夏学期第四周作业参考答案

第一题　5-15　设系统的框图如图 5-44 所示。

(1) 绘制 α=0.5 时的根轨迹；

(2) 求 α=0.5, K=10 时的系统的闭环极点与相应的 ζ 值；

(3) 求在 K=1 时， α 分别等于 0, 0.5, 4 的阶跃响应的 $\sigma\%$ 与 T_s，并讨论 α 值大小对动态性能的影响。

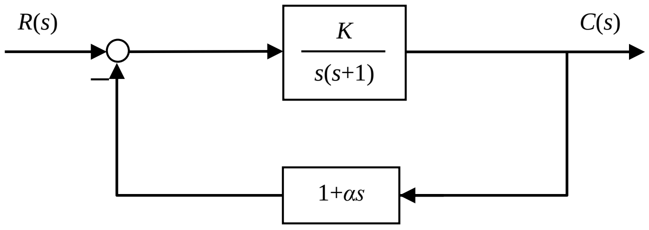


图 5-44 题 5-15 系统框图

解：系统的特征方程 $s^2+s+k(1+\alpha s)=0$

当 α =0.5 时有:$1+\dfrac{0.5k(s+2)}{s(s+1)}=0$

（1） $G_e(s)$ 中开环极点：$S_1=0$　　$S_2=-1$；开环零点为：$S_3=-2$

（2）根轨迹关于实轴对称，实轴上的根轨迹区间为 $(-\infty,-2)\cup(-1,0)$

（3）渐进线有一条，为实轴

（4）：出射角：$\begin{array}{ll} s_1=0 & \varphi_1=180^\circ \\ s_2=-1 & \varphi_2=0^\circ \end{array}$

（5）：与虚轴的交点

有其特征方程：把 $j\omega_0$ 带入 $s^2+(2+K\alpha)s+K=0$

有实部虚部分别相等 $\begin{array}{c} K-\omega_0{}^2=0 \\ (2+0.5K)\omega_0=0 \end{array}$ 可得：$\omega_0=0$；K=0

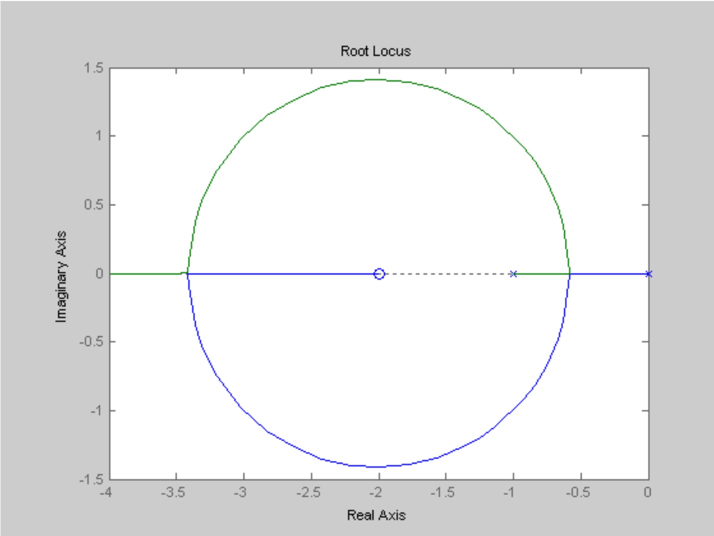
（6）可能的分离点：

$$b(s)\frac{da(s)}{ds}-a(s)\frac{db(s)}{ds}=0$$

已知：$a(s)=s^2+s$，$b(s)=0.5S+1$，入解得：$s_{1,2}\ =\ -2\pm\sqrt{2}$

经相位条件检验可知：$s_{1,2}$ 满足条件。所以分离点为：$s_{1,2}\ =\ -2\pm\sqrt{2}$

综上所述，可得根轨迹草图为：



（2）当 α =0.5,K=10 时　特征方程 $s^2+6s+10=0$

极点 $s_{1,2}=-3\pm j$

令 $S=-\alpha\pm j\beta$　　则有 $\alpha=3$；$\beta=1$

$\because\quad \alpha=\zeta\omega_0=3$

$$\beta=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}=1\qquad 解之得:\zeta=\frac{3}{\sqrt{10}}=0.949$$

（3）当K=1时 $\Phi(S)=\dfrac{1}{S^2+(1+\alpha)S+1}$

当：$\alpha=0$时

$\Phi(S)=\dfrac{1}{S^2+S+1}$

所以：

$2\zeta\omega_0=1$

$\omega_0{}^2=1$　　解得：

$\zeta=0.5$；$\omega_0=1$

$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=16.3\%$

$t_s=\dfrac{3}{\zeta\omega_0}=6$

当：$\alpha=0.5$时

$\Phi(S)=\dfrac{1}{S^2+1.5S+1}$

所以：

$2\zeta\omega_0=1.5$

$\omega_0{}^2=1$　　解得：

$\zeta=0.75$；$\omega_0=1$

$\sigma\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=2.8\%$

$t_s=\dfrac{3}{\zeta\omega_0}=4$

当：$\alpha=4$时 $\Phi(S)=\dfrac{1}{S^2+5S+1}$

所以:$2\zeta\omega_0=5$

$\omega_0{}^2=1$　　解得:$\zeta=2.5$；$\omega_0=1$

此时系统不振荡。

$\sigma\%=0$，主导极点 $s=\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$，对应时间常数 $T=4.8$，$t_s=3T=14.4$

第二题　5-17　设负反馈控制系统中，前向通道传递函数 $G(s)=\dfrac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}$（$K^*>0$），$H(s)=1$。

(1)　概略绘出系统的根轨迹图，并判断闭环系统的稳定性；

(2)　如果改变反馈通道的传递函数，使 $H(s)=1+2s$，试判断 $H(s)$改变后的系统稳定性，研究由于 $H(s)$改变所产生的效应。

解：（1）绘制根轨迹图

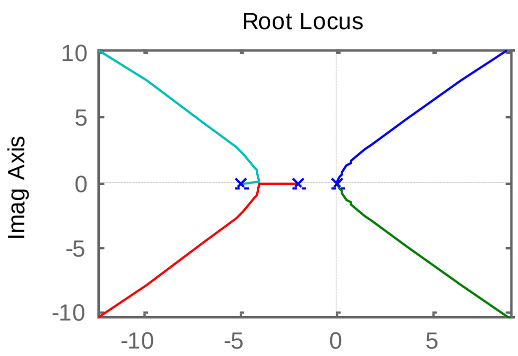
系统无开环有限零点，系统的开环有限极点为：$p_1=p_2=0$，$p_3=-2$，$p_4=-5$

实轴上根轨迹区间为：[-5, -2]

根轨迹有 4 条渐近线，且 $\sigma_a=-1.75$，$\varphi_a=\pm45°,\pm135°$

根轨迹的分离点 d：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+5}=0$，d=-4，分离角 $\dfrac{(2k+1)\pi}{l}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

概略绘制系统根轨迹：



（2）H(s)=1+2s 时，分析系统根轨迹

系统开环传递函数为：$G(s)H(s)=\dfrac{K_1^*(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)}$，其中 $K_1^*=2K^*$，H(s)的改变使系统增加了一个开环零点。

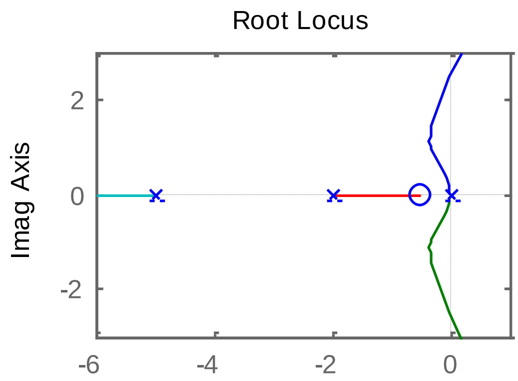
系统开环有限零点：$z_1=-0.5$，系统的开环有限极点为：$p_1=p_2=0$，$p_3=-2$，$p_4=-5$

实轴上的根轨迹区间为：$(-\infty, -5)$，[-2, -0.5]

根轨迹有 3 条渐近线，$\sigma_a=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}p_i-z_1}{3}=-2.17$，$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi$

根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为 $D(s)=s^4+7s^3+10s^2+2K^*s+K^*=0$，由劳思表可解得根轨迹与虚轴得交点为：$s_{1,2}=\pm j2.55, K^*=22.75$。

概略绘制系统根轨迹如下：



由图知：当 0<K*<22.75 时，闭环系统稳定。
附加的开环零点 z_1=-0.5，使系统的根轨迹向 s 平面的左半平面弯曲，因而闭环系统可在 K* 的一定范围内稳定，改善了系统的稳定性。

第三题　5-22　设负反馈控制系统的前向通道传递函数 $G_x(s)$和反馈通道传递函数 $H_s(s)$分别为

$$G_x(s)=\frac{K_x}{s(s+1)(s+5)}\;;\qquad H_s(s)=\frac{K_h(s+5)}{s+2}$$

(1)　确定使闭环系统单位阶跃响应的稳态输出为 1 的 K_h 值；
(2)　确定使闭环复数极点具有 ζ=0.65 的 K_xK_h 值；
(3)　计算系统的 M_p, T_p, T_s。

解：开环传递函数为：

$$G_x(s)H_s(s)=\frac{K_x}{s(s+1)(s+5)}\cdot\frac{K_h(s+5)}{s+2}=\frac{K_xK_h(s+5)}{s(s+1)(s+5)(s+2)}$$
$$=\frac{K_xK_h}{s(s+1)(s+2)};\ \text{note: -5 is a closed-loop pole}$$

闭环传递函数 C(s)/R(s) ：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_x(s)}{1+G_x(s)H(s)}=\frac{\dfrac{K_x}{s(s+1)(s+5)}}{1+\dfrac{K_xK_h(s+5)}{s(s+1)(s+5)(s+2)}}=\frac{K_x(s+2)}{(s+5)[s(s+1)(s+2)+K_xK_h]}$$

(1)　K_h 对单位阶跃响应稳态输出为 1 c(∞)=1

$$C(\infty)=\lim_{s\to 0}sC(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K_x(s+2)}{(s+5)[s(s+1)(s+2)+K_xK_h]}=\frac{2K_x}{5K_xK_h}=\frac{2}{5K_h}=1$$

因此，　K_h = 0.4

(2)　绘制根轨迹确定ζ=0.65 的根

(1) 开环极点：　n=3, p1=0, p2= -1, p3= -2
　　开环零点：　w=0
(2) 实轴上的根轨迹：[0, -1], [-2, -∞]

(3) 渐近线： $\gamma=\dfrac{(1+2n)\pi}{3}=\pm 60^{\circ},\pi$

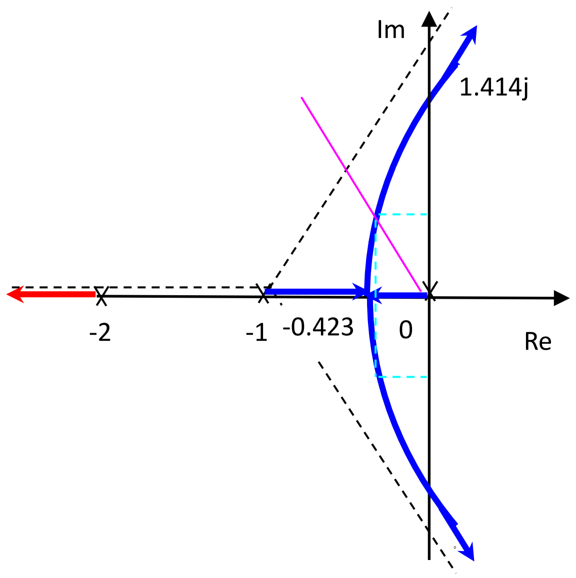
$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}(p_i)}{3}=-1$$

(4) 实轴上的分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}=0\Rightarrow\begin{cases}d_1=-0.423\\ d_2=-1.577(abandon)\end{cases}$

(5) 与虚轴的交点：

$$1+G(jw)H(jw)=0\Rightarrow\begin{cases}w^3=w\\ K_xK_h=3w^2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}w=\pm\sqrt{2}\\ K_xK_h=6\end{matrix}$$

对 ζ =0.65， $\eta=\cos^{-1}\zeta=\cos^{-1}0.65=49.5^{\circ}$



共轭复根为 -0.368+j0.431, -0.368-j0.431

有幅值条件计算 K_xK_h ：

$$K_xK_h=|s-p_1|\cdot|s-p_2|\cdot|s-p_3|=0.731$$

(3) 由共轭复根 -0.368+j0.431, -0.368-j0.431 可以求出

$$T_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=\frac{3.5}{0.368}=9.51 \qquad \sigma\%=100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\%=6.8\%$$

$$M_p=1+0.068=1.068$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{0.431}=7.285$$