第六周作业参考答案 习题八：8-12; 8-16; 8-17; 8-19.

8-12 已知系统（**A**, **b**, **c**）如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}。$$

要求：① 判别系统的能控性。如果完全能控，请将该系统化为能控规范型；如果不完全能控，请找出其能控子空间；② 判别系统的能观性。如果完全能观，请将该系统化为能观规范型；如果不完全能观，请找出其能观子空间。

8-12 参考答案：

① 按能控性分解

step1：计算能控性矩阵 Qc

$$Q_C=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$$；rankQc=2<3，系统不完全能控；

Step2：构造非奇异变换矩阵 T，并求出变换后的系统矩阵：

从 Qc 中选取 2 个线性无关的列，再附加一线性无关列 $T_2{}^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

（附加的线性无关列不同，则答案可能不同，但 A、B 形式是一定相同的）

$$T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix};\qquad 则\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_C=T^{-1}AT==\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \hat{b}_C=T^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\quad \hat{c}_c=cT=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

如果选取 $T_c=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$T_c^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\hat{A}_C=T^{-1}AT==\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\\ 1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$，b 与上相同，$\hat{c}_c=cT=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

如果选取 $T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$，$T^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\hat{A}_C = T^{-1}AT == \begin{bmatrix} -4 & -13 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$，b 与上相同，$\hat{c}_c = cT = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Step3：写出分解后的可控、不可控子系统动态方程：

可控子系统：$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x_c$$

不可控子系统：$\dot{x}_{\bar{c}} = x_{\bar{c}}$

$$y_2 = -x_{\bar{c}}$$

② 按能观性分解

step1：计算能观性矩阵 Qo

$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$；rankQo=2<3，系统不完全能观；

Step2：构造非奇异变换矩阵 T^{-1}，并求出变换后的各矩阵：

从 Qo 中选取 2 个线性无关的行作为 T_1，再附加一线性无关行 $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　则　$T = (T^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{A}_o = T^{-1}AT == \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$；$\hat{b}_o = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$；$\hat{c}_o = cT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

如果选取 $T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\hat{A}_0 = T^{-1}AT == \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\hat{b}_o = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，c 与上相同

Step3：写出分解后的可观、不可观子系统动态方程：

可观子系统：$\dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$

$$y_1 = [1 \quad 0]x_o = y$$

不可观子系统：$\dot{x}_{\bar{o}} = [-5 \quad 3]x_o + 2x_{\bar{o}} + u$

$$y_2 = 0$$

8-16　设某系统由状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u\,; \quad y = [2 \quad 1]\boldsymbol{x}$$

表示。要求：① 设计状态反馈矩阵 K，以达到将闭环极点配置在{-3,-6}的目的；② 确定在初始状态 $\boldsymbol{x}(0)=[1\ -1]^T$ 作用下的状态响应。

8-16 参考答案：

① $K = [-8 \quad -2.5]$；

② 状态响应为：

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}\} = L^{-1}\{\frac{1}{(s+3)(s+6)}\begin{bmatrix} s+8 \\ -s-18 \end{bmatrix}\}$$

$$= L^{-1}\{\begin{bmatrix} \dfrac{s+8}{(s+3)(s+6)} \\ \dfrac{-s-18}{(s+3)(s+6)} \end{bmatrix}\} = L^{-1}\{\begin{bmatrix} \dfrac{5/3}{s+3} + \dfrac{-2/3}{s+6} \\ \dfrac{-5}{s+3} + \dfrac{4}{s+6} \end{bmatrix}\}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{5}{3}e^{-3t} - \dfrac{2}{3}e^{-6t} \\ -5e^{-3t} + 4e^{-6t} \end{bmatrix}$$

8-17　设受控系统传递函数为 $\dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{10}{s^3 + 3s^2 + 2s}$，要求：

① 设计状态反馈阵，使闭环系统极点为–2，$-1 \pm j$；

② 给出系统的闭环传递函数。

8-17 参考答案：

① 能控标准型时 $\boldsymbol{K} = [-4 \quad -4 \quad -1]$；串联分解时 $\boldsymbol{K} = [-4 \quad -3 \quad -1]$

② $\dfrac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{s})} = \dfrac{10}{\boldsymbol{s}^3 + 4\boldsymbol{s}^2 + 6\boldsymbol{s} + 4}$

8-19　一个 SISO 系统由状态方程　$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p u$　表示，其中

$$\boldsymbol{A}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}_{p1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

① 确定系统的能控性；

② 求出系统的特征值；

③ 求出将状态方程变换为能控标准型状态方程的变换矩阵 T_c；

④ 求出将闭环极点配置为σ(A_{cl})={-2, -4, -6}的状态反馈矩阵 K_p。

8-19 参考答案：

① 系统完全能控。

② 特征值: -1,-2,-3

③ 变换矩阵

$$T_{c1} = M_{c1}L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{c1}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

可以验证：$A_c = T_c^{-1}A_pT_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$；$b_c = T_c^{-1}b_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

④ 期望特征多项式为：

$$\Delta^*(s) = (s+2)(s+4)(s+6) = s^3 + 12s^2 + 44s + 48 = s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0$$

对能控标准型有：

$$\mathbf{k}_{ci} = \boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \boldsymbol{\beta}_{i-1} \qquad i = 1,2,\cdots,n \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k_{c1} &= a_0 - \beta_0 = 6 - 48 = -42 \\ k_{c2} &= a_1 - \beta_1 = 11 - 44 = -33 \\ k_{c3} &= a_2 - \beta_2 = 6 - 12 = -6 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -42 & -33 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$