离散信号的分析

主 讲 教 师 ： 齐 冬 莲

离散信号的Z域分析

七、Z变换与其他变换之间的关系

- Z变换与拉普拉斯变换的关系
- Z变换与DTFT的关系
- Z变换与DFT的关系

离散信号的Z域分析

1、Z变换与拉普拉斯变换的关系

- **抽样信号**

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

- **取拉氏变换**

$$X_s(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-snT}$$

离散信号的Z域分析

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = |z| e^{j\Omega}$$

- 令 $z = e^{sT}$，即 $s = \frac{1}{T}\ln z$

$$X_s(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = X(z)$$

$$L[x_s(t)]\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = Z[x(n)]$$

离散信号的Z域分析

从S平面到Z平面的映射

$$z = e^{sT}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\omega T} = |z| e^{j\Omega}$$

离散信号的Z域分析

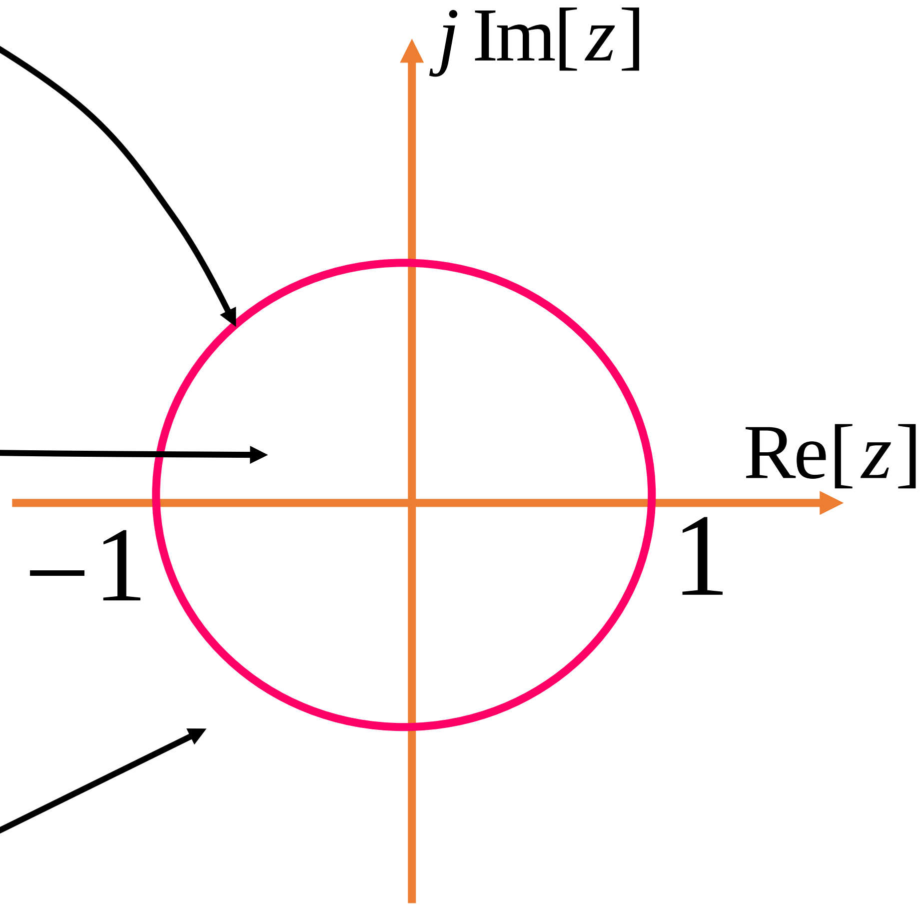
(1) $\sigma = 0 \quad s = j\omega$

$|z| = e^{\sigma T} = 1$

(2) $\sigma < 0 \quad s = \sigma + j\omega$

$|z| < 1$

(3) $\sigma > 0 \quad |z| > 1$



离散信号的Z域分析

2、 Z变换与DTFT的关系

- 离散信号$x(n)$的Z变换是$x(n)$乘以实指数信号r^{-n}后的DTFT

离散信号的Z域分析

- 可得x(n) r^{-n}的DTFT

$$\mathcal{F}\left(x(n)r^{-n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)r^{-n}]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(re^{j\Omega}\right)^{-n}$$

- 令复变量 $z=re^{j\Omega}$
- 定义离散时间信号(序列)x(n)的*Z*变换 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$
- 如果 $|z|=1$,即r=1

$$X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}=\mathcal{F}\{x(n)\}=X(\Omega)$$

DTFT就是在z平面单位圆上的Z变换。前提是单位圆应包含在Z变换的收敛域内

离散信号的Z域分析

3、 DFT与Z变换的关系

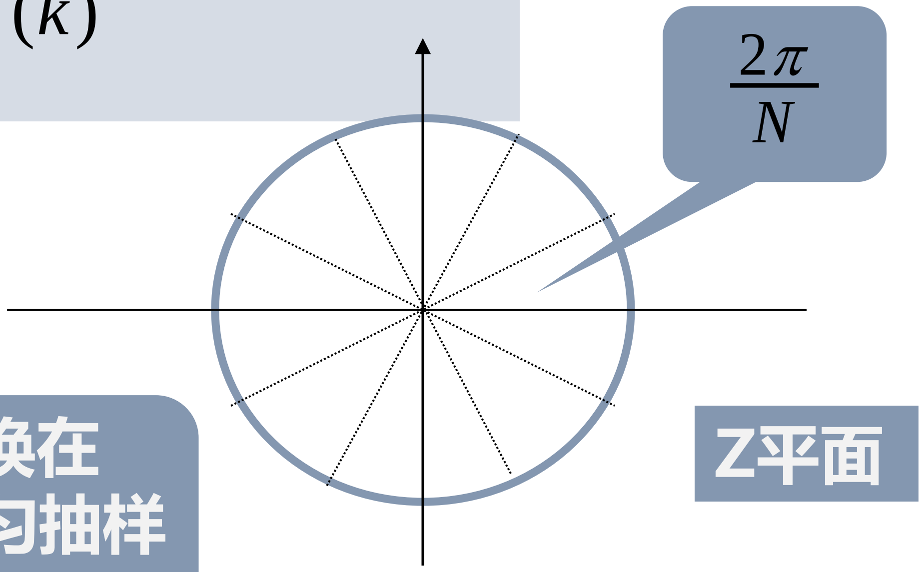
$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\Big|_{W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk} = DFT[x(n)] = X(k)$$

有限长序列的Z变换的抽样为

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(k)$$

x(n)的Z变换在单位圆上均匀抽样即为它的DFT



作业与预习

- P188：
  - 习题18(1)(3)(5)、20、21
  - 习题27、28（MATLAB）
- 预 习：信号处理基础

谢谢大家