信号分析与处理

第三章 离散信号的频域分析

The Frequency Domain Analysis of Discrete Signal

本章主要内容

1. 离散周期信号的傅里叶级数DFS
2. 非周期离散时间信号的傅里叶变换DTFT
3. 离散周期信号的傅里叶变换
4. 离散傅里叶变换的性质

离散时间周期信号的傅里叶级数表示
——离散时间Fourier级数（1）

回顾连续周期信号

FS展开对

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$ —— 无穷级数

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

连续时间系统：**x(t)是周期的，基波周期T_0，基波频率ω_0，成谐波关系的复指数信号集合** $\{\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ **，利用复指数信号的线性组合来表示周期为T_0的连续时间周期信号——连续时间周期信号的Fourier级数；**

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数（2）

一. 成谐波关系的复指数信号的线性组合

$$\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}=e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

但 $\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}$ —只有*N*个信号是不相同的

例： $\phi_0[n]=\phi_N[n]$ $\quad \phi_1[n]=\phi_{N+1}[n]$ $\quad \phi_{-1}[n]=\phi_{N-1}[n]$

一般关系 $\phi_k[n]=\phi_{k+rN}[n] \quad k,r,N\in \mathrm{Z}$

离散时间系统：**x[n]**是周期的，基波周期**N**，基波频率ω_0，成谐波关系的复指数信号集合 $\left\{\phi_k[n]=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}$ （与连续系统不同的是，**Φ_k[n]**只有**N**个相连信号是不同的），利用复指数信号的线性组合来表示周期为**N**的离散时间周期信号——**离散时间周期信号的Fourier级数**；

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数（3）

连续时间Fourier级数：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

离散时间Fourier级数：

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k\phi_k[n]=\sum_{\boxed{k=<N>}}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}\boxed{a_k}e^{jk\omega_0 n}$$

有限项的级数——与连续时间Fourier级数的区别（一）

离散时间Fourier级数系数

频谱系数

傅里叶级数系数a_k的确定：

求解方法与连续时间Fourier级数系数的求解方法相同

回顾：连续时间Fourier级数

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

(2) 傅里叶级数系数a_k的确定

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

如果周期信号x(t)可以表示成谐波复指数信号的线性组合，如何确定a_k?

两边同乘 $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}$$

两边从$0\rightarrow T_0$对 t 积分

$$\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_0^{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\underline{\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\omega_0 t}dt}$$

$$\underline{\int_0^{T_0}e^{j(k-n)\omega_0 t}dt}=\begin{cases}\left.\dfrac{e^{j(k-n)\omega_0 t}}{j(k-n)\omega_0}\right|_0^{T_0}=\dfrac{e^{j(k-n)\omega_0 T_0}-1}{j(k-n)\omega_0}=0, & k\neq n\\ \int_0^{T_0}1dt=T_0\,, & k=n\end{cases}$$

$$\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=a_nT_0$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}$$

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数（4）

二. 离散FS表示式系数a_k的确定

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

同乘 $e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}$

$$e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}$$

n=⟨N⟩上求和

$$\sum_{n=<N>}e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}x[n]=\sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>}a_k e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}a_k\sum_{n=<N>}e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}$$

讨论：

$$\sum_{n=<N>}e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}=\begin{cases}N, & (k-r)=0,\pm N,\pm 2N,\ldots,\pm lN\\ \dfrac{1-e^{j2\pi(k-r)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}}=0, & else\end{cases}$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=\begin{cases}\dfrac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a} & a\neq 1\\ n_2-n_1+1 & a=1\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}=\frac{1-e^{jk(\frac{2\pi}{N})\cdot N}}{1-e^{jk(\frac{2\pi}{N})}}=\begin{cases}0，当\ a=e^{jk(\frac{2\pi}{N})}\neq 1\\ N，当\ a=e^{jk(\frac{2\pi}{N})}=1\end{cases}$$

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数（5）

$$\sum_{n=<N>} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} x[n] = \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N, & (k-r)=0,\pm N,\pm 2N,\ldots,\pm lN \\ 0, & else \end{cases}$$

前式右端的内层加和项为零，除非**k-r**是**N**的整数倍

设计**r**在**k**的取值范围内，则上式右端只有在**k=r**时非零

$$\sum_{n=<N>} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} x[n] = a_r \cdot N$$

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} e^{-jr\frac{2\pi}{N}n} x[n]$$

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数（5）

离散时间傅里叶级数的两个关系式:

综合公式:

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$$

分析公式:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

也称**$x[n]$**的频谱系数

记: $x[n]\xleftrightarrow{Fs}a_k$

连续时间傅里叶级数的两个公式

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数（6）

将频谱系数a_k看成是一离散信号，分析a_{k+N}：

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = a_k$$

a_k是周期为N的周期信号

与连续时间Fourier级数的区别（二）

时域离散周期 ⟷ 频域周期离散

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——离散时间Fourier级数收敛

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$$

有限项的和

$$x[0]=\sum_{k=<N>}a_k$$

$$x[1]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0}$$

$$\vdots$$

$$x[N-1]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0(N-1)}$$

N个线性方程，N个未知数

可以证明：N个方程是线性独立的

利用已知**x[n]**求得系数$\mathbf{a_k}$的惟一解

对任何离散时间周期信号，其傅里叶级数系数$\mathbf{a_k}$存在且惟一

离散时间傅里叶级数不存在收敛问题和吉布斯现象

与连续时间Fourier级数的区别（三）

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

—— 举例（1）

例1 求信号$x_1[n]=\sin\omega_0 n$和$x_2[n]=\cos\omega_0 n$的傅里叶级数a_k.

解： 当$2\pi/\omega_0$为有理数的情况下，两信号是周期的， ω_0基波频率

$$x_1[n]=\sin\omega_0 n=\frac{e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}}{2j}$$

在一个周期内：

$$a_1=\frac{1}{2j}\quad a_{-1}=-\frac{1}{2j}$$

$$a_k=0\quad k\neq\pm1$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$x_2[n]=\cos\omega_0 n=\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

在一个周期内：

$$a_1=\frac{1}{2}\quad a_{-1}=\frac{1}{2}$$

$$a_k=0\quad k\neq\pm1$$

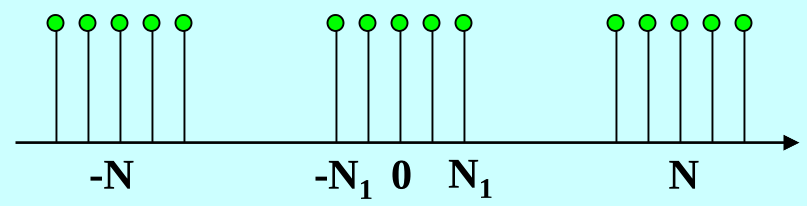
离散时间周期信号的傅里叶级数表示

—— 举例（2）

例2 求基波周期为N的周期方波的傅里叶级数系数.

解:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}=\frac{1}{N}\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

等比数列前n项之和

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}\right)}{e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\left(e^{jk\frac{2\pi}{2N}}-e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}\right)}=\begin{cases}\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\frac{2k\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})}{\sin\frac{k\pi}{N}}=\boxed{\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{k\pi}{N}}} & k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\[2ex] \frac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\end{cases}$$

(一周内平均值)

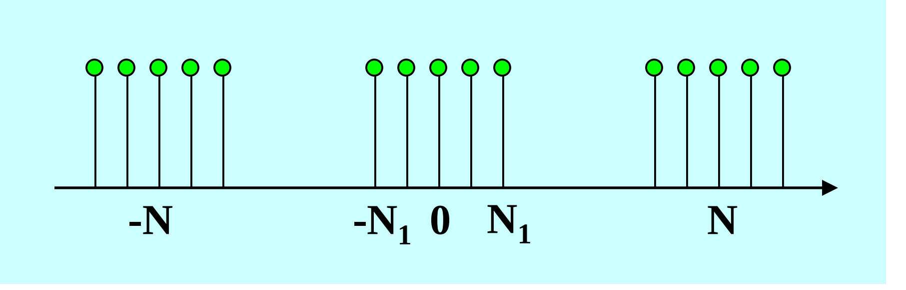
离散时间周期信号的傅里叶级数表示

—— 举例（2-1）

例2 求基波周期为N的周期方波的傅里叶级数系数.

解：

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1}{N}\dfrac{e^{-jk\frac{\pi}{N}}\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\frac{2N_1+1}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} & \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots \\ = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\frac{2N_1+1}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} & k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\ldots \end{cases}$$

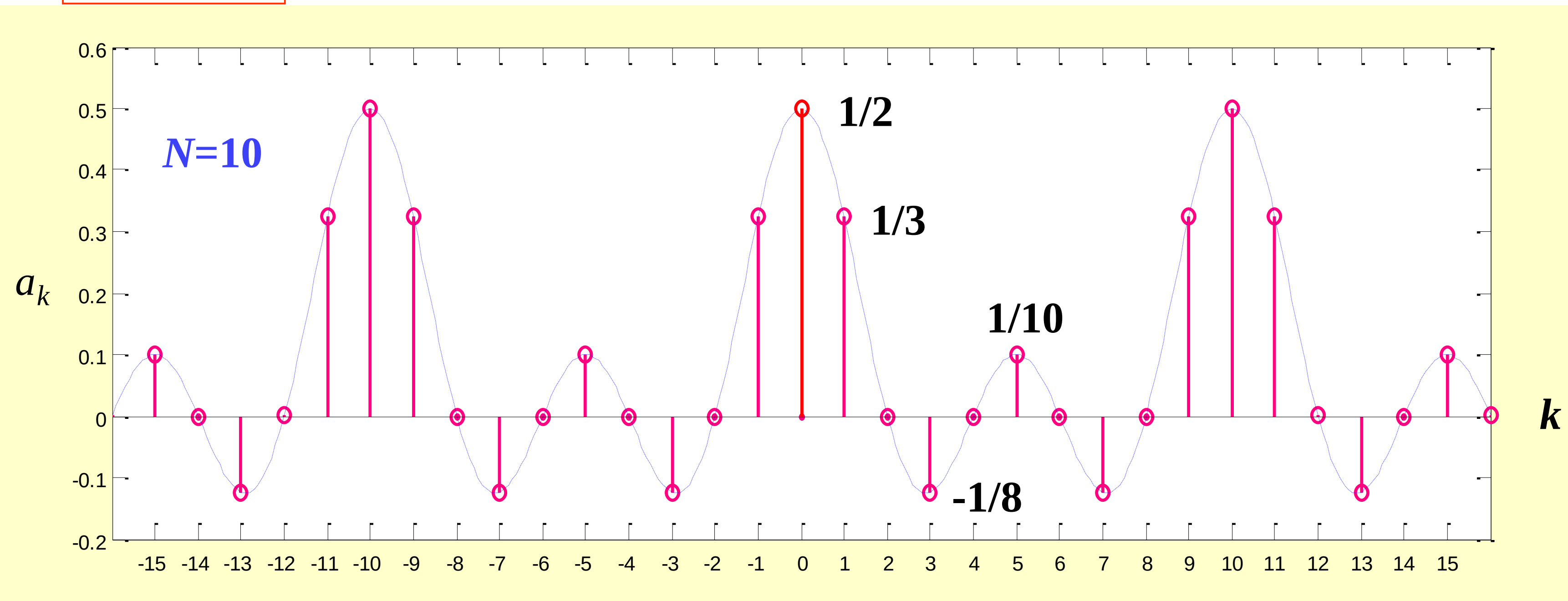
期信号的傅里叶级数表示 2)

取$N_1=2$, $N=10$ 则

$$a_k = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)}{\sin\frac{k\pi}{N}} \Rightarrow a_k = \frac{1}{10}\cdot\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\sin\frac{k\pi}{10}} \qquad a_0=\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sin(\pi/10)} \approx \frac{1}{3} \qquad a_2 = a_4 = 0 \qquad a_3 = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sin(3\pi/10)} \approx -\frac{1}{8} \qquad a_5 = \frac{1}{10}\cdot\frac{\sin(5\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{a_k = a_{k\pm rN}} \qquad a_6 = a_{-4} \qquad a_7 = a_{-3} \qquad a_8 = a_{-2} \qquad a_9 = a_{-1} \qquad a_{10} = a_0 \quad \ldots$$

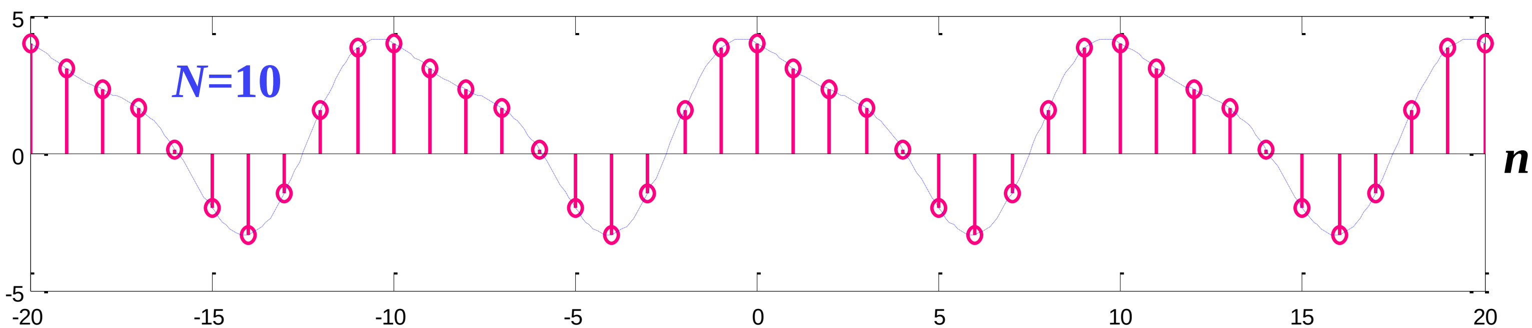


—实偶?

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

——举例（3）

例3 $x[n]=1+\sin(\frac{2\pi}{N}n)+3\cos(\frac{2\pi}{N}n)+\cos(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})$ N为基本周期， 求a_k。



解：

$$x[n]=1+\frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right]+\frac{3}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right]+\frac{1}{2}\left[e^{j(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})}+e^{-j(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})}\right]$$

$$=1+(\frac{3}{2}+\frac{1}{2j})e^{j\frac{2\pi}{N}n}+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2j})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\cdot\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\cdot\frac{2\pi}{N}n}$$

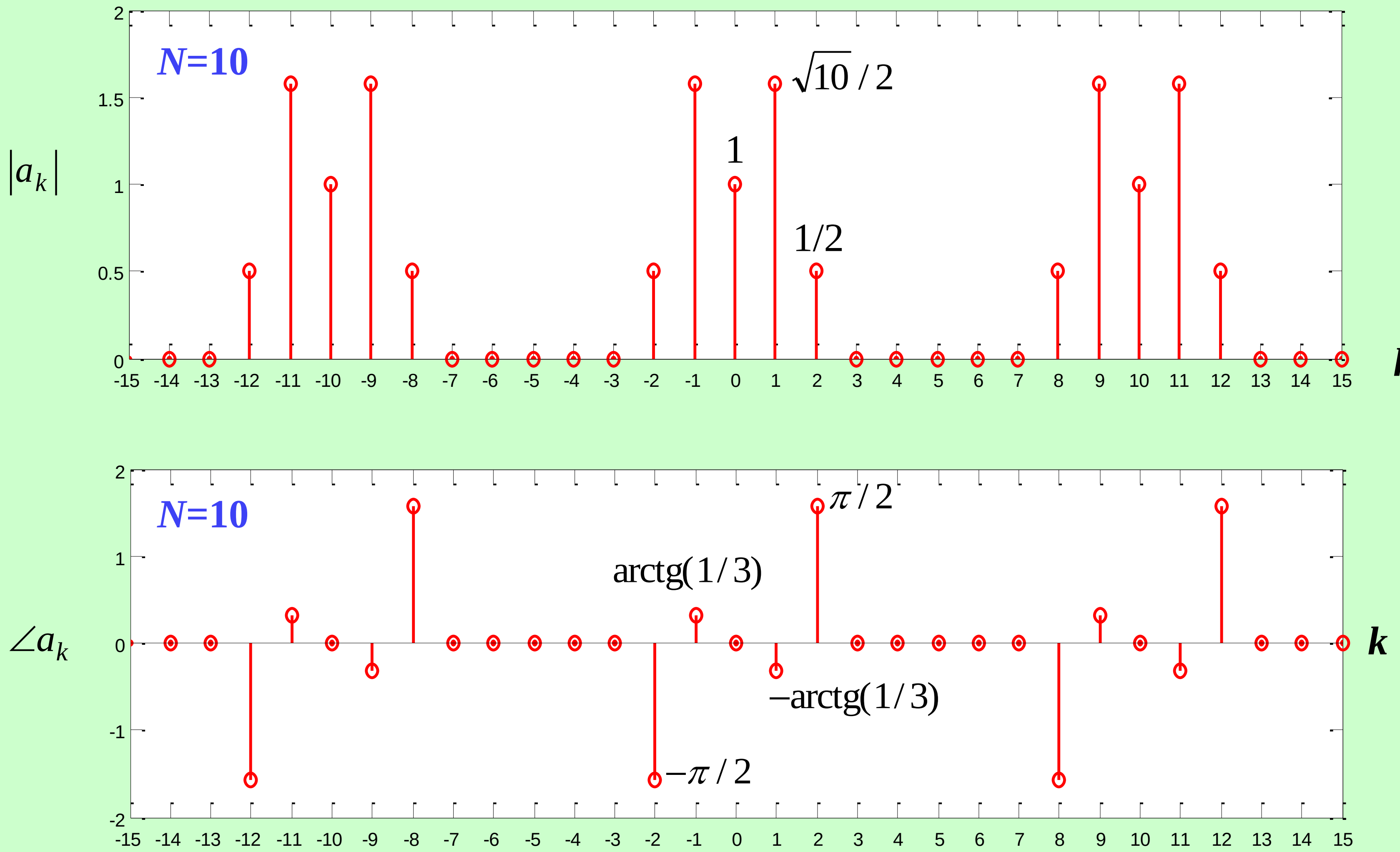
$a_0=1$ $a_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}j$ $a_{-1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}j$ $a_2=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$ $a_{-2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$ 一周期内其余$a_k=0$

取$N=10$ $a_k=a_{k\pm rN}$ ➡ $a_8=a_{-2+10}=a_{-2}$ $a_9=a_{-1+10}=a_{-1}$ $a_{10}=a_0$ $a_{11}=a_1$ …

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

—— 举例（3—1）

$a_0 = 1$ $\quad a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$ $\quad a_{-1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$ $\quad a_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\quad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

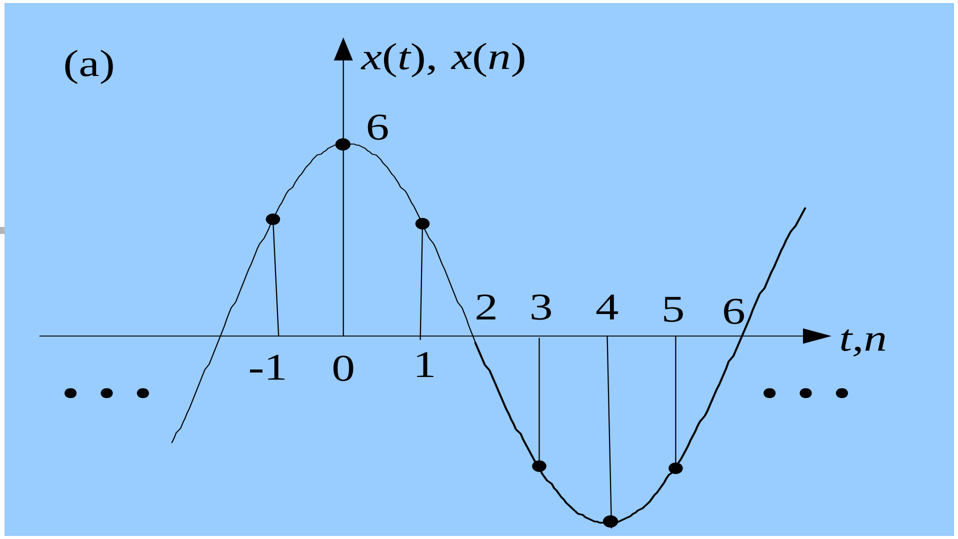


思 考

如果x(n)是从连续周期信号x(t)采样得来，那么x(n)的频谱是否等效于x(t)的频谱？

$$x(t) = 6\cos \pi t$$

T=0.25秒



$$\omega_0 = \pi$$

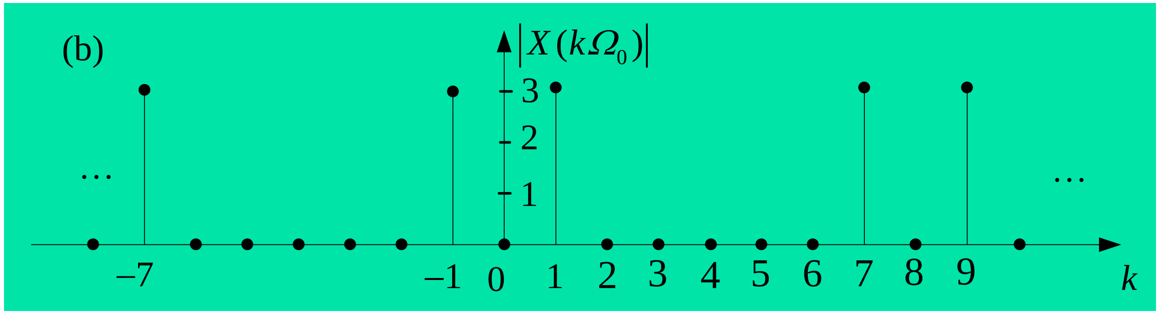
$$f_0 = \frac{1}{2}$$

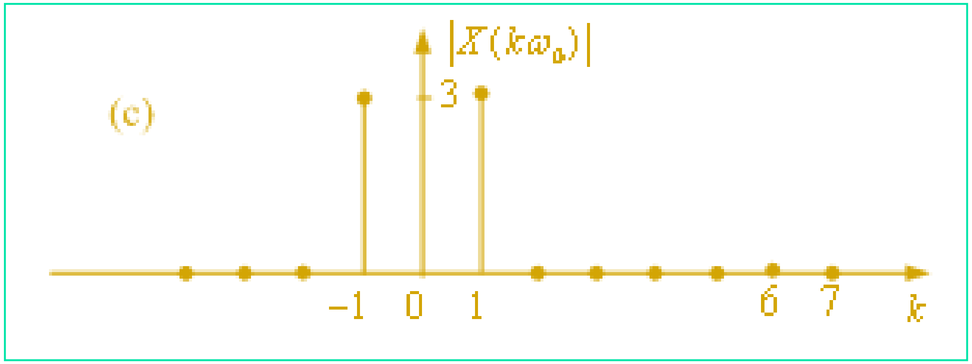
$$T_0 = 2$$

T=0.25 $\quad f = 4$

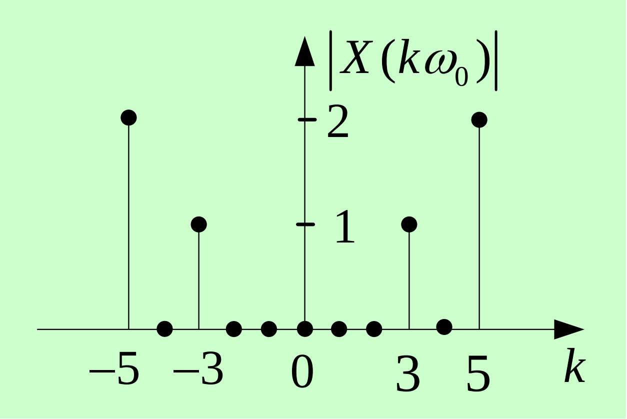
$$N = T_0 / T = 8$$

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

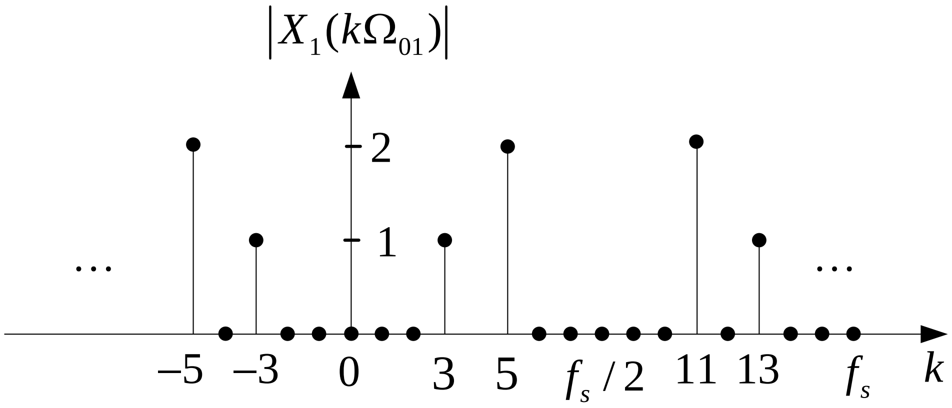




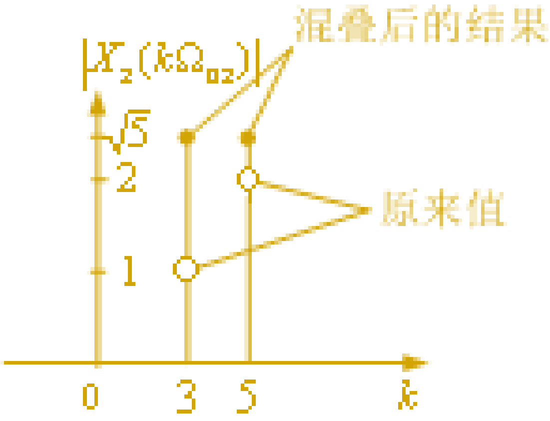
$$x(t) = 2\cos 6\pi t + 4\sin 10\pi t$$



N=16



N=8



连续信号离散化后分析其频谱

$X(k\Omega_0)$ 可以看作是 $X(k\omega_0)$ 的近似式，近似程度与采样周期T的选取有关

在满足采样定理条件下，从一个连续时间、频带有限的周期信号得到的周期序列，其频谱在 $|\Omega| < \pi$ 范围内等于原始信号的离散频谱

在不满足采样定理条件下，由于 $X(k\Omega_0)$ 出现频谱混叠，这时就不能用 $X(k\Omega_0)$ 准确地表示 $X(k\omega_0)$

本章主要内容

1. **离散周期信号的傅里叶级数DFS**
2. **非周期离散时间信号的傅里叶变换DTFT**
3. **离散周期信号的傅里叶变换**
4. **离散傅里叶变换的性质**

离散时间傅里叶变换DTFT ——主要内容

- 非周期信号的表示：离散时间信号的傅里叶变换
  - 非周期信号的Fourier变换的导出
  - 离散时间Fourier变换的收敛
  - 典型离散时间信号的Fourier变换对

离散时间傅里叶变换DTFT
——非周期信号的Fourier变换的导出（1）

离散时间信号傅里叶变换的导出思路相同

回顾连续时间信号傅里叶变换的导出：

周期信号（周期T_0） $T_0\to\infty$，$\omega_0\to 0$ 非周期信号

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$e^{jk\omega_0 t}$ 在频率上无限靠近

a_k的ω域由离散变为连续

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶级数

傅里叶变换

若已知周期信号的第一个周期对应的时限信号 $x_1(t)$ 的傅里叶变换为 $X_1(j\omega)$

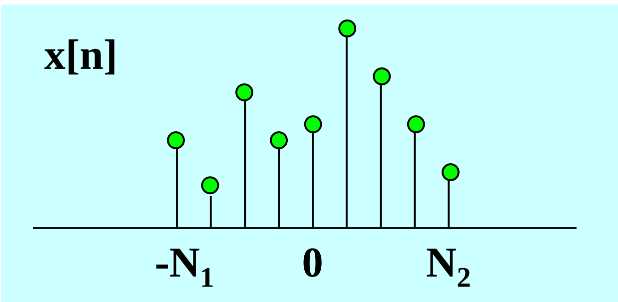
$$a_k=\frac{X_1(j\omega)}{T}\bigg|_{\omega=k\omega_0}$$

周期信号的傅里叶级数系数可以看成是一个以非周期信号的傅里叶变换为包络函数的离散采样值

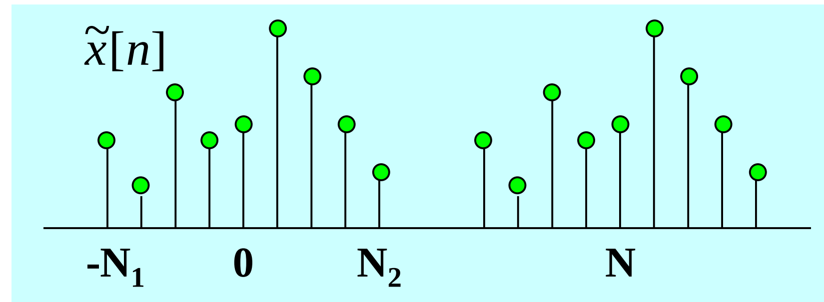
离散时间傅里叶变换

——非周期信号的Fourier变换的导出（2）

- 考虑某离散时间信号x[n]，具有有限持续期[-N1,N2]



周期延拓



非周期信号

$$x[n]=\lim_{N\to\infty}\tilde{x}[n]$$

周期信号

周期信号的傅里叶级数：

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$x[n]=\tilde{x}[n]$

$(-N_1\le n\le N_2)$

$n<-N_1, n>N_2, x[n]=0$

离散时间傅里叶变换

——非周期信号的Fourier变换的导出（3）

定义：

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) = \frac{1}{N} X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=<N>} \frac{\omega_0}{2\pi} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

当N→∞时，$\omega_0 \to 0$

$$x[n] = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n]$$

离散时间傅里叶变换
——非周期信号的Fourier变换的导出（4）

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n] = \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \boxed{\sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0}$$

$$\overset{k\omega_0 = k\frac{2\pi}{N}}{=} \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

式中：
$N\uparrow \to \omega_0 \downarrow$

$N \to \infty$

$k\omega_0 \to \omega$

$\omega_0 \to d\omega$

$\Sigma \to \int$

$e^{j\omega n}$ — 周期为2π

积分区间可以取任意区间为2π的间隔（因为k=<N>是任意的

求和是在一个周期**N**的宽度上进行的，因此等效的积分是在**N**个宽为$\boldsymbol{\omega_0}$的间隔内完成，则总的**ω**的积分区间为一个2π的宽度（**N** $\boldsymbol{\omega_0}$**=** 2π）

复指数信号 $e^{j\omega n}$ 的加权系数为 $\dfrac{X(e^{j\omega})d\omega}{2\pi}$

即将非周期信号表示为复指数信号的线性组合形式

离散时间傅里叶变换

——非周期信号的Fourier变换的导出（5）

离散时间信号的傅里叶变换：

综合公式： $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$ ——离散时间傅里叶反变换

分析公式： $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$ ——离散时间傅里叶变换

X[n]的频谱

复指数信号$e^{j\omega n}$的相对复幅度

比较：连续时间信号的**Fourier**变换：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

思考

- **X(Ω) 是否具有周期性？若是，则其周期是多少?**

- **X(Ω)的幅频特性和相频特性各具有什么特点?**

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

离散时间傅里叶变换

——非周期信号的Fourier变换的导出（6）

离散时间信号与连续时间信号傅里叶变换的区别：

1）离散时间信号的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是周期为2π的周期函数，连续时间信号的频谱是非周期的。

$$e^{j(\omega+2\pi)n}=e^{j\omega n}e^{j2\pi n}=e^{j\omega n}$$

离散周期信号的频谱系数a_k是周期的

离散时间非周期信号的频谱$X(e^{j\omega})$是周期的

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

离散周期信号的傅里叶级数展开式（综合式）是有限项累加；离散时间非周期信号的傅里叶反变换（综合式）是2π的积分区间， π的偶数倍附近为低频信号， π的奇数倍附近为高频信号。

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\omega_0 n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶变换
——离散时间傅里叶变换的收敛

关键：分析公式 $X(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{+N} x[n]e^{-j\omega n}$ 的频域收敛性

若 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$ （**X[n]**绝对可和） 则处处收敛， X($e^{j\omega}$)是ω的连续函数

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$ （**X[n]**平方可和） 则均方收敛， X($e^{j\omega}$)可能存在跳变点

用有限项分析公式近似频谱时，存在吉布斯现象

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \;\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\right)^2 < \infty$$

例子见P144

离散时间的傅里叶反变换不存在收敛性问题

综合公式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n] \approx \hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$W = \pi \Rightarrow x[n] = \hat{x}[n]$$

离散时间情况下，用有限频率分量近似原离散时间信号时，不存在吉布斯现象

离散时间傅里叶变换

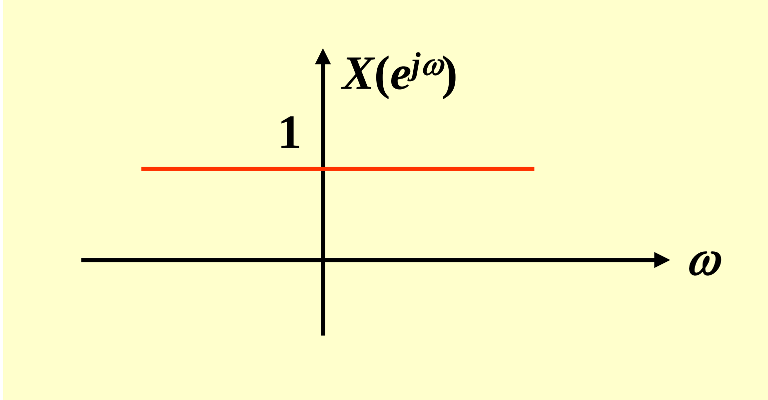
——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（1）

（1）单位脉冲δ[n]的频谱

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]e^{-j\omega n}=1$$

$$\delta[n]\xleftrightarrow{F}1$$

$$\delta(t)\xleftrightarrow{F}1$$



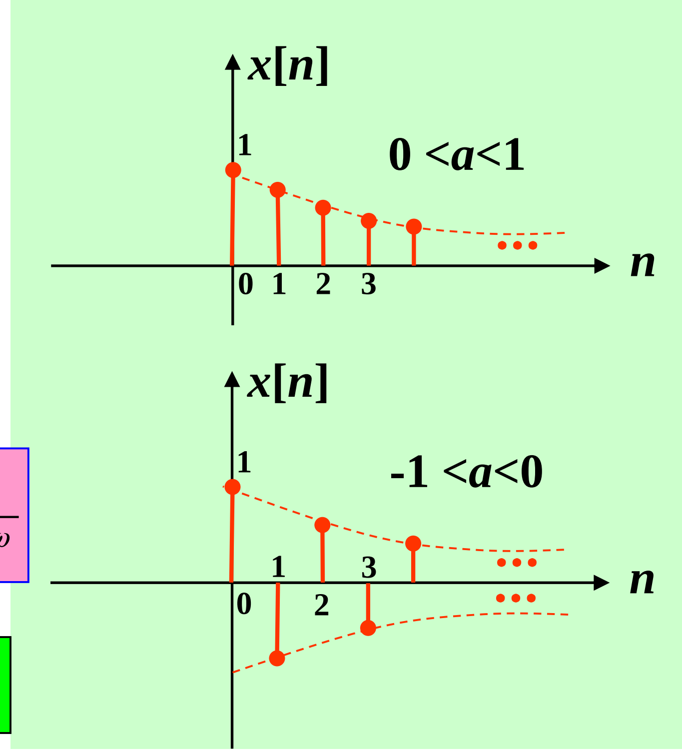
表明δ[n]包含了所有频率的分量，而且这些频率分量都具有相同的幅度与相位。

离散时间**LTI**系统对应δ[**n**]的响应，即单位脉冲响应**h[n]**，反映了系统对所有频率信号的响应特征，反映了系统本身的特性，因此**h[n]**能完全表征**LTI**系统。

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（2-1）

（2）单边指数信号 $x[n]=a^n u[n],\quad |a|<1$



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-j\omega n}$$

$$=\boxed{\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$$

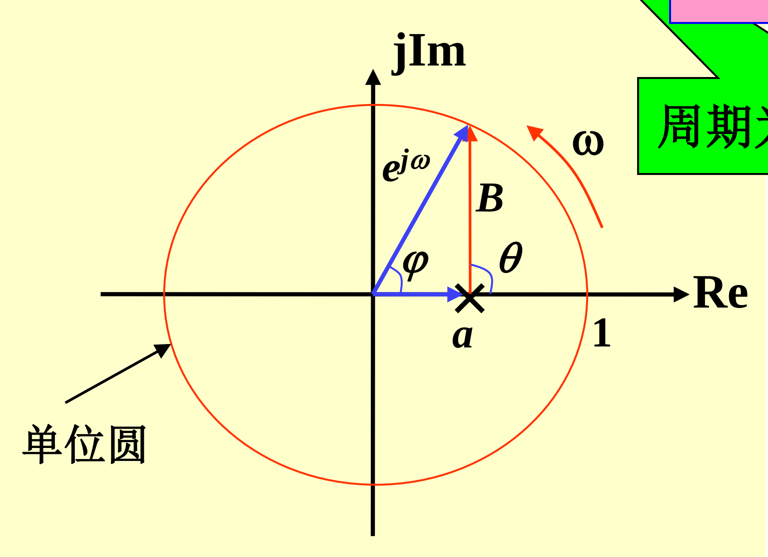
等比数列：

q=ae$^{-j\omega}$

$$a^n u[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

周期为2π的周期函数

讨论 **0 <*a*<1**

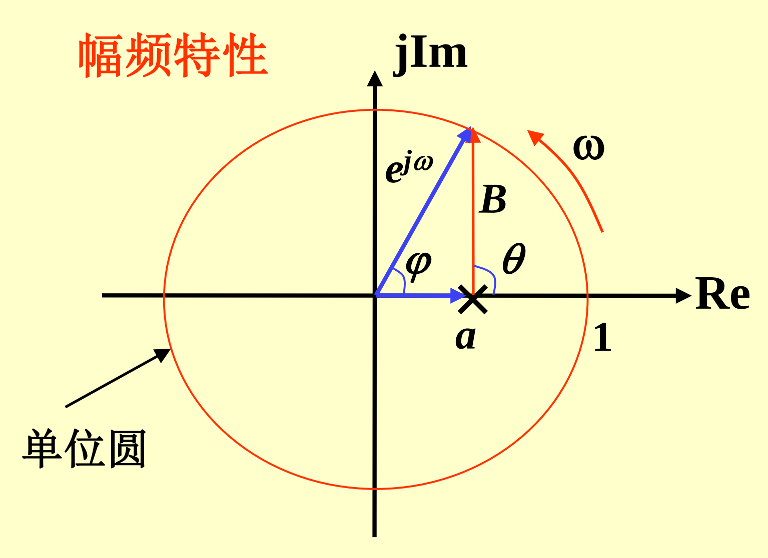


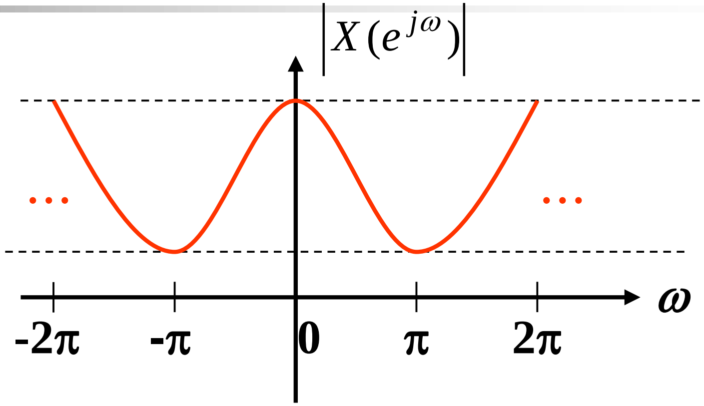
$$X(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}=\frac{e^{j\varphi}}{Be^{j\theta}}=\frac{1}{B}e^{j(\varphi-\theta)}=\frac{1}{B}e^{j(\omega-\theta)}$$

$$\boxed{\left|X(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{B}}\qquad\boxed{\angle X(e^{j\omega})=\omega-\theta}$$

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（2-2）





$$\frac{1}{1-a}$$

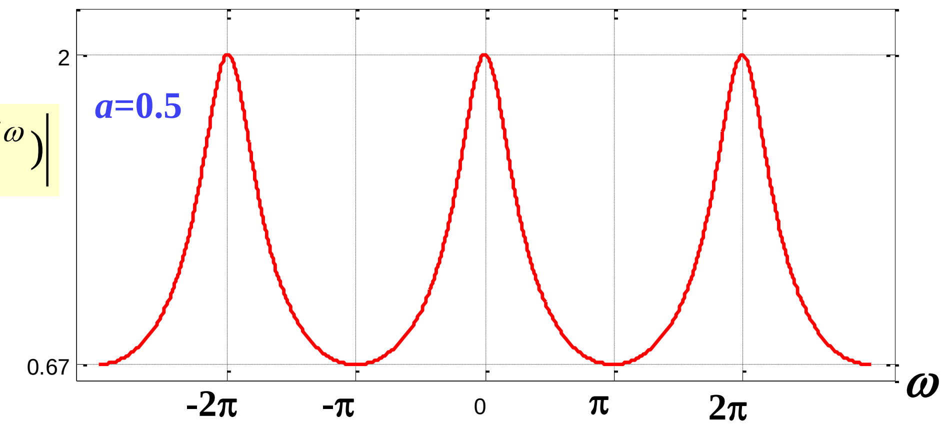
$$\frac{1}{1+a}$$

幅度谱偶对称

0 <*a*<1

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{B} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}, & \omega = 0 \\ \dfrac{1}{1+a}, & \omega = \pi \\ \dfrac{1}{1-a}, & \omega = 2\pi \end{cases}$$

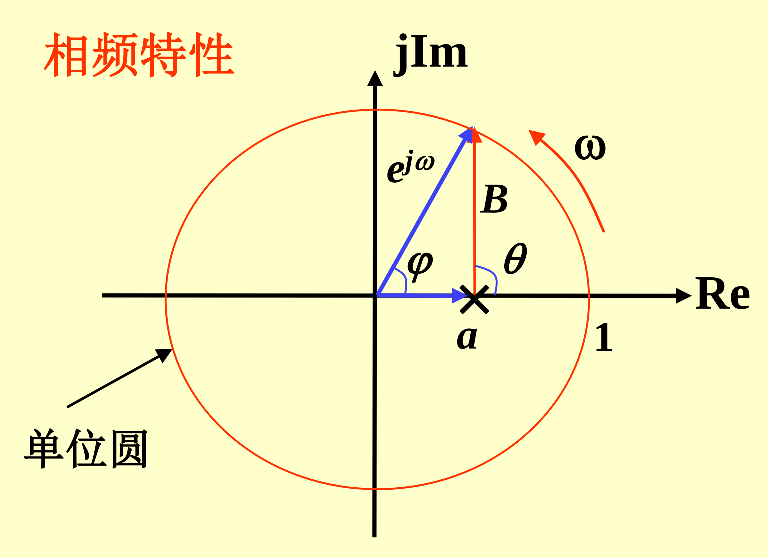
$|X(e^{j\omega})|$



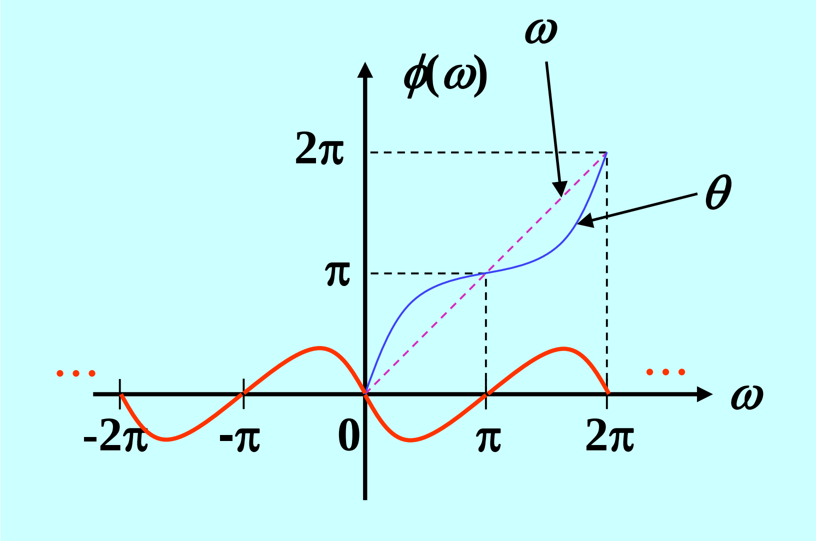
低通滤波器

离散时间傅里叶变换

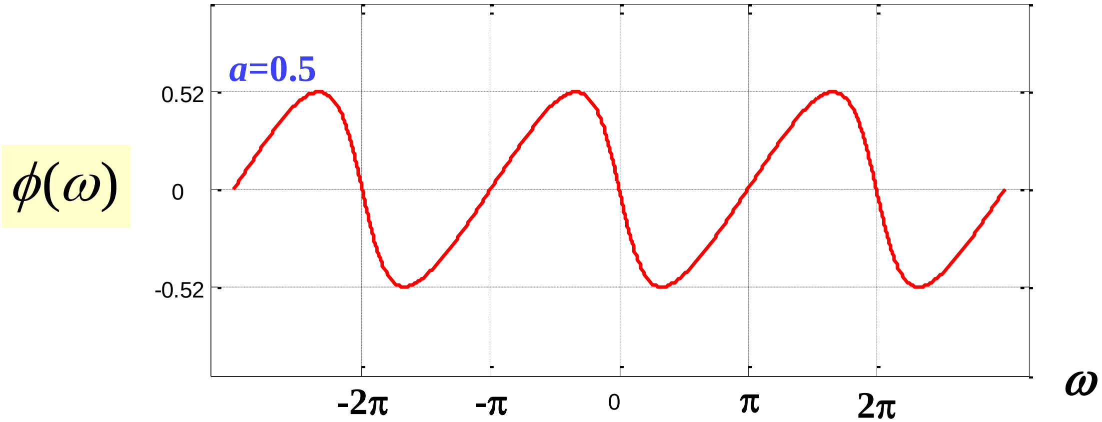
——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（2-3）



$$\angle X(e^{j\omega}) = \phi(\omega) = \varphi - \theta = \omega - \theta$$



0 <*a*<1

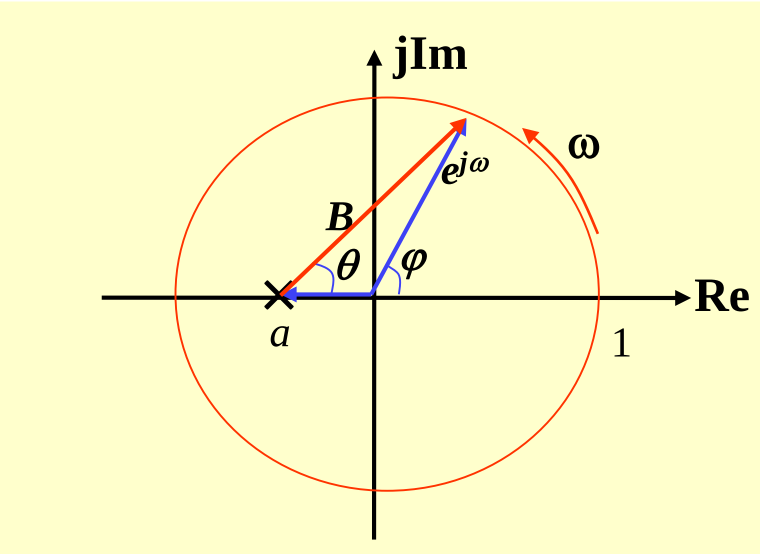


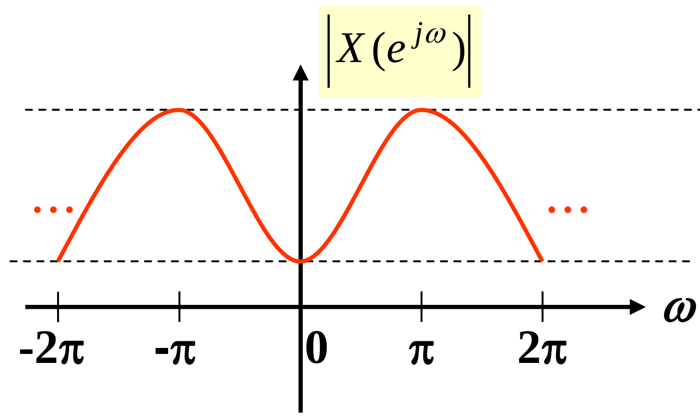
相位谱奇对称

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（2-4）

讨论　-1<*a*<0

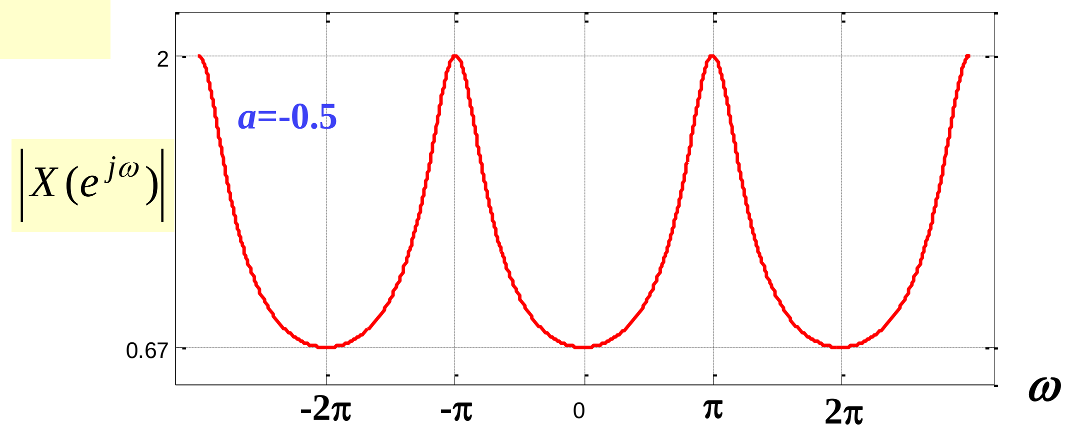




$$\frac{1}{1+a}$$

$$\frac{1}{1-a}$$

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{B} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}, & \omega = 0 \\ \dfrac{1}{1+a}, & \omega = \pi \\ \dfrac{1}{1-a}, & \omega = 2\pi \end{cases}$$



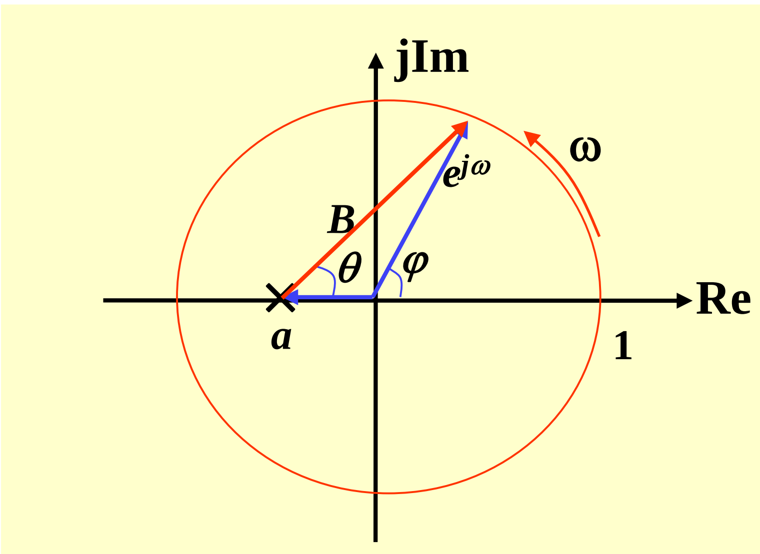
高通滤波器

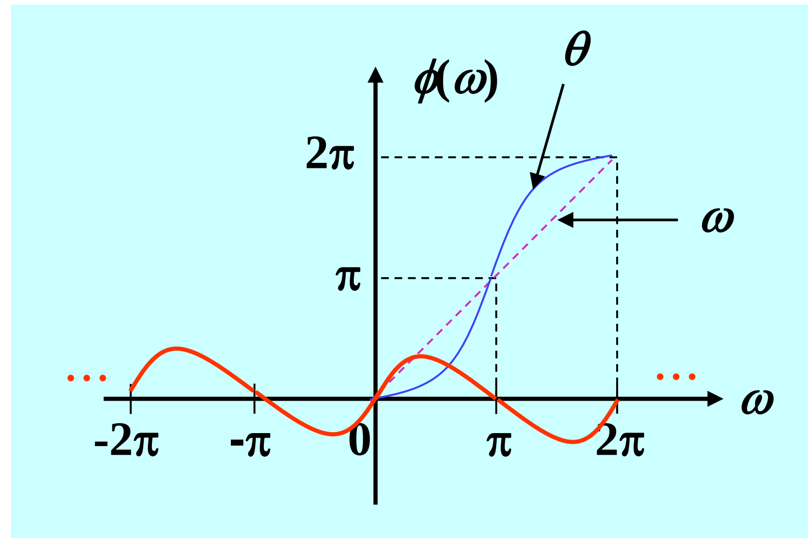
离散时间傅里叶变换

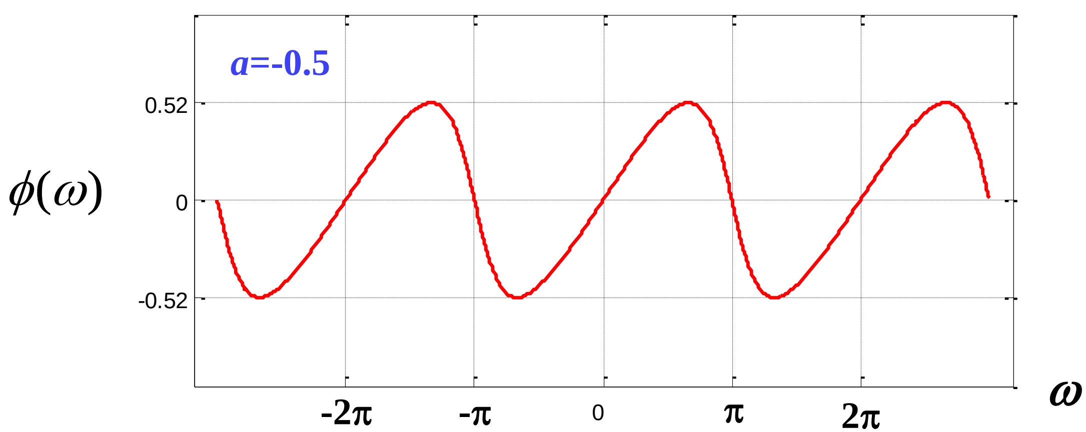
——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（2-5）

- 讨论 -1<*a*<0

$$\angle X(e^{j\omega}) = \phi(\omega) = \varphi - \theta = \omega - \theta$$







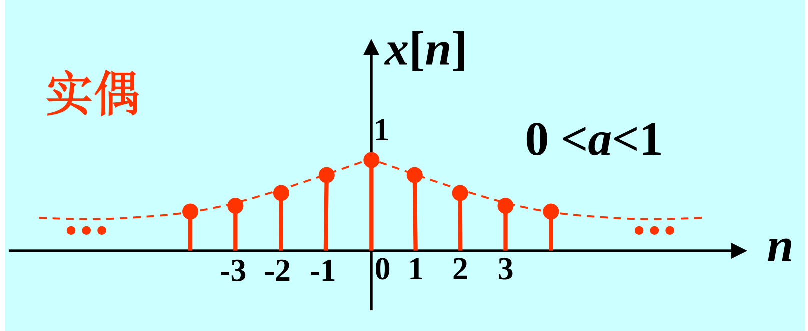
实信号 → 幅度谱偶对称

相位谱奇对称

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（3-1）

（3）双边指数信号 $x[n]=a^{|n|},\quad |a|<1$



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}e^{j\omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j\omega n}-1$$

实、偶函数

$$=\frac{1}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}-1$$

$$=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

$$a^n u[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^{|n|}\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$$

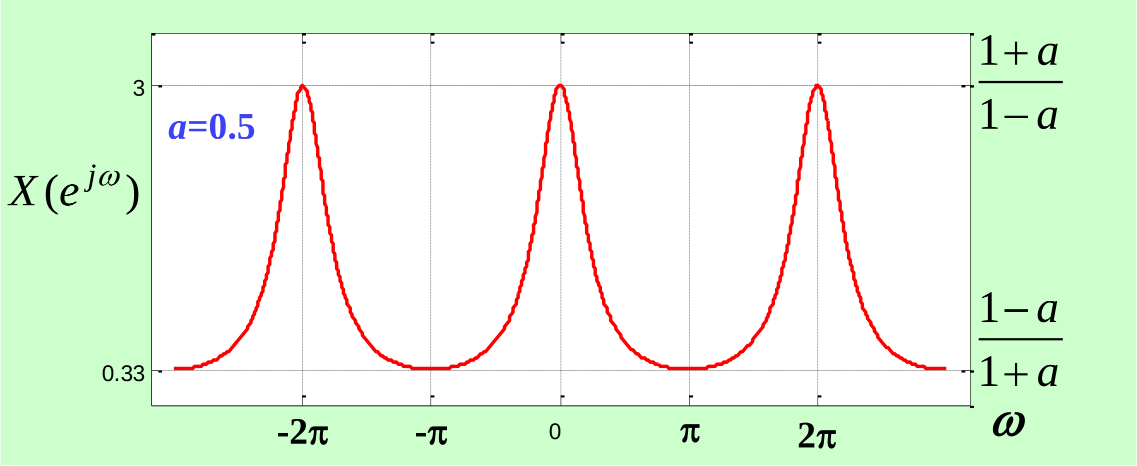
实、偶信号 → 实、偶函数

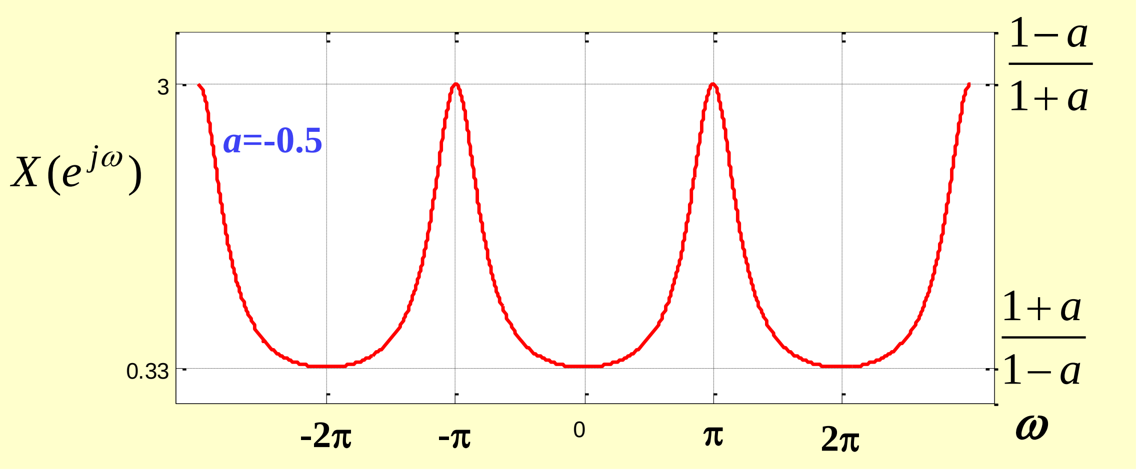
?

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（3-2）

$$a^{|n|} \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \quad (|a|<1)$$

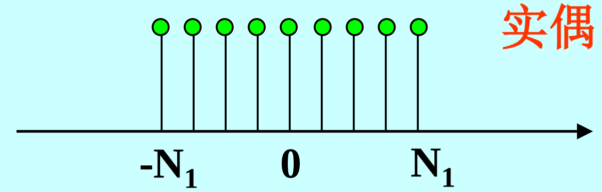




离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（4-1）

（4）矩形脉冲信号 $x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases}$



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N_1}^{+N_1}e^{-j\omega n}=\frac{\left(e^{-j\omega}\right)^{-N_1}-\left(e^{-j\omega}\right)^{N_1+1}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{j\omega N_1}-e^{-j\omega(N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\omega(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})}=\frac{\sin(N_1+\frac{1}{2})\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}=\frac{\sin\frac{\omega}{2}(2N_1+1)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases}\xleftrightarrow{F}\frac{\sin(N_1+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

实、偶函数

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（4-2）

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases}\quad\overset{F}{\longleftrightarrow}\quad\frac{\sin(N_1+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

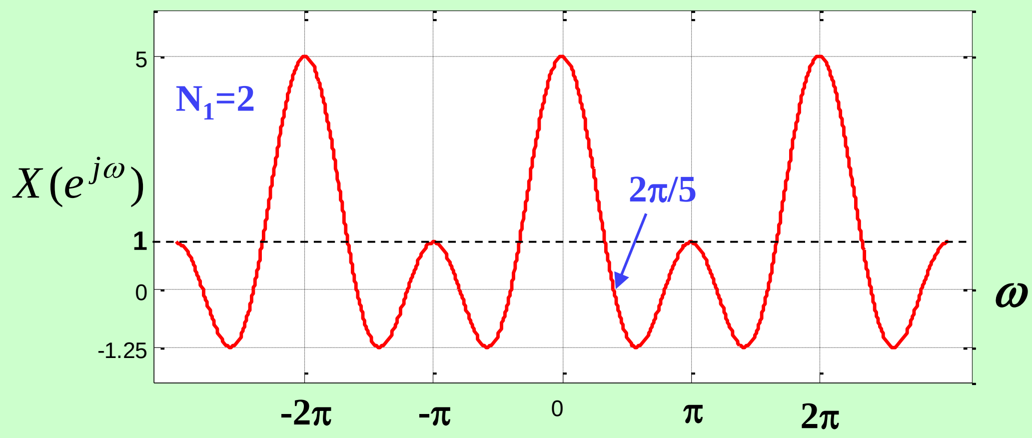
取 N_1=2 $X(e^{j\omega})=\dfrac{\sin 5\omega/2}{\sin \omega/2}$

当 ω=0时 $X(e^{j0})=5$

当$\omega=\pi$时 $X(e^{j\pi})=\dfrac{\sin 5\pi/2}{\sin \pi/2}=1$

当$\omega=3\pi/5$时

$$X(e^{j\pi})=\frac{\sin 3\pi/2}{\sin 3\pi/10}\approx -1.25$$



周期方波的傅里叶级数系数：

$$a_k=\frac{1}{N}\frac{\sin(N_1+\frac{1}{2})k\omega_0}{\sin\dfrac{k\omega_0}{2}}\quad\Longrightarrow\quad a_k=\frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（5）

（5）$X(e^{j\omega})$是频域以2π为周期的均匀冲激串

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi}\xleftrightarrow{F}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$1\xleftrightarrow{F}2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

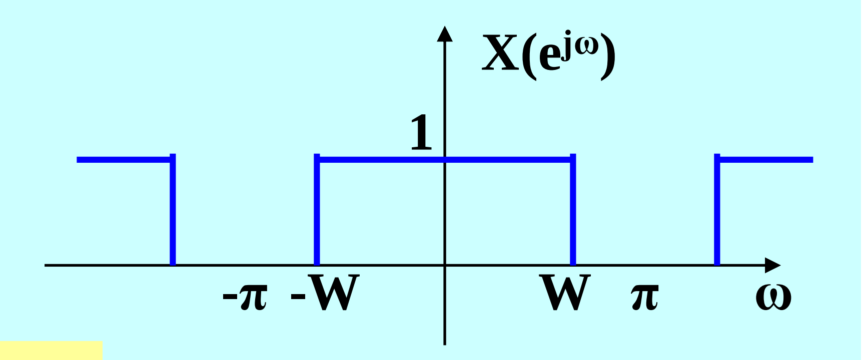
$$x(t)=1\xleftrightarrow{F}2\pi\delta(\omega)$$

x[n]=1不满足收敛条件，频谱是发散的，但可以用冲激函数表示出来，即傅里叶反变换是收敛的，因此**x[n]=1**可以表示为复指数信号的线性组合，所以**x[n]=1**存在傅里叶变换。类似情况还有单位阶跃信号**u[n]**。

离散时间傅里叶变换

——典型离散时间非周期信号傅里叶变换对（6）

（6）已知频谱为矩形窗周期函数



$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}\cos(\omega n)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\omega n}{n}\Big|_{-W}^{W}=\frac{\sin Wn}{n\pi}$$

实偶信号？ ⟷ 实偶函数

典型傅里叶变换对小结

离散时间信号	连续时间信号
$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$	$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$
$a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}, a<1$	$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{a+j\omega}, \quad a>0$
$a^n \xleftrightarrow{F} \dfrac{1-a^2}{1-2a\cos(-\omega)+a^2}, \lvert a\rvert<1$	$e^{-a\lvert t\rvert} \xleftrightarrow{F} \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}, \quad a>0$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0 & \lvert n\rvert > N_1\end{cases} \xleftrightarrow{F} \dfrac{\sin(N_1+\frac{1}{2})\omega}{\sin(\frac{\omega}{2})}$	$x(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0 & else\end{cases} \xleftrightarrow{F} \dfrac{2\sin\omega T_1}{\omega}$
$x[n]=\dfrac{\sin Wn}{\pi n} \xleftrightarrow{F} \begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W \\ 0, & else\end{cases}$	$\dfrac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{F} \begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W \\ 0, & else\end{cases}$

离散时间信号的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是周期为2π的周期函数，连续时间信号的频谱是非周期的。

本章主要内容

1. 离散周期信号的傅里叶级数DFS
2. 非周期离散时间信号的傅里叶变换DTFT
3. 离散周期信号的傅里叶变换
4. 离散傅里叶变换的性质

离散时间傅里叶变换

——离散时间周期信号的傅里叶变换（1）

一. 周期信号傅里叶变换的导出

回顾连续周期信号的FT：

连续周期信号的FT公式 $$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

若已知周期信号的第一个周期 $x_1(t)$ 的傅里叶变换为 $X_1(j\omega)$

$$a_k=\left.\frac{X_1(j\omega)}{T}\right|_{\omega=k\omega_0}$$

与连续时间周期信号的傅里叶变换相似，离散时间周期信号的频谱 $X(e^{j\omega})$也是一系列离散频率点（谐波频率点$k\omega_0=2\pi k/N$）上的冲激函数。

离散时间傅里叶变换

——离散时间周期信号的傅里叶变换（2）

已知

$$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

求x[n]=?

综合公式

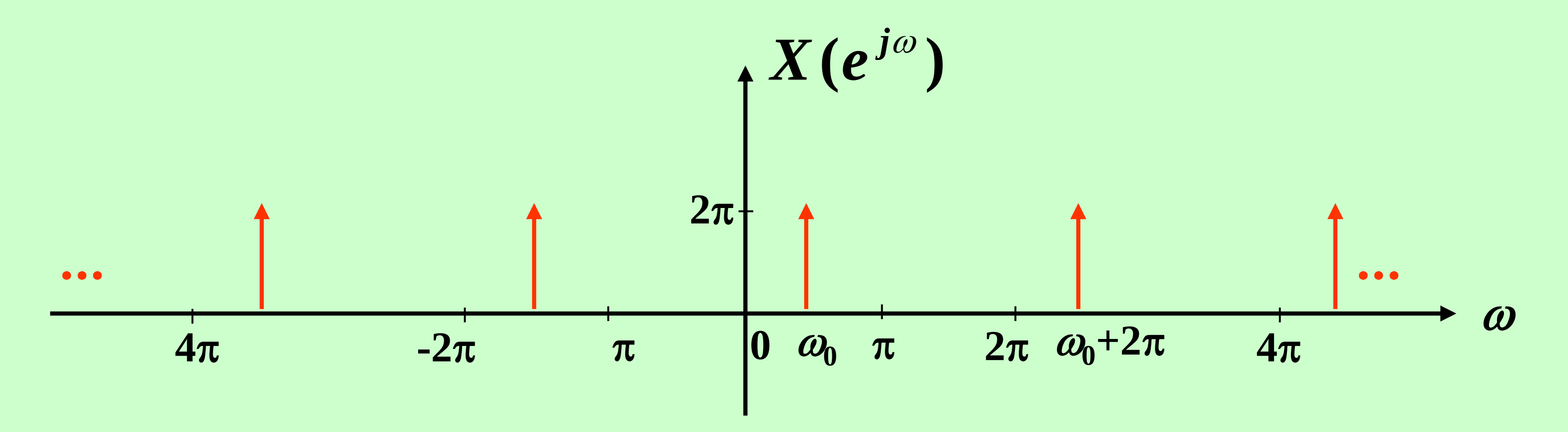
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n] = \int_0^{2\pi} \delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

周期函数

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$



$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

叶变换

——离散时间周期信号的傅里叶变换（3）

$$\therefore x[n] = a_0 e^{j\omega_0 n} + a_1 e^{j\omega_1 n} + a_2 e^{j\omega_2 n} + \cdots + a_{N-1} e^{j\omega_{N-1} n}$$

$$\Updownarrow \mathscr{F}$$

$$X(e^{j\omega}) = a_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_1-2\pi l)$$

$$+\cdots+a_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_{N-1}-2\pi l)$$

这样：

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

取 $k=0,1,2,\cdots N-1$

$$\Updownarrow \mathscr{F}$$

$$X(e^{j\omega}) = a_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$+\cdots+a_{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta[\omega-(N-1)\omega_0-2\pi l] = \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)$$

$$= 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} a_k \delta[\omega-\frac{2\pi}{N}(k+lN)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0)$$

a_k是以N为周期的

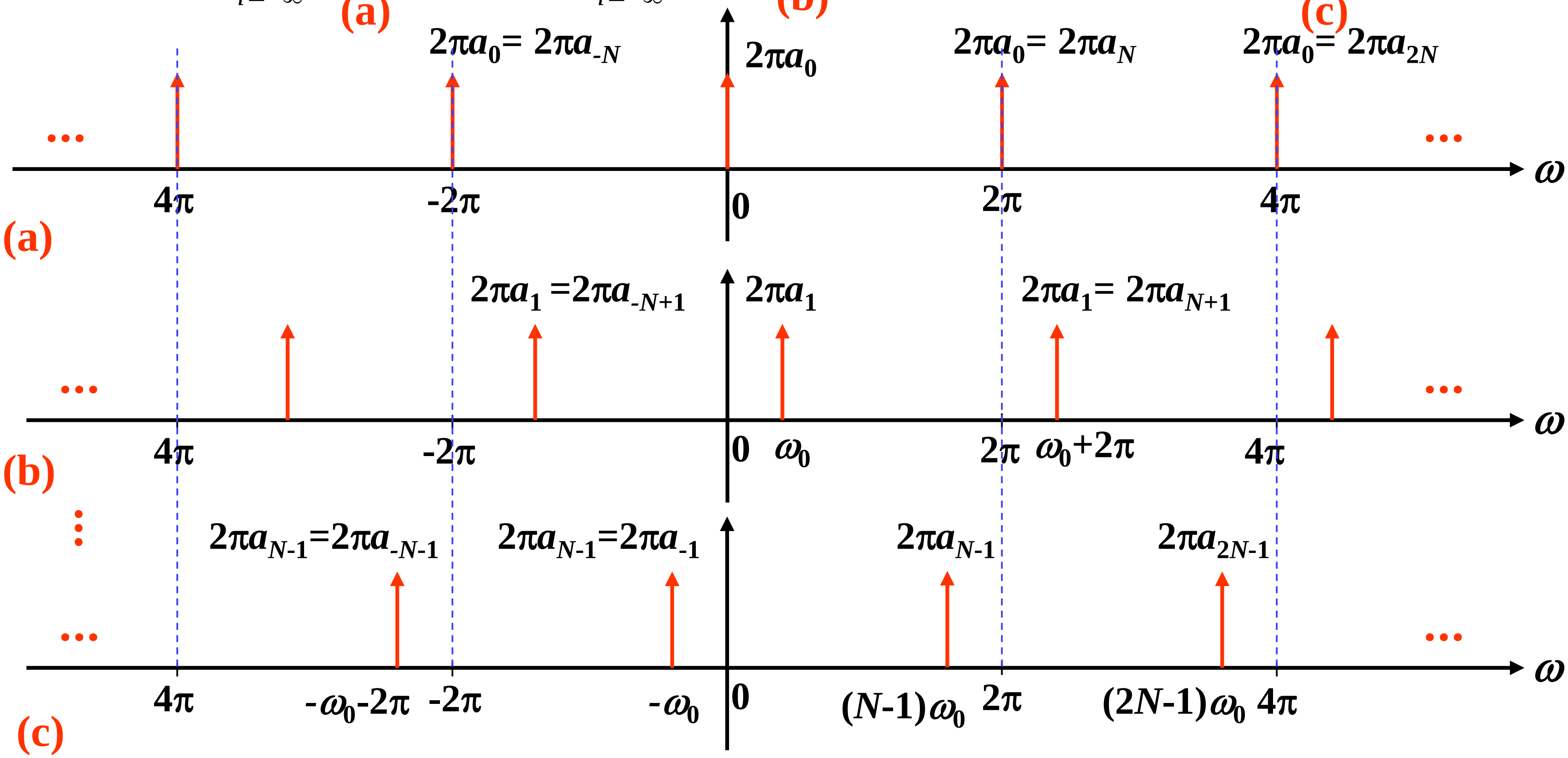
$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

叶变换

信号的傅里叶变换（4）

$$X(e^{j\omega}) = a_0\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-2\pi l) + a_1\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) + \cdots + a_{N-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta[\omega-(N-1)\omega_0-2\pi l]$$

(a) (b) (c)



$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

离散时间傅里叶变换

——离散时间周期信号的傅里叶变换（6）

离散周期信号的DTFT公式：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

若已知离散周期信号的第一个周期$x_1[n]$的傅里叶变换为$X_1(e^{j\omega})$

$$a_k = \frac{X_1(e^{j\omega})}{N}\bigg|_{\omega=k\omega_0}$$

对照

连续周期信号的FT公式：

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

若已知周期信号的第一个周期$x_1(t)$的傅里叶变换为$X_1(j\omega)$

$$a_k = \frac{X_1(j\omega)}{T}\bigg|_{\omega=k\omega_0}$$

离散时间傅里叶变换

——离散时间周期信号的傅里叶变换（7）

二. 常见离散周期信号的DTFT

1.余弦信号x[n]=cosω$_0$n　-π < ω$_0$< π

$$x[n]=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$e^{j\omega_0 n}\xleftrightarrow{F}2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

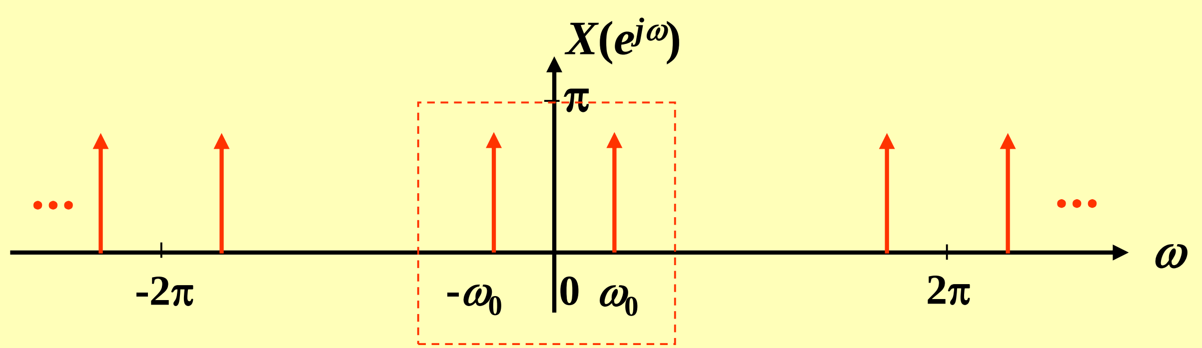
$$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$$

一周内其余a_k=0

$$X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\cdot\frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}2\pi\cdot\frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)$$

一个周期内

$$X(e^{j\omega})=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$



离散时间傅里叶变换

——离散时间周期信号的傅里叶变换（8）

2.周期为N的周期脉冲(样值)序列

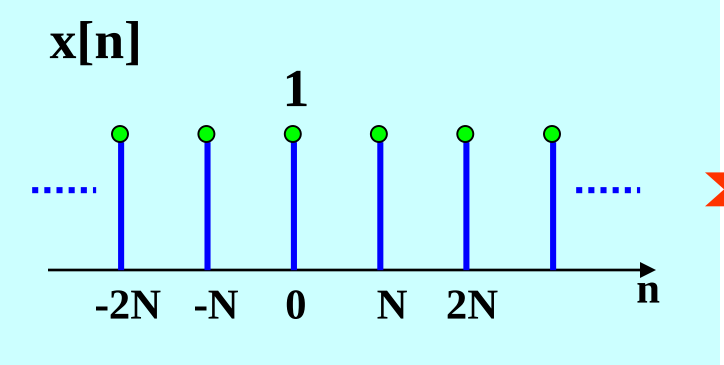
$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$$

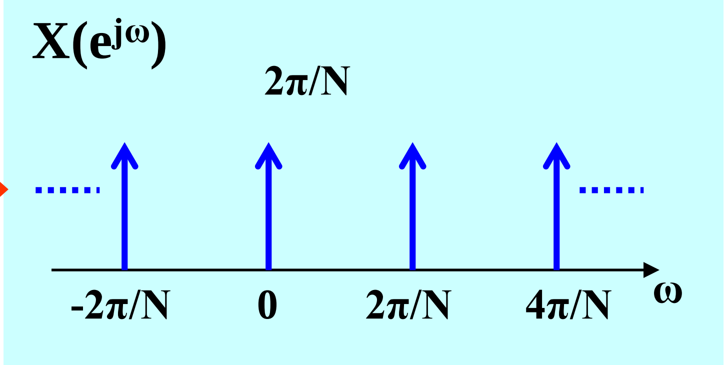
$$\delta[n]\xrightarrow{\mathscr{F}}X_1(e^{j\omega})=1$$

$$a_k=\left.\frac{X_1(e^{j\omega})}{N}\right|_{\omega=k\omega_0}=\frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{N}$$





离散时间信号中时域与频域之间存在相反的关系

总结 - 傅里叶级数与傅里叶变换

离散时间周期信号傅里叶级数的两个关系式:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

综合公式:

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n}$$

分析公式:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

离散时间信号的傅里叶变换:

综合公式:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

分析公式:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

总结 - 傅里叶级数与傅里叶变换

连续时间周期信号的FT：

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

连续时间非周期信号的FT：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

离散时间周期信号的DTFT：

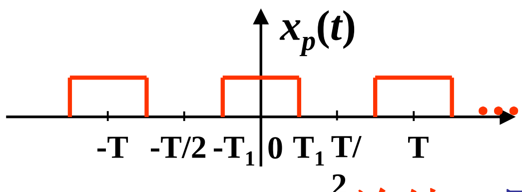
$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

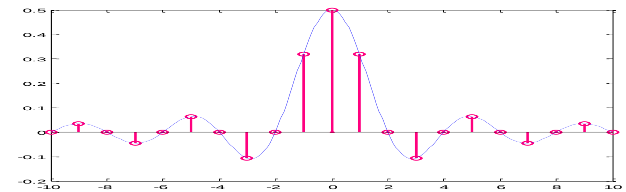
离散时间非周期信号的DTFT：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

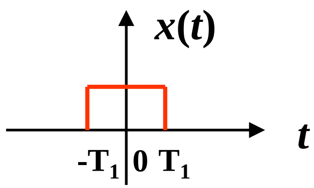
总结 - 傅里叶级数与傅里叶变换

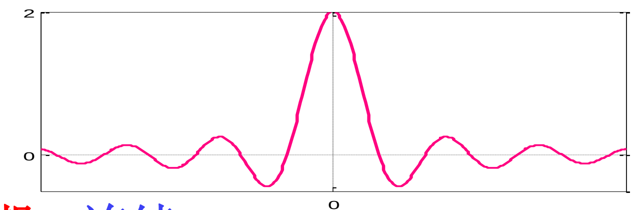
时域　　　　频域



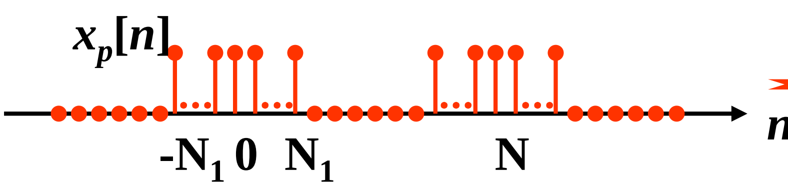


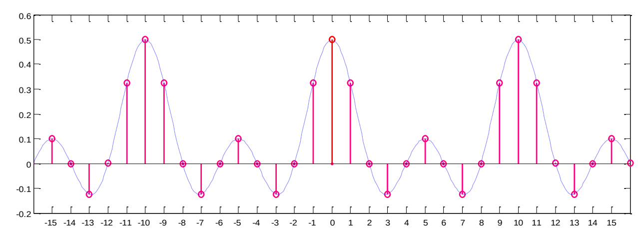
连续、周期 ⟷ 非周期、离散



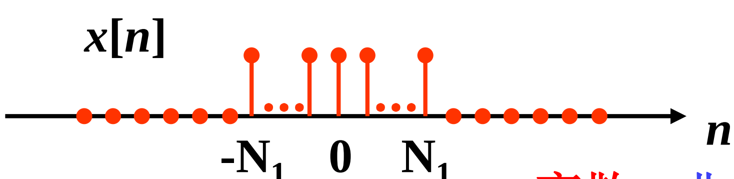


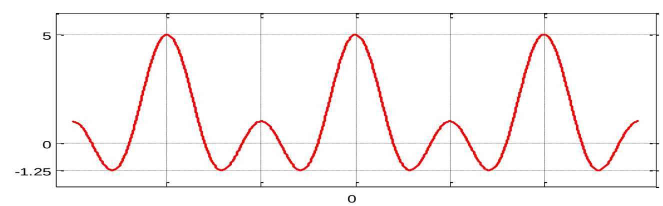
连续、非周期 ⟷ 非周期、连续





离散、周期 ⟷ 周期、离散





离散、非周期 ⟷ 周期、连续

本章主要内容

1. 离散周期信号的傅里叶级数DFS
2. 非周期离散时间信号的傅里叶变换DTFT
3. 离散周期信号的傅里叶变换
4. 离散傅里叶变换的性质

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（1）

作用: *1 更加深刻地了解信号时域与频域之间的关系

*2 简化Fourier变换与反变换的求取

*3 将离散时间的傅里叶变换与连续时间的傅里叶变换进行对比

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

（1）周期性（与连续时间傅里叶变换不同）

证明： $$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}e^{j2\pi}) = X(e^{j\omega})$$

（2）线性

$$\left.\begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1x_1[n]+a_2x_2[n] \xleftrightarrow{F} a_1X_1(e^{j\omega})+a_2X_2(e^{j\omega})$$

—可推广至任意信号的线性组合

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

时间傅里叶变换

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

——离散傅里叶变换的性质（2）

（3）时移与频移

$$x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega}) \Rightarrow \begin{cases} x[n-n_0]\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega_0 n}x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{cases}$$

证明：

$$X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n-n_0]e^{-j\omega n}\overset{n-n_0=k}{=}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega(n_0+k)}$$

$$=e^{-j\omega n_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

含义：信号在时域的平移不改变其幅频特性，相频特性附加一线性相移 $(-\omega n_0)$

$$x_2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega \overset{\omega-\omega_0=\varpi}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\varpi})e^{j\varpi n}e^{j\omega_0 n}d\varpi$$

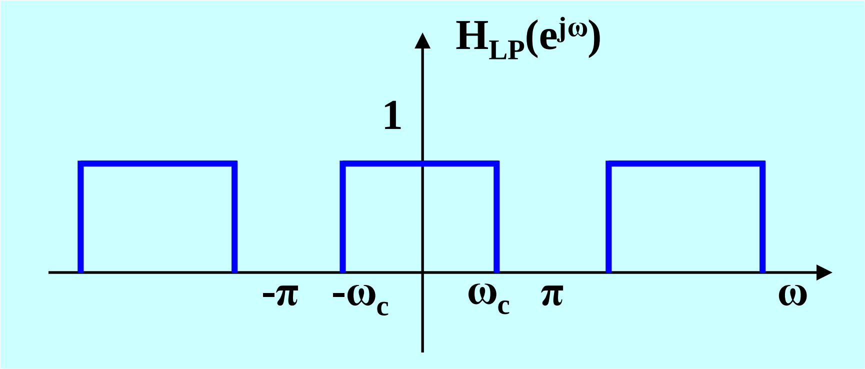
$$=e^{j\omega_0 n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\varpi})e^{j\varpi n}d\varpi=e^{j\omega_0 n}x[n]$$

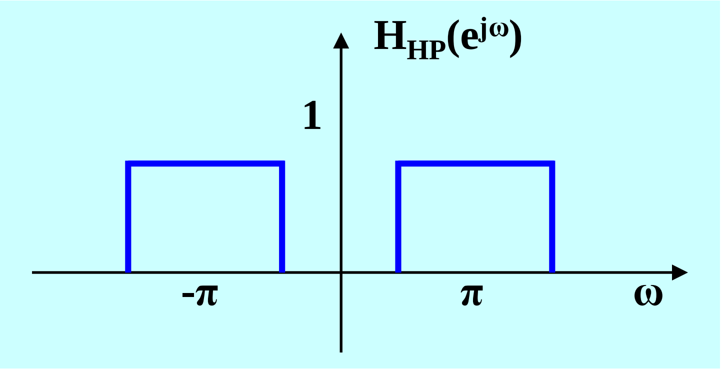
离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（3）

- 时移和频移性质的应用：

（1）离散时间低通滤波器和高通滤波器存在着一种特别关系





$$H_{HP}(e^{j\omega}) = H_{LP}(e^{j(\omega-\pi)}) \Rightarrow h_{HP}[n] = e^{j\pi n} h_{LP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n]$$

时域上如何理解？

（2）调制信号$x[n]\cos\omega_0 n$的频谱

$$x[n]\cos\omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{X(e^{j(\omega-\omega_0)}) + X(e^{j(\omega+\omega_0)})}{2}$$

频谱搬移功能

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

时间傅里叶变换

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

——离散傅里叶变换的性质（4-1）

（4）共轭与共轭对称性

1） $x[n]\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X(e^{j\omega})$ ⇒ $x^*[n]\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X^*(e^{-j\omega})$

证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*[n](e^{j\omega n})^*=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{j\omega n}\right)^*=X^*(e^{-j\omega})$$

2）若x[n]是实值序列，即$x[n]=x^*[n]$, 则傅里叶变换是共轭对称的

$x[n]=x^*[n]$ ⇒ $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$

Re[X(e^{jω})]是ω的偶函数； **Im[X(e^{jω})]是ω的奇函数；**

幅度谱|X(e^{jω})| 是ω的偶函数； **相位谱θ(ω)是ω的奇函数；**

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

离散时间傅里叶变换

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

——离散傅里叶变换的性质（4-2）

2）若x[n]是实值序列，即$x[n]=x^*[n]$，则傅里叶变换是共轭对称的

$$x[n]=x^*[n] \Rightarrow X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$$

若 $X(e^{j\omega})=\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]+j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

则 $X(e^{-j\omega})=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]+j\,\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$

$\parallel$

$X^*(e^{j\omega})=\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]-j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$ 实部偶对称

$\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]=-\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$ 虚部奇对称

若 $X(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$

则 $X(e^{-j\omega})=\left|X(e^{-j\omega})\right|e^{j\angle X(e^{-j\omega})}$

$\parallel$

$X^*(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{-j\angle X(e^{j\omega})}$

$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|X(e^{-j\omega})\right|$ 幅度谱偶对称

$\angle X(e^{-j\omega})=-\angle X(e^{j\omega})$ 相位谱奇对称

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（4-3）

2-1）若x[n]为实偶信号, 即$x[n]=x^*[n]$且$x[-n]=x[n]$

$$x[-n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega n} = X(e^{-j\omega})$$

实偶

$x[n]=x^*[n]$ ➡ $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$

$x[-n]=x[n]$ ➡ $X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$

$$\left.\begin{aligned} &X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \\ &X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \\ &X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

实偶

2-2) 若x[n]为实奇信号, 即$x[n]=x^*[n]$且$x[-n]=-x[n]$

实奇

$x[n]=x^*[n]$ ➡ $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$

$x[-n]=-x[n]$ ➡ $X(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega})$

$$\left.\begin{aligned} &X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \\ &X(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega}) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &-X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \\ &X(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

虚奇

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（4-4）

$$x[n]=x^{*}[n]$$

$$X(e^{j\omega})=X^{*}(e^{-j\omega})$$

3）x[n]分解为偶部$x_e[n]$和奇部$x_o[n]$

$$x_e[n]\xleftrightarrow{F}\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} \qquad x_o[n]\xleftrightarrow{F}j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

证明：

$$x[-n]\xleftrightarrow{F}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{j\omega n}=X(e^{-j\omega})$$

$$x[-n]=x_e[-n]+x_o[-n]=x_e[n]-x_o[n]$$

$$\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega})=\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]-j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

$$x[n]=x_e[n]+x_o[n]\xleftrightarrow{F}\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]+j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

得证

共轭与共轭对称性也适用于傅里叶级数

$$x[n]\xleftrightarrow{Fs}a_k \qquad x^{*}[n]\xleftrightarrow{Fs}a_{-k}^{*}$$

x[n]是实值序列 $\quad a_k=a_{-k}^{*}$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（5-1）

（5）时域差分与求和

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

差分性质

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

累加性质

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

对照

$$y[n]-y[n-1]=x[n]$$

连续时间信号：

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（5-2）

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

例1-4 已知 $x[n]=u[n]$，求 $X(e^{j\omega})$。

解：

$$\because u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

$$\delta[n]\xleftrightarrow{F}1$$

$$u[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（6-1）

（6）时域扩展

讨论信号的内插（或时域的扩展）

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x\left[n/k\right] & \text{当}n\text{为}k\text{的整数倍} \\ 0 & \text{当}n\text{不为}k\text{的整数倍} \end{cases}$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_{(k)}[n]e^{-j\omega n}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[r]e^{-j(k\omega)r}=X(e^{jk\omega})$$

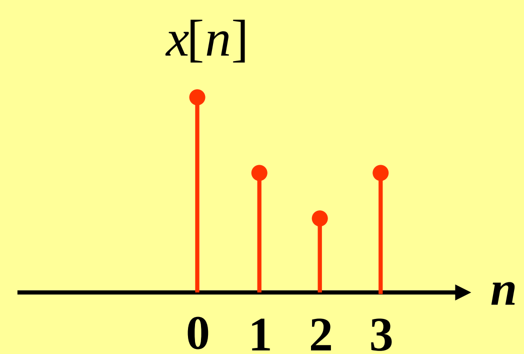
$$x_{(k)}[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{jk\omega})$$

时域扩展←→频域压缩

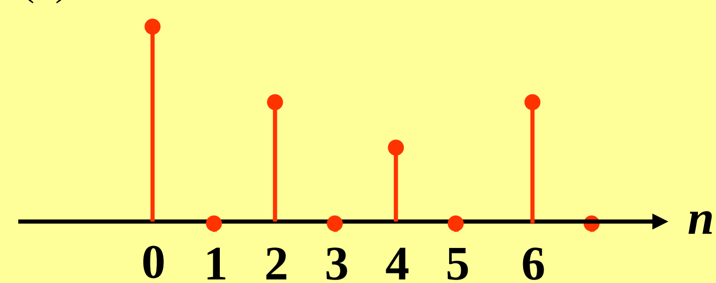
周期=？

特例k=-1，时间反褶：$x_{(-1)}[n]=x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\omega})$

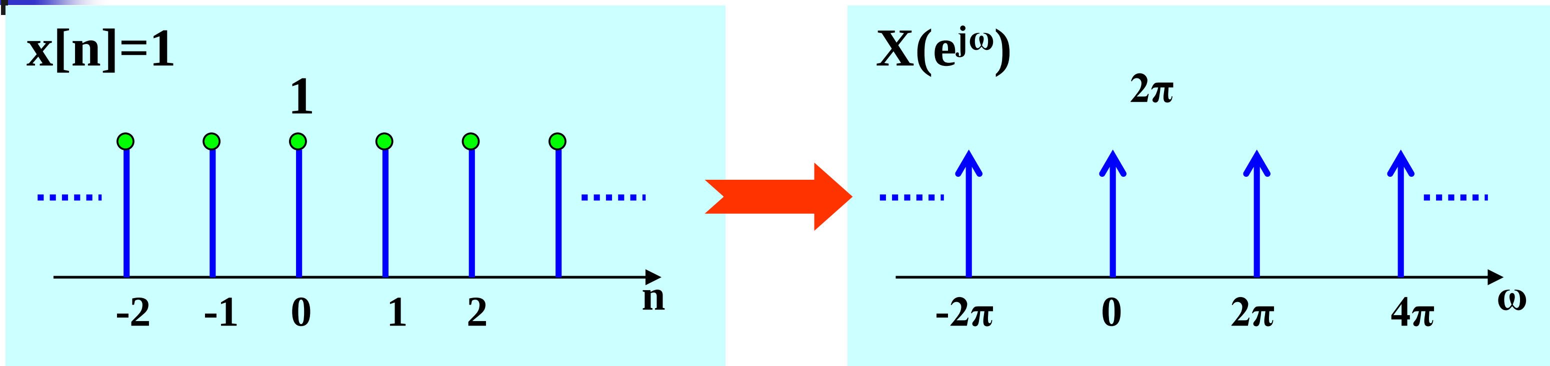
说明时域反褶⇒频域反褶



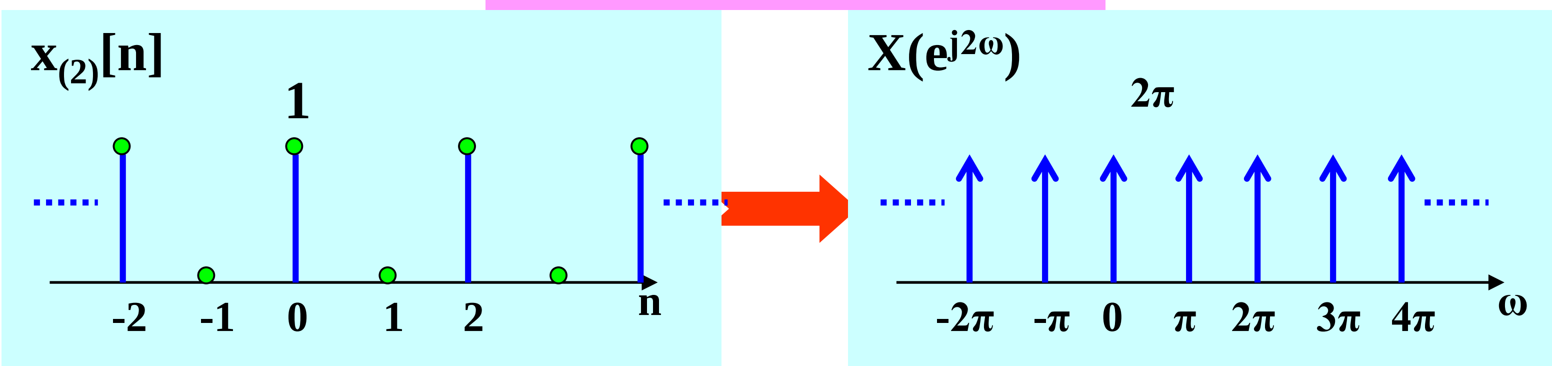
$x_{(2)}[n]=x[n/2]$



例题



时域扩展------频域压缩



$x_{(2)}[n]=1/2+1/2*(-1)^n$

直流信号

高频信号

连续时间信号的时域扩展，频域压缩，低频部分增强；

离散时间信号的时域扩展是通过插零实现的，与连续时间信号的时域扩展不同，增加了高频部分

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（7）

（7）频域微分 $x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})$

$$nx[n]\xleftrightarrow{F}j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

或

$$-jnx[n]\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$

证明：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}\Rightarrow\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-jn)x[n]e^{-j\omega n}$$

得证

例4-8 (P154) 求x[n]的傅里叶变换 $x[n]=(n+1)a^nu[n],\quad |a|<1$

解：

$$a^nu[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

频域微分

$$na^nu[n]\xleftrightarrow{F}j\frac{d\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)}{d\omega}=\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

线性

$$(n+1)a^nu[n]\xleftrightarrow{F}\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

推广：

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^nu[n]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^r}$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（8-1）

（8）卷积性质

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow x[n]*h[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

证明：方法一：从系统分析的角度证明

(输入信号为x[n]，LTI系统的单位脉冲响应h[n])，输出为y[n]

信号分解：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{\omega_0 \to 0}\sum_{k\omega_0 = <2\pi>} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$

特征函数：$e^{jk\omega_0 n} \xrightarrow{LTIS} H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}$

$$\Rightarrow x[n] \xrightarrow{LTI} y[n] = \frac{1}{2\pi}\lim_{\omega_0 \to 0}\sum_{k\omega_0 = <2\pi>} X(e^{jk\omega_0})H(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0 \Rightarrow$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（8-2）

$$x[n] \xrightarrow{LTIS} y[n] = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{k\omega_0 = <2\pi>} X(e^{jk\omega_0}) H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

$$\overset{\text{令：}k\omega_0 = \omega}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

时域： $y[n] = x[n] * h[n]$

含义： $x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$

将输入**x[n]**分解为各频率复指数信号分量的线性组合，这些频率分量通过**LTI**系统时，系统的作用就是给他们的复振幅加权一个**H(e^{jω})**，因此，单位脉冲响应**h[n]**的频谱**H(e^{jω})**被称为系统的频率响应。

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \qquad h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega}) \qquad y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（8-4）

卷积性质也适用于周期信号的傅里叶级数，但形式略有不同

$$x[n] \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$h[n] \overset{Fs}{\longleftrightarrow} b_k$$

$$\Rightarrow \sum_{r=<N>} x[r]h[n-r] \overset{Fs}{\longleftrightarrow} Na_k b_k$$

——称为周期卷积

证明：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\sum_{r=<N>} x[r]h[n-r]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{r=<N>} x[r] \sum_{n=<N>} h[n-r]e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \sum_{r=<N>} x[r]e^{-jk\omega_0 r} b_k = Na_k b_k$$

这里用一个周期上的卷积代替了时域卷积，避免了周期信号的卷积为无穷大的问题，这类卷积称为周期卷积。记

$$x[n] \otimes h[n] = \sum_{r=<N>} x[r]h[n-r]$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（9-1）

（9）调制特性

时域相乘　　　　频域卷积

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$$

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$X(e^{j\omega})$ 与 $Y(e^{j\omega})$ 的周期卷积

证
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right\}e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \boxed{\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes Y(e^{j\omega})}$$

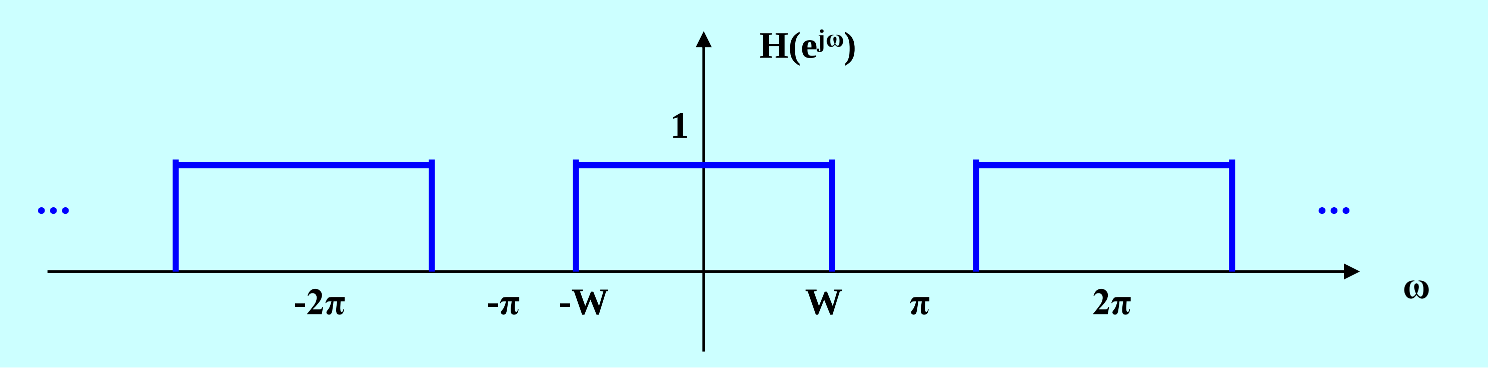
对于周期信号：

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{Fs} d_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$$

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（9-2）

例 已知某系统的频率响应如图示，求h[n].



解：

$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\left(e^{jWn}-e^{-jWn}\right)=\frac{\sin Wn}{\pi n}$$

例 $y[n]=x_1[n]x_2[n]$，

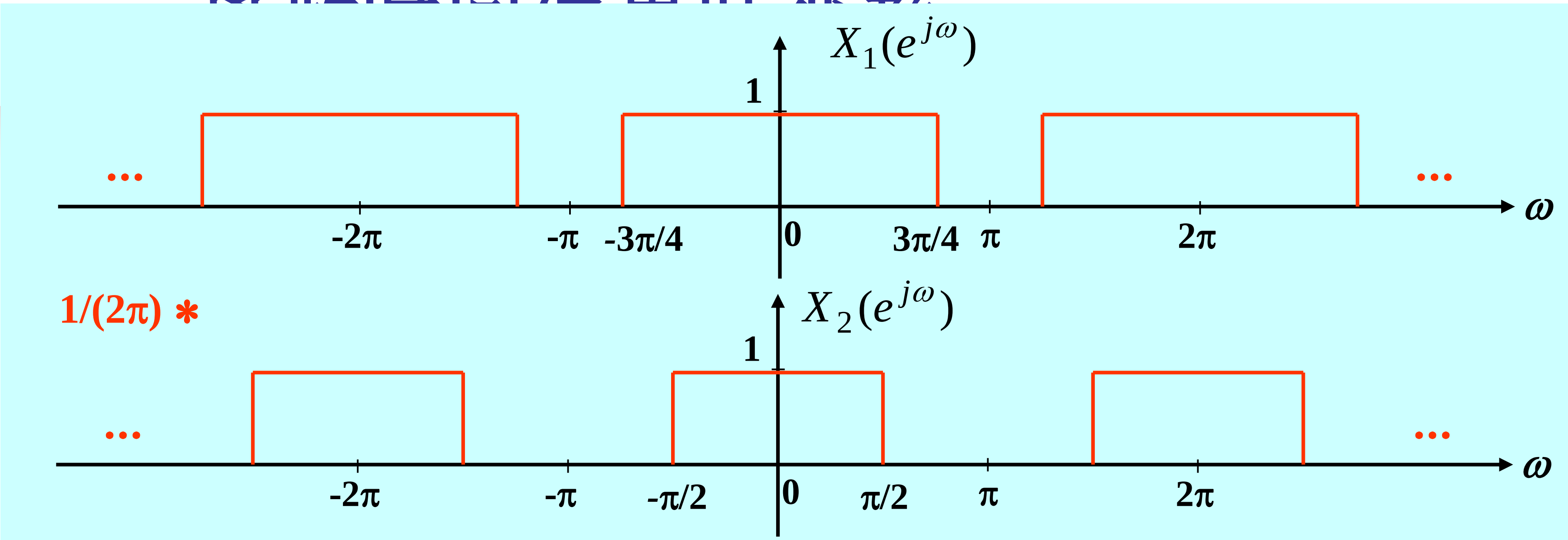
$$x_1[n]=\frac{\sin\left(3\pi n/4\right)}{\pi n}\qquad x_2[n]=\frac{\sin\left(\pi n/2\right)}{\pi n}$$

求y[n]的傅里叶变换。

作图法

解：调制性质

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

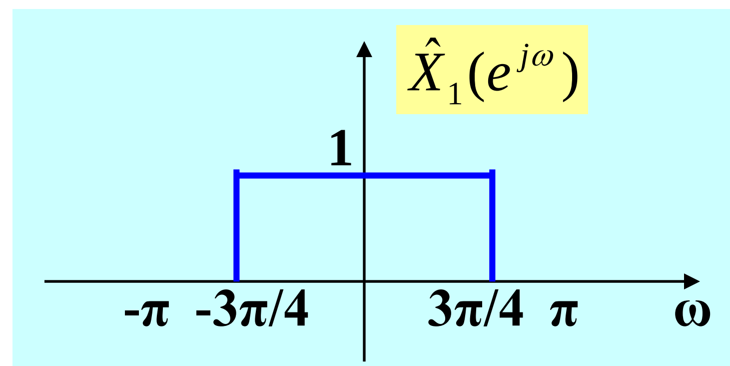


周期卷积方法: 一个信号的一个周期与另一周期信号作线性卷积

就相应于 $X_1(e^{j\omega})$ 与 $X_2(e^{j\omega})$ 的周期卷积

定义:

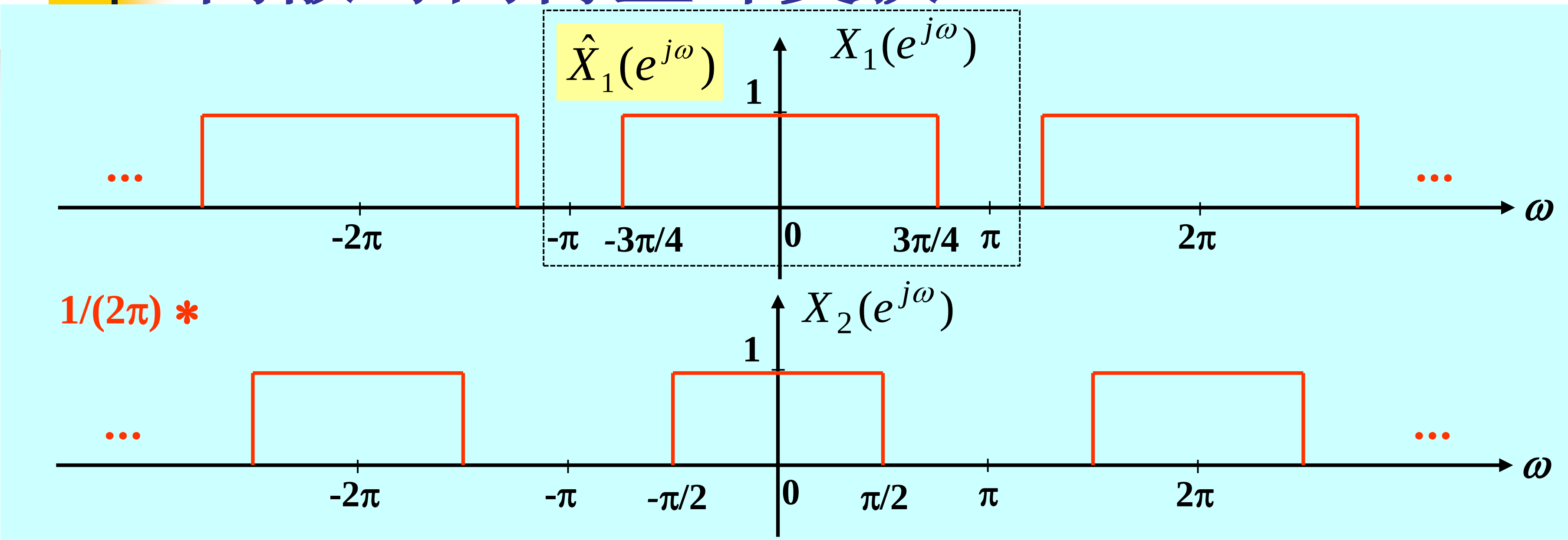
$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & -\pi < \omega \le \pi \\ 0 & else \end{cases}$$



问题归结为求矩形脉冲与周期方波卷积的**1/2π**

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

离散时间傅里叶变换

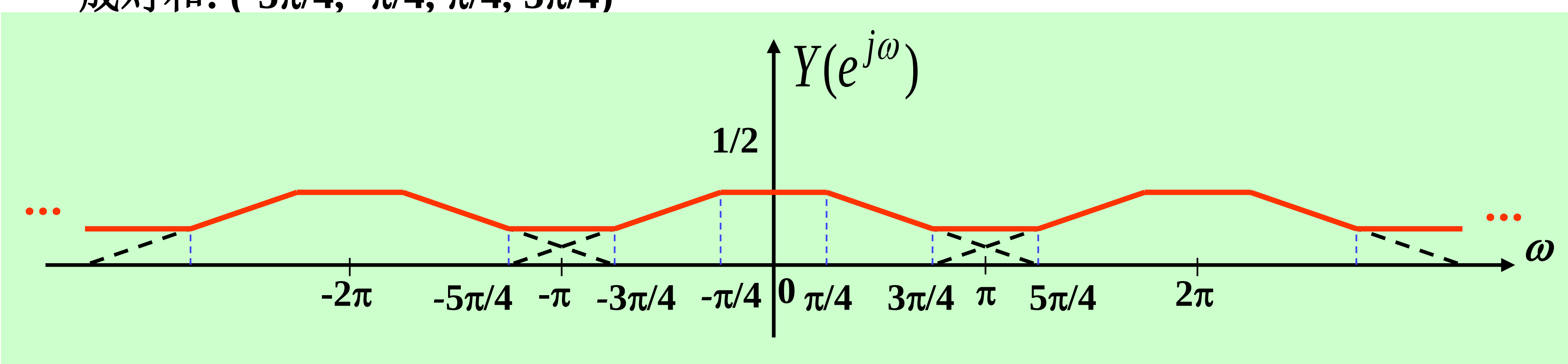


区间确定: (-3π/4, 3π/4)

(-π/2, π/2)

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\hat{X}_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

成对和: (-5π/4, -π/4, π/4, 5π/4)



离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（10-1）

（10）帕斯瓦尔定理

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

含义：信号的总的能量等于频率2π区间上每单位频率上的能量之和，$|X(e^{j\omega})|^2$称为x[n]的能量密度谱，即各频率分量所占的能量大小。

证明：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x^*[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega k}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\omega k}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

对离散时间周期信号而言：

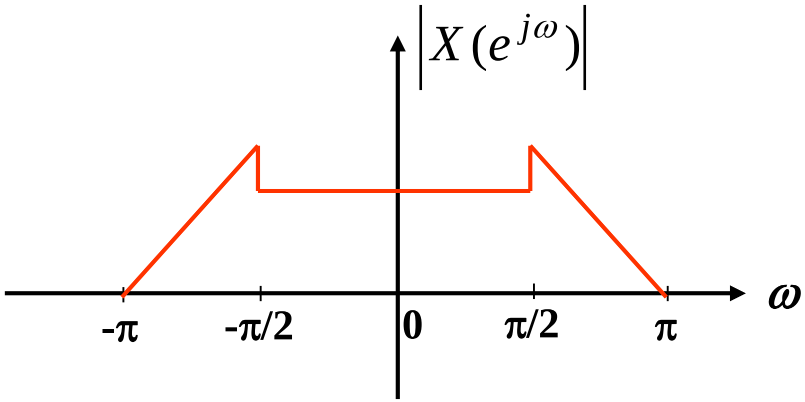
$$x[n] \xleftrightarrow{Fs} a_k \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

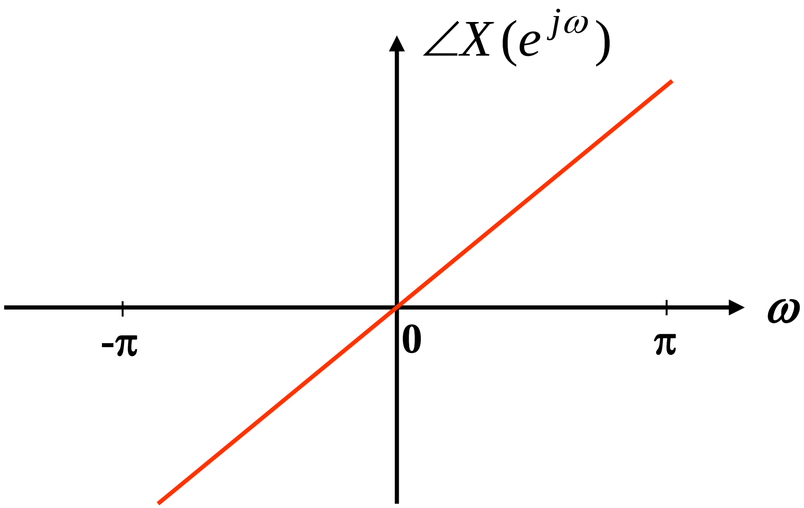
周期信号的平均功率等于它的各次谐波分量的平均功率之和

离散时间傅里叶变换

——离散傅里叶变换的性质（10-3）

例　如图，试判断：x[n]是否为周期、实、偶和有限能量的信号。





解：

$X(e^{j\omega})$ 连续 → $x[n]$非周期

$|X(e^{j\omega})|$ 偶对称
$\angle X(e^{j\omega})$ 奇对称 → $x[n]$实信号

$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$ 复数 → $x[n]$非偶信号

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ 有限 → $x[n]$能量信号

傅里叶变换性质小结（1）

离散时间FT	连续时间FT
$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$	$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$
$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

（0）周期性：

$$X(e^{j(\omega+2\pi)})=X(e^{j\omega})$$

（1）线性性质：

$$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\xleftrightarrow{F}a_1X_1(e^{j\omega})+a_2X_2(e^{j\omega})$$

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\xleftrightarrow{F}a_1X_1(j\omega)+a_2X_2(j\omega)$$

（2）时移特性：

$$x[n-n_0]\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$x(t-t_0)\xleftrightarrow{F}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

傅里叶变换性质小结（2）

离散时间FT	连续时间FT
（3）频移特性	
$e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$	$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$
（4）共轭性质：	
$x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$	$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$
共轭对称性：$x[n]=x^*[n]$	$x(t)=x^*(t)$
$\Rightarrow X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$	$\Rightarrow X(j\omega)=X^*(-j\omega)$

推论1：若x(t)/x[n]为实，则频谱的实部是ω的偶函数，虚部是ω的奇函数。

推论2：若x(t)/x[n]为实且偶，则频谱为实值偶函数

推论3：若x(t)/x[n]为实且奇，则频谱为纯虚且奇函数

推论4：若实函数x(t)/x[n] $=x_e(t)+x_o(t)$分解为偶部＋奇部，则偶部的FT为频谱的实部，奇部的FT为频谱的虚部

傅里叶变换性质小结（3）

离散时间FT

（5）时域差分与求和

$$x[n]-x[n-1]\overset{F}{\longleftrightarrow}(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

（6）时域扩展

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x\left[n/k\right] & \text{当}n\text{为}k\text{的整数倍}\\ 0 & \text{当}n\text{不为}k\text{的整数倍}\end{cases}$$

$$x_{(k)}[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}X(e^{jk\omega})$$

（7）频域微分

$$nx[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

连续时间FT

（5）微分与积分

$$\frac{dx(t)}{dt}\overset{F}{\longleftrightarrow}j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

（6）时间与频率的尺度变换

$$x(at)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{|a|}X(\frac{j\omega}{a})$$

$$\frac{1}{|a|}x(\frac{t}{a})\overset{F}{\longleftrightarrow}X(ja\omega)$$

（7）频域微分

$$tx(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

傅里叶变换性质小结（4）

离散时间FT	连续时间FT
（8）帕斯瓦尔定理	
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lvert x[k] \rvert^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \lvert X(e^{j\omega}) \rvert^2 d\omega$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t) \rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(j\omega) \rvert^2 d\omega$
（9）时域卷积性质	
$x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$	$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) H(j\omega)$
（10）调制性质（频域卷积）	
$x[n] y[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$ $= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes Y(e^{j\omega})$	$x_1(t) x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

课后作业

- 作业：
  - **P188**
    - **6，11**
    - **24，25（MATLAB）**
- 预习：
  - **DFT、FFT**