离散信号的分析

主讲教师：齐冬莲

目录

离散信号的频率分析

一、离散周期信号的频谱分析（DFS）

- 离散傅里叶级数
  - 连续周期信号的傅立叶级数
  - 从连续周期信号的傅立叶级数（FS）到离散周期信号的傅立叶级数（DFS）
- 离散傅里叶级数的性质

离散信号的频率分析

（1）连续周期信号的傅立叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(k\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

T_0：信号x(t)的周期

ω_0：信号x(t)的基波角频率

离散信号的频率分析

（2）从FS到DFS

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

连续周期信号x(t)离散化

t = nTs

$$\Omega_0=\omega_0 T_s=\frac{2\pi}{T_0}\cdot T_s=\frac{2\pi}{NT_s}\cdot T_s=\frac{2\pi}{N}$$

Ts：采样周期
T_0=NTs（连续信号周期T_0对应N个采样点）

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

DFS

X(n)为周期信号

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$e^{j\Omega_0 n}=e^{j\Omega_0(n+N)}=e^{j(\Omega_0\pm 2k\pi)n}$$

Ω_0：离散域的基本频率
$k\Omega_0$：k次谐波的数字频率
离散域谐波分量数：k=2π/ Ω_0=N

离散信号的频率分析

离散傅立叶级数系数

$$X(k\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\Omega_0=\omega_0 T_s=\frac{2\pi}{N}$$

$dt\rightarrow T_s$ **T_0=NTs** $\int_0^{T_0}\longrightarrow\sum_{n=0}^{N-1}$

$$X\left(k\frac{2\pi}{NT_s}\right)=\frac{1}{NT_s}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{NT_s}nTs}\cdot T_s$$

DFS系数

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

离散时间周期信号的频谱是一个以N为周期的周期性离散频谱，各谱线之间的间隔为Ω0 = 2π/N

周期性

$$X((k+N)\Omega_0)=X(k\Omega_0)$$

离散信号的频率分析

DFS:

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

令 $w_N=e^{j\frac{2\pi}{N}}$ **，DFS可记为**

$$\tilde{x}_N(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)w_N^{nk}$$

$$\tilde{X}_N(k)=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_N(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_N(n)w_N^{-nk}$$

离散信号的频率分析

函数特性 $w_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

- **正交性** $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk}(W_N^{mk})^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 1, & n-m=lN \\ 0, & n-m\neq lN \end{cases}$
- **周期性** $W_N^{r+mN} = W_N^r$
- **对称性** $W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$
- **可约性** $W_N^{rn} = W_{N/r}^n \quad W_{rN}^{rn} = W_N^n$

$W_N^0 = 1,\ W_N^N = W_N^0 = 1,\ W_N^{mN} = 1$ $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1,\ W_N^{(mN+N/2)} = -1$

离散信号的频率分析

例1：已知正弦序列$x(n)=\cos\Omega_0 n$，分别求出当$\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$和$\Omega_0=\pi/3$时，傅立叶级数表示式及相应的频谱。

- **解**：连续正弦信号离散化后所形成的正弦序列，只有在满足$\Omega_0/2\pi = m/N$为有理数时，该信号为周期正弦序列。
- $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$时，$\Omega_0/2\pi$ = 无理数，该序列为非周期序列，不能展开为DFS，其频谱仅有$\Omega = \Omega_0 = \sqrt{2}\pi$，不含其他谐波分量。
- $\Omega_0=\pi/3$时，$\Omega_0/2\pi = 1/6$=有理数，为周期序列，N=6, 因此

$$x(n)=\cos\frac{\pi}{3}n=\cos\frac{2\pi}{6}n=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{6}n}+e^{-j\frac{2\pi}{6}n}\right)$$

$$X(k\Omega_0)=1/2 \qquad k=\pm1,\pm5$$

$$X(k\Omega_0)=0 \qquad k=0,\pm2,\pm3,\pm4$$

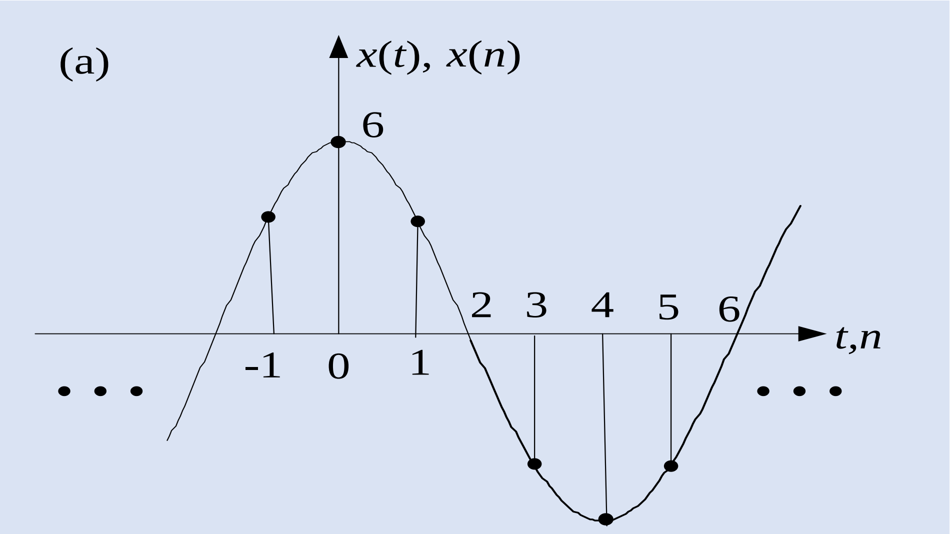
离散信号的频率分析

如果x (n)是从连续周期信号x (t)采样得来，

那么x (n)的频谱是否等效于x (t)的频谱 ？

离散信号的频率分析

$$x(t) = 6\cos\pi t$$

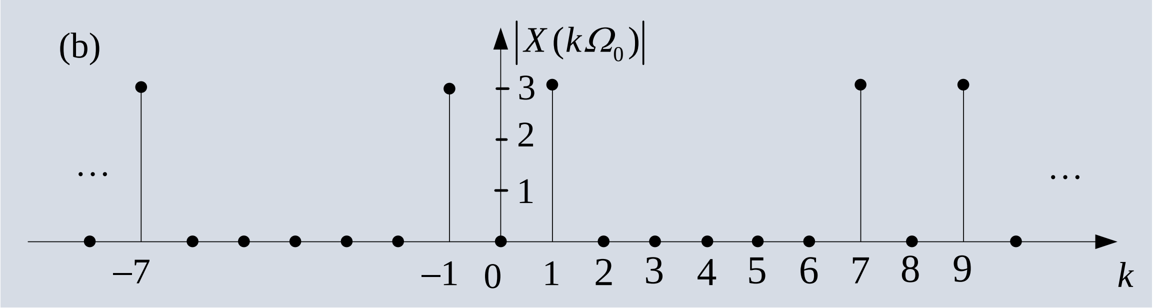


$$\omega_0 = \pi$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

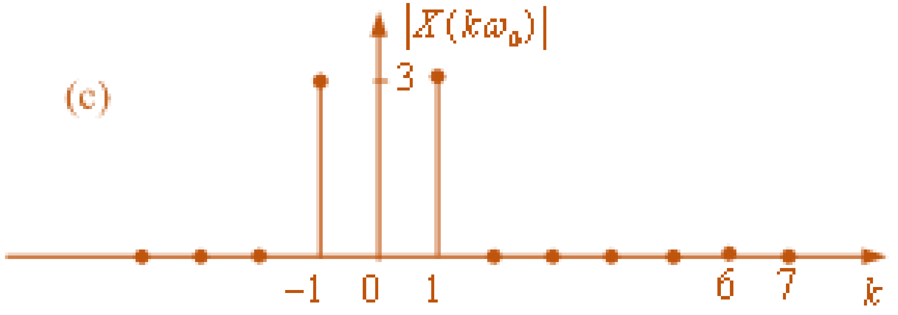
$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2$$

Ts=0.25秒



Ts=0.25

$$f = 4 \qquad N = T_0 / T_s = 8 \qquad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

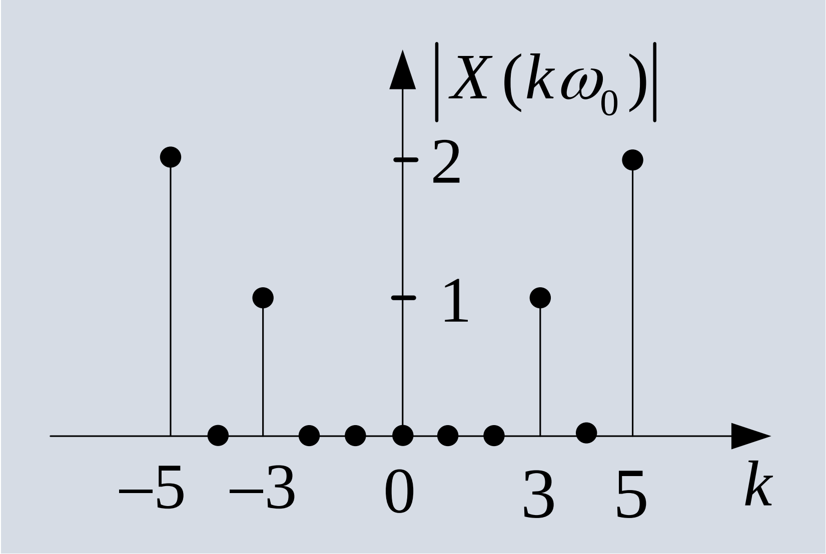


离散信号的频率分析

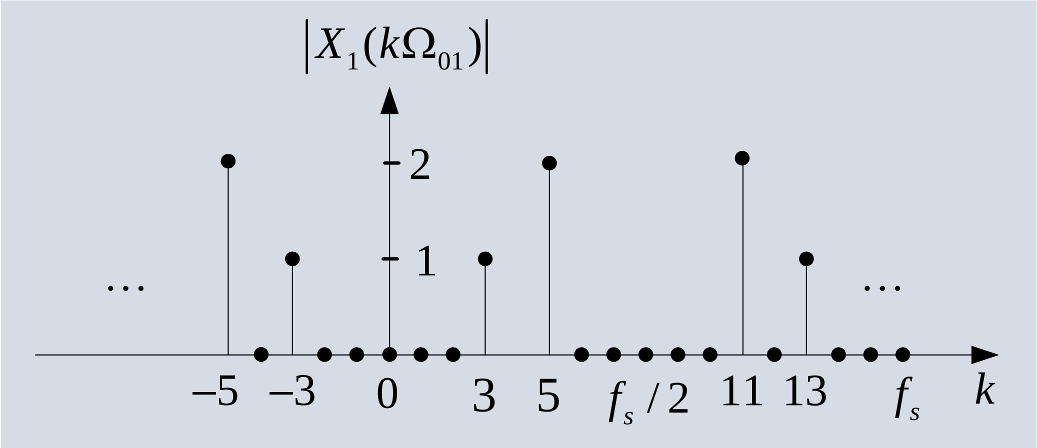
$$x(t) = 2\cos 6\pi t + 4\sin 10\pi t$$

$$\omega_m = 10\pi \qquad f_m = 5$$

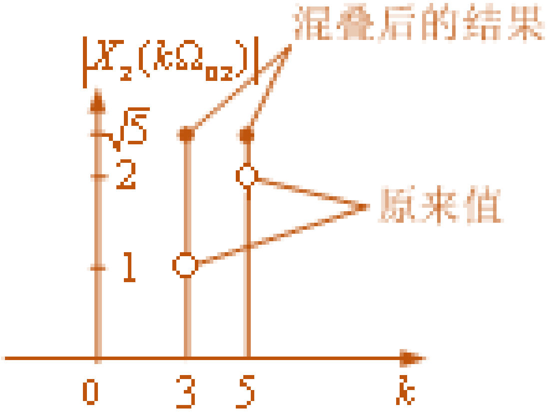
$$\omega_s \ge 2\omega_m \ge 20\pi \qquad f_s \ge 10$$



f_s=16



f_s =8



离散信号的频率分析

$X(k\Omega_0)$ 可以看作是 $X(k\omega_0)$ 的近似式，近似程度与采样周期Ts的选取有关

在满足采样定理条件下，从一个连续时间、频带有限的周期信号得到的周期序列，其频谱在 $|\Omega| < \pi$ 或 $|f| < (f_s/2)$ 范围内等于原始信号的离散频谱

在不满足采样定理条件下，由于 $X(k\Omega_0)$ 出现频谱混叠，这时就不能用 $X(k\Omega_0)$ 准确地表示 $X(k\omega_0)$

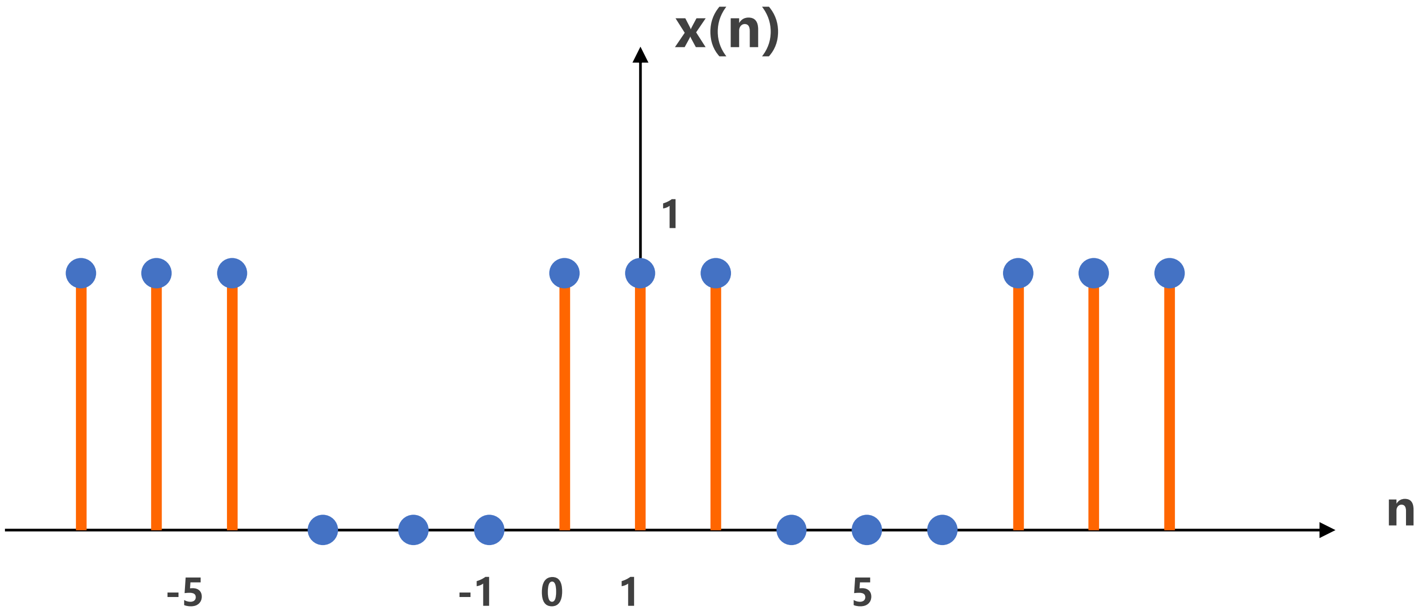
离散信号的频率分析

2、DFS的基本性质

线性	$a\tilde{x}_N(n)+b\tilde{y}_N(n)\xleftrightarrow{DFS}a\tilde{X}_N(k)+b\tilde{Y}_N(k)$
周期卷积	$\tilde{x}_N(n) \circledast \tilde{h}_N(n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}_N(k)\tilde{H}_N(k)$ $\tilde{x}_N(n)\tilde{h}_N(n)\xleftrightarrow{DFS}\frac{1}{N}\tilde{X}_N(k) \circledast \tilde{H}_N(k)$
复共轭	$\tilde{x}_N^{\ *}(-n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}_N^{\ *}(k)$
位移	$\tilde{x}_N(n-m)\xleftrightarrow{DFS}W_N^{-mk}\tilde{X}_N(k)$
频移	$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_N(n)\tilde{h}_N^{\ *}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)\tilde{H}_N^{\ *}(k)$

离散信号的频率分析

例： 已知一周期序列x(n)，周期N=6, 如下图所示，求该序列的频谱及时域表示式。



离散信号的频率分析

- 解：根据DFS的定义式求周期序列的频谱：

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{6}\left[x(0)+x(1)e^{-jk\frac{2\pi}{6}}+x(5)e^{-jk5\frac{2\pi}{6}}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1+2\cos k(\frac{2\pi}{6})\right]$$

$$X(0)=1/2,\ X(\Omega_0)=1/3,\ X(2\Omega_0)=0$$

$$X(3\Omega_0)=-1/6,\ X(4\Omega_0)=0,\ X(5\Omega_0)=1/3$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{5}X(k\Omega_0)e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{6}n}+\frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{6}5n}-\frac{1}{6}e^{j\frac{2\pi}{6}3n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}n-\frac{1}{6}\cos n\pi$$

在时域以N为周期的序列，在频域也是以N为周期的序列

谢谢大家