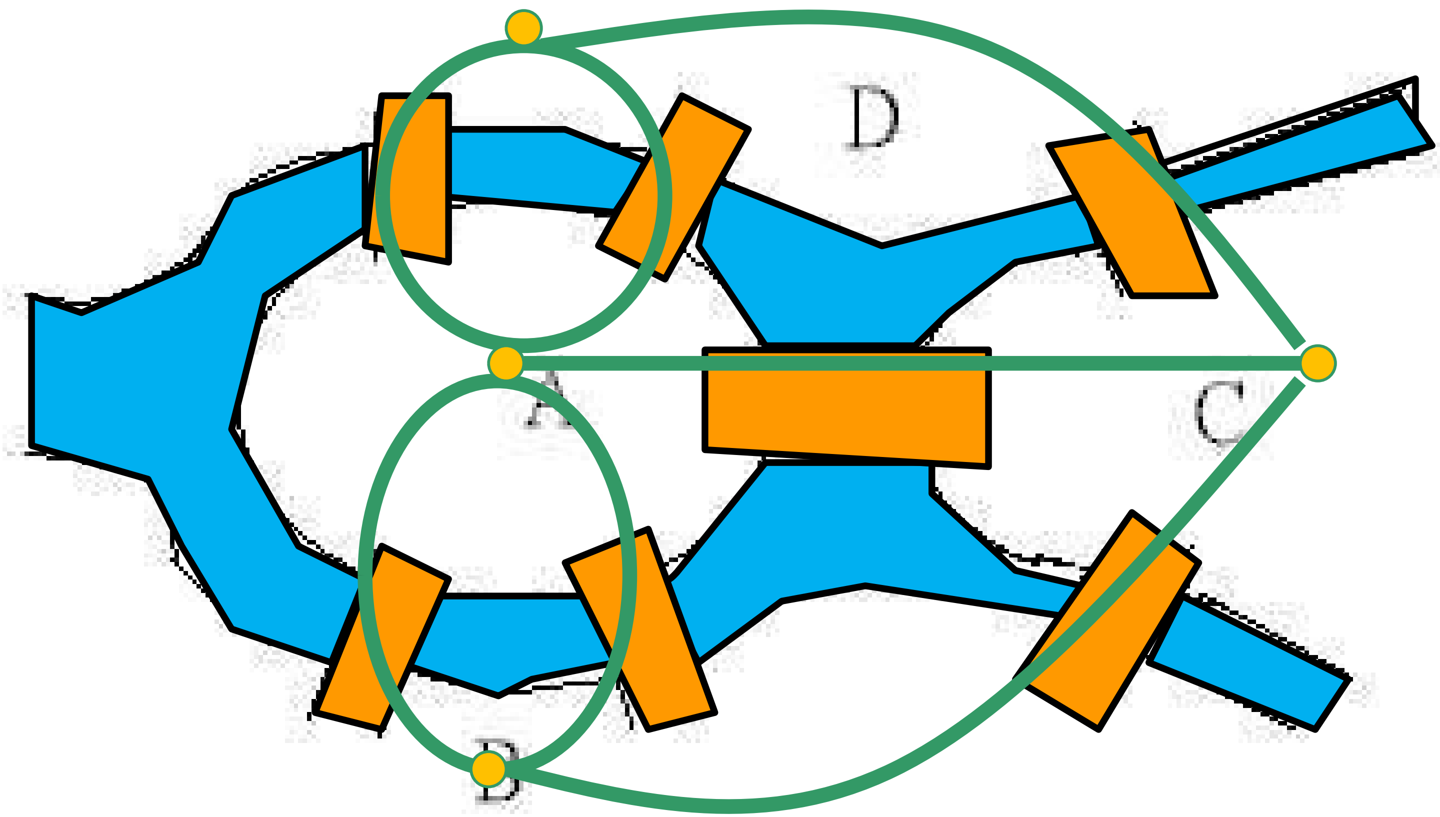
第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
  - Dijkstra算法
  - 逐次逼近法
  - Floyd算法
- 网络最大流问题
- 网络最小费用流问题

图论起源

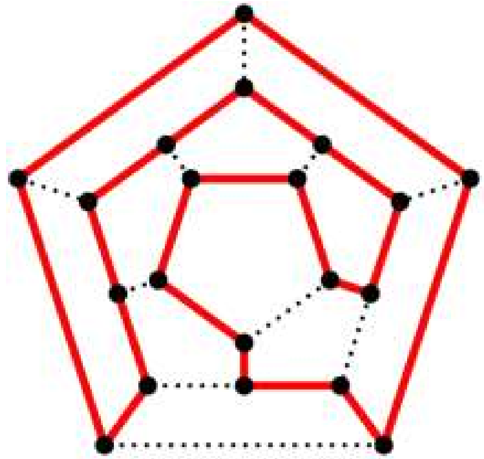
Euler 1736年：柯尼斯堡七桥问题



图论发展

1859年，Hamilton “环球旅行 ”

TSP (Travel Salesman Problem)旅行商问题



1936年，O Konig 有限图与无限图理论

1976， 地图着色问题 “四色猜想”

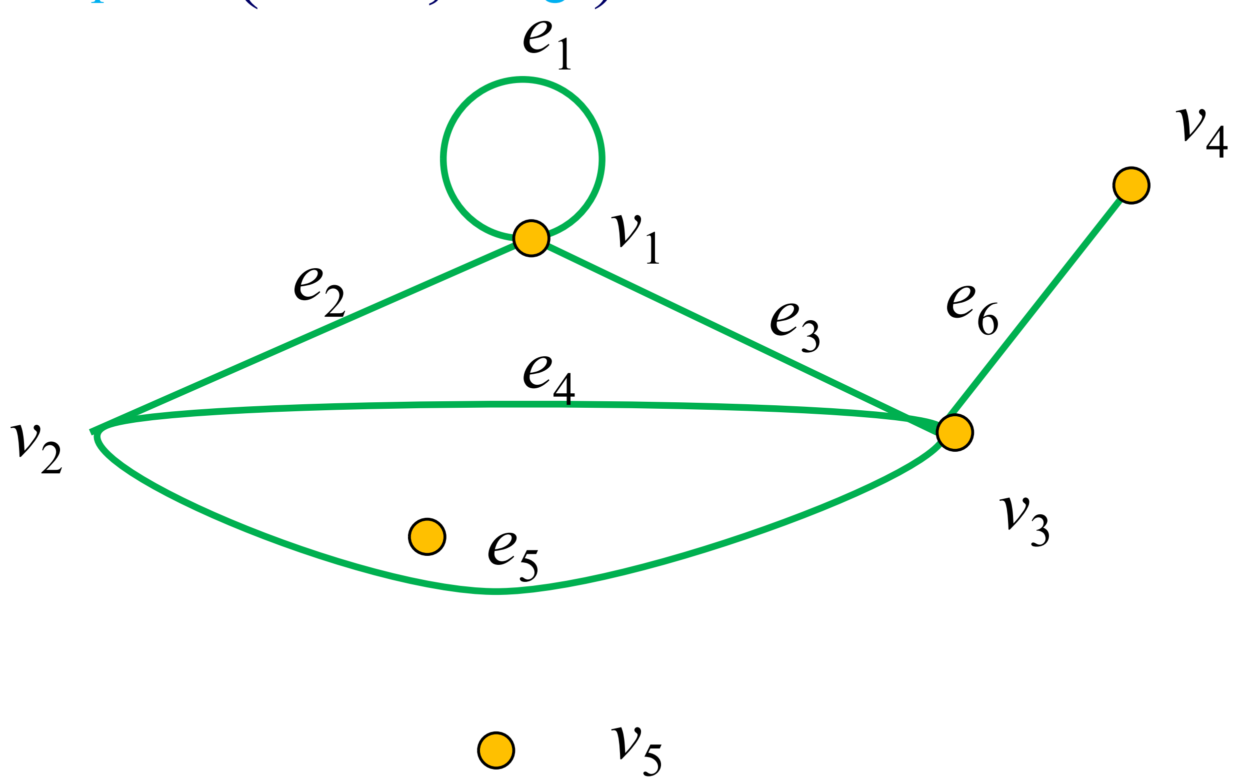
现代分支众多，如代数图论、拓扑图论等

本课程主要讲 “图优化理论”

图的定义

- ■ 图 = 端点 + 边　　Graph = (Vertex, Edge)
  - ➢ 端点 $V=\{v_i\}$
  - ➢ 边 $E=\{e_i\}$

    $e_i = (v_{i1}, v_{i2})$

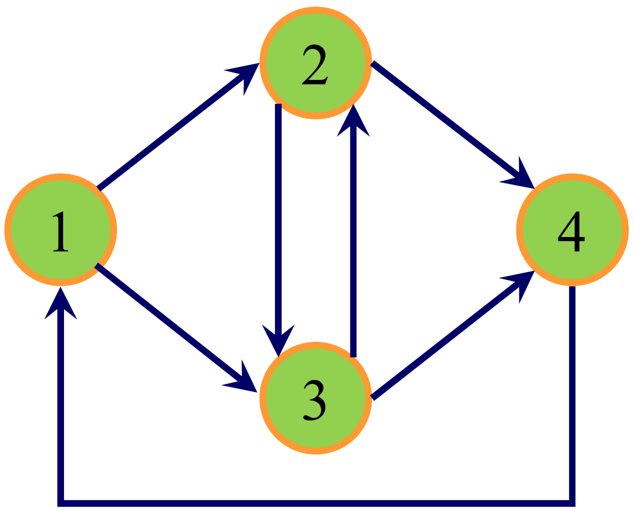


- ■ 无向图
- ■ 有向图，有向图的边也称为弧

邻接矩阵表示

- 邻接矩阵：

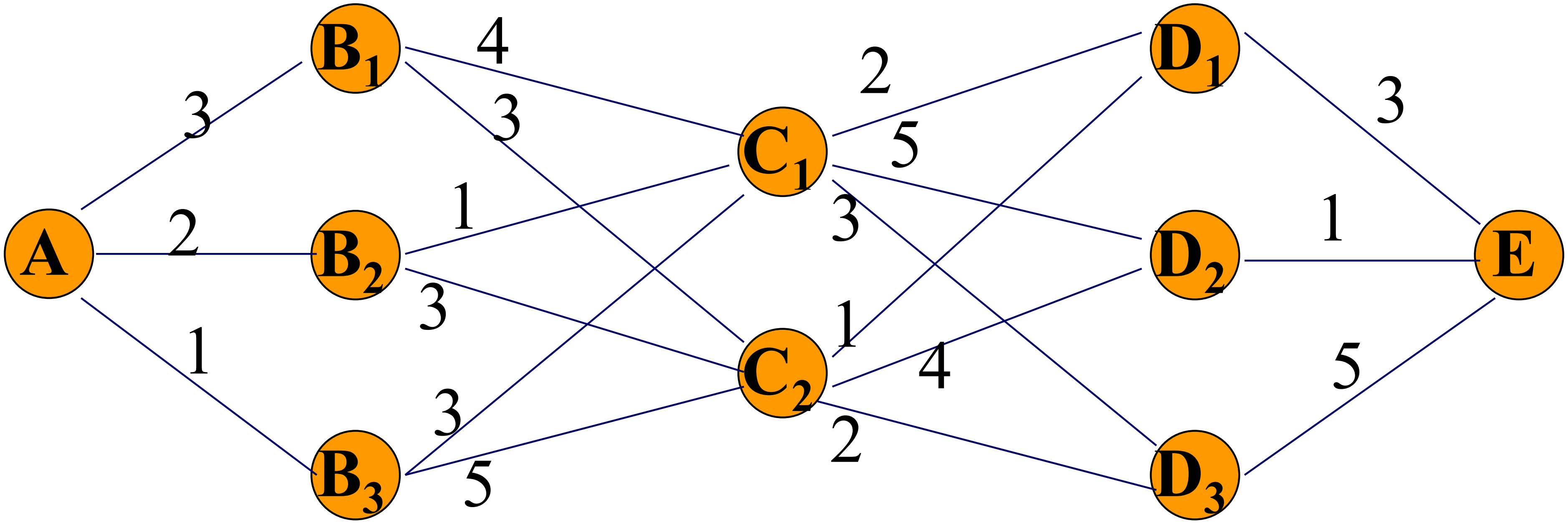
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

网络（赋权图）

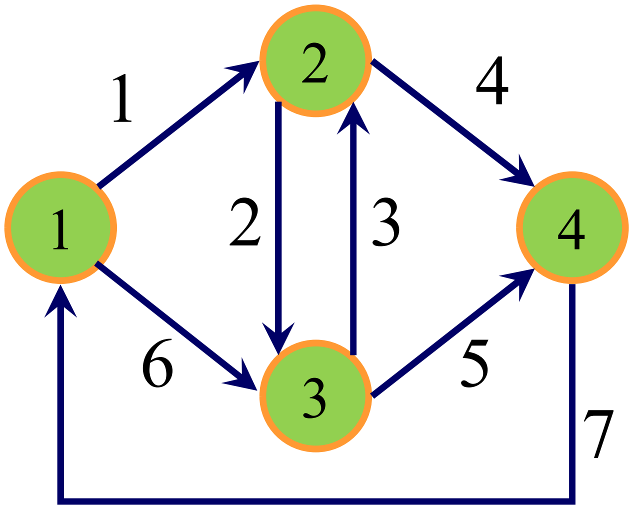
- 网络：点或者边带权的图



权矩阵

- 权矩阵：

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}\text{或}1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0\text{或}\infty & \text{其他} \end{cases}$$

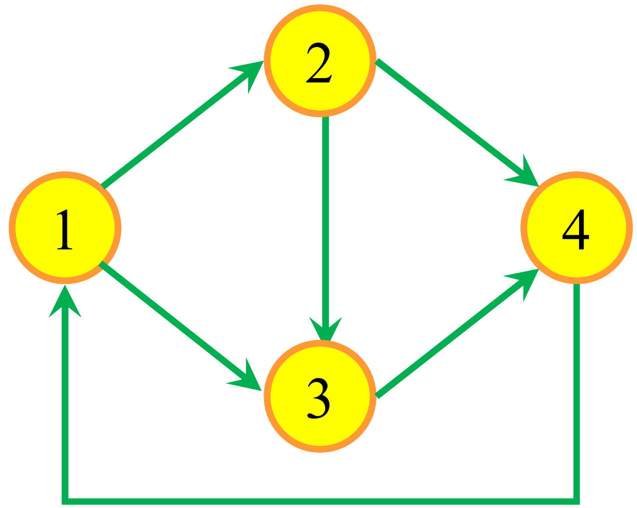


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 4 \\ \infty & 3 & 0 & 5 \\ 7 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

链与道路

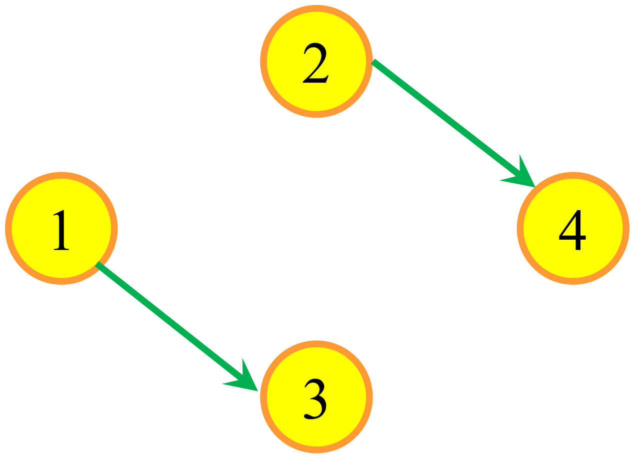
点、边交替序列，有$e_{it} = (v_{it-1}, v_{it})$ t=1,2,…,k

- 链：无方向要求 {(1,2) (2,3) (3,1) (1,2) (2,4)}
  - 圈：$v_{i0}= v_{ik}$ {(1,2) (2,3) (3,1)}
- 道路：方向一致{(1,2) (2,3) (3,4)}
  - 回路：$v_{i0}= v_{ik}$ {(1,2) (2,4) (4,1)}



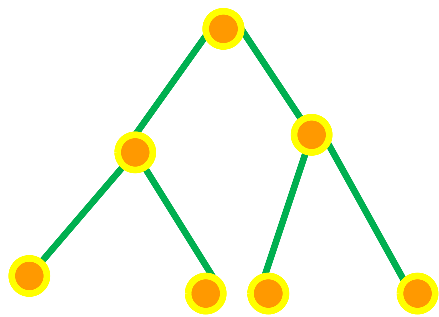
连通图

- 连通图：任意两点之间至少有1条链（道路）相连
  - 分图：不连通图中的连通子图



树的定义

- 树： 不含圈的连通无向图 T = (V, E)
  - 叶：次为1
  - 分枝点：次大于1
- 次 deg(v)、d(v)： 以v为端点的边数



树的性质

- 树T = (V, E)，|V|=n, |E|=m，则下列说法等价：

（1）T是一个树

（2）T无圈，且$m=n-1$

（3）T连通，且$m=n-1$

（4）T无圈，但每加一个新边，可得唯一的圈

（5）T连通，但每舍去一条边即不连通

（6）T中任意两点，有唯一的链相连

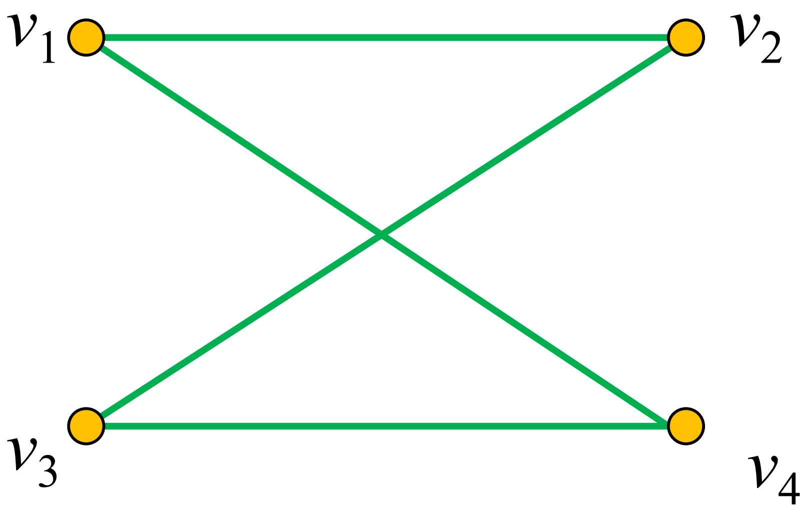
$$\begin{array}{ccccc} (1) & \Rightarrow & (2) & \Rightarrow & (3) \\ \Uparrow & & & & \Downarrow \\ (6) & \Leftarrow & (5) & \Leftarrow & (4) \end{array}$$

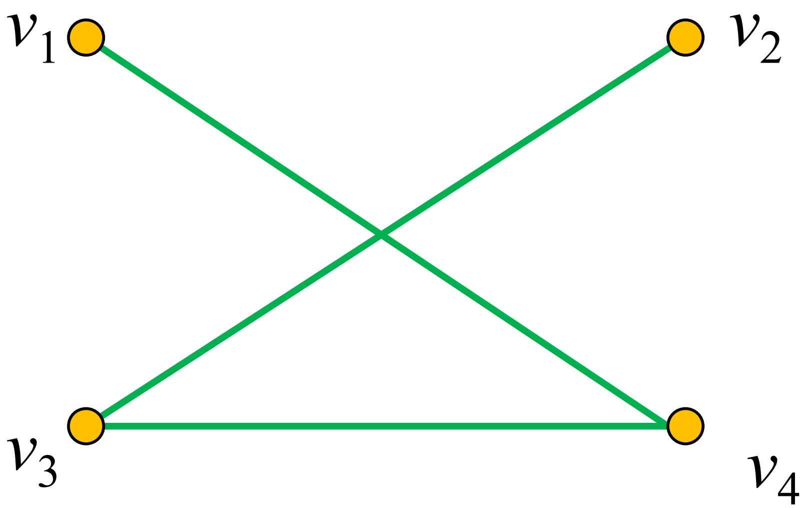
生成子图

- 子图G′ ＝(V′, E′)

  V′ ⊆ V　　E′ ⊆ E　　V′ 的边仅与E′ 的点相关联

- 生成子图G′：V′＝V

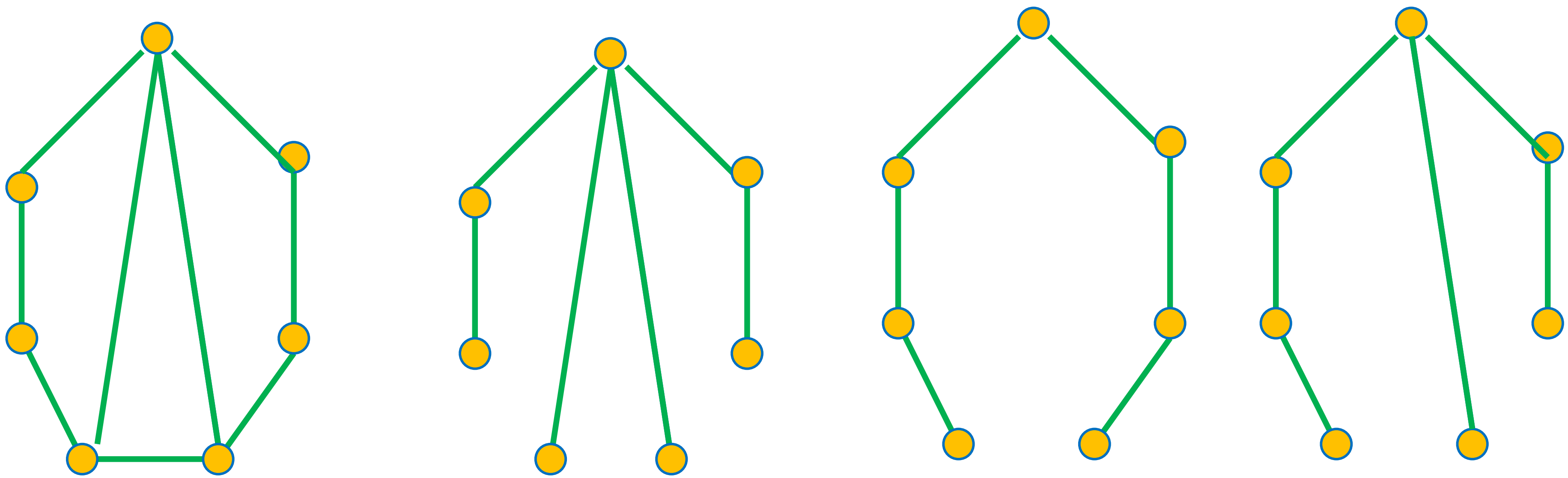




生成树（支撑树）

■生成树：连通图G的生成子图是1棵树（ V ′=V）

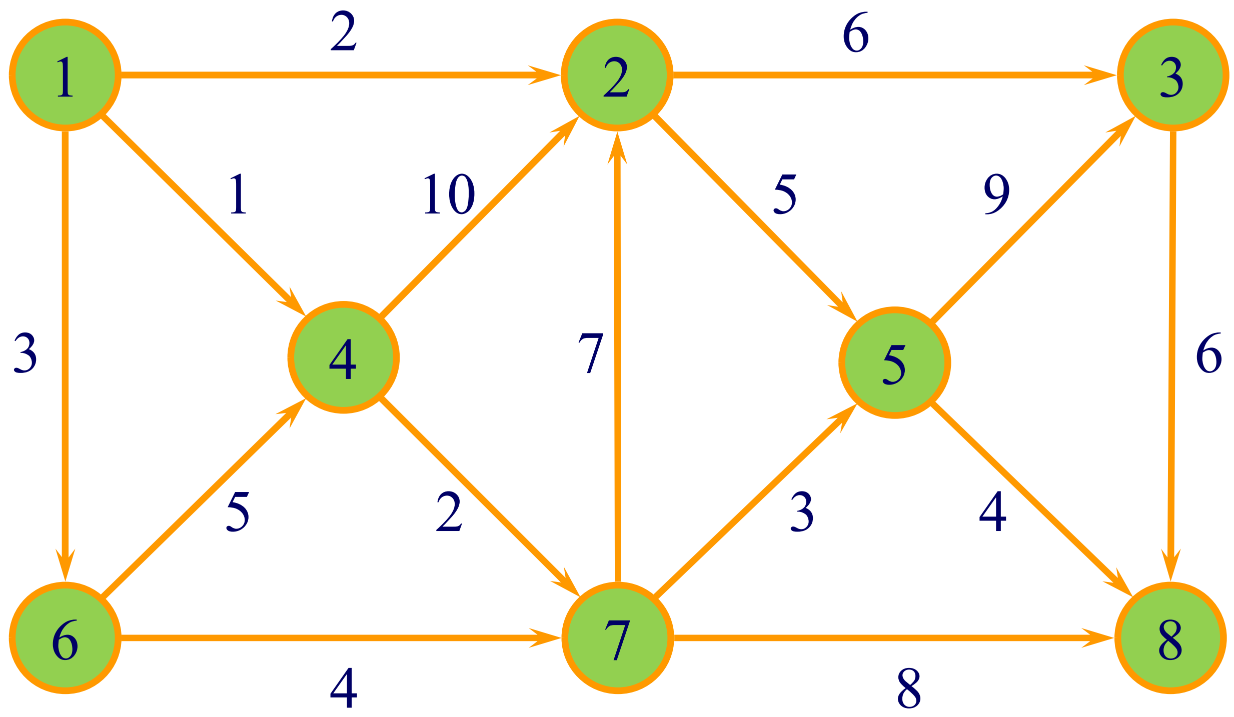
- 树枝：生成树中的边
- 弦：不在生成树中的边



第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
  - Dijkstra算法
  - 逐次逼近法
  - Floyd算法
- 网络最大流问题
- 网络最小费用流问题

最短路问题



求从1到8的最短路径

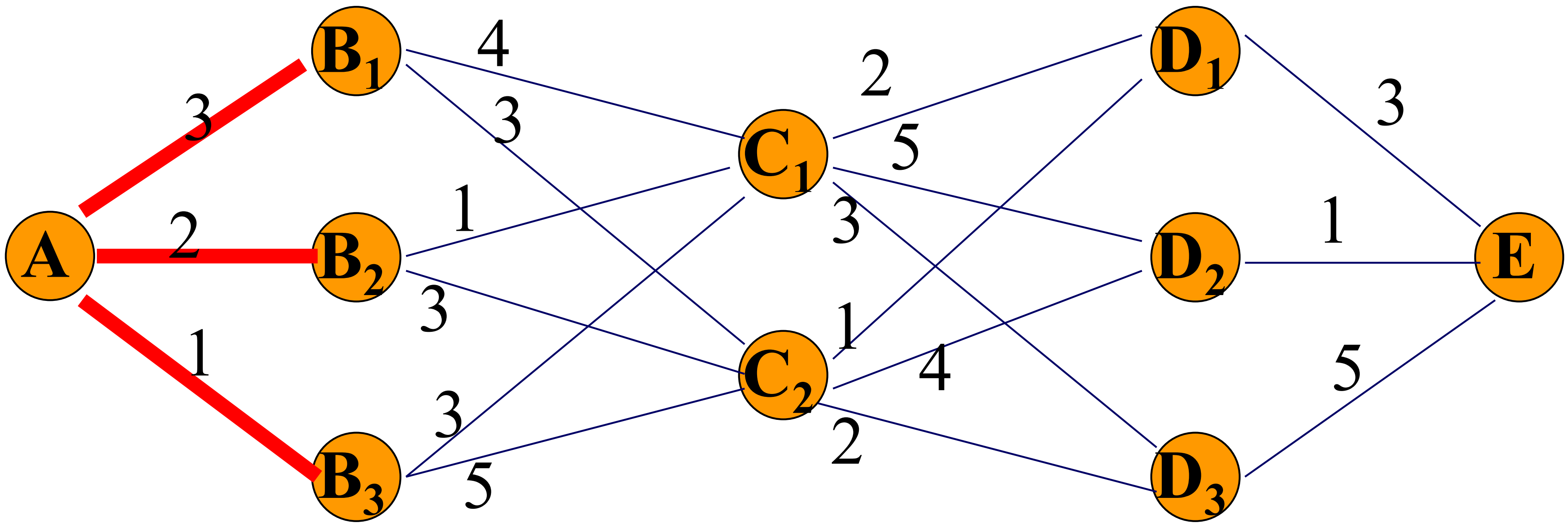
数学模型

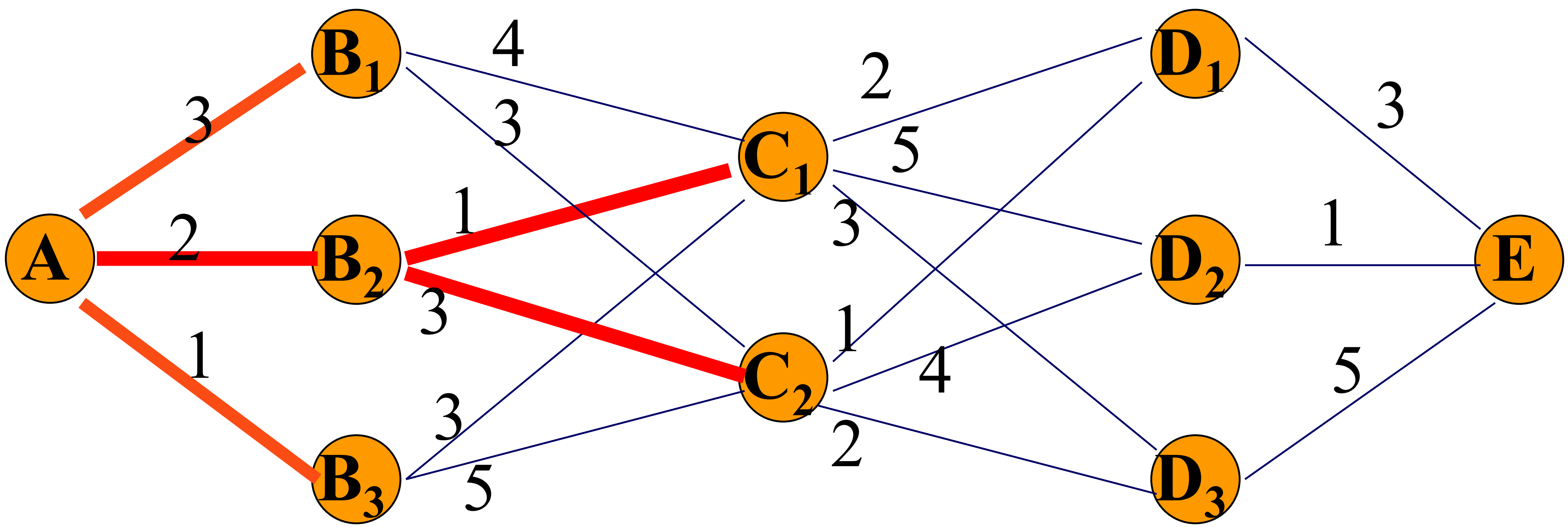
$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad c_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & (i,j) \in E \\ +\infty & (i,j) \notin E \end{cases}$$

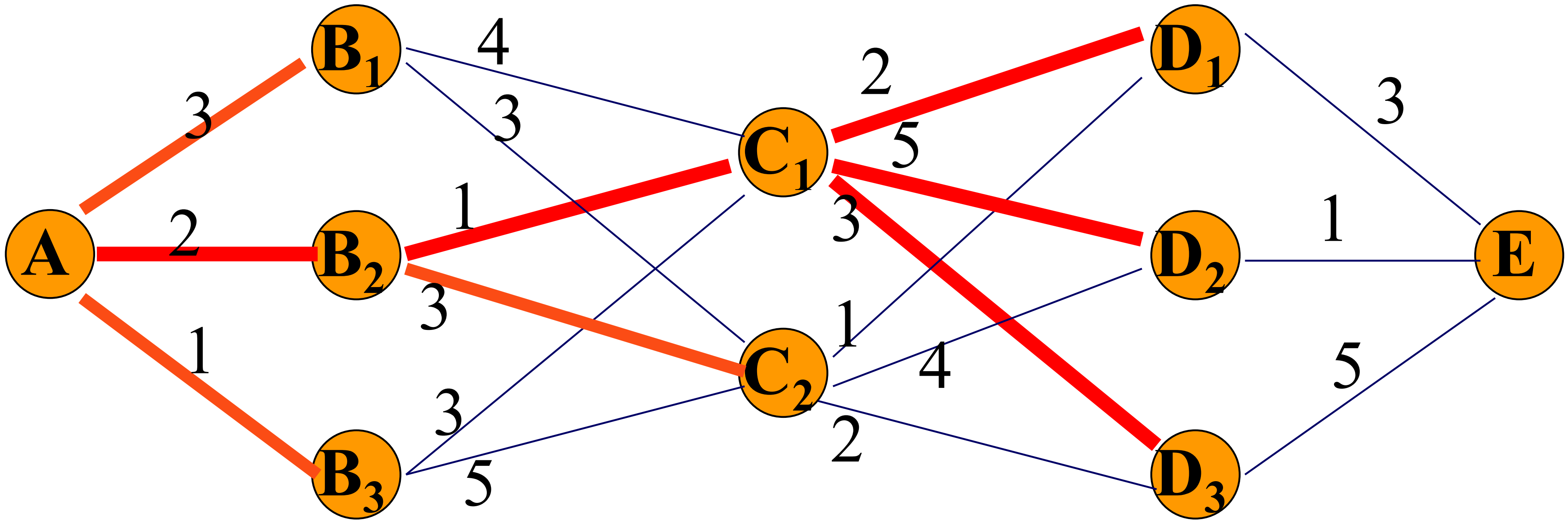
s.t. $$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} x_{ki} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} \qquad i = 2, \cdots n$$ 节点平衡条件

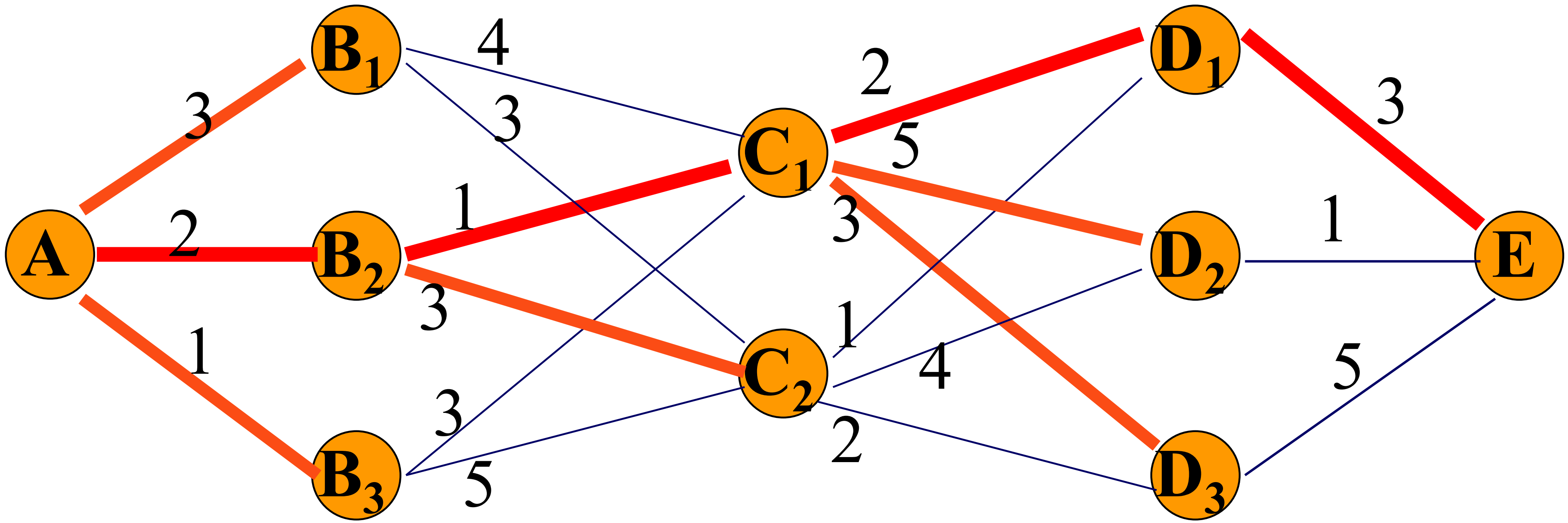
$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = 1$$ 端点条件

$$x_{ij} = 1 \text{或} 0$$


A
B1
B2
B3
C1
C2
D1
D2
D3
E
3
2
1
4
3
1
3
3
5
2
5
3
1
4
2
3
1
5


A
B1
B2
B3
C1
C2
D1
D2
D3
E
3
2
1
4
3
1
3
3
5
2
5
3
1
4
2
3
1
5


A
B1
B2
B3
C1
C2
D1
D2
D3
E
3
2
1
4
3
1
3
3
5
2
5
3
1
4
2
3
1
5


A
B1
B2
B3
C1
C2
D1
D2
D3
E
3
2
1
4
3
1
3
3
5
2
5
3
1
4
2
3
1
5

动态规划的启示

1。搜索结果是一颗以起点为树根的生成树。

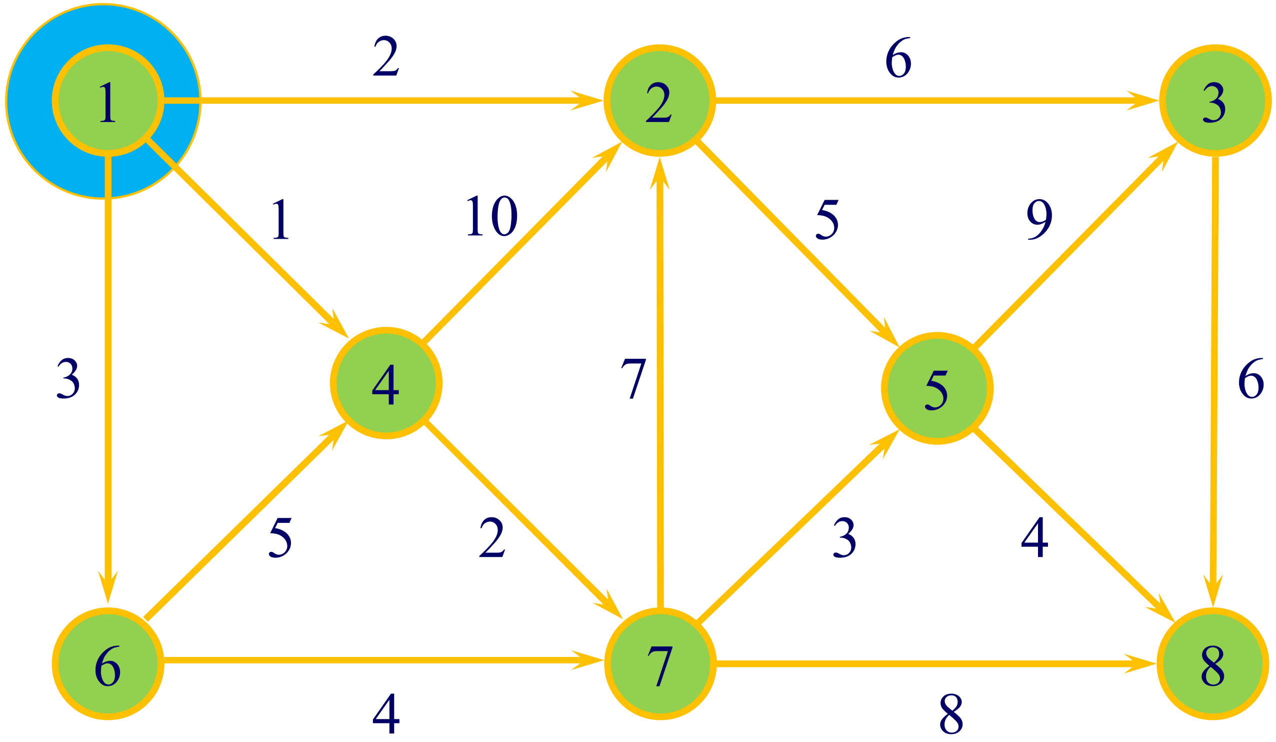
问题：可以不是生成树吗？

2。最短路径的点必从已找到最短路径的节点展开（最优性原理），这种找到了最短路径的节点无需再寻找更优路径，可作永久标号（*Permanent Label*），称为P点，P值为起点到该P点的最短路径。

3。当前没有找到最短路径的节点需继续搜索，称为T点（tentative label）， T值为当前已搜索路径的最短长度（定界），用于过滤未来试探中可能出现的更短路径。

问题：T点如何晋级为P点？

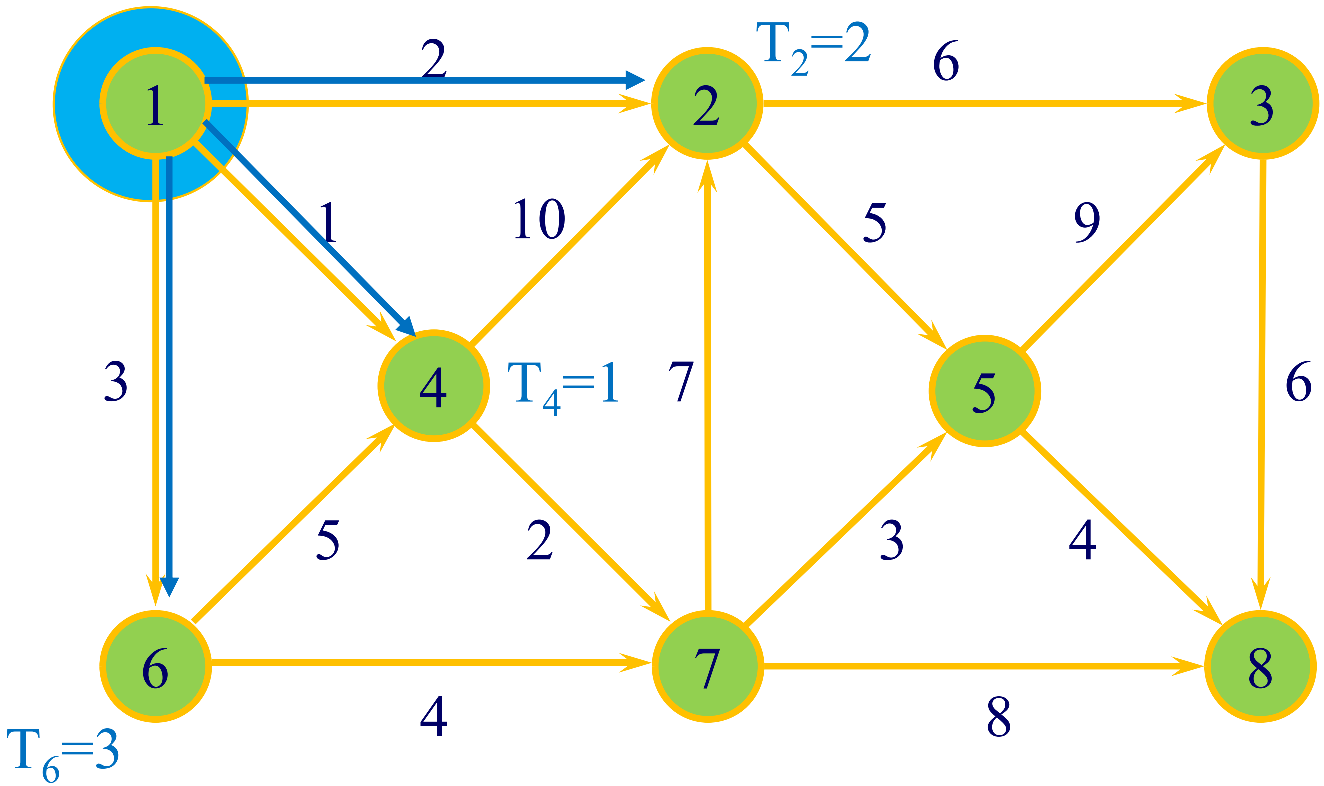
初始P点



P点集合：X={1}，$P_1=0$；

T点集合：Y={2,3,…,8}，$T_i(0)=\infty$

Step1：T值更新



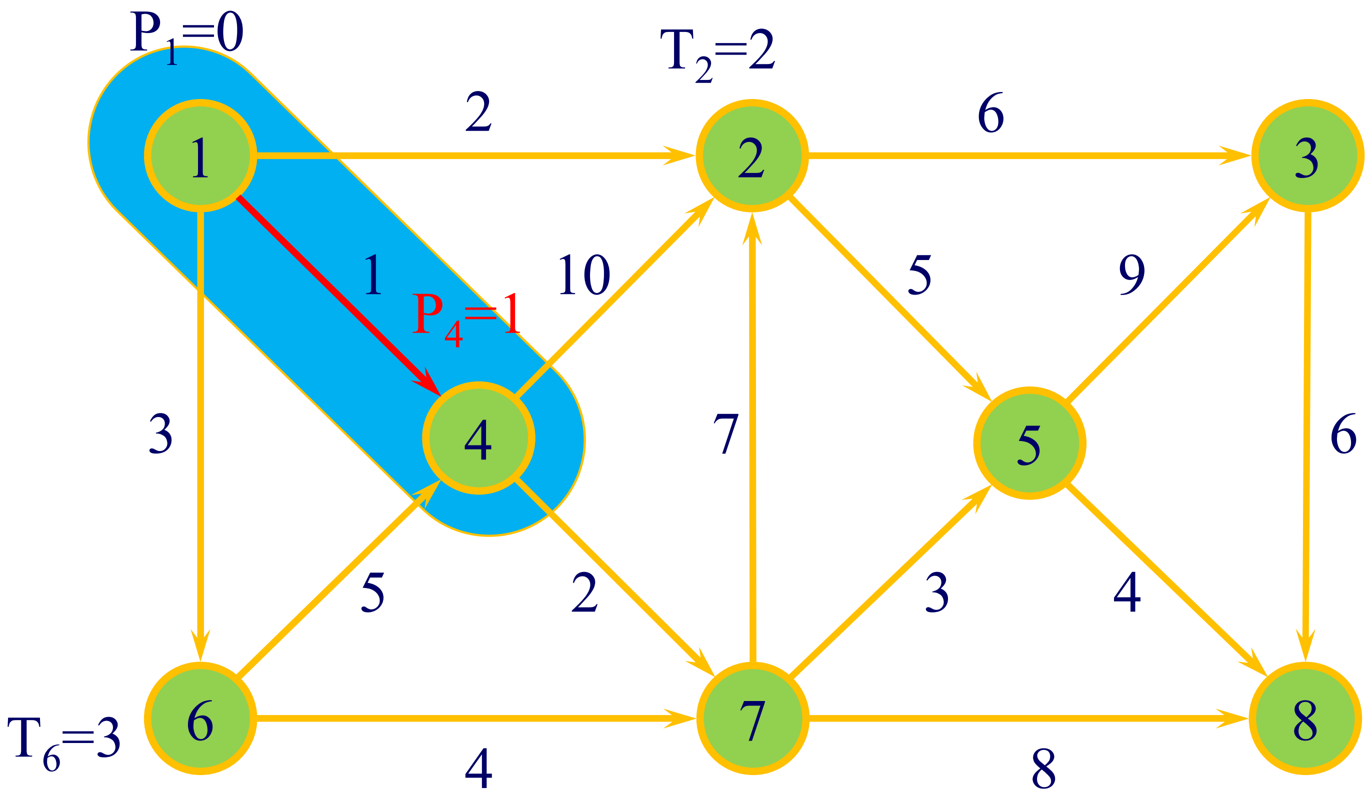
$$T_2=\min\{P_1+l_{12}, T_2\}=2$$

$$T_4=\min\{P_1+l_{14}, T_2\}=1$$

$$T_6=\min\{P_1+l_{16}, T_2\}=3$$

问题：谁可作为新的P点？

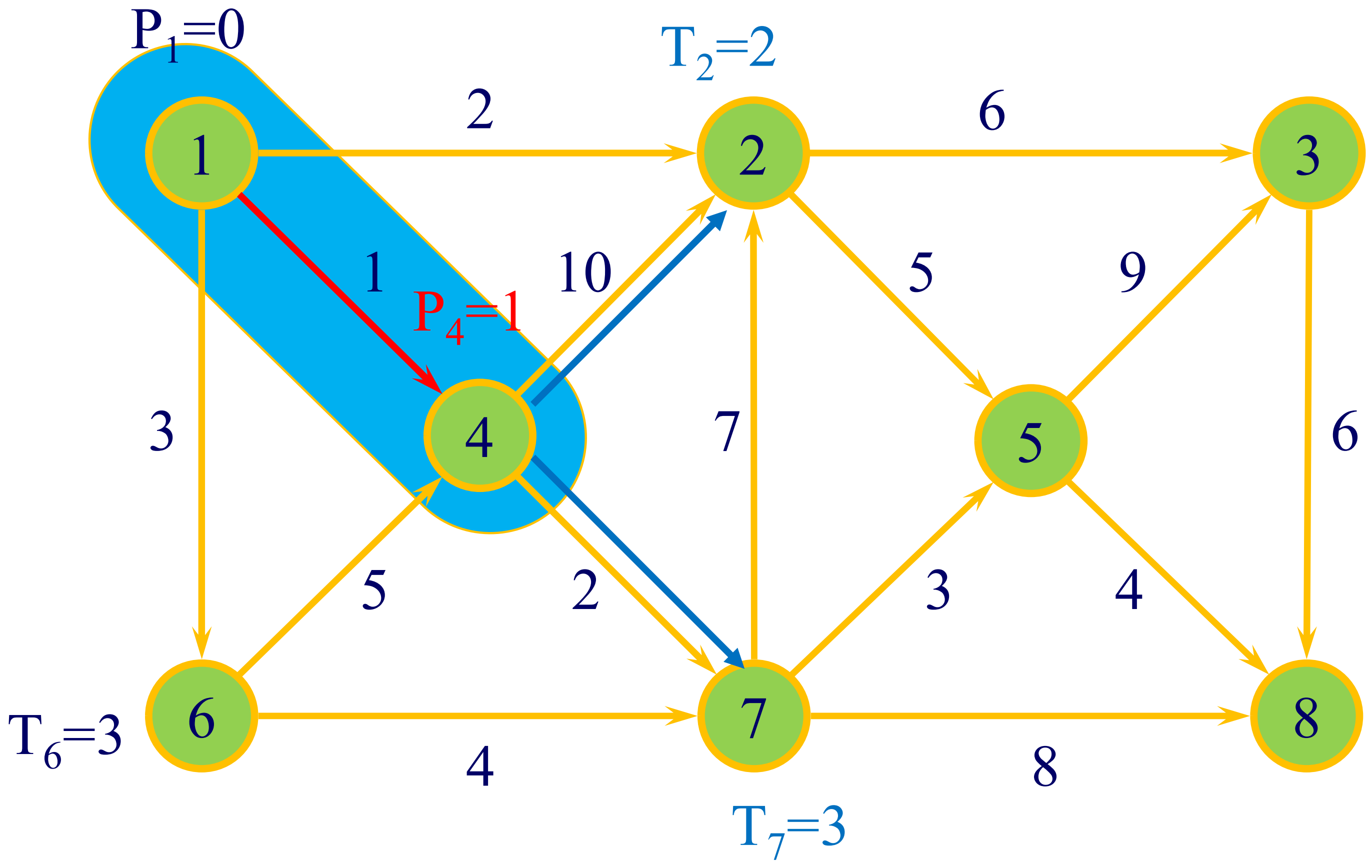
Step1：P点搜索



$Y=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

$\min\ \{T_i\}_{i\in Y} = \min\ \{2,\infty,1,\ \infty,\ 3,\infty,\infty\}=1$； $X=\{1,4\}$, $P_4=1$

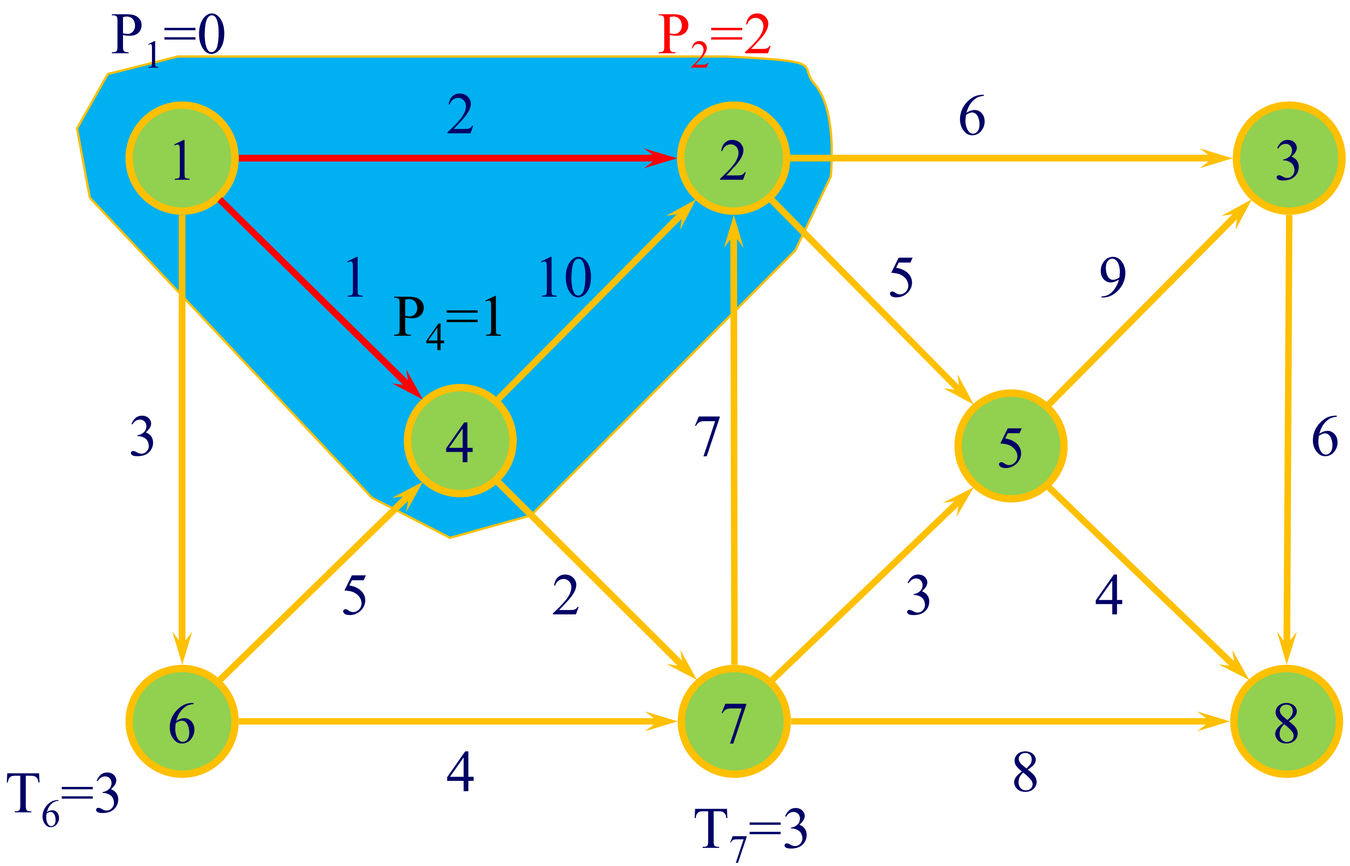
Step2：T值更新



T_2= min $\{P_4+l_{42}, T_2\}$=min $\{1+10, 2\}$=2

T_7=min $\{ P_4+l_{47}, T_7\}$=min $\{1+2, \infty\}$=3

Step2：P点搜索

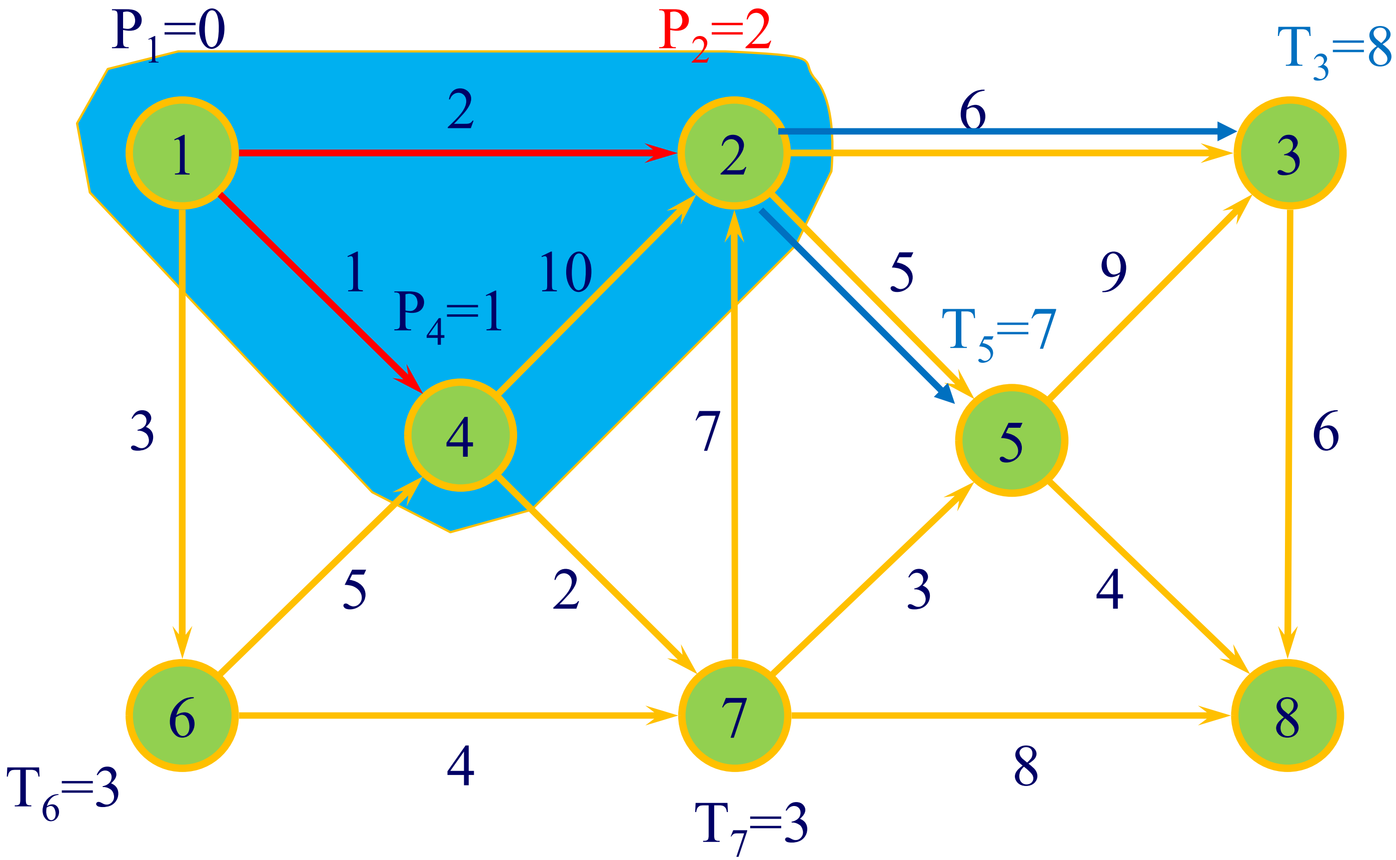


$Y=\{2,3,5,6,7,8\}$

$\min\ \{T_i\}_{i\in Y} = \min\ \{2,\infty,\infty, 3,3, \infty\}=2$

$X=\{1,2,4,\}$, $P_2=2$

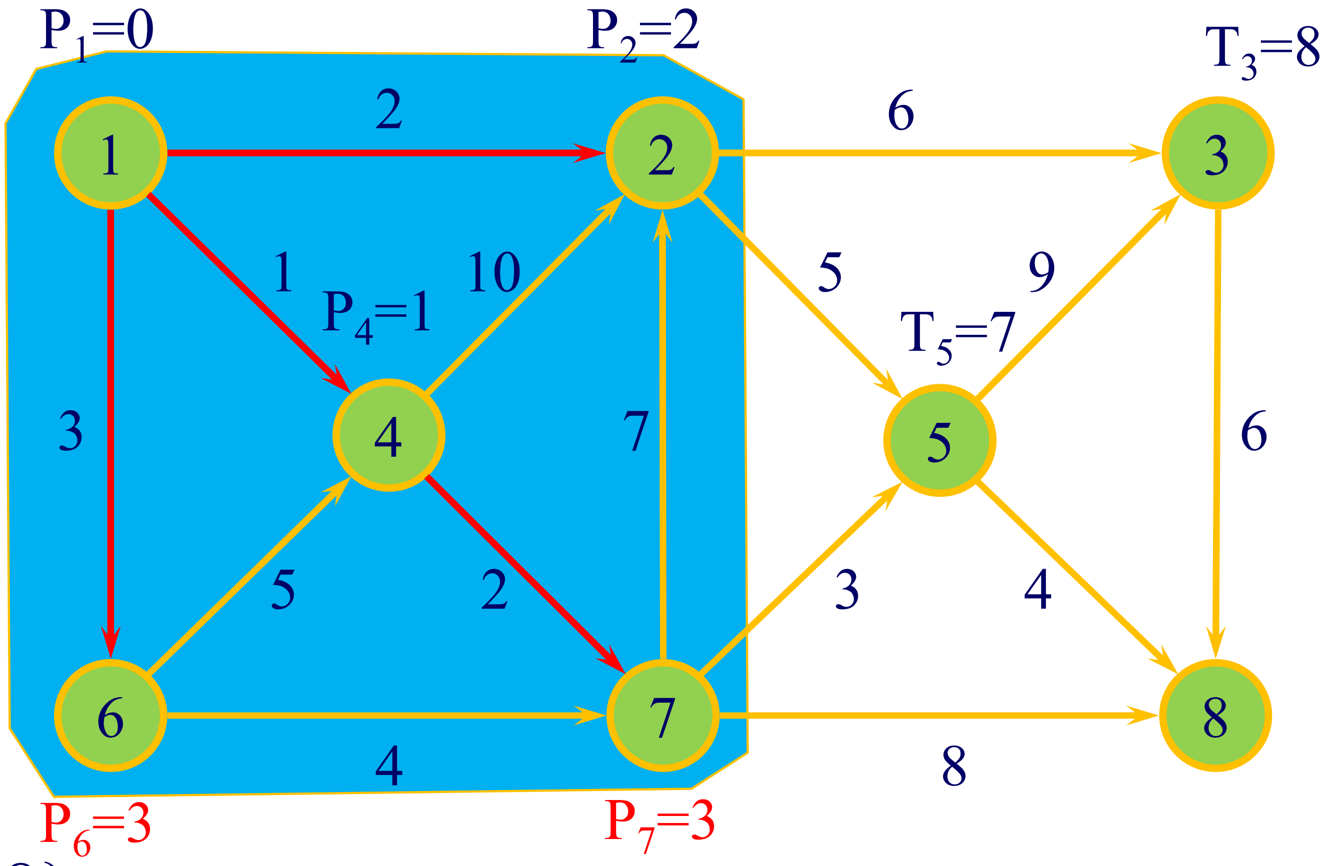
Step3：T值更新



$$T_3 = \min\{P_2 + l_{23}, T_3\} = \min\{2+6, \infty\} = 8$$

$$T_5 = \min\{P_2 + l_{25}, T_5\} = \min\{2+5, \infty\} = 7$$

Step3：P点搜索

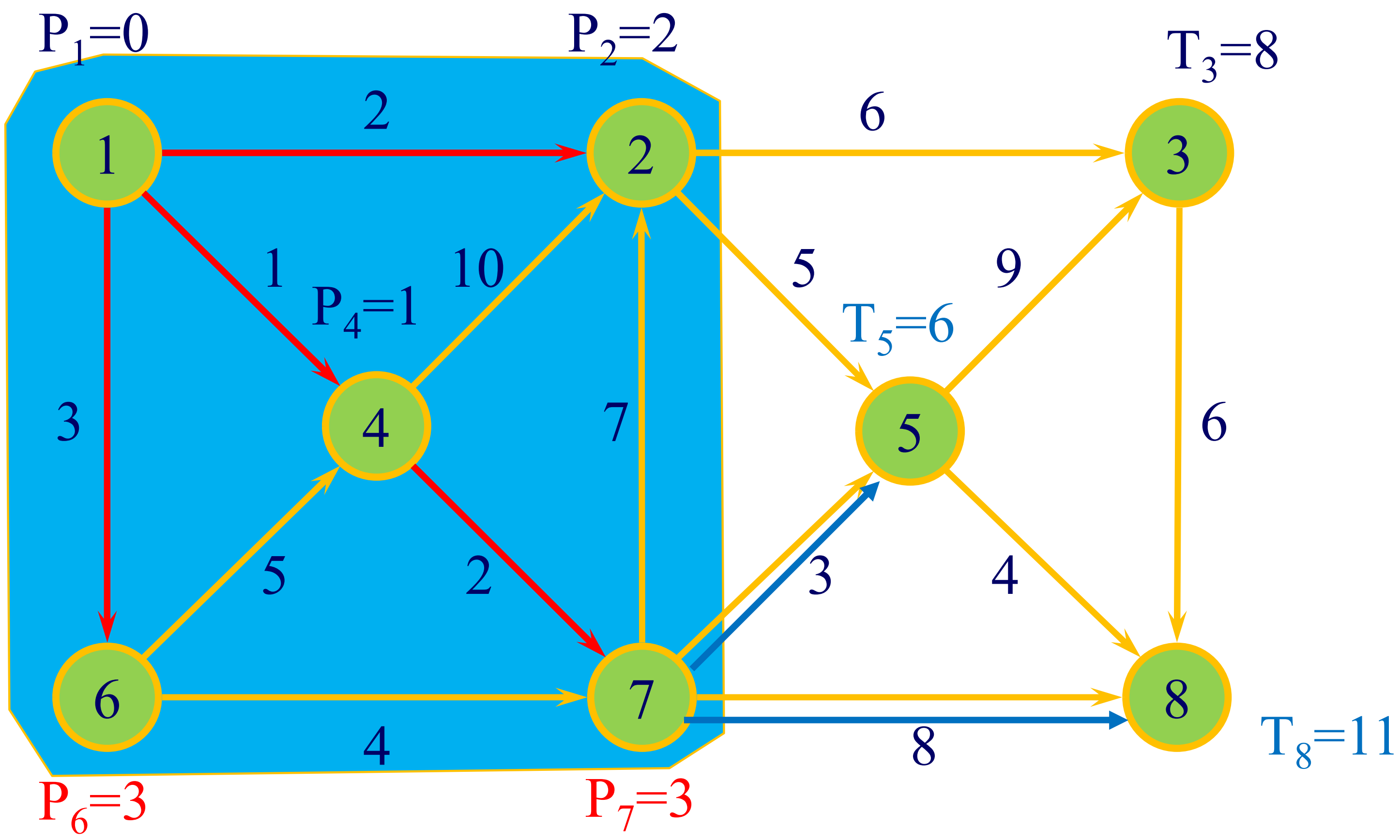


$Y=\{3,5,6,7,8\}$

$\min\ \{T_i\}_{i\in Y} = \min\ \{8,7,\ 3,3,\ \infty\}=3$

$X=\{1,2,4,6,7\}$, $P_6=3$, $P_7=3$

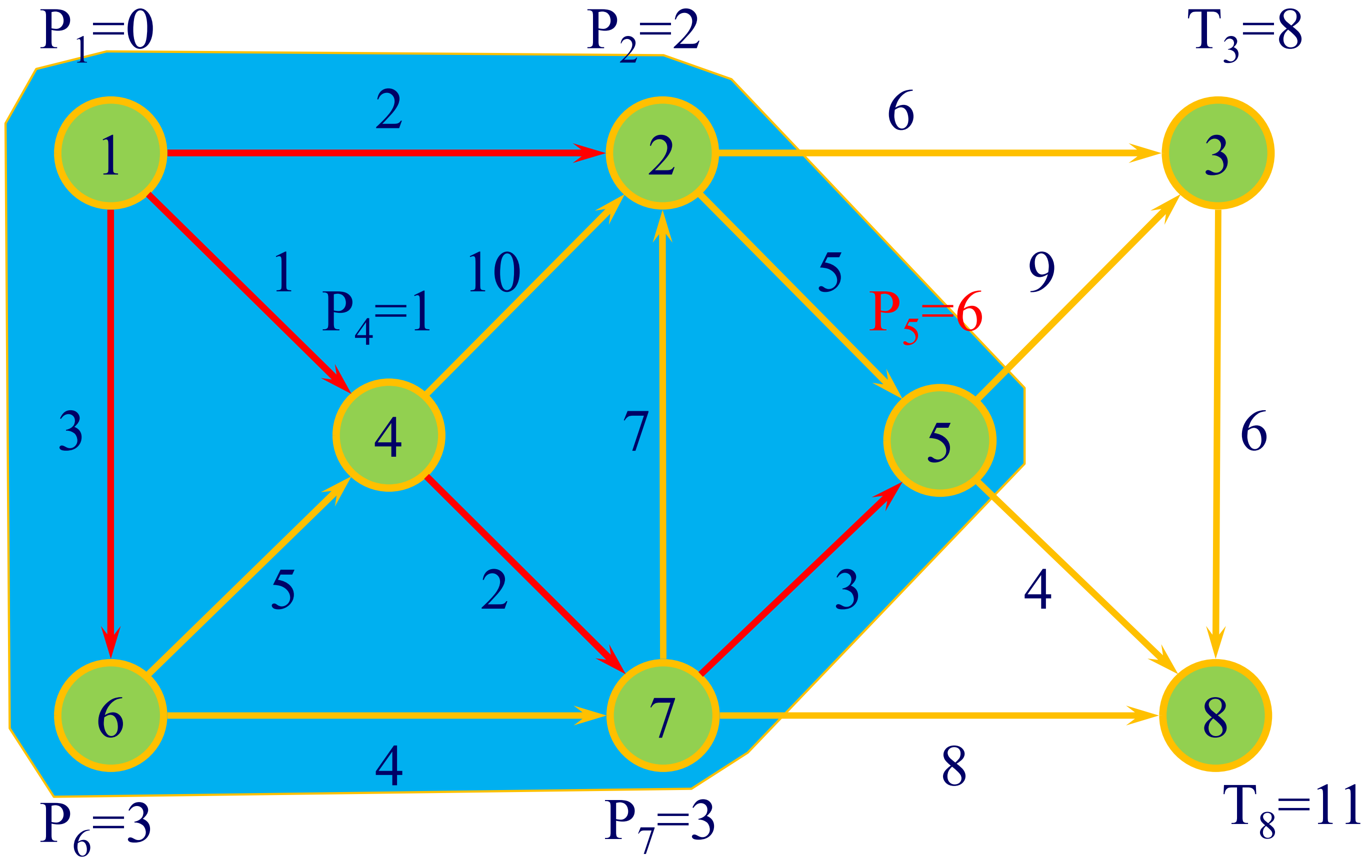
Step4： T值更新



T_5= min $\{P_7+l_{73}, T_5\}$=min $\{3+3, 7\}$=6

T_8= min $\{P_7+l_{73}, T_3\}$=min $\{3+8, \infty\}$=11

Step4：P点搜索

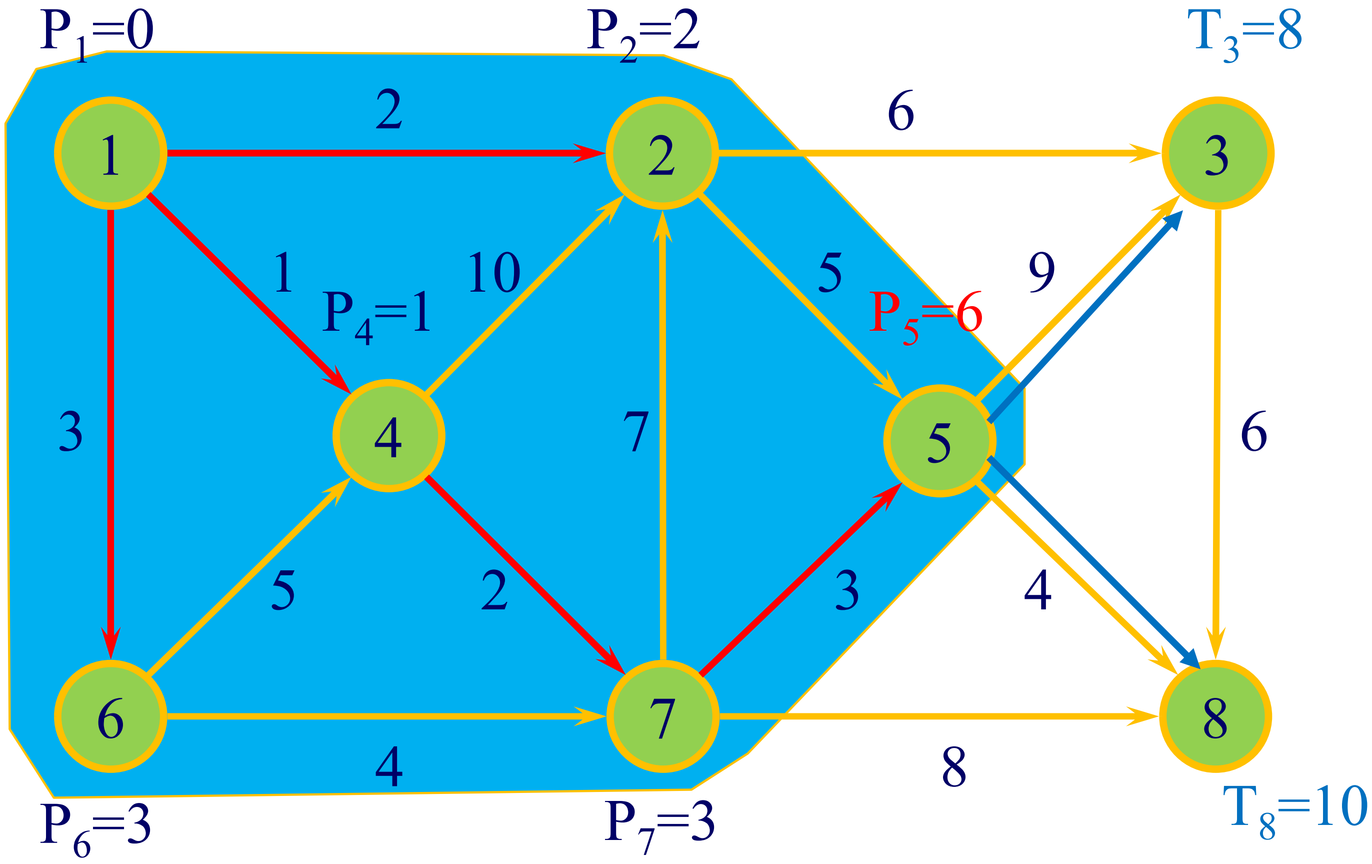


$Y=\{3,5,8\}$

$\min\{T_i\}_{i\in Y}=\min\{8,6,10\}=6$

$X=\{1,2,4,5,6,7\}$, $P_5=6$

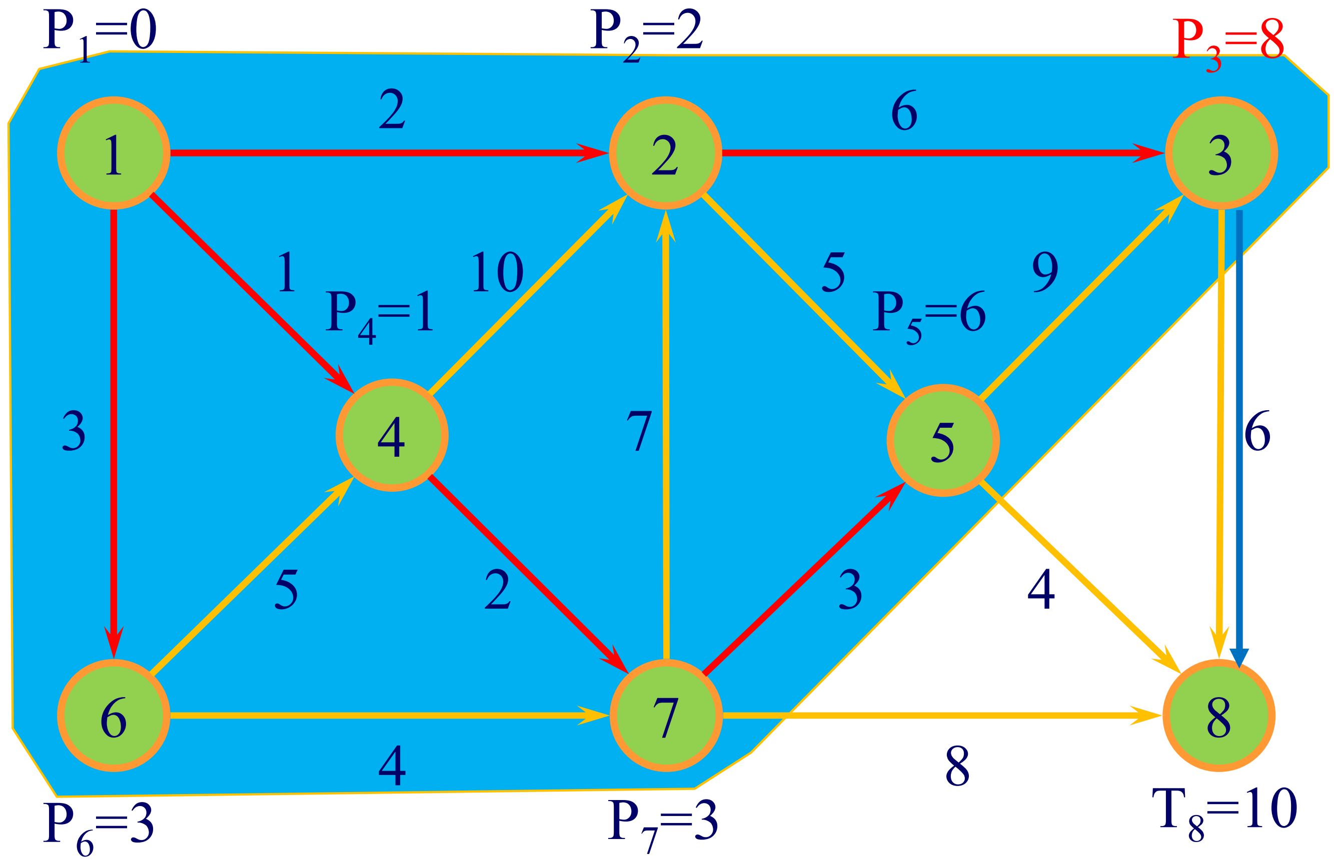
Step5：T值更新



T_3= min $\{P_5+l_{53}, T_5\}$=min $\{6+3, 8\}$=8

T_8= min $\{P_5+l_{53}, T_8\}$=min $\{6+4, 11\}$=10

Step5：P点搜索

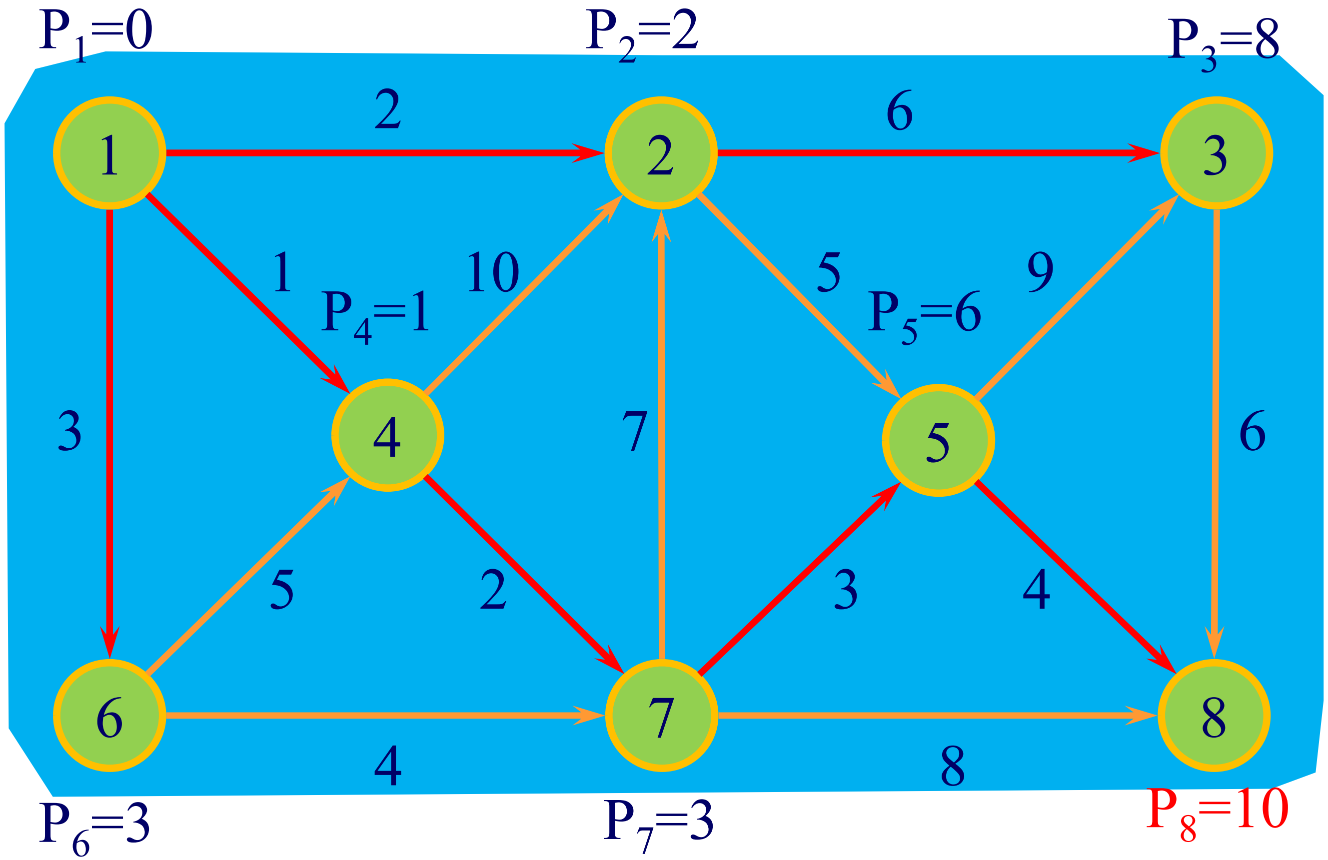


$Y=\{3, 8\}$

$\min \{T_i\}_{i\in Y} = \min \{8,10\}=8$

$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $P_3=8$

Step6：T值更新+P点搜索



$$T_8 = \min\{P_3 + l_{38}, T_8\} = \min\{8+6, 11\} = 10$$

Dijkstra算法

■P点： 已确定最短路径的点，长度为$P(v_i)$。

■T点： 未确定$P(v_i)$的点，但已知当前步起点v_1到v_i距离的最小值，记为$T^{(k)}(v_i)$ 。

1、设定初值

$T^{(0)}(v_1)=0$ $T^{(0)}(v_j)=\infty$ $j=2,3,\ldots,n$

2、确定P点

$$P(v_i)=\min_j\{T^{(k)}(v_j)\}$$

3、更新T值

$$T^{(k+1)}(v_j)=\min_i\{T^{(k)}(v_j),P(v_i)+l_{ij}\}$$

$$l_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & (i,j)\in E \\ +\infty & (i,j)\notin E \end{cases}$$

Dijkstra算法

问题1：Dijkstra算法最多需要迭代几步j结束?

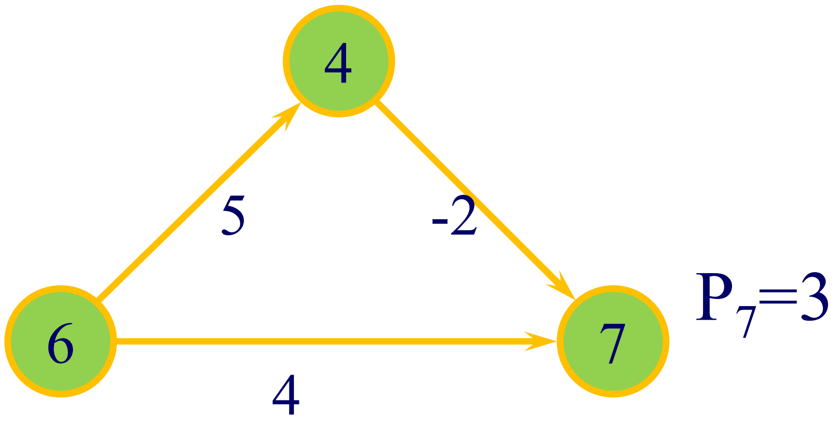
问题2：Dijkstra算法是否可解决所有类型网络的最短路径问题?

Dijkstra算法的限制条件

性质：若$T^{(k)}(v_i)$ 为$T^{(k)}(v_j)$最小值， 有$T^{(k)}(v_i)=P(v_i)$

$$P(v_i)=\min_j\{T^{(k)}(v_j)\}$$

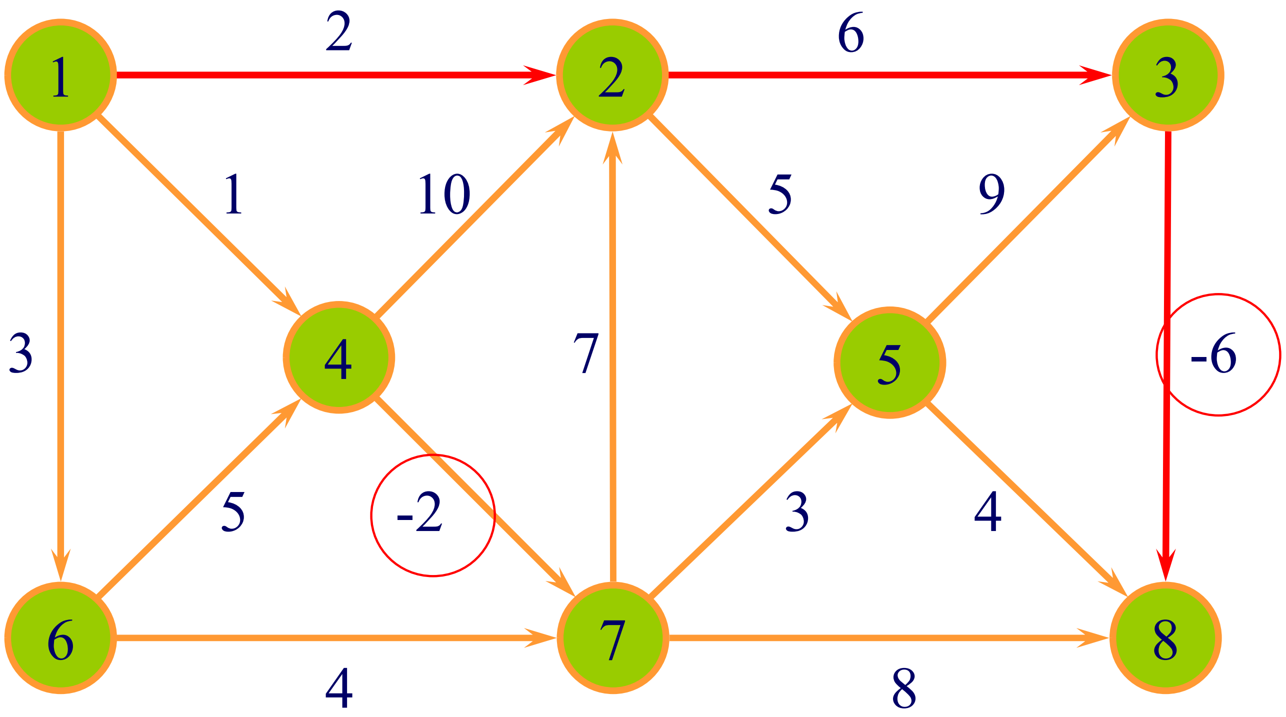
性质成立的条件是：所有边的权值非负



第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
  - Dijkstra算法
  - 逐次逼近法
  - Floyd算法
- 网络最大流问题
- 网络最小费用流问题

含负权值的最短路径



求从1到8的最短路径

迭代过程的物理解释

$T^{(0)}(v_1)=0$ $T^{(0)}(v_j)=\infty$ $j=2,3,\ldots,n$

$$T^{(k+1)}(v_j)=\min_i\{T^{(k)}(v_i)+l_{ij}\}$$

$$l_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & (i,j)\in E \\ +\infty & (i,j)\notin E \end{cases}$$

$T^{(1)}(v_j)$：起点直接到v_j的路径长度；

$T^{(1)}(v_i)+l_{ij}$：以v_i为中转点的起点到v_j路径的长度；

$T^{(2)}(v_j)$：从起点最多经过1个中转点到v_j路径的最短长度；

…

$T^{(k)}(v_j)$：从起点最多经过k-1个中间点到达v_j路径的最短长度。

逐次逼近法

1、设定初值

$$T^{(0)}(v_1)=0 \qquad T^{(0)}(v_j)=\infty \qquad j=2,3,\ldots,n$$

2、更新T值

$$T^{(k+1)}(v_j)=\min_i\{T^{(k)}(v_i)+l_{ij}\} \qquad l_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & (i,j)\in E \\ +\infty & (i,j)\notin E \end{cases}$$

3、收敛条件

$$T^{(k+1)}(v_j)=T^{(k)}(v_j) \qquad j=1,2,\ldots,n$$

空格为∞

$$T^{(k+1)}(v_j)=\min_i\{T^{(k)}(v_i)+l_{ij}\}$$

节点	l_{ij}								$T^{(0)}_j$	$T^{(1)}_j$	$T^{(2)}_j$	$T^{(3)}_j$	$T^{(4)}_j$
	1	2	3	4	5	6	7	8					
1	0	2		1		3			0	0	0	0	0
2		0	6		5					2	2	2	2
3			0					-6			8	8	8
4		10		0			-2			1	1	1	1
5			9		0			4			7	2	2
6				5		0	4			3	3	3	3
7		7			3		0	8			-1	-1	-1
8								0				2	2

$8\leftarrow 3\leftarrow 2\leftarrow 1$

问题

1、逐次逼近法是否一定收敛？

2、逐次逼近法最多需迭代几次？

3、逐次逼近法与动态规划的关系

第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
  - Dijkstra算法
  - 逐次逼近法
  - Floyd算法
- 网络最大流问题
- 网络最小费用流问题

任意两点最短距离问题

- ■目标：求取网络中全部两点间的最短距离

□ 初始权矩阵：$D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})_{n\times n}=(l_{ij})_{n\times n}$ $\quad l_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & (i,j)\in E \\ +\infty & (i,j)\notin E \end{cases}$

□ 迭代权矩阵：$D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})_{n\times n}$

➢ 思路1：两点间用逐次逼近法求解

$$d_{ij}^{(k)}=\min_{l}\{d_{il}^{(k-1)}+l_{lj}\} \qquad l=1,2,\ldots,n \qquad 1\le k\le n$$

➢ 思路2：l_{ij}用上一步迭代结果替代

$$d_{ij}^{(k)}=\min_{l}\{d_{il}^{(k-1)}+d_{lj}^{(k-1)}\} \qquad l=1,2,\ldots,n \qquad 1\le k\le n$$

Floyd算法

权矩阵： $D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})_{n\times n}$

初值： $D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})_{n\times n}=(l_{ij})_{n\times n}$

$$l_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & (i,j)\in E \\ +\infty & (i,j)\notin E \end{cases}$$

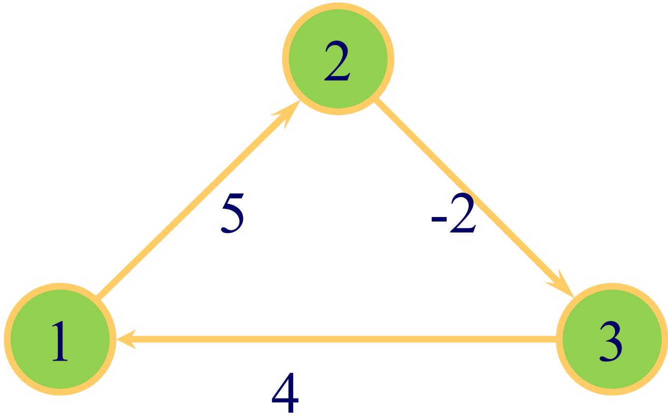
$$d_{ij}^{(k)}=\min\{d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}\}$$

$k=1,2,\ldots,n$

最多经过前k-1个节点的最短路径

问题：逐次逼近法可以这样处理吗？

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$$



$$\begin{array}{cc} & d_{i1}{}^{(1)} \\ \begin{array}{c} d_{1j}{}^{(1)} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & -2 \\ 4 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \quad d_{2j}{}^{(2)} \quad \begin{array}{cc} & \quad\quad d_{i2}{}^{(2)} \\ \begin{array}{c} \\ d_{2j}{}^{(2)} \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5_{12} & \infty \\ \infty & 0 & -2_{23} \\ 4_{31} & 9_{312} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cc} & \quad\quad\quad\quad d_{i3}{}^{(3)} \\ \begin{array}{c} \\ \\ d_{3j}{}^{(3)} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5_{12} & 3_{123} \\ \infty & 0 & -2_{23} \\ 4_{31} & 9_{312} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5_{12} & 3_{123} \\ 2_{231} & 0 & -2_{23} \\ 4_{31} & 9_{312} & 0 \end{bmatrix}$$

最短路问题的应用

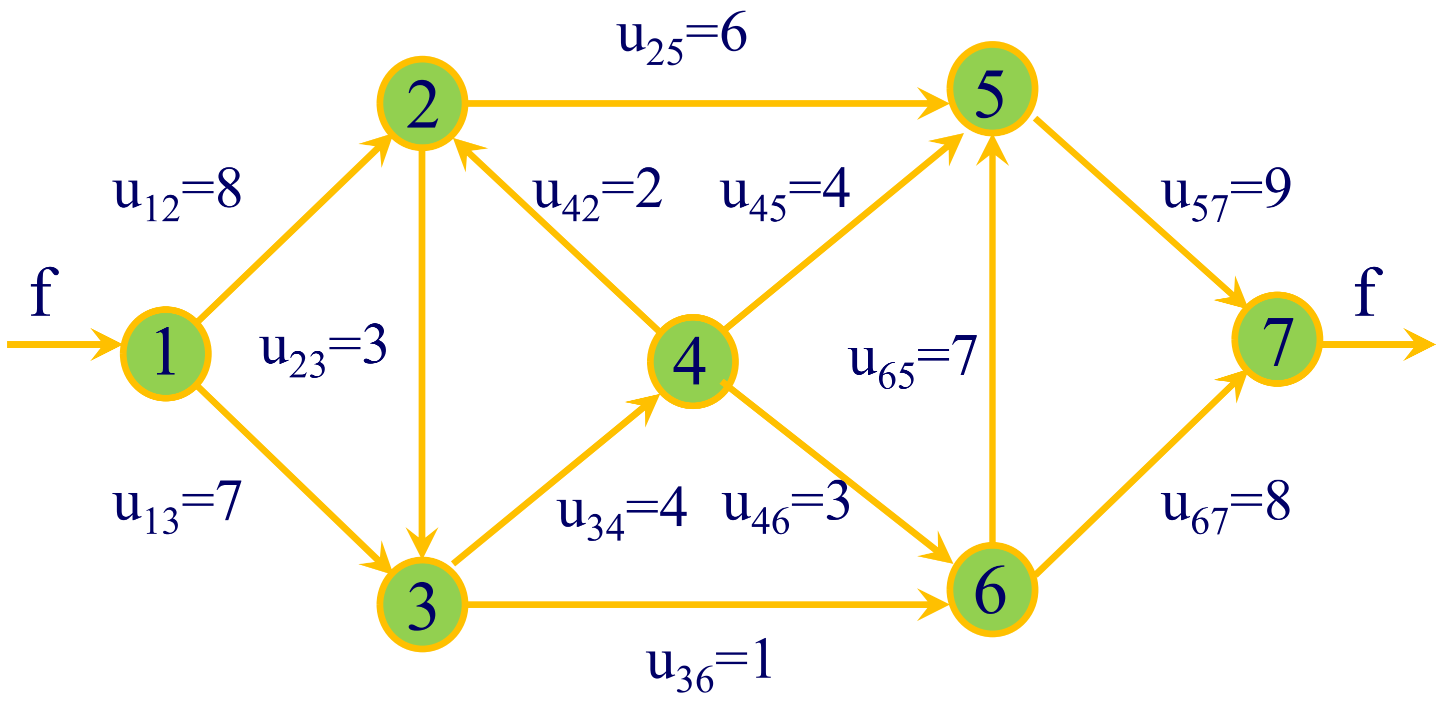
选址问题

设备更新问题：抽象路径长度，如成本

第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
- 网络最大流问题
  - Ford-Fulkerson算法
  - 最大流-最小割定理
  - 最大匹配问题
- 网络最小费用流问题

最大流问题



f
1
2
3
4
5
6
7
f
$u_{12}=8$
$u_{13}=7$
$u_{23}=3$
$u_{25}=6$
$u_{42}=2$
$u_{45}=4$
$u_{34}=4$
$u_{46}=3$
$u_{36}=1$
$u_{65}=7$
$u_{57}=9$
$u_{67}=8$

最大流问题模型

■最大流问题：求网络的最大可行流

$$\max f = \sum_k x_{kt} = \sum_j x_{sj}$$

s起点/源source
t终点/汇sink

s.t.

$$\sum_k x_{ki} = \sum_j x_{ij} \qquad i \neq s,\ i \neq t \quad i=1,2,\ldots,n$$

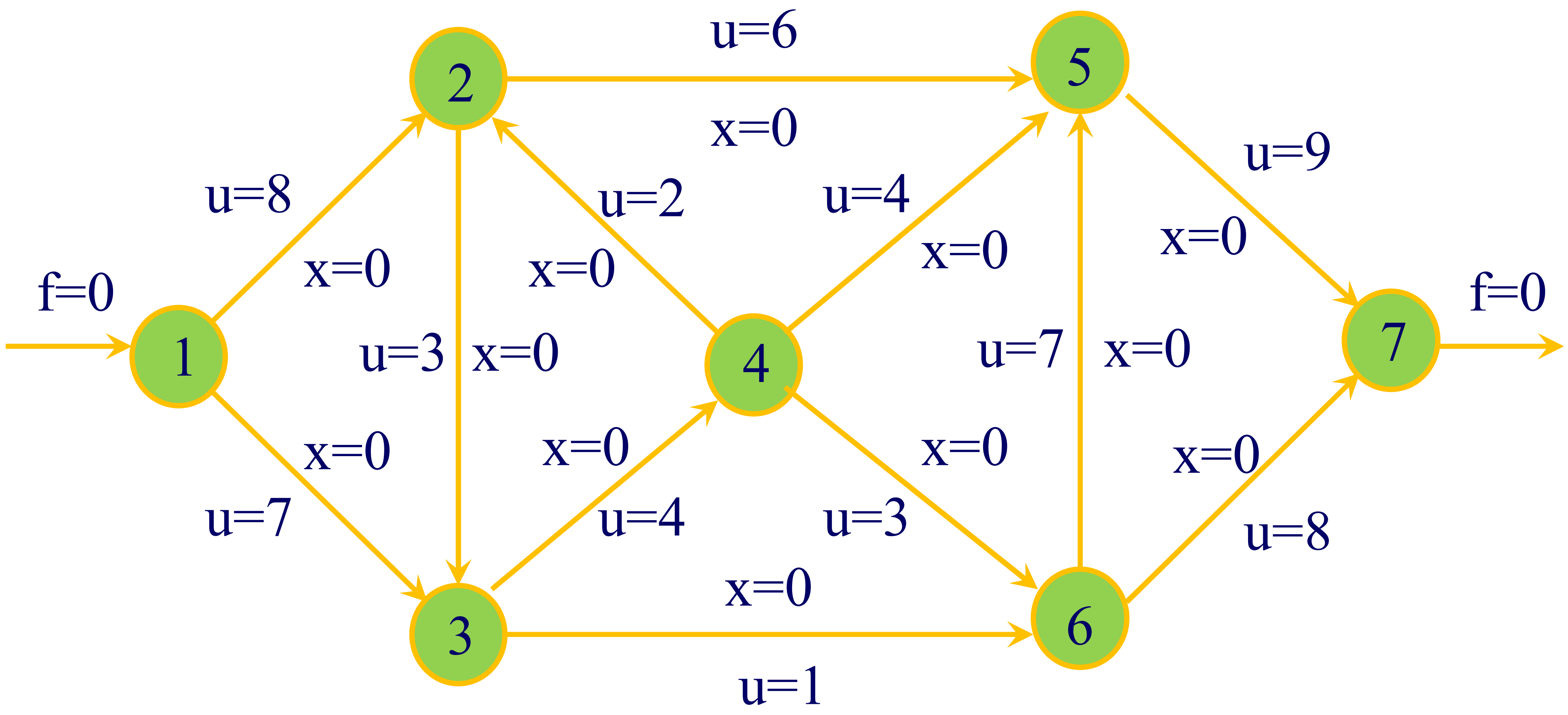
流量平衡条件

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

容量限制条件

u_{ij}为对应边的容量上限

Ford-Fulkerson算法



给出一个初始的可行流$x_{ij}=0$

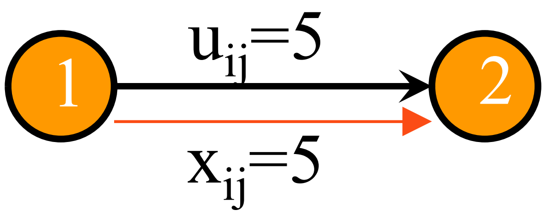
不饱和边与可增广链

- 不饱和边：流量没有达到容量限制的边
- 可增广链：从起点到终点方向一致的不饱和边构成的链。

正向饱和/不饱和边

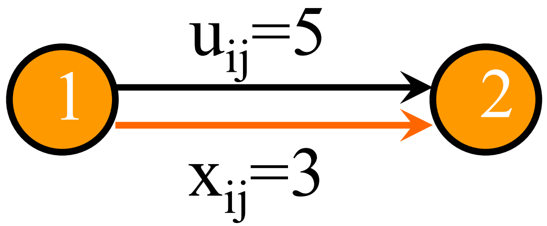
- 正向边：与参考链方向一致的边。

1、如果$x_{ij}=u_{ij}$，边从i到j的方向是饱和的；



（1，2）是饱和的

2、如果$x_{ij}<u_{ij}$，边从i到j的方向是不饱和的；



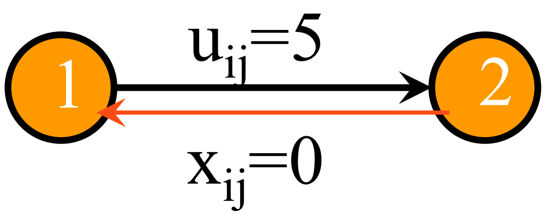
（1，2）是不饱和的

间隙为$\Delta_{12}=u_{12}-x_{12}=5-3=2$

反向饱和/不饱和边

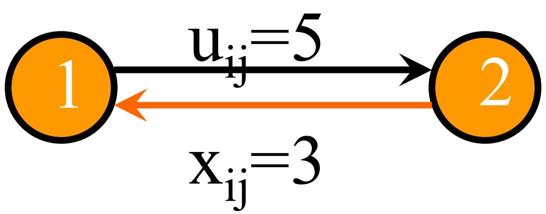
- 反向边：与参考链的方向相反的边。

3、如果x_{ij}=0，边从j到i的方向是饱和的；



（2，1）是饱和的

4、如果x_{ij}>0，边从j到i的方向是不饱和的；



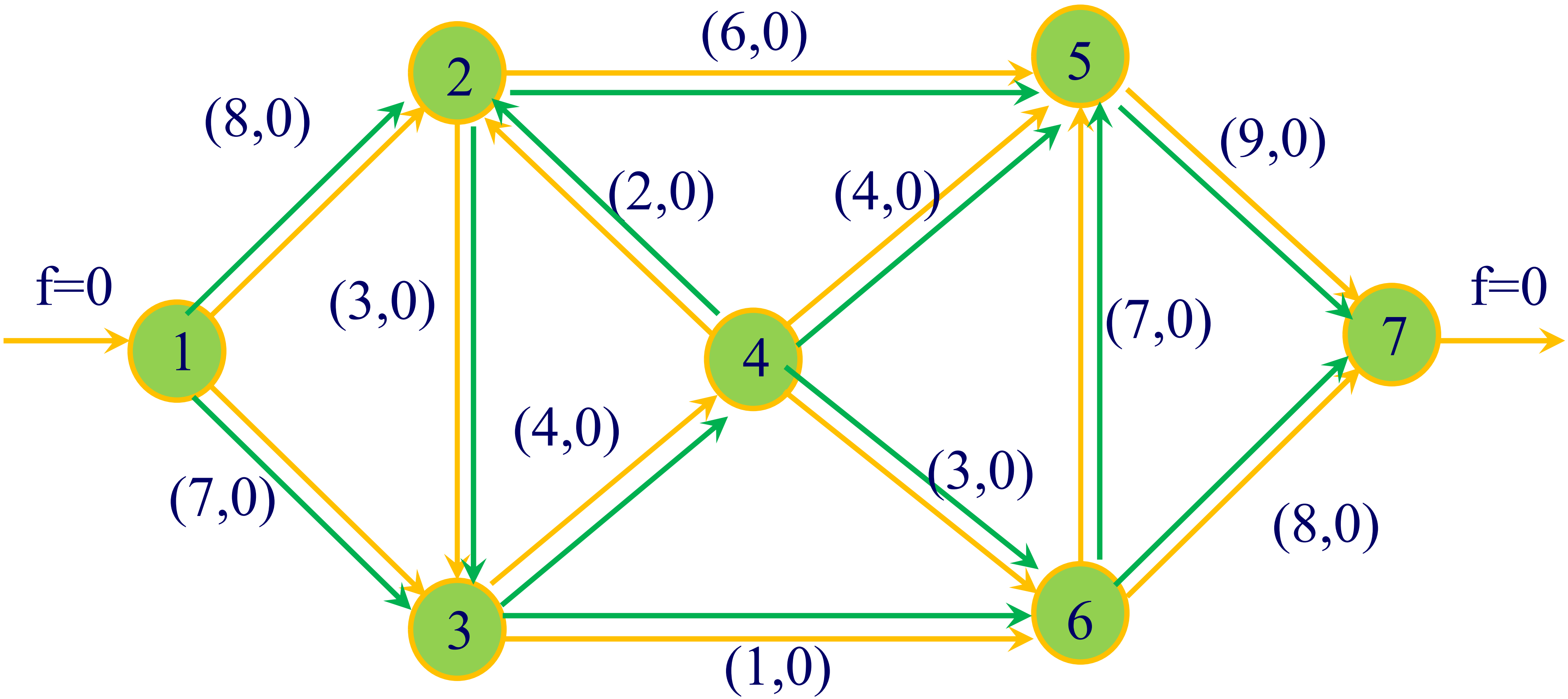
（2，1）是不饱和的

间隙为$\Delta_{12}=x_{12}=3$

最大流性质

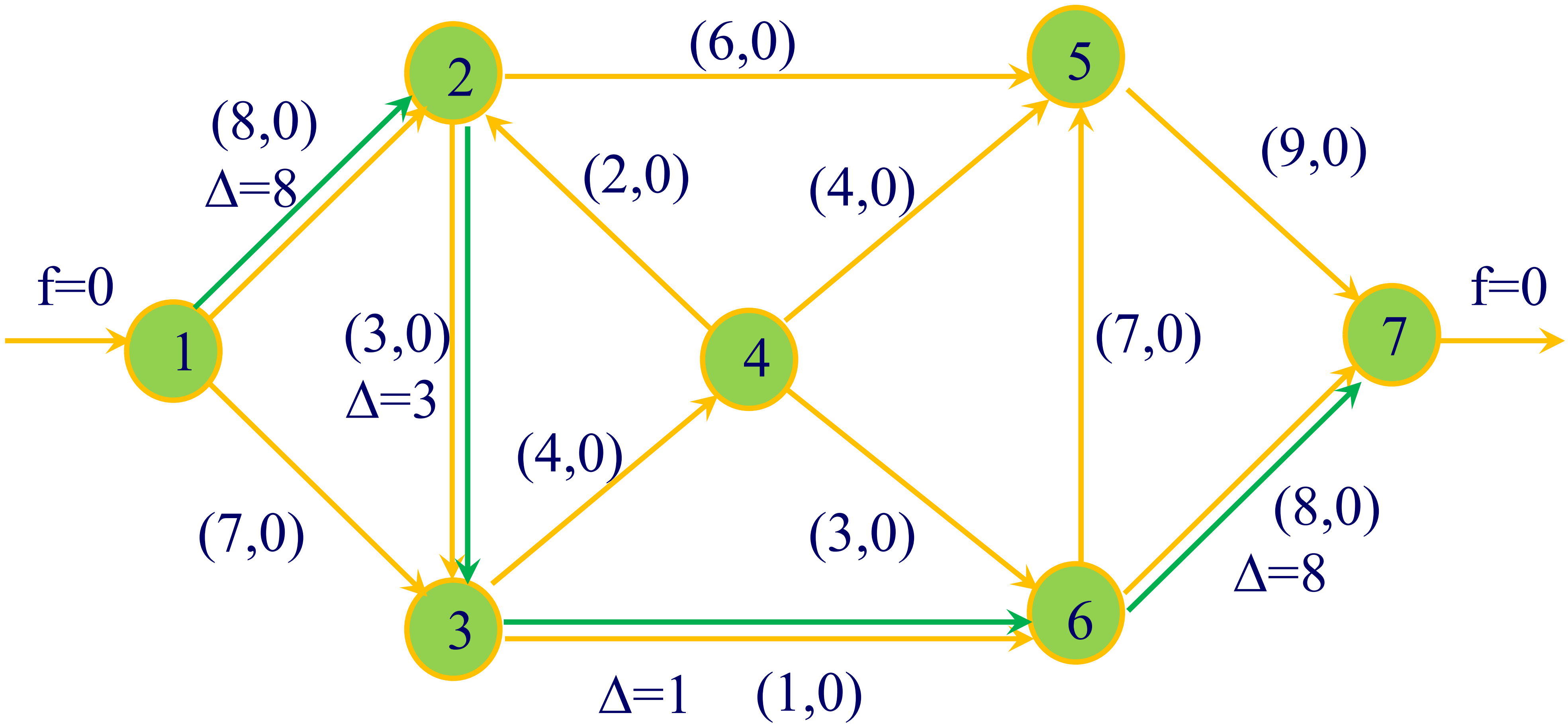
- 现象：若存在连接起点和终点的链的每一条边都是不饱和边，即存在可增广链，则可使总流量增加。

- 性质：两点间的可行流为最大流的充要条件是：
  网络不存在可增广链



找到所有的不饱和边，以及各边可以调整流量的方向

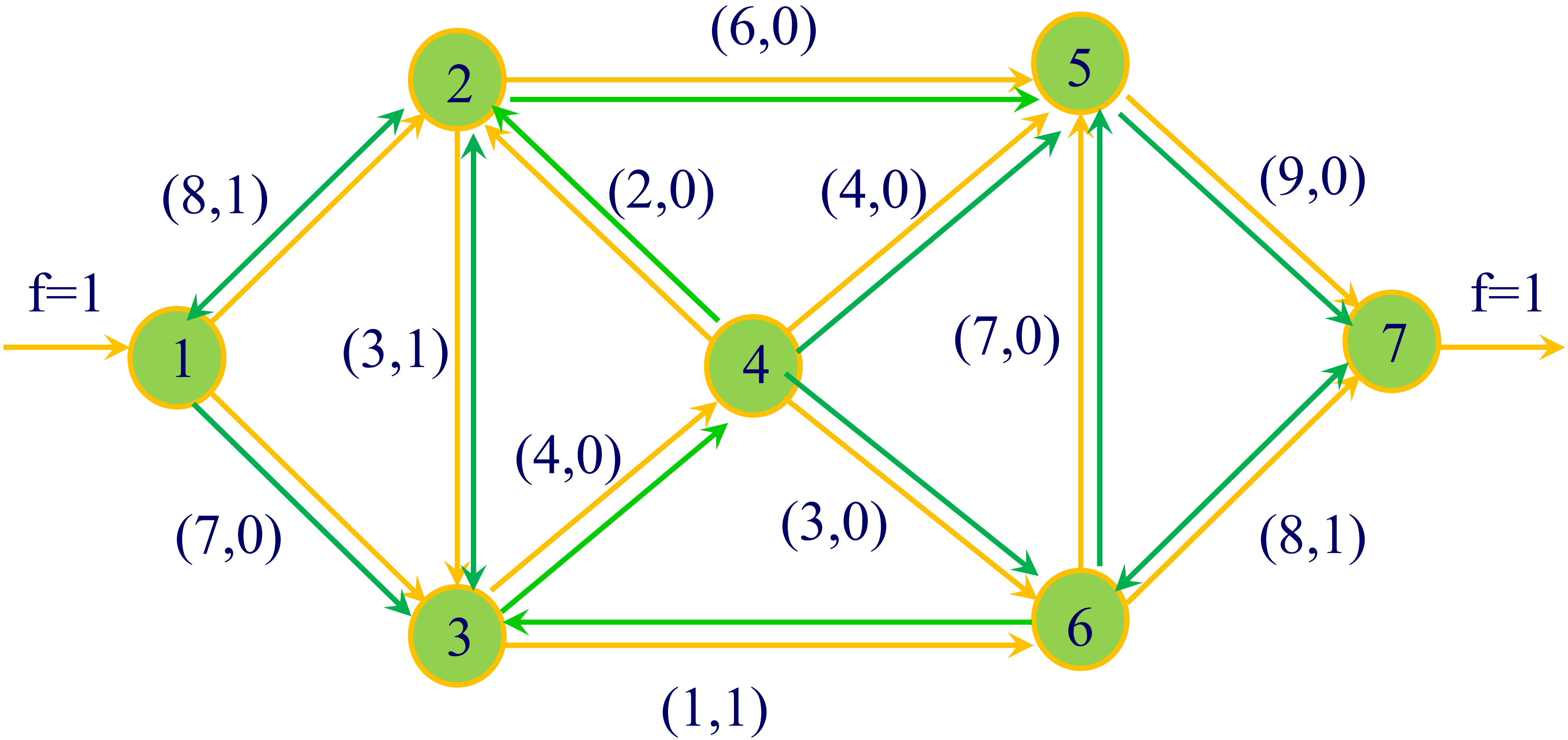
找到一条从1到7的可增广链



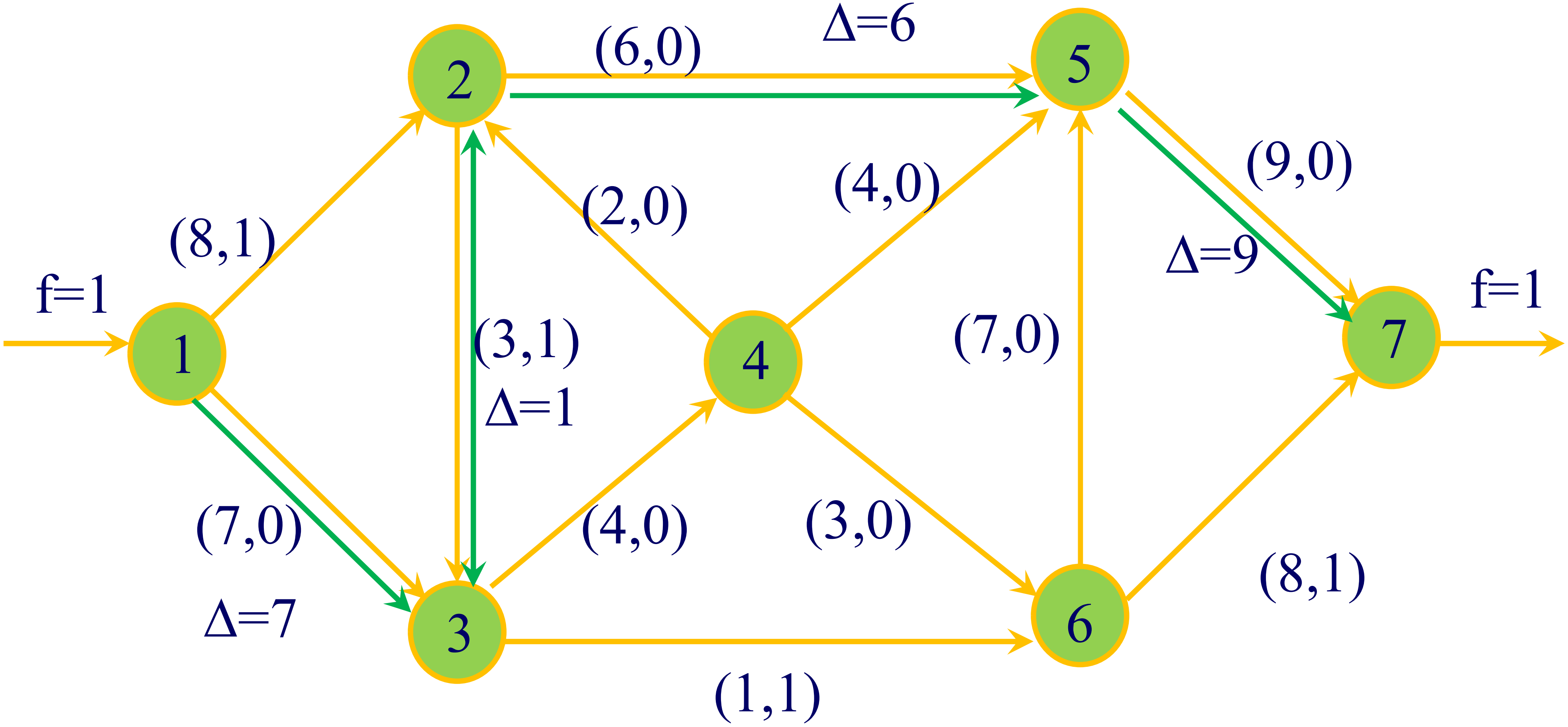
链的间隙为：$\Delta = \min\{8,3,1,8\}=1$

调整链的流量：$x_{ij}'=x_{ij}+\Delta$

调整流量，f=1。继续求出网络的不饱和边



求出一条从1到7的可增广链

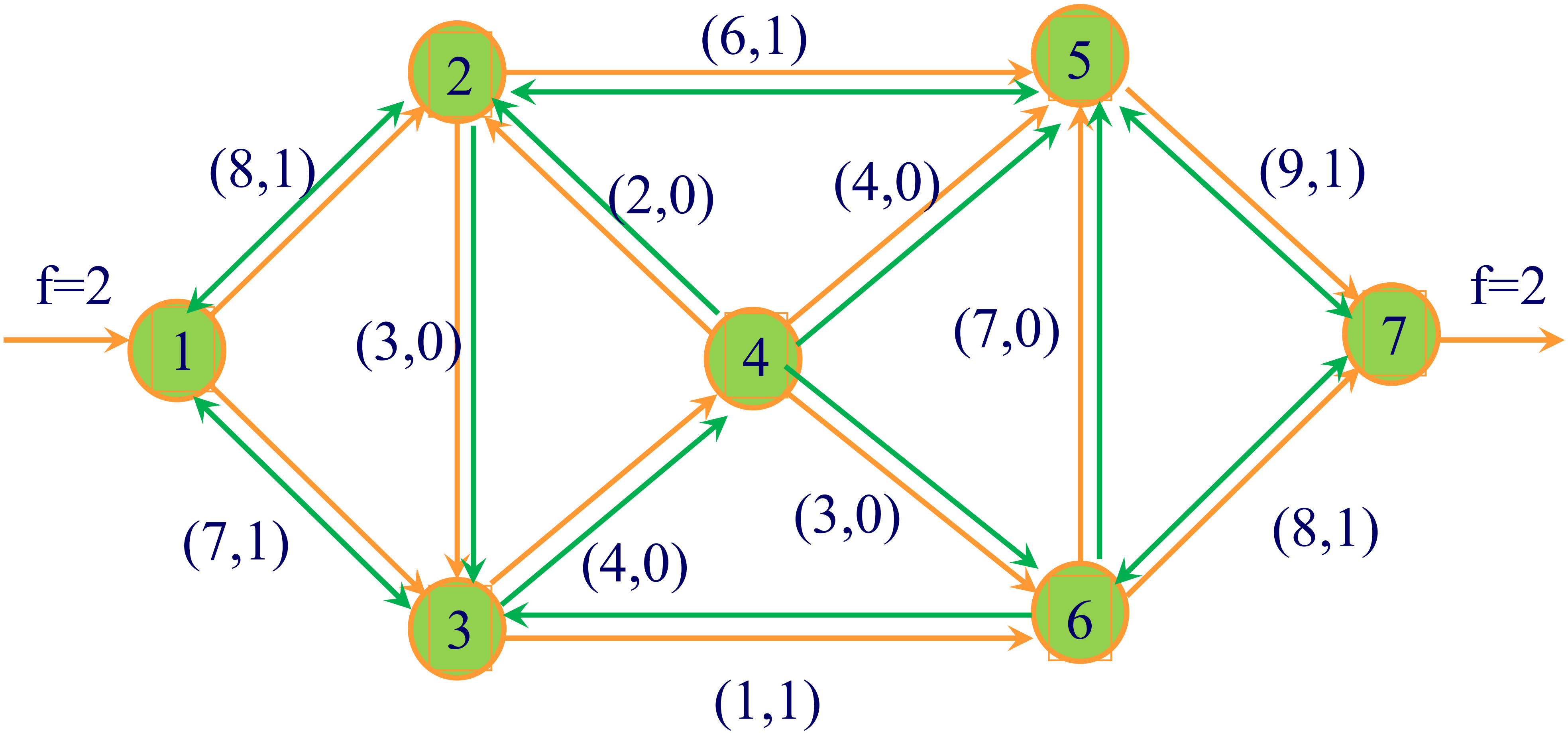


$\Delta=\min\{7,1,6,9\}=1$,

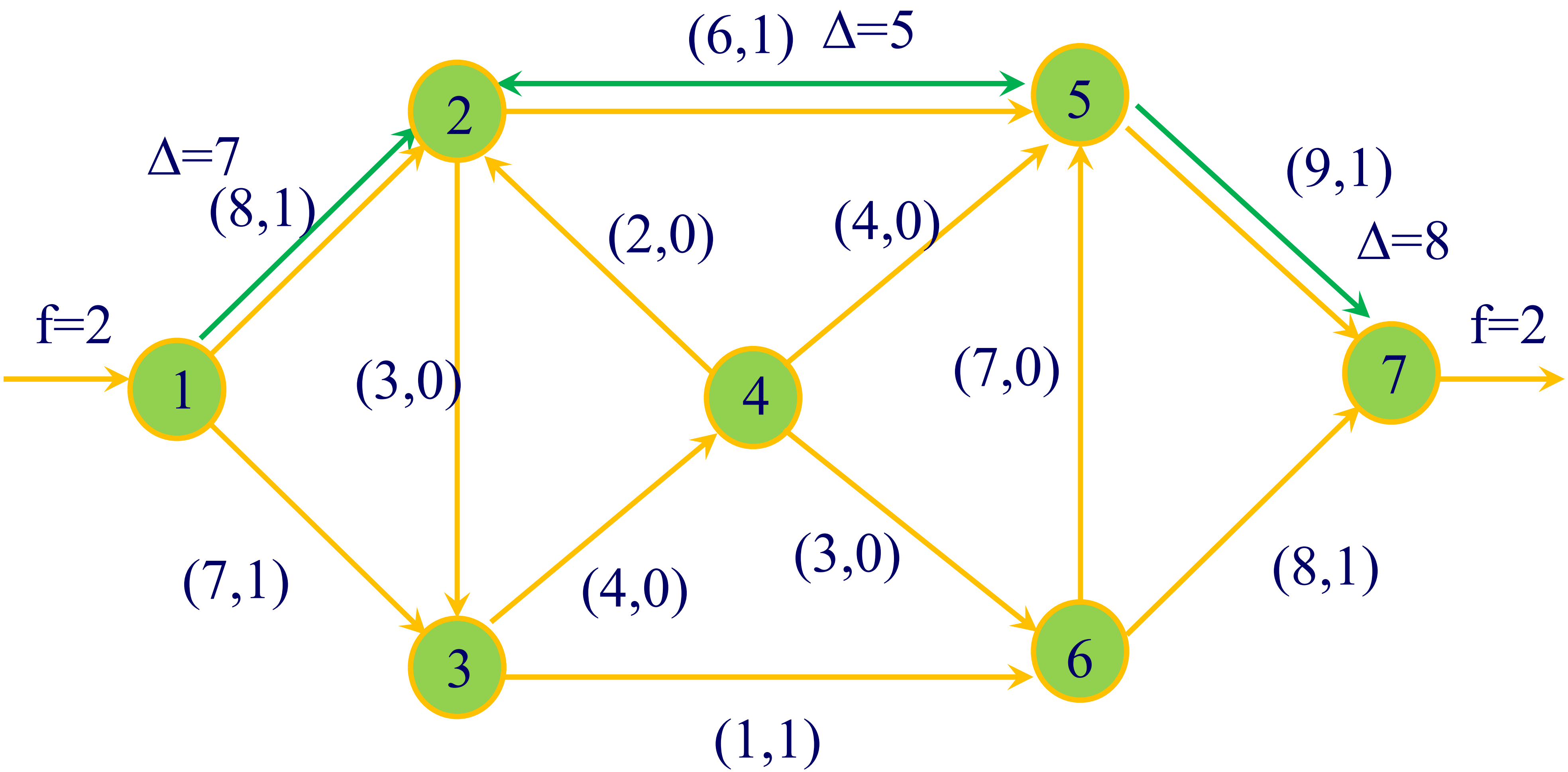
调整流量： 正向边：$x_{ij}'=x_{ij}+\Delta$, 反向边： $x_{ij}'=x_{ij}-\Delta$

$f'=f+\Delta=2$

调整流量，继续求出网络的不饱和边

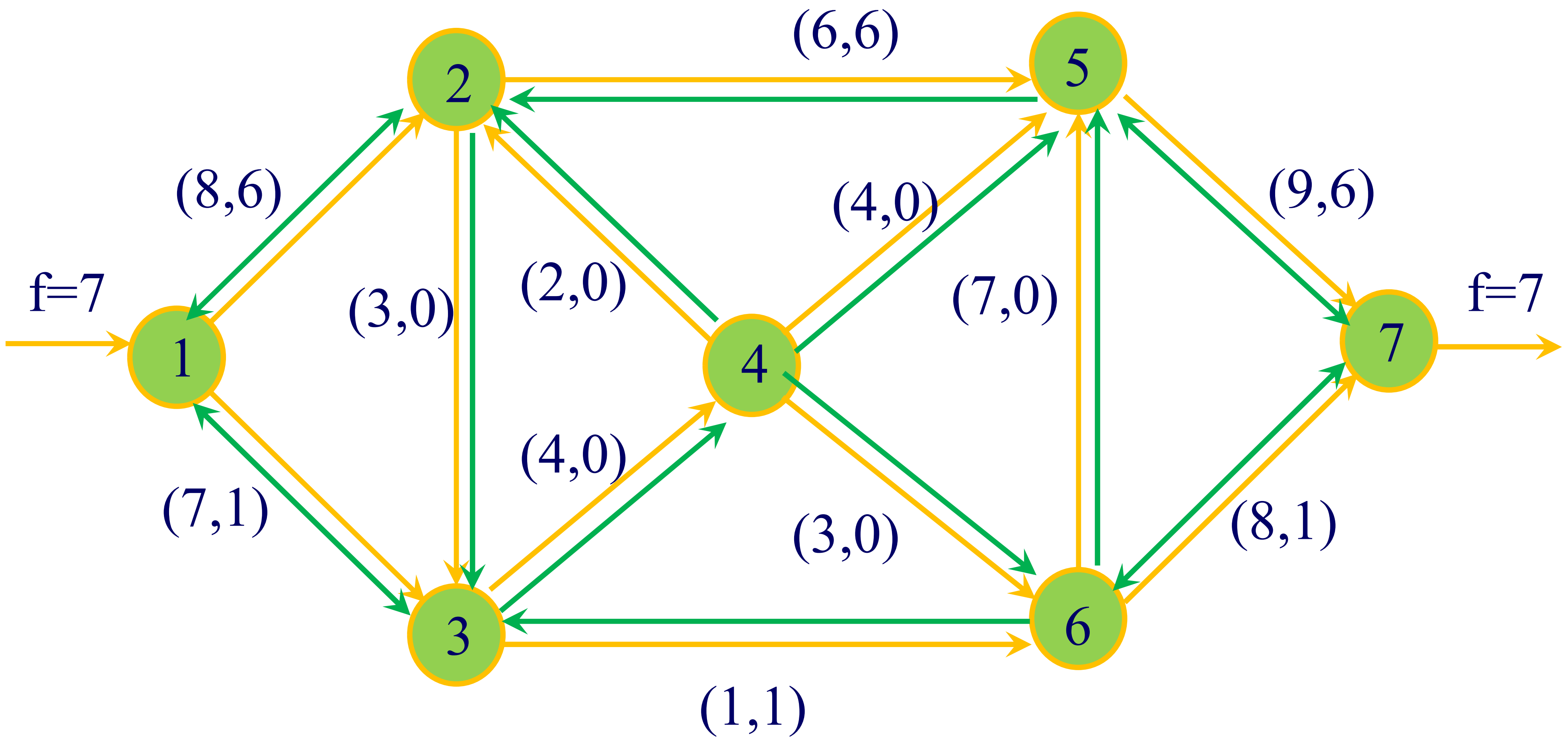


求出一条从1到7的可增广链

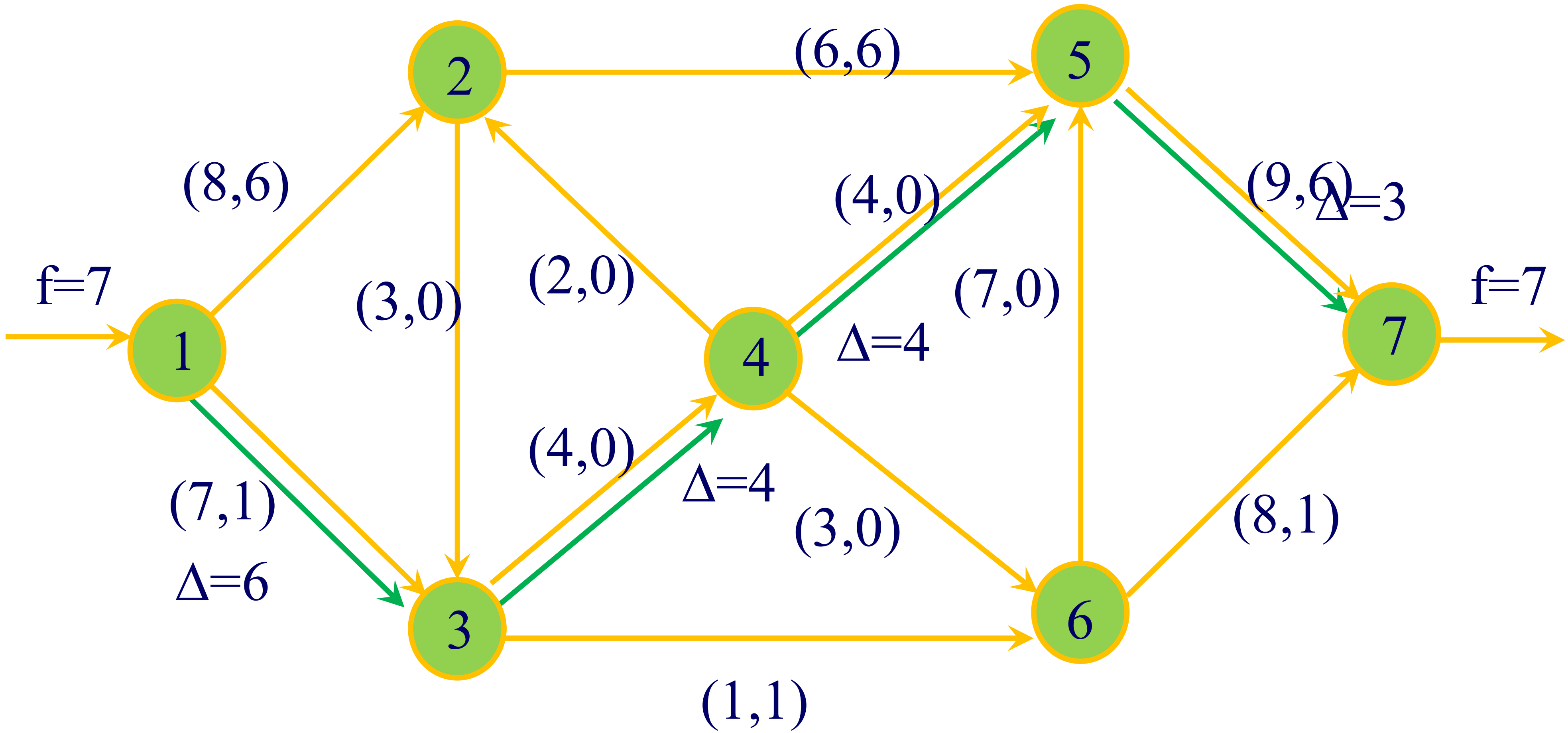


$\Delta=\min\{7,5,8\}=5$, 调整流量 $x_{ij}'=x_{ij}+5$, $f'=f+5=2+5=7$

调整流量，继续求出网络的不饱和边

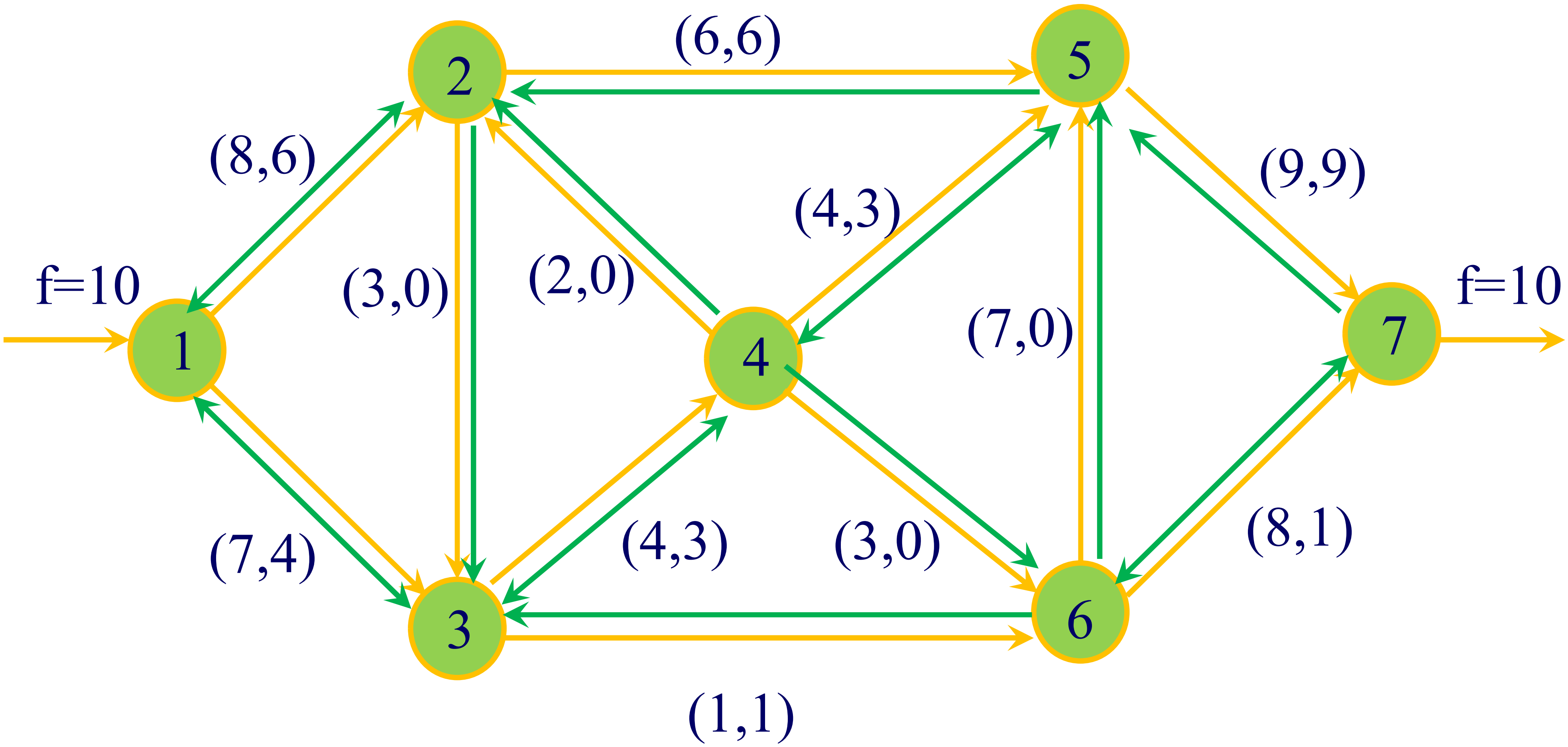


求出一条从1到7的可增广链

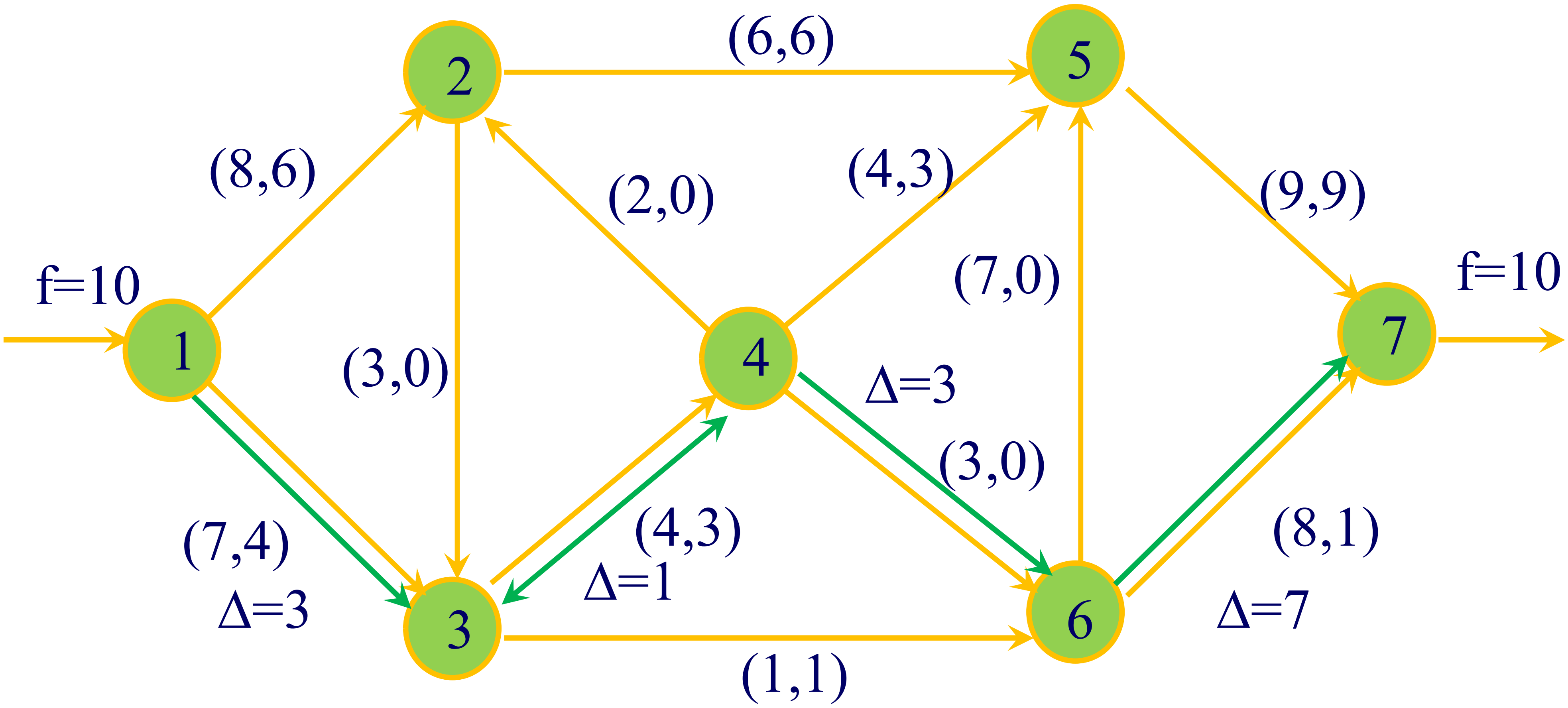


$\Delta=\min\{6,7,4,3\}=3$，调整流量 $x_{ij}'=x_{ij}+3$，$f'=f+3=7+3=10$

调整流量，继续求出网络的不饱和边

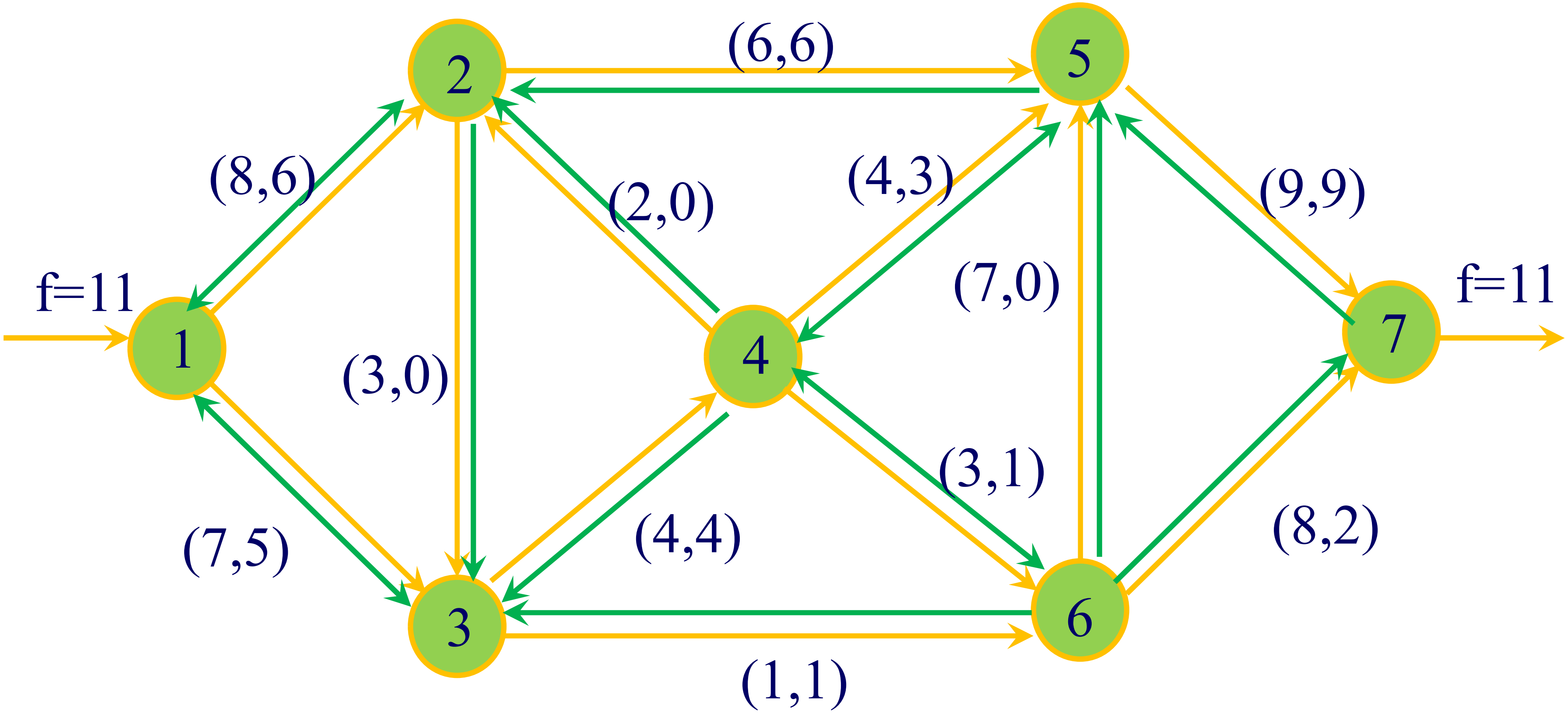


求出一条从1到7的可增广链



$\Delta=\min\{3,1,3,7\}=1$, 调整流量 $x_{ij}'=x_{ij}+1$, $f'=f+1=10+1=11$

调整流量，继续求出网络的不饱和边

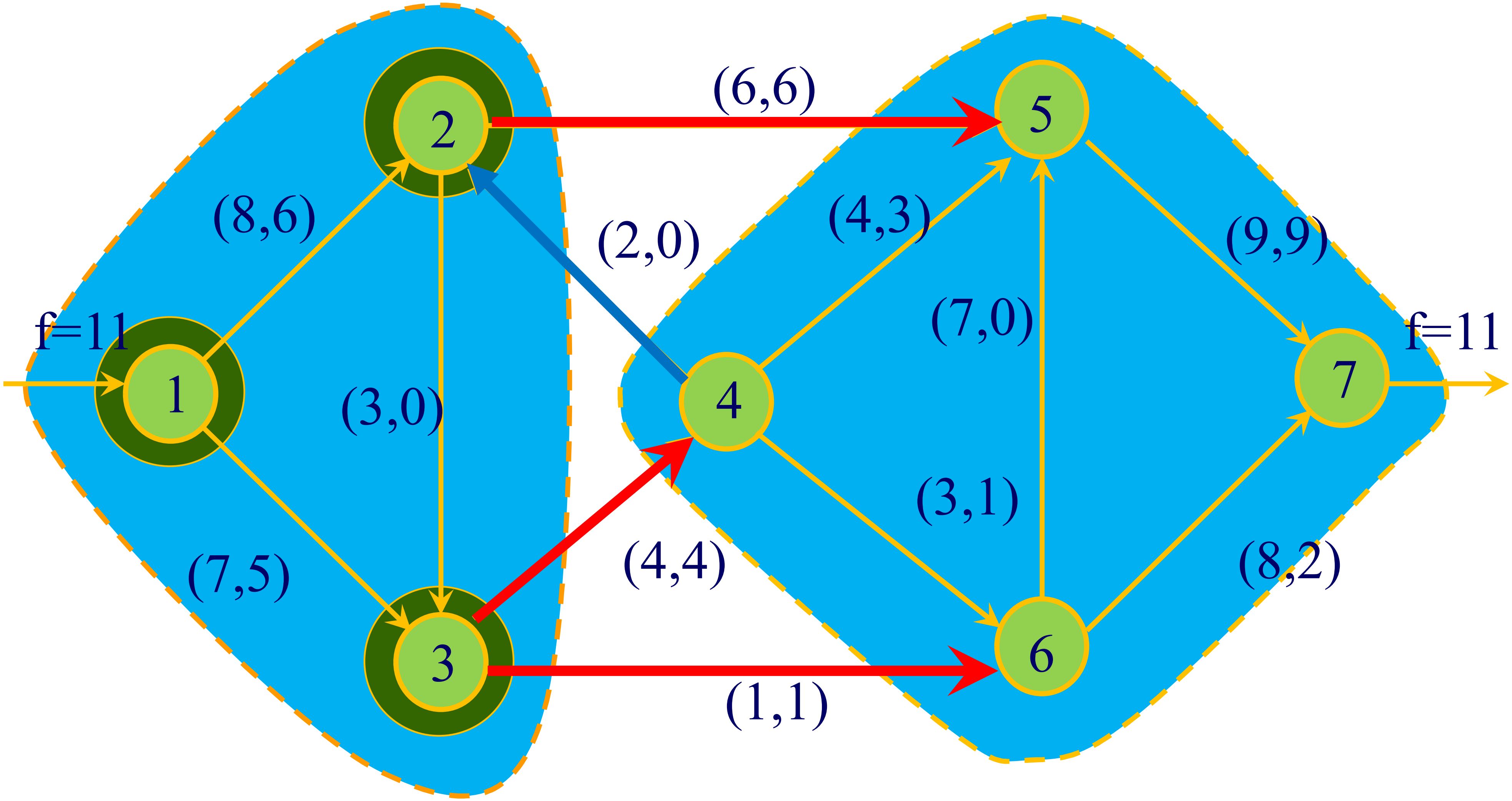


已找不到一条从1到7的可增广链，从1开始可以到达的节点为1，2，3

第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
- 网络最大流问题
  - Ford-Fulkerson算法
  - 最大流-最小割定理
  - 最大匹配问题
- 网络最小费用流问题

最大流分析

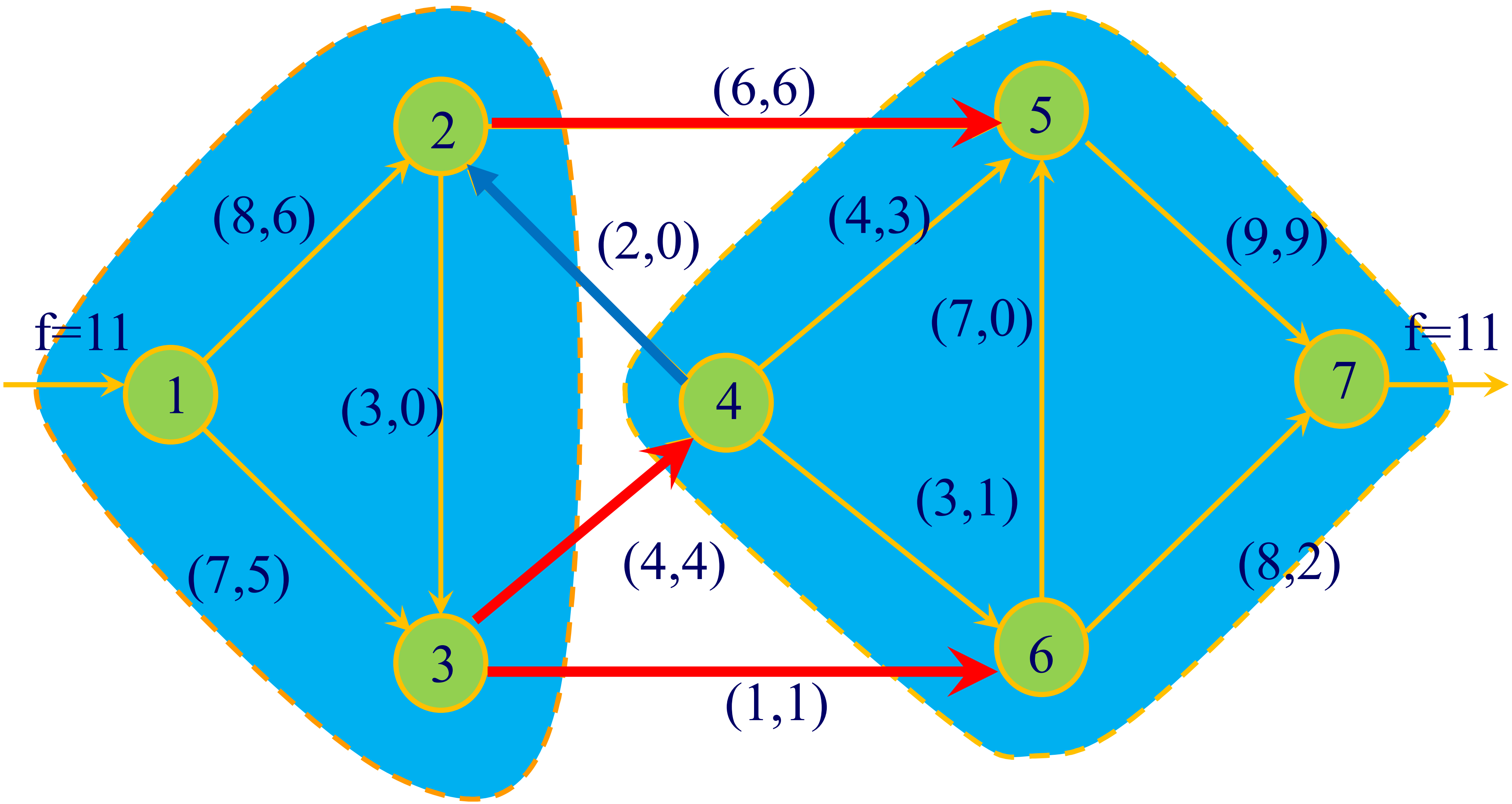


割集容量

割集容量：对网络G=(V,E,U)，E′为将起点v_s和终点v_t分离在S、T两部分的割集，则割集容量 U(E′)为所有起点在S、终点在T的边的容量之和。

定理1：设f为网络G=(V,E,U)的任一可行流，E′为将起点v_s和终点v_t分离的割集，则有$f \leq$ U(E′)
证明略。

最大流与最小割容量关系



最大流f=11，最小割集为（2,5） （2,4） （3,4） （3,5）

最小割容量$u_{25}+u_{34}+u_{36}=6+4+1=11$

最大流-最小割定理

定理2： 网络G中，从v_s到v_t的最大流等于分离v_s和v_t的最小割的容量

证明（构造法）：设按前述方法找到最大流f_m，并根据f_m定义一个割集(S,T)。只需证明f_m=U(S,T)。

S可如下定义：

$v_s \in S$

对任意的$v_i \in S$，若正向边$x_{ij} < u_{ij}$或 反向边$x_{ji} > 0$，则令$v_j \in S$

令T=V/S，可证$v_t \in T$（否则存在可增广链）

则对应于割集中的边$(v_i,v_j) \in (S,T)$，有：

正向边时：$x_{ij} = u_{ij}$

反向边时： $x_{ij} = 0$

所以f_m=U(S,T)

第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
- 网络最大流问题
  - Ford-Fulkerson算法
  - 最大流-最小割定理
  - 最大匹配问题
- 网络最小费用流问题

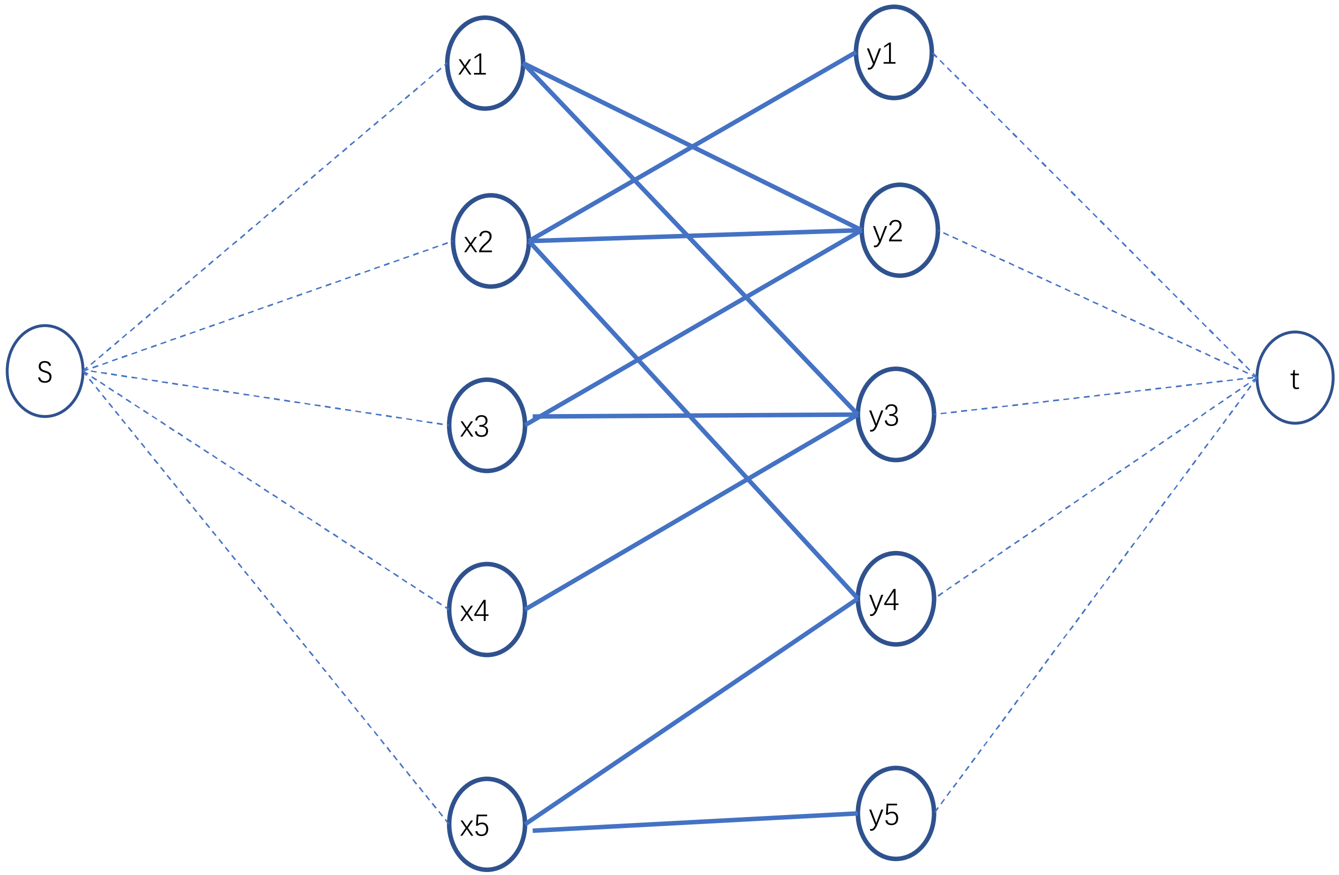
例：招聘问题

某单位需招收俄、英、日、德、法翻译各1人。现有5人应聘，其中乙懂俄文，甲、乙、丙懂英文，甲、丙、丁懂日文，戊懂德文和法文，请给出一招聘方案，使尽可能多的翻译任务可完成。

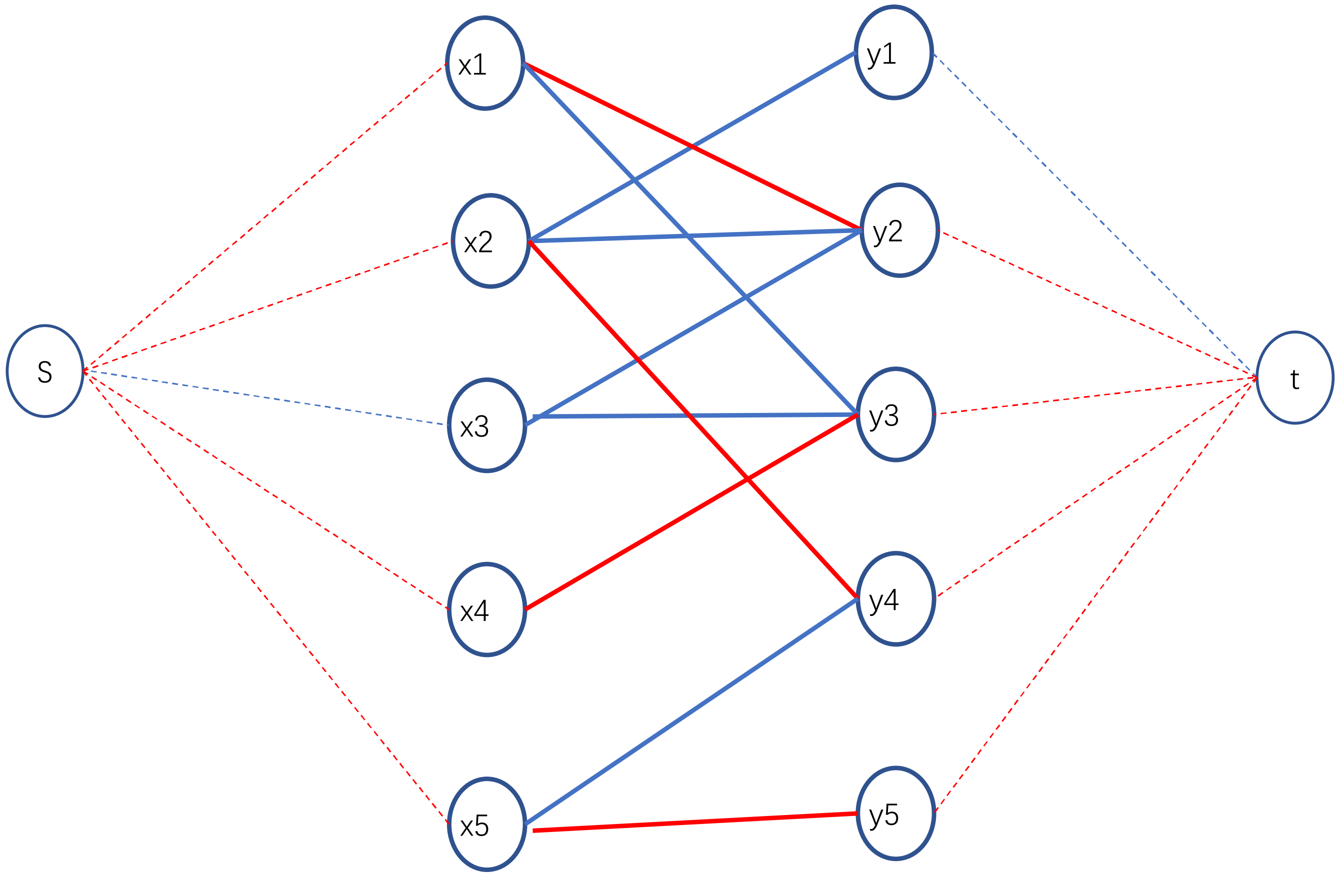
x1-x5：甲乙丙丁戊

y1-y5：俄英日德法

二部图



最大匹配



第八章 图与网络分析

- 网络的基本概念
- 最短路径问题
- 网络最大流问题
- 网络最小费用流问题

最小费用流问题

- 最小费用流问题：在容量网络G=(V,E,U,C)中，设边(v_i,v_j)的容量为u_{ij}，单位流量的费用为c_{ij}，求一个可行流f，使$f=f_g$时，总费用最小。

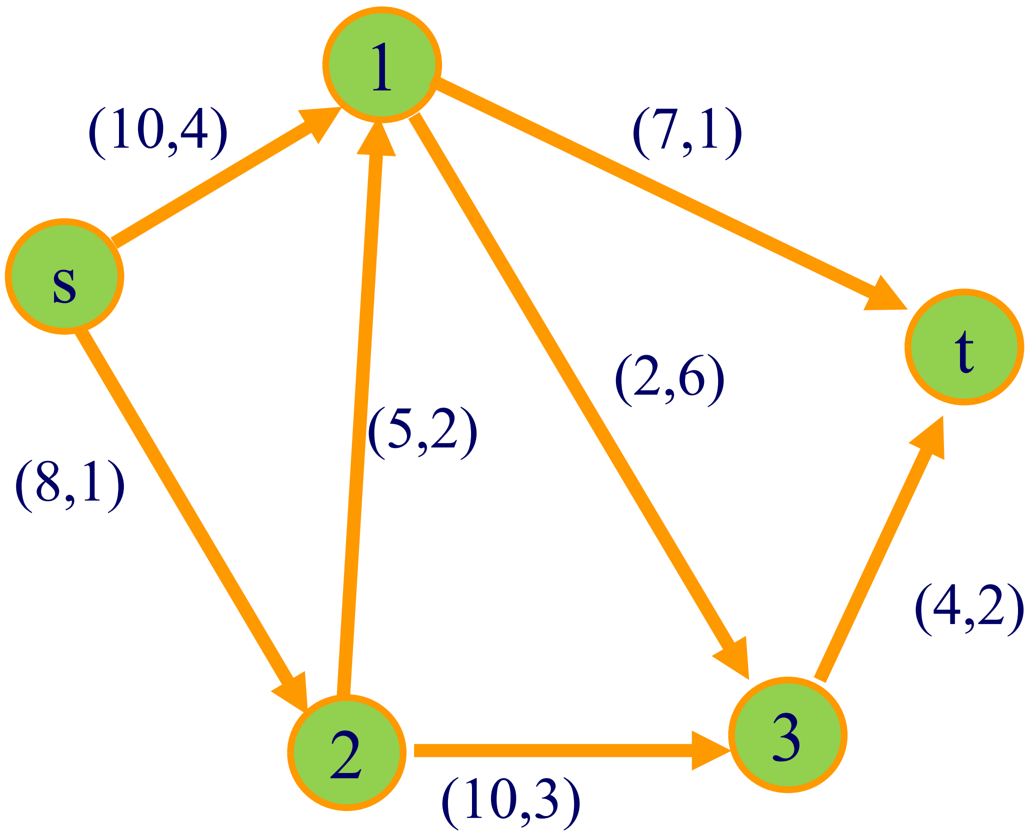
$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k x_{ki} = \sum_j x_{ij} \qquad v_i \in V \setminus \{v_s, v_t\}$$

$$\sum_k x_{kt} = \sum_j x_{sj} = f_g$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

例



已知(u_{ij},c_{ij})，求f_g=10的最小费用流

最小费用流问题解题思路

思路：1。先寻找一个初始最小费用可行流$f_0 < f_g$

2。沿着可增广链增加$f = f_0 + \Delta$，使$f \to f_g$

问题：如何保证$f = f_0 + \Delta$是最小费用流？

最小费用可增广链

■可增广链的费用：设μ为起点v_s到终点v_t的一条可增广链，其费用为z(μ)

$$z(\mu)=\sum_{\mu^+}c_{ij}-\sum_{\mu^-}c_{ij}$$

■最小费用可增广链：链的费用最小

定理3：设f为流量f_0的最小费用流， μ为起点v_s到终点v_t的一条最小费用可增广链，设f'为经过μ调整流量θ后得到的新的可行流，则f'一定是流量为f_0+ θ的最小费用流

对偶算法

对偶算法的思路：

1。以f_0=0为初始可行流

2。找到最小费用可增广链

3。作最大可行调整，使$f_0+\theta=f_g$，若不能达到，重复第2步

$$\theta=\min\left\{\min_{\mu^+}(u_{ij}-x_{ij}),\min_{\mu-}(x_{ij}),f_g-f_0\right\}$$

最小费用可增广链的寻找

■ 长度网络L(f)

1。 $(v_i,v_j)\in E$，

$$l_{ij}=\begin{cases} c_{ij} & x_{ij}<u_{ij} \\ +\infty & x_{ij}=u_{ij} \end{cases}$$

饱和边不可增加流量

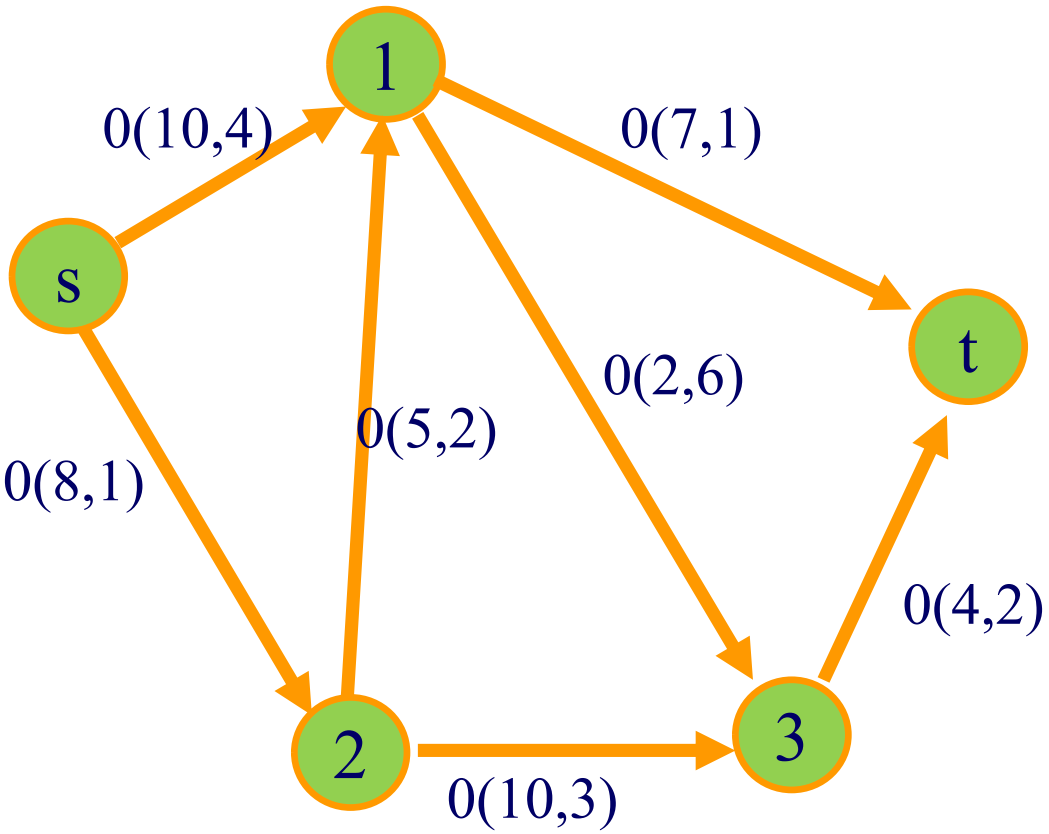
2。 $(v_i,v_j)\in E$，考虑反向边

$$l_{ji}=\begin{cases} -c_{ij} & x_{ij}>0 \\ +\infty & x_{ij}=0 \end{cases}$$

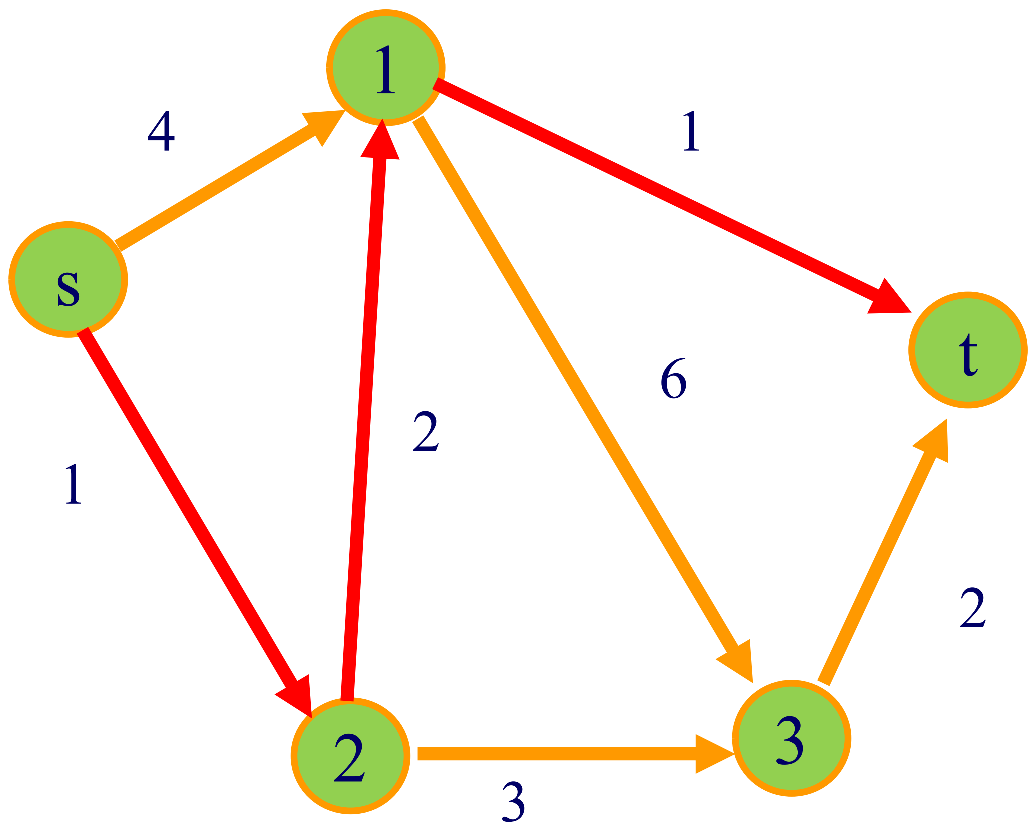
饱和边不可增加流量

求f的最小费用可增广链⇔求L(f)中起点与终点间的最短路

$f_0=0$



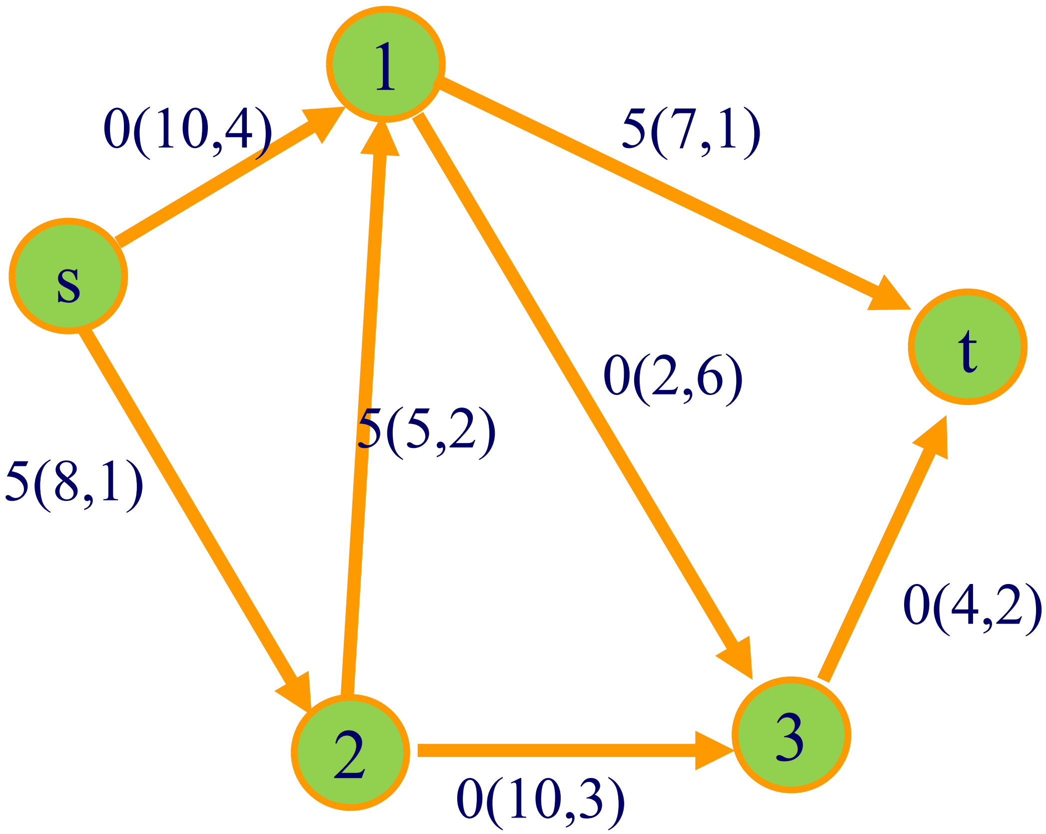
f_0



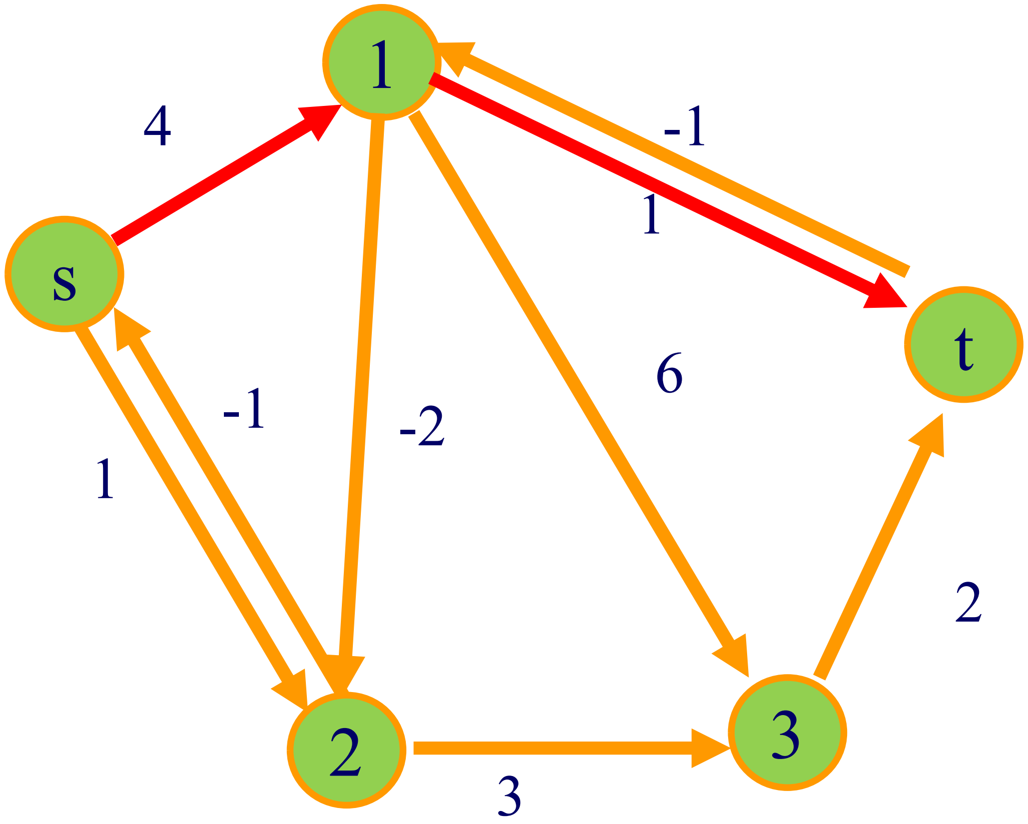
$L(f_0)$

$\mu = s \to 2 \to 1 \to t \quad \theta = \min(8,5,7) = 5 \quad f_1 = f_0 + 5 = 5$

$f_1 = 5$



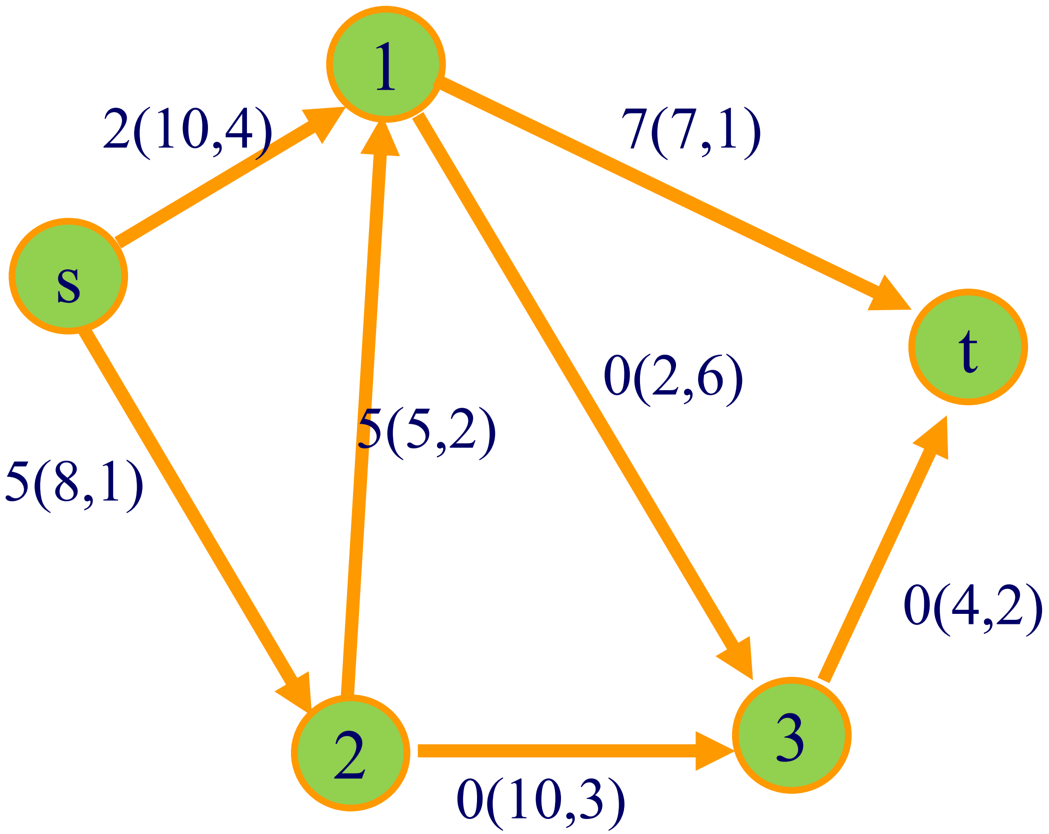
f_1



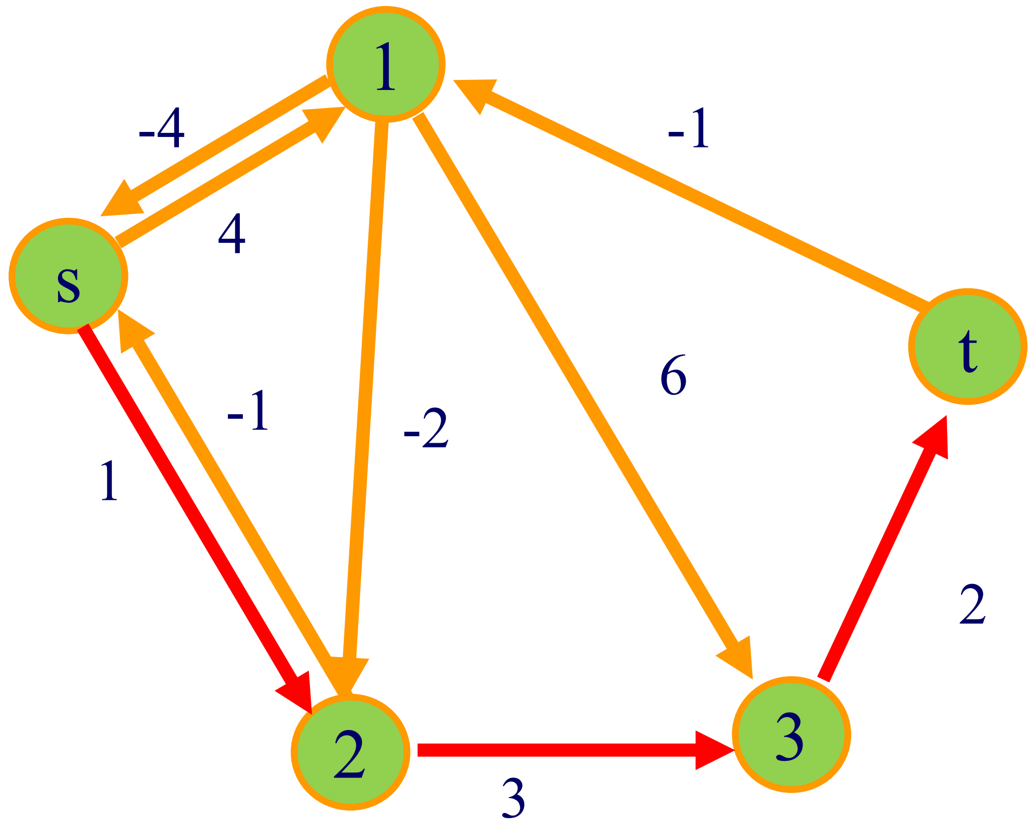
$L(f_1)$

$\mu = s \to 1 \to t \quad \theta = \min(10,2) = 2 \quad f_2 = f_1 + 2 = 7$

$f_2=7$



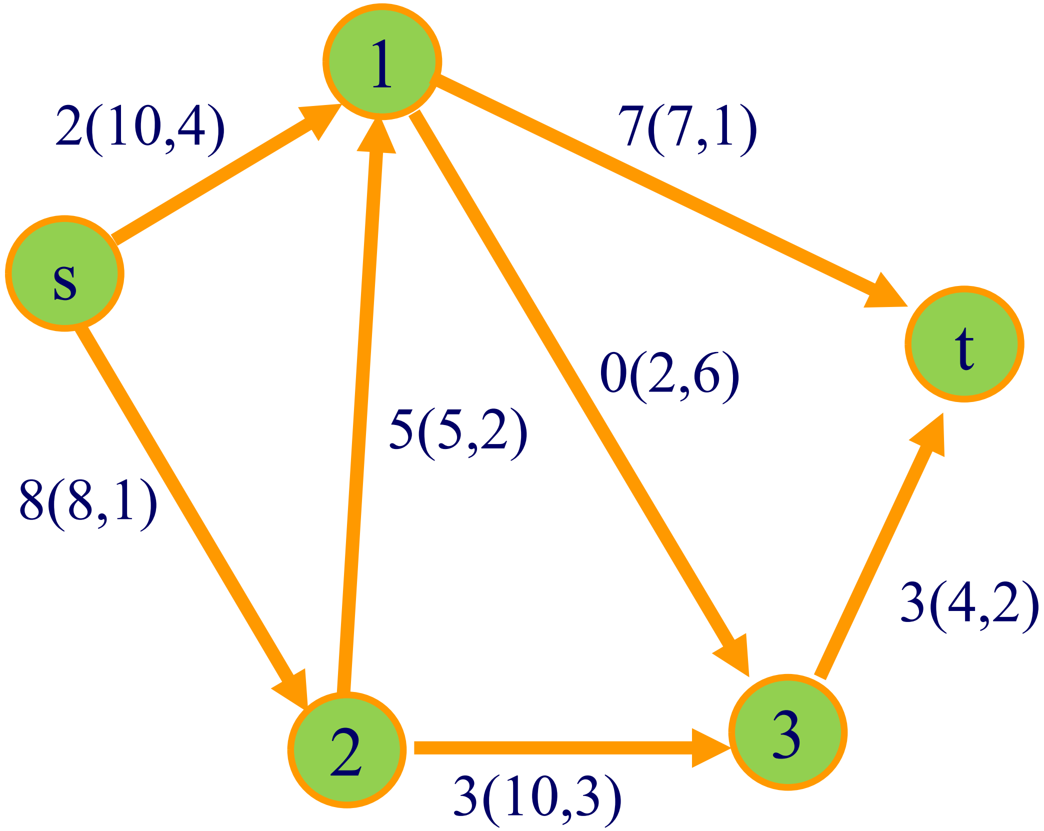
f_2



L(f_2)

μ=s $\rightarrow$2 $\rightarrow$ 3$\rightarrow$t θ=min(3,10,4)=3 $f_3= f_2+3=10$

$$f_3 = 10 = f_g$$



f_3

最小费用流