复频域分析法

目录

1 复频域分析的研究意义

2 微分方程的复频域求解

3 传递函数

复频域分析

1、复频域分析的研究意义

(1)**在s域(z域)中讨论系统对输入信号的响应及其特性就是复频域分析法**

(2)信号在频域中有非常明确的物理意义，在复频域中其物理意义不清晰。

(3)作为一种分析方法，它比频域法更方便、更有效：

- 更方便地求取系统对输入信号的响应（求解微分方程）
- 更有效地研究既定系统的特性
- 方便地实行系统的综合和设计

复频域分析

2、微分方程的复频域求解

设线性时不变系统为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t)$$

式中，x(t)为t=0时接入的因果输入信号；y(t) 为系统的输出信号。设x(t)接入前，系统不处于静止状态，即系统具有非零初始条件:

$$y^{(i)}(0\_) \quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

既有输入，又有初始能量，那么如何求解系统的全响应呢？

复频域分析-微分方程->代数方程

系统具有非零初始条件，根据单边拉氏变换及时域微分性质

$$L[y^{(i)}(t)] = s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-)$$

由于x(t)是t=0时才接入的因果信号，没有初始能量，因此其拉式变换为

$$x^{(j)}(0_-) = 0 \quad \Rightarrow \quad L[x^{(j)}(t)] = s^j X(s)$$

将系统两边取拉普拉斯变换，得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i [s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-)] = \sum_{j=0}^{m} b_j s^j X(s)$$

微分方程->代数方程

复频域分析

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right] Y(s) - \sum_{i=0}^{n} a_i \left[\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0)\right] = \left[\sum_{j=0}^{m} b_j s^j\right] X(s)$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \left[\sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y^{(k)}(0_-)\right]}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

s的有理函数**与输入信号的拉普拉斯变换X(s) 相乘**，表示系统在“起始松弛”情况下对激励的响应。这一项为系统零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y_{zs}(s)$

s的有理函数,**与输入的拉普拉斯变换无关**，仅取决于输出及其各阶导数的初始值。这一项表示系统在本次输入为零时仍有的输出，即零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y_{zi}(s)$

复频域分析

$$Y(s)=Y_{zs}(s)+Y_{zi}(s)$$

两边取拉普拉斯反变换，得

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

$$y_{zs}(t)=L^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{m}b_js^j}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}X(s)\right]$$

$$y_{zi}(t)=L^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i[\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y^{(k)}(0_-)]}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}\right]$$

利用复频域分析法，能方便地求取系统的零输入响应、零状态响应以及全响应，这是时域法、频域法都难以做到的。

复频域分析

例1：线性时不变系统

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2x'(t)+6x(t)$$

该系统初始状态为 $y(0\_)=2, y'(0\_)=1$，求在输入信号 $x(t)=u(t)$ 的作用下，系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

复频域分析

解： 对方程取单边拉普拉斯变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0\_)-y'(0\_)+3sY(s)-3y(0\_)+2Y(s)$$
$$=2sX(s)+6X(s)$$

整理结果

$$(s^2+3s+2)Y(s)-y'(0\_)-(s+3)y(0\_)=(2s+6)X(s)$$

代入初始条件

$$y(0\_)=2,\ y'(0\_)=1$$

$$Y(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2}X(s)+\frac{y'(0\_)+(s+3)y(0\_)}{s^2+3s+2}=Y_{zs}(s)+Y_{zi}(s)$$

复频域分析

$$Y_{zi}(s)=\frac{y'(0_-)+(s+3)y(0_-)}{s^2+3s+2}=\frac{1+2(s+3)}{s^2+3s+2}$$

$$=\frac{2s+7}{(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

$$X(s)=L[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2}X(s)$$

$$=\frac{2s+6}{s(s+1)(s+2)}=\frac{3}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$$y_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$$

$$y_{zs}(t)=(3-4e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(3+e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$$

一般的，我们通常关注系统仅仅考虑输入信号下的响应，即零状态响应

复频域分析

3、传递函数(零状态响应)

如果仅考虑零状态响应，即认为系统在零初始条件下对输入激励的响应，则

$$Y(s)=\frac{\sum_{j=0}^{m}b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}X(s)$$

定义在零初始条件下，系统输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比为系统的传递函数，记为H(s)，即

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{j=0}^{m}b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}$$

s的有理分式，它只与描述系统的微分方程的结构及系数a_i、b_j有关

复频域分析

由于系统的传递函数较易获得，往往通过对H(s)的反变换求系统的单位冲激响应，

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

也可以由

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

求系统的频率特性函数，给系统分析带来方便。

除此之外，传递函数在系统理论中占有十分重要的地位，它的零、极点的分布与系统的稳定性、瞬态响应都有明确的对应关系，在反馈控制系统的分析和综合中更是重要的工具。

复频域分析

[例2] 求下述线性时不变系统的单位冲激响应

$$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$$

解：设系统的初始条件为零，对微分方程取拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=sX(s)+3X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+3}{s^2+2s+2}=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{2}{(s+1)^2+1}$$

利用频移性质

$$L^{-1}[\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}]=e^{-t}\cos t u(t)$$

$$L^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2+1^2}]=e^{-t}\sin t u(t)$$

系统的单位冲激响应

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=e^{-t}[\cos t+2\sin t]u(t)$$

复频域分析

[例3] 已知线性时不变系统对 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 的零状态响应为

$$y(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

试求该系统的单位冲激响应并写出描述该系统的微分方程.

解:

$$x(t)=e^{-t}u(t) \longrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=(3e^{-t}-4e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

$$Y(s)=\frac{3}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{1}{s+3}=\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\cdot(s+1)=\frac{4}{s+2}-\frac{2}{s+3}$$

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=(4e^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$$

复频域分析

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2(s+4)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

求反变换，并注意到系统的初始条件为零，得

$$s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=2sX(s)+8X(s)$$

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2x'(t)+8x(t)$$

谢谢大家