

第五周作业 P.378-379 习题八：8-2(3); 8-5; 8-6; 8-8; 8-10.

8-2 (1) 确定下列系统是否完全能观；(2) 是否完全能控；(3) 求出系统的传递函数；(4) 确定每个系统分别有多少个能观与能控的状态变量；(5) 判别系统是否稳定？

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x};$$

解：(3) (a)不能观； (b)不能控； (c) $G(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s(s-1)(s-1)} = \frac{s+1}{s(s-1)}$ ；

(d)2 个能观，2 个能控；(e)系统不稳定。

8-5 已知系统状态空间表达式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u; \quad y = [a \quad b \quad c] \mathbf{x}$$

试判定：(1) 能否适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能控性？

(2) 能否适当地选择常数 a、b 和 c，使系统具有能观性？

解：(1)可控性判别矩阵： $Q_C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} a & a\lambda + b & a\lambda^2 + 2b\lambda \\ b & b\lambda & b\lambda^2 \\ c & c\lambda & c\lambda^2 \end{bmatrix}$

因为： $\det Q_c = 0$ ，故无论如何选择 a、b 和 c，系统都不具有能控性。

(2)可观性判别矩阵： $Q_o = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a\lambda & a+b\lambda & c\lambda \\ a\lambda^2 & b\lambda^2 + 2a\lambda & c\lambda^2 \end{bmatrix}$

又因为 $\det Q_o = 0$ ，故无论如何选择 a、b 和 c，系统都不具有能观性。

8-6 设系统的传递函数为： $G(s) = \frac{s+a}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$ ，欲使系统的状态全部能控且能观，试求 a 的取值范围。

解：当 $a \neq 1, 2, 4$ 时，系统的状态全部能控且能观。

8-8 串联组合系统的结构图如图 8-17 所示，试：

(1) 写出系统的状态空间表达式；

(2) 讨论系统的能控性与能观性。

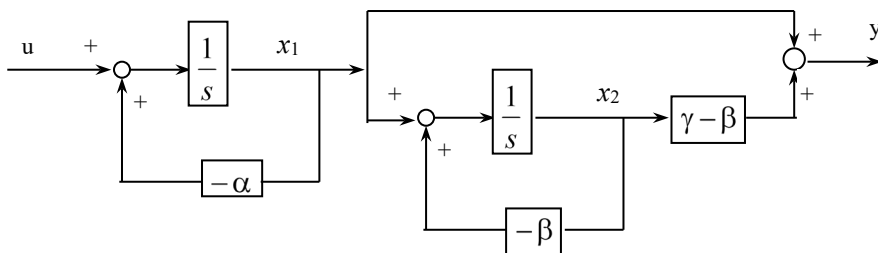


图 8-17 题 8-8 图

解：(1) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$; $y = [1 \quad \gamma - \beta] \mathbf{x}$;

(2) 系统能控，当 $\gamma = \alpha$ 时，系统能控不能观。

$$Q_o = \begin{pmatrix} 1 & \gamma - \beta \\ -\alpha + \gamma - \beta & -\beta(\gamma - \beta) \end{pmatrix} \text{ 所以 } \det(Q_o) = -(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

所以当 $\gamma = \alpha$ 或 $\gamma = \beta$ 时，系统不能观。

8-10 已知系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$ ，试求与其相应的离散化系统为不能控

时的采样周期 T 值。

解：

$$G_{(T)} = \begin{pmatrix} \cos(2T) & \frac{1}{2}\sin(2T) \\ -2\sin(2T) & \cos(2T) \end{pmatrix} \quad H_{(T)} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos(2T)}{2} \\ \sin(2T) \end{pmatrix}$$

$$Q_c = \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos(2T)}{2} & \frac{\sin^2(2T) - \cos^2(2T) + \cos(2T)}{2} \\ \sin(2T) & 2\sin(2T)\cos(2T) - \sin(2T) \end{pmatrix} \quad \det(Q_c) = -4\cos(T)\sin^3(T)$$

所以当 $T = \frac{n\pi}{2}$ (n 为正整数)，与其相应的离散化系统为不能控。

8-12 已知系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1 \quad 1]。$$

要求：(1) 判别系统的能控性。如果完全能控，请将该系统化为能控规范型；如果不完全能控，请找出其能控子空间；(2) 判别系统的能观性。如果完全能观，请将该系统化为能观规范型；如果不完全能观，请找出其能观子空间。

解：(1) 按能控性分解

step1: 计算能控性矩阵 Q_c

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}; \text{rank} Q_c = 2 < 3, \text{ 系统不完全能控};$$

Step2: 构造非奇异变换矩阵 T , 并求出变换后的系统矩阵:

从 Q_c 中选取 2 个线性无关的列, 再附加一线性无关列 $T_2^T = [0 \quad 1 \quad 0]$

(附加的线性无关列不同, 则答案可能不同, 但 A、B 形式是一定相同的)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{则} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{b}_c = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{c}_c = cT = [1 \quad 2 \quad -1]$$

如果选取 $T_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{A}_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ b 与上相同, } \hat{c}_c = cT = [1 \quad 2 \quad 1]$$

如果选取 $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{A}_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & -13 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ b 与上相同, } \hat{c}_c = cT = [1 \quad 2 \quad 0]$$

Step3: 写出分解后的可控、不可控子系统动态方程:

$$\text{可控子系统: } \dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = [1 \quad 2] x_c$$

$$\text{不可控子系统: } \dot{x}_{\bar{c}} = x_{\bar{c}}$$

$$y_2 = -x_{\bar{c}}$$

(2) 按能观性分解

step1: 计算能观性矩阵 Q_o

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \text{rank} Q_o = 2 < 3, \text{ 系统不完全能观};$$

Step2: 构造非奇异变换矩阵 T^{-1} , 并求出变换后的各矩阵:

从 Q_o 中选取 2 个线性无关的行作为 T_1 , 再附加一线性无关行 $T_2 = [0 \ 0 \ 1]$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{则} \quad T = (T^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_o = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \hat{b}_o = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{c}_o = cT = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\text{如果选取 } T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_0 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \hat{b}_o = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{c 与上相同}$$

Step3: 写出分解后的可观、不可观子系统动态方程:

$$\text{可观子系统: } \dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = [1 \ 0] x_o = y$$

$$\text{不可观子系统: } \dot{x}_{\bar{o}} = [-5 \ 3] x_o + 2x_{\bar{o}} + u$$

$$y_2 = 0$$