系统的一般时域响应分析

当线性时不变系统的输入是单位冲激信号时，可以通过单位冲激响应得到输出结果，那么如果输入是一般的时域信号下，响应分析该如何做呢？

带着这个问题，我们学习本节课！

信号的线性系统处理

（三）线性时不变系统的一般时域响应分析

- 卷积积分—线性时不变连续系统
- 卷积和—线性时不变离散系统
- 卷积的性质

信号的线性系统处理

- 线性时不变系统时域分析的基本思想：

任意连续时间信号可以分解为一系列冲激函数之和，而任意离散时间信号可表示为一系列时移脉冲信号的线性组合，那么如果已知线性时不变系统的单位冲激响应h(t)或单位脉冲响应h(n)，利用线性时不变系统的线性和时不变性，就能确定出系统对任意信号的响应。

1、卷积积分

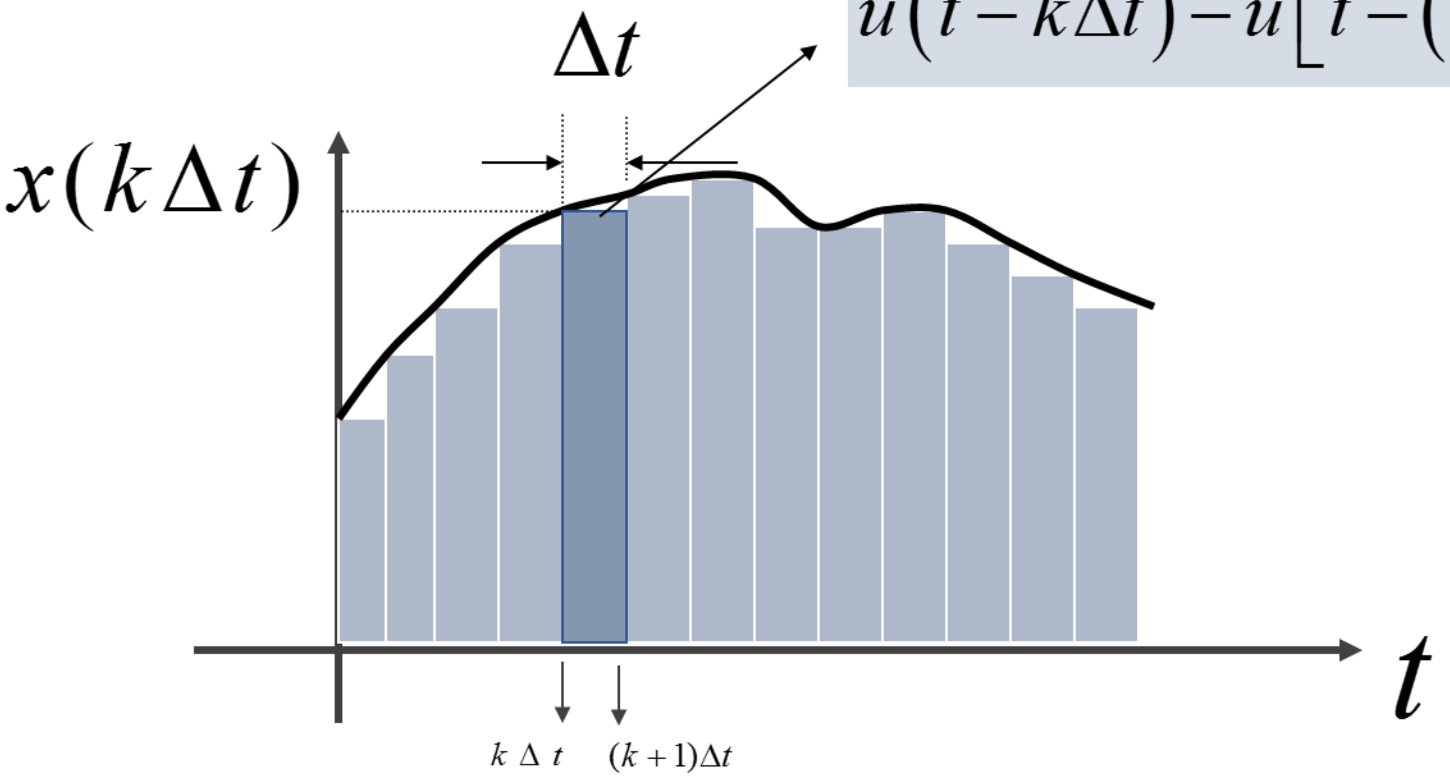
任意信号均可分解成冲激函数之和

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t)\frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}\Delta t$$

- 任意信号x(t)可近似用一系列等宽度的矩形脉冲之和表示

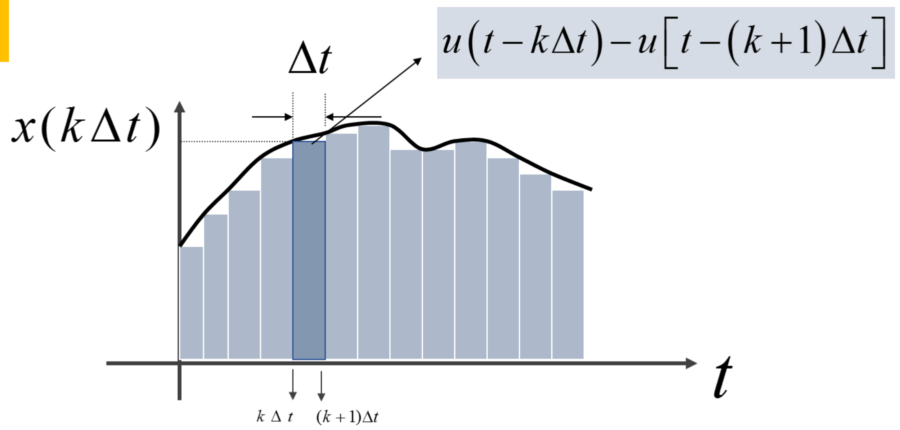
$$u(t-k\Delta t)-u\left[t-\left(k+1\right)\Delta t\right]$$



任意信号均可分解成冲激函数之和

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta t)\frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}\Delta t$$

- 当 $\Delta t\rightarrow 0$ 的极限情况下
- 令 $\Delta t\rightarrow d\tau$ $k\Delta t\rightarrow \tau$
- 有 $\lim\limits_{\Delta t\rightarrow 0}\dfrac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}=\delta(t-\tau)$



$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

连续系统的时域响应=输入信号*单位冲激响应

- 如果线性时不变连续系统的单位冲激响应为h(t)，则

$$\delta(t) \to h(t)$$

系统的时不变性

$$\delta(t-k\Delta t) \to h(t-k\Delta t)$$

系统的齐次性

$$x(k\Delta t)\cdot\Delta t\cdot\delta(t-k\Delta t) \to x(k\Delta t)\cdot\Delta t\cdot h(t-k\Delta t)$$

系统的叠加性

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot\Delta t \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\cdot\Delta t$$

Δt→0， kΔt→τ， Δt→dτ

通过卷积积分

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \to y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \boxed{y(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\boxed{x(t)*h(t)}$$

连续系统的时域响应=输入信号*单位冲激响应

连续系统的时域响应=输入信号*单位冲激响应

连续系统的时域响应特征

- 以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励时，系统产生的零状态响应，记作 $h(t)$ 。

$\delta(t)$ → $h(t)$ → $y(t)=\delta(t)*h(t)$

- 任意时域信号x(t)激励时系统的响应

$x(t)$ → $h(t)$ → $y(t)=x(t)*h(t)$

连续系统的时域响应通过卷积积分实现，那么离散系统呢？

离散系统的时域响应=输入信号*单位脉冲响应

如果线性时不变离散系统的单位脉冲响应为h(n)，则

δ(n)——h(n)

系统的时不变性

δ(n-k)——h(n-k)

系统的齐次性

x(k)δ(n-k)——x(k)h(n-k)

系统的叠加性

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

通过卷积和

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) -> y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

信号的线性系统处理

2、卷积和

- 任一离散时间信号x(n)，都可以表示为单位脉冲序列δ(n)的移位、加权和，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

根据线性时不变离散系统的特性，对任意输入的响应是单位脉冲序列的移位加权和，

线性时不变离散系统的特性

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

信号的线性系统处理

离散系统的时域响应特征

- 以单位脉冲序列δ(n)作为激励时，系统产生的零状态响应，记作h(n)。

$$\delta(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)=\delta(n)*h(n)$$

- 任意时域信号x(n)激励时系统的响应

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)=x(n)*h(n)$$

例：已知系统的单位脉冲响应为： $h(n)=a^n u(n)$

系统的激励为 $x(n)=b^n u(n), a\neq b$

求该系统对激励x(n)的零状态响应y(n)

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k a^{n-k} u(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k a^n$$

$$=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \qquad (n=0,1,\cdots)$$

信号的线性系统处理

3、卷积的性质

- 交换律
- 分配律
- 结合律

- 卷积的微分（差分）
- 卷积的积分（累加）
- 冲激函数与阶跃函数的卷积

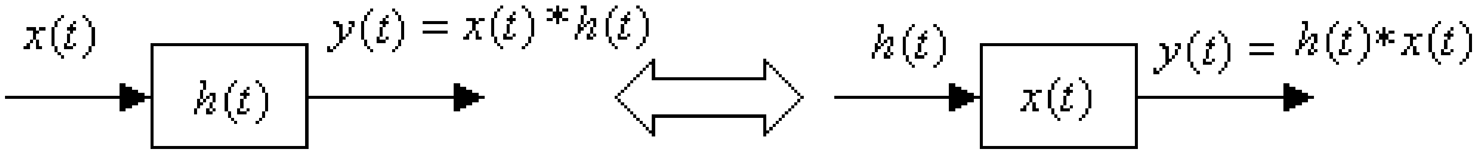
信号的线性系统处理

（1）交换律

表明在线性时不变系统中，对于输出而言，输入信号和系统的单位冲激响应的作用可以互换

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$



信号的线性系统处理

（2）分配律

表明并联的线性时不变系统对输入的响应等于组成并联系统的各子系统对输入的响应之和

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

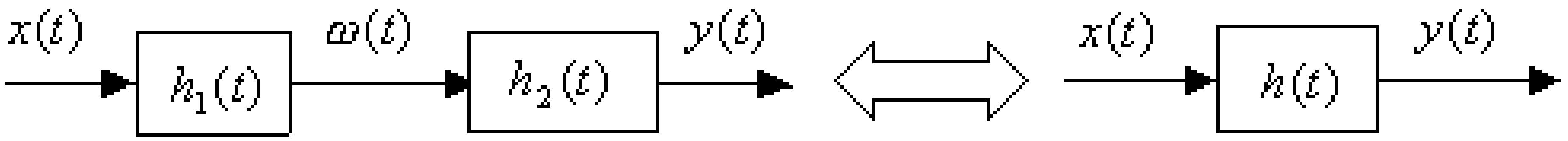
信号的线性系统处理

（3）结合律

表明各个串联的子系统的连接次序可以调换；从信号处理的角度看，如果一个信号逐个地经过多个线性时不变子系统处理，各个子系统对信号的处理次序不影响处理结果。

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

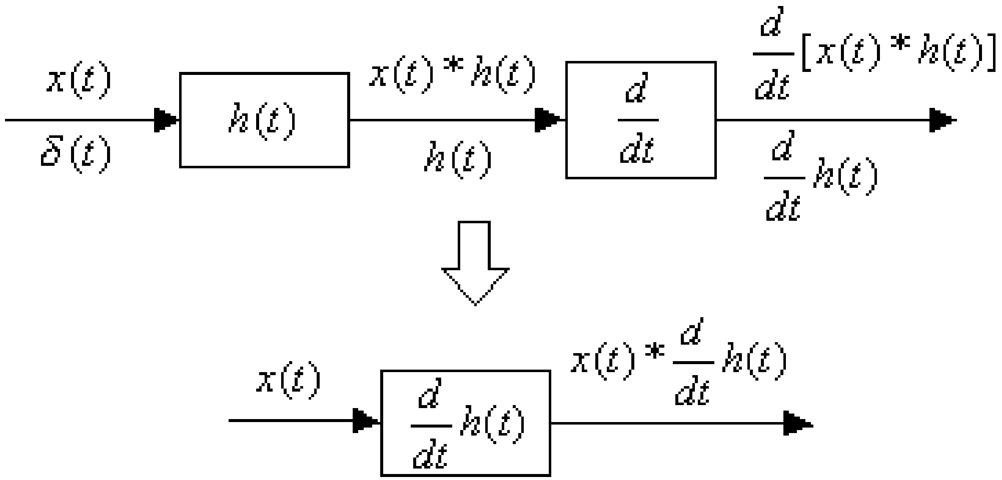


信号的线性系统处理

（4）卷积的微分（差分）

$$\frac{d}{dt}[x(t)*h(t)] = x(t)*\frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}x(t)*h(t)$$

$$\Delta[x(n)*h(n)] = x(n)*[\Delta h(n)] = [\Delta x(n)]*h(n)$$

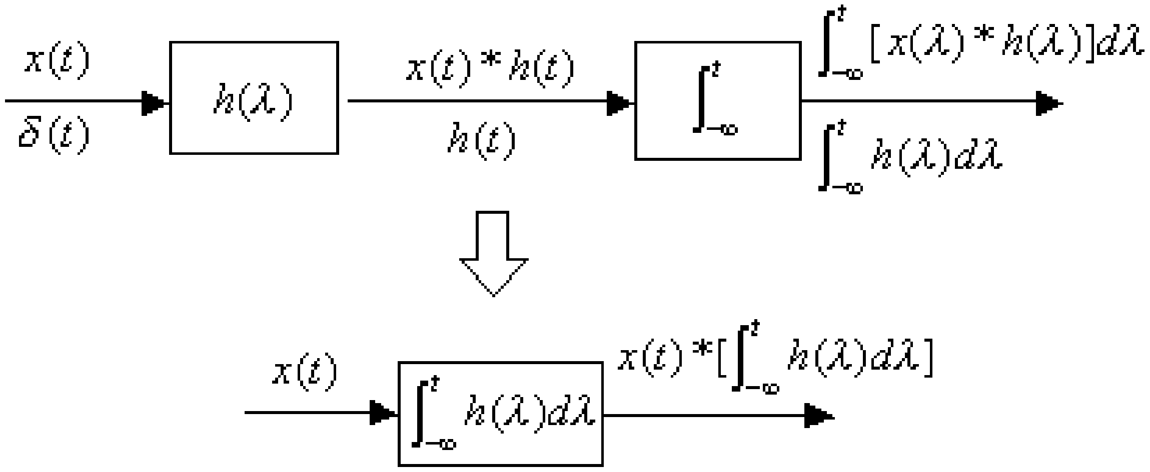


信号的线性系统处理

（5）卷积的积分（累加）

$$\int_{-\infty}^{t}[x(\lambda)*h(\lambda)]d\lambda = x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)d\lambda] = [\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda]*h(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}[x(k)*h(k)] = x(n)*[\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)] = [\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)]*h(n)$$



信号的线性系统处理

（5）卷积的筛选性质

$$\boxed{x(t)*\delta(t)=x(t)}$$
$$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

$$\boxed{x(n)*\delta(n)=x(n)}$$
$$\delta(n)*\delta(n)=\delta(n)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$
$$\delta(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

$$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$
$$\delta(n)*\delta(n-n_0)=\delta(n-n_0)$$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$$
$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2)$$

$$x(n-n_1)*\delta(n-n_2)=x(n-n_1-n_2)$$
$$\delta(n-n_1)*\delta(n-n_2)=\delta(n-n_1-n_2)$$

$$x(t)*\delta'(t)=x'(t)$$

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

连续系统的时域响应=输入信号*单位冲激响应

连续系统的时域响应特征

- 以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励时，系统产生的零状态响应，记作 $h(t)$ 。

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \quad \boxed{y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)}$$

- 任意时域信号x(t)激励时系统的响应

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

信号的线性系统处理

离散系统的时域响应特征

- 以单位脉冲序列δ(n)作为激励时，系统产生的零状态响应，记作h(n)。

$$\delta(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)=\delta(n)*h(n)$$ =h(n)

- 任意时域信号x(n)激励时系统的响应

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)=x(n)*h(n)$$

P256 习题 1、6、10