夏学期第三周作业参考答案

5-9　设单位负反馈控制系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{K(1-s)}{s(s+2)}$，试绘制其根轨迹图，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 K 值。

解：

开环零点：$z_1=1$，开环极点 $p_1=0$，$p_2=-2$

因为开环传递函数分子的最高次幂的系数为负，所以其根轨迹图为零度根轨迹。

（1）　实轴上的根轨迹：[-2 0]，[1 ∞]

（2）　渐近线夹角：0º

（3）　根轨迹的分离点 d：$\dfrac{1}{d-1}=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}$　　$d=1\pm\sqrt{3}$　　$d_1=2.732$　$d_2=-0.732$

分离角：$\pm\dfrac{\pi}{2}$

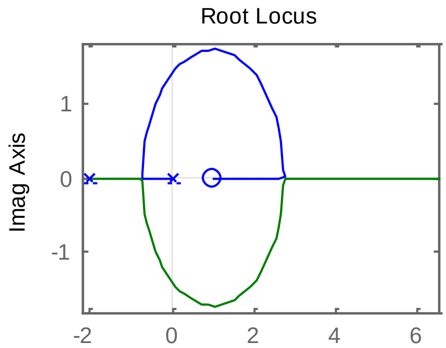
（4）　根轨迹与虚轴的交点：

闭环系统特征方程：$s^2+(2-K)s+K=0$，将 $s=j\omega$ 代入闭环系统的特征方程，得：

$$\begin{cases} K=\omega^2 \\ (2-K)\omega=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} \omega=0 \\ K=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} \omega=\pm\sqrt{2} \\ K=2 \end{cases}$$

所以系统产生纯虚根的 K 为：$K^*=2$

系统产生重实根的 K 为：$K_1=\dfrac{|d_1||d_1+2|}{|d_1-1|}=0.536$　$K_2=\dfrac{|d_2||d_2+2|}{|d_1-1|}=7.464$



5-10　设系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{30(s+b)}{s(s+10)}$，试画出 b 从零变到无穷时的根轨迹图。

解：系统闭环传递函数的特征方程为：$D(s)=s^2+40s+30b=0$，进行等效变换

$$1+\frac{30b}{s(s+40)}=0$$

等效开环传递函数为：$G_1(s)=\dfrac{30b}{s(s+40)}$

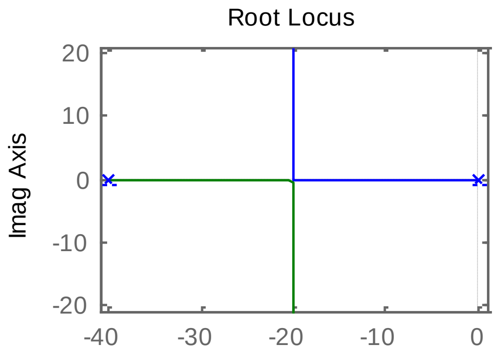
无开环有限零点，开环有限极点：$p_1=0$, $p_2=-40$

实轴上的根轨迹为：[-40, 0]

根轨迹有 2 条渐近线，$\sigma_a=\frac{-40}{2}=-20$，$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$

根轨迹的分离点 d：$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+40}=0$，d= -20，分离角±90º

根轨迹图如图所示：



5-12　已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)=\frac{s+a}{s^2(s+2)}$。试求 a 从 $0\to\infty$ 的闭环根轨迹，并求闭环稳定时的 a 的取值范围。

解：　$\because$ G(S)= $\frac{s+a}{s^2(s+2)}$　$\therefore$ 1+ G(S)= $\frac{s+a}{s^2(s+2)}$ +1=0 $\therefore$

可等效为：$G(S)'=\frac{a}{s(s+1)^2}$

画根轨迹步骤如下：

1：系统的开环极点为：$s_1=0$　　$s_{2,3}=-1$(二阶)

2：根轨迹关于实轴对称，实轴上的根轨迹：(-∞，0)

3：渐进线

于实轴交点：$\sigma=\frac{p_1+p_2+p_3}{3-0}=\frac{-2}{3}$

渐近线倾角为：

$\phi=\frac{360^\circ l+180^\circ}{3-0}=120^\circ l+60^\circ$　即有：$\phi_1=60^\circ$　　$\phi_2=180^\circ$　　$\phi_3=-60^\circ$

4：由相位条件可得极点的出射角：180°　0°

5：　与虚轴的交点：把 jw 代入特征方程：

$S^3+2S^2+S+ak=0$

即：$-j\omega_0{}^3-2\omega_0{}^2+j\omega_0+a=0$

有实部虚部分别为零：$\omega_0{}^3-\omega_0=0 \quad a-2\omega_0{}^2=0$

解之 ： $\begin{cases}\omega_0=1\\ \alpha=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega_0=-1\\ \alpha=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega_0=0\\ \alpha=0\end{cases}$

6：与实轴的分离点与会合点

$$b(s)\frac{da(s)}{ds}-a(s)\frac{db(s)}{ds}=0$$

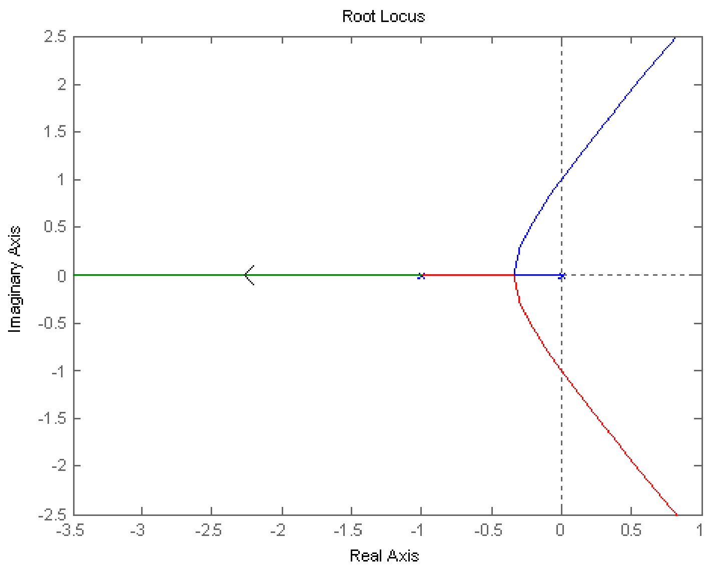
已知：$a(s)=s^3+2s^2+s$，$b(s)=1$

代入解得：$s_1=-1$，$s_2=-\dfrac{1}{3}$

经相位条件检验可知：s_1, s_2 满足条件，

所以分离点为：$s_1=-1 \quad s_2=-\dfrac{1}{3}$

综上所述，可得根轨迹草图为：



由根轨迹图中可以知道，要使系统稳定，闭环极点必须在左半平面，

也就是α要满足：$0<\alpha<2$