连续信号的分析

主 讲 教 师 ： 于 淼

连续信号的拉普拉斯变换分析

- ***拉普拉斯变换***
  - 从傅立叶变换到拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的收敛域
  - 拉普拉斯变换的性质
  - 常用信号的拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯反变换
  - 单边拉普拉斯变换
- ***信号的复频域分析***
  - 拉普拉斯变换的几何表示
  - 拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系
  - 由零极点图对傅立叶变换进行几何求解

连续信号的拉普拉斯变换分析

一、拉普拉斯变换

1、从傅立叶变换到拉普拉斯变换

有几种情况不满足狄里赫利条件：

- 指数增长信号

$$e^{at} \quad (a>0)$$

- 功率型周期信号

- 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$

σ 为任意实数，则

$x(t).e^{-\sigma t}$ 收敛，满足狄里赫利条件

$$e^{at}.e^{-\sigma t} \quad (\sigma > a)$$

连续信号的拉普拉斯变换分析

$$x_1(t) = x(t)e^{-\sigma t}$$

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$s=\sigma+j\omega$

拉普拉斯变换

$$X_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

双边拉普拉斯变换

拉普拉斯反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_b(s)e^{st}ds$$

FT：实频率 ω 是振荡频率

LT：复频率S ω 是振荡频率， σ 控制衰减速度

连续信号的拉普拉斯变换分析

2、拉普拉斯变换的收敛域

- $e^{-\sigma t}$ 为指数型衰减因子，它至多能使指数增长型函数满足绝对可积条件，或满足

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}=0$$

- 有些函数，如 e^{t^2} 、t^t 等，它们随t的增长速率比 $e^{-\sigma t}$ 的衰减速度快，这些函数乘上衰减因子后仍不满足绝对可积条件，它们的拉普拉斯变换便不存在.
- 即使是乘上衰减因子后能满足绝对可积条件，也存在一个σ的取值问题。

连续信号的拉普拉斯变换分析

2、拉普拉斯变换的收敛域

- 乘上衰减因子后，$x(t)e^{-\sigma t}$ 能否满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

- 取决于信号x(t)的性质，也取决于σ的取值。把能使信号的拉普拉斯变换$X_b(s)$存在的s值的范围称为信号x(t)的拉普拉斯变换的收敛域，记为ROC。

连续信号的拉普拉斯变换分析

例1：求右边信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域。

- **解：由拉普拉斯变换定义式可知**

$$X_b(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)e^{-st}dt$$

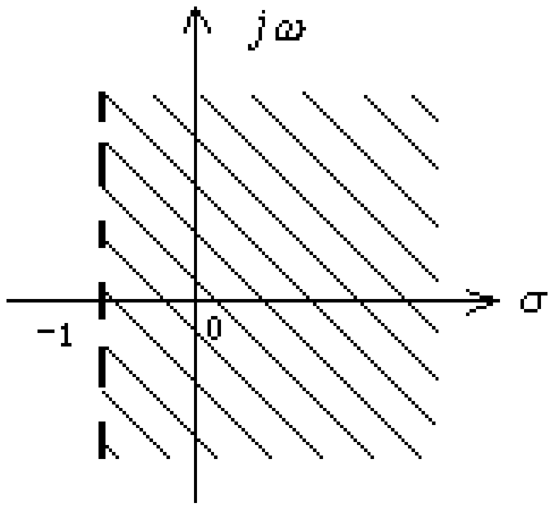
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(s+1)t}dt \quad =-\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\Big|_0^{\infty}$$

S+1
= σ+1 + jω

- **上式积分只有在σ> - 1时收敛，这时**

$$X_b(s)=\frac{1}{s+1}$$

收敛域表示在以σ轴为横轴、 jω轴为纵轴的平面上.



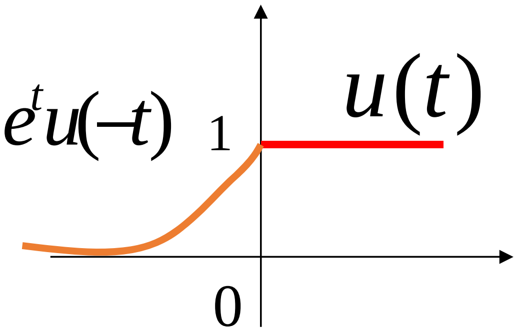
连续信号的拉普拉斯变换分析

双边拉氏变换收敛域

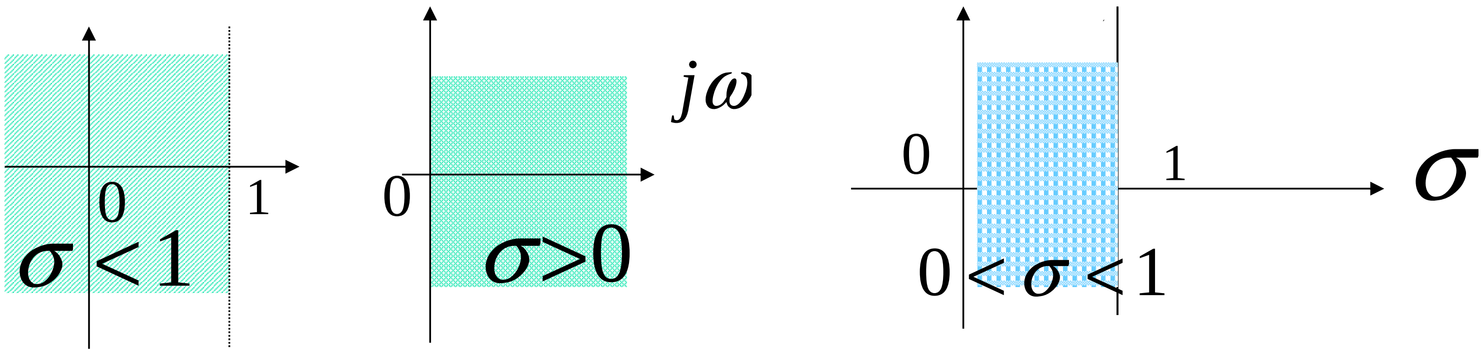
$$x(t)=u(t)+e^{t}u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}dt=\int_{0}^{\infty} u(t)e^{-\sigma t}dt+\int_{-\infty}^{0} u(-t)e^{(1-\sigma)t}dt$$

$\sigma>0$ $\sigma<1$



$$x(t)\overset{LT}{\Leftrightarrow}\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s}$$



连续信号的拉普拉斯变换分析

$$x(t) = e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(b-\sigma)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{(a-\sigma)t}dt$$

$\sigma < b$ $\qquad$ $a < \sigma$

$b > a, \qquad a < \sigma < b$ 收敛，存在双边拉氏变换

$b < a$ 没有收敛域。不存在双边拉氏变换

连续信号的拉普拉斯变换分析

2、拉普拉斯变换的收敛域

- 连续信号x(t)的拉普拉斯变换的收敛域的边界是s平面上平行于jω轴的直线。
- ***右边信号*** x(t)u(t-t0)的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域具有$\sigma>\sigma_0$形式，即收敛域具有左边界σ_0 。
- ***左边信号*** x(t)u(-t+t0)的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域具有右边界σ_0 。
- ***双边信号*** 的拉普拉斯变换如果存在，则其收敛域必为平面上具有左边界和右边界的带状区域。
- 如果***时限信号*** 的拉普拉斯变换存在，则其收敛域必为整个s平面。

连续信号的拉普拉斯变换分析

3、拉氏变换的基本性质（1）

线性	$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} k_i . L[x(t)]$
微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{x'(0^-)}{s}$
时移	$x(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$
频移	$x(t)e^{-at}$	$X(s+a)$

连续信号的拉普拉斯变换分析

3、拉氏变换的基本性质（2）

尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
初值定理	$\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = x(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$	
终值定理	$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sX(s)$	
卷积定理	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$
	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$

连续信号的拉普拉斯变换分析

例：周期信号的拉氏变换

$$x_1(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} X_1(s)$$

第一周期的拉氏变换

$$x_1(t-nT) \overset{L}{\Leftrightarrow} e^{-snT} X_1(s)$$

利用时移特性

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(t-nT) \overset{L}{\Leftrightarrow} X_1(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}$$

$$= \frac{X_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

利用无穷级数求和

连续信号的拉普拉斯变换分析

4、常用信号的拉氏变换

$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t)e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}

连续信号的拉普拉斯变换分析

5、拉普拉斯反变换

- ***部分分式法***：将$X_b(s)$展开为部分分式，再求解$x(t)$

- ***留数法***

连续信号的拉普拉斯变换分析

例：求 $X_b(s)=\dfrac{8(s-2)}{(s+5)(s+3)(s+1)},\sigma>-1$ 所对应的信号。

- 解：对$X_b(s)$进行部分分式展开，得

$$X_b(s)=-\frac{3}{s+1}+\frac{10}{s+3}-\frac{7}{s+5}\qquad \sigma>-1$$

$$X_{b1}(s)=-\frac{3}{s+1},\sigma>-1 \qquad X_{b2}(s)=\frac{10}{s+3},\sigma>-3 \qquad X_{bs}(s)=-\frac{7}{s+5},\sigma>-5$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$x_1(t)=-3e^{-t}u(t) \qquad x_2(t)=10e^{-3t}u(t) \qquad x_3(t)=-7e^{-5t}u(t)$$

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)=(-3e^{-t}+10e^{-3t}-7e^{-5t})u(t)$$

连续信号的拉普拉斯变换分析

6、单边拉普拉斯变换

- 实际信号一般都有初始时刻，不妨把初始时刻设为坐标原点，通常大家关心的信号都是 $x(t)=0, t<0$ 的因果信号

$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

积分下限取0⁻是为了处理在t=0包含冲激函数及其导数的x(t)时较方便

- 称为信号x(t)的单边拉普拉斯变换

连续信号的拉普拉斯变换分析

6、单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯变换只考虑信号 $t \geq 0$ 区间，与t<0区间的信号是否存在或取什么值无关，因此，对于在t<0区间内不同，而在区间 $t \geq 0$ 内相同的两个信号，会有相同的单边拉普拉斯变换

连续信号的拉普拉斯变换分析

- 单边拉普拉斯变换具有 $\sigma > \sigma_0$ 的收敛域。由于单边拉普拉斯变换的收敛域单值，所以在研究信号的单边拉普拉斯变换时，把它的收敛域视为变换式已包含了，一般不再另外强调。
- 信号的单边拉普拉斯变换可看成信号x(t)u(t)的双边拉普拉斯变换，可以用下式求出x(t)u(t) ：

$$x(t)u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

式中的X(s)为单边拉普拉斯，称上式为单边拉普拉斯反变换.

- 单边拉普拉斯变换除时域微分和时域积分外，绝大部分性质与双边拉普拉斯变换相同，不再像双边拉普拉斯变换那样去强调收敛域。

连续信号的拉普拉斯变换分析

6、单边拉普拉斯变换　- 初值定理和终值定理

- ***初值定理***：对于在t=0处不包含冲激及各阶导数的因果信号x(t)，若其单边拉普拉斯变换为X(s)，则x(t)的初值$x(0^+)$可由下式得到

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

- ***终值定理***：对于满足以上条件因果信号x(t)，若其终值x(∞)存在，则它可由下式得到

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

连续信号的拉普拉斯变换分析

二、信号的复频域分析

- 拉普拉斯变换的几何表示
- 拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系
- 由零极点图对傅立叶变换进行几何求解

连续信号的拉普拉斯变换分析

1、拉普拉斯变换的几何表示

- 如果信号x(t)是实指数或复指数信号的线性组合，则其拉普拉斯变换可表示为s的有理函数的形式

$$X_b(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

Xb(s)的零点

- 如果N(s)为$X_b(s)$的m次分子多项式，有m个根z_j，D(s)为n次分母多项式，有n个根p_i

Xb(s)的极点

$$X_b(s)=\frac{X_0\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}$$

连续信号的拉普拉斯变换分析

1、拉普拉斯变换的几何表示

- ***零极点图***：如果在s平面上分别以“。”和“×”标出$X_b(s)$的零点和极点的位置，就得出$X_b(s)$的零极点图。
- 在$X_b(s)$的零极点图中，标出了$X_b(s)$的收敛域后，就构成了拉普拉斯变换的几何表示，它除去可能相差一个常数因子外，和有理拉普拉斯变换一一对应，可以完全表征一个信号的拉普拉斯变换，进而表征这个信号的基本属性。

连续信号的拉普拉斯变换分析

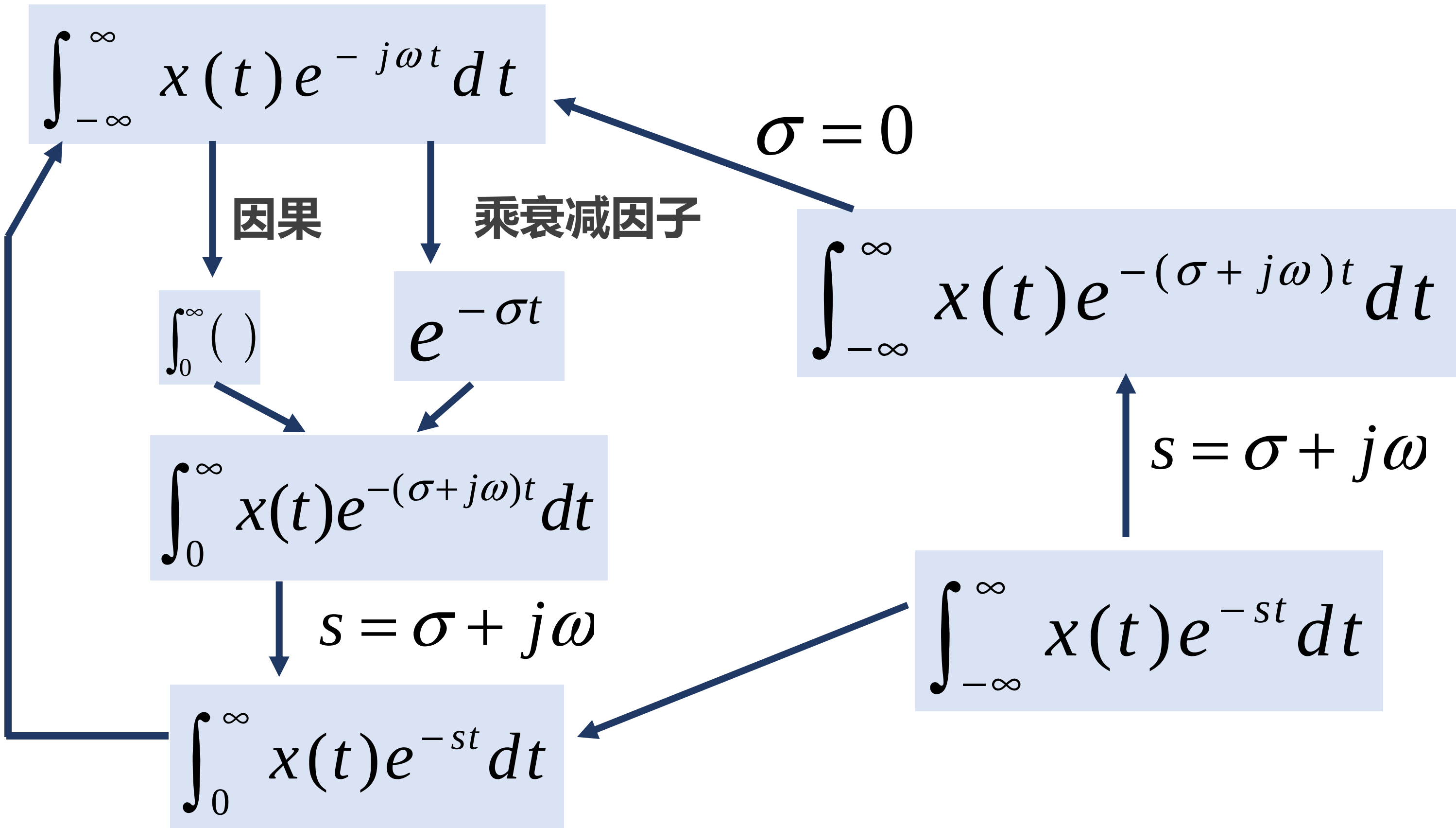
1、拉普拉斯变换的几何表示

对于$X_b(s)$为有理函数的有理拉普拉斯变换来说，有如下特点：

- **有理拉普拉斯变换的收敛域内不包含任何极点。**
- 有理拉普拉斯变换的收敛域被极点所界定或延伸至无穷远。

连续信号的拉普拉斯变换分析

2、拉氏变换与傅氏变换的关系



连续信号的拉普拉斯变换分析

2、拉氏变换与傅氏变换的关系

- 是不是任何信号的拉氏变换都可以通过s=jw与它的傅里叶变换联系起来？

NO

- 一般来说，一个信号存在拉氏变换，其傅里叶变换可能存在，也可能不存在。
- 存在傅里叶变换的信号一般也存在拉普拉斯变换（个别信号除外，如直流信号）。
- 对于有些信号，即使既存在拉普拉斯变换，又存在傅里叶变换，也不能简单地用s=jw将二者联系起来。

连续信号的拉普拉斯变换分析

- 收敛域包含jω轴 。只要将$X_b(s)$中的s代以jω ，即为信号的傅立叶变换

$$X(\omega)=X_b(s)|_{s=j\omega}$$

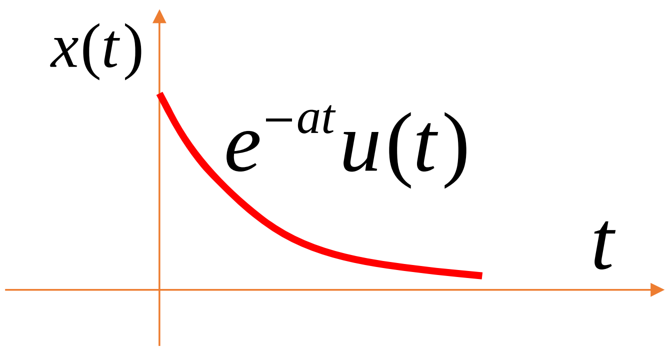
- 收敛域不包含jω轴。信号的傅立叶变换不存在，不能用将$X_b(s)$中s代以jω求傅立叶变换。
- 收敛域的收敛边界位于jω轴上。信号的拉普拉斯变换为$X_b(s)$，则其傅立叶变换为

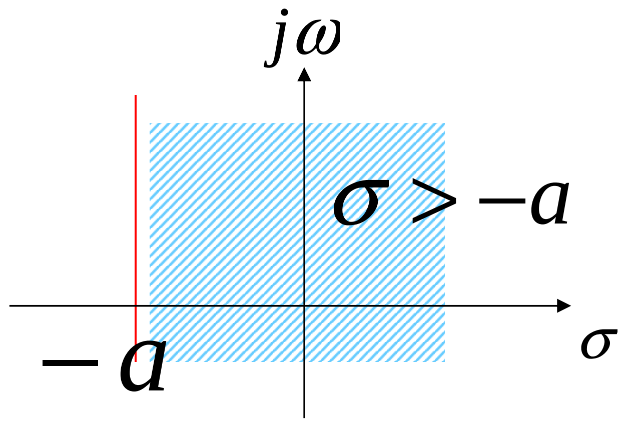
$$X(\omega)=X_b(s)|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{p}k_i\delta(\omega-\omega_i)$$

拉普拉斯变换和傅立叶变换的根本区别在于变换的讨论区域不同，前者为s平面中的整个收敛区域，后者只是jω轴

连续信号的拉普拉斯变换分析

收敛域包含jω轴





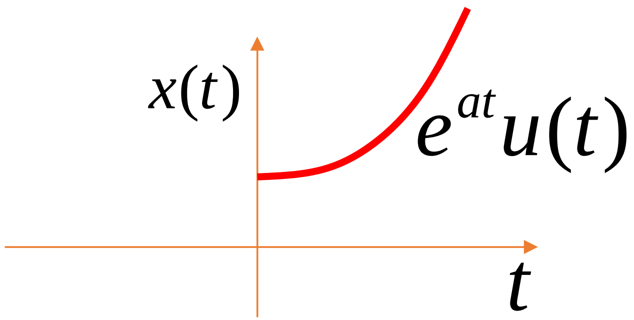
$$X(s)=\frac{1}{s+a}$$

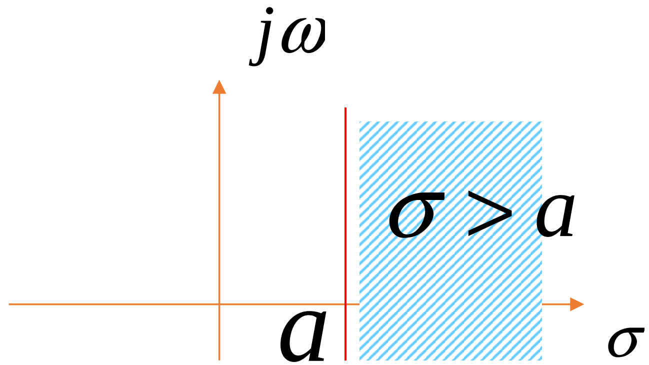
$$s = j\omega$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+a}$$

连续信号的拉普拉斯变换分析

收敛域不包含jω轴

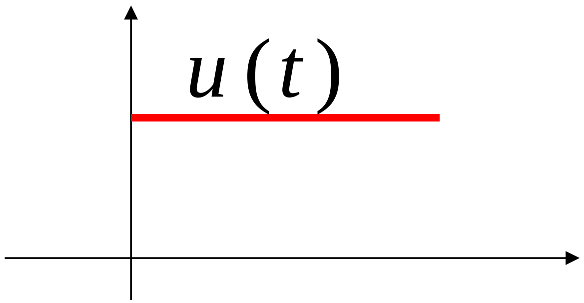




$$X(s) = \frac{1}{s-a}$$

傅氏变换不存在，拉氏变换存在

连续信号的拉普拉斯变换分析



存在傅氏变换，但收敛于虚轴，不能简单用 $s=j\omega$ ，要包含奇异函数项。

$$X(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$X(j\omega)=X(s)\Big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{n}k_n\delta(\omega-\omega_n)$$

$K_1=1$

谢谢大家