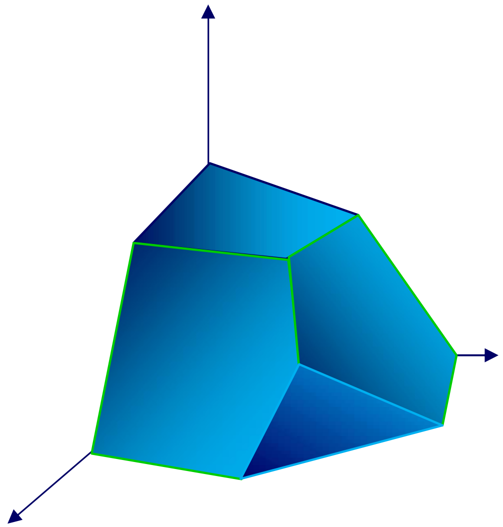
第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划的图解法
- 单纯形法的原理
- 单纯形法的计算步骤
- 应用举例



线性规划问题

例1.　某工厂在计划期内要安排甲、乙两种产品的生产，已知生产单位产品所需的电力消耗、对污染指数的影响、相关限制以及单位产品利润如下表：

	甲	乙	相关限制
耗　电（千瓦）	1	1	6
污染指数	-1	2	8
利润（万元）	3	1	

根据工艺要求，如果乙产品的产量必须是甲产品的2倍以上，问工厂应分别生产多少单位甲、乙产品才能使工厂获利最多？

例1的数学表示

- 设变量x_1、x_2分别代表甲、乙两种产品的数量，z代表生产两种产品的利润总和。

  - 目标函数： max　　$z=3x_1+x_2$
  - 约束条件： $x_1+x_2\le 6$

    $-x_1+2x_2\le 8$

    $2x_1-x_2\le 0$

    $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$

一般情况下的数学模型

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=, \ge) b_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge (\le) 0, \ free$$

简写形式

$$\max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge) b_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$x_j \ge (\le) 0, free \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

矩阵形式

$$\max(\min) z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

$$s.t. \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le (=, \ge) \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \ge (\le) 0, \ free$$

其中：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$$

向量形式

$$\max(\min) z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

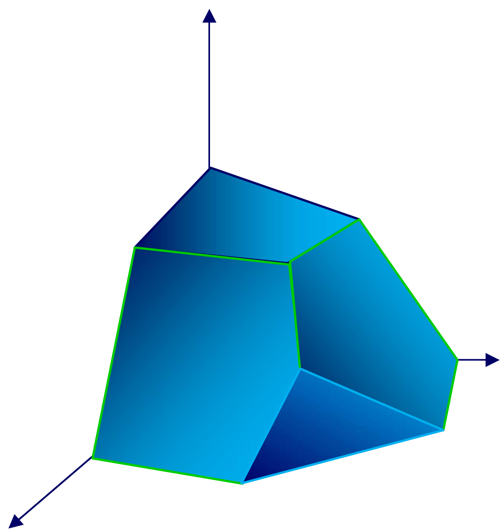
$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j \le (=, \ge) \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \ge (\le) 0,\ free$$

其中： $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{p}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划的图解法
- 单纯形法的原理
- 单纯形法的计算步骤
- 应用举例



线性规划的图解法

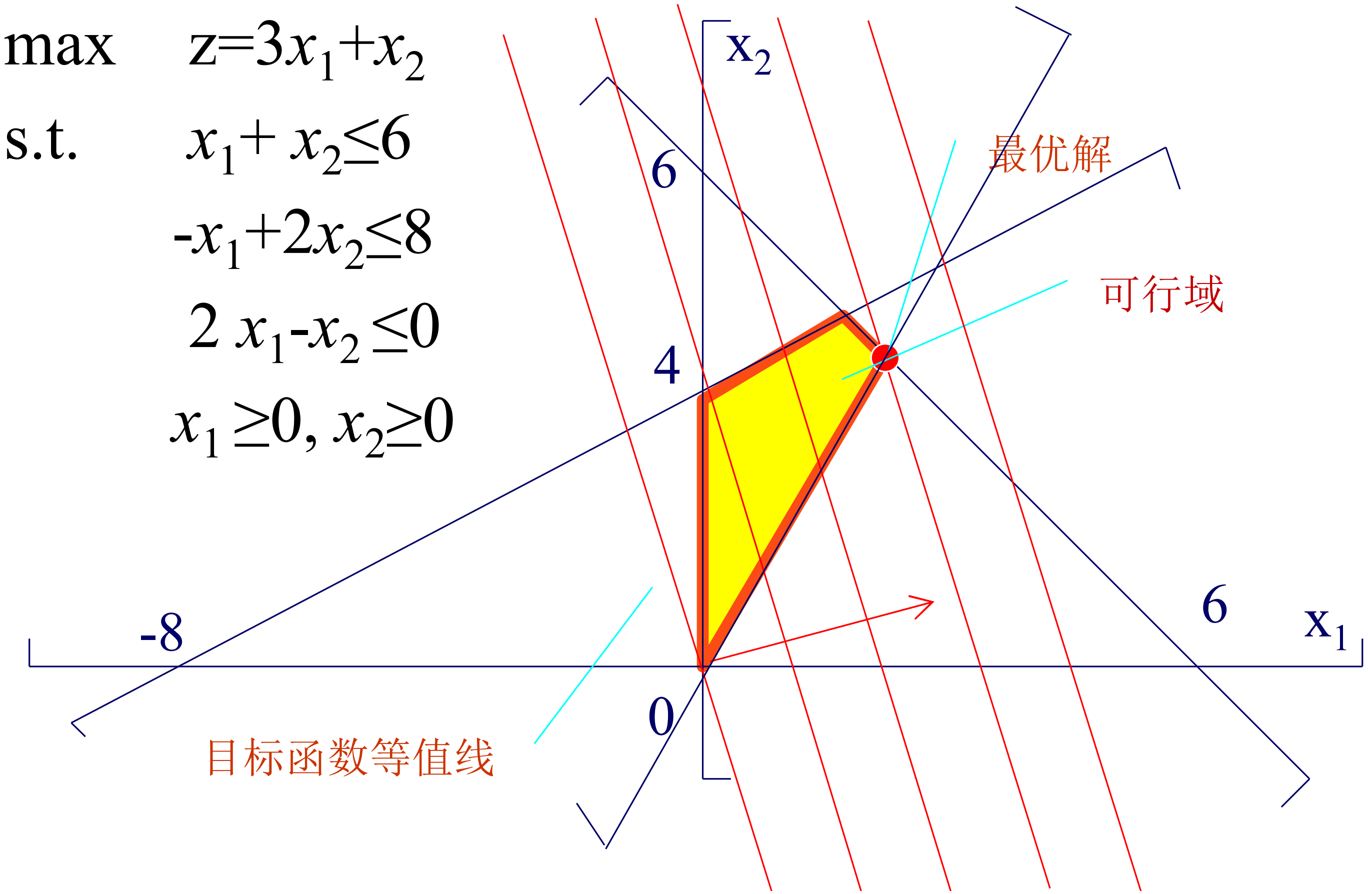
max $\quad z=3x_1+x_2$

s.t. $\quad x_1+x_2 \leq 6$

$-x_1+2x_2 \leq 8$

$2x_1-x_2 \leq 0$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



解的分析

- 有几种最优解的可能？
- 这些最优解的共同特点是什么？

1、单个最优解

$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

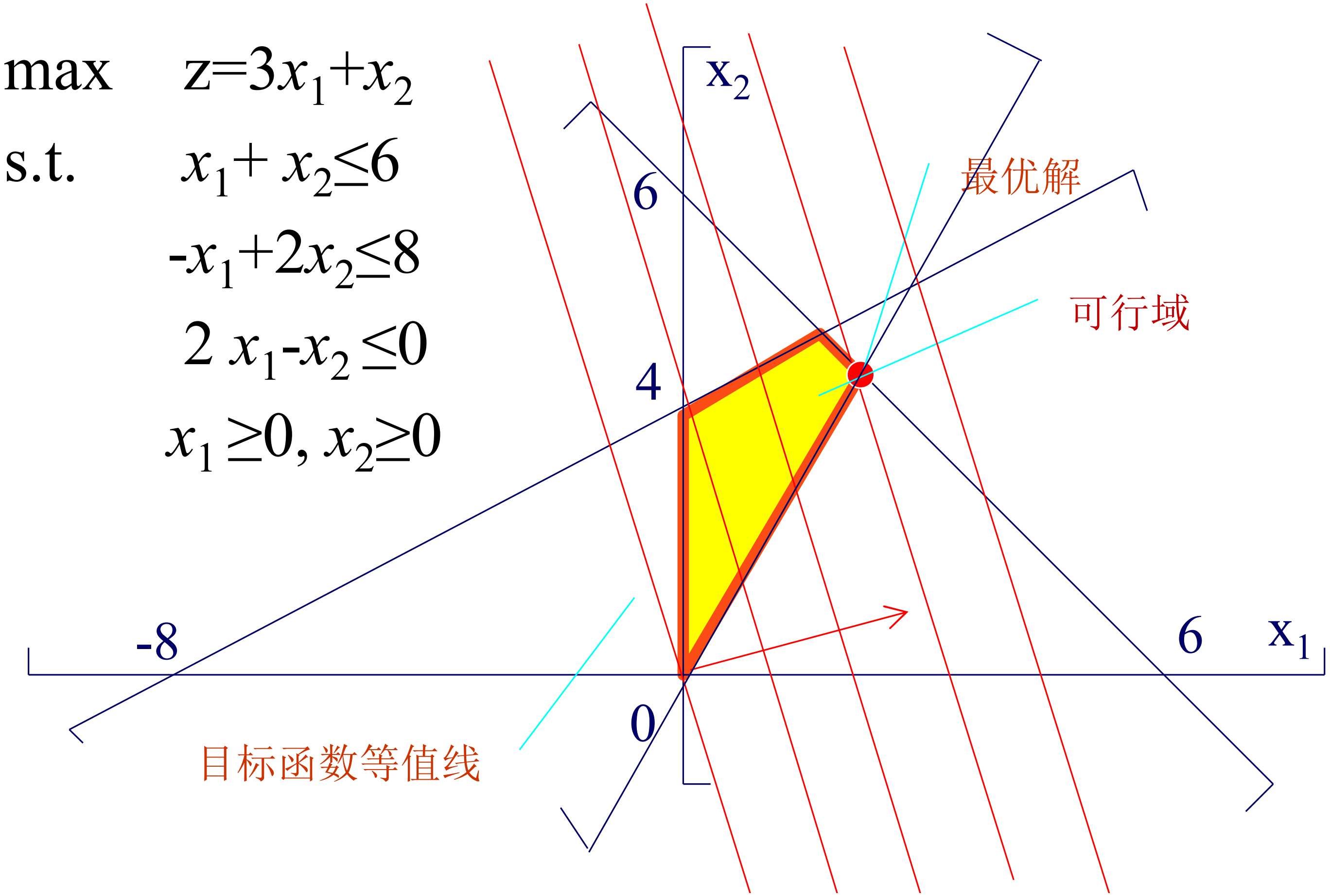
s.t.

$$x_1+x_2\le 6$$

$$-x_1+2x_2\le 8$$

$$2x_1-x_2\le 0$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$



2、无穷多个最优解

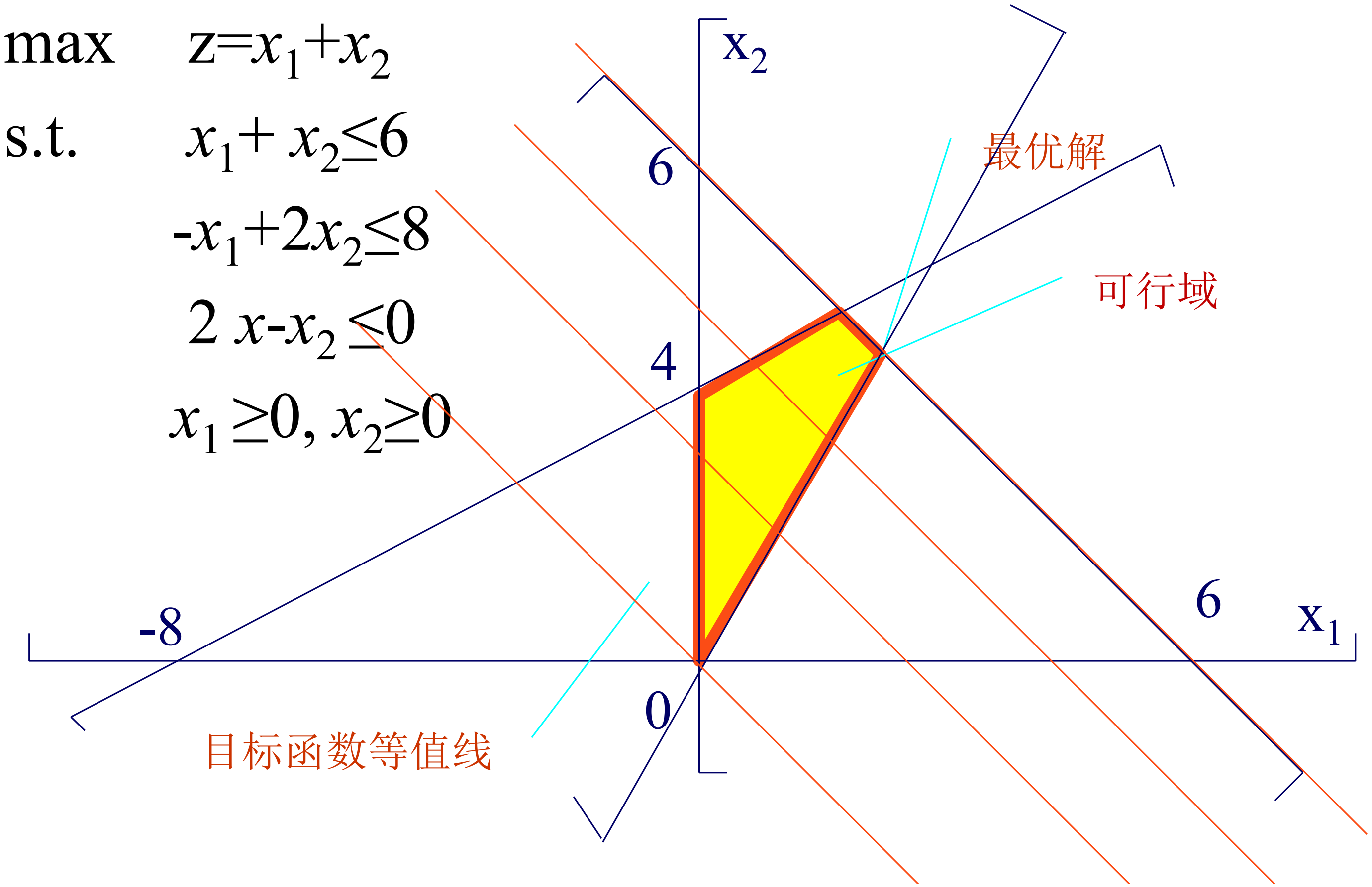
max $\quad z=x_1+x_2$

s.t. $\quad x_1+x_2\le 6$

$-x_1+2x_2\le 8$

$2x-x_2\le 0$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$



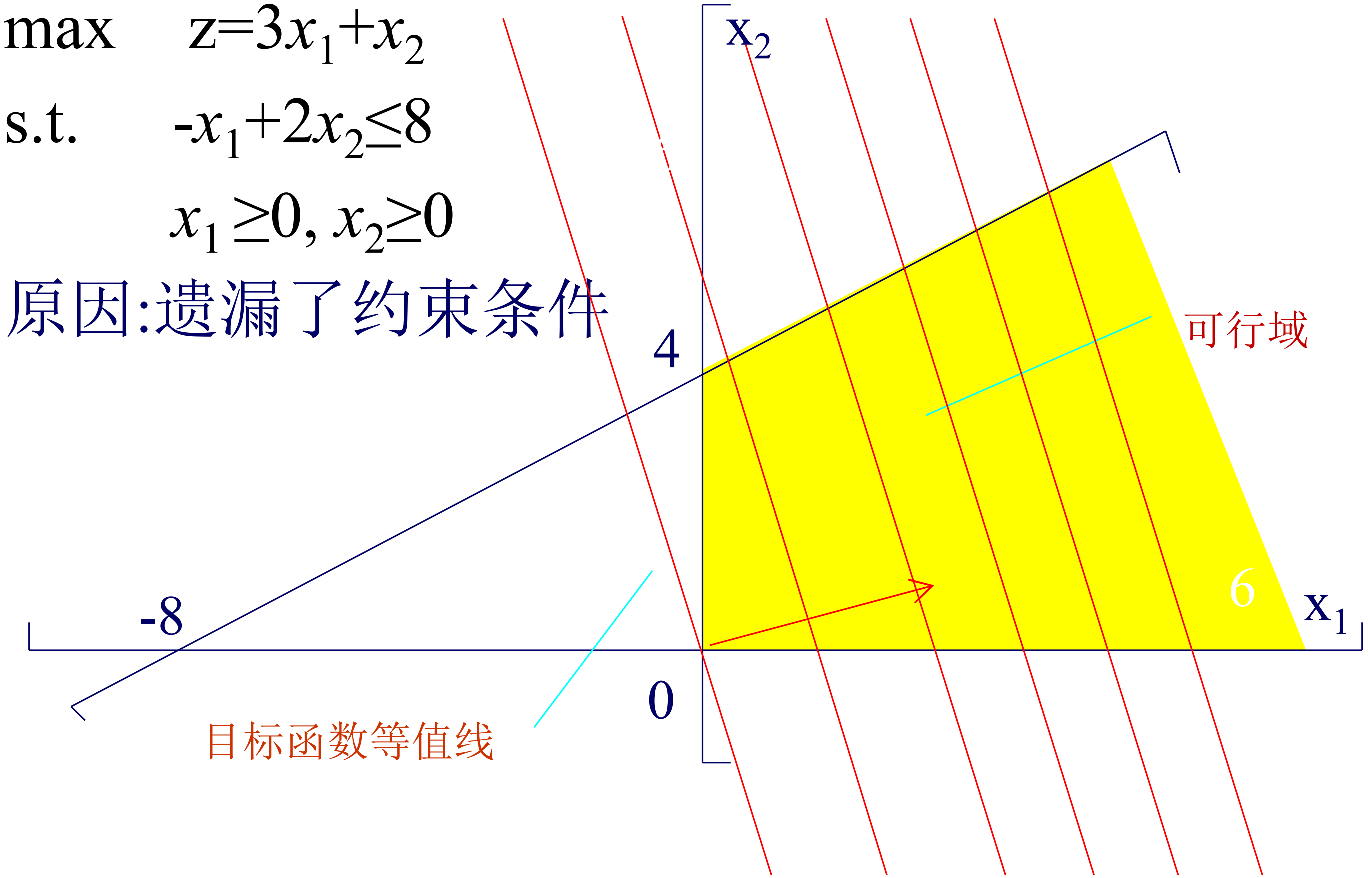
3、无界解

max $z=3x_1+x_2$

s.t. $-x_1+2x_2\leq 8$

$x_1 \geq 0,\ x_2\geq 0$

原因:遗漏了约束条件



4、无可行解

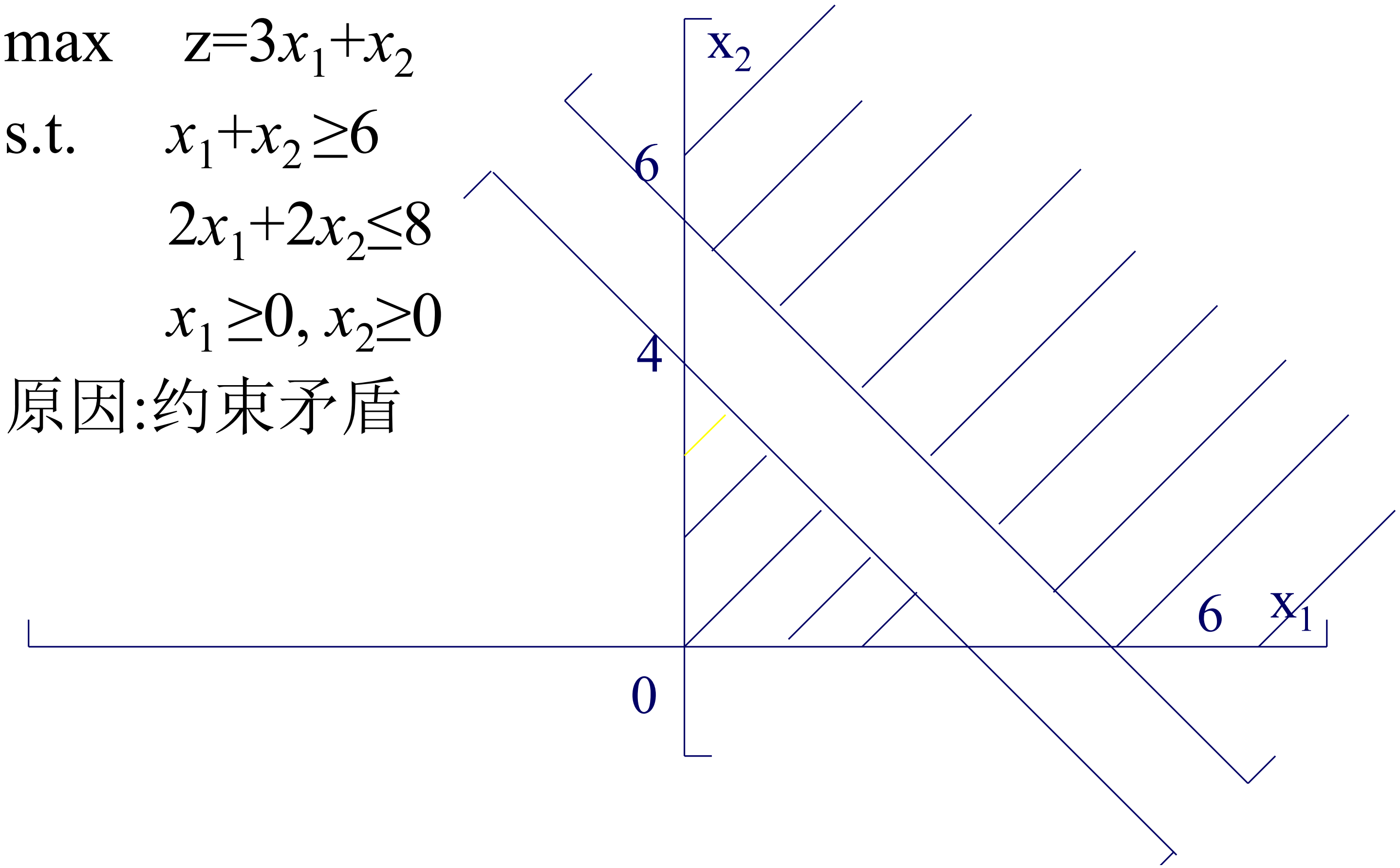
max $\quad z=3x_1+x_2$

s.t. $\quad x_1+x_2 \geq 6$

$\quad 2x_1+2x_2 \leq 8$

$\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

原因:约束矛盾

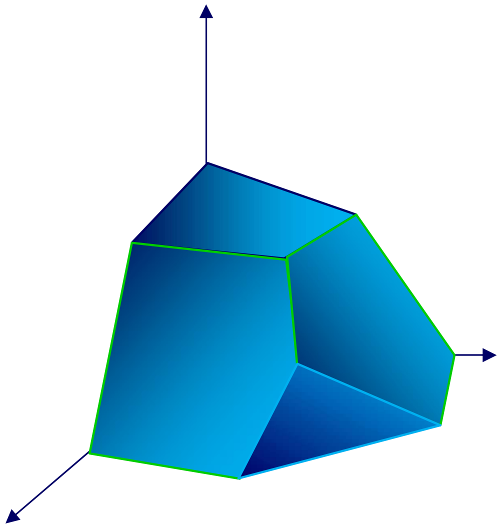


图解法启示

1。解的情况：唯一最优解、无穷最优解、无界解、无可行解
2。可行域很可能是一个凸集
3。最优解若存在，很可能就是可行域的顶点
4。必须寻找一种代数方法，来解决高维的情况。

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划的图解法
- 单纯形法的原理
- 单纯形法的计算步骤
- 应用举例



线性规划问题的标准形式

线性规划模型的结构
目标函数：max，min
约束条件：≥,=,≤
变量符号：：≥0, unr, ≤0

$$\begin{aligned} &\max(\min) && z = \boldsymbol{cx} \\ &s.t. && \boldsymbol{Ax} \geq (=, \leq)\boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geq (\leq)0,\ free \end{aligned}$$

线性规划的标准形式
目标函数：max
约束条件　：=
变量符号　：≥0

$$\begin{aligned} &\max && z = \boldsymbol{cx} \\ &s.t. && \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ & && \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

标准形式的转化

变量条件的转化

$x_j \geq 0$	不变
$x_j \leq 0$	取 $x_j^{'} = -x_j$
x_j 无约束	取 $x_j^{'} \geq 0 \quad x_j^{''} \geq 0$ $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$

约束条件的转化

约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{si} = b_i$$

$x_{sj} \ge 0$ 称为松弛变量

目标函数的转化

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

不变

$$\min z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

取$z' = -z$

加入松弛变量x_s时

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0x_{si}$$

非齐次线性方程组解

标准形式：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \boldsymbol{cx} \\ s.t. \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

令： $\overline{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$

$rank(\boldsymbol{A}) = rank(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$ ： 唯一解

$rank(\boldsymbol{A}) = rank(\overline{\boldsymbol{A}}) < n$ ： 无穷多个解

$rank(\boldsymbol{A}) < rank(\overline{\boldsymbol{A}})$ ： 无解

一般情况

$$rank(\boldsymbol{A}) = rank(\overline{\boldsymbol{A}}) = m < n$$

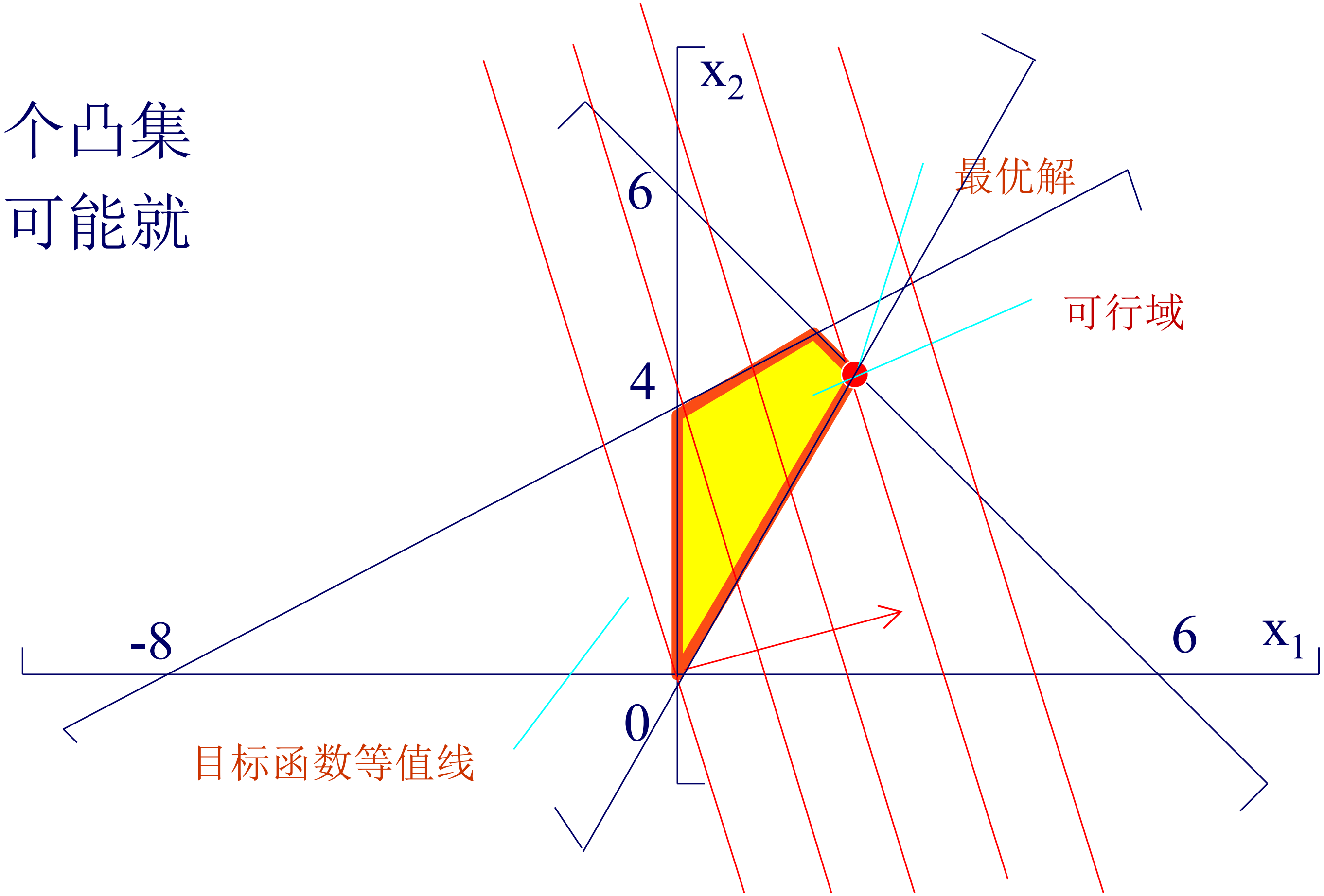
1、没有冗余约束

2、解有无穷多个

图解法启示

1。可行域很可能是一个凸集

2。最优解若存在，很可能就是可行域的顶点



可行域的定义

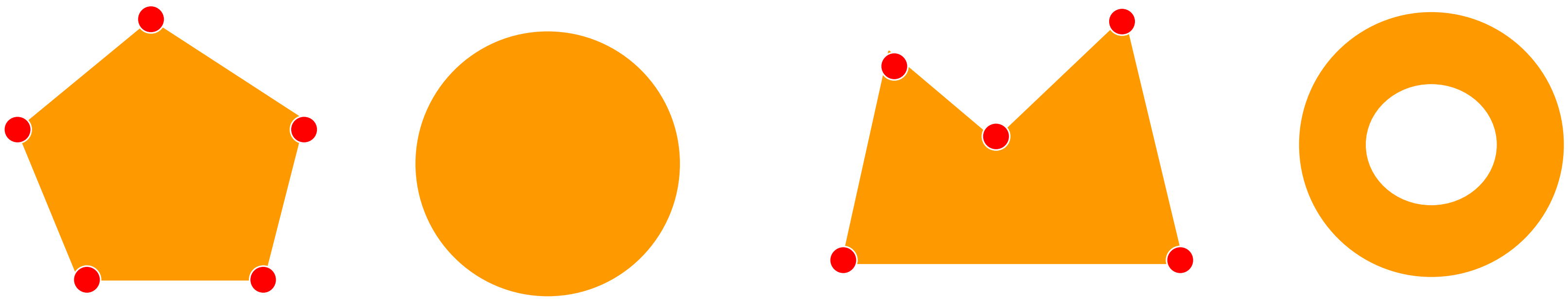
- 可行解：满足两类约束条件的解$\boldsymbol{x}$
- 可行域：全部可行解的集合

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j x_j = \boldsymbol{b}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

凸集的定义

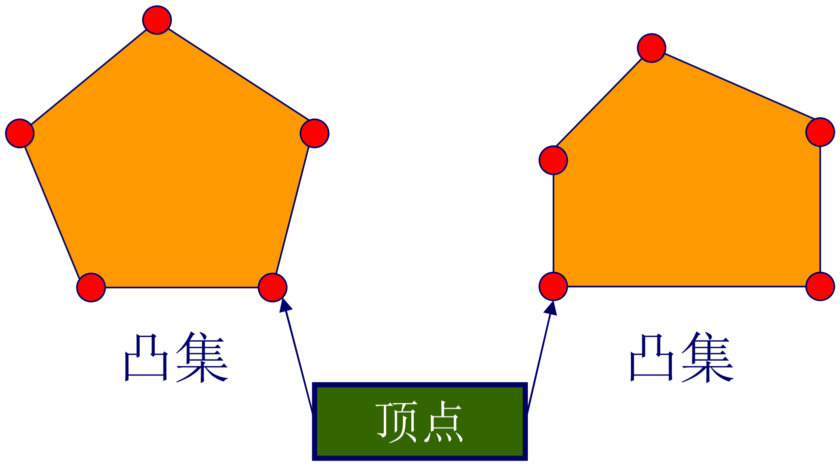
- 凸集：$a\boldsymbol{x}_1+(1-a)\,\boldsymbol{x}_2\in C$，$0< a <1$　　(*凸组合*)



问题：哪些集合是凸集？

顶点的定义

- 顶点：不存在 $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}_1+(1-a)\,\boldsymbol{x}_2,\ 0< a <1,\ \boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2 \in C$



线性规划最优解性质

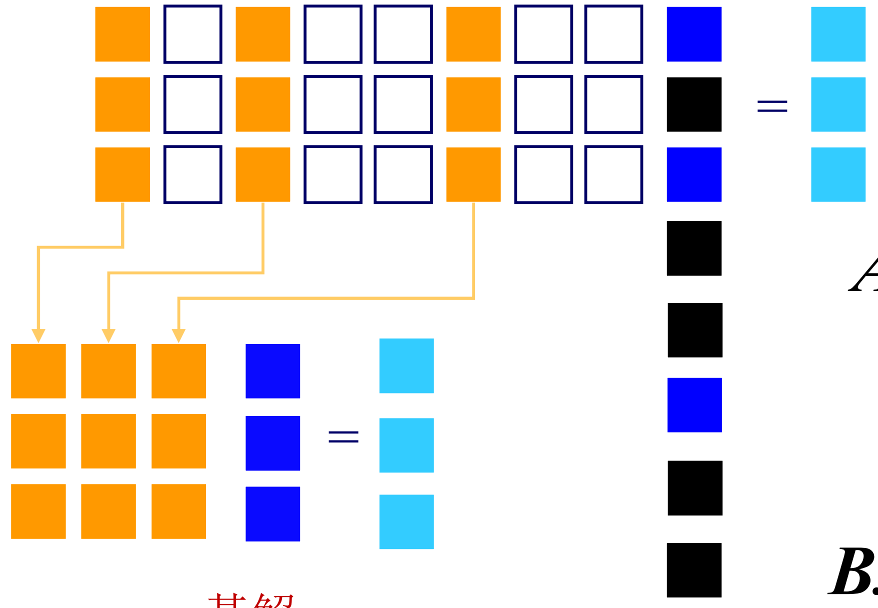
定理1 若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。

定理2 线性规划的可行域顶点与基可行解一一对应。

定理3 若线性规划问题有最优解，一定存在一个最优解是基可行解。

约束交点的代数概念：基解

● 线性规划的<u>基</u>、<u>基变量</u>、<u>非基变量</u>



$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j = b$$

非基变量为0

$$Bx_B = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \bar{p}_i = b$$

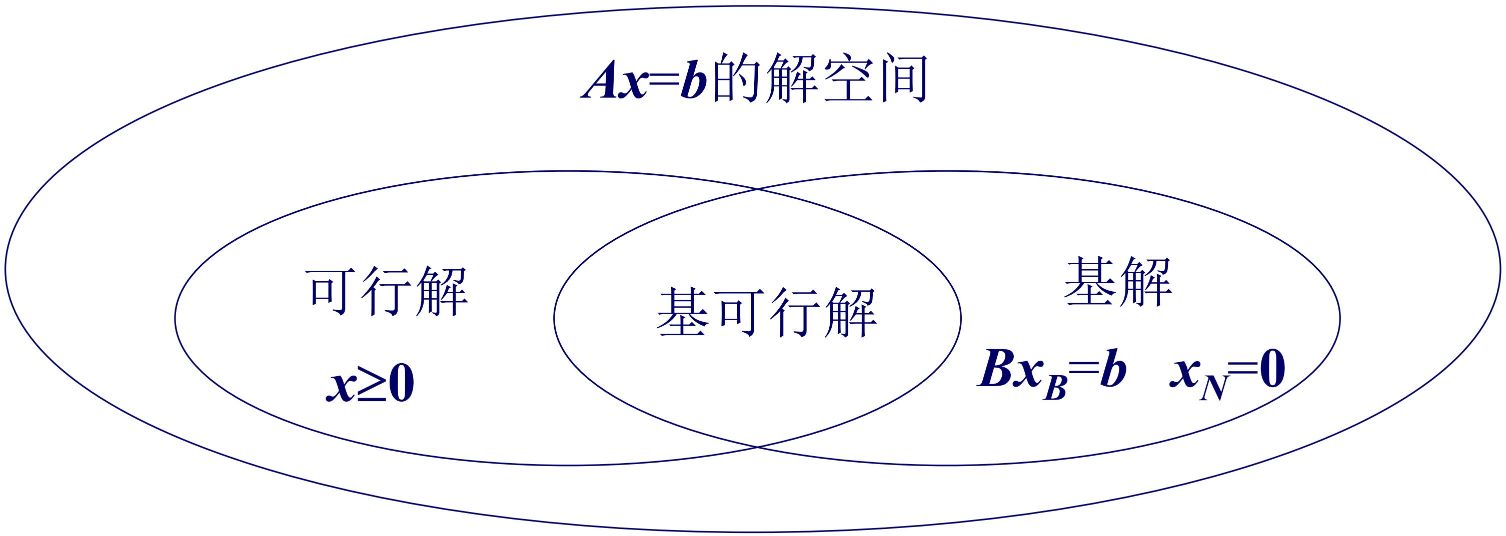
顶点的代数概念：基可行解

- 基：系数矩阵$\boldsymbol{A}$中$m\times m$的满秩子矩阵$\boldsymbol{B}$
- 基向量：基$\boldsymbol{B}$的每一个列向量，记作 $\overline{\boldsymbol{p}}_i$
- 基变量$\boldsymbol{x_B}$：基向量$\overline{\boldsymbol{p}}_i$对应的变量$\overline{x}_i$
- 非基变量$\boldsymbol{x_N}$：基变量以外的变量
- 基解：非基变量取零，基变量取值对应于由基构成的线性方程的解。有：

$$[\boldsymbol{x}_B^T, \boldsymbol{x}_N^T]^T = [\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_m, 0, \cdots, 0]^T$$

- 基可行解：满足非负条件的基解($\boldsymbol{x_B}\geq 0$)
- 可行基：对应于基可行解的基$\boldsymbol{B}$ 。

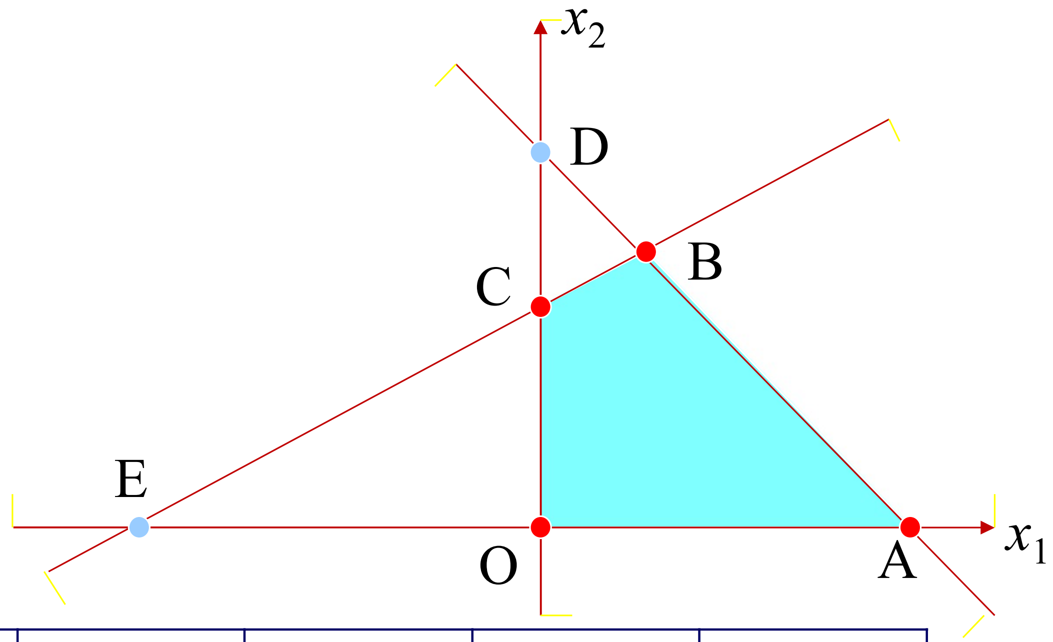
基可行解



基解、基可行解举例

$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1+x_2+x_3 = 6 \\ & -x_1+2x_2+x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



投影点	O	A	B	C	D	E
x_1	0	6	4/3	0	0	-8
x_2	0	0	14/3	4	6	0
x_3	6	0	0	2	0	14
x_4	8	14	0	0	-4	0

基解、基可行解判断

	x_1	x_2	x_3	x_4	z	基可行解
O	0	0	6	8	0	Y
A	6	0	0	14	18	Y
B	4/3	14/3	0	0	4	Y
C	0	4	2	0	2	Y
D	0	6	0	-4	/	N
E	-8	0	14	0	/	N

几何概念与代数概念

几何概念		代数概念
约束直线/超平面	⟺	满足一个等式约束的解
约束半平面	⟺	满足一个不等式约束的解
约束半平面的交集：*凸多边形*	⟺	满足一组不等式约束的解
约束超平面的交点 *（至少含n-m个象限分割超平面）*	⟺	基解
可行域的顶点	⟺	基可行解
目标函数等值线	⟺	目标函数值等于一个常数的解

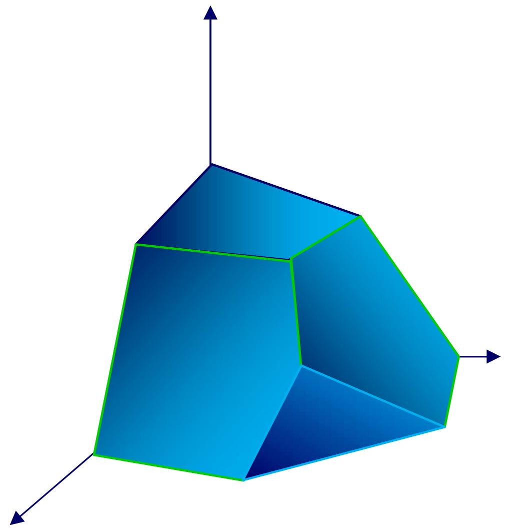
单纯形法基本思路

- 基本思路：基可行解的范围内搜索

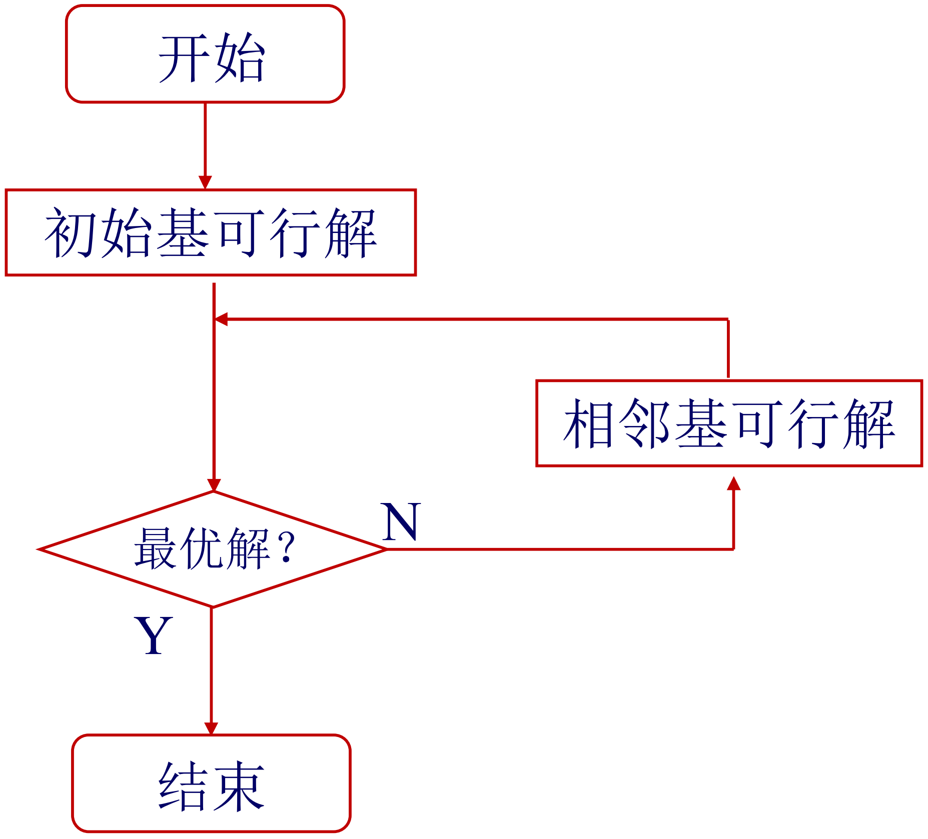
1. 确定初始解
2. 寻找目标函数值更优的相邻基可行解
3. 迭代后检验解的最优性

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划的图解法
- 单纯形法的原理
- 单纯形法的计算步骤
- 应用举例



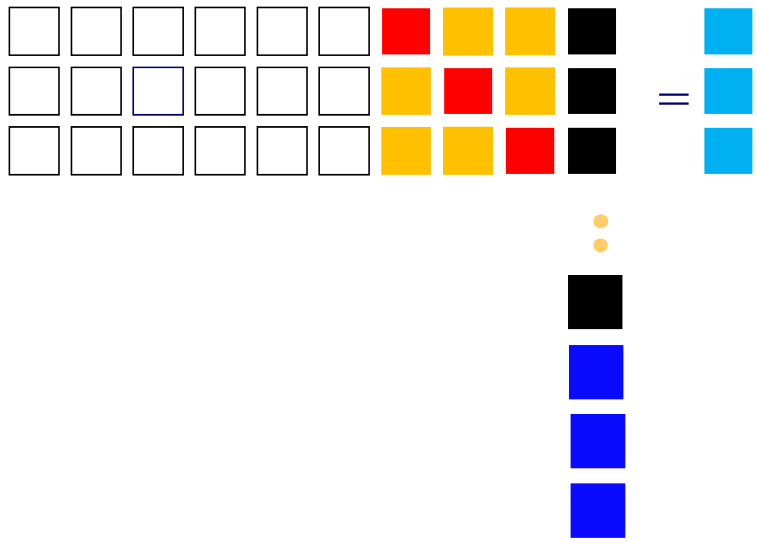
单纯形法流程



初始基可行解

➢ 含单位矩阵的初始基，有

$$(\overline{\boldsymbol{p}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{p}}_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$



方法：通过增加人工变量或松弛变量，可以使 $\boldsymbol{A}_a$=[$\boldsymbol{A}$ $\mathbf{I}$]

人工变量法

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{si} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{ai} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{sj} + x_{ai} = b_i$$

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M x_{ai}$$

M如何选取？

举例

$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_1+x_2+x_3 = 6 \\
& -x_1+2x_2+x_4 = 8 \\
& 2x_1-x_2+x_5 = 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

初始单纯形表

c_j			3	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6	1	1	1	0	0
0	x_4	8	-1	2	0	1	0
0	x_5	0	2	-1	0	0	1
σ_j			3	1	0	0	0

$\boldsymbol{x}^{(0)}=[0, 0, 6, 8, 0]^{\mathrm{T}}$

相邻基可行解

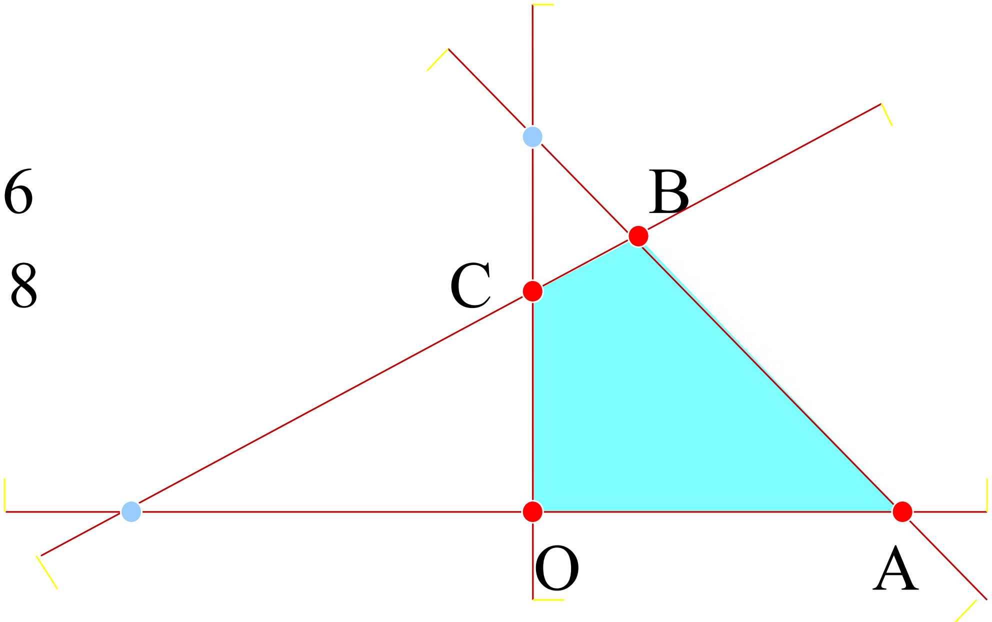
$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2 \le 6$$

$$-x_1+2x_2 \le 8$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
O	0	0	6	8
A	6	0	0	14
B	4/3	14/3	0	0
C	0	4	2	0



基矩阵为单位阵的特点

➢ 如果基矩阵是一个单位矩阵，有

$$(\bar{\boldsymbol{p}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{p}}_m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{\boldsymbol{p}}_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{p}_j = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \bar{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_i = b_i$$

第i行的基变量 $\bar{x}_i$ 与第i行约束一一对应

相邻基可行解的转换

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=[\bar{x}_1^0,\cdots,\bar{x}_m^0,0\cdots 0]^T \geq 0$$ 初始基可行解

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(0)}\boldsymbol{p}_j=\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i^{(0)}\bar{\boldsymbol{p}}_i=\boldsymbol{b} \quad + \quad \boldsymbol{p}_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i^{(0)}-\theta a_{ij})\bar{\boldsymbol{p}}_i+\theta\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=[\bar{x}_1^{(0)}-\theta a_{1j},\cdots,\bar{x}_m^{(0)}-\theta a_{mj},0\cdots,\theta,\cdots,0]^T$$ 转换解

如何保证$\boldsymbol{x}^{(1)}$也是基可行解？

基可行解的条件

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=[\overline{x}_1^{(0)}-\theta a_{1j},\cdots,\overline{x}_m^{(0)}-\theta a_{mj},0\cdots,\theta,\cdots,0]^T$$

1、可行解条件：

$$x_i^{(1)}=\overline{x}_i^{(0)}-\theta a_{ij}\ge 0\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\theta=x_j^{(1)}>0$$

=0是否可以？

2、基解条件：

$$\min_i\{\overline{x}_i^{(0)}-\theta a_{ij}\}=0$$

$$\theta=\min_i\left\{\frac{\overline{x}_i^{(0)}}{a_{ij}}\middle|a_{ij}>0\right\}$$

所有a_{ij}≤0会如何?

更优解的判别

$$z^{(1)} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{c}[\overline{x}_1^{(0)} - \theta a_{1j}, \cdots, \overline{x}_m^{(0)} - \theta a_{mj}, 0 \cdots, \theta, \cdots, 0]^T$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i (\overline{x}_i^{(0)} - \theta a_{ij}) + c_j \theta$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \overline{x}_i^{(0)} - \theta \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} + c_j \theta$$

$$= z^{(0)} + \theta \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right) = z^{(0)} + \theta \sigma_j$$

检验数： $\sigma_j \triangleq c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ $\begin{cases} \sigma_j > 0\text{: z增大} \\ \sigma_j < 0\text{: z减小} \end{cases}$

入基、出基变量的选取

1。确定入基变量x_k

$$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$$

2。确定出基变量x_l

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{\bar{x}_i^{(0)}}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

更新单纯形表

			3	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6	0	1.5	1	0	-0.5
0	x_4	8	0	1.5	0	1	0.5
3	x_1	0	1	-0.5	0	0	0.5
σ_j			0	2.5	0	0	-1.5

单纯形表迭代

第l行： $a_{lj}' = a_{lj} / a_{lk}$ $\quad b_l' = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$

其他行： $a_{ij}' = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}$ $\quad i \neq l$

$b_i' = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}$ $\quad i \neq l$

检验数迭代: $\sigma_l' = -\dfrac{1}{a_{lk}} \sigma_k$

$\sigma_j' = \sigma_j - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \sigma_k$ $\quad j \neq k$

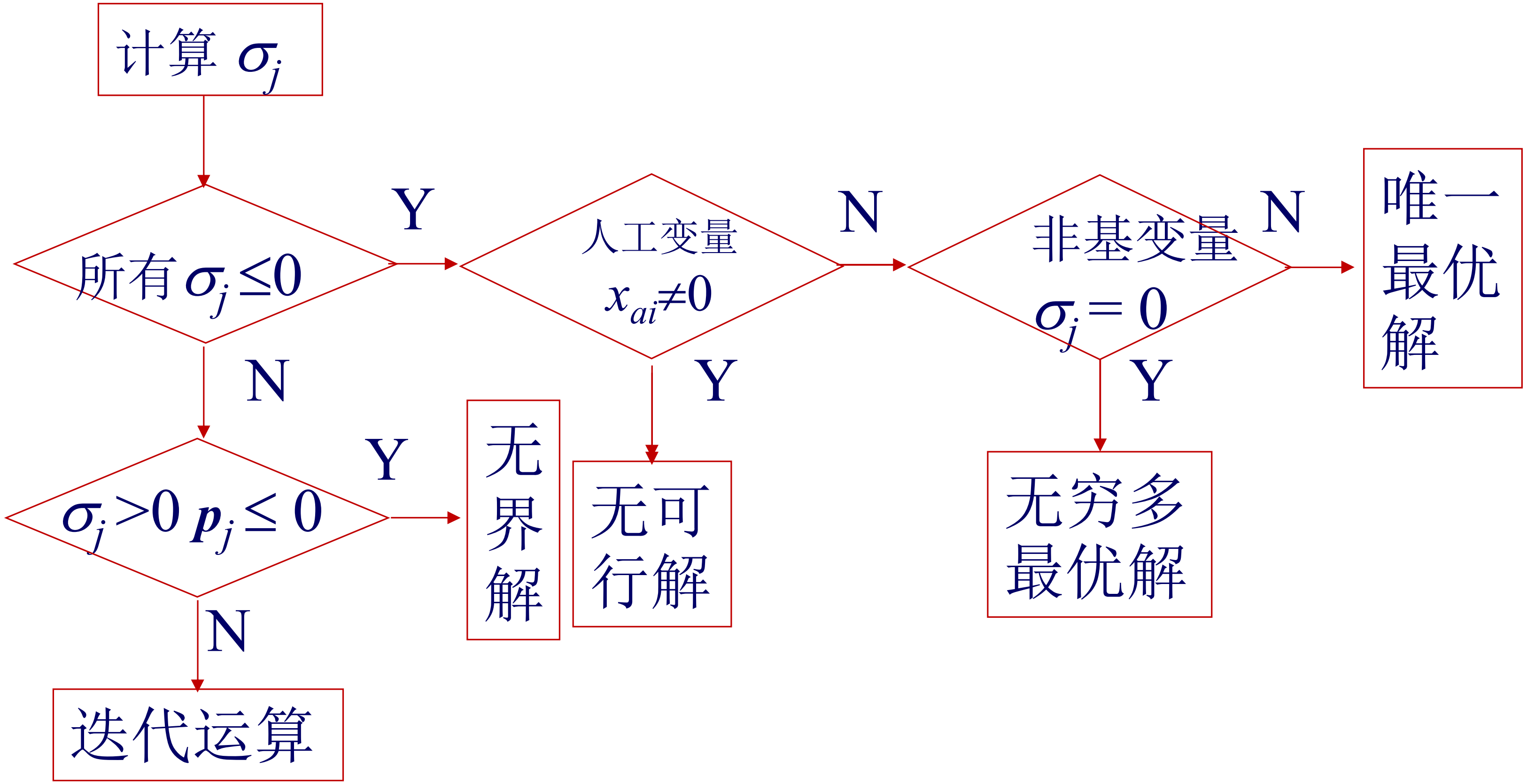
最终单纯形表

			3	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	4	0	1	2/3	0	-1/3
0	x_4	2	0	0	-1	1	1
3	x_1	2	1	0	1/3	0	1/3
σ_j			0	0	-5/3	0	-2/3

解的判别

- 若存在$\sigma_j > 0$，且$\boldsymbol{p}_j \leq 0$ 无界解
- 若存在$\sigma_j > 0$，存在$a_{ij}>0$ 继续迭代
- 所有$\sigma_j \leq 0$，但有人工变量不为零 无可行解
- 所有$\sigma_j \leq 0$，若存在非基变量的$\sigma_j = 0$ 无穷个最优解
- 所有$\sigma_j \leq 0$，且没有非基变量的$\sigma_j = 0$ 唯一最优解

最优性检验流程


计算 σ_j
所有 $\sigma_j \le 0$
Y
人工变量
$x_{ai} \neq 0$
N
非基变量
$\sigma_j = 0$
N
唯一最优解
Y
无可行解
Y
无穷多最优解
N
$\sigma_j > 0$ $\boldsymbol{p}_j \le 0$
Y
无界解
N
迭代运算

退化与循环

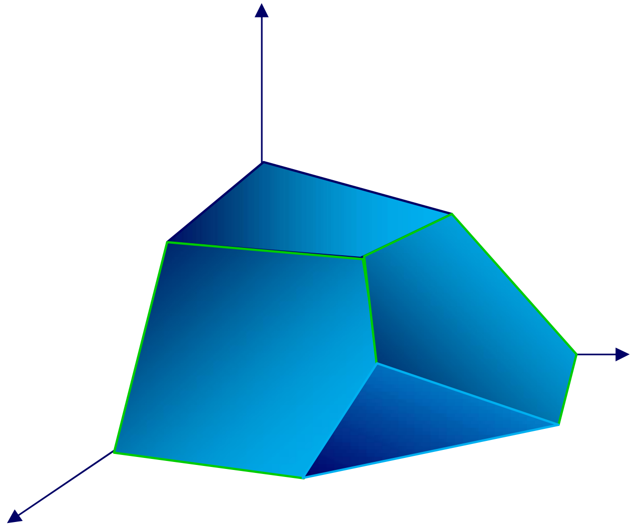
退化：基变量出现零的现象

影响：可能出现循环迭代

对策？

第二章 线性规划

- 线性规划问题及数学模型
- 线性规划的图解法
- 单纯形法的原理
- 单纯形法的计算步骤
- 应用举例



应用举例

- 套裁问题：
- 配料问题：
- 产品计划问题：
- 投资问题：
- 运输问题：

投资问题

例：某投资者有50万元可以用于长期投资，可供选择的投资项目包括购买国库卷、购买公司债卷、投资房地产、购买股票、银行短期或长期储蓄，各种投资方式的投资期限，年收益率，风险系数，增长潜力的具体参数见下表。若投资者希望投资组合的平均年限不超过5年，平均的期望收益率不低于13％，平均风险系数不超过4，收益的平均增长潜力不低于10％。问在满足上述要求的前提下，投资者该如何选择投资组合使平均年收益率最高？

投资问题参数表

序号	投资方式	投资年限（年）	年收益率（%）	风险系数	增长潜力（%）
1	国库卷	3	11	1	0
2	公司债卷	10	15	3	15
3	房地产	6	25	8	30
4	股票	2	20	6	20
5	短期储蓄	1	10	1	5
6	长期储蓄	5	12	2	10
期望指标		5	13	4	10

投资问题模型

设x_j为第j种投资方式在总投资方式中所占比例

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=11x_1+15x_2+25x_3+20x_4+10x_5+12x_6 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1+10x_2+6x_3+2x_4+x_5+5x_6 \le 5 \\
& 11x_1+15x_2+25x_3+20x_4+10x_5+12x_6 \ge 13 \\
& x_1+3x_2+8x_3+6x_4+x_5+2x_6 \le 4 \\
& 15x_2+30x_3+20x_4+5x_5+10x_6 \ge 10 \\
& x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

套裁问题

例：某车间接到制作100套钢架的订单，每套钢架要用长为2.9m，2.1m，1.5m的圆钢各一根，已知原料长7.4m，问应如何下料，可使所用原料最省。

分析

先选择一些可行的方案：

方案	1	2	3	4	5
2.9 2.1 1.5	1 0 3	2 0 1	0 2 2	1 2 0	0 1 3
合计 料头	7.4 0	7.3 0.1	7.2 0.2	7.1 0.3	6.6 0.8

套裁问题模型

设x_j为按方案j下料的原料根数

$$\min \quad z=0x_1+0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+2x_2+x_4=100$$

$$2x_3+2x_4+x_5=100$$

$$3x_1+x_2+2x_3+3x_5=100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geq 0$$

结果: $\boldsymbol{x}^*=[30, 10, 0, 50, 0]^{\mathrm{T}} \quad z^*=16\mathrm{m}$

配料问题

例:　某糖果厂用原料A,B,C加工三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中A、B、C含量，原料成本，各种原料的每月限制用量，三种牌号糖果的单位加工费及售价如下表所示。问该厂每月生产这三种牌号的糖果各多少kg，使该厂获利最大。试建立这个问题的线性规划数学模型。

配料问题

	甲	乙	丙	原料成本(元/kg)	每月限用量(kg)
A	**≥60％**	**≥30％**		**2.00**	**2000**
B				**1.50**	**2500**
C	**≤20％**	**≤50％**	**≤60％**	**1.00**	**1200**
加工费(元/kg)	**0.50**	**0.40**	**0.30**		
售价(元/kg)	**3.40**	**2.85**	**2.25**		

配料问题模型-目标函数

设x_{ij}代表生产第j种产品耗用第i种原料的kg数

$$\max z=3.40(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$ 销售收入

$$+2.85(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$+2.25(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$-0.50(x_{11}+x_{21}+x_{31})$$ 加工成本

$$-0.40(x_{12}+x_{22}+x_{32})$$

$$-0.30(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$-2.0(x_{11}+x_{12}+x_{13})$$ 原料 成本

$$-1.5\ (x_{21}+x_{22}+x_{23})$$

$$-1.0(x_{31}+x_{32}+x_{33})$$

配料问题模型-约束条件

$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 2000$ 月限用量

$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 2500$

$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 1200$

$x_{11} \geq 0.6(x_{11}+x_{21}+\mathrm{x}x_{31})$ 含量成份

$x_{31} \leq 0.2(x_{11}+x_{21}+x_{31})$

$x_{12} \geq 0.3(x_{12}+x_{22}+x_{32})$

$x_{13} \leq 0.5(x_{12}+x_{22}+x_{32})$

$x_{33} \leq 0.6(x_{13}+x_{23}+x_{33})$

$x_{ij} \geq 0$

最优跟踪控制问题

- 已知被控对象的模型为：

$$y(k)=\sum_{i=1}^{2}b_i y(k-i)+\sum_{j=0}^{1}b_i u(k-i)$$

- 控制约束：

$$|u(i)|\le M \qquad |u(i)-u(i-1)|\le N$$

- 求使下列目标最小的控制序列$u(k)$。

$$\min_{u(k),1\le k\le 10}\max|y(k)-r(k)|$$