离散信号的分析

主 讲 教 师 ： 齐 冬 莲

目录

离散傅立叶变换（DFT）

离散傅立叶变换（DFT)

1、从有限长序列的DTFT到DFT

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

- 非周期信号的频谱是频率的连续函数，无法用计算机计算
- 离散信号的DTFT，是Ω的连续周期函数。需要一种时域和频域上都是离散的傅里叶变换对，实现计算机的快速计算，即DFT

离散傅立叶变换（DFT）

能量有限、时间长度为L的有限长序列的DTFT为

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$k\Omega_0=k2\pi/N\to\Omega$$

频率离散化

$$X(k\frac{2\pi}{N})=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jk2\pi n/N}$$

频率采样点数N已知，2π/N为定数

$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-jk2\pi n/N}$$

N点DFT是有限长序列(L≤N)的DTFT的N点均匀取样值，也就是非周期序列频谱的样值

离散傅立叶变换（DFT)

2、从DFS到DFT

DFS:

$$X(k\Omega_0)=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

非周期序列的DTFT是信号的频谱密度，将1/N移到 x(n) 中，不会改变信号的性质和物理含义

$$X(k\Omega_0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\Omega_0 nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

离散傅立叶变换（DFT)

2、从DFS到DFT

- 设 $\tilde{x}_N(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_N(k\Omega_0)$ ，令

$$x(n) = R_N(n)\tilde{x}_N(n) = \begin{cases} \tilde{x}_N(n), & n = 0 \sim N-1 \\ 0, & n = \text{其他} \end{cases}$$

$$X(k) = R_N(k)\tilde{X}_N(k\Omega_0) = \begin{cases} \tilde{X}_N(k\Omega_0), & k = 0 \sim N-1 \\ 0, & k = \text{其他} \end{cases}$$

x(n)、X(k)分别称作 $\tilde{x}_N(n)$ 、$\tilde{X}_N(k)$ 的主值

DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{-nk}$$

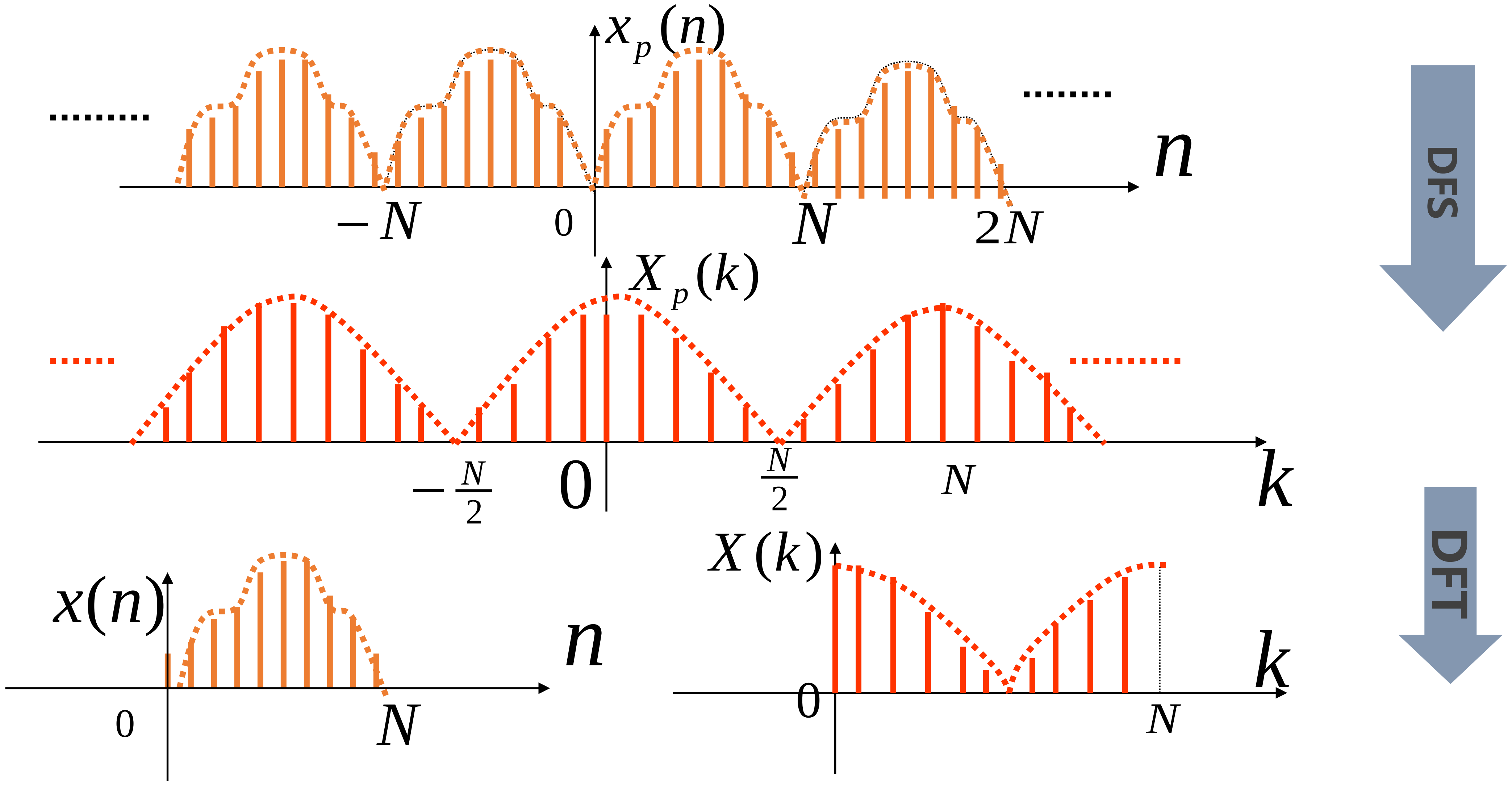
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{nk}$$

IDFT

$R_N(n)$为矩形序列

DFT又可看作以有限长序列x(n)为一个周期，进行周期延拓后所形成的周期序列$x_p(n)$的离散频谱

离散傅立叶变换（DFT）



离散傅立叶变换（DFT)

DFT小结

- DFT 是 DFS 的主值序列
- DFS 是严格按傅立叶分析的概念得来的
- DFT 只是一种借用形式，一种算法
- 用DFT 计算信号的频谱时
  - 时域离散化时需满足时域采样定理
  - 频域离散化时需满足频域采样定理
  - 对周期信号要截取整周期

离散傅立叶变换（DFT)

3、DFT的性质

- 线性
- 圆周移位
- 圆周卷积

离散傅立叶变换（DFT）

(1) 线性

如果$x_1(n)$、$x_2(n)$长度不同，长度短的序列要补零，使它与另一序列长度相同

- 若

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

- 那么

$$ax_1(n)+bx_2(n) \xleftrightarrow{DFT} aX_1(k)+bX_2(k)$$

离散傅立叶变换（DFT）

（2）圆周移位

余数运算：

如果$n=n_1+mN$，$0\le n_1\le N-1$，m为整数。则有：

$$((n))_N=(n_1)$$

此运算符表示n被N除，商为m，余数为n_1

（n_1）是 $((n))_N$ 的解，或称作取余数，或称作n对N取模值

离散傅立叶变换（DFT）

（2）圆周移位

$$n = 25, N = 9$$

$$n = 25 = 2 \times 9 + 7 = 2N + n_1$$

$$((25))_9 = 7$$

$$n = -4, N = 9$$

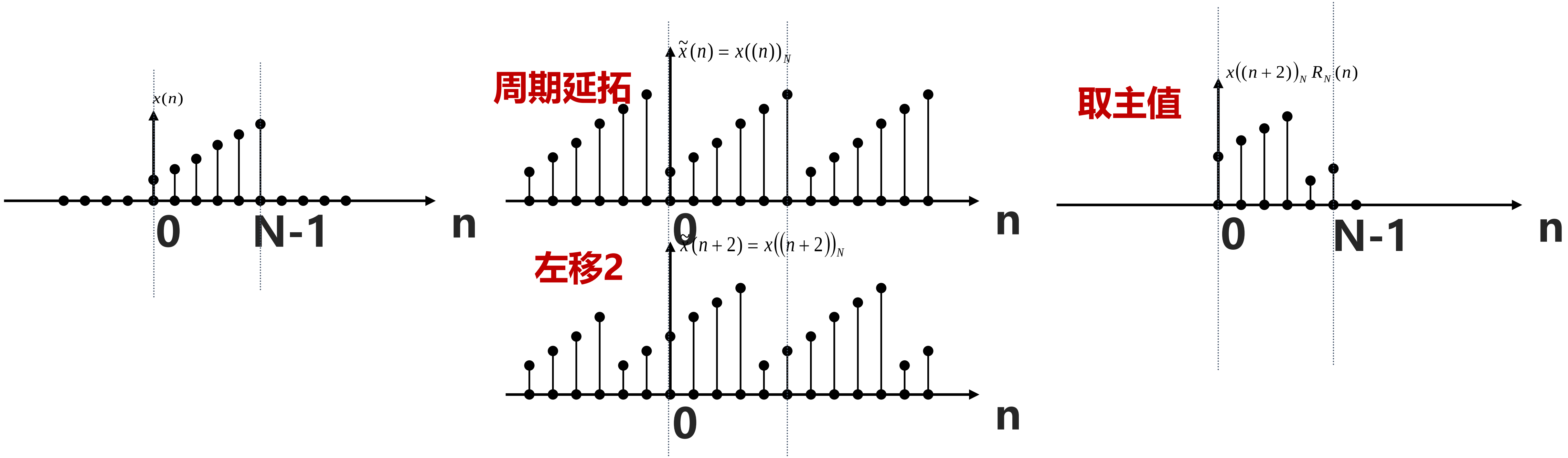
$$n = -4 = -9 + 5 = -N + 5$$

$$((-4))_9 = 5$$

离散傅立叶变换（DFT）

$x((n))_N = x(n_1)$含 义

- 先取模值，后进行函数运算
- $x(n_1) = x((n))_N$ 视作将 $x(n_1)$ 周期延拓



离散傅立叶变换（DFT）

(2)圆周移位

- 序列x(n)的圆周位移定义

$$\boxed{x((n-n_0))_N R_N(n)} = \tilde{x}_N(n-n_0)R_N(n)$$

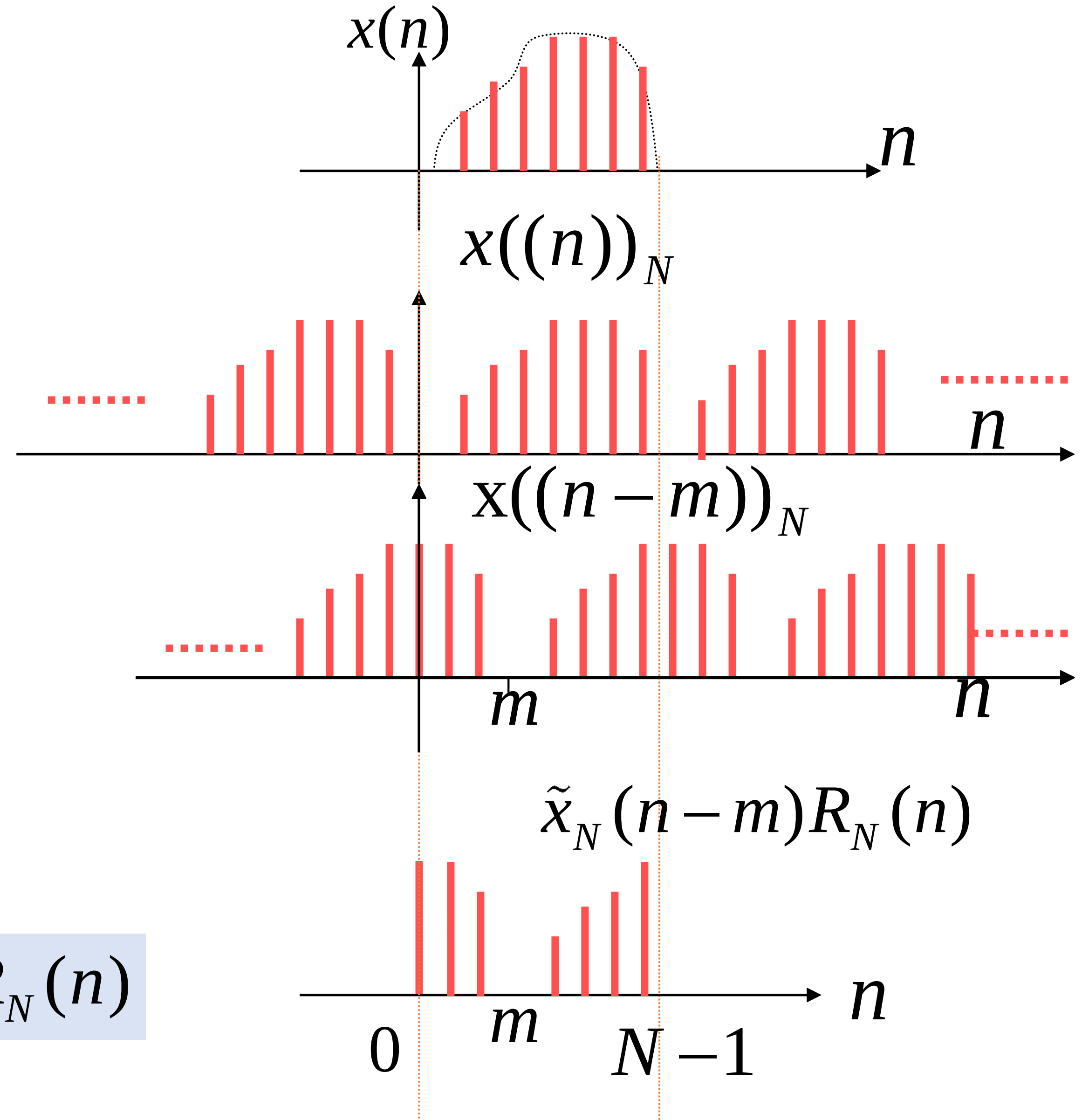
- n_0是位移值，$R_N(n)$是矩形序列

x(n)周期延拓、移位、取主值

离散傅立叶变换（DFT）

圆周位移的概念

- 有限长序列 $x(n)$ $0 \le n \le N-1$
- 周期延拓 $x((n))_N$
- 线性位移 $x((n-m))_N$
- 加窗，得到圆周位移序列 $x((n-m))_N R_N(n)$



离散傅立叶变换（DFT)

时移特性

- 若

$$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k)$$

$$y(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

- 则

$$Y(k) = e^{-j\Omega_0 mk} X(k)$$

频移特性

- 若

$$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k)$$

- 则

$$e^{j\Omega_0 k_0 n} x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X((k-k_0))_N \mathrm{R}_N(\mathrm{k})$$

离散傅立叶变换（DFT）

时域圆周卷积定理

N点圆周卷积的定义

$$x(n)\otimes h(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x((n-m))_N R_N(n)$$

x(n)和h(n)必须长度相等，圆周卷积后所得序列长度与原序列相同。短序列需补零

- 若 $y(n)=x(n)\otimes h(n)$

- 则 $Y(k)=X(k)H(k)$

离散傅立叶变换（DFT)

例 计算$x_1(n)$、$x_2(n)$的N点圆周卷积，其中

$$x_1(n)=x_2(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

- 解： $x_1(n)$、$x_2(n)$的N点DFT为

$$X_1(k)=X_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}w_N^{-nk}=\begin{cases}N & k=0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

- 有

$$X(k)=X_1(k)X_2(k)==\begin{cases}N^2 & k=0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

- $x_1(n)$、$x_2(n)$ 的N点圆周卷积是X(k)的反DFT变换

$$x(n)=\begin{cases}N & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

离散傅立叶变换（DFT）

频域圆周卷积定理

- 若 $$y(n)=x(n)h(n)$$

- 则

$$
\begin{aligned}
Y(k) &= \frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} X(l)H((k-l))_N \mathrm{R}_N(k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} H(l)X((k-l))_N R_N(k)
\end{aligned}
$$

谢谢大家