滤波器

主 讲 教 师 ： 于 淼

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- **设计任务**：用具有无限多个单位冲激响应的有理函数逼近给定的滤波器幅频特性
- **设计方法**：
  - 直接法：一种计算机辅助设计方法
  - 间接法：借助模拟滤波器传递函数H(s)求出相应的数字滤波器传递函数H(z)
    - 根据给定技术指标要求，确定一个满足该指标的模拟滤波器H(s)
    - 寻找一种变换关系把s平面映射到z平面，使H(s)变换成所需的数字滤波器传递函数H(z)

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- 为了使数字滤波器保持模拟滤波器的特性，由复变量s到复变量z之间的映射关系必须满足两个基本条件：

  - s平面的复频率轴必须映射到z平面的单位圆上
  - s平面的左半平面映射到z平面的单位圆以内

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

1、冲激响应不变法-遵循准则

- 使数字滤波器的单位冲激响应与所参照的模拟滤波器冲激响应的采样值完全一样

$$h(n) = h(t)\big|_{t=nT}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

1、冲激响应不变法-遵循准则

- 根据技术指标确定模拟滤波器H(s)
- 对H(s)取拉普拉斯反变换求冲激响应h(t)
- 由冲激响应不变的原则，对h(t)采样得到h(n)
- 求h(n)的z变换，求出数字滤波器H(z)

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

设模拟滤波器的系统传递函数具有单极点

$$H(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{s-p_i}$$

$$K_i=(s-p_i)H(s)\big|_{s=p_i}$$

对H(s)取逆变换

$$h(t)=\sum_{i=1}^{N}K_i e^{p_i t}u(t)$$

对h(t) 进行采样

$$h(n)=h(t)\big|_{t=nT}=\sum_{i=1}^{N}K_i e^{p_i nT}u(n)$$

冲激响应不变法的原理就是把H（s）部分分式展开式中的 $\frac{1}{s-p_i}$ 代之以 $\frac{1}{1-e^{p_iT}z^{-1}}$ 即可直接得出数字滤波器的传递函数H(z)

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}K_i e^{p_i nT}\right)z^{-n}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{1-e^{p_iT}z^{-1}}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

1、冲激响应不变法-从 S 平面到 Z 平面的映射

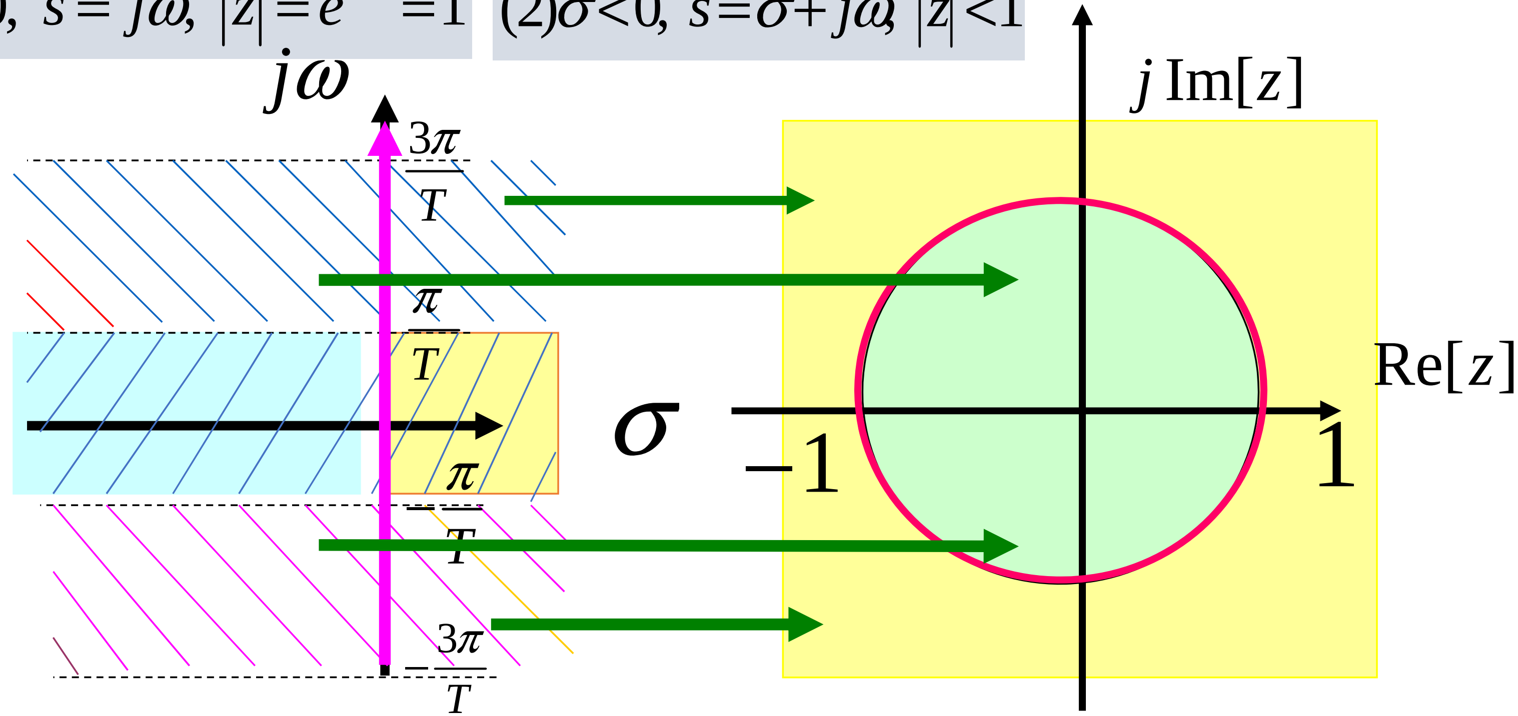
$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T} n)T} = |z| e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T} n)T}$$

当σ不变，ω以2π/T 整数倍改变时，映射值不变，也就是将s平面沿着jω轴分割成一条条宽度为2π/T的水平带，然后再映射到Z平面上.

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

(1) $\sigma = 0,\ s = j\omega,\ |z| = e^{\sigma T} = 1$

(2) $\sigma < 0,\ s = \sigma + j\omega,\ |z| < 1$



(3) $\sigma > 0,\ s = \sigma + j\omega, |z| > 1$

（4）当σ不变，ω以 $\frac{2\pi}{T}$ 整数倍改变

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- 当σ=0 时，s平面的虚轴映射为z平面的单位圆
- 当σ<0 时，s平面左半平面映射为z平面的单位圆内
- 当σ>0 时，s平面的右半平面映射为z平面单位圆外
- 当σ不变，ω以 $\frac{2\pi}{T}$ 整数倍改变时，映射值不变，也就是将s平面沿着jω 轴分割成一条条宽度为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平带，每条水平带都按照前面的关系重叠映射成整个z平面

S平面到Z平面的
映射具有多值性

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

采用冲激响应不变法设计IIR数字滤波器时具有如下特点

- 模拟滤波器和数字滤波器之间的频率变换是线性关系，即$\Omega = T\omega$。
- 具有较好的时域逼近特性。
- s平面与z平面间映射的多值性容易造成频谱混叠现象。
- 不适宜用于设计高通和带阻数字滤波器，即使对于低通和带通滤波器，混叠效应也在所难免。

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

- **例1** 设模拟滤波器的传递函数为

$$H(s)=\frac{2s}{s^2+3s+2}$$

用冲激响应不变法求相应的数字滤波器的传递函数 H（z）.

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

解： 对模拟滤波器的传递函数进行因式分解

$$H(s)=\frac{2s}{s^2+3s+2}=\frac{2s}{(s+1)(s+2)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1=\frac{2s}{s+2}\bigg|_{s=-1}=-2$$

$$K_2=\frac{2s}{s+1}\bigg|_{s=-2}=4$$

$$H(s)=\frac{-2}{s+1}+\frac{4}{s+2}$$

$$H(z)=\frac{-2}{1-e^{-T}z^{-1}}+\frac{4}{1-e^{-2T}z^{-1}}$$

$$=\frac{2+\left(2e^{-2T}-4e^{-T}\right)z^{-1}}{1-\left(e^{-T}+e^{-2T}\right)z^{-1}+e^{-3T}z^{-2}}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

例2 利用冲激响应不变法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，满足下列技术指标：

（1）3dB带宽的数字截止频率$\Omega_c = 0.2\pi \mathrm{rad}$；

（2）阻带大于30dB的数字边界频率 $\Omega_s = 0.5\pi \mathrm{rad}$；

（3）采样周期$\mathrm{T} = 10\pi \mu s$。

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

解：第一步：将给定的指标转换为相应的模拟低通滤波器的技术指标

按照 $\Omega = \omega T$，可得

$$\omega_c = 0.2\pi /(10\pi \times 10^{-6}) = 20\times 10^3 rad / s$$

$$\omega_s = 0.5\pi /(10\pi \times 10^{-6}) = 50\times 10^3 rad / s$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

第二步：设计归一化模拟低通滤波器

根据巴特沃思模拟低通滤波器的设计方法，求出该滤波器的阶数

$$n=\frac{\lg\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}}{\lg\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)}=\lg 31.61/\lg(50/20)=3.769$$

取n=4，四阶归一化巴特沃思模拟低通滤波器的传递函数为

$$H(\bar{s})=\frac{1}{(\bar{s}-s_1)(\bar{s}-s_2)(\bar{s}-s_3)(\bar{s}-s_4)}$$
$$=-\frac{0.92388\bar{s}+0.70711}{\bar{s}^2+0.76537\bar{s}+1}+\frac{0.92388\bar{s}+1.70711}{\bar{s}^2+1.84776\bar{s}+1}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

第三步：利用频率变换求出满足给定指标的实际模拟低通滤波器

对巴特沃思模拟低通滤波器进行反归一化处理，有

$$H(s)=H(\bar{s}\omega_c)$$

$$=-\frac{\omega_c^2(0.92388s+0.70711)}{s^2+0.76537\omega_c s+\omega_c^2}+\frac{\omega_c^2(0.92388s+1.70711)}{s^2+1.84776\omega_c s+\omega_c^2}$$

无限冲激响应（IIR）数字滤波器

第四步：按照冲激响应不变法求满足给定技术指标的数字滤波器

求得H (s)的z 变换式为

$$H(z)=\frac{10^4(-1.84776+0.88482z^{-1})}{1-1.31495z^{-1}+0.61823z^{-2}}+\frac{10^4(1.84776-0.40981z^{-1})}{1-1.08704z^{-1}+0.31317z^{-2}}$$

谢谢大家