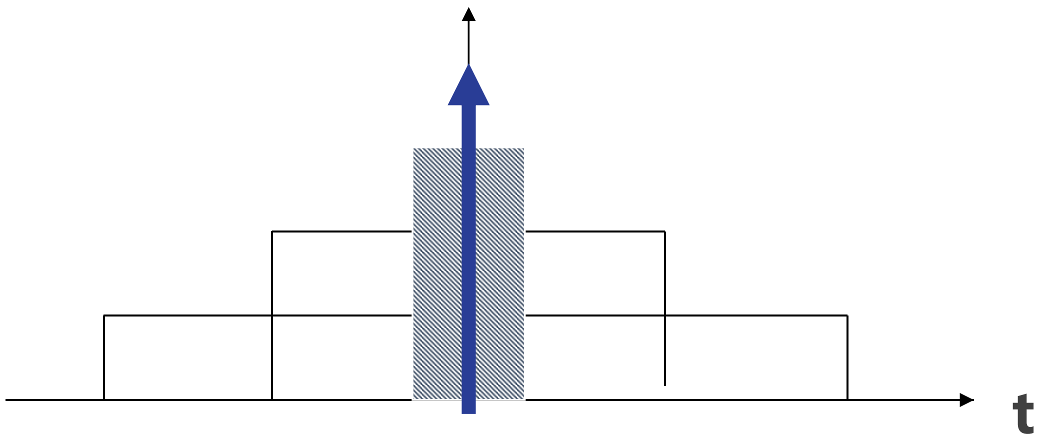
　　某些物理现象需要用一个时间极短，但取值极大的函数模型来描述，如：力学中瞬间作用的冲激力，电学中的雷击电闪，通信中的抽样脉冲等

连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

- ***矩形脉冲演变成冲激信号***：矩形面积不变，宽趋于0时的极限

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})\right]$$

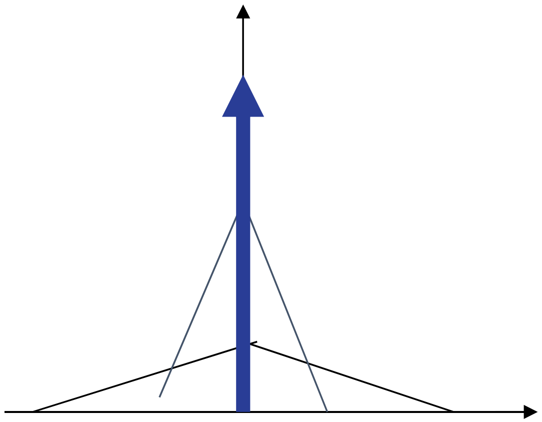


连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

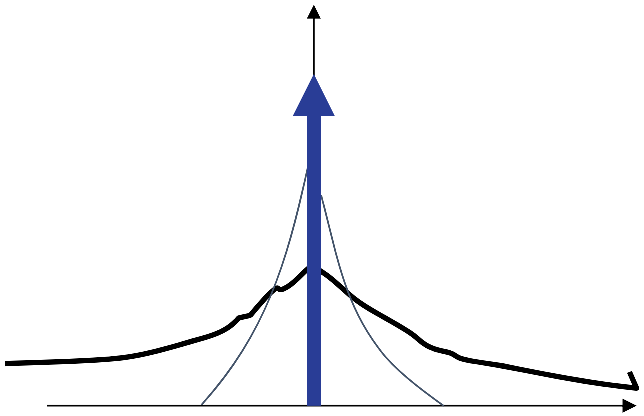
其它函数演变的冲激信号

- ***三角脉冲的极限***



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]\right\}$$

- ***双边指数脉冲的极限***



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right]$$

连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

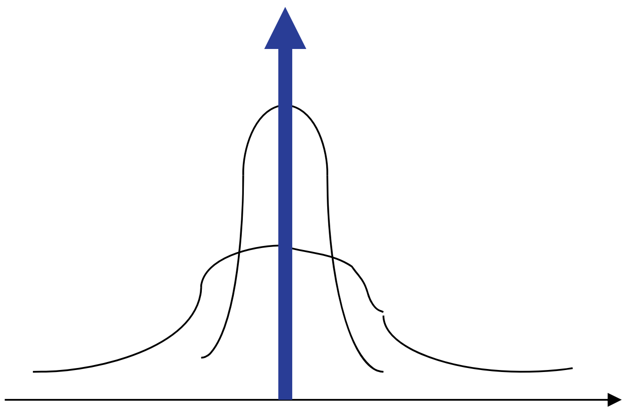
其它函数演变的冲激信号

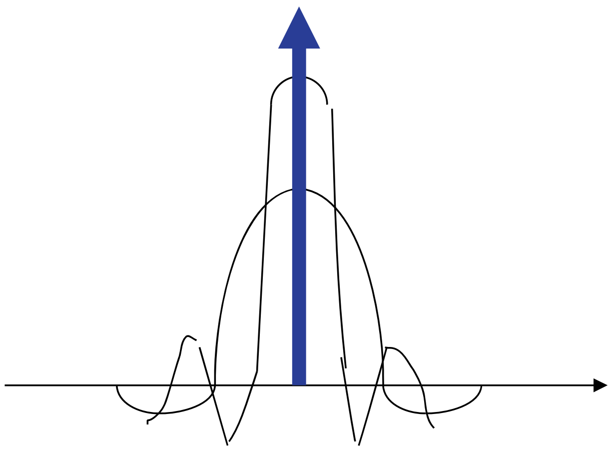
- 钟形脉冲的极限

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{\tau}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right]$$

- 抽样脉冲的极限

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{k}{\pi}Sa(kt)\right]$$



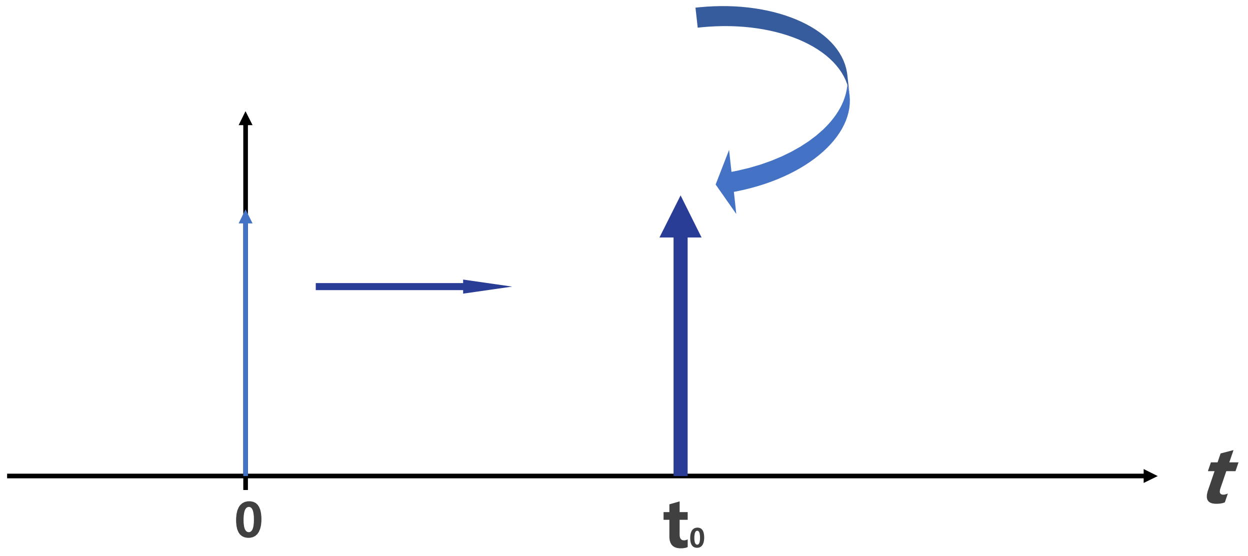


连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

单位冲激平移

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 & t = t_0 \\ \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$



连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

冲激信号的性质

- **偶函数**

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

- **积分**

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

- **筛选**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)x(t)dt=$$

$$=\int x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

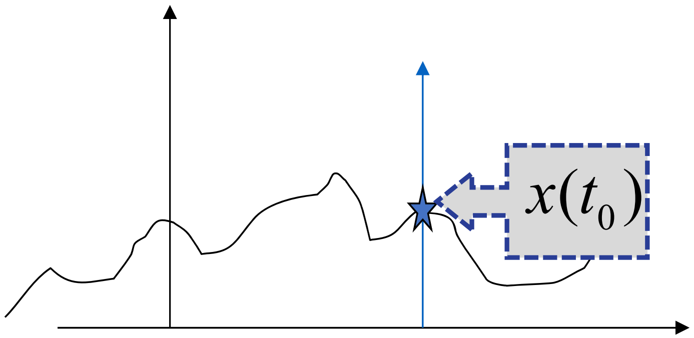
连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

筛选特性

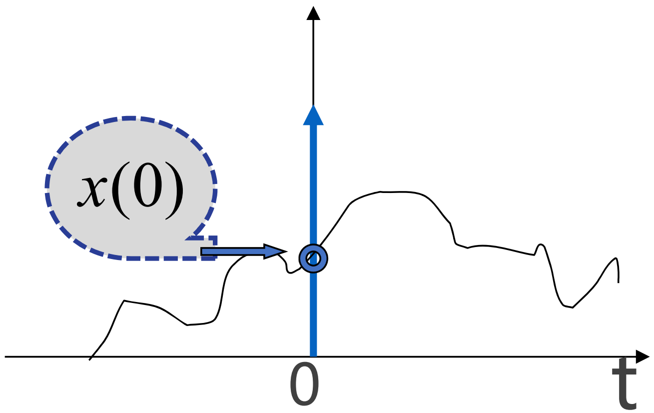
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)x(t)dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$



如果单位冲激信号与一个在t=0处连续、且处处有界的信号x(t)相乘并在区间内积分，结果为 *x(0)*，其余各点均为零。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)x(t)dt = x(0)$$

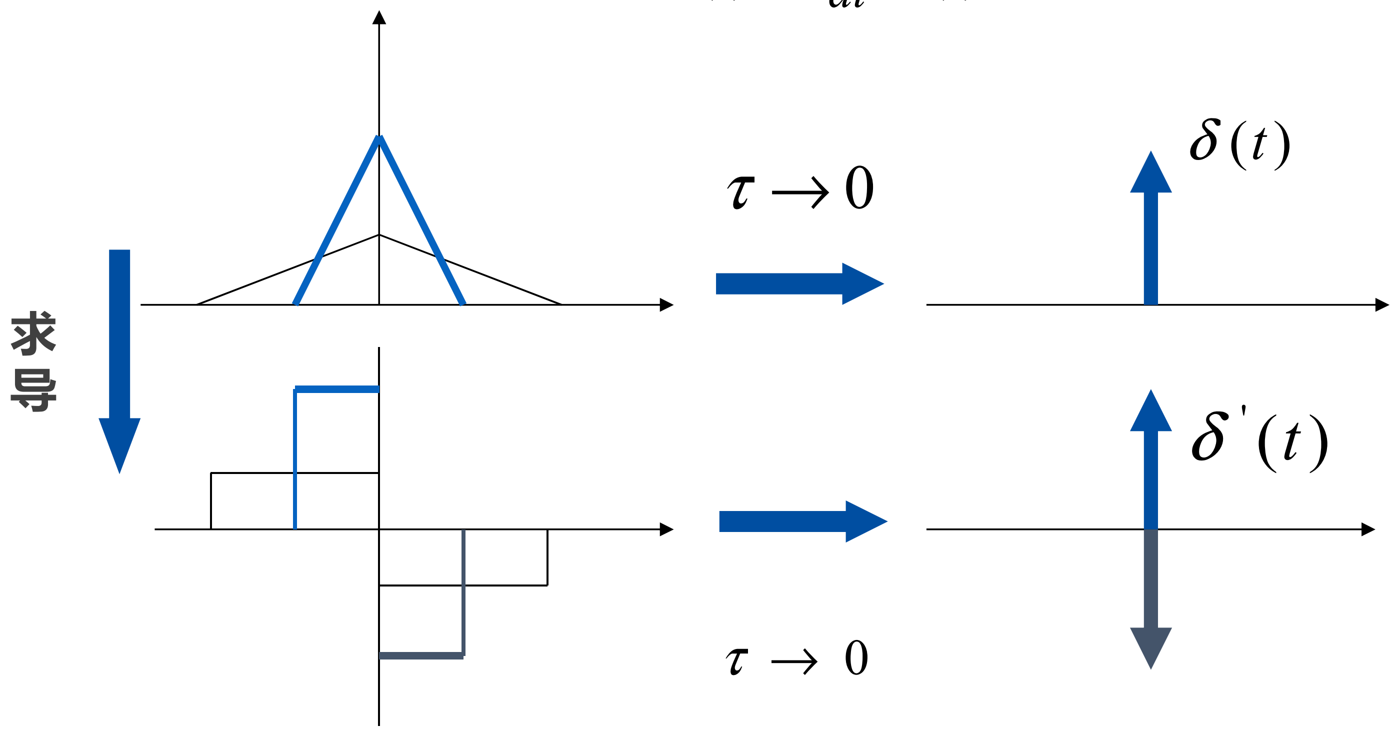


连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

冲激偶信号

$$\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$$



连续信号的时域描述和分析

3、奇异信号：单位冲激信号

冲激偶的性质

- **面积**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,dt = 0$$

- **“筛选”**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)\,dt = -x'(0)$$

连续信号的时域描述和分析

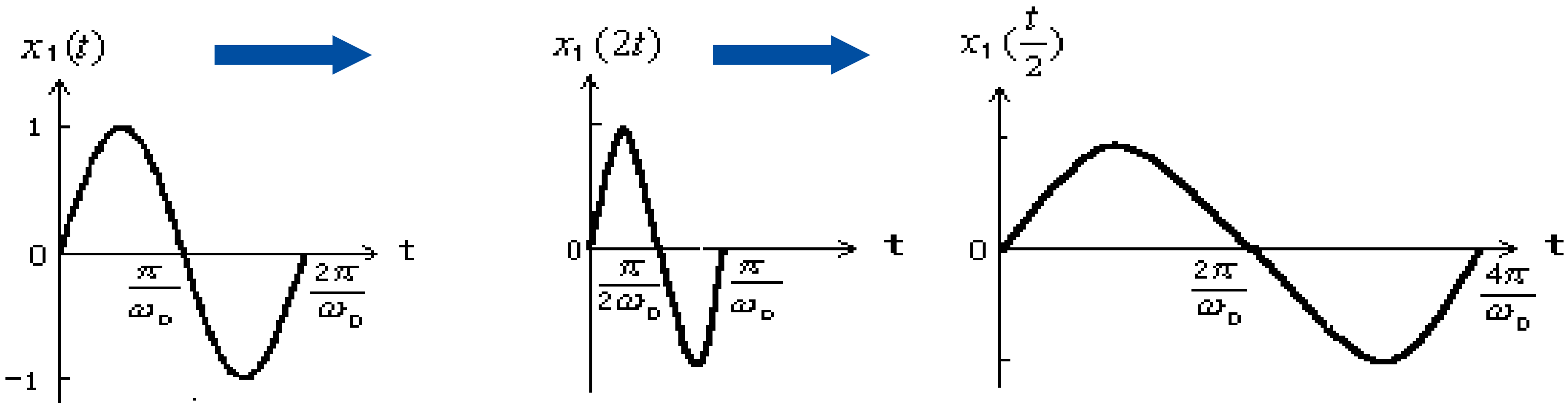
（二）时域计算

- 基本运算
- 叠加和相乘
- 微分和积分
- 卷积运算

连续信号的时域描述和分析

1、基本运算 - 尺度变换

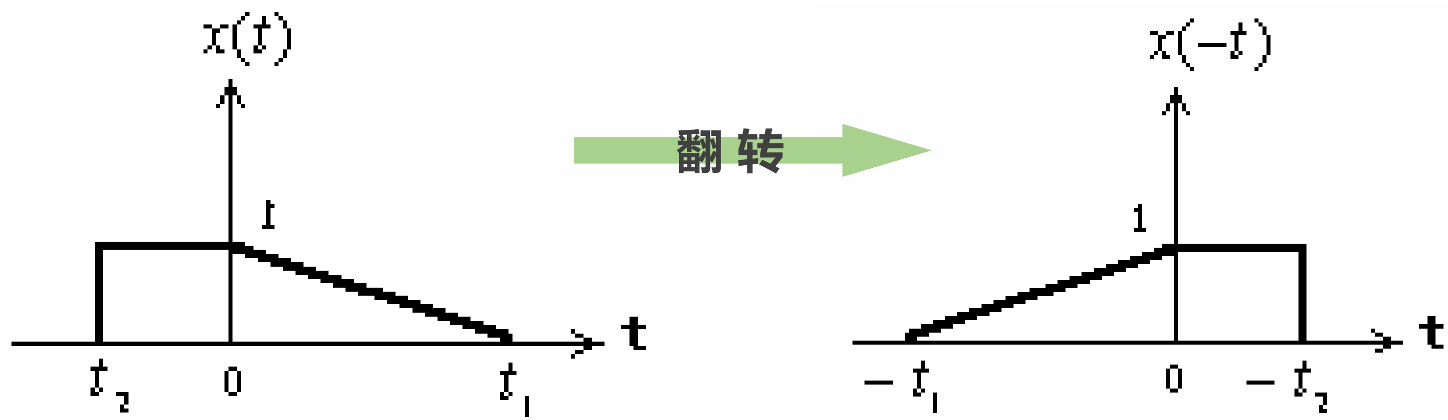
- ***幅度尺度变换：*** 表示对原信号的放大或缩小。一般来说，不改变信号的特征
- ***时间尺度变换：*** 表现为信号横坐标尺寸的展宽或压缩，通常横坐标的展缩可以用变量*at*（a为大于零的常数）替代原信号的自变量*t*来实现。一般来说，改变了信号的基本特征 - 信号的频谱发生改变



连续信号的时域描述和分析

1、基本运算 - 翻转

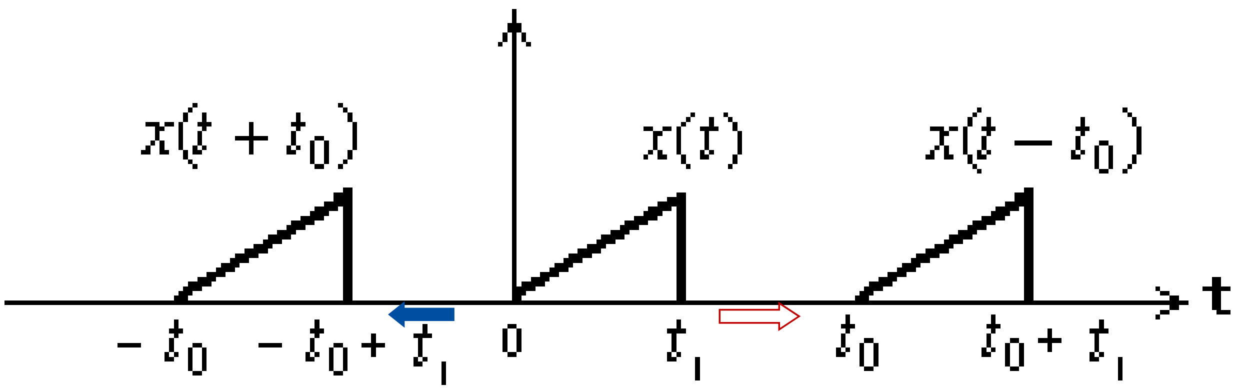
- 将信号以纵坐标轴为中心进行对称映射，即用变量-t代替原自变量t而得到的信号x(-t)



连续信号的时域描述和分析

1、基本运算 - 平移

- 将原信号沿时间轴平移，信号的幅值不发生改变。若t_0为大于零的常数，则
  - 沿坐标轴正方向平移（右移）t_0表示信号的延时
  - 沿坐标轴反方向平移（左移）t_0表示信号的超前



连续信号的时域描述和分析

- *例2-2* **已知信号**

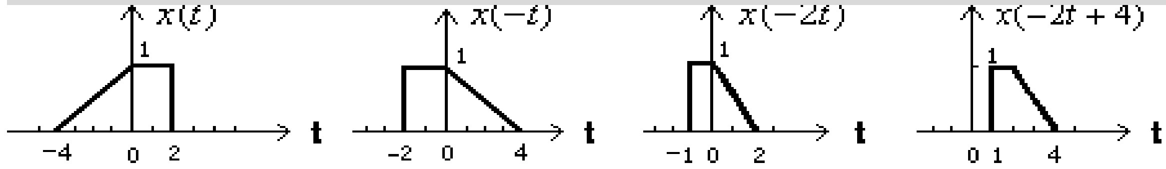
$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}(t+4) & -4<t<0\\ 1 & 0<t<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求出x(-2t+4)

连续信号的时域描述和分析

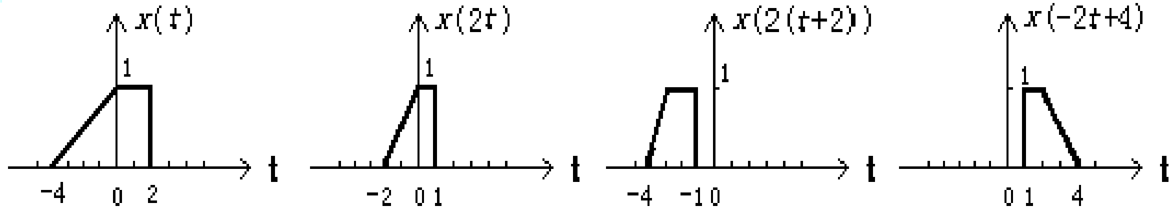
解：翻转+时间轴展缩+平移

$$x(t) \to x(-t) \to x(-2t) \to x[-2(t-2)] = x(-2t+4)$$



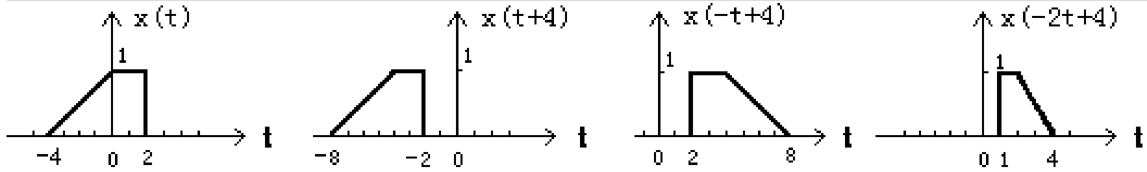
时间轴展缩+平移+翻转

$$x(t) \to x(2t) \to x[2(t+2)] = x(2t+4) \to x(-2t+4)$$



平移+翻转+时间轴展缩

$$x(t) \to x(t+4) \to x(-t+4) \to x(-2t+4)$$



连续信号的时域描述和分析

2、叠加和相乘

- **两个信号$x_1(t)$和$x_2(t)$相叠加，其瞬时值为两个信号在该瞬时的值的代数和，即 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$**

- **两个信号$x_1(t)$和$x_2(t)$相乘，其瞬时值为两个信号在该瞬时的值的乘积，即 $x(t)=x_1(t)\ x_2(t)$**

连续信号的时域描述和分析

3、微分和积分

表示信号的变化率，要求该信号满足可微条件

- 信号的微分是指取信号对时间的一阶导数，表示为

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

- 信号的积分是指信号x(t)在区间 $(-\infty, t)$ 内积分得到的信号，即

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

连续信号的时域描述和分析

4、卷积运算

- 对于两个连续时间信号$x_1(t)$和$x_2(t)$，可以定义它们的卷积积分运算，简称卷积运算

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

- 有：

$$x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$$

- 计算步骤：改变自变量-翻转-位移-相乘-积分

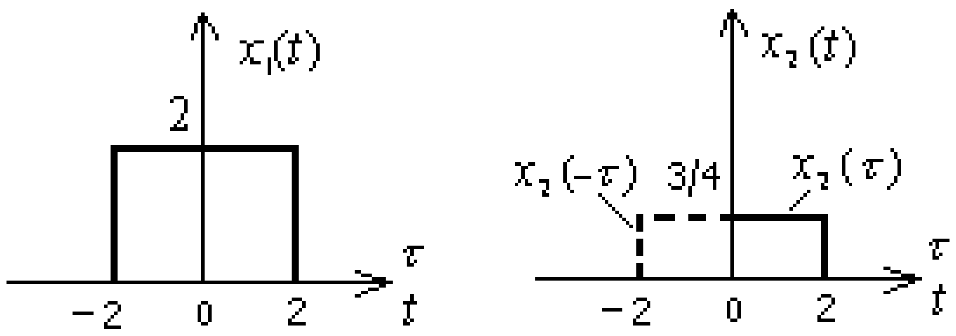
连续信号的时域描述和分析

- 例2：设进行卷积运算的两个信号为

$$x_1(t)=\begin{cases}0 & t<-2\\ 2 & -2<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \dfrac{3}{4} & 0<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

分别如图所示，求其卷积。



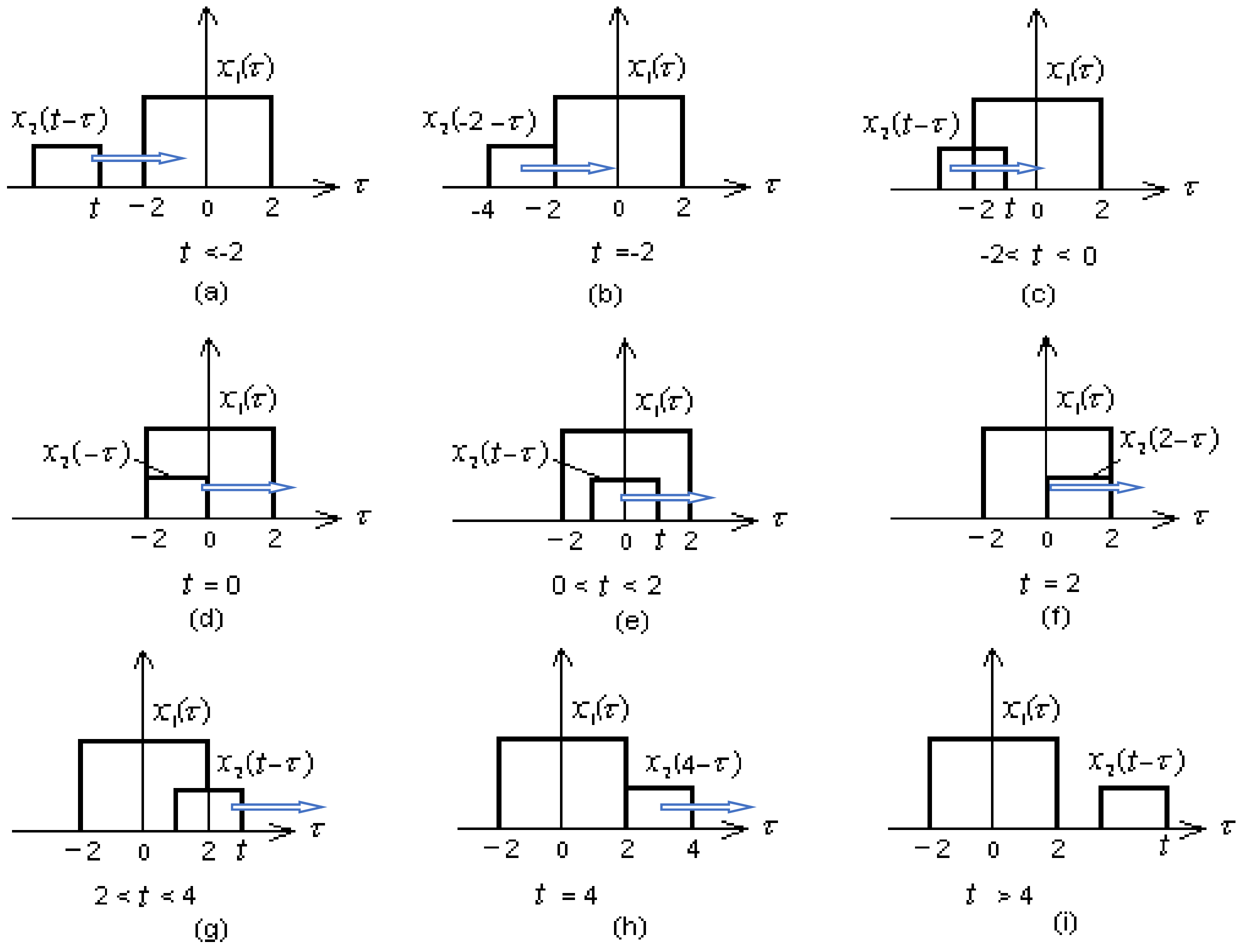
连续信号的时域描述和分析

卷积求解步骤:

- 将$x_1(t)$和$x_2(t)$进行变量替换，成为 $x_1(\tau)$ 和 $x_2(\tau)$ ；并对 $x_2(\tau)$ 进行翻转运算，成为 $x_2(-\tau)$
- 将 $x_2(-\tau)$ 平移t，得到 $x_2(t-\tau)$
- 将 $x_1(\tau)$ 和 $x_2(t-\tau)$ 相乘，得到被积函数
- 将被积函数积分，即为所求的卷积积分，它是t的函数

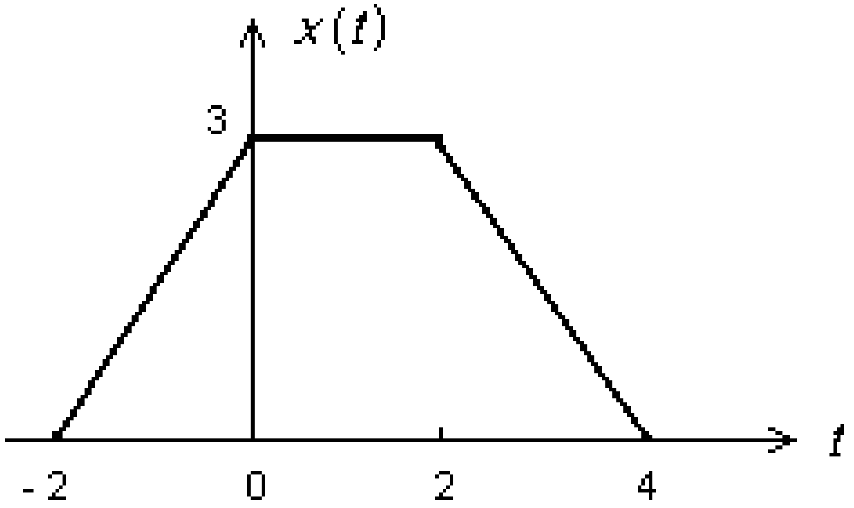
$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

连续信号的时域描述和分析



连续信号的时域描述和分析

- ***卷积结果：***



(j)

连续信号的时域描述和分析

任意信号与冲激信号的卷积

筛选特性

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=x(t)$$

$$\begin{aligned}x(t)*\delta(t-t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))d\tau=x(t-t_0)\end{aligned}$$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$$

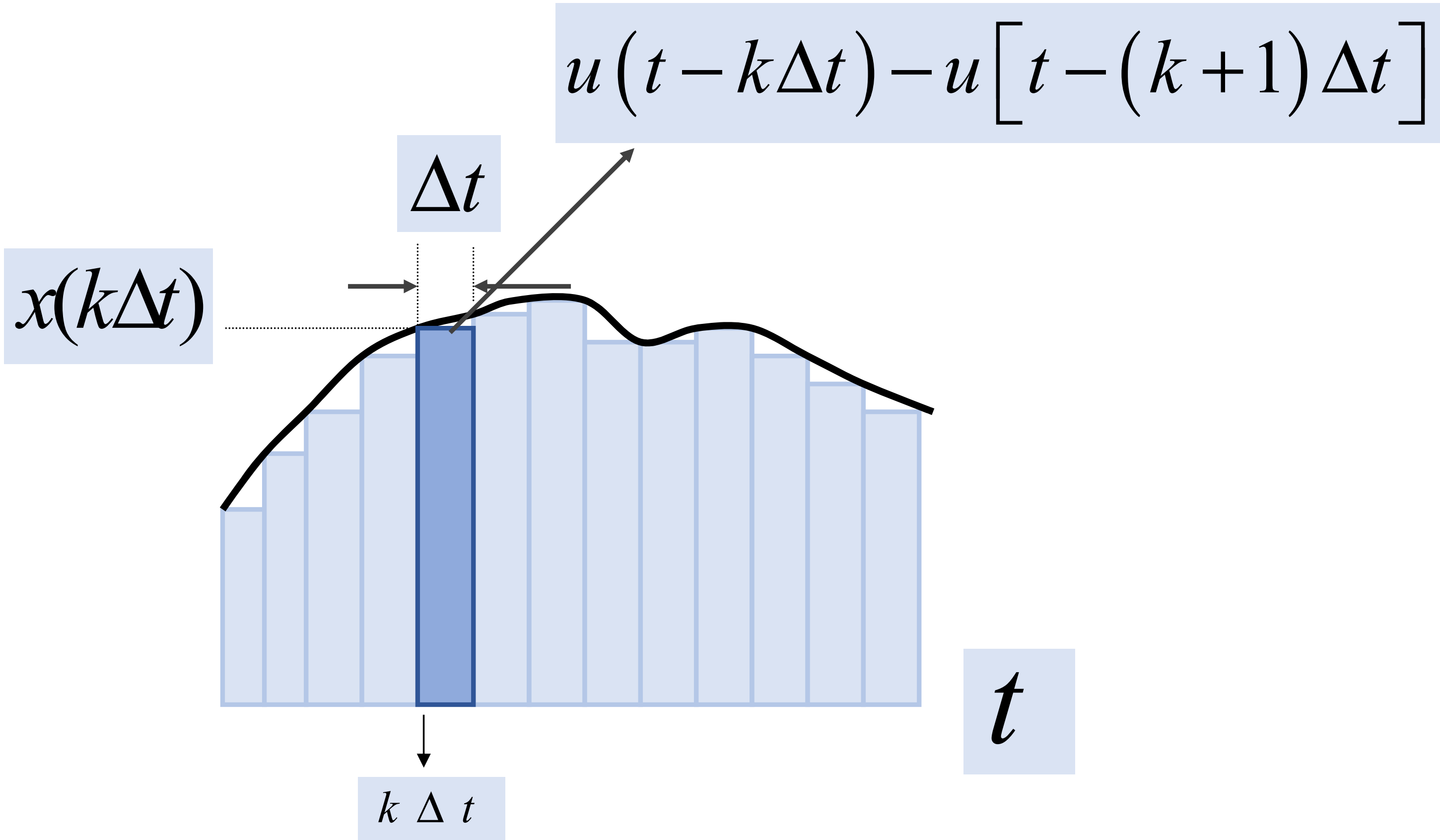
连续信号的时域描述和分析

（三）信号的分解

- **分解成冲激函数之和**
- ***正交分解***

连续信号的时域描述和分析

1、分解成冲激函数之和



连续信号的时域描述和分析

1、分解成冲激函数之和

- **任意信号x(t)可近似用一系列等宽度的矩形脉冲之和表示**

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}\Delta t$$

连续信号的时域描述和分析

- 当 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下
- 而 $\Delta t \to d\tau$ $k\Delta t \to \tau$
- 有 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t} = \delta(t-\tau)$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

连续信号的时域描述和分析

- 任意信号x(t)可以用经平移的无穷多个单位冲激函数加权后的连续和（积分）表示，换言之，任意信号x(t)可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数

连续信号的时域描述和分析

课后作业

- ***作业：P99***
  - 1:(1)(3)(5)
  - 8
  - 58
- ***课后预习内容：***
  - 傅立叶级数（自学）
  - 连续信号的频域分析：
    - 周期信号的频谱分析
    - 非周期信号的频谱分析

谢谢大家