

Articulated Robotics Lab5 Report

万晨阳 3210105327

实验要求

1. 写出ZJU-I型桌面机械臂的逆运动学解析解；
2. 1.将如下5组末端位姿参数分别代入逆运动学解，计算对应的5组关节角；
 - ① (0.117, 0.334, 0.499, -2.019, -0.058, -2.190)
 - ② (-0.066, 0.339, 0.444, -2.618, -0.524, -3.141)
 - ③ (0.3, 0.25, 0.26, -2.64, 0.59, -2.35)
 - ④ (0.42, 0, 0.36, 3.14, 1, -1.57)
 - ⑤ (0.32, -0.25, 0.16, 3, 0.265, -0.84)
3. 将所求关节角作为参数输入仿真程序，从仿真中得到机械臂末端执行器的空间位置和姿态，与第2步给定的位置和姿态进行比对；

实验过程与结果

逆运动学解析求解过程

对于ZJU-I型桌面机械臂，我基于DH参数表，沿用对于UR机械臂的逆运动学求解过程进行求解。我有：

$${}^0T_6 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$
$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & d_x \\ n_y & o_y & a_y & d_y \\ n_z & o_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

首先利用 1T_6 ：

$${}^1T_6 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 = ({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_6$$

利用第三行第四列和第三行第三列相等，可以得到：

$$\begin{cases} d_2 + d_4 - d_6 \cos(\theta_5) &= d_y \cos(\theta_1) - d_x \sin(\theta_1) \\ -\cos(\theta_5) &= a_y \cos(\theta_1) - a_x \sin(\theta_1) \end{cases}$$

可以求出 θ_1, θ_5 ：

$$\theta_1 = \text{atan2}(A, B) - \text{atan2}(C, \pm \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}) \quad (1)$$

$$\theta_5 = \pm \cos^{-1}(a_x \sin(\theta_1) - a_y \cos(\theta_1)) \quad (2)$$

其中： $A = d_y - d_6 \cdot a_y$, $B = d_x - d_6 \cdot a_x$, $C = d_2 + d_4$.

接着利用 1T_5 ：

$${}^1T_5 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 = ({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_6 \cdot ({}^5T_6)^{-1}$$

第三行第三列相等可以得到：

$$o_y \cos(\theta_1) \cos(\theta_6) + n_y \cos(\theta_1) \sin(\theta_6) - o_x \cos(\theta_6) \sin(\theta_1) - n_x \sin(\theta_1) \sin(\theta_6) = -\cos(\theta_5)$$

可以求出 θ_6 :

$$\theta_6 = \text{atan2}(D, E) + \text{atan2}(F, 0)$$

其中: $D = n_y \cos(\theta_1) - n_x \sin(\theta_1)$, $E = o_y \cos(\theta_1) - o_x \sin(\theta_1)$, $F = \sin(\theta_5)$.

接着利用 1T_4 :

$${}^1T_4 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 = ({}^0T_1)^{-1} \cdot {}^0T_6 \cdot ({}^5T_6)^{-1} \cdot ({}^4T_5)^{-1}$$

第一行第四列, 第二行第四列相等可以得到:

$$\begin{aligned} a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \cos(\theta_2) &= d_x \cos(\theta_1) + d_y \sin(\theta_1) - a_y d_6 \sin(\theta_1) - a_x d_6 \cos(\theta_1) \\ &\quad - d_5 n_y \sin(\theta_1) \sin(\theta_6) - d_5 o_x \cos(\theta_1) \cos(\theta_6) \\ &\quad - d_5 n_x \cos(\theta_1) \sin(\theta_6) - d_5 o_y \cos(\theta_6) \sin(\theta_1) \\ a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_2 \sin(\theta_2) &= d_1 - d_z + a_z d_6 + d_5 o_z \cos(\theta_6) + d_5 n_z \sin(\theta_6) \end{aligned}$$

解得:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \pm \cos^{-1} \left(\frac{M^2 + N^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \right) \\ \theta_2 &= \text{atan2}(S, T) \end{aligned} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} M &= d_x \cos(\theta_1) + d_y \sin(\theta_1) - a_y d_6 \sin(\theta_1) - a_x d_6 \cos(\theta_1) \\ &\quad - d_5 n_y \sin(\theta_1) \sin(\theta_6) - d_5 o_x \cos(\theta_1) \cos(\theta_6) \\ &\quad - d_5 n_x \cos(\theta_1) \sin(\theta_6) - d_5 o_y \cos(\theta_6) \sin(\theta_1) \\ N &= d_1 - d_z + a_z d_6 + d_5 o_z \cos(\theta_6) + d_5 n_z \sin(\theta_6) \\ S &= \frac{(a_3 \cos(\theta_3) + a_2)N - a_3 \sin(\theta_3)M}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 \cos(\theta_3)} \\ T &= \frac{M + a_3 \sin(\theta_3)S}{a_3 \cos(\theta_3) + a_2} \end{aligned}$$

接着利用 1T_5 第二行第一列相等得到:

$$\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_5) = o_z \sin(\theta_6) - n_z \cos(\theta_6)$$

解得:

$$\theta_4 = \sin^{-1} \left(\frac{o_z \sin(\theta_6) - n_z \cos(\theta_6)}{\cos(\theta_5)} \right) - \theta_2 - \theta_3$$

此时, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 的求解都已完成。

数据代入求解

代入这五组末端数据分别求解关节角。对于正负号的问题, 公式 (1) 与 (2) 的正负号始终为同号, (3)符号可自由变化。

以下对于每一组末端参数有四组解, 符号情况分别为:

- **solution 1** 对应于公式 (1) 与 (2) 取 $-$, (3) 正负号取 $+$
- **solution 2** 对应于公式 (1) 与 (2) 取 $-$, (3) 正负号取 $-$

- **solution 3** 对应于公式 (1) 与 (2) 取 **+**, (3) 正负号取 **+**
- **solution 4** 对应于公式 (1) 与 (2) 取 **+**, (3) 正负号取 **-**

结果为角度而非弧度。

- ① (0.117, 0.334, 0.499, -2.019, -0.058, -2.190)
- ② (-0.066, 0.339, 0.444, -2.618, -0.524, -3.141)
- ③ (0.3, 0.25, 0.26, -2.64, 0.59, -2.35)
- ④ (0.42, 0, 0.36, 3.14, 1, -1.57)
- ⑤ (0.32, -0.25, 0.16, 3, 0.265, -0.84)

结果:

IK solutions of end position 1:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
solution 1	-110.74	-60.21	29.37	3.05	-158.11	45.00
solution 2	-110.74	-32.11	-29.37	33.69	-158.11	45.00
solution 3	59.98	31.13	30.45	-31.60	30.02	40.02
solution 4	59.98	60.26	-30.45	0.17	30.02	40.02

IK solutions of end position 2:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
solution 1	-81.25	-64.01	39.03	-31.11	-154.62	8.42
solution 2	-81.25	-26.7	-39.03	9.63	-154.62	8.42
solution 3	90.04	26.39	37.86	-4.27	30.00	0.08
solution 4	90.04	62.59	-37.86	35.25	30.00	0.08

IK solutions of end position 3:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
solution 1	-135.5	-118.37	77.1	-5.84	173.97	6.39
solution 2	-135.5	-45.12	-77.1	75.11	173.97	6.39
solution 3	36.56	45.26	76.96	-75.46	-0.6	0.58
solution 4	36.56	118.38	-76.96	5.36	-0.6	0.58

IK solutions of end position 4:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
solution 1	-176.2	-92.53	47.24	12.52	176.75	2.02
solution 2	-176.2	-47.4	-47.24	61.88	176.75	2.02
solution 3	-3.78	47.4	47.24	-61.89	3.13	-2.07
solution 4	-3.78	92.53	-47.24	-12.53	3.13	-2.07

IK solutions of end position 5:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
solution 1	144.77	-120.74	60.24	-12.48	-177.72	5.9
solution 2	144.77	-63.31	-60.24	50.57	-177.72	5.9
solution 3	-42.15	63.17	60.34	-50.15	4.29	-0.73
solution 4	-42.15	120.7	-60.34	13.	4.29	-0.73

仿真验证

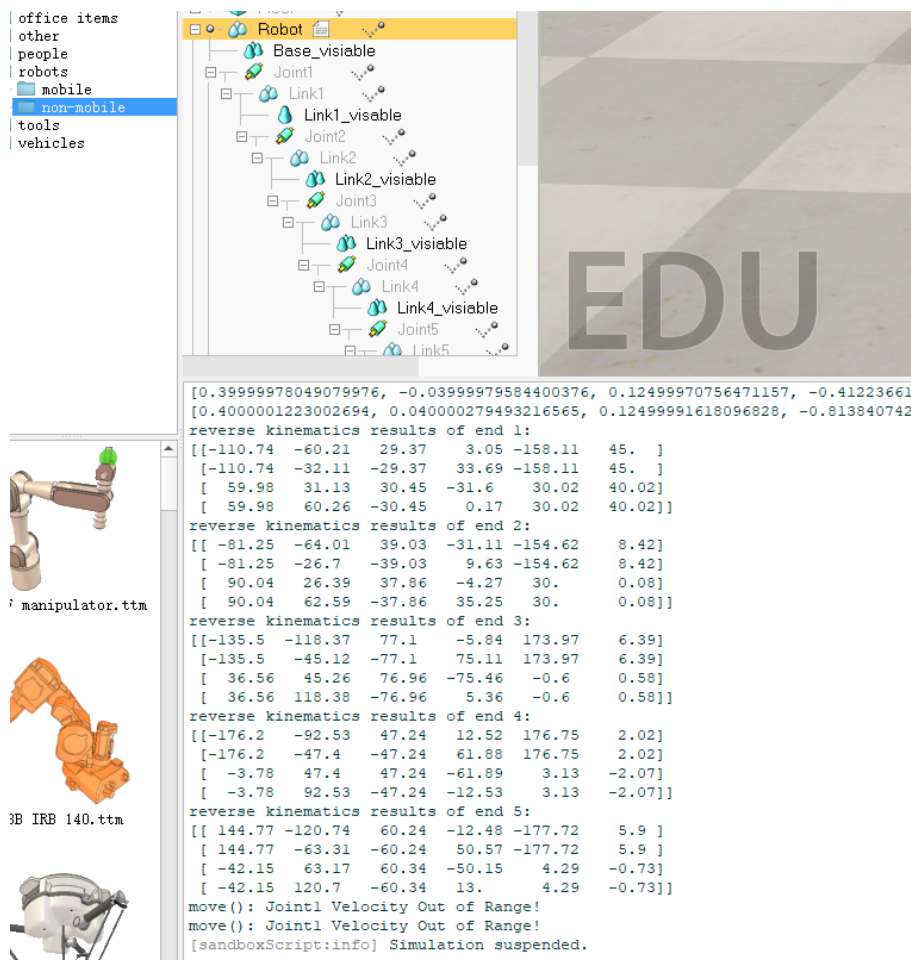
在这一步中，一开始我选择使用输入参数利用机械臂进行仿真模拟，但是发现仿真结果的 xyz 基本一致，但是欧拉角有时会有较大差距，我认为是仿真的实际运动运动存在一定误差。所以为了验证结果的正确性，我选择使用仿真环境中的 **IKSolver** 进行求解，比较数值求解的结果和我解析解带入求解的结果的差距。在 `sysCall_init` 函数中编写如下代码对结果进行展示：

PYTHON

```
ends = [[0.117, 0.334, 0.499, -2.019, -0.058, -2.190],
        [-0.066, 0.339, 0.444, -2.618, -0.524, -3.141],
        [0.3, 0.25, 0.26, -2.64, 0.59, -2.35],
        [0.42, 0, 0.36, 3.14, 1, -1.57],
        [0.32, -0.25, 0.16, 3, 0.265, -0.84]]

for i in range(len(ends)):
    angles = iks.solve(ends[i])
    print("reverse kinematics results of end %d: " % (i+1))
    angles = angles.T * 180 / np.pi
    np.set_printoptions(suppress=True)
    print(angles.round(2))
```

得到输出结果如下，其中每一行为对应一组可能的关节参数（即一组解），对每一组末端数据给出了四组可能解。比较 **IKSolver** 与我的求解器的结果，基本一致，可以验证我前面的求解过程是正确的。



下面是我的求解器的结果，作为比较。

```
● IK solutions of end 1:  
[ -110.74  -60.21   29.37    3.05 -158.11   45.  ]  
[ -110.74  -32.11  -29.37   33.69 -158.11   45.  ]  
[  59.98   31.13   30.45  -31.6   30.02  40.02]  
[  59.98   60.26  -30.45    0.17   30.02  40.02]  
  
IK solutions of end 2:  
[ -81.25  -64.01   39.03  -31.11 -154.62    8.42]  
[ -81.25  -26.7   -39.03    9.63 -154.62    8.42]  
[ 90.04  26.39  37.86  -4.27  30.    0.08]  
[ 90.04  62.59 -37.86  35.25  30.    0.08]  
  
IK solutions of end 3:  
[ -135.5  -118.37   77.1    -5.84  173.97    6.39]  
[ -135.5  -45.12  -77.1    75.11  173.97    6.39]  
[  36.56   45.26   76.96  -75.46   -0.6    0.58]  
[  36.56  118.38  -76.96    5.36   -0.6    0.58]  
  
IK solutions of end 4:  
[ -176.2   -92.53   47.24   12.52  176.75    2.02]  
[ -176.2   -47.4   -47.24   61.88  176.75    2.02]  
[  -3.78   47.4   47.24  -61.89    3.13   -2.07]  
[  -3.78   92.53  -47.24  -12.53    3.13   -2.07]  
  
IK solutions of end 5:  
[ 144.77 -120.74   60.24  -12.48 -177.72    5.9 ]  
[ 144.77  -63.31  -60.24   50.57 -177.72    5.9 ]  
[ -42.15   63.17   60.34  -50.15    4.29  -0.73]  
[ -42.15  120.7   -60.34   13.    4.29  -0.73]
```

总结

在本次实验中，我首先通过计算完成了解析解公式推导的过程，然后利用Python编写了针对该任务的求解器。在公式推导过程中的正负号问题导致我在后面的调试过程中一度遇到了比较大的困难，总体而言在求解过程中我认识到了逆运动学相较于正运动学的复杂性，同时更熟悉了对于多解情况的处理。