离散信号的分析

主 讲 教 师 ： 齐 冬 莲

目录

快速傅立叶变换（FFT）

快速傅立叶变换（FFT）

1、DFT的计算量

- DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)w_N^{-nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)w_N^{nk}$$

- N点DFT的计算量：
  - 每计算一个X(k)值需要进行N次复数相乘，N-1次复数相加
  - 对于N个X(k)点，完成全部DFT运算共需N^2次复数相乘和N(N-1)次复数加法

快速傅立叶变换（FFT）

2、DFT的特点及FFT的思想

$$w_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

- **正交性** $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk}(W_N^{mk})^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 1, & n-m=lN \\ 0, & n-m\neq lN \end{cases}$
- **周期性** $W_N^{r+mN} = W_N^r$
- **对称性** $W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$
- **可约性** $W_N^{rn} = W_{N/r}^n \quad W_{rN}^{rn} = W_N^n$

$$W_N^0 = 1,\ W_N^N = W_N^0 = 1,\ W_N^{mN} = 1$$

$$W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1,\ W_N^{(mN+N/2)} = -1$$

快速傅立叶变换（FFT）

2、DFT的特点及FFT的思想

- 由于DFT计算量与N成几何级数增长，可将长序列分解成多个短序列信号，然后分别求各个短序列的DFT，最后将它们组合，得到原序列的DFT
- 利用以上DFT运算的特点，即可得到序列的FFT算法

快速傅立叶变换（FFT）

3、基-2算法的FFT的基本思路

基2 FFT算法也称Cooley - Tukey(库利 - 图基)算法

- 序列的长度是2的整数幂时，将x(n)分解（抽取）成较短的序列，然后从这些序列的DFT中求得X(k)的方法

快速傅立叶变换（FFT）

（1）按时间抽取的FFT算法

- 以 $N=2^2=4$ 为例的DFT $X(k)=\sum_{n=0}^{4-1}x(n)W_4^{kn}$

$$k=0 \quad X(0)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^0+x(2)W_4^0+x(3)W_4^0$$

$$k=1 \quad X(1)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^1+x(2)W_4^2+x(3)W_4^3$$

$$k=2 \quad X(2)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^2+x(2)W_4^4+x(3)W_4^6$$

$$k=3 \quad X(3)=x(0)W_4^0+x(1)W_4^3+x(2)W_4^6+x(3)W_4^9$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

快速傅立叶变换（FFT）

$$W_N^0 = 1$$

$$W_N^{mN} = 1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & 1 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$W_N^{(mN + N/2)} = -1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & -1 & W_4^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & W_4^3 & -1 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

快速傅立叶变换（FFT）

$$W_N^{(r+N/2)} = -W_N^r$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & -1 & -W_4^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W_4^1 & -1 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

只和 $x(0), x(2)$ 有关

第二行和第三行互换

第二列和第三列互换

x(1)和x(2)互换

矩阵等式不变

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W_4^1 & -W_4^1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W_4^1 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(1) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

只和 $x(1), x(3)$ 有关

快速傅立叶变换（FFT）

N点的DFT是否可以分成两组N/2点的DFT?

设序列x(n)的长度为N=2^r，x(n)被分解（抽取）成两个子序列，每个长度为N/2.

第一个序列g(n)由x(n)的偶数项组成：

$$g(n) = x(2n) \qquad n = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

第二个序列h(n)由x(n)的奇数项组成

$$h(n) = x(2n+1) \qquad n = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

快速傅立叶变换（FFT）

- x(n)的N点的DFT表示为：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1}g(r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}h(r)W_N^{(2r+1)k}$$

$$=\boxed{\sum_{r=0}^{N/2-1}g(r)W_{N/2}^{rk}}+W_N^k\boxed{\sum_{r=0}^{N/2-1}h(r)W_{N/2}^{rk}}$$

$$=\underbrace{G(k)}_{\text{N/2点的DFT}}+W_N^k\underbrace{H(k)}_{\text{N/2点的DFT}}\quad k=0,1,2\ldots N$$

快速傅立叶变换（FFT）

如果N/2为偶数，还可以再次进行分解，直到只剩下2点的DFT

$$X(k)=G(k)+W_N^K H(k)\quad (k=0,1,2\ldots\tfrac{N}{2}-1)$$

主值周期为N/2的X（k）

$$G(k+\frac{N}{2})=G(k)$$

$$H(k+\frac{N}{2})=H(k)$$

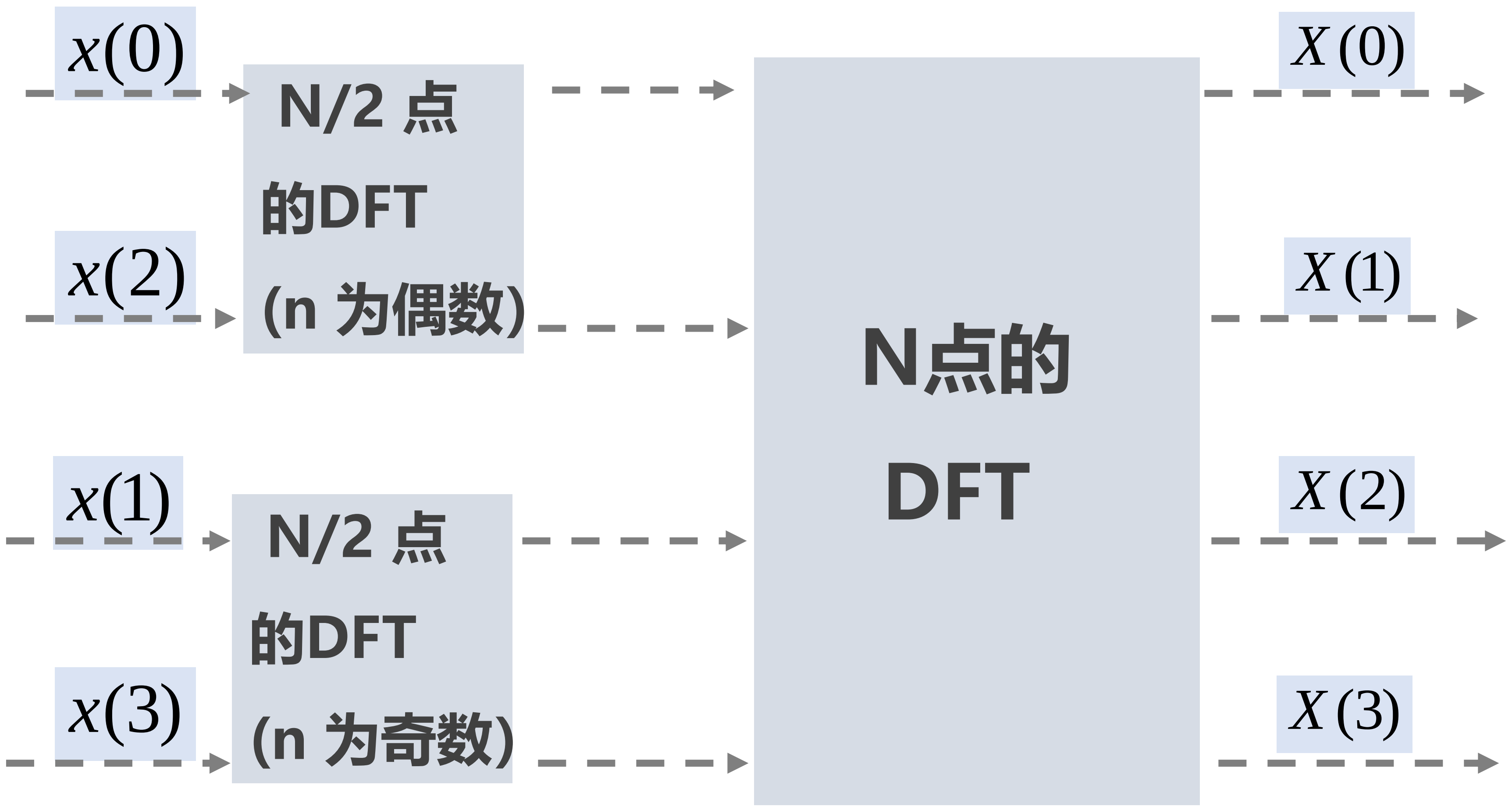
$$W_N^{(k+\frac{N}{2})}=W_N^{\frac{N}{2}}W_N^k=-W_N^k$$

$$X(k+\tfrac{N}{2})=G(k)-W_N^K H(k)\quad (k=0,1,2\ldots\tfrac{N}{2}-1)$$

另外主值周期N/2点的X(k)

快速傅立叶变换（FFT）

N=4为例DFT分组



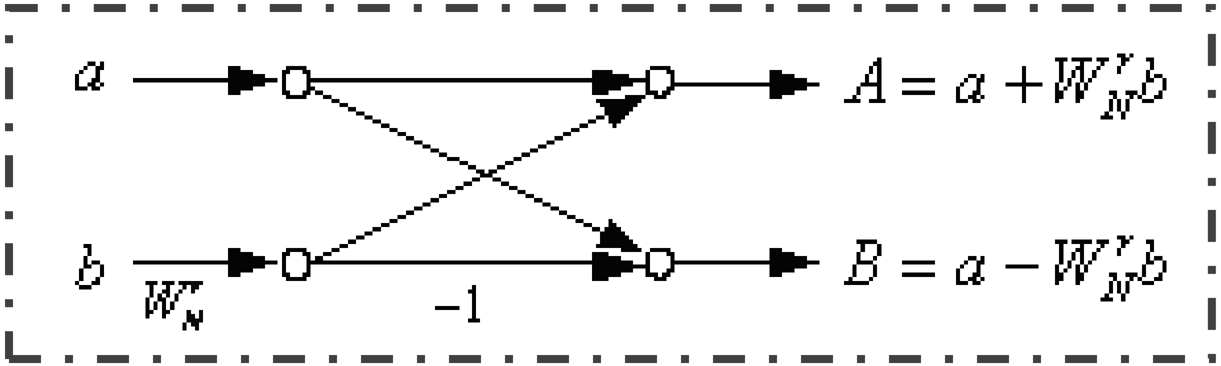
快速傅立叶变换（FFT)

4、FFT算法的特点

基本运算单元为一个蝶形，第m级的蝶形

上节点

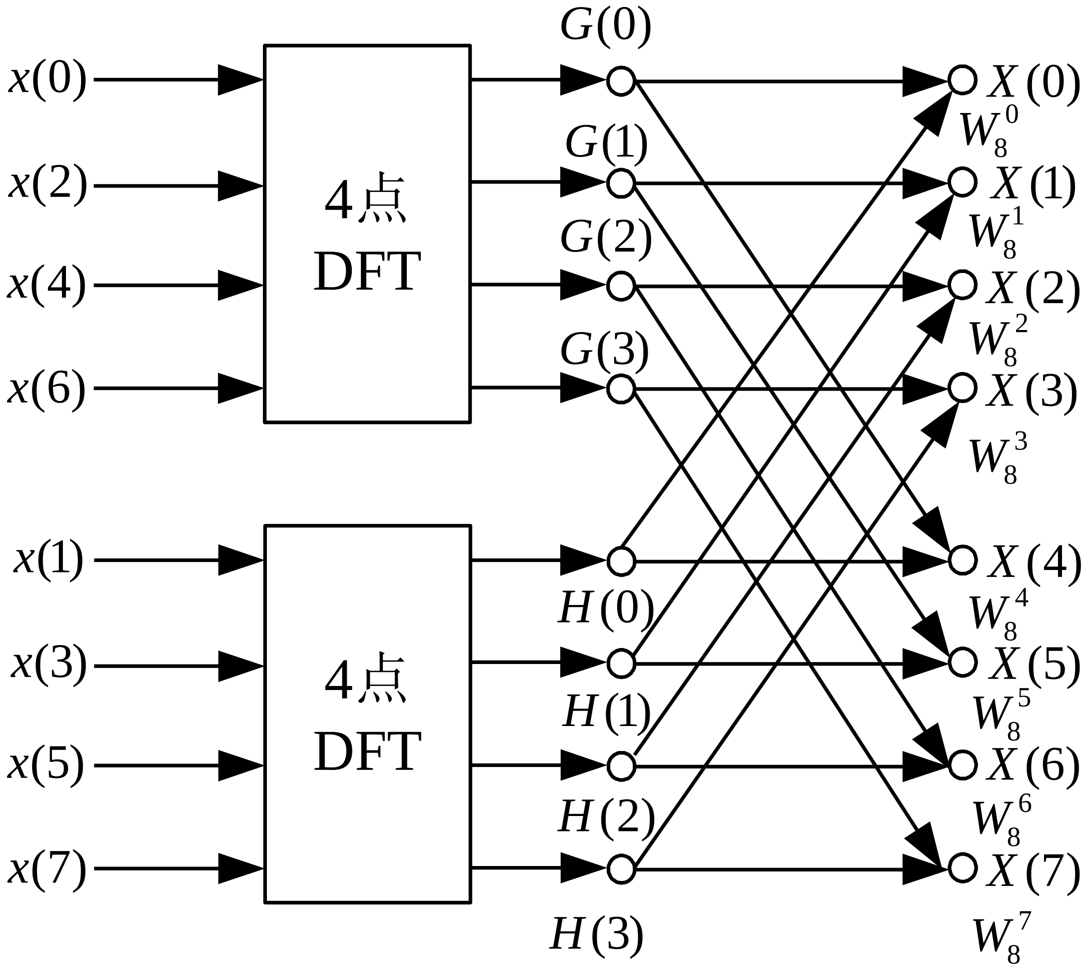
下节点



- 每一蝶形是独立的
- 每一级中有N/2个蝶形

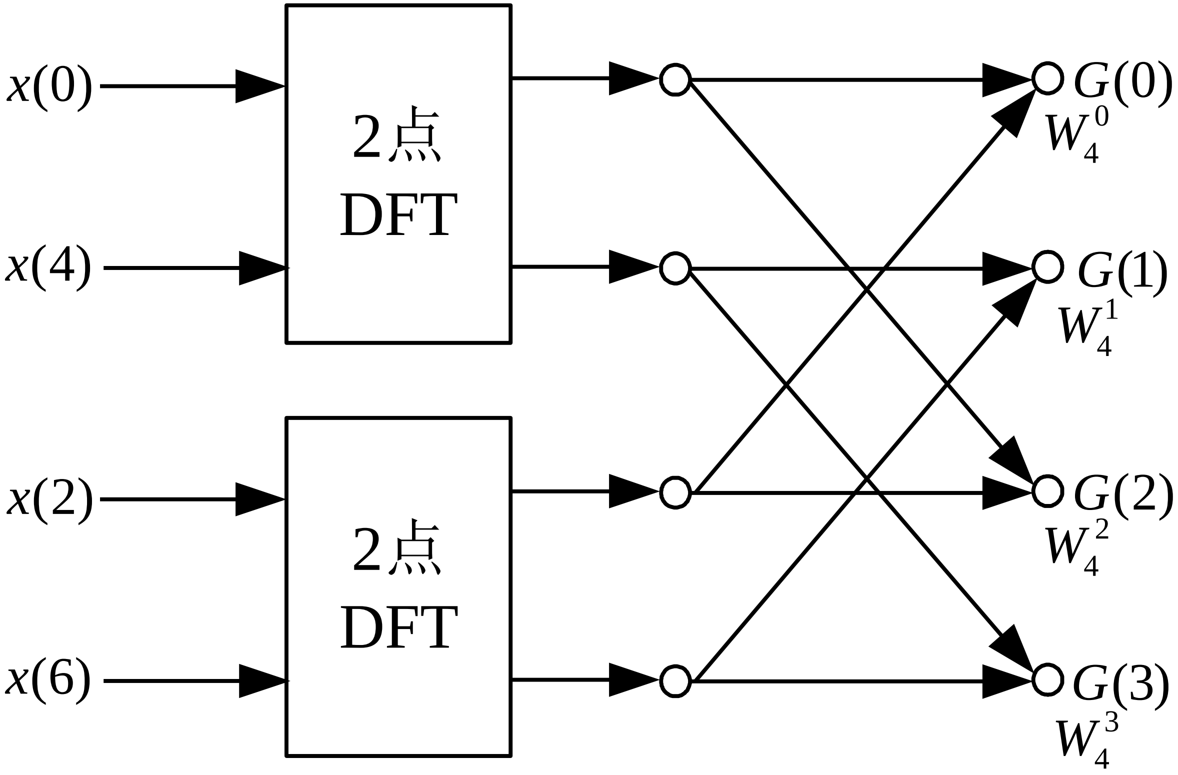
快速傅立叶变换（FFT）

8点按时间抽取FFT第一阶段的运算框图



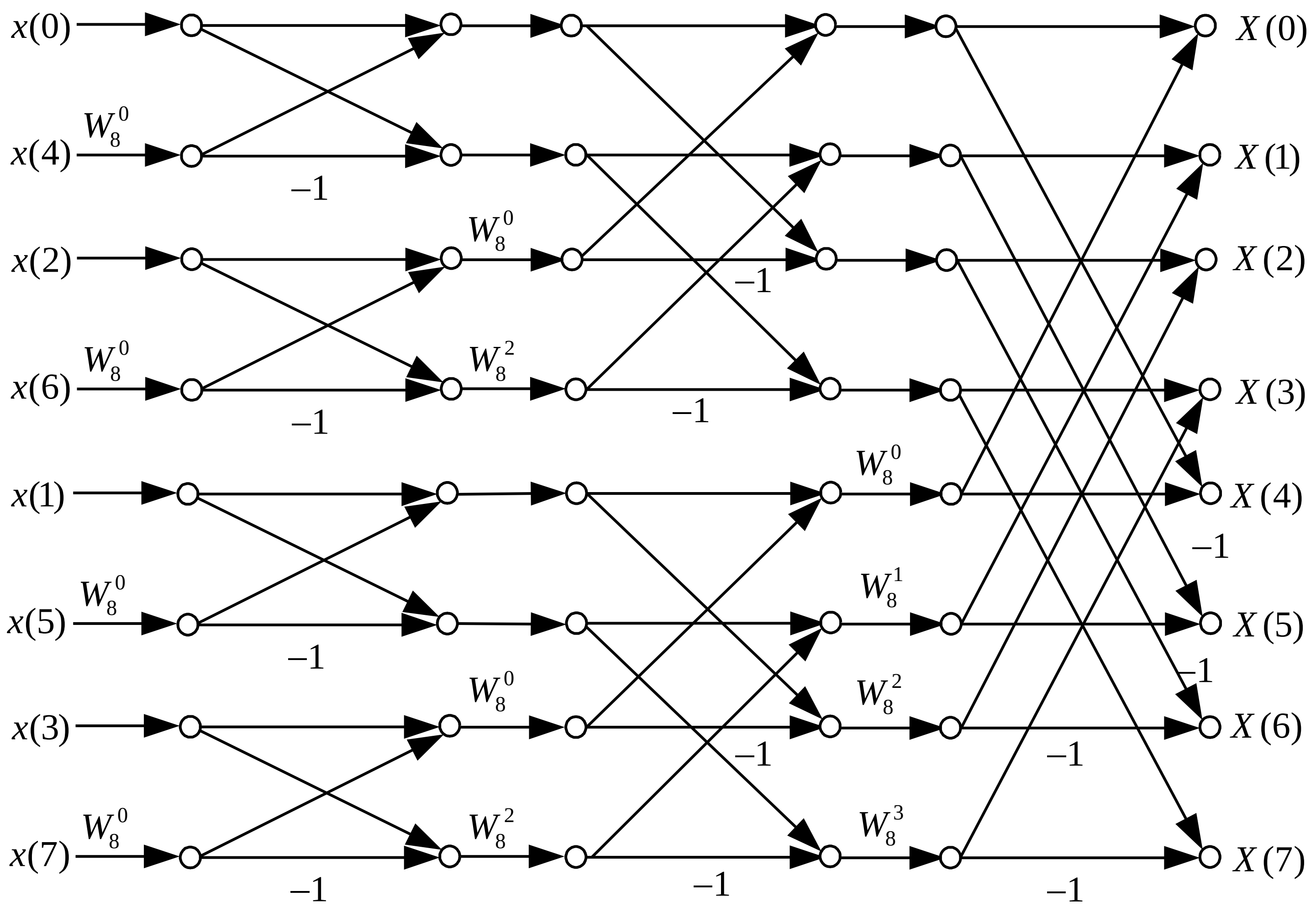
快速傅立叶变换（FFT）

按时间抽取FFT将4点DFT分解为两个2点DFT



快速傅立叶变换（FFT）

一个完整的8点基2按时间抽取FFT



快速傅立叶变换（FFT）

FFT应用中的注意事项

- 信号离散时，采样频率要满足奈奎斯特频率
- N一定是2的整数次幂，若不是，要补若干个零，凑成2的整数次幂
- 数据长度要取得足够长

NT_s：数据的实际长度

$\varphi = \dfrac{1}{NT_s}$：频率分辨率，DFT中谱线间的最小间隔，等于信号基波频率f_0

快速傅立叶变换（FFT）

FFT的应用

- 利用FFT求线性卷积
- 利用FFT求线性相关
- 利用FFT作连续时间信号的频谱分析
  - 时间有限信号
  - 频率有限信号
  - 连续周期信号

快速傅立叶变换（FFT）

时限连续信号

- 一般时限信号具有无限带宽，根据时域采样定理，无论怎样减小采样间隔Ts，都不可避免产生频谱混叠。且过度减小采样间隔，会极大地增加DFT计算工作量和计算机存储单元，实际应用中不可取
- 解决方法：
  - 利用**抗混叠滤波器**去除连续信号中次要的高频成分，再进行采样
  - **选取合适的Ts**，使混叠产生的误差限制在允许范围之内

快速傅立叶变换（FFT）

频率有限信号

- 带限信号的采样频率选取比较容易，但一般带限信号时宽无限，不符合DFT在时域对信号的要求，要进行**加窗截断**
- 离散周期信号当长度截断不当时会产生**频谱泄漏**现象

- **处理方法**：
  - **加大窗宽**，减少谱峰下降和频带扩展的影响，但是信号时宽加大，经采样后增大序列长度，增加DFT的计算量及计算机存储单元
  - **选取形状合适的窗函数**。矩形窗在时域的突变导致了频域中高频成分衰减慢，造成的频谱泄漏最严重，而三角形窗、升余弦窗（Haning窗）、改进的升余弦窗（Hamming窗）等在频域有较低的旁瓣，使频谱泄漏现象减弱

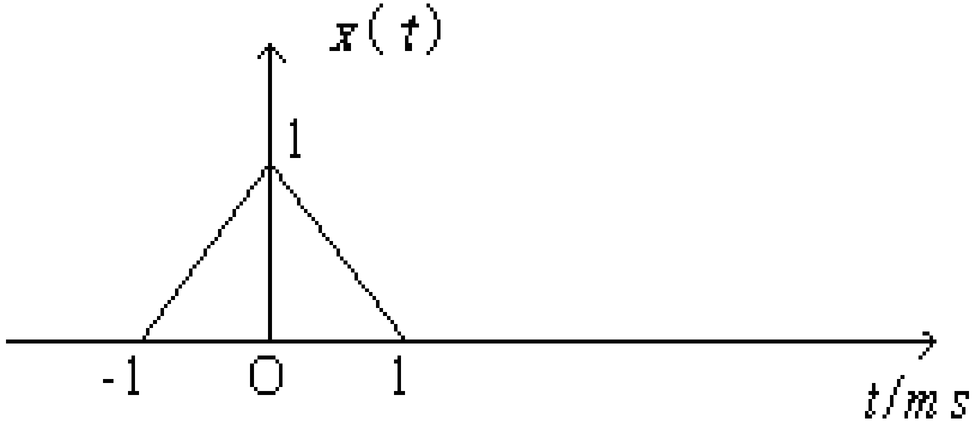
快速傅立叶变换（FFT）

连续周期信号

- 连续周期信号是非时限信号，作DFT处理时也要加窗截断
- 当截断长度正好是信号周期时，不会产生频谱泄漏，但当截断长度不是信号周期时，会产生频谱泄漏
- 处理方法：**合理地选取截断长度**（整周期截断）

快速傅立叶变换（FFT）

例1　利用DFT/FFT求图示三角脉冲的频谱，假设信号最高频率取 $f_m = 25kHz$，　要求谱率分辨率$f_0 = 100Hz$



快速傅立叶变换（FFT）

- 解：由f_m得出对最大采样间隔Ts的要求 $T_s \le \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{2\times 25\times 10^3} = 0.02ms$

- 由频率分辨率决定数据记录长度 $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{100} = 10ms$

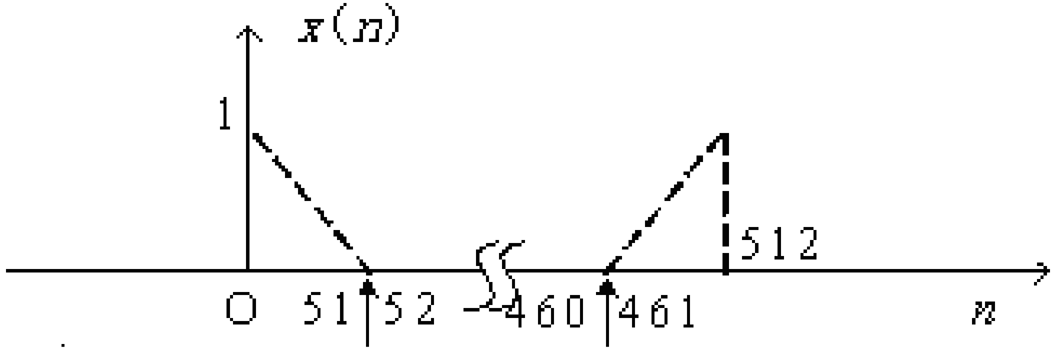
- 采样点数 $N = \frac{T_0}{T_s} \ge \frac{10}{0.02} = 500$

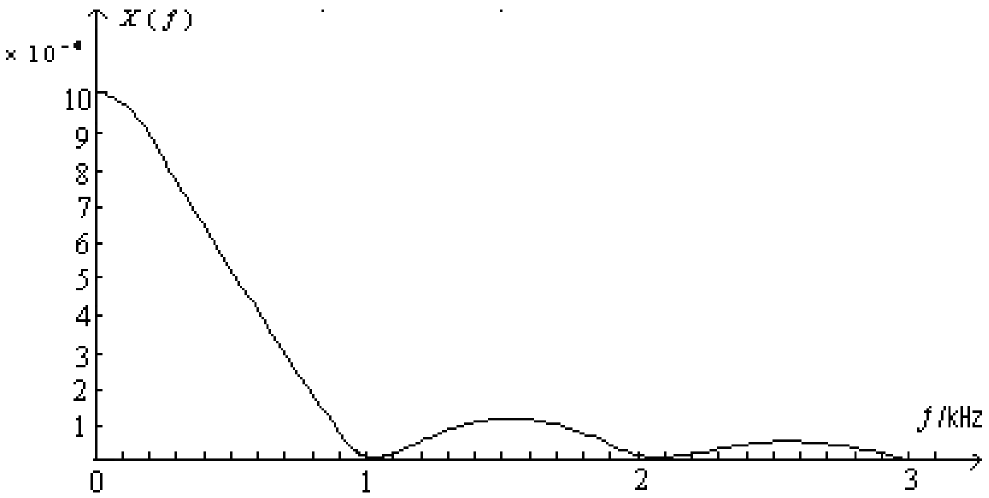
- 取N = 512 = 2^9，便于基2-FFT运算，由于N修正了， Ts也应修正为

$$T_s = \frac{T_0}{N} = \frac{10\times 10^{-3}}{512} = 19.53125\ \mu s$$

快速傅立叶变换（FFT）

- x(t)采样后经过周期延拓，然后取主值区间所得x(n) (n:0-511)。经FFT运算后得到如下图所示的频谱，它是对X(kf_0)的幅值乘上Ts因子，然后画出的包络线 。





作业与预习

- 作业：P187
  - 习题12、13、17

- 预习：Z变换

- 实验：DFT和FFT (MATLAB)
  - 时间：由实验教师确定

谢谢大家