梅森公式：P_k=第 k 条前向通道的通道增益；Δ=1-（所有不同回路的增益之和）+（每两个互不接触回路增益乘积之和）-（每三个互不接触回路增益乘积之和）+… ；Δ_k=信号流图中除去与第 k 条前向通道 P_k 相接触的支路和节点后余下的信号流图的特征式。 $P=\frac{1}{\Delta}\sum_k P_k\Delta_k$

状态空间 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$ $\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$ 衰减比 n $e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

传递函数 $\mathbf{C(SI-A)^{-1}B+D}$，D 一般为 0。$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}$ 余子式求法位置转置，计算逆矩阵乘行列式。

暂态响应性能指标（二阶）上升时间 $Tr=\frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi-arccos\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ 峰值时间 $Tp=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ 最大偏差 y(Tp) $1+e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ 超调比 σ $e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ 调节时间 Ts $\frac{3.5}{\xi\omega_n}$

$$\varepsilon(t)-e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$\beta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ 为输出相位延迟(滞后角)

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 为阻尼振荡频率

$\sigma=\zeta\omega_n$ 衰减系数

$$(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{Y_{zs}(s)}{(s-s_1)^3(s-s_2)}=\frac{A_{13}}{(s-s_1)^3}+\frac{A_{12}}{(s-s_1)^2}+\frac{A_{11}}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}$$

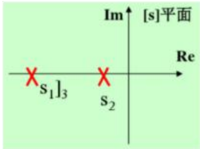
LT^{-1}

$$f(t)=A_{13}\frac{t^2}{2}e^{s_1t}+A_{12}te^{s_1t}+A_{11}e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

其中，$A_{13}=[(s-s_1)^3\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}]_{s=s_1}$

$A_{12}=\{\frac{d}{ds}[(s-s_1)^3\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}]\}_{s=s_1}$

$A_{11}=\{\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds}[(s-s_1)^3\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}]\}_{s=s_1}$



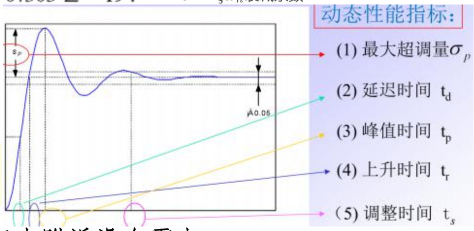
$$F(s)=\frac{10}{(s^2+6s+25)(s+2)}=\frac{A_1}{s+3\quad j4}+\frac{A_2}{s+3+4j}+\frac{A_3}{s+2}$$

$$A_1=[(s+3-4j)\frac{10}{(s^2+6s+25)(s+2)}]_{s=-3+4j}=0.303\angle-194^\circ$$

$\phi=A_1$的角度$+90^\circ=-194^\circ+90^\circ=-104^\circ$

$$A_3=[(s+2)\frac{10}{(s^2+6s+25)(s+2)}]_{s=-2}=0.59$$

$$f(t)=2|A_1|e^{\sigma t}\sin(\omega_d t+\phi)+A_3e^{s_3t}$$
$$=0.606\ e^{-3t}\sin(4t-104^\circ)+0.59\ e^{-2t}$$

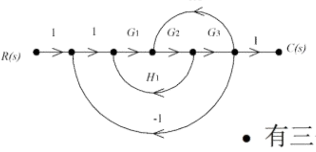


主导极点：高阶系统中距离虚轴最近的极点，其实部比其他极点的实部的 1/5 还要小，并且该极点附近没有零点。

劳斯判据：系统的极点均在 s 平面的左半部分=方程的各项系数全部为正值，并且劳斯表的第一列都具有正号。

*一项为 0：乘（s+1）*某行所有各项系数均为零:将上一行组成辅助方程，用求导得到的各项系数来代替为零的各项。

稳定裕度：令 z=s-σ，判断根位于 s=-σ 的左边。



- 在这个系统中，输入量$R(s)$和输出量$C(s)$之间，只有一条前向通道。前向通道的增益为：$P_1=G_1G_2G_3$
- 有三个单独的回路，其增益分别为：$L_1=G_1G_2H_1$ $L_2=-G_2G_3H_2$ $L_3=-G_1G_2G_3$
- 没有不接触的回路，特征式Δ为：$\Delta=1-\sum L_a=1-(L_1+L_2+L_3)$ $=1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3$
- 因为通道P_1与三个回路都接触，所以得到Δ_1=1
- 因此，输入量$R(s)$和输出量$C(s)$之间的总增益，或闭环传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)}=P=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}$

频带宽度 $\omega_b=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$

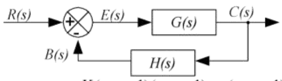
- 为了求出$s^3\sim s^0$各项，将s^4行的各项组成辅助方程：$A(s)=s^4+6s^2+8$
- 将辅助方程A(s)对s求导数，得 $\frac{dA(s)}{ds}=4s^3+12s$
- 用上式中的各项系数作为s^3行的各项系数，得劳斯表为：

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	1	6	8	
s^3	4	12		
s^2	3	8		
s^1	4/3			
s^0	8			

- 从左表的第一列可以看出，各项符号没有改变，因此可以确定在右半平面没有极点。另外，由于s^3行的各项皆为零，这表示有共轭虚数极点。这些极点可由辅助方程求出。
- 辅助方程是：$s^4+6s^2+8=0$ 求得大小相等符号相反的虚数极点为：$s_{1,2}=\pm j\sqrt{2}$ $s_{3,4}=\pm j2$

静态误差 e_{ss}：e(t)=r(t)-z(t),L.T.为 E(S)=R(S)-Z(S)。系统稳定情况下，终值定理可求 ess。

根轨迹相角条件和幅值条件：|G(s)H(s)|=1,同时∠G(s)H(s)=±(2k+1)π。



$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ms+1)}{s^v(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}$$

1	根轨迹的连续性和对称性	根轨迹是连续的，且对称于实轴
2	根轨迹的起点和终点	根轨迹的 n 条分支从 n 个开环极点出发，其中 m 条最终趋向 m 个开环零点，另外 $n-m$ 条趋向无穷远处
3	实轴上的根轨迹	在实轴上的线段上存在根轨迹的条件是，其右边开环零、极点数目之和为奇数
4	根轨迹渐近线的相角	$n-m$ 条渐近线的相角为 $\alpha=\frac{\pm180^\circ(2k+1)}{n-m}$
5	根轨迹渐近线的交点	$n-m$ 条渐近线交点的坐标为 $-\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j)-\sum_{i=1}^{m}(-z_i)}{n-m}$
6	根轨迹的分离点（或会合点）	根轨迹的分离点（或会合点）必须满足方程式 $\frac{dK}{ds}=0$
7	根轨迹的出射角和入射角	出射角 $\varphi_p=\mp180^\circ(2k+1)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-\sum_{j=1,j\neq p}^{n}\theta_j$ 入射角 $\varphi_z=\pm180^\circ(2k+1)+\sum_{j=1}^{n}\theta_j-\sum_{i=1,i\neq z}^{m}\lambda_i$
8	根轨迹与虚轴的交点	1）劳斯判据求临界稳定时的特征根 2）用 $s=j\omega$ 代入特征方程式，求 ω

系统型别(v)	稳态误差系数			阶跃输入 $R_0u_{-1}(t)$	斜坡输入 $R_1tu_{-1}(t)$	加速度输入 $1/2R_2t^2u_{-1}(t)$
	K_0	K_1	K_2	位置误差 $e_{ss}=\frac{R_0}{1+K_0}$	速度误差 $e_{ss}=\frac{R_1}{K_1}$	加速度误差 $e_{ss}=\frac{R_2}{K_2}$
0	K_0	0	0	$R_0/(1+K_0)$	∞	∞
I	∞	K_1	0	0	R_1/K_1	∞
II	∞	∞	K_2	0	0	R_2/K_2
III	∞	∞	∞	0	0	0

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+jT\omega}=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=-\tan^{-1}T\omega$$

广义根轨迹（参数和正反馈）

1）特征方程：$G(s)H(s)=\frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$

$\Delta(s)=s(Ts+1)(s+1)+2$ ⇒ $Ts^2(s+1)+s^2+s+2=0$ ⇒ $1+\frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}=0$ ⇒ $[G(s)H(s)]_e=\frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$

等效根轨迹增益

闭环系统特征根相同!

等效开环传递函数:

波特图 $\Delta'(s)=1+[G(s)H(s)]_e=0$

规则 3: 当s趋于∞时,根轨迹的渐近线与实轴的夹角 $\gamma=\frac{2k\pi}{n-w}$

规则 4: 实轴上的根轨迹

若实轴上的搜索点s右侧实数零极点数是偶数，则该点在根轨迹上

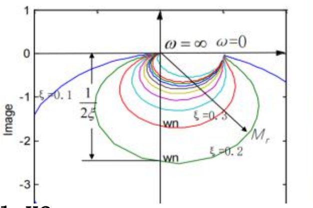
规则 6: 复数极点(或零点): 出射角(入射角)

出射角 $\phi_{p_k}=0^\circ+\sum_{j=1}^{w}\angle(p_k-z_j)-\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\angle(p_k-p_i)$

入射角 $\psi_{z_k}=0^\circ+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k-p_i)-\sum_{j=1,j\neq k}^{w}\angle(z_k-z_j)$

幅频特性

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}+(j\frac{\omega}{\omega_n})^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}e^{j\varphi(\omega)}\qquad \varphi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$



振荡环节奈氏图的低频段和高频段分别为：

$\lim_{\omega\to0}G(j\omega)=1\angle0^\circ$

$\lim_{\omega\to\infty}G(j\omega)=0\angle-180^\circ$

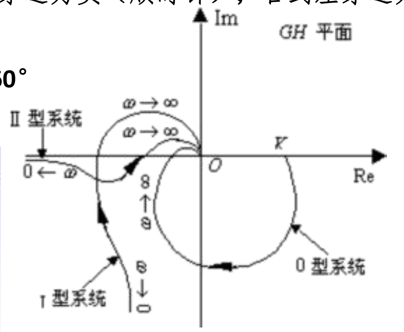
$\omega=\omega_n$ 时 $G(j\omega)=\frac{1}{j2\xi}$ 其相角为−90°。

0 型：低频段的渐近线斜率为 0dB/dec，高度为 20lgKp。

1 型：低频延长线与 0dB 线交点 K1，在ω=1 处的读数为 20lgK1。

2 型：低频部分斜率-40dB/dec 的斜线，与 0dB 线交点√K2，在ω=1 处的读数为 20lgK2。

奈奎斯特稳定判据：圈数 N=PR-ZR，PR 已知，N 求法：在-1+j0 点画一条射线，沿着射出方向左到右穿过为负（顺时针），右到左穿过为正。加和即为 N。ZR=0 时系统稳定。



稳定裕度 截止频率ω_c满足$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1$，相位裕度$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$一般 45° 到 60°

幅值裕度 穿越频率ω_x $\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=(2k+1)\pi$。幅值裕度 h $=1/(|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|)$

时间函数	变换后	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{t^n}{n}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/t)\ln a}$	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$

当 $0\le\xi\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，系统有谐振产生，其谐振峰值分别为

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\qquad M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-1/M_r^2}}{2}}$$

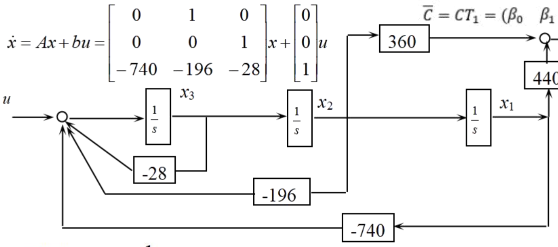
设系统的微分方程式为 $\dddot{y}+28\ddot{y}+196\dot{y}+740y=360\dot{u}+440u$

传递函数；状态方程与输出方程；状态变量图。

（1） 传递函数：$G(s)=\dfrac{360s+440}{s^3+28s^2+196s+740}$

（2） $\dot{x}=Ax+bu=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-740&-196&-28\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$

（3）



$\bar{A}=T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&a_{n-2}&-a_{n-1}\end{pmatrix}$

$\bar{B}=T_1^{-1}B=(0\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 1)^T$

$\bar{C}=CT_1=(\beta_0\quad \beta_1\quad \dots\quad \beta_{n-1})$

$L^{-1}[\dfrac{s+\alpha_0}{(s+\alpha)^2+w^2}]=\dfrac{1}{w}\sqrt{w^2+(\alpha_0-\alpha)^2}\cdot e^{-\alpha t}\sin(wt+\varphi)\quad \varphi=tg^{-1}(\dfrac{w}{\alpha_0-\alpha})$

$F\approx F_0+\dot{F}\ \Big|_{y=0.25}(y-0.25)$

s^2	52.5	$200+K$
s^1	$7995-12K$	0
s^0	$200K$	

求开环放大系数

K=666.25 时系统振荡。

$\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}=\dfrac{K^*}{(s+1)(0.5s+1)(0.25s+1)}$

由 $52.5s^2+(200+666.25)=0$ 得一对虚根为 $\pm j\sqrt{16.5}$，振荡频率为 $\sqrt{16.5}$。

$G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图

③ 根轨迹渐近线有 n-m=5 条，根轨迹渐近线与实轴的交点为：$\sigma_a=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_i=-2.1$，

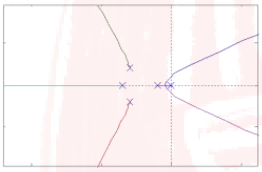
与实轴的交角为：$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=\dfrac{(2k+1)\pi}{5}=\pm36°,\pm108°,180°$

④ 根轨迹的分离点方程：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+3.5}+\dfrac{1}{d+3+j2}+\dfrac{1}{d+3-j2}=0$，分离点为：

$d\approx-0.4$，分离角为：$\dfrac{(2k+1)\pi}{l}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

⑤ 根轨迹的起始角：

$\theta_{p_4}=180°+(-\sum_{\substack{j=1\\j\neq4}}^{5}\angle(p_4-p_j))=180°-(146°+136°+76°+90°)=-268°$，$\theta_{p_5}=268°$



⑥ 根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

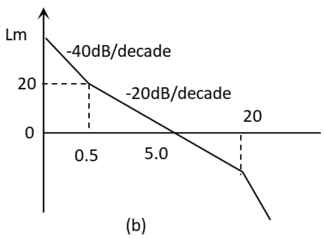
$D(s)=s^5+10.5s^4+43.5s^3+79.5s^2+45.5s+K^*=0$

将 $s=j\omega$ 代入，并使 $\mathrm{Re}[D(j\omega)]=0,\mathrm{Im}[D(j\omega)]=0$

要使系统稳定，闭环极点必须在左半平面。

要使系统不出现超调现象，必须满足根轨迹在实轴，没有复数极点。

稳态误差系数



(b)

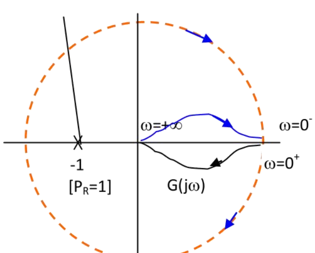
(a) m=2, N= -1, $Z_R=P_R-N=2$, 不稳定；

(b) m=3, N= -2, $Z_R=3$, 不稳定；

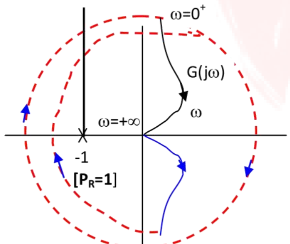
(c) m=2, N=0, $Z_R=0$, 稳定；

(d) m=2, N= -1, $Z_R=2$, 不稳定。

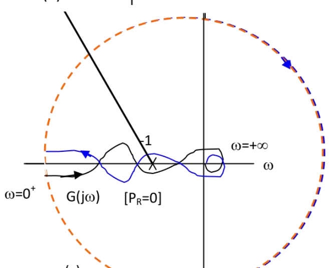
$-40(\lg0.5-\lg\omega_y)=20-0\Rightarrow\omega_y=1.58\qquad K_2=\omega^2{}_y=1.58^2=2.5$



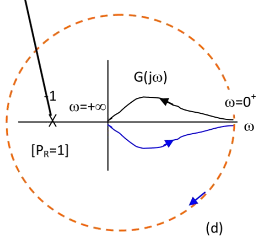
(a)



(b)



(c)



(d)

注意传递函数最高项系数要化成 1。非线性/线性（无常数项，微分方程，最高次为 1）、时变/时不变（微分差分方程系数为常数）、动态/静态（无求导项）

(1) $c(t)=5+r^2(t)+t\dfrac{d^2r(t)}{dt^2}$；

(2) $\dfrac{d^3c(t)}{dt^3}+3\dfrac{d^2c(t)}{dt^2}+6\dfrac{dc(t)}{dt}+8c(t)=r(t)$；

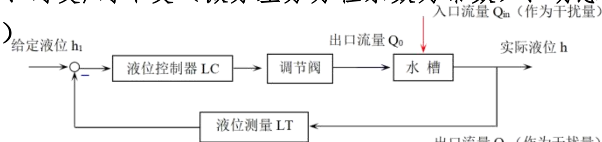
(3) $t\dfrac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)+3\dfrac{dr(t)}{dt}$；

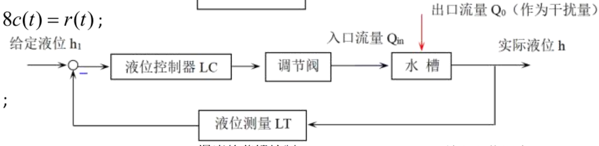
(4) $c(t)=r(t)\cos\omega t+5$；

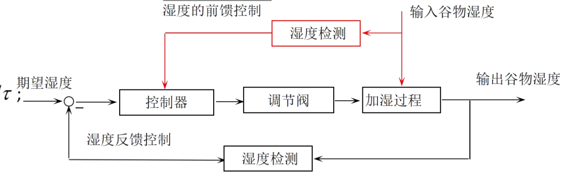
(5) $c(t)=3r(t)+6\dfrac{dr(t)}{dt}+5\int_{-\infty}^{t}r(\tau)d\tau$；

(6) $c(t)=r^2(t)$；

(7) $c(t)=\begin{cases}0, & t<6\\ r(t), & t\geq6\end{cases}$







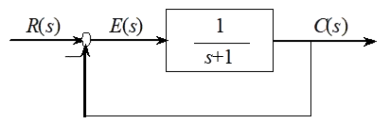
（1）非线性、时变、动态系统；（2）线性、时不变（定常）、动态系统；

（3）线性、时变、动态系统；（4）非线性、时变、静态系统；

（5）线性、时不变、动态系统；（6）非线性、时不变、静态系统；

（7）线性、时变、静态系统。

试确定在输入信号 $r(t)=\sin(t+30°)-\cos(2t-45°)$ 作用下，系统的稳态误差 $e_{ss}(t)$。



系统的闭环传递函数： $\Phi(s)=\dfrac{1}{s+2}$

系统的频率特性为： $\Phi(j\omega)=\dfrac{1}{2+j\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}e^{-jarctg\frac{\omega}{2}}$

系统在输入信号 r(t) 的作用下，系统的稳态输出为：

$c_{ss}(t)=\dfrac{1}{\sqrt5}\sin\left(t+30°-arctg\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2\sqrt2}\cos(2t-45°-arctg1)$

$=\dfrac{1}{\sqrt5}\sin\left(t+30°-arctg\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2\sqrt2}\sin(2t)$

系统的稳态误差：

$e_{ss}(t)=r(t)-c_{ss}(t)$

$=\sin(t+30°)-\cos(2t-45°)-\dfrac{1}{\sqrt5}\sin\left(t+30°-arctg\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2\sqrt2}\sin(2t)$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\sin(t+30°+arctg\dfrac{1}{3})-\dfrac{\sqrt{10}}{4}\cos(2t-45°+arctg\dfrac{1}{3})$

$=0.632\sin(t+48.435)-0.79\cos(2t-26.565)$

系统的闭环传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}$

系统的幅频特性为：$A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\xi^2\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$ 相频特性：$\varphi(\omega)=-arctg\dfrac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$

$G(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(1+j\omega T)(1+j\omega)}$

$=\dfrac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}\sqrt{1+\omega^2}}\angle(-90°-arctg\omega T-arctg\omega)$

$=A(\omega)\angle\varphi(\omega)$

所以 $\varphi(\omega_x)=-90°-arctg\omega_xT-arctg\omega_x=-(2k+1)\times180°$

当 ω 增大时，A(ω)减小，而在频率 ω 为最小的 ω_{xm} 时，开环幅相曲线第一次穿过负实轴

因此：

$\varphi(\omega_{xm})=-90°-arctg\omega_{xm}T-arctg\omega_{xm}=-180°\qquad \dfrac{\omega_{xm}T+\omega_{xm}}{1-\omega_{xm}{}^2T}=tg90°=\infty$

$\omega_{xm}=\sqrt{\dfrac{1}{T}}$

此时 $A(\omega_{xm})$达到最大，为使 l=0，$A(\omega_{xm})<1$，即

(b) $G(s)=\dfrac{K(0.2s+1)}{s^2(0.02s+1)}\quad A(\omega_{xm})=\dfrac{K}{\omega_{xm}\sqrt{1+(\omega_{xm}T)^2}\sqrt{1+\omega_{xm}{}^2}}=\dfrac{KT}{T+1}<1$

当 K =1时，由其幅频特性渐进线可得：其幅频关系为

$$20\lg|G(jw)|=\begin{cases}20\lg|\dfrac{1}{\omega^2}| & \omega<5\\ 20\lg|\dfrac{0.2}{\omega}| & 5\leq\omega<50\\ 20\lg|\dfrac{10}{\omega^2}| & 50\leq\omega\end{cases}$$

当$\omega=\omega_c$时，应有$20\lg|G(jw_c)|=0$

$\therefore 20\lg|\dfrac{1}{\omega^2}|=0$,既有$\omega_c$=1

此时相角为:$\arg[G(jw_c)]=-180°+\arctan(0.2)-\arctan(0.02)=-169.8°$