信号分析与处理

第二章 连续信号的分析

浙江大学控制科学与工程学院

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

大 纲

- **连续信号的时域描述和分析**
  - 时域描述
  - 时域计算
  - 信号的分解
- **连续信号的频域分析**
  - 周期信号的频谱分析
  - 非周期信号的频谱分析
  - 傅立叶变换的性质
- **连续信号的拉普拉斯变换分析**
  - 拉普拉斯变换
  - 信号的复频域分析

一、连续信号的时域描述和分析

- **时域描述**
  - 普通信号的时域描述
  - 奇异信号的时域描述
- **时域计算**
  - **基本运算**
  - **叠加和相乘**
  - **微分和积分**
  - **卷积运算**
- **信号分解**
  - 分解成冲激函数之和
  - 正交分解（不要求）

（一）时域描述

- **普通信号的时域描述**
  - 正弦信号
  - 指数信号
- **奇异信号的描述**
  - 单位斜坡信号
  - 单位阶跃信号
  - 单位冲激信号

连续时间信号——实指数信号（1）

一般复指数信号（A、s都是复数）： $x(t) = Ae^{st}$

实指数信号定义（A、s都是实数）：

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = Ae^{st} \\ s = \sigma + j\omega = \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = Ae^{\sigma t}$$

分析:

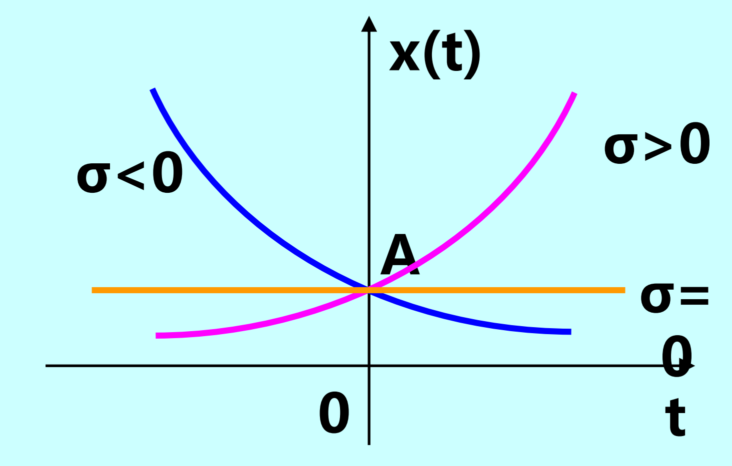
***1 当t=0时， x(0)=A，所以A是t=0时指数信号的初始值**

***2 若A为正实数(A>0)**

σ>0 x(t)随t的增大而增大

σ<0 x(t)随t的增大而减小

σ=0 x(t)不随t变化



连续时间信号——周期复指数信号和正弦信号(1)

(1）定义：纯虚指数

$$x(t) = Ae^{st}$$

$$\sigma = 0, s = j\omega_0$$

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

A是实数
s都是纯虚数

回顾: 欧拉公式

$$e^{j\omega_0 t} = (\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t)$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

正弦信号

$$\cos\omega_o t = Re\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$\sin\omega_o t = Im\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$

Re–Real part**实部**
Im–Imaginary part**虚部**

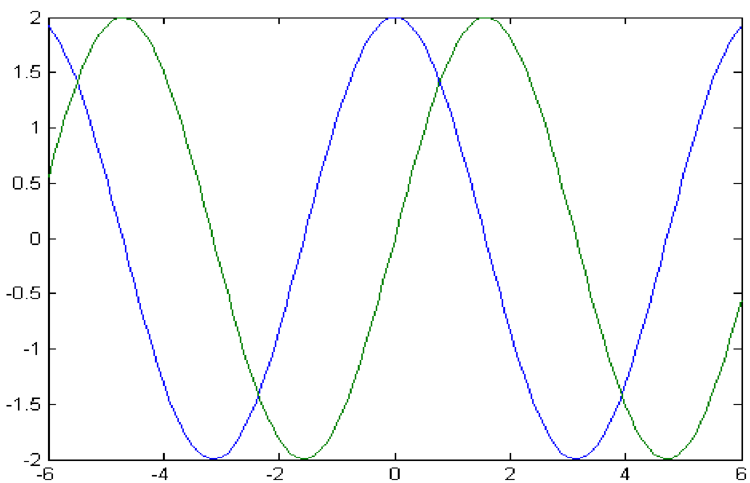
$$x(t) = A\cos(\omega_o t + \theta) = A\cos[\omega_o(t - t_p)]$$

其中$t_p = -\theta/\omega_0$**—描述由相移θ引起的时间延迟**

连续时间信号——周期复指数信号和正弦信号(2)

例如： $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$

$x(t) = 2e^{jt}$ ⇒ $2e^{jt} = 2\cos t + 2j\sin t$



蓝色——x(t)的实部

绿色——x(t)的虚部

思考题：1).复数信号现实中不存在，为什么关注这种信号?

连续时间信号——周期复指数信号和正弦信号(3)

(2）性质： $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$

1）周期性：

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

$$T = \frac{2\pi k}{\omega_0} \qquad k = \pm1, \pm2, \cdots$$

基波周期： $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ **基波频率：** $|\omega_0| = 2\pi f_0$ $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$

2）正弦信号和余弦信号统称为正弦信号（两者仅在相位上相差π/2), 也是周期为2π/|ω_0|的周期信号

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 t}e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 t}e^{-j\varphi}\right) = A\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\right\}$$

$$A\sin(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 t}e^{j\varphi} - e^{-j\omega_0 t}e^{-j\varphi}\right) = A\,\mathrm{Im}\left\{e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\right\}$$

连续时间信号——周期复指数信号和正弦信号(4)

3）ω_0=0时 $x(t) = Ae^{j\omega_0 t} = A$ → 对任意正值T都是周期的

→ 常数信号的基波周期无定义

4）周期信号，尤其是复指数信号和正弦信号——具有无限能量、有限平均功率－－功率信号

$$E_{period} = \int_0^{T_0} \left| e^{j\omega_0 t} \right|^2 dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0$$

→ $E = \lim_{N \to \infty} NT_0 = \infty$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| e^{j\omega_0 t} \right|^2 dt = 1$$

5）对周期复指数信号和正弦信号求微积分，仍然是同周期的复指数信号和正弦信号。

（3）正弦，复指数信号的组合：

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \cdots$$

$x_i(t)$—正弦信号

周期 T_0 T_1 T_2 T_3 T_0=?

LCM—Lowest Common Multiple

例1-7 求组合信号y(t)的基波周期。

$$(1)\ y(t) = 2\sin\frac{2}{3}t + 4\cos\frac{1}{2}t + 4\cos(\frac{1}{3}t - \frac{1}{5}\pi)$$

T_0 $T_1=3\pi$ $T_2=4\pi$ $T_3=6\pi$

解：(1) T_0=LCM(3π, 4π ,6π)=12π

$$(2)\ y(t) = 2\cos\pi t + 4\sin 3t$$

T_0 $T_1=2$ $T_2=2\pi/3$

解：(2) T_0—不存在, 称为概周期或拟周期信号

连续时间信号——周期复指数信号和正弦信号(6)

(4) 正弦,复指数信号的重要性：

① 任何周期信号都可由谐波的组合表示： $\varphi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

— 周期信号⇒Fourier级数(FS)

—非周期信号 ⇒Fourier变换(FT)

具有谐波关系的信号集

② 谐波 → $\boxed{\text{线性系统}}$ → 谐波

(系统频域分析的基础)

谐波——概念来自音乐，由声压振动得到的各种音调其频率都是某基波频率的整数倍。一组成为谐波关系的复指数信号的集合——即一组基波频率为某一正频率的整倍数的周期复指数信号。

基波周期： $\dfrac{2\pi}{|k|\omega_0} = \dfrac{T_0}{|k|}$

基波频率： $|k\omega_0|$

连续时间信号——一般的复指数信号（1）

一般的复指数信号： $x(t) = Ae^{st}$

将A用极坐标表示 $A = |A|e^{j\theta}$

s用直角坐标表示 $s = \sigma + j\omega_0$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= |A|e^{j\theta}e^{\sigma t + j\omega_0 t} = |A|e^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\
&= |A|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|A|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t + \theta)
\end{aligned}
$$

分析：

1）σ=0， x(t)的实部和虚部都是正弦型的

2）σ>0， x(t)的实部和虚部的幅度呈指数增长的正弦信号，发散

3）σ<0， x(t)的实部和虚部的幅度呈指数衰减的正弦信号，衰减

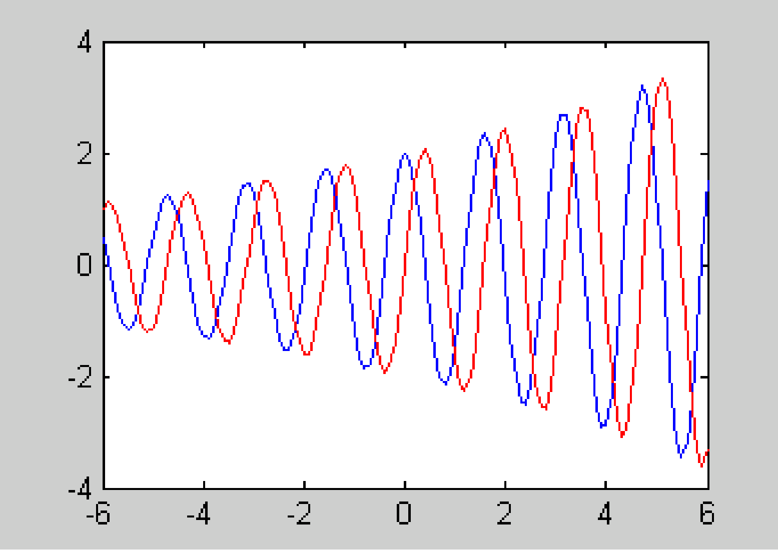
连续时间信号——一般的复指数信号（2）

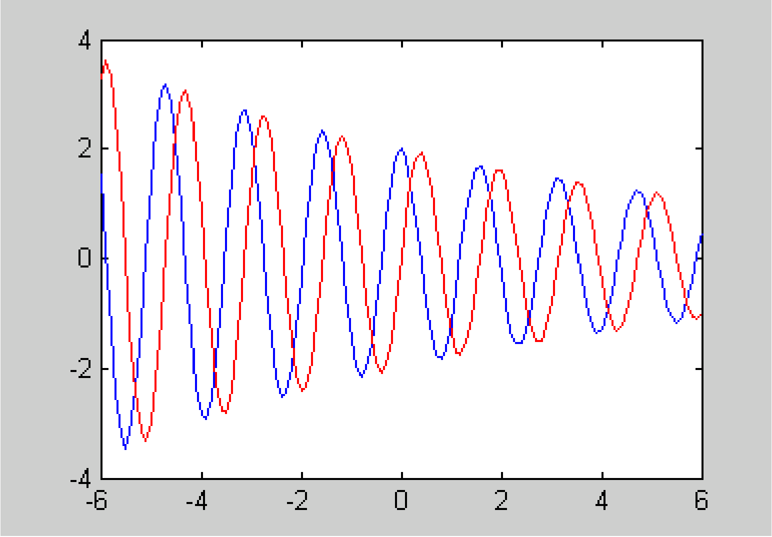
$$x(t) = Ae^{st} = |A|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t+\theta) + j|A|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t+\theta)$$

例如：

$x_1(t) = 2e^{(0.1+j4)t}, \sigma > 0$

$x_2(t) = 2e^{(-0.1+j4)t}, \sigma < 0$





实部——兰色　　虚部——红色

奇异信号的描述

典型奇异信号

(1) 单位阶跃信号u(t)； (2) 单位斜坡信号r(t)； (3) 单位冲激（样值）信号δ(t)；(4) 冲激偶信号δ′(t)；(5) Sa(t)函数(Sinc(t)函数)

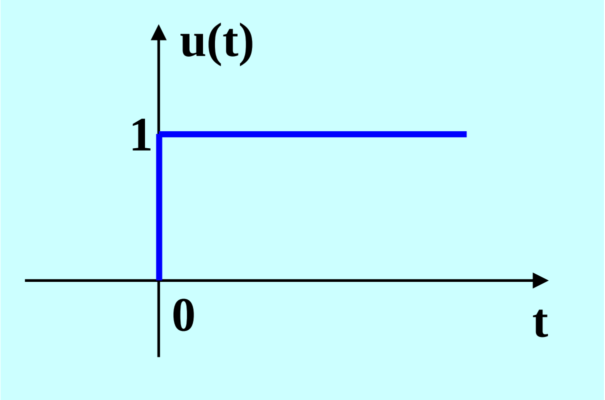
由实际物理现象经数学抽象而定义，是一种理想的信号

奇异函数——函数本身有不连续点或导数与积分有不连续的情况

连续时间信号:奇异信号——单位阶跃信号（1）

一、单位阶跃信号(unit-step):

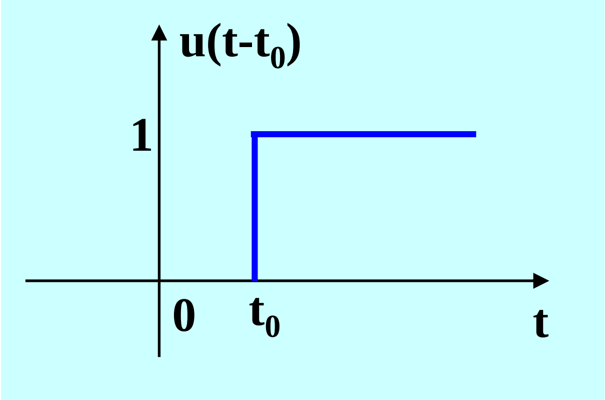
$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



在 $t=0$ 处无定义，可根据实际的物理意义定义

延迟的单位阶跃信号:

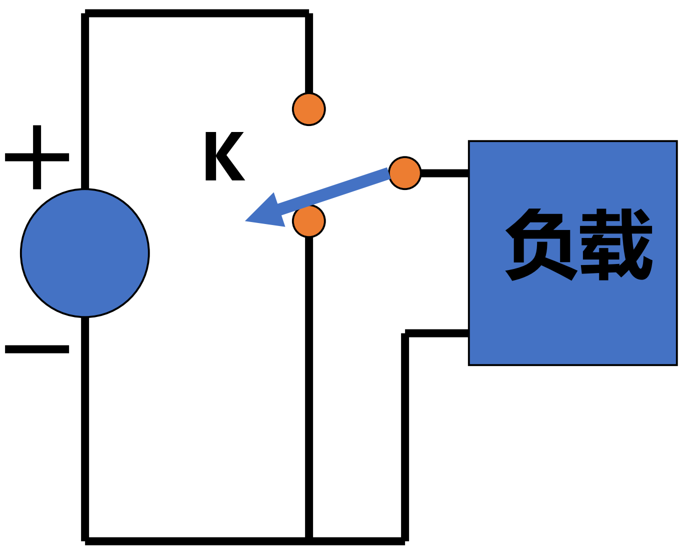
$$u(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$$

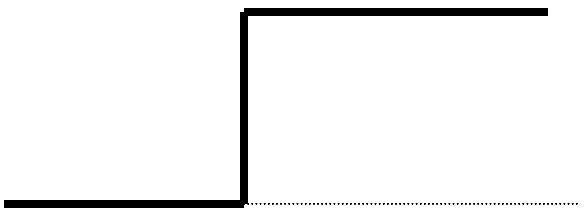


在 $t=t_0$ 处无定义

连续时间信号:奇异信号——单位阶跃信号（2）

- **突然接入的直流电压**

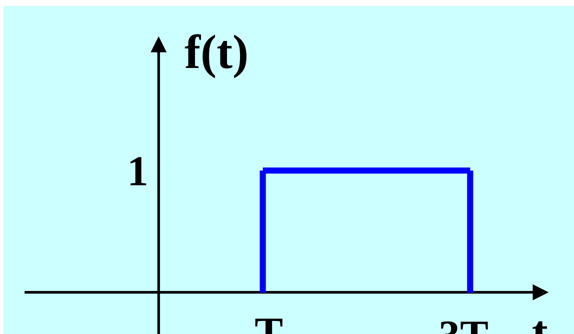




单位阶跃信号在分析中的作用：

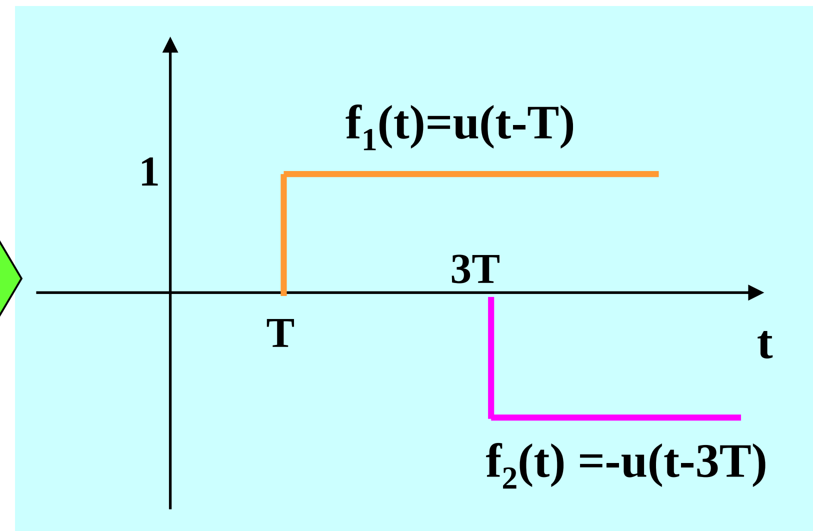
1）应用阶跃信号和延迟阶跃信号可以表示任意的矩形波脉冲信号

例 用u(t)写出图(1)所示的信号。



图(1)

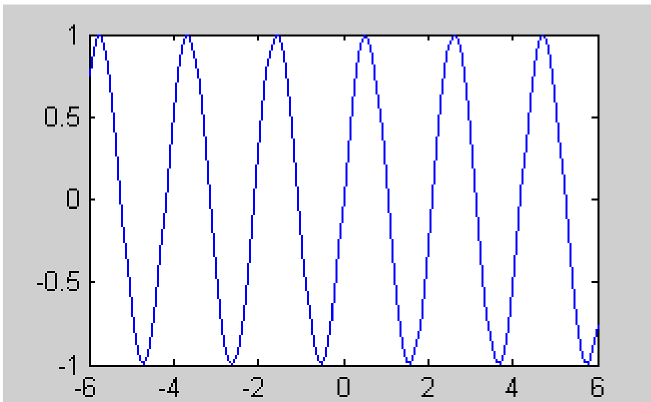
解：



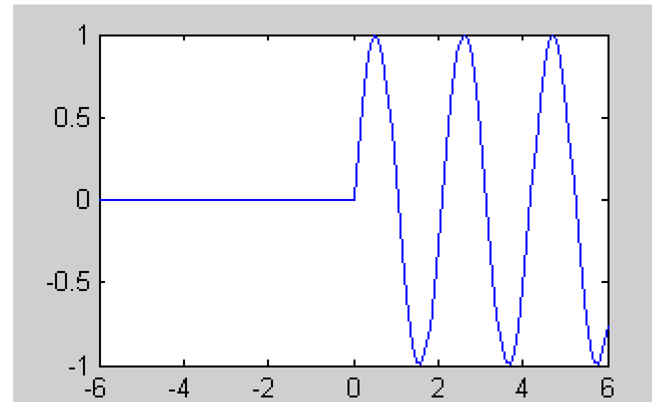
$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=u(t-T)-u(t-3T)$$

连续时间信号:奇异信号——单位阶跃信号（4）

2）任一双边信号与之相乘之后变成单边信号

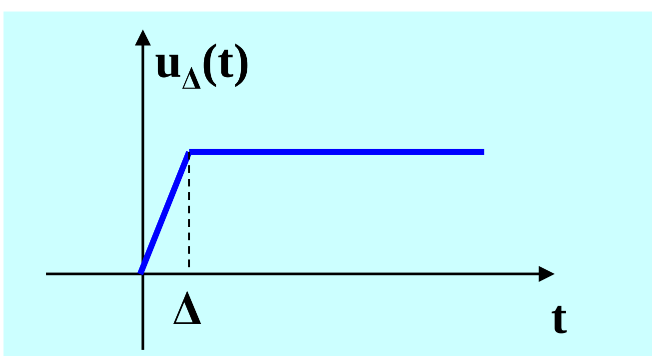


$$x(t) = \sin \omega t$$



$$x(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$$

3）可以看成是斜平信号的极限



$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

连续时间信号:奇异信号——单位阶跃信号（5）

4）符号函数 sgn(t) 的表示

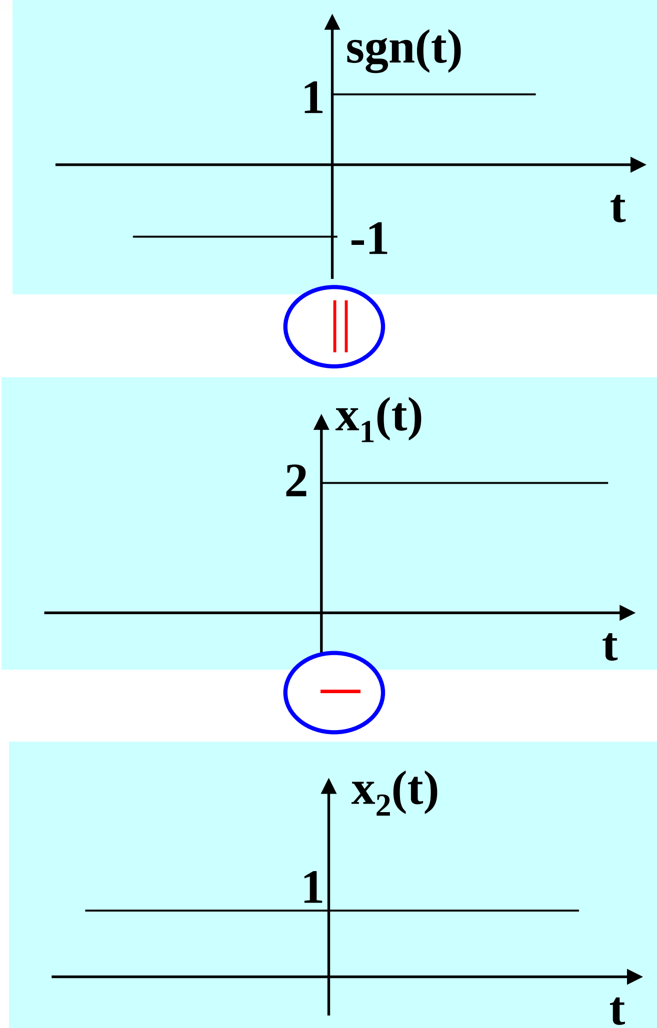
$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, t>0\\ -1, t<0\end{cases}$$

第一种表示方法

$$\mathrm{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$

第二种表示方法

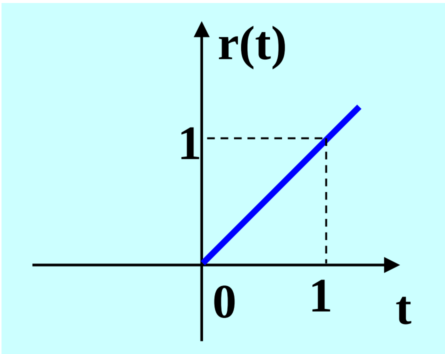
$$\mathrm{sgn}(t)=x_1(t)-x_2(t)=2u(t)-1$$



连续时间信号:奇异信号——单位斜坡信号

二、单位斜坡(ramp)信号:

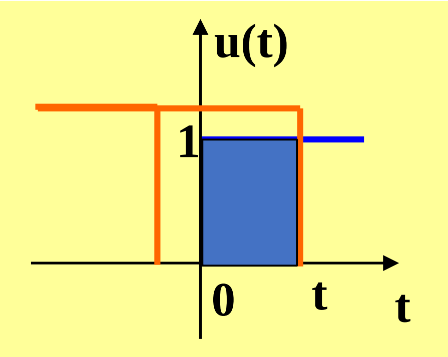
$$r(t)=\begin{cases} t, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



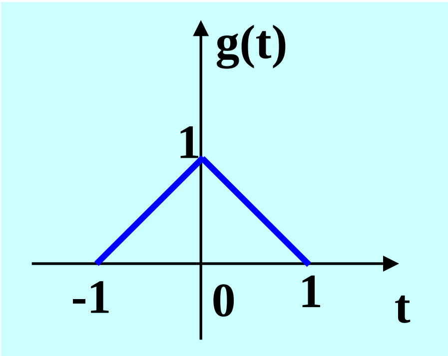
与单位阶跃信号的关系:

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

$$u(t)=\frac{dr(t)}{dt}$$



应用斜坡信号与阶跃信号，可以表示任意三角脉冲信号



?

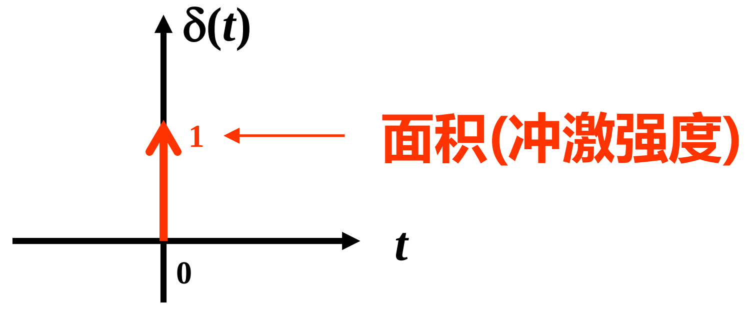
$$\begin{aligned} g(t) &= r(t+1)-2r(t)+r(t-1) \\ &= (t+1)u(t+1)-2tu(t)+(t-1)u(t-1) \end{aligned}$$

连续时间信号:奇异信号——单位冲激信号（1）

三、单位冲激信号(Unit impulse, Delta function, Dirac function)：

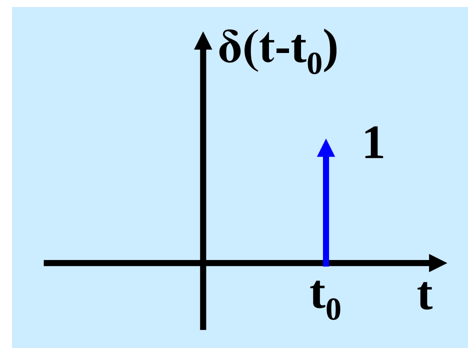
定义（狄拉克定义）

$$\begin{cases} \delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \end{cases}$$



δ(t)—持续时间为0, 面积为1

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \\ \delta(t-t_0)=0, t\neq t_0 \end{cases}$$



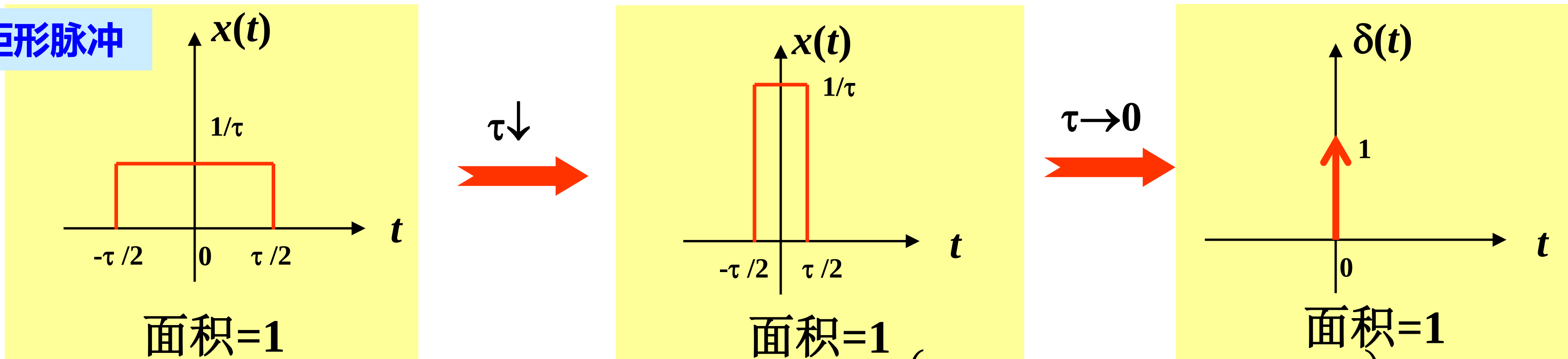
物理背景：

某些物理现象需要用一个时间极短，但取值极大的函数来描述，如：力学中瞬间作用的冲激力，电学中的雷击电闪，通信中的抽样脉冲等。

连续时间信号:奇异信号——单位冲激信号（2）

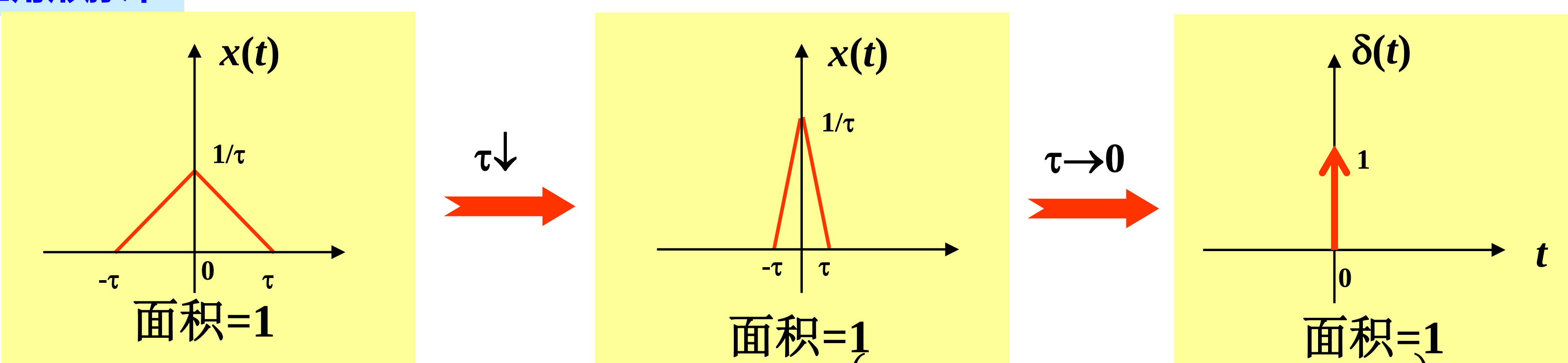
理解：

矩形脉冲



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right)\right\}$$

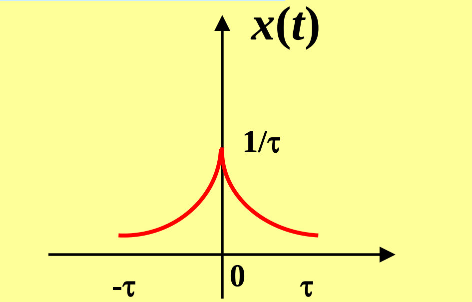
三角形脉冲



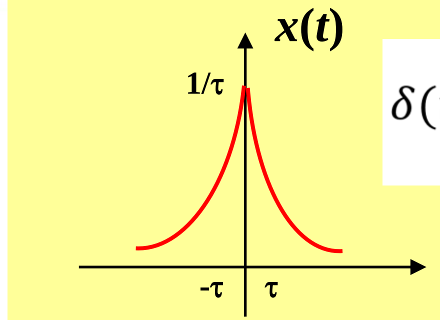
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\ [u(t+\tau)-u(t-\tau)]\right\}$$

连续时间信号:奇异信号——单位冲激信号（2）

双边指数脉冲

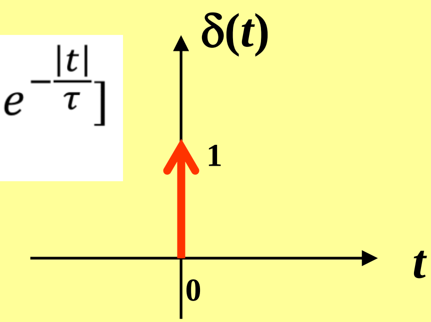


τ↓



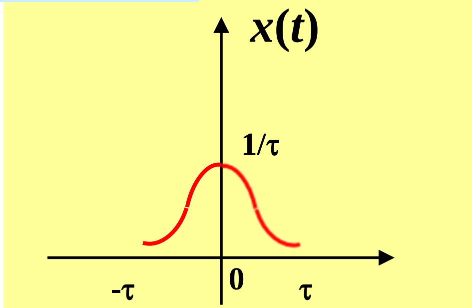
$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0}[\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}}]$$

τ→0

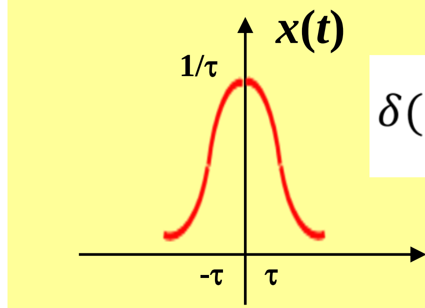


面积=1

钟形脉冲

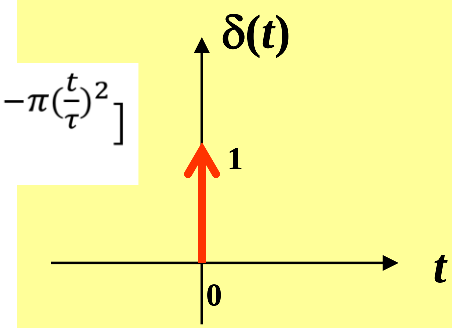


τ↓



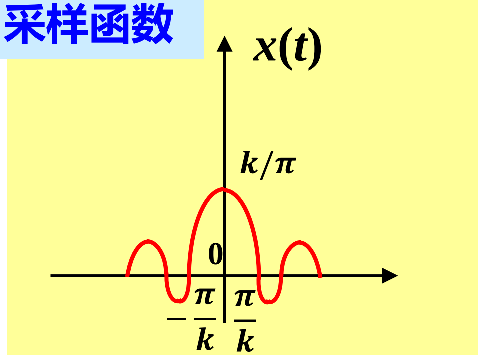
$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0}[\frac{1}{t} e^{-\pi(\frac{t}{\tau})^2}]$$

τ→0

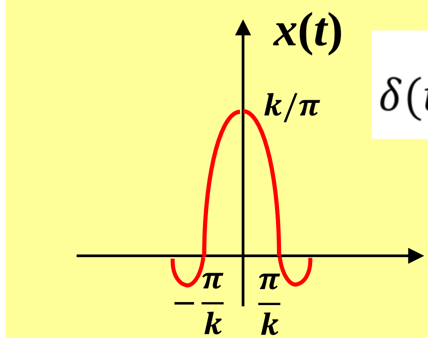


面积=1

采样函数

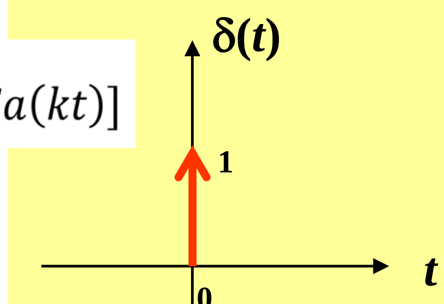


τ↓



$$\delta(t) = \lim_{k\to \infty}[\frac{k}{\pi} Sa(kt)]$$

τ→0



面积=1

连续时间信号:奇异信号——单位冲激信号（3）

单位冲激信号δ(t)与u(t)关系

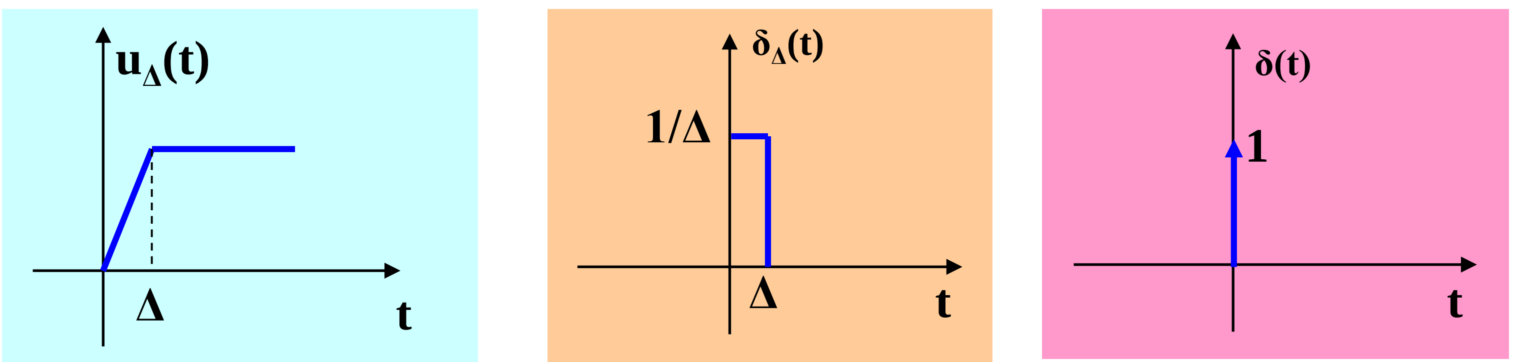
(定义1：斜平信号u_Δ(t)的导数)

$$\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t) \quad \text{(广义求导)}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

理解:

对u_Δ(t)求导 → $\delta_\Delta(t)=\dfrac{du_\Delta(t)}{dt}$ → $\Delta\to 0$ → $\delta(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$



矩形脉冲（面积为1）

面积集中在t=0

1表示δ(t)的强度，面积为1

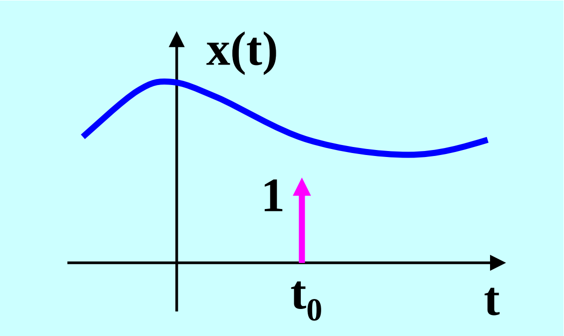
连续时间信号:奇异信号——单位冲激信号（4）

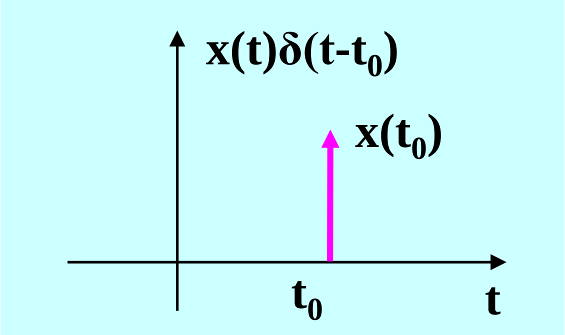
单位冲激信号的性质:

***1 乘积性质：** 若信号x(t)在$t=t_0$处连续，则有

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

当$t_0=0, x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$





***2 取样(筛选)性质：** 若信号x(t)是一个在$t=t_0$处连续的普通函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

当$t_0=0, \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0)$

证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

连续时间信号:奇异信号——单位冲激信号（5）

例1-6 计算下列各式的值。

解： (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\delta(t-\frac{\pi}{4})dt=\sin(\frac{\pi}{4})$ ——取样特性

(2) $(t^3+2t^2+3)\delta(t-2)=(2^3+2\cdot 2^2+3)\delta(t-2)=19\delta(t-2)$ ——乘积特性

***3 对称性质** $\delta(t)=\delta(-t)$ **冲激信号是偶函数**

***4 冲激信号与阶跃信号的关系**

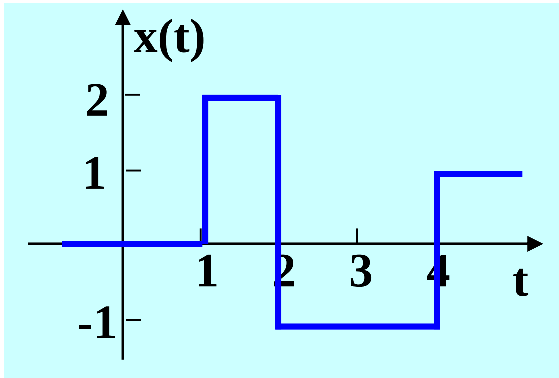
$$u'(t)=\frac{du(t)}{dt}=\delta(t);\qquad u_{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$ 一次积分

$$u_{-2}(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}\delta(\lambda)d\lambda d\tau=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=tu(t)$$ 二次积分

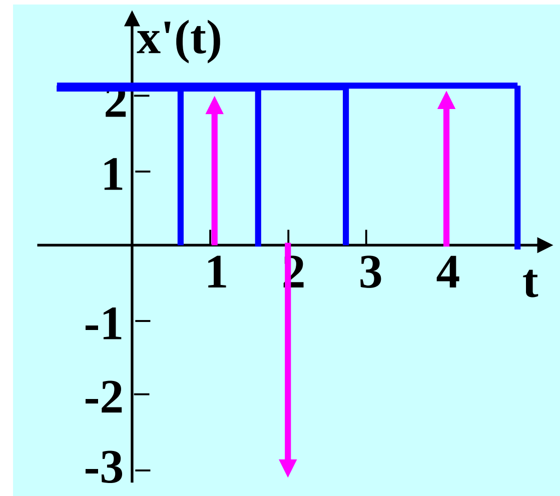
$$u_{-n}(t)=\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{\tau}\delta(\lambda)d\lambda d\tau=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$$ n次积分

连续时间信号：奇异信号——单位冲激信号（6）

***5 在不连续点的微分引起一个冲激，幅度为阶跃的幅度**



微分



$$x'(t)=2\delta(t-1)-3\delta(t-2)+2\delta(t-4)$$

恢复

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}x'(\tau)d\tau$$

$$\left\{\begin{array}{l} t<1,\quad x(t)=0 \\ 1<t<2,\quad x(t)=2 \\ 2<t<4,\quad x(t)=2+(-3)=-1 \\ 4<t,\quad x(t)=2+(-3)+2=1 \end{array}\right.$$

连续时间信号：奇异信号——冲激偶信号（1）

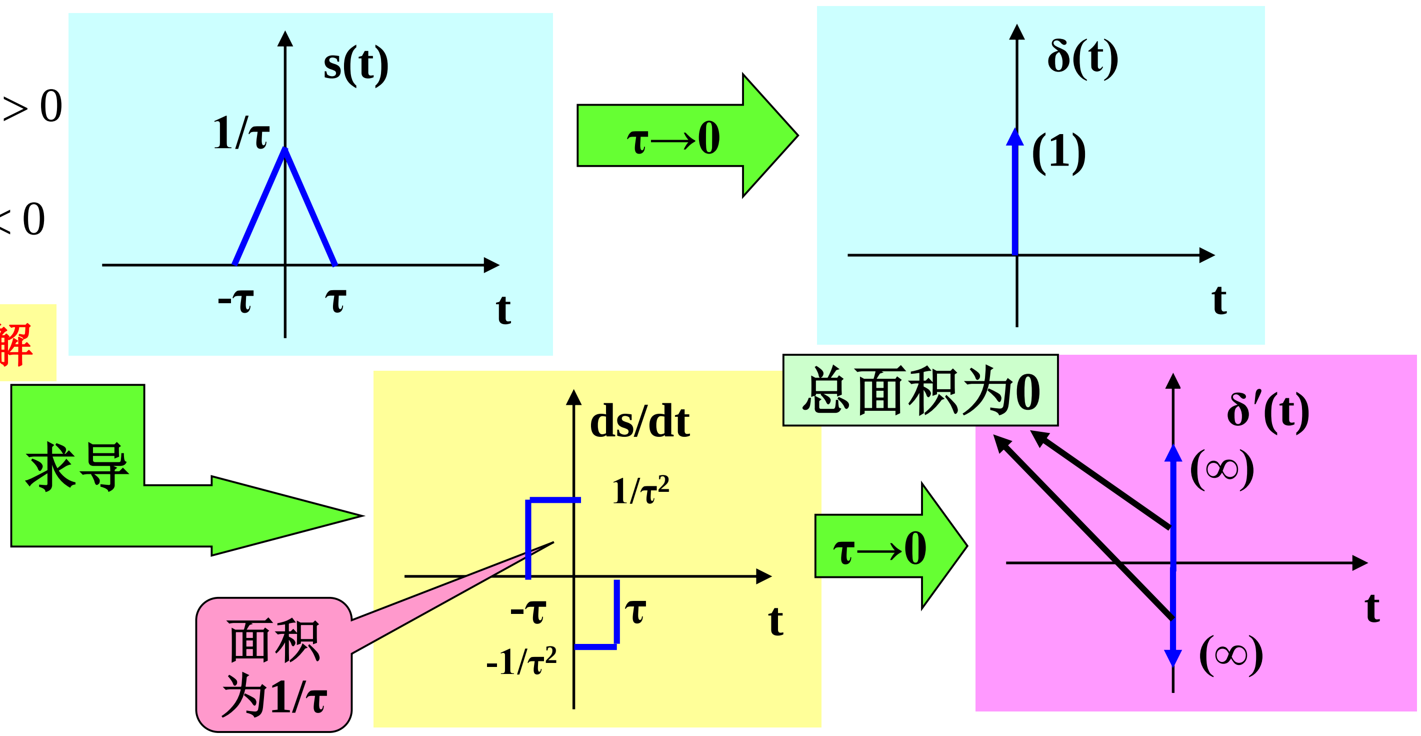
四、冲激偶信号δ′（t）

$$\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}\qquad \int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau=\delta(t)$$

冲激信号δ(t)的微分将呈现正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号；以δ′（t)表示

$$s(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\tau^2}(t-\tau),t>0\\ \dfrac{1}{\tau^2}(t+\tau),t<0\end{cases}$$

理解



连续时间信号：奇异信号——冲激偶信号（2）

重要性质：

***1 性质1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

(正负面积抵消)

***2 性质2**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

比较: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$

证明：采用分部积分的方法

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = f(t)\delta(t-t_0)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)df(t)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\delta(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

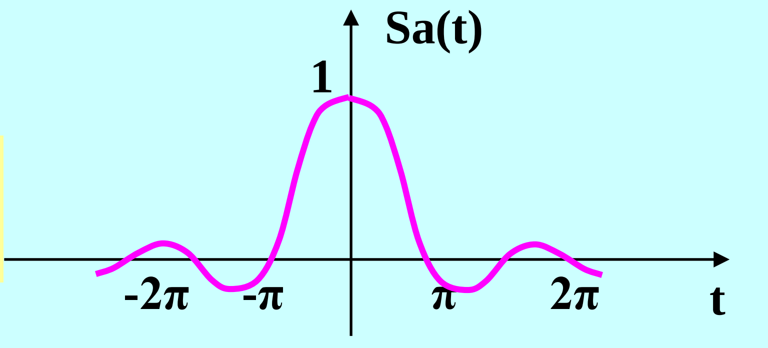
***3 冲激偶信号与冲激信号的关系**

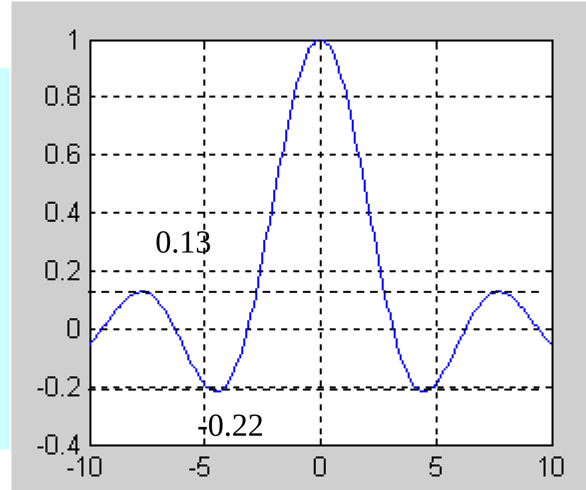
$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)d\tau = \delta(t)$$

五、Sa(t)函数（抽样函数）

1）定义

$$Sa(t)=\frac{\sin(t)}{t}$$





$$Sa(-t)=\frac{\sin(-t)}{-t}=\frac{\sin(t)}{t}=Sa(t)$$ ⇒ **Sa(t)是偶函数**

2）Sa(t)函数性质

$$\int_0^{+\infty}Sa(t)dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)dt=\pi$$

$$\mathrm{Sa}(0)=1,\qquad \mathrm{Sa}(t)=0,\quad t=\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$$

另外一种表示：

$$\sin c(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

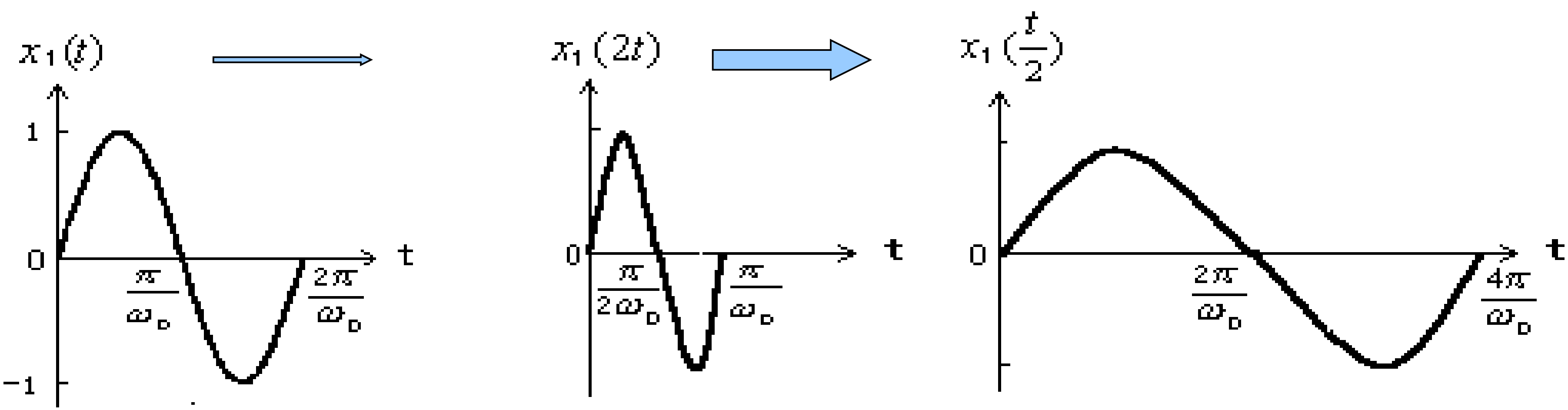
$$\mathrm{Sinc}(0)=1\qquad \mathrm{Sinc}(t)=0,\quad t=\pm1,\pm2,\cdots$$

（二）时域计算

- 基本运算
- 叠加和相乘
- 微分和积分
- 卷积运算

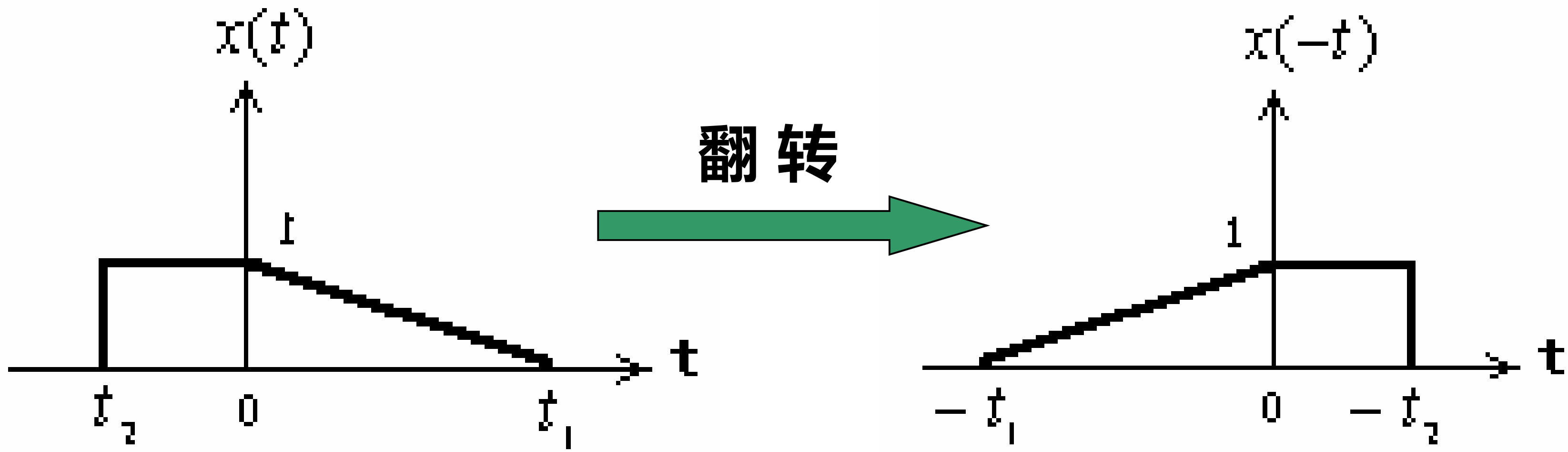
1、基本运算 - 尺度变换

- **幅度尺度变换：** 表示对原信号的放大或缩小。一般来说，不改变信号的特征
- **时间尺度变换：** 表现为信号横坐标尺寸的展宽或压缩，通常横坐标的展缩可以用变量at（a为大于零的常数）替代原信号的自变量t来实现。一般来说，改变了信号的基本特征 - **信号的频谱**发生改变



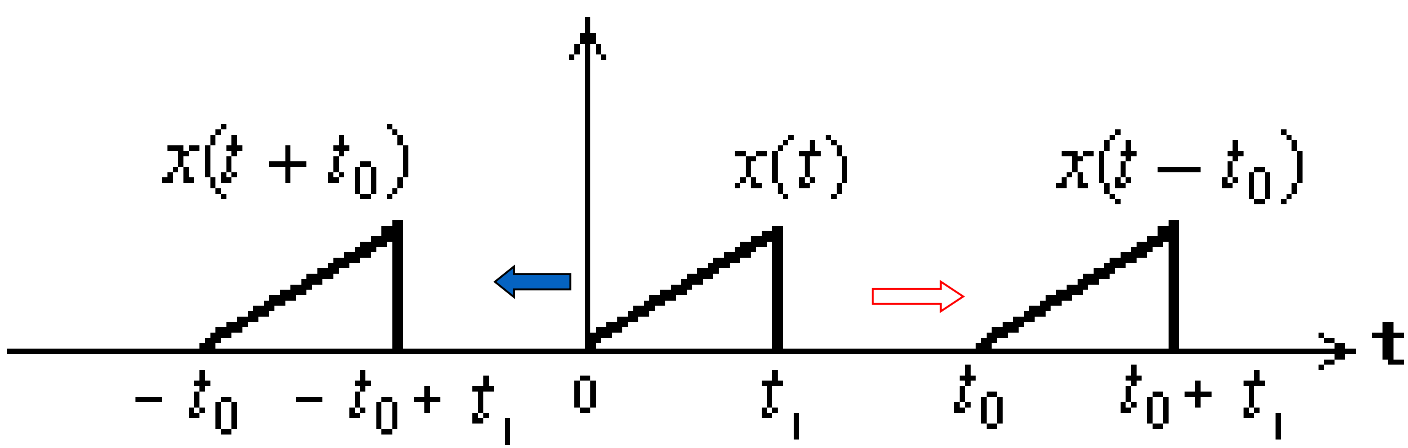
1、基本运算 - 翻转

■ 将信号以纵坐标轴为中心进行对称映射，即用变量-t代替原自变量t而得到的信号x(-t)



1、基本运算 - 平移

- 将原信号沿时间轴平移，信号的幅值不发生改变。若t_0为大于零的常数，则
  - 沿坐标轴正方向平移（右移）t_0表示信号的延时
  - 沿坐标轴反方向平移（左移）t_0表示信号的超前



1、基本运算

$x(t) \longrightarrow x(at+b)$?

若a>0，则需要展缩、平移；

若a<0，则需要翻转、展缩、平移。

一般的形式： $$x(at+b)=x\left(a(t+\frac{b}{a})\right)$$

翻转、平移、展缩的先后次序并无一定，

关键：变换前后端点函数值不变

例外： $$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

1、基本运算

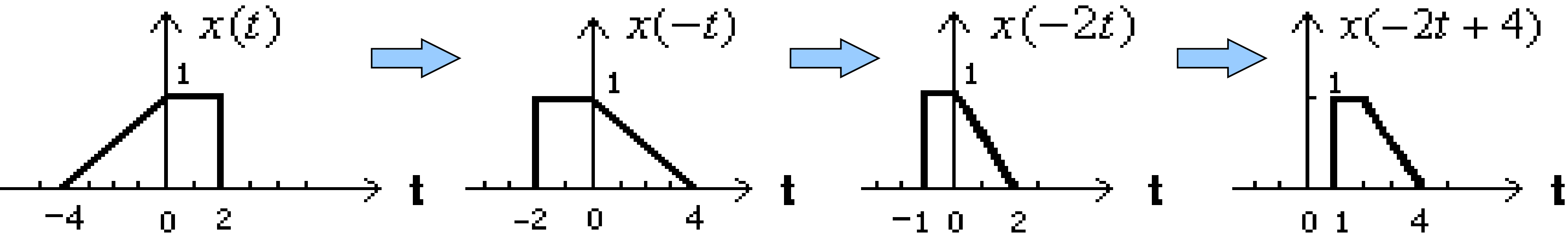
- **例2-2** 已知信号

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}(t+4) & -4<t<0\\ 1 & 0<t<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 求出$x(-2t+4)$

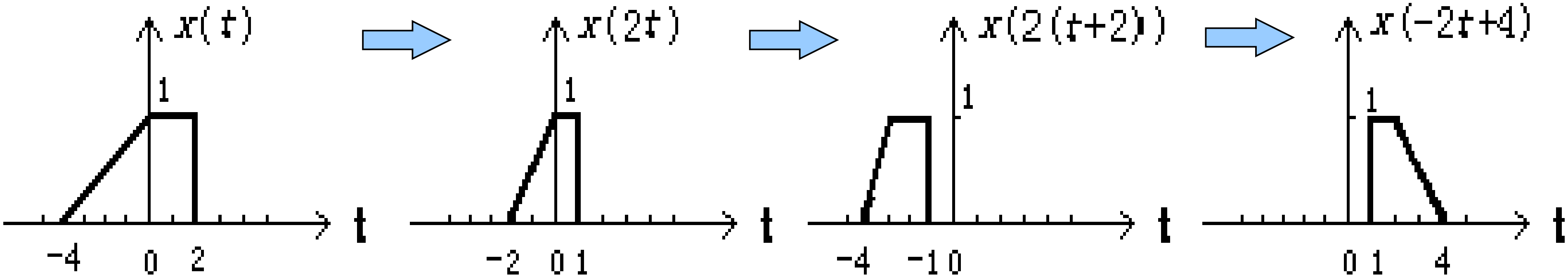
解：翻转+时间轴展缩+平移

$$x(t) \to x(-t) \to x(-2t) \to x[-2(t-2)] = x(-2t+4)$$



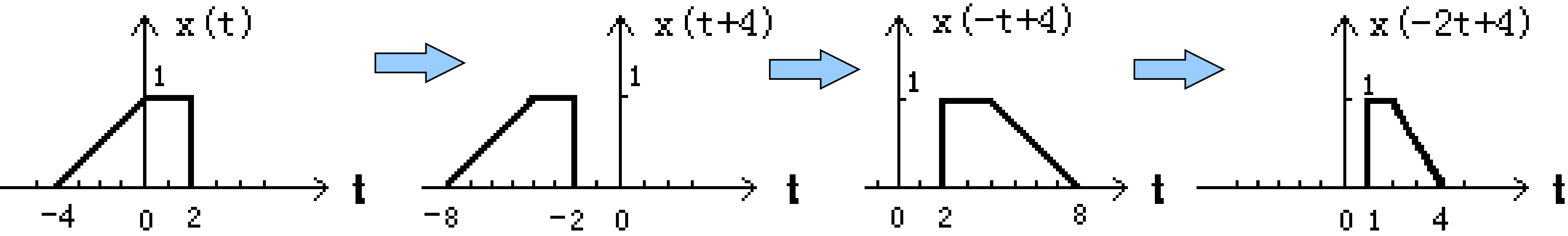
解：转时间轴展缩+平移+翻转

$$x(t) \to x(2t) \to x[2(t+2)] = x(2t+4) \to x(-2t+4)$$



解：平移+翻转+时间轴展缩

$$x(t) \longrightarrow x(t+4) \longrightarrow x(-t+4) \longrightarrow x(-2t+4)$$



2、叠加和相乘

- 两个信号$x_1(t)$和$x_2(t)$相**叠加**，其瞬时值为两个信号在该瞬时的值的代数和，即 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

- 两个信号$x_1(t)$和$x_2(t)$**相乘**，其瞬时值为两个信号在该瞬时的值的乘积，即 $x(t) = x_1(t)\,x_2(t)$

3、微分和积分

表示信号的变化率，要求该信号满足可微条件

- 信号的**微分**：是指取信号对时间的一阶导数，表示为

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

- 信号的**积分**：是指信号x(t)在区间 $(-\infty, t)$ 内积分得到的信号，即

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

4、卷积运算

■ 对于两个连续时间信号$x_1(t)$和$x_2(t)$，可以定义它们的卷积积分运算，简称**卷积运算**

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau$$

有

$$x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$$

计算步骤：改变自变量-翻转-位移-相乘-积分

4、卷积运算

卷积积分： $$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

几何解释： x(τ)和h(t-τ)相乘之后，该曲线下的面积。它是t的函数，也是系统输出在t时刻的值。

步骤： y(t)=x(t)*h(t)　图示求解的五个步骤

(1) 变量置换: $t\to\tau$

(2) 其中一个信号反褶: $\tau\to-\tau$

(3) 反褶之信号移位 t: $-\tau\to t-\tau$

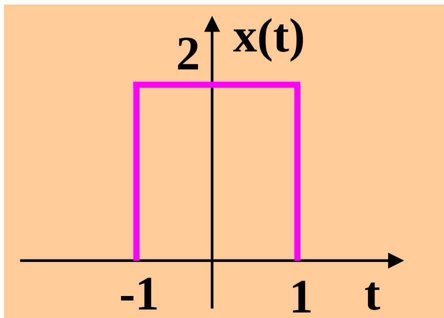
(4) 两信号相乘: $x(\tau)h(t-\tau)$

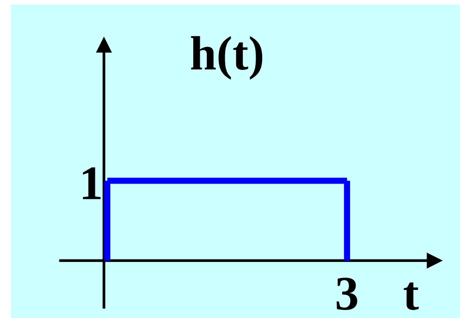
(5) 相乘后积分: $\int$

改变 t

4、卷积运算

例已知信号x(t), h(t)，求卷积积分y(t)=x(t)*h(t)。



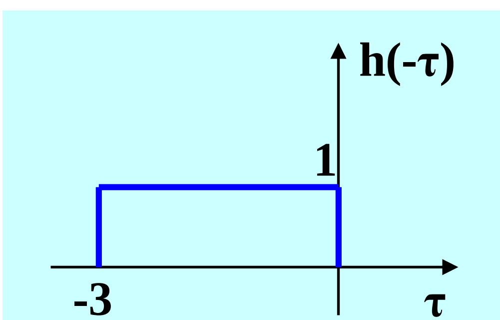


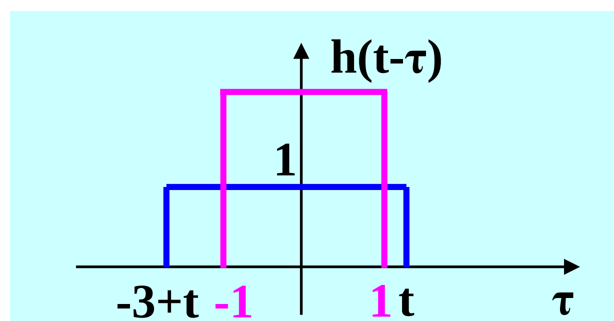
解：

1）变量替换τ→t，x(t)→x(τ)，h(t)→h(τ)，并且 h(τ)反转h(-τ)；

2）平移：h(-τ)沿τ轴随t不同向左/向右平移得h(t-τ)；

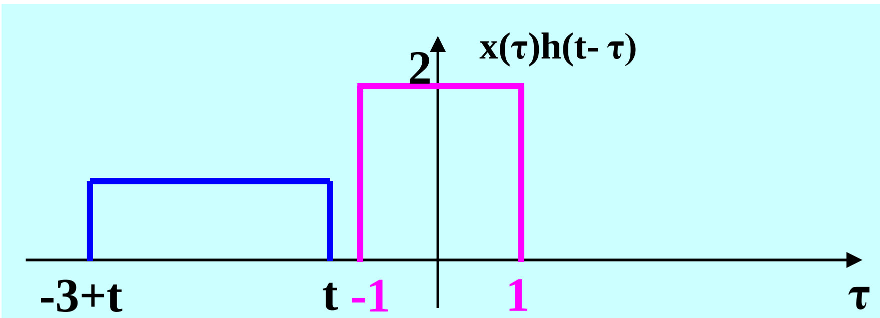
3）相乘得x(τ)h(t-τ)；





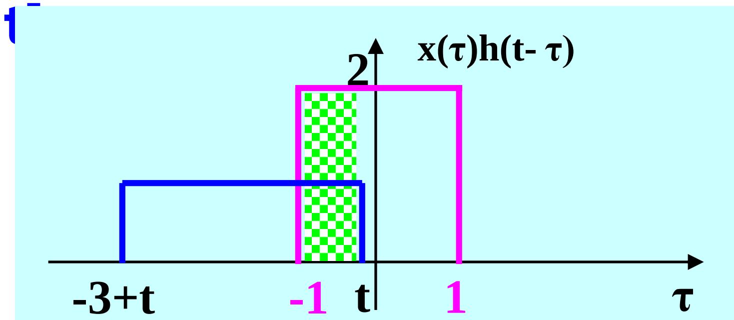
4、卷积运算

①当t<-1时，x(τ)与h(t-τ)无重叠



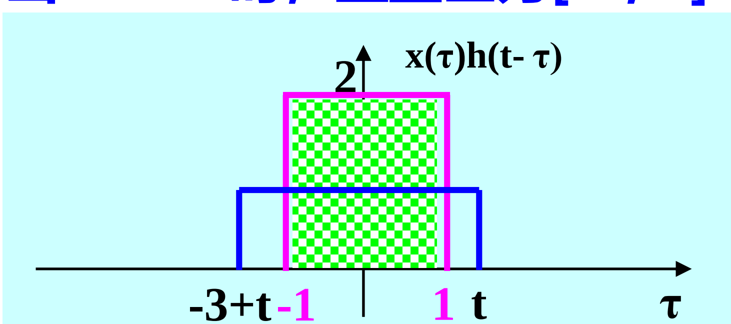
$$y(t)=0$$

② 当-1≤t<1时，重叠区为[-1, t]



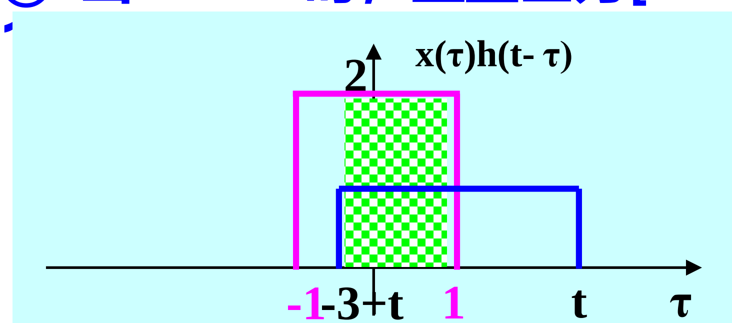
$$y(t)=\int_{-1}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{t}2d\tau=2(t+1)$$

③ 当1≤t<2时，重叠区为[-1, 1]



$$y(t)=\int_{-1}^{1}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{1}2d\tau=4$$

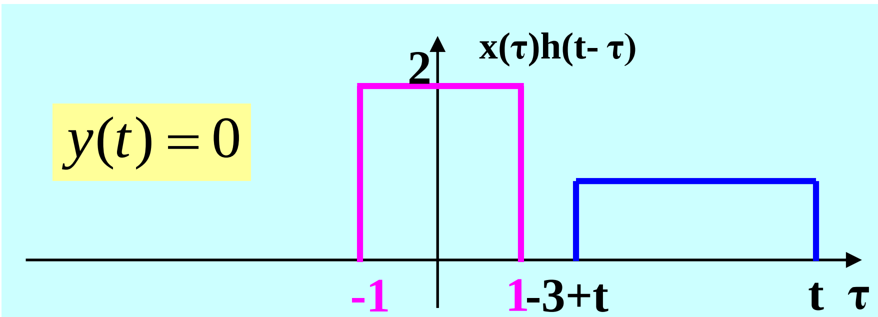
④ 当2≤t<4时，重叠区为[-3+t,



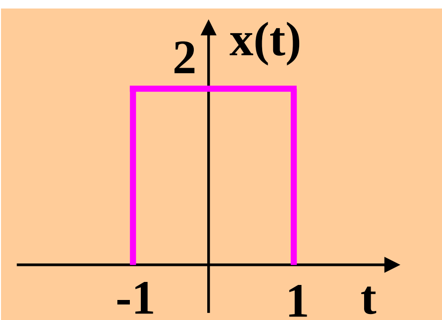
$$y(t)=\int_{-3+t}^{1}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-3+t}^{1}2d\tau=2(4-t)$$

4、卷积运算

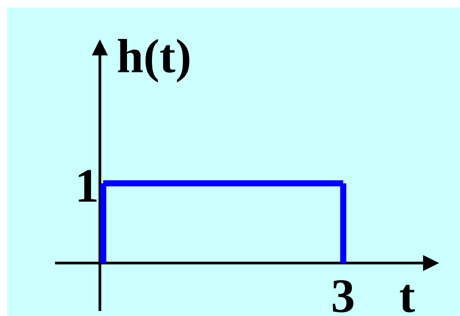
⑤ 当t≥4时，x(τ)与h(t-τ)无重叠



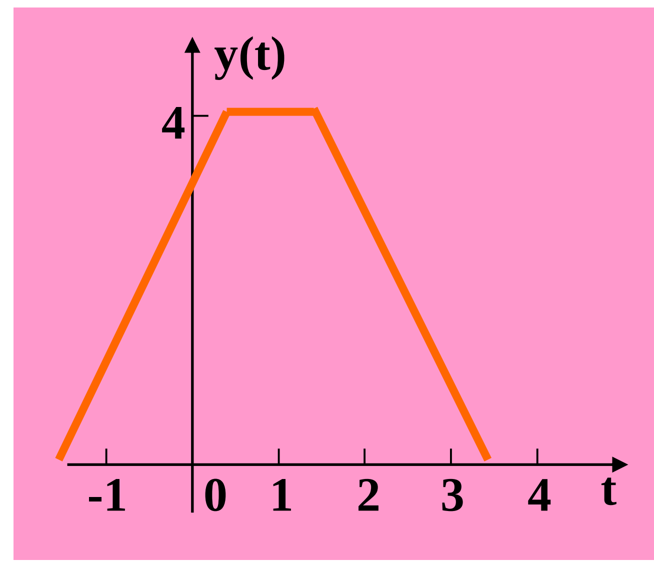
$$y(t)=x(t)*h(t)=\begin{cases}0 & t<-1, t\geq 4\\ 2(t+1) & -1\leq t<1\\ 4 & 1\leq t<2\\ 2(4-t) & 2\leq t<4\end{cases}$$



*



=



(1) $y(t)$始 = $x(t)$始 + $h(t)$始

(2) $y(t)$终 = $x(t)$终 + $h(t)$终

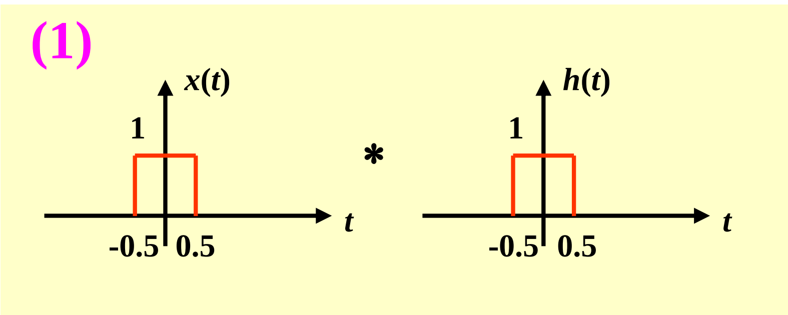
(3)面积 $S_y = S_x \times S_h$

号边界：-1+0=-1；1+3=4

面积： S_y= 4 × 3=12

4、卷积运算

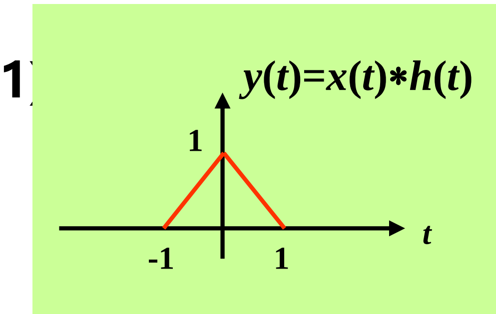
例　某些特殊信号的卷积和。

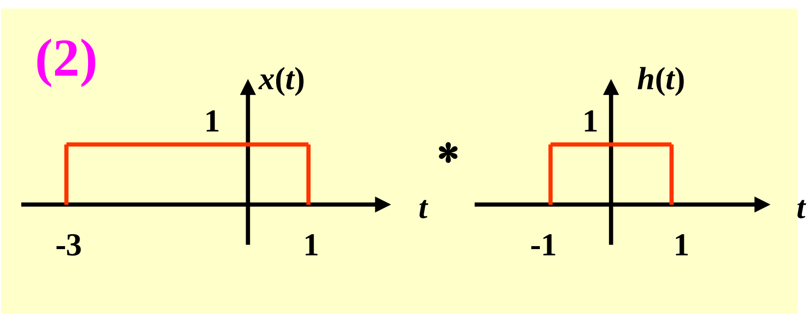


成对和(-1, 0, 1)

$S_x=1$,

$S_h=1 \Rightarrow S_y=1$

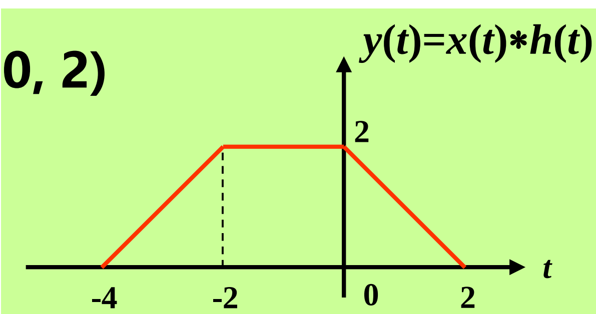




成对和(-4, -2, 0, 2)

$S_x=4$,

$S_h=2 \Rightarrow S_y=8$



结论: 两个等宽矩形卷积结果为三角形
**　　　两个不等宽矩形卷积结果为梯形**

4、卷积运算 ——性质（1）

1. 卷积代数

卷积运算遵从交换律、结合律和分配律等代数定律；

1）交换律

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

卷积与两个信号的顺序无关，运算时可以选择使运算简单的一个积分

2）结合律

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

3）分配律

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

4、卷积运算 ——性质（2）

2. 卷积的微分与积分性质

1）卷积的微分性质

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t) \Rightarrow y'(t)=x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)$$

2）卷积的积分性质

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda=\left[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right]*h(t)=x(t)*\left[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda\right]$$

3）等效特性

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t) \Rightarrow y(t)=x^{-1}(t)*h'(t)=x'(t)*h^{-1}(t)$$

推广：

$$x^{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$ x(t)的一次积分

等效特性可推广至求卷积的高阶导数或多重微分。

$$\boxed{r(t)=x_1(t)*x_2(t)} \Rightarrow \boxed{r^{(i)}(t)=x_1^{(j)}(t)*x_2^{(i-j)}(t)}$$

i 取正时为求导的阶次

i 取负时为积分的阶次

4、卷积运算 ——性质（3）

3. 与冲激函数δ(t)和阶跃函数u(t)卷积

冲激函数与任一信号x(t)的卷积等于其x(t)自身

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

*1. 延时特性 $x(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)*x(t)=x(t-t_0)$

*2. 平移特性 $x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$

*3. 微分特性 $x(t)*\delta'(t)=x'(t)*\delta(t)=x'(t)$

*4 积分特性 $x(t)*u(t)=x(t)*\left[\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau\right]=\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right]*\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

任一信号x(t)与单位阶跃的卷积等于x(t)自身的积分

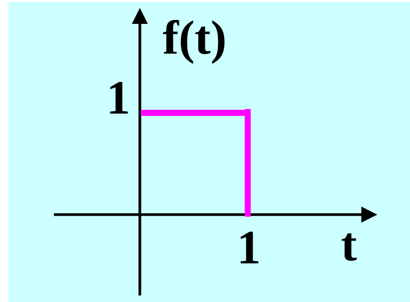
推广至一般情况：

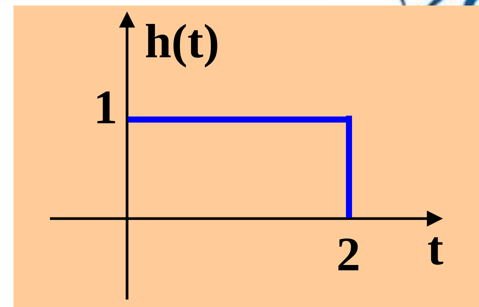
$$x(t)*\delta^{(k)}(t)=x^{(k)}(t)*\delta(t)=x^{(k)}(t)$$

$$x(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=x^{(k)}(t)*\delta(t-t_0)=x^{(k)}(t-t_0)$$

4、卷积运算 ——性质（4）

例　计算y(t)=f(t)*h(t)

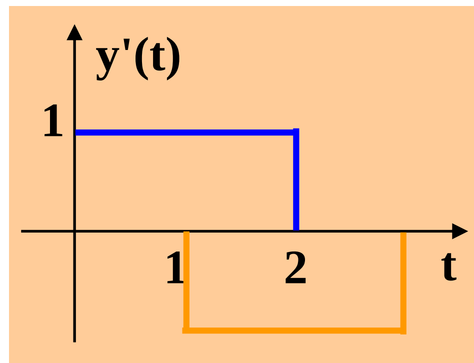


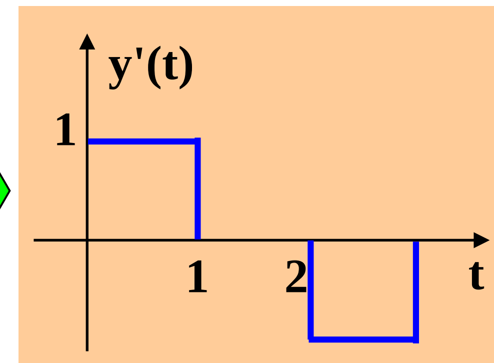


解：方法一：

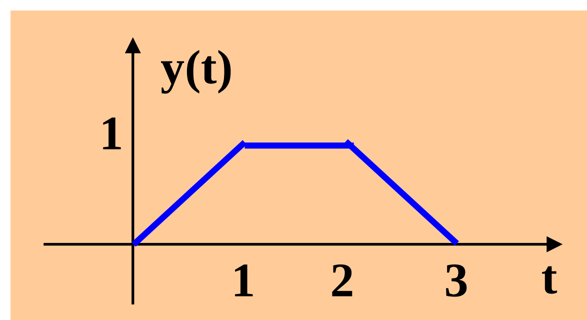
$$f'(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$

$$\begin{aligned}y'(t)&=f'(t)*h(t)\\&=[\delta(t)-\delta(t-1)]*h(t)\\&=h(t)-h(t-1)\end{aligned}$$





$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}[h(\tau)-h(\tau-1)]d\tau$$



4、卷积运算 ——性质（5）

方法二： **因为：任一信号x(t)与单位阶跃的卷积等于x(t)自身的积分**

$$u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}1d\tau\cdot u(t)=tu(t)=r(t)$$

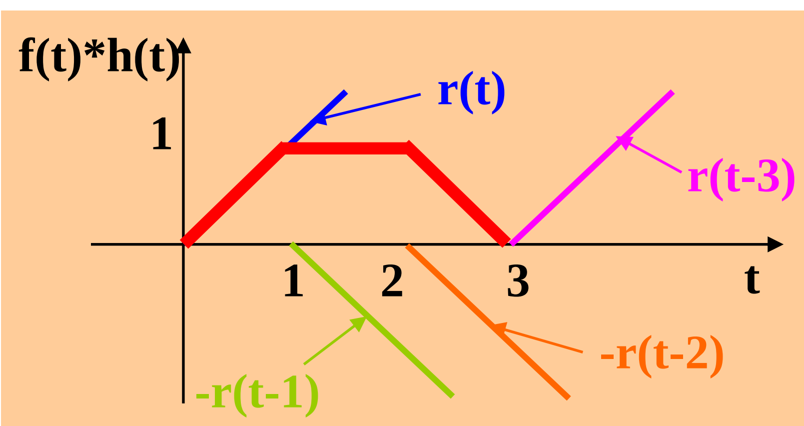
斜坡函数

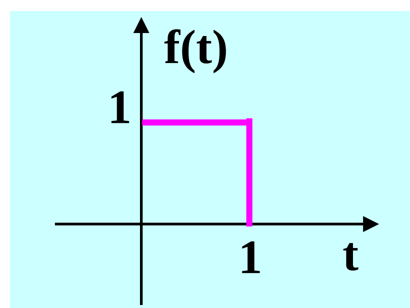
y(t)=f(t)*h(t) $f(t)=u(t)-u(t-1)$ $h(t)=u(t)-u(t-2)$

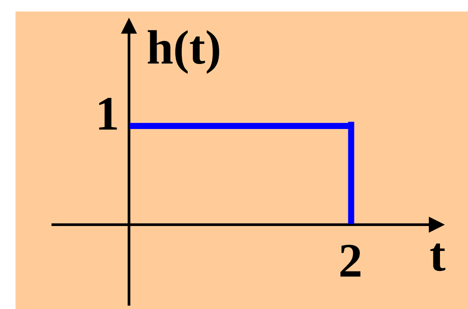
$$f(t)*h(t)=\left[u(t)-u(t-1)\right]*\left[u(t)-u(t-2)\right]$$

$$=u(t)*u(t)-u(t-1)*u(t)-u(t)*u(t-2)+u(t-1)*u(t-2)$$

$$=r(t)-r(t-1)-r(t-2)+r(t-3)$$







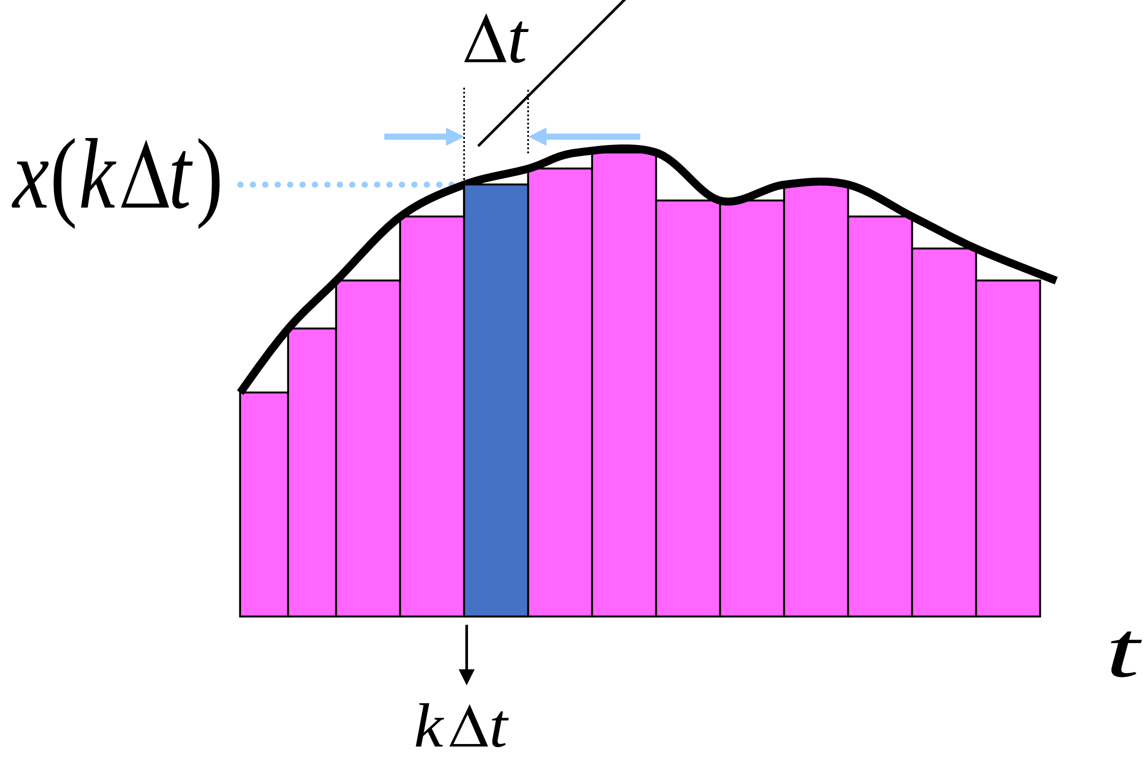
（三）信号的分解

- 分解成冲激函数之和

- 正交分解

1、分解成冲激函数之和

$$u(t-k\Delta t)-u\left[t-(k+1)\Delta t\right]$$



1、分解成冲激函数之和

- **任意信号x(t)可近似用一系列等宽度的矩形脉冲之和表示**

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\left\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}\Delta t$$

1、分解成冲激函数之和

- 当 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下
- 而 $\Delta t \to d\tau \quad k\Delta t \to \tau$
- 有 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t} = \delta(t-\tau)$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

1、分解成冲激函数之和

- **任意信号x(t)可以用经平移的无穷多个单位冲激函数加权后的连续和（积分）表示，换言之，任意信号x(t)可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数。**

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

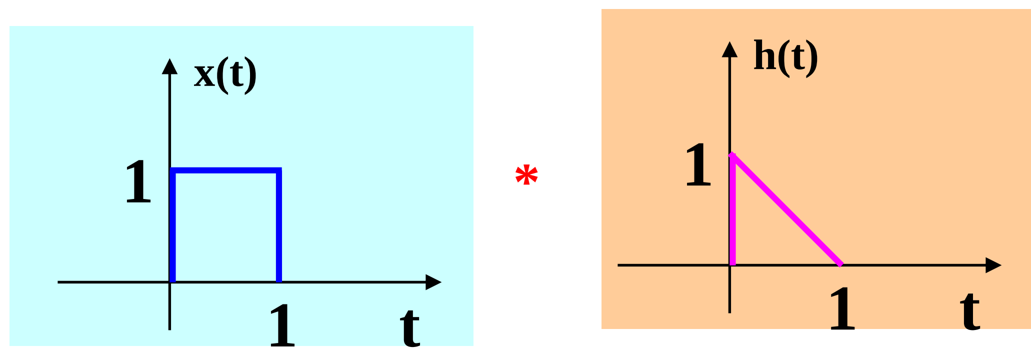
课后作业

- 作业：P99
  - 1:(1)(3)(5)、5:(3)、8、58

附加作业：

1. 已知 $x(t)=e^{-at}u(t), a>0, \quad h(t)=u(t)$，求卷积。

2. 分别用手算和Matlab求下边两个信号的卷积



- 课后预习内容：
  - 傅立叶级数（自学）
  - 连续信号的频域分析：
    - 周期信号的频谱分析
    - 非周期信号的频谱分析