滤波器

主 讲 教 师 ： 于 淼

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

2、双线性变换法

- 从s平面到z平面的映射关系不是一一对应的，冲激响应不变法造成数字滤波器频率响应特性的混叠，因此，该设计方法只适用于低通或限带的高通、带通情况
- 为了消除混叠现象，必须找出一种频率特性有一一对应关系的变换，双线性变换法就是其中的一种

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（1）双线性变换法的基本设计思想

- 按给定的技术指标设计模拟滤波器
- 将这个模拟滤波器的系统传递函数H(s)，通过适当的变换，把无限宽的频带，变换成频带受限的系统函数 $H(\hat{s})$
- 将 $H(\hat{s})$ 进行常规z变换，求得数字滤波器的传递函数H(z)

由于在数字化以前已经对频带进行了压缩，所以数字化以后的频率响应可做到无混叠效应。

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（2）双线性变换法 $s \longrightarrow \hat{s}$ 的映射

- 将s平面映射到 $\hat{s}$ 平面存在下列关系式

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-e^{-\hat{s}T}}{1+e^{-\hat{s}T}}\right)$$

$$\hat{s} = 0 \longrightarrow s = 0$$

$$\hat{s} = \pm j\frac{\pi}{T} \longrightarrow s = \pm\infty$$

把s平面压缩到了 $\hat{s}$ 平面的一条横带上了，横带范围为

$$-j\frac{\pi}{T} \sim j\frac{\pi}{T}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

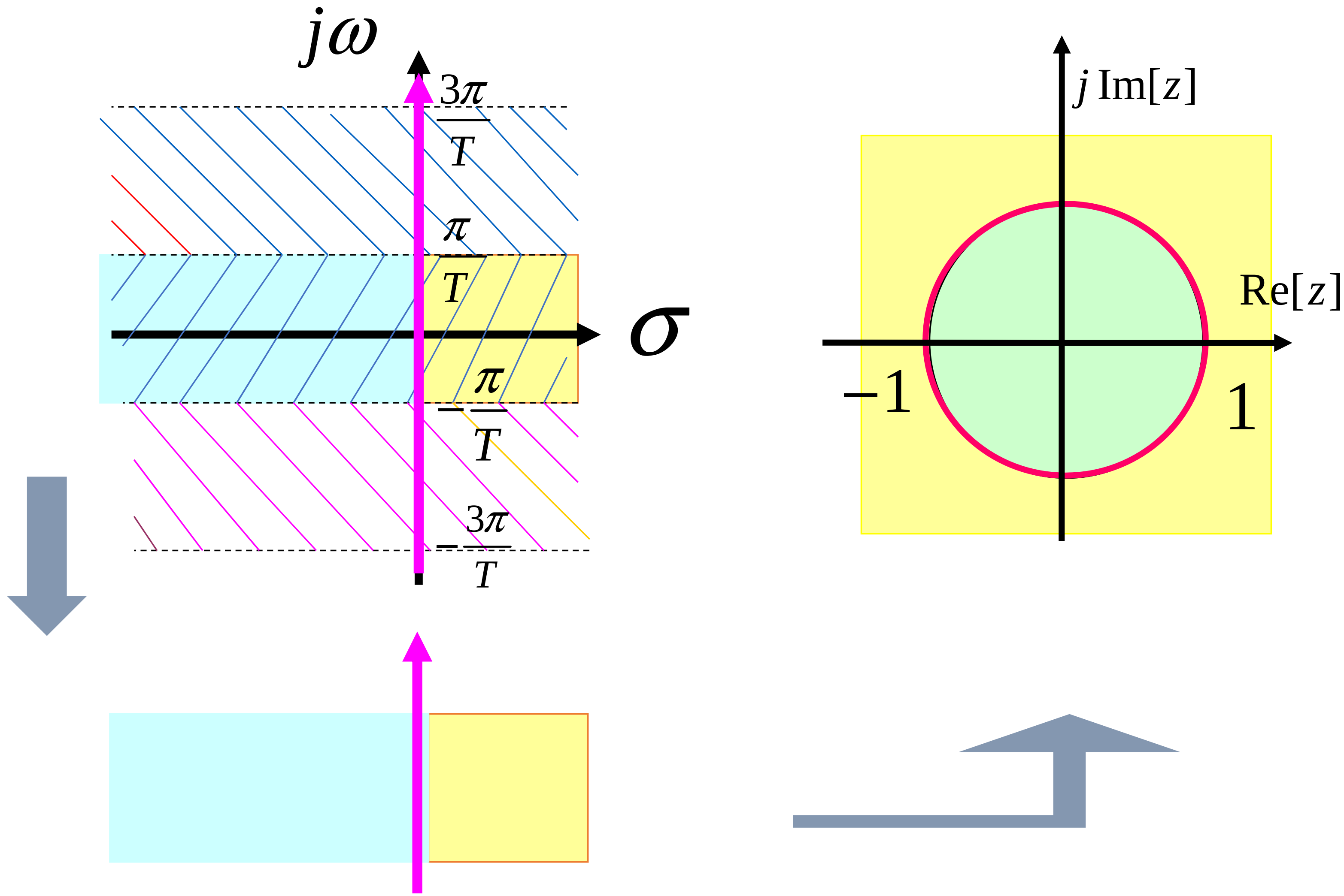
（3）双线性变换法 $\hat{s} \to z$ 的映射

利用公式 $z = e^{\hat{s}T}$ **实现** $\hat{s}$ **平面到z平面的映射**

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-e^{-\hat{s}T}}{1+e^{-\hat{s}T}}\right) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器



无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（4）双线性变换法的特性

- s平面到z平面一一对应映射关系
- 将s平面虚轴唯一地映射到z平面的单位圆，保证了H(z)的频率响应能模仿H(s) 的频率响应，避免了频率响应混叠现象
- 将s左平面全部映射到z平面单位圆内，将s右半平面全部映射到z平面的单位圆外，保证了H(z) 和H(s) 相比，其稳定性不发生变化

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（5）双线性变换法的频率预畸变

- 在冲激响应不变法中，数字频率Ω与模拟频率ω之间的关系是线性关系：Ω＝ ωT
- 在双线性变换法中，模拟频率与数字频率之间的关系为非线性关系，即

$$\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$$

- 模拟频率与数字频率间的非线性关系，会使数字滤波器与模拟滤波器在频率响应与频率的对应关系上发生畸变

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（5）双线性变换法的频率预畸变

- 双线性变换法的频率预畸变：先对模拟滤波器的临界频率加以畸变，使其通过双线性变换后正好映射为需要的频率
- 设所求的数字滤波器的通带和阻带的截止频率分别为Ωp 和Ωs
- 按照式 $\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$ 求出对应的模拟滤波器的临界频率ω_p 和ω_s，然后模拟滤波器就按照这两个预畸变的频率ω_p 和 ω_s 来设计

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- 例3 用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，采样周期T＝1s，巴特沃思数字低通滤波器的技术指标为：

（1）在通带截止频率 $\Omega_p = 0.5\pi$ 时，衰减不大于3dB

（2）在阻带截止频率 $\Omega_s = 0.75\pi$ 时，衰减不小于15dB

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

解:（1）将频率进行预畸变处理。则有

$$\omega_c = \omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_p}{2} = 2\tan\frac{0.5\pi}{2} = 2\,rad/s, \alpha_p = 3dB$$

$$\omega_s = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_s}{2} = 2\tan\frac{0.75\pi}{2} = 4.828\,rad/s, \alpha_s = 15dB$$

（2）设计满足技术指标的巴特沃思模拟低通滤波器。其阶数为

$$n = \frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)} \approx 1.941$$

取n=2，归一化巴特沃思模拟低通滤波器传递函数为

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + 1.414\bar{s} + 1}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（3）对上式进行反归一化处理。巴特沃思模拟低通滤波器的实际传递函数为

$$H(s)=H(\bar{s}\omega_c)=\frac{\omega_c^2}{s^2+1.414\omega_c s+\omega_c^2}=\frac{4}{s^2+2.828s+4}$$

（4）利用双线性变换法求出数字滤波器的传递函数H(z)

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1+2z+z^2}{0.586+3.414z^2}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

双线性变换法数字滤波器设计方法

- 给定数字滤波器的技术指标；
- 利用 $\omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2}$ 得到模拟滤波器的技术指标；
- 通过频率变换得到模拟低通滤波器的技术指标；
- 设计模拟低通滤波器；
- 通过频率变换得到模拟滤波器
- 通过双线性变换 $s = \frac{2}{T}(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$ 得到数字滤波器

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

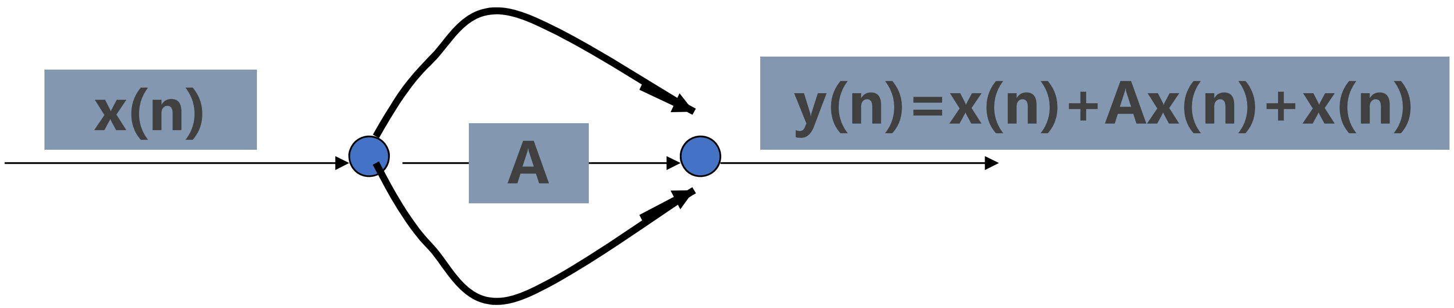
3、IIR数字滤波器的网络结构

- 直接型
- 级联型
- 并联型

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

信号流图

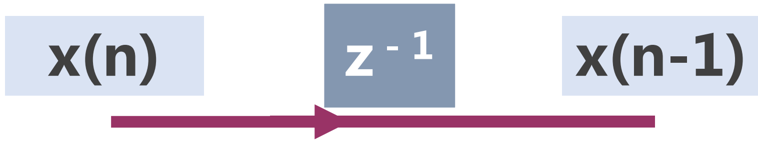
- **节点**：代表系统中的变量，等于所有进入该节点的信号之和，自节点流出的信号不影响该节点变量的值。
- **支路**：信号在支路上按箭头指向由一个节点流向另一个节点。
- **通路**：沿着支路的箭头方向而穿过各相连支路的途径
- **前向通路增益**：在前向通路中，各支路增益的乘积。



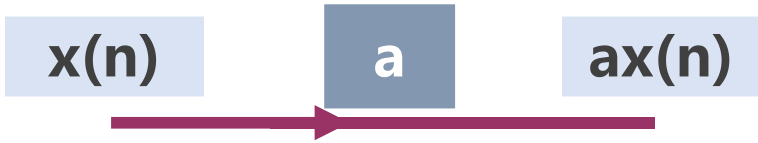
无限冲激响应（IIR）数字滤波器

信号流图

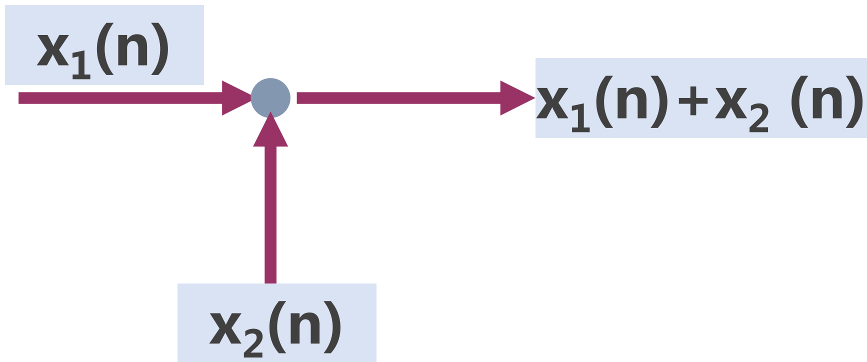
- 时延符号



- 常数乘符号



- 加法符号



无限冲激响应（IIR）数字滤波器

（1）直接型

- IIR滤波器的传递函数一般可表示为

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}=\frac{Y(z)}{X(z)},N>M$$

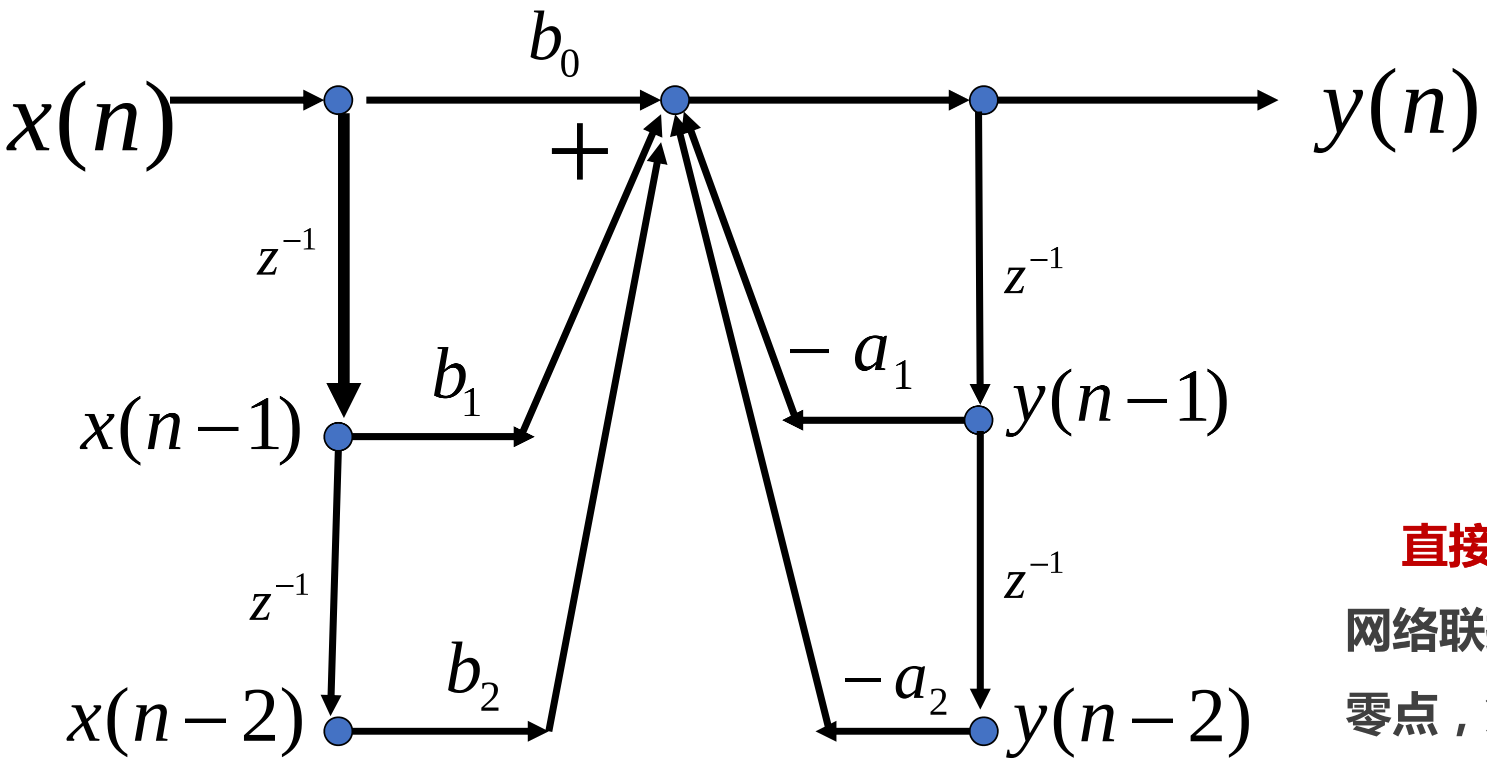
N阶差分方程为

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

性能不易控制
性能对系数的变化太敏感

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

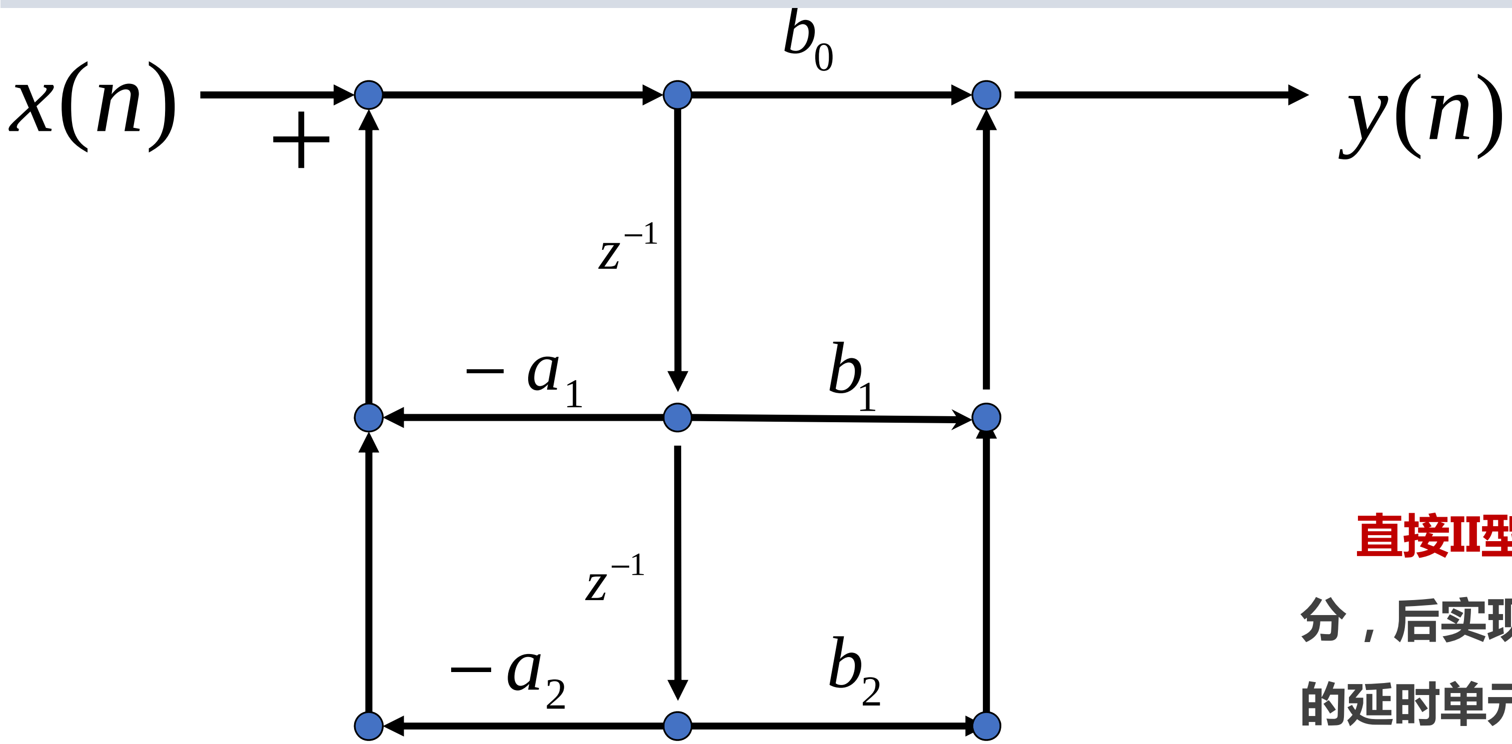
$$y(n)=-a_1 y(n-1)-a_2 y(n-2)+b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+b_2 x(n-2)$$



直接I型：总的网络由两部分网络联接组成，第一个网络实现零点，第二个网络实现极点

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

$$y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$



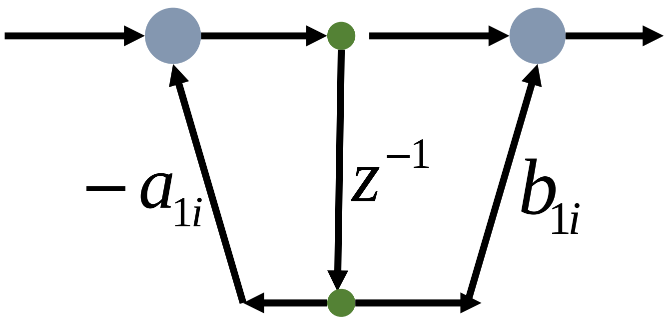
直接II型：先实现极点部分，后实现零点部分，其中的延时单元可以合并共用

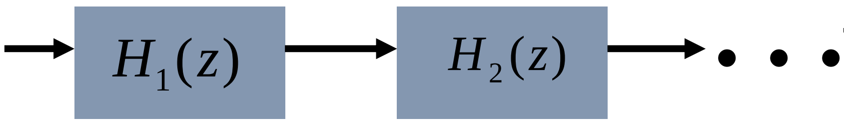
无限冲激响应（IIR）数字滤波器

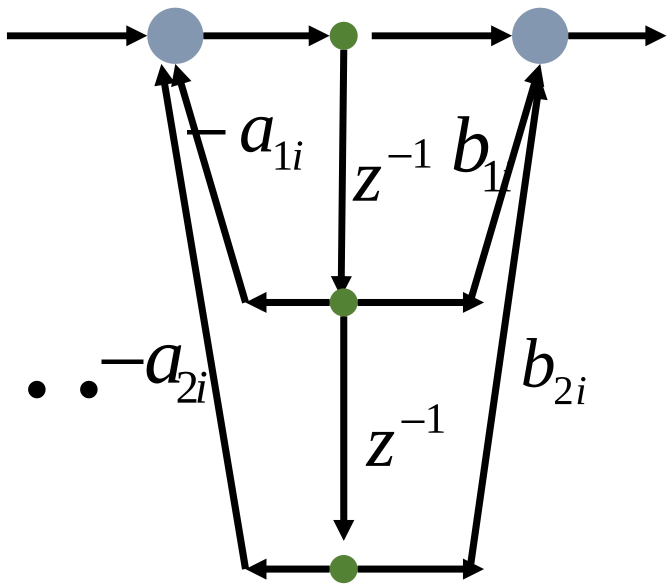
（2）级联型

$$H(z) = A_0 \prod_{i=1}^{k} H_i(z)$$

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1}}{1 + a_{1i} z^{-1}} \qquad H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}$$







有利于调节需要控制的零极点

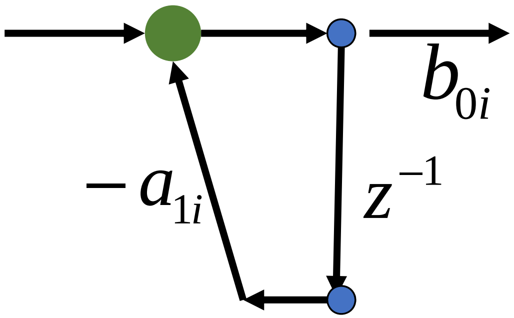
无限冲激响应（IIR）数字滤波器

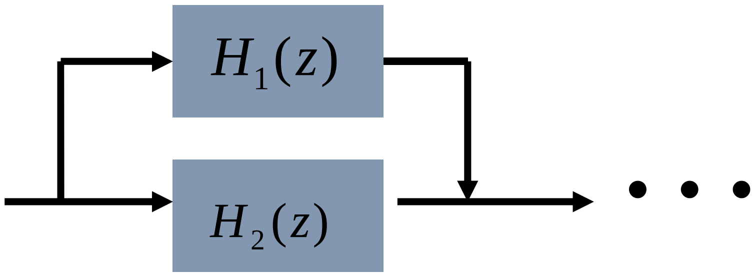
（3）并联型

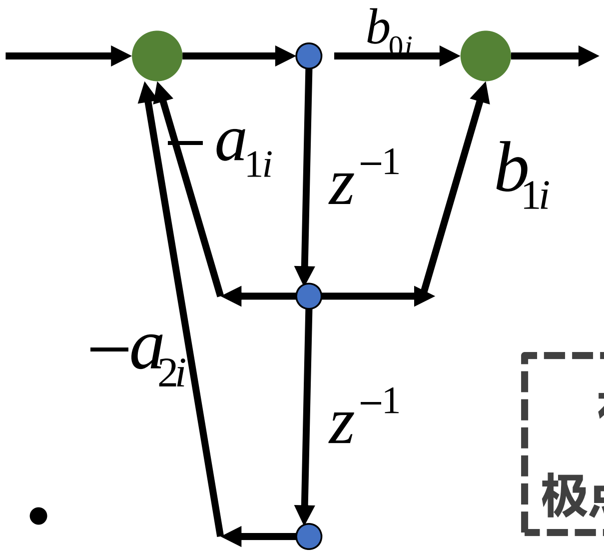
$$H(z)=C+\sum_{i=1}^{k}H_i(z)$$

$$H_i(z)=\frac{b_{0i}}{1+a_{1i}z^{-1}}$$

$$H_i(z)=\frac{b_{0i}+b_{1i}z^{-1}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}$$







有利于调节需要控制的极点，但不能调节零点

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

例 3 求下列传递函数的信号流图。

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-0.2z^{-1}-0.4z^{-2}\right)\left(1-0.3z^{-1}\right)\left(1+0.5z^{-1}+0.6z^{-2}\right)}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

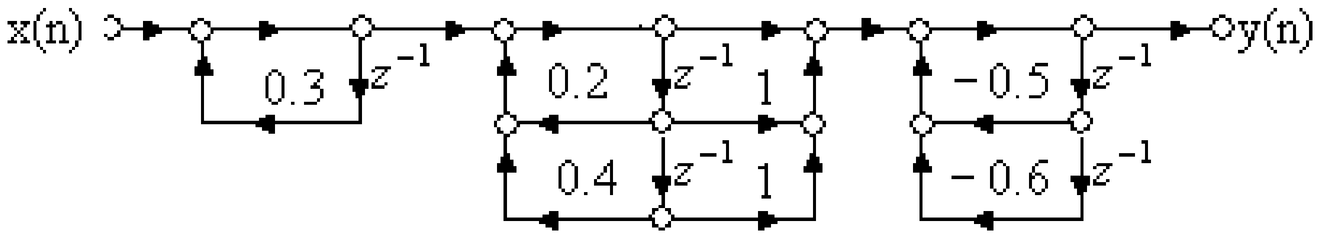
解：

$$H(z)=H_1(z)H_{21}(z)H_{22}(z)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{1-0.3z^{-1}}$$

$$H_{21}(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-0.2z^{-1}-0.4z^{-2}}$$

$$H_{22}(z)=\frac{1}{1+0.5z^{-1}+0.6z^{-2}}$$



作业和实验

1、巴特沃思低通数字滤波器要求如下：

$$\Omega_p = 0.1\pi rad, \alpha_p \leq 3dB; \Omega_s = 0.7\pi rad, \alpha_s \geq 40dB$$

采样周期 T= 10μs。用冲激响应不变法与双线性变换法分别求出数字滤波器的 $H(z)$，并比较其结果。

2、已知系统的传递函数为

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{3z^3 + 4z^2 - 2z + 5}$$

求直接I型和直接II型的结构图

谢谢大家