第二章连续信号的分析

第二节连续信号的频域分析

三.傅里叶变换的性质

浙江大学控制科学与工程学系

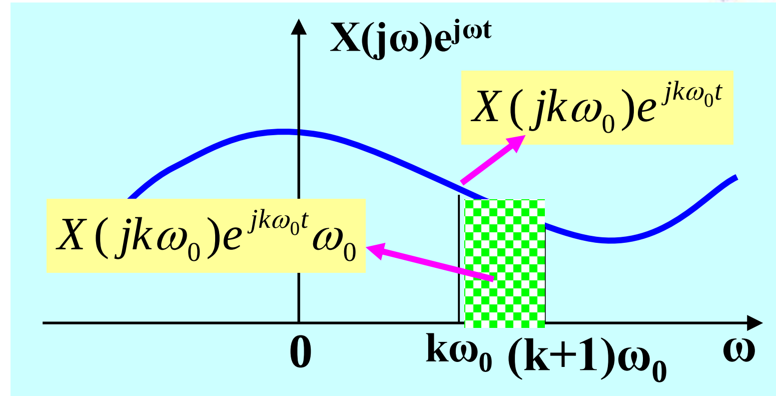
CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

信号的Fourier变换

信号的Fourier变换：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$



$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

复变函数

x(t)的频谱；不同频率复指数信号组成成分的相对度量

x(t)的傅里叶变换（频谱密度）

复指数信号的线性组合；

复指数信号出现在连续频率上

加权“幅度”为$X(j\omega)d\omega/(2\pi)$（绝对度量）

三、傅里叶变换的基本性质

- 线性
- 奇偶性
- 对偶性
- 尺度变换特性
- 时移特性
- 频移特性
- 微分特性
- 积分特性
- 帕斯瓦尔定理
- 卷积定理

作用：*1 更加深刻地了解信号时域与频域之间的关系

*2 简化Fourier变换与反变换的求取

傅里叶变换的性质（1）

（1）线性

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \xleftrightarrow{F} a_1X_1(j\omega)+a_2X_2(j\omega)$$

FT变换对

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]e^{-j\omega t}dt=a_1\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)e^{-j\omega t}dt+a_2\int_{-\infty}^{+\infty}x_2(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=a_1X_1(j\omega)+a_2X_2(j\omega)$$

所以，FT是线性变换。该性质可推广至任意信号的线性组合。

周期信号Fourier级数：

$$x(t) \xleftrightarrow{Fs} a_k \qquad y(t) \xleftrightarrow{Fs} b_k \quad \Rightarrow \quad Ax(t)+By(t) \xleftrightarrow{Fs} Aa_k+Bb_k$$

傅里叶变换的性质（2-1）

（2）奇偶性(共轭对称性)

共轭性质： $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$ ⇒ $x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

证明： $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ ⇒ $X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt$

令-ω= ω ⇒ $X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt$ ⇒ $x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

若x(t)为实数，则x(t)=x*(t)

共轭对称性： $x(t) = x^*(t)$ ⇒

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

两种形式：

$$\left.\begin{aligned} X(j\omega) &= \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} \\ X(j\omega) &= |X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}\right\}$$

傅里叶变换的性质（2-2）

推论1： 若 x(t) 为实数， 则 Re{X(jω)} 是 ω 的偶函数，Im{X(jω)} 是ω的奇函数；幅度谱为偶，相位谱为奇。

$$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$$

$$X(-j\omega)=X^*(j\omega)$$

$$\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

证明：

$$\left.\begin{aligned}&X^*(-j\omega)=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}-j\,\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}\\&X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}\\&X(j\omega)=X^*(-j\omega)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}\\&\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}\end{aligned}$$

$$|X(j\omega)|=\sqrt{(\mathrm{Re}\{X(j\omega\})^2+(\mathrm{Im}\{X(j\omega\})^2}\Rightarrow|X(-j\omega)|=|X(j\omega)|$$

|X(jω)|是ω的偶函数

$$\theta(\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}\{X(j\omega\}}{\mathrm{Re}\{X(j\omega\}}\Rightarrow\theta(-\omega)=-\theta(\omega)$$

θ(ω)是ω的奇函数

例：单边指数信号 $e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{a+j\omega}=\frac{a}{a^2+\omega^2}-j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$

傅里叶变换的性质（2-3）

推论2：若x(t)为实且偶函数，则频谱也为实值偶函数 $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

证明： $X(-j\omega)=X^*(j\omega)$

$$X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt\overset{t=-\tau}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=X(j\omega)$$

x(t)为实数

X(jω)是偶函数

$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

$X^*(j\omega)=X(-j\omega)=X(j\omega)$

X(jω)是实函数

例如双边指数信号 $e^{-a|t|}\overset{F}{\longleftrightarrow}\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

同理可证

推论3：若x(t)为实且奇函数，则频谱为纯虚且奇函数

$$X(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt\overset{t=-\tau}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=-\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=-X(j\omega)$$

$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$ ⇒ $X^*(j\omega)=X(-j\omega)=-X(j\omega)$

傅里叶变换的性质（2-4）

推论4：若实函数$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$　（$x_e(t)$表示$x(t)$的偶部，$x_o(t)$表示$x(t)$的奇部），则其频谱的实部由函数的偶部贡献，虚部由函数的奇部贡献。

$$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}\overset{F}{\longleftrightarrow}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$x_o(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}\overset{F}{\longleftrightarrow}j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

证明： $x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)$　$x(-t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(-j\omega)$　$X(-j\omega)=X^*(j\omega)$

再利用线性性质即可证明

$x_e(t)$是实且偶函数 ⇨ $x_e(t)$的频谱是实值偶函数

$x_o(t)$是实且奇函数 ⇨ $x_o(t)$的频谱是纯虚且奇函数

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

x (t)是实函数 ⇨ Re{X(jω)}是偶函数，Im{X(jω)}是奇函数

$$x(t)=e^{-a|t|}=e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)=2\cdot\frac{e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)}{2}=2Ev\{e^{-at}u(t)\}$$

$$e^{-at}u(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{a+j\omega}=\frac{a}{a^2+\omega^2}-j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-a|t|}\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

傅里叶变换的性质（2-5）

(1) 若$x(t)$为实信号, 即$x(t)=x^*(t)$ → $X(-j\omega)=X^*(j\omega)$ $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

若：$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$

$$\begin{cases} |X(j\omega)|=|X(-j\omega)| & \text{幅度谱偶对称} \\ \angle X(-j\omega)=-\angle X(j\omega) & \text{相位谱奇对称} \end{cases}$$

若：$X(j\omega)=\mathrm{Re}[X(j\omega)]+j\,\mathrm{Im}[X(j\omega)]$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[X(j\omega)]=\mathrm{Re}[X(-j\omega)] & \text{实部偶对称} \\ \mathrm{Im}[X(-j\omega)]=-\mathrm{Im}[X(j\omega)] & \text{虚部奇对称} \end{cases}$$

(2) 若x(t)为实偶信号, 即x(t)=x*(t)且x(-t)=x(t) → $x(-t)\xrightarrow{\mathcal{F}}X(-j\omega)$

实偶 $\begin{cases} x(t)=x^*(t) \\ x(-t)=x(t) \end{cases}$ → $\begin{cases} X(j\omega)=X^*(j\omega) \\ X(-j\omega)=X(j\omega) \end{cases}$ 实偶

(3) 若$x(t)$为实奇信号, 即$x(t)=x^*(t)$且$x(-t)=-x(t)$

实奇 $\begin{cases} x(t)=x^*(t) \\ x(-t)=-x(t) \end{cases}$ → $\begin{cases} -X(j\omega)=X^*(j\omega) \\ X(-j\omega)=-X(j\omega) \end{cases}$ 虚奇

(4) $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ $X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$ $\begin{cases} x_e(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} \\ x_o(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} \end{cases}$

傅里叶变换的性质（2-6）

x(t)是纯虚信号

x (t)是纯虚且偶函数

x (t)是纯虚且奇函数

傅立叶变换 → ?

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad jx(t) \xrightarrow{F} jX(j\omega)$$

x(t)是纯虚信号 → 傅立叶变换 → X(jω)实部是ω的奇函数，虚部是ω的偶函数

x (t)是纯虚且偶函数 → 傅立叶变换 → X(jω)为纯虚且偶函数

x (t)是纯虚且奇函数 → 傅立叶变换 → X(jω)为实且奇函数

傅里叶变换的性质（3-1）

（3）时间与频率的尺度变换

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} x(at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{|a|} X(\dfrac{j\omega}{a}) \\ \text{或：} \dfrac{1}{|a|} x(\dfrac{t}{a}) \xleftrightarrow{F} X(ja\omega) \end{cases}$$

证明： 从定义出发，做变量替代

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \overset{at=\tau}{=} \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} d(\frac{\tau}{a}) = \frac{1}{a} X(j\frac{\omega}{a}) & a>0 \\ \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} d(\frac{\tau}{a}) = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} d\tau = -\frac{1}{a} X(j\frac{\omega}{a}) & a<0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$

$$\frac{1}{|a|} x(\frac{t}{a}) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\left|1/a\right|} X(\frac{j\omega}{1/a}) = X(ja\omega)$$

说明：时域压缩⇒频域扩展

时域扩展⇒频域压缩

不同域存在互反关系

傅里叶变换的性质（3-2）

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$

证明 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ ，**a**为实数。冲激信号的尺度变换

证明：$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$ ⇒ $\delta(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|}$ ⇒ $\left.\begin{matrix} |a|\delta(at) \xleftrightarrow{F} 1 \\ \delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \end{matrix}\right\}$ ⇒

$|a|\delta(at) = \delta(t)$ ⇒ $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

特例：**a=-1** $x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$ $\delta(-t) = \delta(t)$

尺度变换的意义：时域与频域之间存在相反关系

时域反褶⇒频域反褶

a>1 例：**x(2t)**时域压缩 → **X(jω/2)**频域扩展

磁带放音速度快，频率高

0<a<1 例：**x(t/2)**时域扩展 → **X(j2ω)**频域压缩

磁带放音速度慢，频率低

傅里叶变换的性质（4-1）

（4）时移特性

$$x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad x(t-t_0) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j(\theta(\omega)-\omega t_0)}$$

证明：方法一

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X(j\omega)e^{j\omega t}} d\omega$$

$$x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{e^{-j\omega t_0} X(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

方法二：$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ 做变量替代 $\text{let}: \tau = t - t_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t} dt \stackrel{t-t_0=\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

该性质说明：信号在时间轴上的移位，不改变它的傅里叶变换的幅度谱，只引入了一个线性相位移（$-\omega t_0$）。

周期信号Fourier级数：

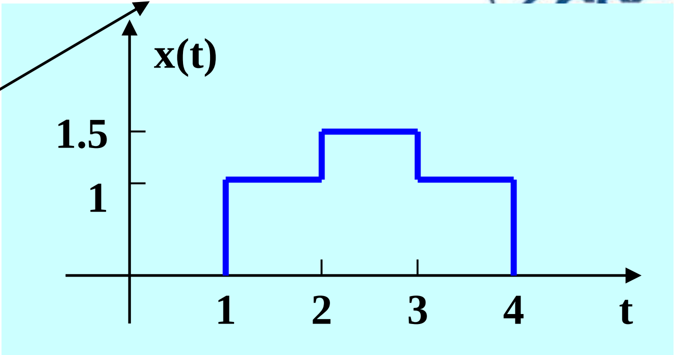
$$x(t) \stackrel{Fs}{\longleftrightarrow} a_k \quad \Rightarrow \quad x(t-t_0) \stackrel{Fs}{\longleftrightarrow} e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t_0} a_k$$

傅里叶变换的性质（4-2）

$$\sin ct = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

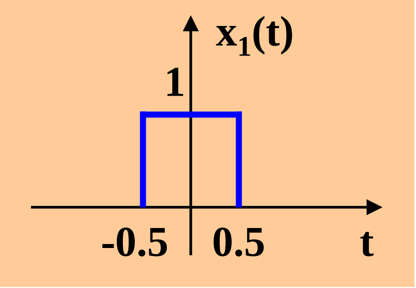
抽样函数

例 （线性+时移）已知**x(t)**如图所示，求**x(t)**的**Fourier**变换**X(jω)**。



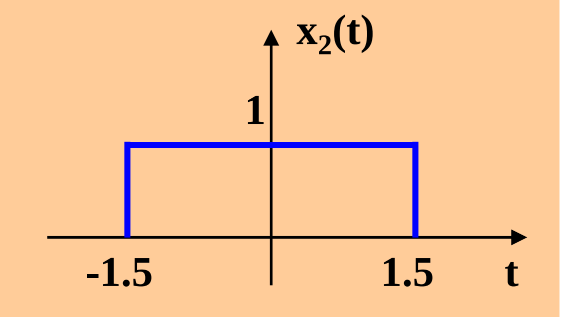
解：考虑矩形窗函数

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\0 & else\end{cases}\xleftrightarrow{F}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2T_1\sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



$$X_1(j\omega)=\left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{T_1=0.5}=\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$x_1(t-2.5)\xleftrightarrow{F}\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}\cdot e^{-j2.5\omega}$$



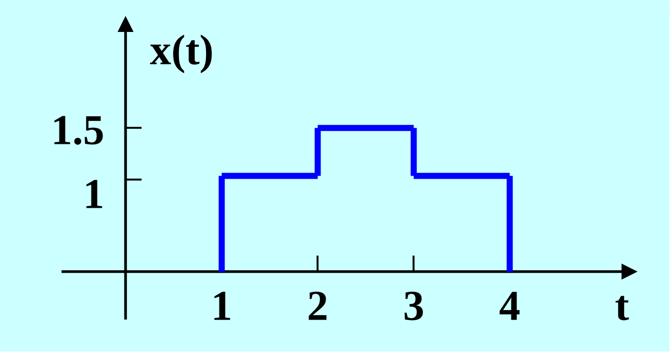
$$X_2(j\omega)=\left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{T_1=1.5}=\frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

$$x_2(t-2.5)\xleftrightarrow{F}\frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}\cdot e^{-j2.5\omega}$$

$$x(t)=0.5x_1(t-2.5)+x_2(t-2.5)$$

傅里叶变换的性质（4-3）

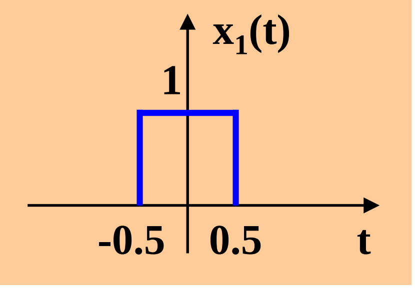
例（线性+时移）已知x(t)如图所示，求x(t)的Fourier变换X(jω)。



解：x(t)可以表示为如下线性组合

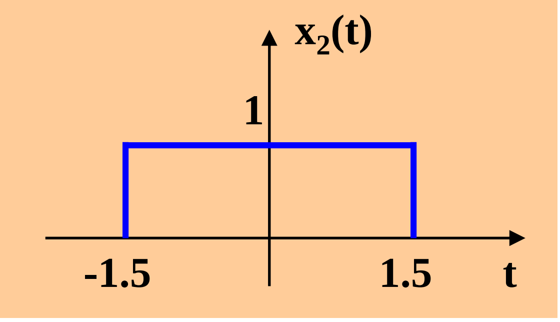
$$x(t)=0.5x_1(t-2.5)+x_2(t-2.5)$$

$x_1(t)$和$x_2(t)$是矩形窗函数



$$X_1(j\omega)=\left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{T_1=0.5}=\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$X_2(j\omega)=\left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{T_1=1.5}=\frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$



$$X(j\omega)=0.5e^{-j5\omega/2}X_1(j\omega)+e^{-j5\omega/2}X_2(j\omega)$$

$$=e^{-j5\omega/2}\frac{\sin(\omega/2)+2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

傅里叶变换的性质（5）

（5）频移特性

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$$

证明：$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t}x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = X(j(\omega-\omega_0))$$

同理：$$e^{-j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega+\omega_0))$$

X(t)乘以 $e^{\pm j\omega_0 t}$**，相当于频谱沿频率轴移位** $\mp\omega_0$ **--频谱搬移功能**

实际应用：$x_1(t) = \cos\omega_0 t$　　$x_2(t) = \sin\omega_0 t$

$$x(t)\cos\omega_0 t = \frac{x(t)}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}x(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}x(t)$$

$$x(t)\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))\right]$$

同理：$$x(t)\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[X(j(\omega-\omega_0)) - X(j(\omega+\omega_0))\right]$$

傅里叶变换的性质（6-1）

（6）微分与积分 $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$

微分： $\dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$ 推广 $\dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$

频域上分析微分方程表示的系统

积分： $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{j\omega} X(j\omega) + \underline{\pi X(0)\delta(\omega)}$

由积分产生的直流分量

例：求x(t)=u(t)的Fourier变换。

解：

$$\left.\begin{aligned} &\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \\ &u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

应用微分性质可以得到δ(t)的Fourier变换

$$\left.\begin{aligned} &u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \\ &\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta(t) \xleftrightarrow{F} j\omega\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = 1 + j\omega\pi\delta(\omega) = 1$$

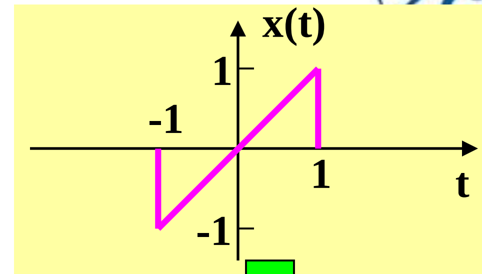
δ(ω)函数仅在ω=0时有值

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$$

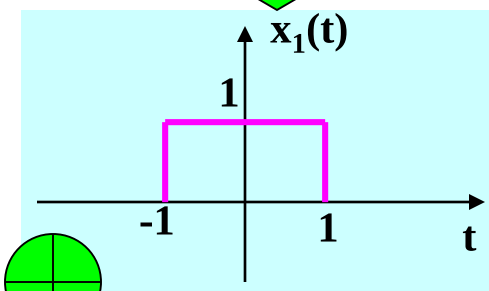
傅里叶变换的性质（6-2）

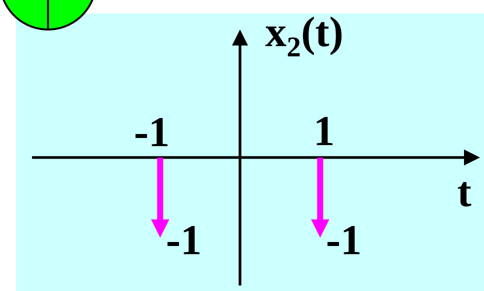
例：求下列图示信号x(t)的**Fourier**变换。



求导

解：首先对x(t)求导数，得 $g(t)=x'(t)=x_1(t)+x_2(t)$





$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{T_1=1} = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$x_2(t)=-\delta(t+1)-\delta(t-1)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} -e^{j\omega}-e^{-j\omega}=-2\cos\omega$$

$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} G(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\cos\omega$$

积分性质

$$x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{G(j\omega)}{j\omega}+\pi G(0)\delta(\omega)$$

$$=\frac{1}{j\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\cos\omega\right)$$

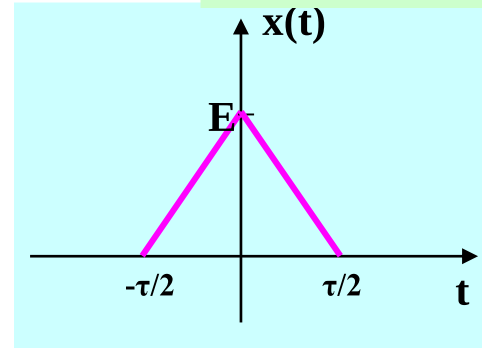
$$\pi\left[\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\cos\omega\right]\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

傅里叶变换的性质（6-3）

$$x(t)=\begin{cases} E(1-\frac{\tau}{2}|t|), & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

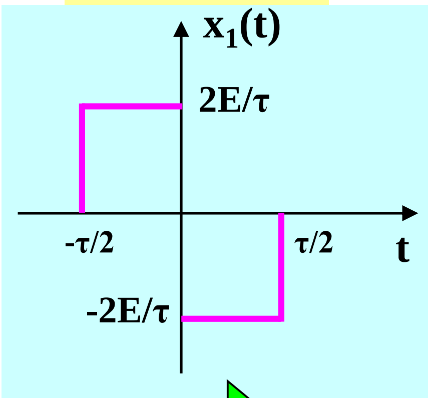
例： 求如图三角脉冲信号的**Fourier**变换.

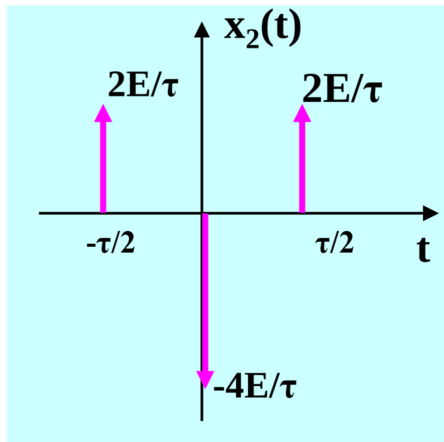


解：方法一：用微分和积分性质求取

$$x_1(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_2(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{2E}{\tau}\delta(t+\frac{\tau}{2})-\frac{4E}{\tau}\delta(t)+\frac{2E}{\tau}\delta(t-\frac{\tau}{2})$$





$$\delta(t-t_0)\xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}$$

$$x_2(t)\xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)=\frac{2E}{\tau}e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-\frac{4E}{\tau}+\frac{2E}{\tau}e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{4}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{4}})^2$$

$$=-\frac{8E}{\tau}\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

积分性质

$$x_1(t)\xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)=\frac{X_2(j\omega)}{j\omega}+\pi X_2(0)\delta(\omega)=-\frac{8E}{\tau}\frac{\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})}{j\omega}$$

积分性质

$$x(t)\xleftrightarrow{F}\frac{8E}{\tau}\frac{\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})}{\omega^2}$$

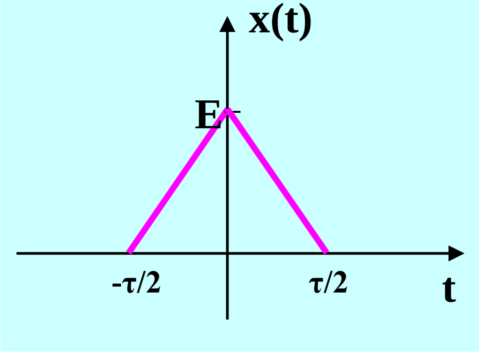
$$x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$\sin\frac{\omega}{4}\tau=\frac{e^{j\frac{\omega}{4}\tau}-e^{-j\frac{\omega}{4}\tau}}{2j}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

傅里叶变换的性质（6-4）

例：求如图三角脉冲信号的**Fourier**变换.

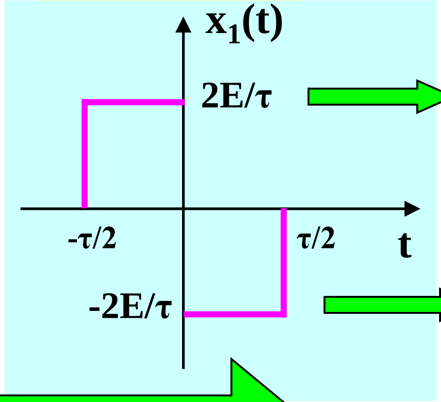


解：方法二：微分、时移、线性，最后利用积分性质求取

$$x_1(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_c\\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin\omega T_c}{\omega}$$

$$T_c=\frac{\tau}{4}$$



$$\xleftrightarrow{F} \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{4}}2\cdot\frac{2E}{\tau}\sin\omega\frac{\tau}{4}}{\omega}$$

$\oplus$

$$\xleftrightarrow{F} \frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{4}}2\cdot\frac{-2E}{\tau}\sin\omega\frac{\tau}{4}}{\omega}=\frac{4E}{\tau\omega}(e^{j\omega\frac{\tau}{4}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{4}})\sin\omega\frac{\tau}{4}$$

时移 $x(t-t_0)\xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

积分性质

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{4E}{\tau\omega}(e^{j\omega\frac{\tau}{4}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{4}})\sin\omega\frac{\tau}{4}$$

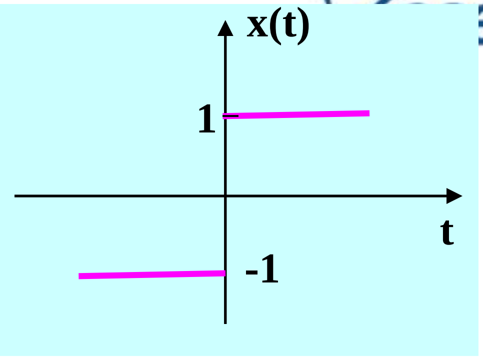
$$x(t)\xleftrightarrow{F}\frac{8E}{\tau}\frac{\sin^2(\frac{\omega\tau}{4})}{\omega^2}$$

$$x(t)=\sin\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$\sin\frac{\omega}{4}\tau=\frac{e^{j\frac{\omega}{4}\tau}-e^{-j\frac{\omega}{4}\tau}}{2j}$$

傅里叶变换的性质（6-5）

例：求符号函数sgn(t)的Fourier变换。



解： $\mathrm{sgn}(t)=u(t)-u(-t)=2O_d\{u(t)\}$

$$O_d\{u(t)\}=\frac{1}{2}\{u(t)-u(-t)\}$$

方法一： $u(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

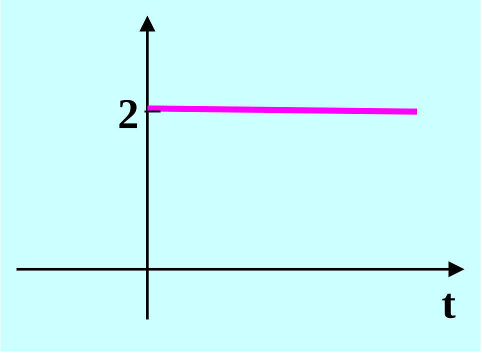
由实信号的共轭对称性得：

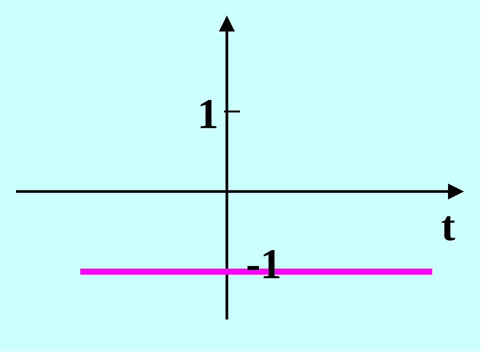
(虚部由函数的奇部贡献)

$$\mathrm{sgn}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{2}{j\omega}$$

同样利用共轭对称性得： $1=u(t)+u(-t)=2Ev\{u(t)\}\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi\delta(\omega)$

方法二： $\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$





$$u(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$1\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi\delta(\omega)$$

利用线性性质得：

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{2}{j\omega}$$

傅里叶变换的性质（7-1）

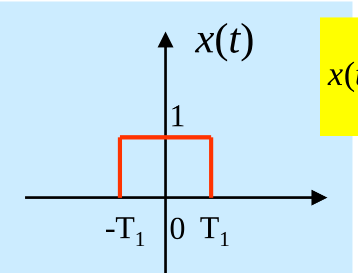
（7）对偶性

$$x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)=X(\omega)$$

$$X(t)\xleftrightarrow{F}2\pi x(-\omega)$$

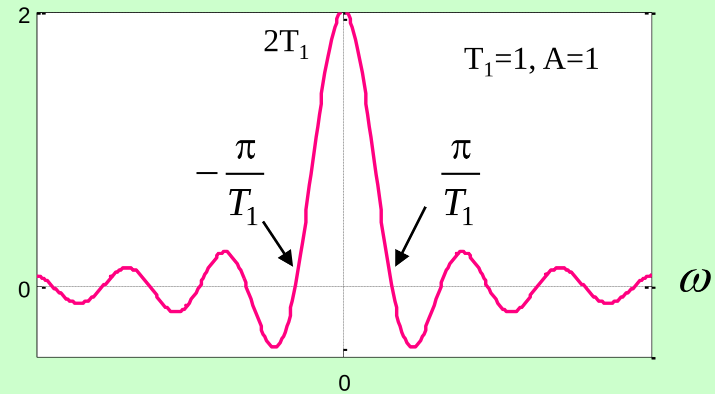
回顾

若x(t)为偶函数, 则 $X(t)\xleftrightarrow{F}2\pi x(\omega)$

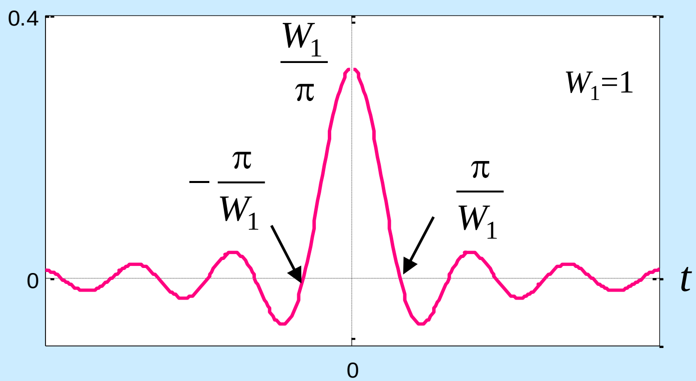


$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & else\end{cases}\xleftrightarrow{F}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}=2T_1\,\sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

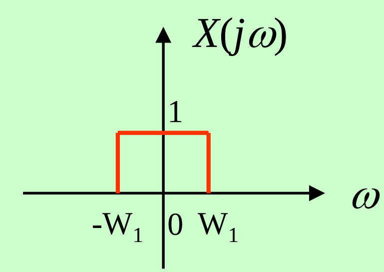
$$X(j\omega)=\boxed{\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}}$$



$$x(t)=\frac{\sin(W_1t)}{\pi t}=\frac{1}{2\pi}\cdot\boxed{\frac{2\sin(W_1t)}{t}}$$



$$\frac{W_1}{\pi}\sin c\left(\frac{W_1t}{\pi}\right)\xleftrightarrow{F}\begin{cases}1 & |\omega|<W_1\\ 0 & else\end{cases}$$



$$\delta(t)\xleftrightarrow{F}1$$

$$1\xleftrightarrow{F}2\pi\delta(\omega)$$

傅里叶变换的性质（7-2）

（7）对偶性

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X(\omega) \quad \Rightarrow \quad X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

证明 由傅里叶反变换得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

将上式的自变量t替换为$-t$，有

$$x(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

将t和ω互换，得

$$x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt = 2\pi x(-\omega)$$

例：求x(t)的Fourier变换 $x(t) = \dfrac{2}{t^2+1}$

解：已知

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \xrightarrow{a=1} e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2}{1+\omega^2} \xrightarrow{\text{对偶性质}} \frac{2}{t^2+1} \xleftrightarrow{F} 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

傅里叶变换的性质（7-3）

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X(\omega) \quad \Rightarrow \quad X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

重要对偶关系式

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad \Leftrightarrow \quad e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega-\omega_0))$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_c \\ 0 & else \end{cases} \xleftrightarrow{F} 2T_c \sin c\left(\frac{\omega T_c}{\pi}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega) \quad \Leftrightarrow \quad -jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\tau)d\tau$$

熟悉常用信号的变换对，利用对偶关系往往可简化F变换。

傅里叶变换的性质（8-1）

（8）帕斯瓦尔定理（Parseval's Relation ） —能量守恒

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}$$

信号在时域拥有的总能量 ＝ 频谱在单位频率内能量$(|X(j\omega)|^2/2\pi)$的总和

证明：$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\left(\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt}\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\underline{X(j\omega)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

对于周期信号：

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

周期信号平均功率 ＝ 各谐波频率分量平均功率之和

傅里叶变换的性质（8-2）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

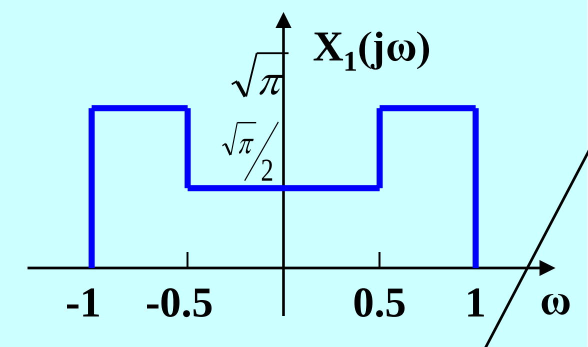
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

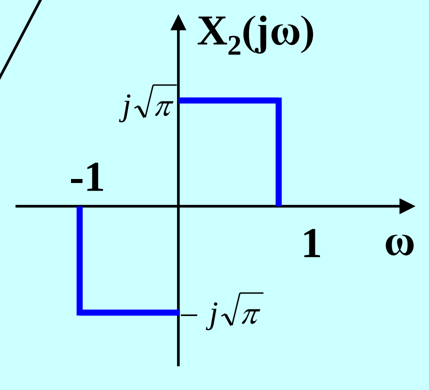
例：　已知$X_1(j\omega)$和$X_2(j\omega)$.

求

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1(t)|^2dt$$

$$D=\left.\frac{dx_2(t)}{dt}\right|_{t=0}$$





解:

(1) $$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X_1(j\omega)|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{-0.5}\pi d\omega+\int_{-0.5}^{0.5}\pi/4d\omega+\int_{0.5}^{1}\pi d\omega\right)=\frac{5}{8}$$

(2) $$\frac{dx_2(t)}{dt}\xleftrightarrow{F}j\omega X_2(j\omega)$$ ⇒ $$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega X_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

⇒ $$\left.\frac{dx_2(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega X_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right|_{t=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega X_2(j\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{0}\sqrt{\pi}\omega d\omega+\int_{0}^{1}-\sqrt{\pi}\omega d\omega\right)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶变换的性质（9-1）

频域系统分析

（9）时域卷积性质

时域卷积 ⟷ 频域相乘

$$\left.\begin{aligned}x(t)&\xleftrightarrow{F}X(j\omega)\\ h(t)&\xleftrightarrow{F}H(j\omega)\end{aligned}\right\}\Rightarrow x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)H(j\omega)$$

证明：从FT定义推导

$$\begin{aligned}x(t)*h(t)\xleftrightarrow{F}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x(t)*h(t)\big)e^{-j\omega t}dt&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\underline{e^{-j\omega\tau}H(j\omega)}d\tau\qquad\text{时移性质}\\&=X(j\omega)H(j\omega)\end{aligned}$$

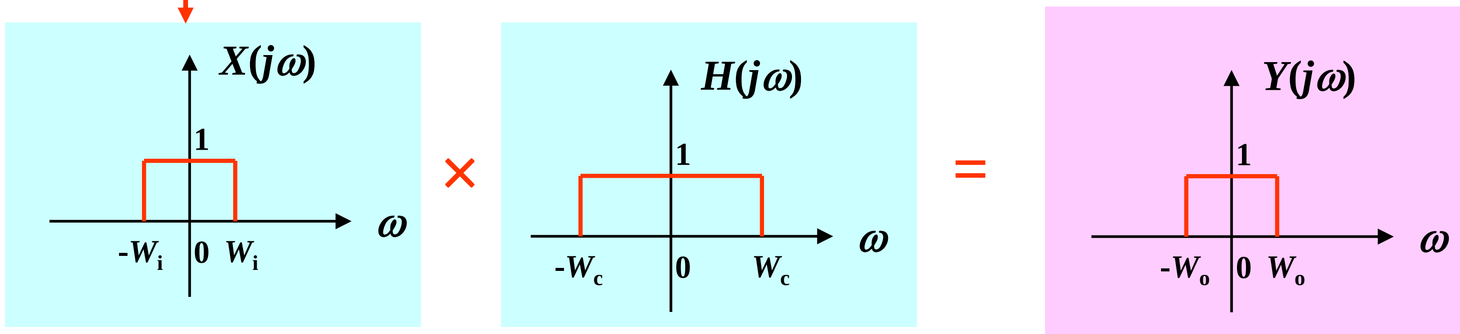
对于周期信号：

$$\left.\begin{aligned}x(t)&\xleftrightarrow{F}a_k\\ h(t)&\xleftrightarrow{F}b_k\end{aligned}\right\}\Rightarrow \int_T x(\tau)h(t-\tau)d\tau\xleftrightarrow{Fs}Ta_kb_k$$

傅里叶变换的性质（9-2）

例：

$$x(t)=\frac{\sin W_i t}{\pi t} \longrightarrow \boxed{h(t)=\frac{\sin W_c t}{\pi t}} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)=?$$



$W_o=\min(W_i, W_c)$

FT^{-1}

$$y(t)=\frac{\sin W_o t}{\pi t}$$

注意到：在此应用时域卷积性质会使问题的求解变得容易。

傅里叶变换的性质（10-1）

（10）调制性质（频域卷积）

一个信号被另一个信号相乘, 可以理解为用一个信号去调制另一个信号的振幅—调制性质

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

证明：可以直接用定义证明，也可以用对偶性证明

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) \quad \xrightarrow{\text{对偶性质}} \quad X_1(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_1(-\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega) \quad \xrightarrow{\text{对偶性质}} \quad X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x_2(-\omega)$$

卷积性质

$$X_1(jt) * X_2(jt) \xleftrightarrow{F} 4\pi^2 x_1(-\omega) x_2(-\omega)$$

对偶性质

$$4\pi^2 x_1(-t) x_2(-t) \xleftrightarrow{F} 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

时域反褶⇒频域反褶

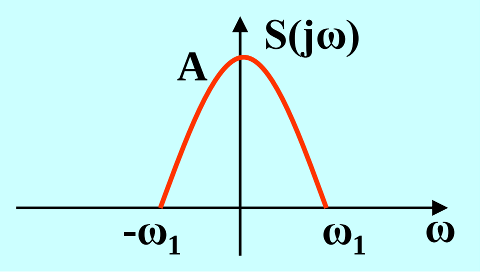
$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

傅里叶变换的性质（10-2）

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

例： 已知s(t)的频谱S(jω)，p(t)=cosω_0t， 求x(t)=s(t)p(t)的频谱。 $\omega_0 > \omega_1$

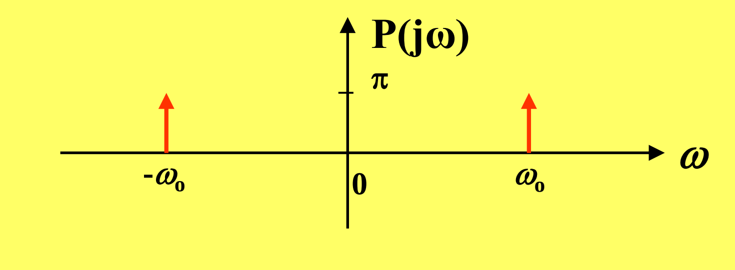


*

FT

解法一：应用调制性质

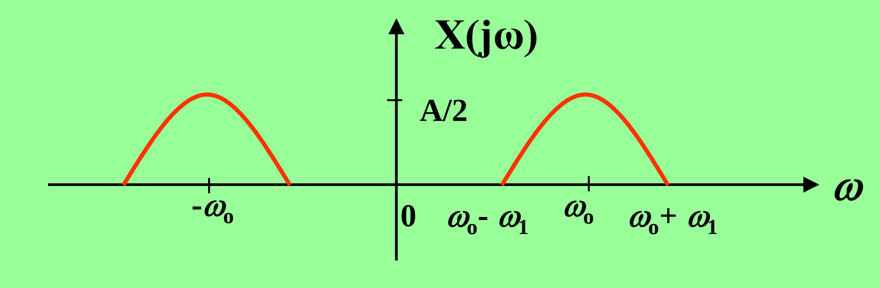
$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\{S(j\omega) * [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)]\}$$

=

$$= \frac{1}{2}\{S[j(\omega - \omega_0)] + S[j(\omega + \omega_0)]\}$$

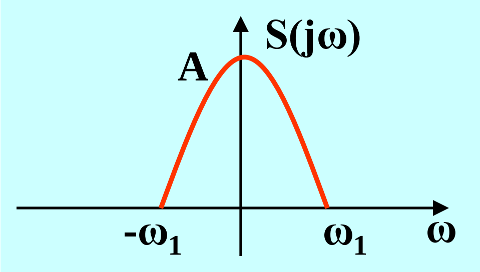


调制

说明: $s(t)$被余弦信号相乘后, $s(t)$的信息全部搬移到较高的频率中去, 但其信息被保留

傅里叶变换的性质（10-3）

例： 已知 s(t) 的频谱 S(jω)，p(t)=cosω_0t， 求 x(t)=s(t)p(t)的频谱。 $\omega_0>\omega_1$



解法二：应用频移性质

$$x(t)=s(t)p(t)=s(t)\cos\omega_0 t=\frac{e^{j\omega_0 t}s(t)+e^{-j\omega_0 t}s(t)}{2}$$

$$e^{j\omega_0 t}s(t)\xleftrightarrow{F}S[j(\omega-\omega_0)]$$

$$x(t)=s(t)p(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2}\left(S[j(\omega-\omega_0)]+S[j(\omega+\omega_0)]\right)$$

结论：信号**s(t)**与余弦信号相乘之后，虽然信号中包含的信息全部都搬移到较高的频率中去，但是**s(t)**的全部信息被原封不动地保留下来。

傅里叶变换的性质（10-4）

$$x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

$$p(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

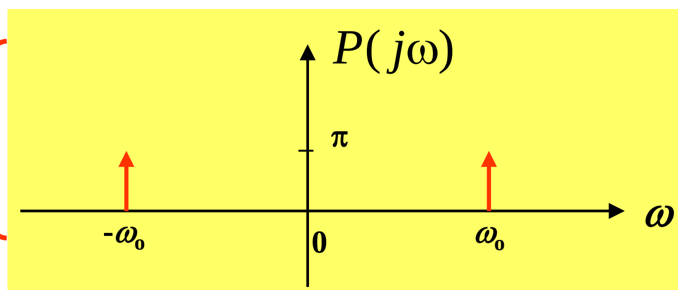
若再令 $g(t) = x(t)p(t)$，求S(jω).

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\{S[j(\omega-\omega_0)] + S[j(\omega+\omega_0)]\}$$

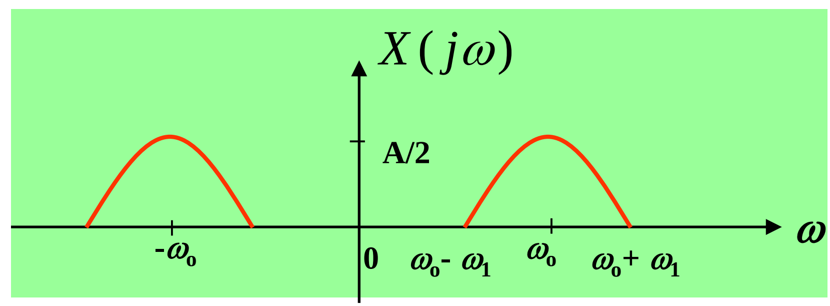
$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\{X(j\omega) * P(j\omega)\} = \frac{1}{2}\{X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))\}$$

$$= \frac{1}{4} S[j(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{4} S[j(\omega + 2\omega_0)] + \frac{1}{2} S(j\omega)$$

1/(2π) {

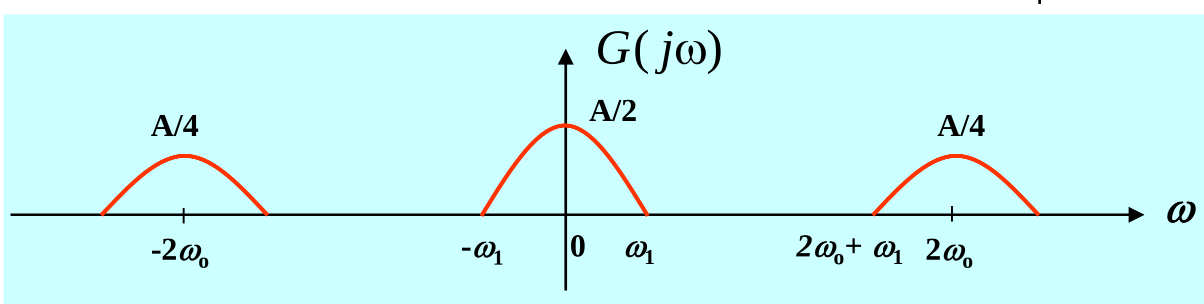


*

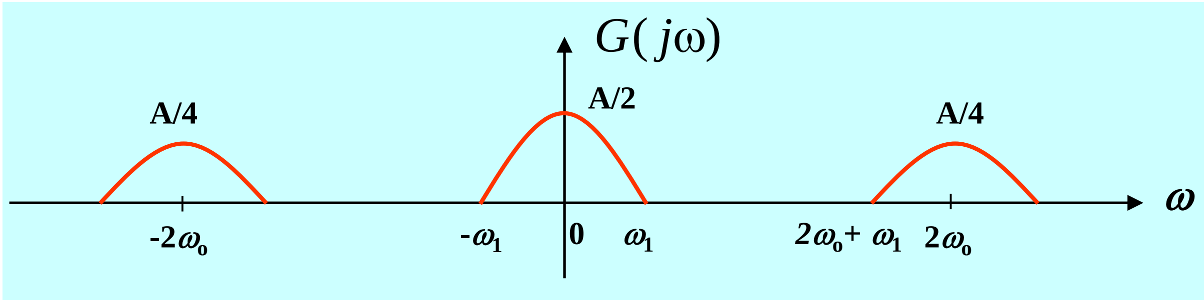


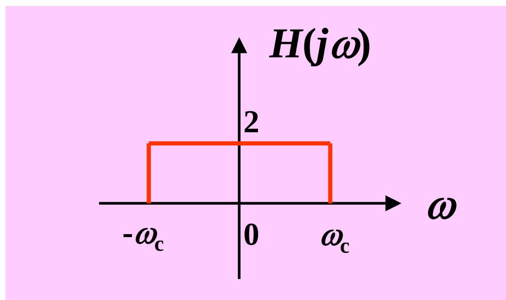
}

=



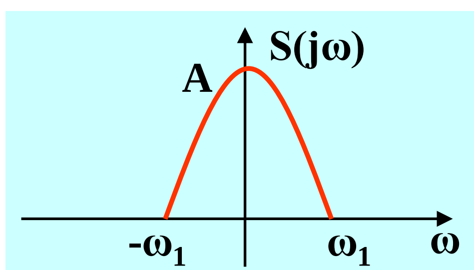
傅里叶变换的性质（10-5）





$\omega_1 < \omega_c < 2\omega_0 + \omega_1$

||



解调

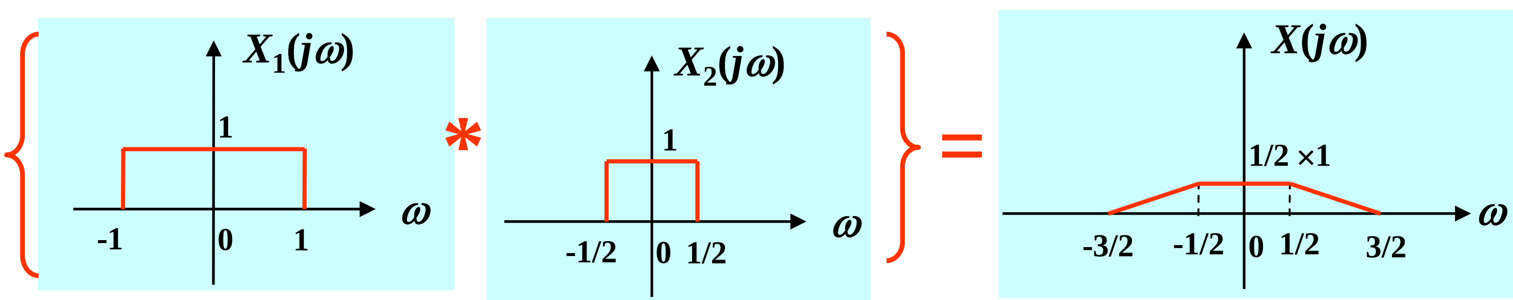
傅里叶变换的性质（10-6）

例： 已知 $x(t)=\dfrac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}$ ，求X(jω).

解： $x(t)=\pi\cdot\dfrac{\sin(t)}{\pi t}\cdot\dfrac{\sin(t/2)}{\pi t}$

$$\frac{\sin(t)}{\pi t} \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \quad X_1(j\omega) \qquad\qquad \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \quad \overset{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \quad X_2(j\omega)$$

π× 1/(2π)×



课后作业

- 作业一：**P99**
  - –23（1）,25,28,33
  - –63，64（MATLAB）
- 课后预习内容：
  - –拉普拉斯变换