第十一章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
  - 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
  - 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

问题引入：囚徒困境

- 囚徒困境（Dresher & Flood, 1950s）
- 两偷盗犯分别关押受审，有坦白和抗拒两种选择，判罚年份如下，问各自应选择的决策。

I \ II	坦白	抗拒
坦白	(-9,-9)	(0,-15)
抗拒	(-15,0)	(-1,-1)

博弈论3要素

1、局中人（Players）

2、策略集（Strategies）

3、赢得函数/支付函数（Payoff function）

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

博弈论产生

- 1838年 Cournot： 双寡头产量垄断模型， 已出现类似纳什均衡的分析理念。
- 1944年 Von Neumann和Oskar Morgenstern

合著”Game Theory and Economic Behaviors”

首次给出了的博弈论的研究框架，开启了双人零和博弈的研究。

- 1950s年代，Nash将研究推广到多人博弈和非零和博弈，确定了非合作博弈形式，给出了Nash均衡（equilibrium)的概念。

博弈论的发展

- 1950年、1953年，Kuhn将战略型博弈发展为扩展型博弈，开启了动态博弈研究。
- 1965年，Selten提出了子博弈完美Nash均衡，消除了纳什均衡解中的非理性行为解。
- 1967-1968年，Harsanyi提出了贝叶斯博弈，解决信息不完全的问题。
- 1970s，向演化博弈等多个方向发展，更为成熟。
- 1993年，Nash、 Selten和Harsanyi同获诺贝尔经济学奖。

博弈论问题的分类

- 局中人是否允许合作：非合作博弈、合作博弈
- 策略的数目：有限策略博弈-无限策略博弈
- 策略选择是否具有概率随机性：纯策略博弈、混合策略博弈
- 策略与时间的关系：静态博弈、动态博弈
- 参与人对问题信息结构的了解程度：完全信息博弈、不完全信息博弈
- 数学模型：矩阵博弈、连续博弈、微分博弈、阵地博弈、凸博弈、随机博弈

第十二章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
  - 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
  - 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

矩阵博弈

- 纯策略博弈及其均衡解
- 混合策略博弈及其均衡解
- 均衡解的求解

纯策略矩阵博弈模型

博弈模型 $G=\{I,II;S_1,S_2;\mathbf{A}\}$

- 局中人I、II
- 策略集

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$$

- 局中人I的赢得矩阵：**A**
- 局中人II的赢得矩阵：**-A**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例：田忌赛马

- 局中人：田忌、齐王
- 策略集：

｛（上中下）、（上下中）、（中下上）、（中上下）、（下上中）、（下中上）｝

- 田忌的赢得矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

理性博弈原则

- 自身利益最大化原则：自身的赢得值尽可能大
- 共许原则：双方均无改变策略的意愿

自身利益最大化原则

- 问题：不确定对方决策情况下的最优决策
- 准则：从最坏的预期中选则最好的（悲观准则）
  一种保守而贪心的准则
  “做最坏的打算，争取最好的结果”

➢ 局中人I最大预期赢得（赢得指自身最小收益）
  极大极小值：$\max_{i} \min_{j} a_{ij}$

➢ 局中人II最小预期损失（损失指对手最大收益）
  极小极大值：$\min_{j} \max_{i} a_{ij}$

极大极小值与极小极大值

■ 两者之间的关系： $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \le \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$

证明：对于 $\forall j$，有

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \max_i a_{ij}$$

第i行最小值

第j列最大值

故 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \le \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$

举例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\min_j a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 4 & i=2 \\ 7 & i=3 \end{cases} \qquad \max_i a_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{cases} 7 & j=1 \\ 8 & j=2 \\ 9 & j=3 \end{cases}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = 7 \le \max_i a_{ij}$$

$$7 = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 7$$

最优纯策略对

➢ 如果存在

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} \triangleq V_G$$

则 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为矩阵博弈的最优纯策略对，也称为最优局势。V_G称为博弈值。

最优纯策略对存在的充要条件

■ 矩阵博弈最优纯策略对存在的充要条件是存在鞍点。

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \qquad \text{鞍点条件}$$

证明：1、必要性

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \exists i^*，\ j^*，\ \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*}$$

$$\Rightarrow \quad a_{i^*j^*} \ge \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} \ge a_{i^*j^*}$$

$$\Rightarrow \quad \max_i a_{ij^*} = a_{i^*j^*} = \min_j a_{i^*j} \quad \Rightarrow \quad a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

最优纯策略对存在的充要条件

证明：2、充分性

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

$$\Rightarrow \max_i a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le \min_j a_{i^*j}$$

j*列最大值

i*列最小值

$$\Rightarrow \min_j \max_i a_{ij} \le a_{i^*j^*} \le \max_i \min_j a_{ij}$$

又根据 $\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$

$$\Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Nash均衡解

鞍点解的博弈解释：没有一方愿意单方面改变策略，因为单方面改变策略均无法改善自身的赢得值，更多情况下反有损害。（共许原则）

这样的最优策略对具有一定稳定性，被称为平衡局势(Equilibrium Situation)、均衡解(Equilibrium Solution)，或直接简称为解(solution)。

纯策略博弈时：均衡解（鞍点）⇒最优纯策略对

解的类型：1、唯一解

,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & (8) & 11 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 7 & 9 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 2)$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \begin{bmatrix} 10 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow \quad (i^*, j^*) = (1, 2)$$

2、多个解（多个鞍点）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & (8) & 11 & (8) \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & [8] & 7 & [8] \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

◆局中人I选择：

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow j^*(i) = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow i^* = 1 \Rightarrow (i^*, j^*) = (1,2),(1,4)$$

◆局中人II选择：

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \begin{bmatrix} 10 & 8 & 11 & 8 \end{bmatrix} = 8$$

$$\Rightarrow i^*(j) = \begin{bmatrix} 4 & 1,3 & 1 & 1,3 \end{bmatrix} \Rightarrow j^* = 2,4 \Rightarrow (i^*, j^*) = (1,2),(1,4),(3,2),(3,4)$$

讨论

问题：(α_3,β_2)、(α_3,β_4)不是局中人I的最优方案，是否可作为博弈均衡解？

答案：理性原则只考虑赢得值， 赢得值相同的策略对均等价，所以4个点均为最优纯策略对，即

$$(\alpha_{i*},\beta_{j*})=\{(\alpha_1,\beta_2),(\alpha_1,\beta_4),(\alpha_3,\beta_2),(\alpha_3,\beta_4)\} \qquad V_G=8$$

但满足鞍点条件的均衡解只有2个：

$$(\alpha_{i*},\beta_{j*})=\{(\alpha_1,\beta_2),(\alpha_1,\beta_4)\}$$

- 结论：均衡解必为最优纯策略对，最优纯策略对不一定是均衡解

多个均衡解的性质

➢ 无差别性：如果$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$均为博弈G的解，则

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$$

证明：根据均衡解的定义，有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_2 j_2}$$

可交换性

- 可交换性：如果$(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$均为博弈G的（均衡）解，则$(\alpha_{i_1},\beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2},\beta_{j_1})$ 也为该博弈G的（均衡）解。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & (8) & 11 & (8) \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 12 & (8) & 10 & (8) \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

证明：根据鞍点条件，有

$$a_{i j_1} \le a_{i_1 j_1} \le a_{i_1 j} \quad \Rightarrow \quad a_{i_2 j_1} \le a_{i_1 j_1} \le a_{i_1 j_2}$$

$$a_{i j_2} \le a_{i_2 j_2} \le a_{i_2 j} \quad \Rightarrow \quad a_{i_1 j_2} \le a_{i_2 j_2} \le a_{i_2 j_1}$$

$$\Rightarrow \quad a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_1} = V_G$$

$$\Rightarrow \quad a_{i j_2} \le a_{i_1 j_2} \le a_{i_1 j} \qquad a_{i j_1} \le a_{i_2 j_1} \le a_{i_2 j}$$

3、无纯策略解

- 原因： $\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$
- 举例：石头剪刀布游戏

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ 局中人I选择：

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \Rightarrow j^*(i) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow i^* = 1,2,3$$

$$\Rightarrow (i^*, j^*) = (1,3),(2,1),(3,2)$$

◆ 局中人II选择：

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow i^*(j) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow j^* = 1,2,3$$

$$\Rightarrow (i^*, j^*) = (3,1),(1,2),(2,3)$$

如果知道对方的策略，就能制胜，故不可能选择固定策略。

矩阵博弈

- 纯策略博弈及其均衡解
- 混合策略博弈及其均衡解
- 均衡解的求解

混合策略矩阵博弈模型

博弈模型 $G^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$

- 混合策略集

$$S_1^* = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^m \mid x_i \geq 0，\ i = 1, 2, \cdots, m; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

x_i为局中人I执行纯策略α_i的概率

$$S_2^* = \left\{ \boldsymbol{y} \in R^n \mid y_j \geq 0，\ j = 1, 2, \cdots, n; \sum_{i=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

y_j为局中人II执行纯策略 β_i的概率

- 局中人I的赢得函数：$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$
- 局中人II的赢得函数：$-E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

说明

- 混合策略的取值在多次博弈中可看作概率，一次博弈中可看作偏好。
- 混合策略集是无穷集合，纯策略是混合策略的特例。
- 分析问题时，首先考虑纯策略博弈，当纯策略解不存在时，就考虑混合策略博弈。因此混合策略博弈也可以用 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A}\}$ 表示。

极大极小值与极小极大值

理性决策

◆局中人I的最大预期赢得： $\max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*}\min\limits_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$

◆局中人II的最小预期损失： $\min\limits_{\mathbf{y}\in S_2^*}\max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$

两者关系： $\max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*}\min\limits_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \min\limits_{\mathbf{y}\in S_2^*}\max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y})$

■ 混合策略 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$ $\mathbf{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$

■ 混合局势 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$

混合策略均衡解

- 最优混合策略对

$$\max_{\mathbf{x}\in S_1^*}\min_{\mathbf{y}\in S_2^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y}\in S_2^*}\max_{\mathbf{x}\in S_1^*} E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \triangleq V_G$$

- 最优混合策略存在的充要条件：存在鞍点

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y})$$

- 平衡局势 $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$

混合策略博弈时：均衡解⇒最优混合策略对

解的存在性

定理：一定存在混合策略意义下的矩阵博弈均衡解。

证明思路：鞍点条件一定有解。

解的存在性定理

定理：一定存在混合策略意义下的矩阵博弈均衡解。

证明：$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* x_i = E(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j$ 鞍点条件

$\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \qquad \forall i = 1,2,\cdots,m \qquad \forall j = 1,2,\cdots,n$

一方采用纯策略，一方采用最优混合策略

$\Leftrightarrow$ $\exists v = E(x^*, y^*)$使下面2组不等式均有解

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge v \qquad j = 1,2,\cdots,n$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1 \qquad x_i^* \ge 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v \qquad i = 1,2,\cdots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1 \qquad y_j^* \ge 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

⇔ 下面一对对偶问题均有可行解，且$w^*= v^*=E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$

$$\begin{aligned} \max\quad & w \\ s.t. \ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge w \quad j=1,2,\cdots,n \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_i \ge 0 \quad i=1,2,\cdots,m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\quad & v \\ s.t. \ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le v \quad i=1,2,\cdots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \ge 0 \quad j=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

可以验证 $\mathbf{x}=[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ $w=\min a_{1j}$ 原问题可行解

$\mathbf{y}=[1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ $v=\max a_{i1}$ 对偶问题可行解

故有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v^* = w^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^*$ 强对偶性

又根据：

$$\left.\begin{aligned} E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^*\right) x_i^* \le v^* \sum_{i=1}^{m} x_i^* = v^* \\ E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^*\right) y_j^* \ge w^* \sum_{j=1}^{n} y_j^* = w^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow w^* = v^* = E(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$$

均衡解的性质

- 互补松弛性
- 赢得矩阵严格单调变换下的解集不变性
- 对称博弈性质

互补松弛性

$$x_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

$$y_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = w^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

如果某条纯策略可能被选择，则该纯策略下对手的最优混合策略下的赢得值必为V_G。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* < v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \Rightarrow x_i^* = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* > w^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \Rightarrow y_j^* = 0$$

如果某条纯策略下对手的最优混合策略的赢得值比V_G更好，则该纯策略无被选择可能。

解集不变性

- 赢得矩阵严格单调变换下的解集不变性

博弈： $G_1 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_1\}$ $G_2 = \{S_1, S_2; \mathbf{A}_2\}$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + L * \mathbf{1}_{m \times n} \Rightarrow T(G_1) = T(G_2) \quad V_{G_1} = V_{G_2} + L$$

$$\mathbf{A}_2 = a\mathbf{A}_1 \quad a > 0 \Rightarrow T(G_1) = T(G_2) \quad V_{G_1} = aV_{G_2}$$

■ 解集T(G)：博弈G的均衡解集合 。

证明：上述变换只改变了赢得矩阵元素的数值，不改变相对大小关系。

对称博弈性质

如果博弈问题具有如下对称性：

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$ *自身角度的赢得矩阵相同*

$$\Rightarrow \quad T_{\mathrm{I}}(G) = T_{\mathrm{II}}(G) \qquad a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_G = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* x_j^* = -V_G = 0$$ *最优策略时无赢家*

举例：石头剪刀布游戏 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

矩阵博弈

- 纯策略博弈及其均衡解
- 混合策略博弈及其均衡解
- 均衡解的求解

均衡解的求解方法

- 互补松弛方程组法
- 线性规划法

……

互补松弛性方程组

$$x_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = v^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$y_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = w^* = E(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$$

举例：田忌赛马

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

任何一条纯策略均是对方特定策略下的唯一赢得策略，不可忽略，故有

$$x_i^* > 0 \qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$y_j^* > 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

严格单调变换

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_{6\times6}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

利于对称性增加A的稀疏性，简化问题。

互补松弛性方程组

$$
\begin{aligned}
-x_1^* + x_5^* &= V_{\tilde{G}} & -y_1^* + y_3^* &= V_{\tilde{G}} \\
-x_2^* + x_6^* &= V_{\tilde{G}} & -y_2^* + y_4^* &= V_{\tilde{G}} \\
x_1^* - x_3^* &= V_{\tilde{G}} & -y_3^* + y_5^* &= V_{\tilde{G}} \\
x_2^* - x_4^* &= V_{\tilde{G}} & -y_4^* + y_6^* &= V_{\tilde{G}} \\
x_3^* - x_5^* &= V_{\tilde{G}} & y_1^* - y_5^* &= V_{\tilde{G}} \\
x_4^* - x_6^* &= V_{\tilde{G}} & y_2^* - y_6^* &= V_{\tilde{G}}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow V_{\tilde{G}} = 0 \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= x_3^* = x_5^* \\
x_2^* &= x_4^* = x_6^* \\
y_1^* &= y_3^* = y_5^* \\
y_2^* &= y_4^* = y_6^*
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{i=1}^{6} x_i^* = 1 \qquad \sum_{j=1}^{6} y_j^* = 1
$$

$$+ \quad \Rightarrow$$

无穷多个均衡解

$$x_1^* = x_3^* = x_5^* = a'$$

$$y_1^* = y_3^* = y_5^* = b'$$

$$x_2^* = x_4^* = x_6^* = a''$$

$$y_2^* = y_4^* = y_6^* = b''$$

$$a' + a'' = 1/3$$

$$b' + b'' = 1/3$$

$$a' \geq 0$$

$$b' \geq 0$$

$$a'' \geq 0$$

$$b'' \geq 0$$

$$V_{\tilde{G}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_G = 2V_{\tilde{G}} - 1 = -1$$

问题：田忌能赢齐王吗？

线性规划法

$$\max \quad w$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq w \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

对偶

$$\min \quad v$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$
$$y_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

$w > 0$

$v > 0$

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} x_i' = \frac{1}{w}$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq 1 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$x_i' \geq 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

对偶

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} y_j' = \frac{1}{v}$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j' \leq 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$y_j' \geq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

矩阵形式

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}_m^T \mathbf{x}' \\ s.t. \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{x}' \geq \mathbf{1}_n \\ & \mathbf{x}' \geq 0 \end{aligned}$$

对偶 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}_n^T \mathbf{y}' \\ s.t. \quad & \mathbf{A}\mathbf{y}' \leq \mathbf{1}_m \\ & \mathbf{y}' \geq 0 \end{aligned}$$

问题：w>0和v>0是否具有一般性？

举例：石头剪刀布游戏

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad V_G=0$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}+\mathbf{1}_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad V_{\tilde{G}}=1$$

求解

$$\min \quad x_1' + x_2' + x_3'$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1' + 2x_3' \geq 1 \\ & 2x_1' + x_2' \geq 1 \\ & 2x_2' + x_3' \geq 1 \\ & x_i' \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

$$\max \quad y_1' + y_2' + y_3'$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & y_1' + 2y_2' \leq 1 \\ & y_2' + 2y_3' \leq 1 \\ & 2y_1' + y_3' \leq 1 \\ & y_j' \geq 0 \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$$

解得： $x_i' = \frac{1}{3} \quad y_j' = \frac{1}{3} \quad V_{\tilde{G}} = (x_1' + x_2' + x_3')^{-1} = 1$

$\Rightarrow$ $x_i = x_i' V_{\tilde{G}} = \frac{1}{3} \quad y_j = y_j' V_{\tilde{G}} = \frac{1}{3} \quad V_G = V_{\tilde{G}} - L = 0$

注：一般问题，可以先求解，再判断w、v是否大于0

第十二章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
  - 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
  - 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

双矩阵博弈

博弈模型 $G=\{S_1,S_2;\mathbf{A},\mathbf{B}\}$

- 局中人I、II
- 策略集

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$

$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$$

- 局中人I的赢得矩阵**A**
- 局中人II的赢得矩阵**B**

囚徒困境

I \ II	坦白	抗拒
坦白	(-9,-9)	(0,-15)
抗拒	(-15,0)	(-1,-1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

双矩阵博弈的解

- 纯策略均衡解
- 混合策略均衡解

囚徒困境的纯策略解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-9 & 0\\ -15 & -1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-9 & -15\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

◆局中人I选择：

$$j_i^*(B)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow i_{j^*}^*(A)=1 \Rightarrow (i^*,j^*)=(1,1)$$

◆局中人II选择：

$$i_j^*(A)=[1 \quad 1] \Rightarrow j_{i^*}^*(B)=1 \Rightarrow (i^*,j^*)=(1,1)$$

纯策略Nash均衡解

■ Nash均衡点

满足以下条件的策略对 $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$

$$a_{i*j*} \geq a_{ij*} \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$b_{i*j*} \geq b_{i*j} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

没有一个局中人愿意单方面改变策略

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (-9) & 0 \\ -15 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-9) & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

混合策略Nash均衡解

■ 赢得函数

$$E_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \qquad E_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j$$

■ Nash混合策略均衡点

满足以下条件的策略对 $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$

$$E_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \ge E_1(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \qquad \mathbf{x} \in S_1^*$$

$$E_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \ge E_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \qquad \mathbf{y} \in S_2^*$$

- n人有限策略博弈至少存在一个Nash均衡点（包括纯策略和混合策略）（Nash, 1950）。
- 如果纯策略均衡解存在，也是混合策略的均衡解。

Pareto最优解

允许合作下的博弈问题为多目标优化问题：

◆目标1： $\max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*,\mathbf{y}\in S_2^*} E_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$

◆目标2： $\max\limits_{\mathbf{x}\in S_1^*,\mathbf{y}\in S_2^*} E_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$

■ Pareto最优解$(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$：不存在超优$(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$的策略对 。

■ $(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)$超优(dominate)$(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)$:

$$E_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)\geq E_1(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2) \qquad E_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)\geq E_2(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)$$

且至少有一个不等式严格成立。

均衡与最优

- Pareto最优解：允许合作下的满意解
- Nash均衡解：不合作情况下的理性解

举例：囚徒问题中，(坦白,坦白)是Nash均衡解，(抗拒,抗拒）是Pareto最优解。

- 严格意义下的解：满足可交换性和无差别性的Pareto最优均衡解的集合。
- 完全弱意义下的解：反复删除非占优策略所得的简化博弈的严格意义下的解，可以证明同时也是原博弈问题的Nash均衡解。

提供了一种求解Nash均衡解的方法

囚徒困境问题的简化

占优策略

I ╲ II	坦白	抗拒
坦白	(-9,-9)	(0,-15)
抗拒	(-15,0)	(-1,-1)

占优策略

非占优策略

非占优策略

Nash均衡解的充要条件

- 定理：(x*,y*)是G={S$_1$,S$_2$;**A**,**B**}的Nash均衡解的充要条件为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le E_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \quad i=1,2,\cdots m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{y}^* \le E_1(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\mathbf{1}_m$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i^* \le E_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \quad j=1,2,\cdots n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}^T\mathbf{x}^* \le E_2(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\mathbf{1}_n$$

$$\mathbf{x} \in S_1^* \qquad \mathbf{y} \in S_2^*$$

证明：根据Nash均衡解的定义。

$$\mathbf{Ay}^* \le E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\mathbf{1}_m$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{x}^* \le E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\mathbf{1}_n$$

二次规划求解

$$v_1 = E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{Ay}^*$$

$$v_2 = E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{By}^*$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}^T\mathbf{x}^* \le v_2\mathbf{1}_n \\ \mathbf{x}^{*T}\mathbf{1}_m = 1 \\ \mathbf{x}^* \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x}^{*T}\mathbf{By}^* \le v_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Ay}^* \le v_1\mathbf{1}_m \\ \mathbf{y}^{*T}\mathbf{1}_n = 1 \\ \mathbf{y}^* \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x}^{*T}\mathbf{Ay}^* \le v_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\max \mathbf{x}^T\mathbf{Ay} - v_1 + \mathbf{x}^T\mathbf{By} - v_2$$

$$\begin{array}{ll} s.t. & \mathbf{Ay} \le v_1\mathbf{1}_m \\ & \mathbf{B}^T\mathbf{x} \le v_2\mathbf{1}_n \\ & \mathbf{x}^T\mathbf{1}_m = 1 \\ & \mathbf{y}^T\mathbf{1}_n = 1 \\ & \mathbf{x} \ge 0 \\ & \mathbf{y} \ge 0 \end{array}$$

第十二章 对策论

- 对策论问题及其基本概念
- 二人有限策略博弈
  - 矩阵博弈（二人有限零和博弈）
  - 双矩阵博弈（二人有限非零和博弈）
- 举例

军备竞赛

- 假设有两个国家，有扩军和裁军两种策略，其赢得矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{扩军} & \text{裁军} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{扩军} \\ \text{裁军} \end{array} & \begin{bmatrix} (2,2) & (5,0) \\ (0,5) & (4,4) \end{bmatrix} \end{array}$$

问两个国家会如何决策？

求解

$$\max 4x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + 5x_2 y_1 + 8x_2 y_2 - v_1 - v_2$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & 2y_1 + 5y_2 \le v_1 \\
& 4y_2 \le v_1 \\
& 2x_1 + 5x_2 \le v_2 \\
& 4x_2 \le v_2 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& y_1 + y_2 = 1 \\
& x_i \ge 0 \quad i = 1,2 \\
& y_j \ge 0 \quad j = 1,2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}^* = [1 \quad 0]^T$ $\qquad$ $\mathbf{y}^* = [1 \quad 0]^T$

$E_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = v_1^* = 2 \qquad E_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = v_2^* = 2$

问题

如何避免军备竞赛？