



# 连续信号的分解



- 任意信号 $x(t)$ 可以用经平移的无穷多个单位冲激函数加权后的连续和（积分）表示，换言之，任意信号 $x(t)$ 可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数。

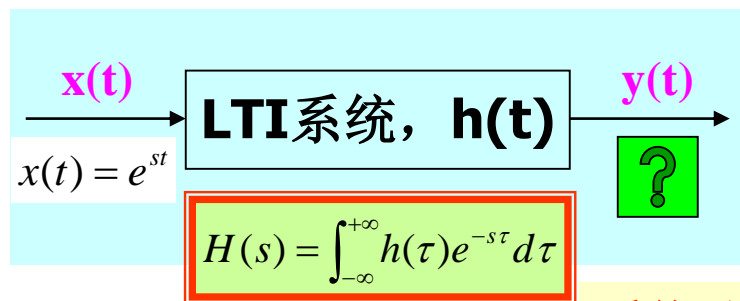
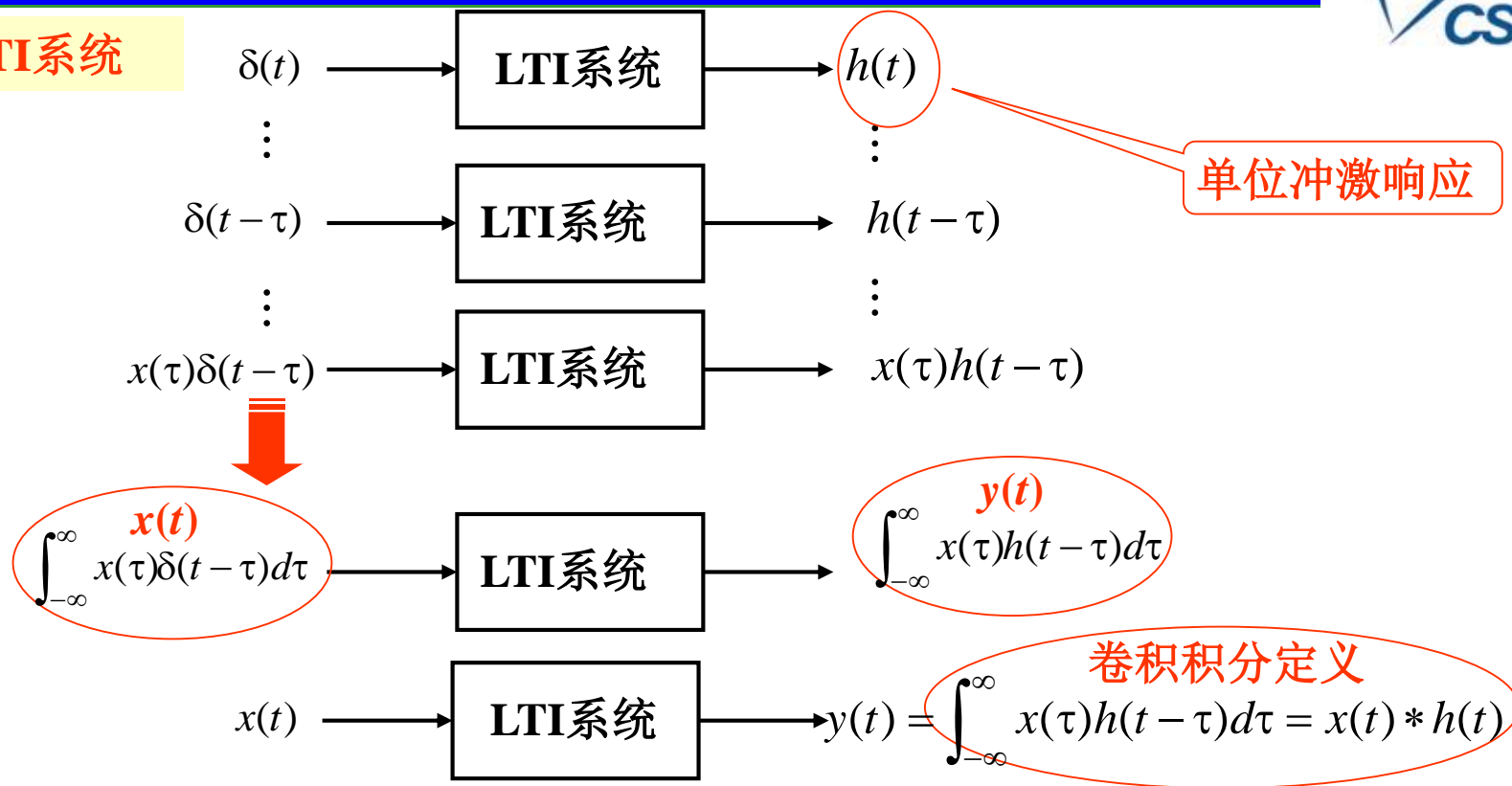
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



# 连续信号的分解



## 连续LTI系统



$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$
$$= e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st} \cdot H(s)$$

系统对该信号的输出响应仅是一个常数乘以该信号



# 周期复指数信号和正弦信号



任何周期信号都可由谐波的组合表示:

$$\varphi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

具有谐波关系的信号集

基波周期:

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

基波频率:

$$|k\omega_0|$$

$$e^{j\omega_0 t} = (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t)$$

- 周期信号  $\Rightarrow$  Fourier级数(FS)
- 非周期信号  $\Rightarrow$  Fourier变换(FT)



## 第二章 连续信号的频域分析



浙江大学控制科学与工程学院

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956



# 目录

---



- 周期信号的频谱分析
- 非周期信号的频谱分析
- 傅立叶变换的性质



# 傅立叶级数的历史发展

---



**Babylonians.** Prediction of periodic phenomena, e.g., astronomical events

**1748, Euler.** Motion of a vibrating string. Later discarded trigonometric series

**1759, Lagrange.** Argued that trigonometric series were of very limited use

**1768, Fourier.** Born in Auxerre, France

**1807, Fourier.** Heat propagation & diffusion. Submitted a paper.  
Rejected.

**1822, Fourier.** Published a book. Claimed “any” periodic signal could be represented by such a series.

**1829, Dirichlet.** Provide precise conditions under which a periodic signal could be represented by a Fourier series.



# 一、周期信号的频谱分析

---



- 周期信号的傅立叶级数展开式
- 周期信号的频谱
- 周期信号的功率分配
- 周期信号的傅立叶级数的收敛与近似



# 1、周期信号的傅立叶级数展开式



## 三角函数的傅立叶级数

周期为 $T_0$ 的周期信号 $x(t)$ ，如果满足狄里赫利条件，都可以分解成三角函数不等式：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

周期： $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

直流  
分量

基波分量  
 $n=1$

谐波分量  
 $n>1$





# (1) 三角函数的傅立叶级数



完备正交  
函数集

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

直流系数

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

余弦分量系数

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_1 t dt$$

正弦分量系数

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_1 t dt$$



## (2) 傅立叶级数的三角函数正交集表示

物理意义明确，但  
运算不方便

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$A_0 = a_0$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

表明一个周期信号可以分解为直流分量和一系列余弦或正弦形式的交流分量



### (3) 傅立叶级数的指数形式



运算比较方便

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$a_k$

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



# (3) 傅立叶级数的指数形式

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

## (2) 傅里叶级数系数 $a_k$ 的确定

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

如果周期信号 $x(t)$ 可以表示成谐波复指数信号的线性组合，如何确定 $a_k$ ?

两边同乘

$$e^{-jn\omega_0 t}$$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

两边从 $0 \rightarrow T_0$ 对 $t$ 积分

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{e^{j(k-n)\omega_0 T_0} - 1}{j(k-n)\omega_0} = 0, & k \neq n \\ \int_0^{T_0} 1 dt = T_0, & k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = a_n T_0$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$



## 2、周期信号的频谱



### (1) 相关定义

- **基波信号、谐波信号**：周期信号可以分解为一系列正弦信号之和：

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

- 表明一个周期为 $T_0$ 的信号，除直流分量外，包含有频率为原信号频率以及原信号频率的整数倍的一系列正弦型信号，分别将它们称为**基波信号**（ $n=1$ , 也称为一次谐波信号），二次谐波信号（ $n=2$ ），以及三次、四次.....**谐波信号**，它们的**振幅**分别为对应的 $A_n$ ，**相位**为 $\varphi_n$



## 2、周期信号的频谱



- **频谱函数**：指数形式的傅立叶级数表达式中复数量

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$$

随频率  $n\omega_0$  的分布称为信号的**频谱**，也称为周期信号的**频谱函数**

- **幅度频谱、相位频谱**：

由于  $X(n\omega_0)$  包含了幅度和相位的分布，通常把幅度  $|X(n\omega_0)|$  随频率的分布称为幅度频谱，简称**幅频**，相位  $\varphi_n$  随频率的分布称为相位频谱，简称**相频**

- **频谱图**：以频率为横坐标，各谐波分量幅度或相位为纵坐标，画出幅频和相频的变化规律，称为信号的**频谱图**



# 典型周期信号的Fourier级数展开 (1-1)



## (1) 正弦信号 $x(t) = \sin \omega_0 t$

方法一：采用分析式

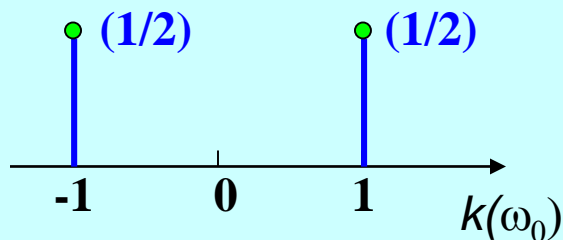
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

方法二：直接展开 $\mathbf{x(t)}$ ，确定 $\{\mathbf{a_k}\}$

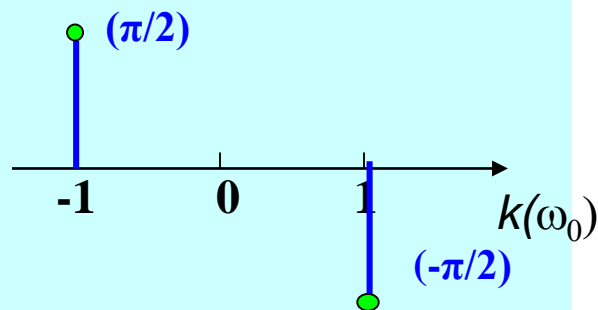
$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{2j} & k=1 \\ a_{-1} = -\frac{1}{2j} & k=-1 \\ a_k = 0 & |k| \neq 1 \end{array} \right.$$

$\{a_k\}$ 的幅度谱 $|a_k|$



$\{a_k\}$ 的相位谱 $\theta_k$

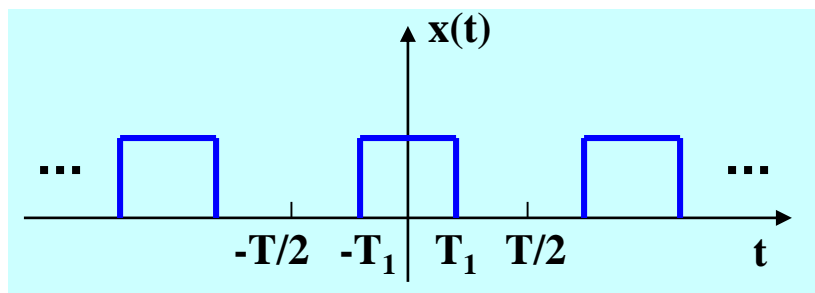




# 典型周期信号的Fourier级数展开 (2-1)



## (2) 周期方波



在一个周期内定义:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

基波周期为  $T_0 = T$

基波频率  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

当  $k=0$  时

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1 dt = \frac{2T_1}{T} \quad \text{— 占空比 (直流分量)}$$

当  $k \neq 0$  时

例  $T=4T_1$ , 占空比:  $a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{2T_1}{4T_1} = \frac{1}{2}$  (一周内一半为1, 一半为0)

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}}{-jk\omega_0} \\ &= \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad a_k \text{ 为实数} \quad \text{— 展开后项数无限} \end{aligned}$$

$\omega_0 T = 2\pi$

**Fourier级数系数以  $1/k$  规律收敛**



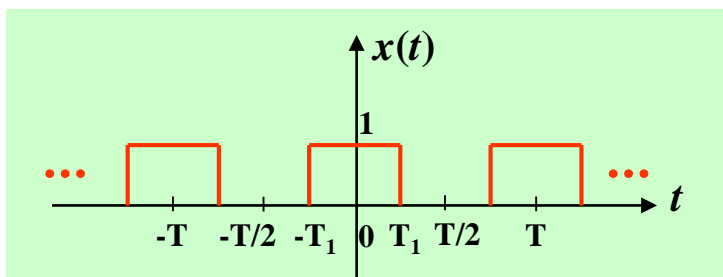


# 典型周期信号的Fourier级数展开 (2-2)



## (2) 周期方波

### 1) $T=4T_1$



占空比:

$$a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2T_1}$$



$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

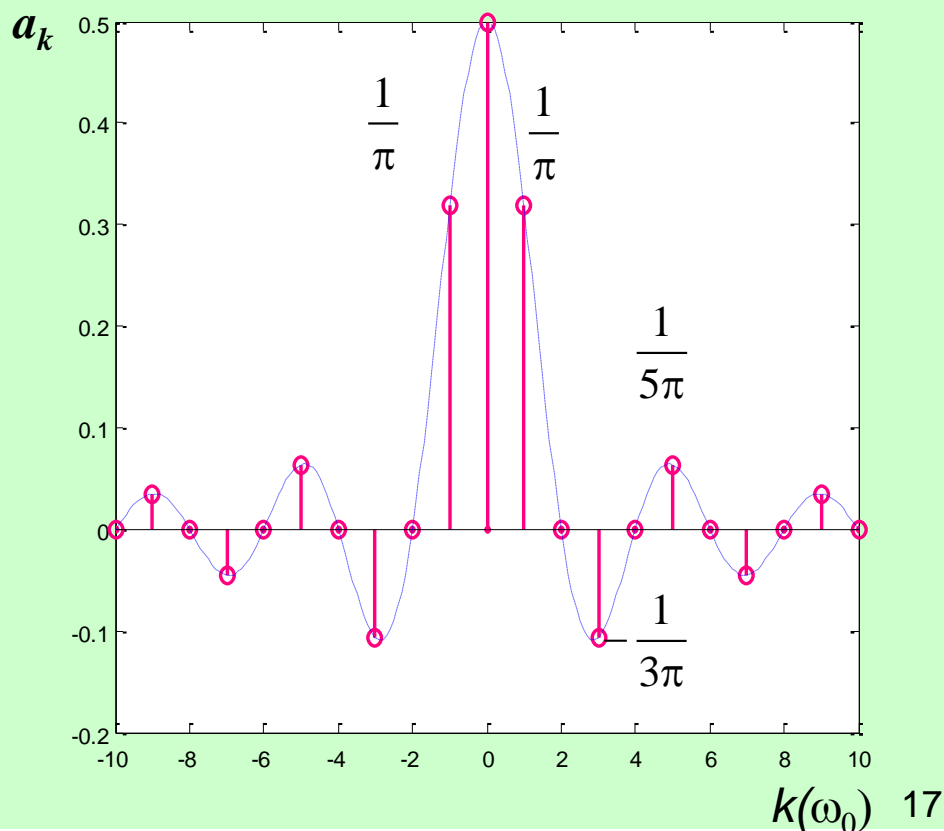
时域信号 $x(t)$ :实、偶



频谱 $a_k$ :实、偶

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < 4T_1/2 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$





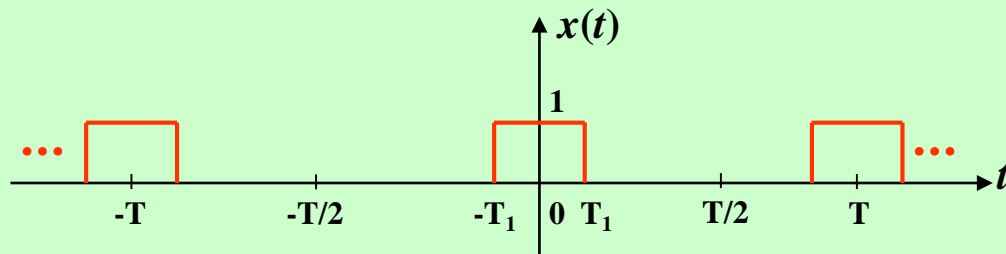
# 典型周期信号的Fourier级数展开 (2-3)

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

CSE

## (2) 周期方波

2)  $T = 8T_1$ ,  $T_1$ 值不变



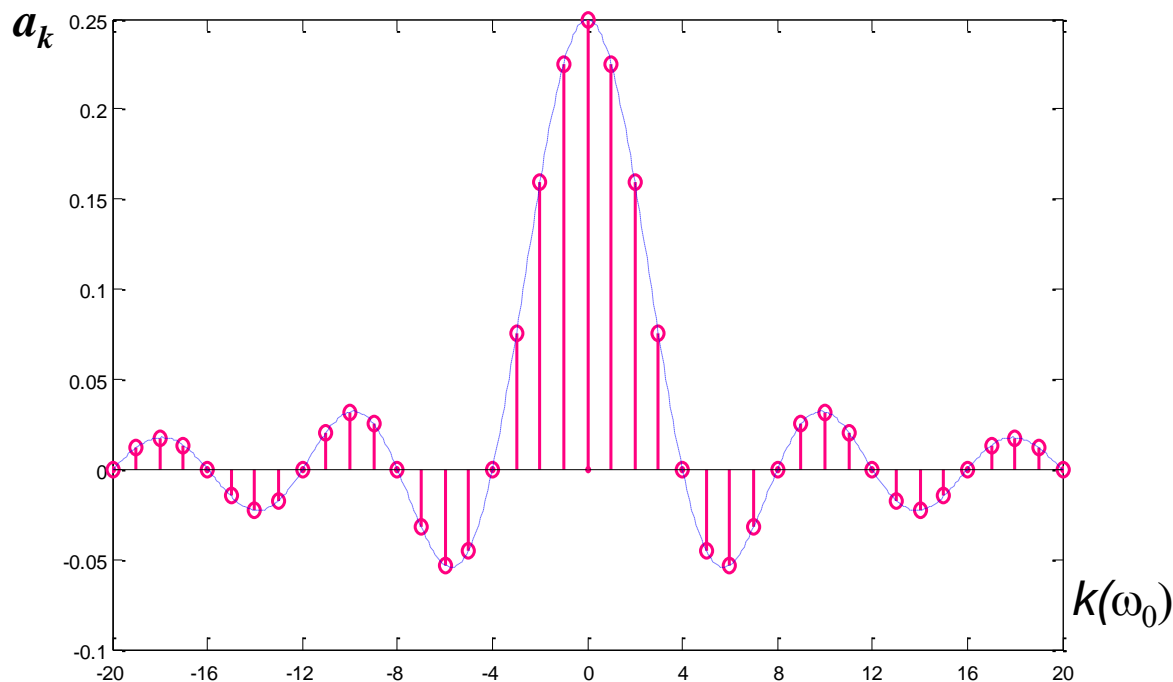
$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

占空比:

$$a_0 = \frac{2T_1}{8T_1} = \frac{1}{4}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4T_1}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi}$$





# 典型周期信号的Fourier级数展开 (2-4)

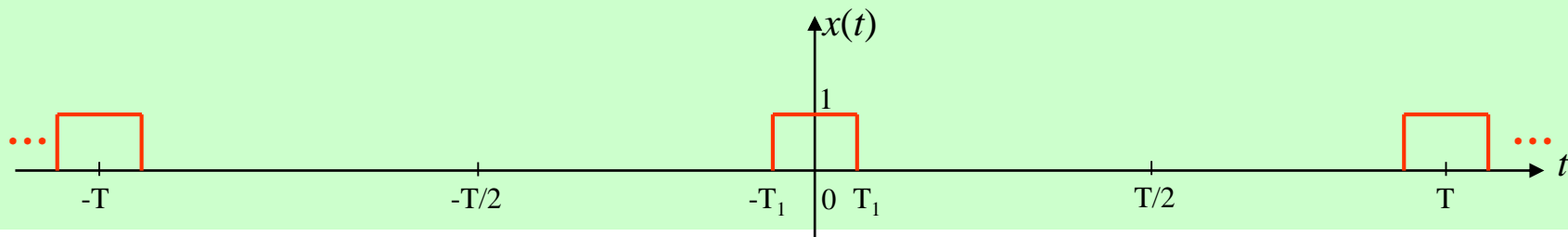
$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

CSE

## (2) 周期方波

3)  $T = 16T_1$ ,  $T_1$ 值不变

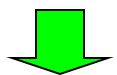
$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$



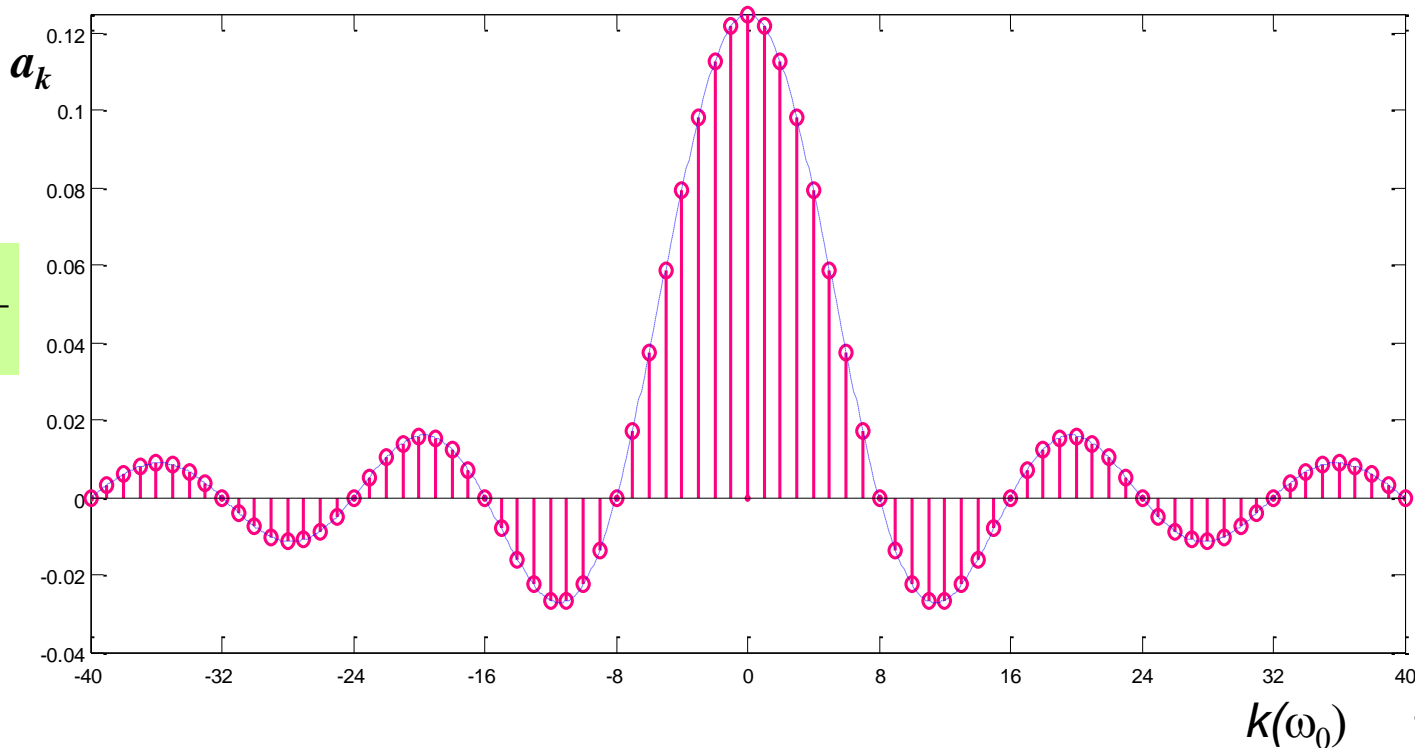
占空比:

$$a_0 = \frac{2T_1}{16T_1} = \frac{1}{8}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{8T_1}$$

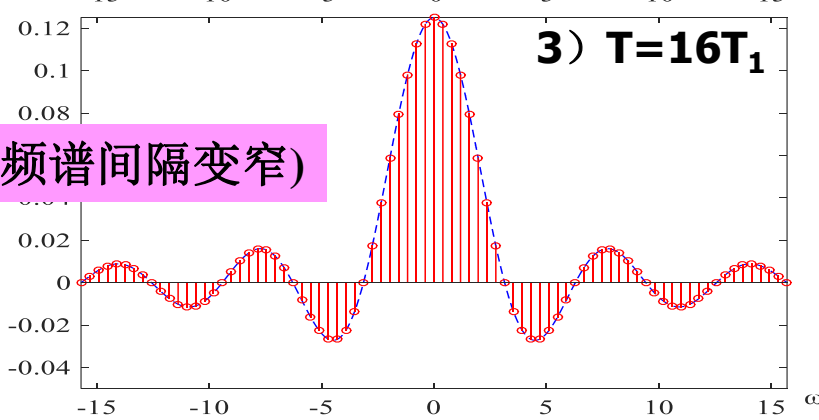
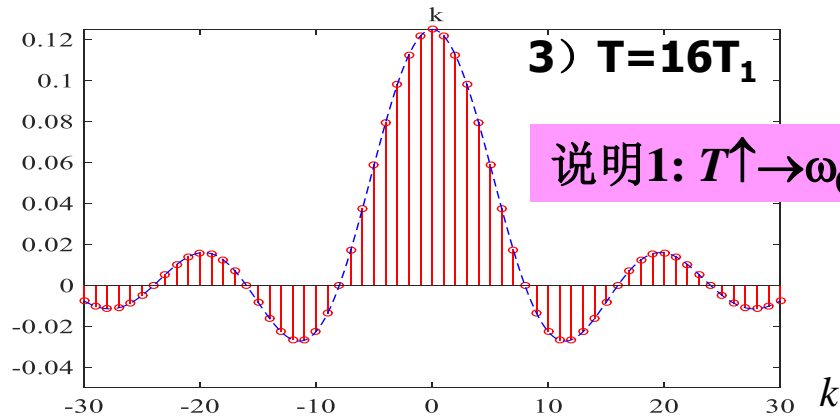
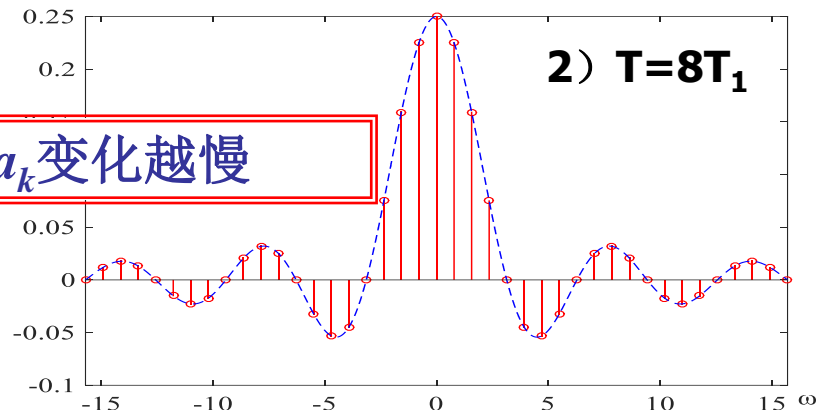
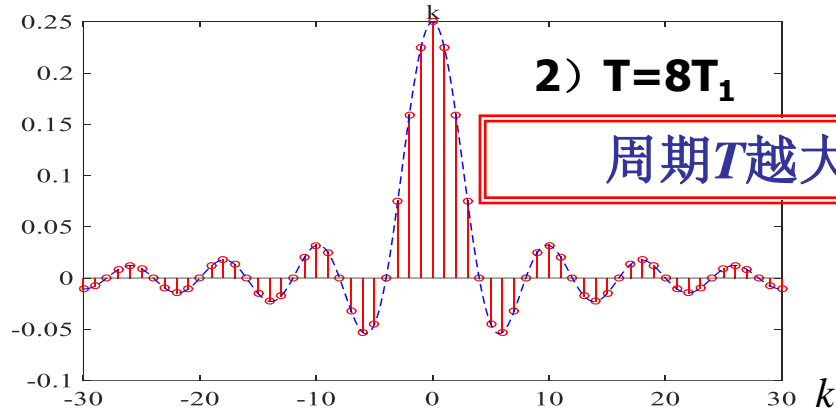
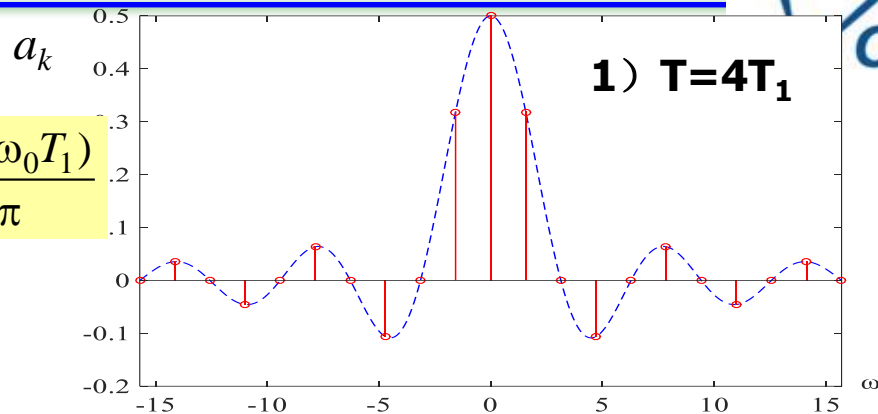
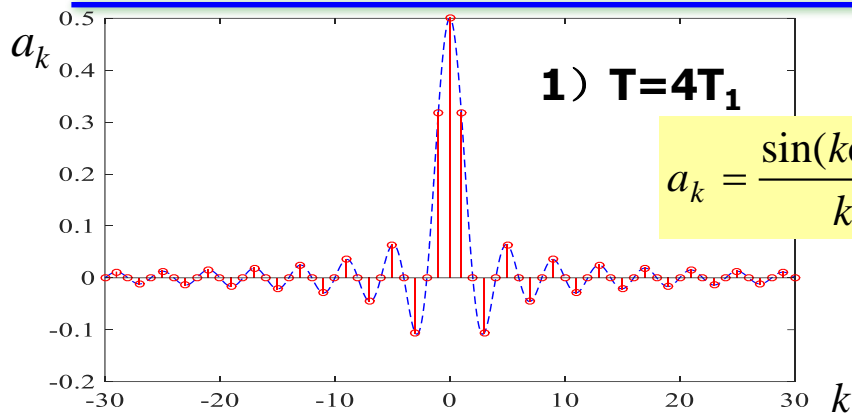


$$a_k = \frac{\sin(k\pi/8)}{k\pi}$$





# 典型周期信号的Fourier级数展开 (2-5)

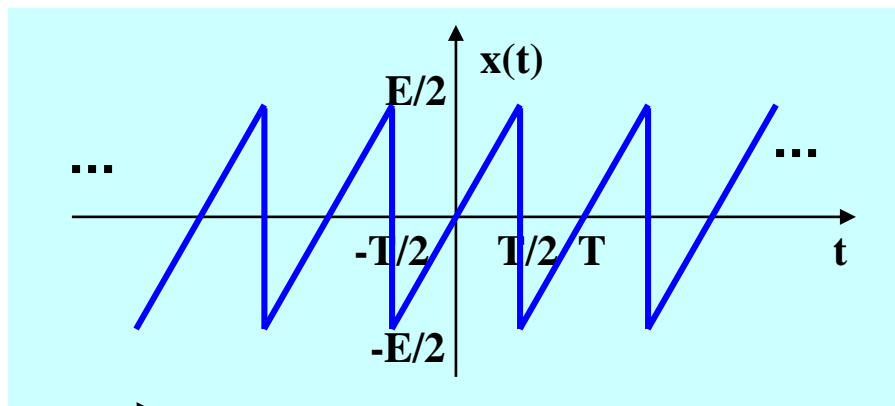




# 典型周期信号的Fourier级数展开 (3-1)



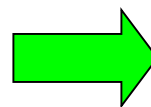
## (3) 周期锯齿脉冲信号



在一个周期内定义:

$$x(t) = \frac{E}{T}t \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

由于是奇信号 (关于原点对称)



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0$$

当  $k \neq 0$  时

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{E}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{E}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} (t \cos(k\omega_0 t) - jt \sin(k\omega_0 t)) dt$$

**$t \cos(ct)$  为奇函数  
积分为0**

$$= \frac{E}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} (-jt \sin(k\omega_0 t)) dt = \frac{E}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{jt}{k\omega_0} \right) d \cos(k\omega_0 t)$$

$$= \frac{jE}{T^2 k \omega_0} \cdot t \cos(k\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{jE}{T^2 k \omega_0} \int_{-T/2}^{T/2} (\cos(k\omega_0 t)) dt$$

$$= \frac{jE}{2\pi k} \cos(k\pi) - \frac{jE}{T^2 k^2 \omega_0^2} \sin(k\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{jE}{2\pi k} (-1)^k$$

时域信号: 实、奇



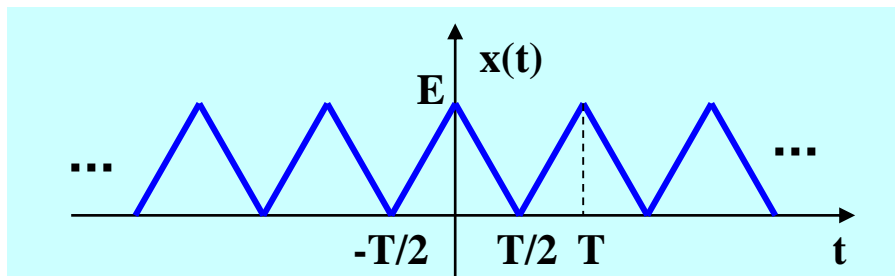
频谱: 纯虚、奇

**Fourier级数系数以  $1/k$  规律收敛**



# 典型周期信号的Fourier级数展开 (4、5)

## (4) 周期对称三角脉冲信号



在一个周期内

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2E}{T}t + E & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ -\frac{2E}{T}t + E & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{E}{2} Sa^2\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

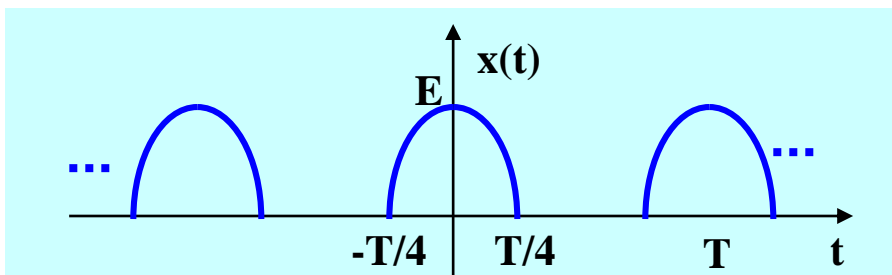
**FS系数以 $1/k^2$ 规律收敛**

时域信号: 实、偶



频谱: 实、偶

## (5) 周期半波余弦信号



在一个周期内

$$x(t) = \begin{cases} E \cos \omega_0 t & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

**FS系数以 $1/k^2$ 规律收敛**

$$a_k = \frac{E}{(1-k^2)\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$



# 典型周期信号的Fourier级数展开 (6)

## (6) 周期冲激串信号

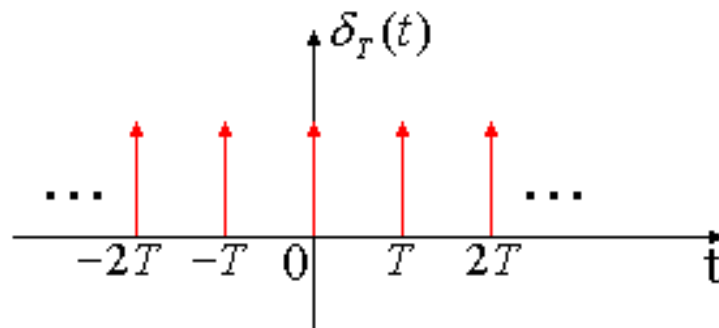
$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

例3-5 求图示周期冲激串  $\delta_T(t)$  的FS。

解:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



时域信号:实、偶



频谱:实、偶

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$



# 周期信号的频谱特性



## 频谱的物理概念

### 幅度频谱和相位频谱

Q: 如何解释负频率?

负频率并不存在一个有物理意义的概念与之对应。当 $x(t)$ 是一个实信号时,  $e^{jk\omega_0 t}$  项和  $e^{-jk\omega_0 t}$  项的线性组合构成一个频率为  $k\omega_0$  的正弦信号。

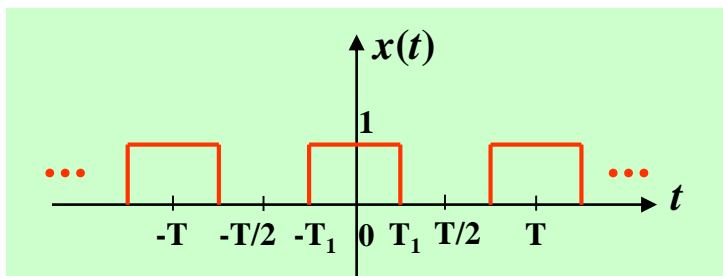




# 周期信号的频谱特性



## 周期方波



### 1) $T=4T_1$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < 4T_1/2 \end{cases}$$

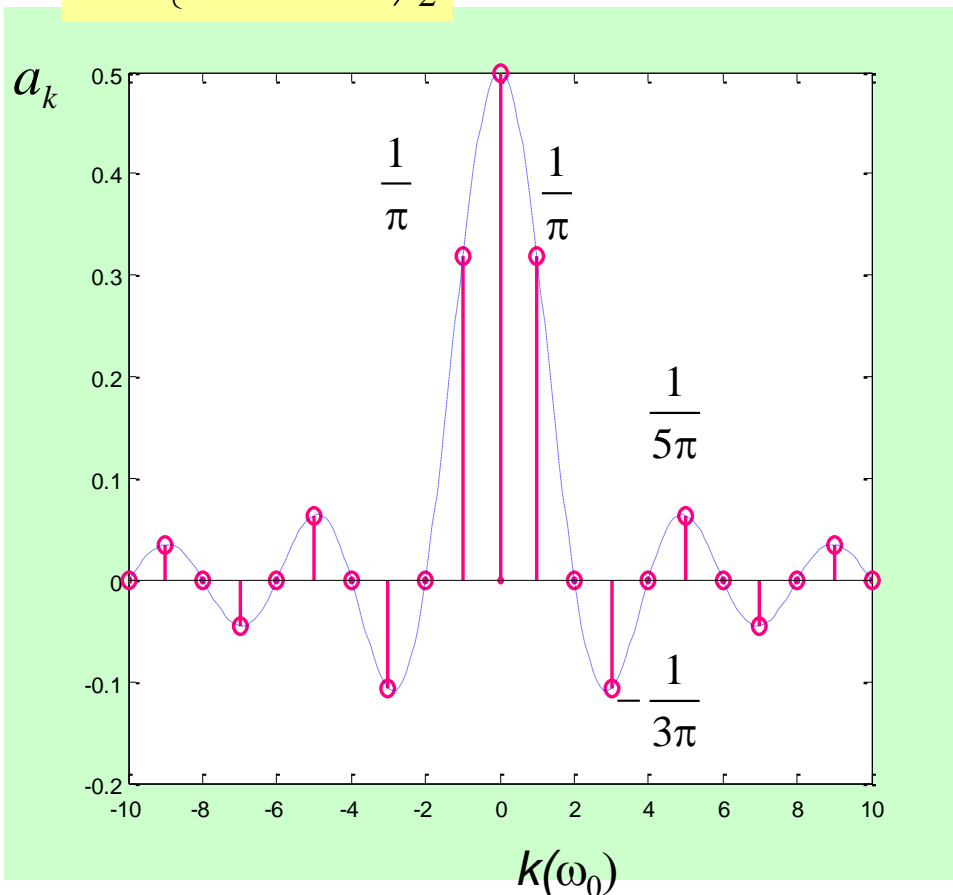
$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

### ① 离散性和谐波性

所有周期信号的频谱都是由间隔为  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  的谱线组成。

周期信号只包含直流分量、基波分量和各次谐波分量。

信号的周期决定了离散频谱的谱线间隔大小， $T_0$  越大，谱线越密。



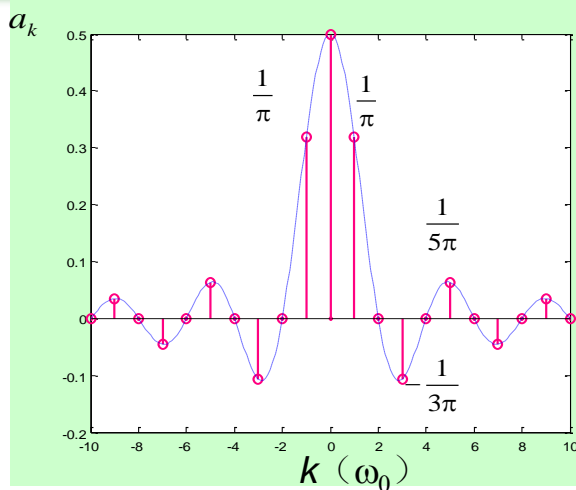
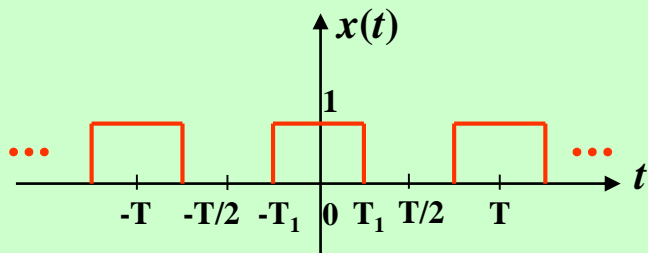
Q:  $T_0$  趋向于无穷时意味着什么?



# 周期信号的频谱特性



## 周期方波



主要能量在  
第一过零点内

在允许一定失真时，只需传送带宽内各频率分量就行；当信号通过系统时，要求系统带宽与信号的带宽匹配，若系统的带宽小于信号的带宽，信号中包含的一部分能量就不能顺利通过系统

## ② 幅度衰减特性(收敛性)

**Q1:** 各个例子的幅度衰减速度为什么不同？ $1$ ,  $1/k$ ,  $1/k^2$

$x(t)$  前  $n-1$  阶导数连续， $n$  阶导数不连续，则幅度谱按  $1/k^{n+1}$  的速度衰减。

频谱的幅度表示了周期信号中各频率分量的大小。

如果  $x(t)$  是一个平滑函数，函数值变化较缓慢，合成这样的信号需要变化缓慢的(低频)正弦波及少量变化急剧的(高频)正弦波，幅度谱将随频率的增加快速衰减。

如果  $x(t)$  不连续，需要更多的高频分量，幅度谱衰减速度相对变慢



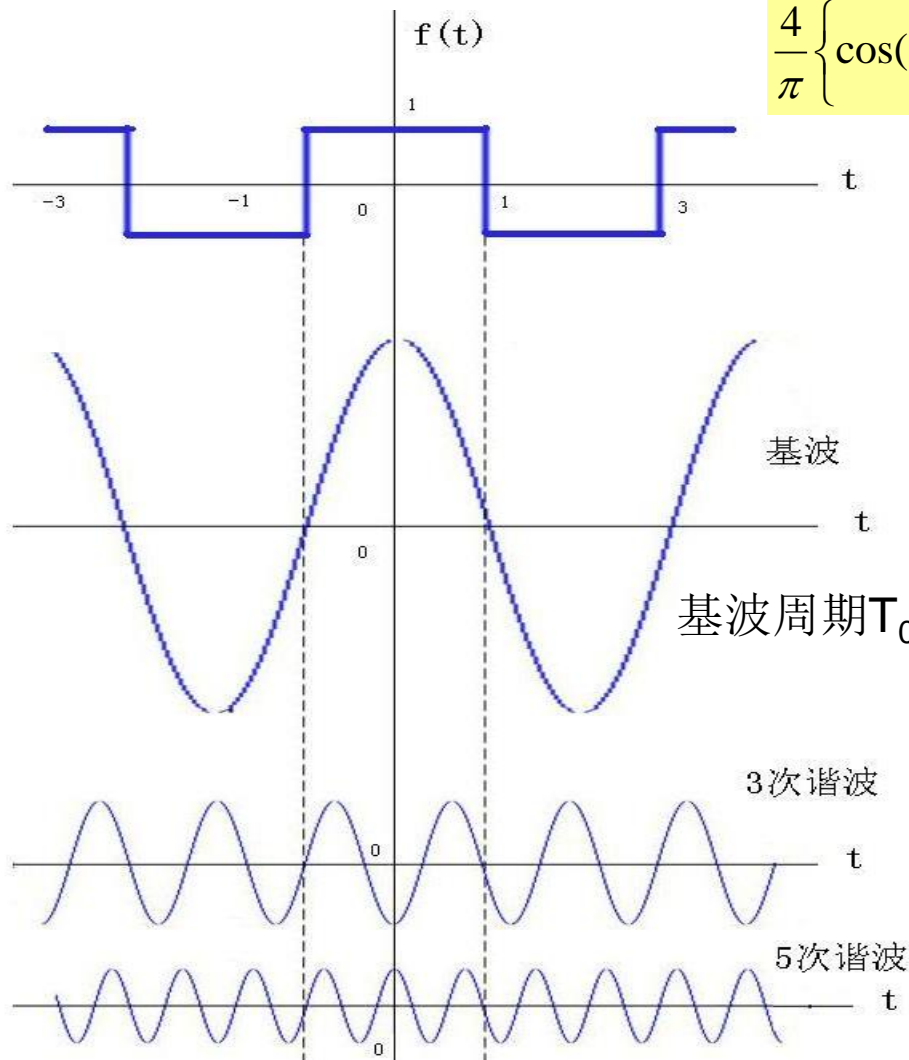
# 周期信号的频谱特性



## ③ 相位谱的作用

$$f(t) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} Sa(n\pi/2)e^{jn\pi} =$$

$$\frac{4}{\pi} \left\{ \cos(0.5\pi t) + \frac{1}{3} \cos(1.5\pi t + \pi) + \frac{1}{5} \cos(2.5\pi t) + \dots \right\}$$



相位谱的作用使合成的信号在不连续点有瞬时的跳变。

相位谱和幅度谱在确定信号波形时起着同等重要作用。



### 3、周期信号的功率分配



➤ **P**为周期信号的平均功率

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt$$

➤ 将  $x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$  代入，有

$$p = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \right]^2 dt = \left( \frac{A_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2$$

表明周期信号在时域的平均功率等于信号所包含的直流、基波及各次谐波的平均功率之和，反映了周期信号的平均功率对离散频率的分配关系，称为功率信号的**帕斯瓦尔公式**



# 4、周期信号的傅立叶级数的收敛与近似

## 狄里赫利收敛条件

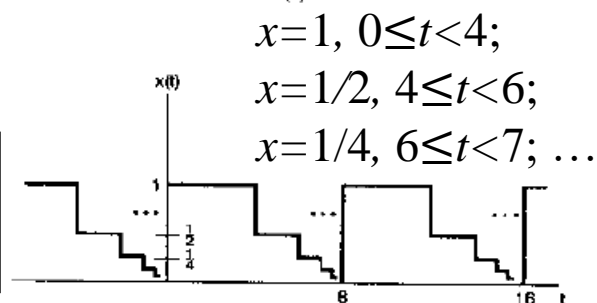
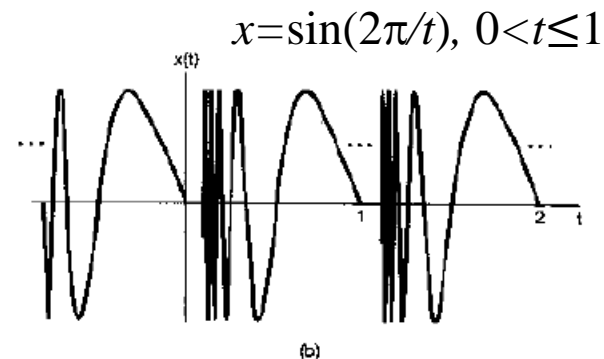
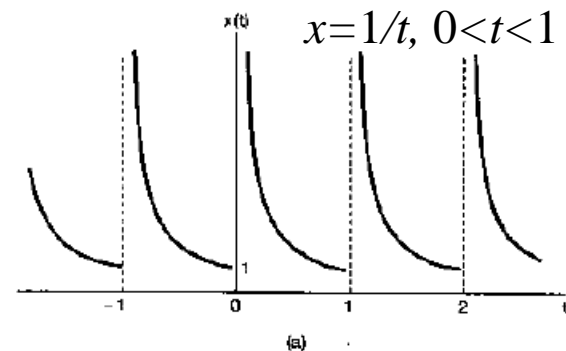
条件1: 在任何周期内,  $\mathbf{x(t)}$  必须绝对可积 (保证每一个  $\mathbf{a_k}$  都是有限值), 即

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

条件2: 在任意单个周期内,  $\mathbf{x(t)}$  的最大值和最小值的数目有限, 即在任何有限间隔内,  $\mathbf{x(t)}$  具有有限个起伏变化。——一个周期内极限点有限。

条件3: 在  $\mathbf{x(t)}$  的任何有限区间内, 只有有限个不连续点, 而且在这些不连续点上的函数是有限值——一个周期内间断点有限。

不满足狄里赫利条件的信号在自然界属于较反常的信号, 在实际应用中不会出现。



能保证除了在  $\mathbf{x(t)}$  不连续的、孤立的  $\mathbf{t}$  值外,  $\mathbf{x(t)}$  等于它的FS表示;  
而在那些不连续点上, FS收敛于不连续点两边值的平均值(均方收敛)。



## 4、周期信号的傅立叶级数的收敛与近似



**一般情况下，一个周期信号是由无穷多项正弦型信号（直流、基波及各项谐波）组合而成，换言之，一般情况下，无穷多项正弦型信号的和才能完全逼近一个周期信号。**

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

**如果采用有限项级数表示周期信号，势必产生表示误差**



## 4、周期信号的傅立叶级数的收敛与近似



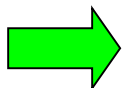
**例** 考察图示的周期方波信号 $x(t)$ 的收敛性。

**解：** 参见前面周期方波的FS展开

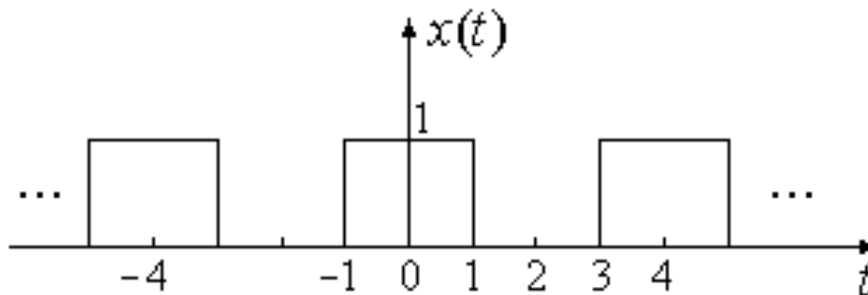
$$1) T=4T_1$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$



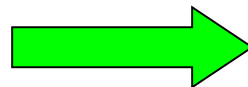
$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$



$$a_0 = \frac{1}{2}$$

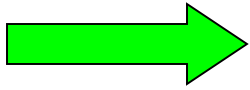
$$a_{\pm 1} = \frac{1}{\pi}; \quad a_{\pm 3} = -\frac{1}{3\pi}; \quad a_{\pm 5} = \frac{1}{5\pi}; \dots$$

$$\text{有限项FS: } x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$





## 4、周期信号的傅立叶级数的收敛与近似

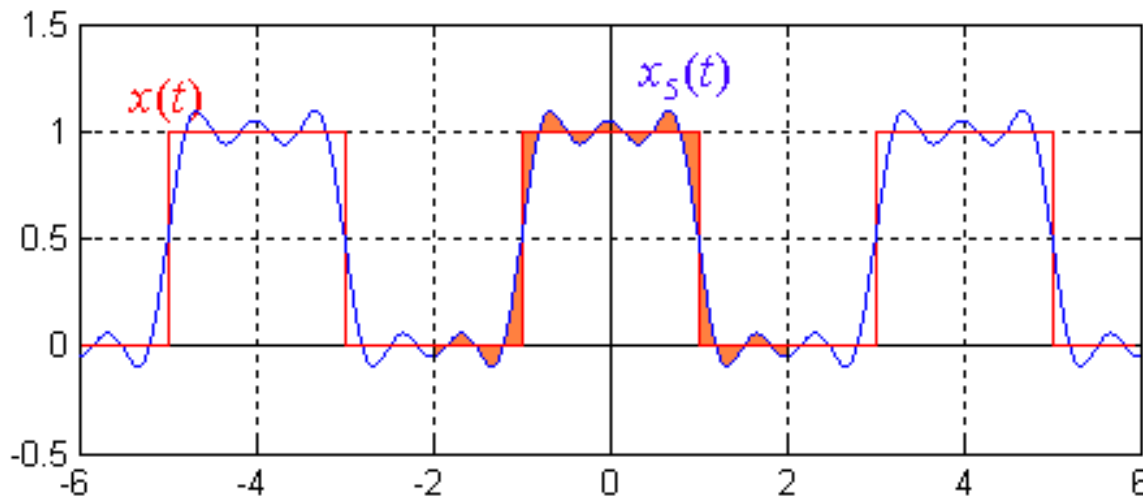


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

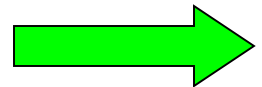
$$x_1(t) = \frac{1}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$$x_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$



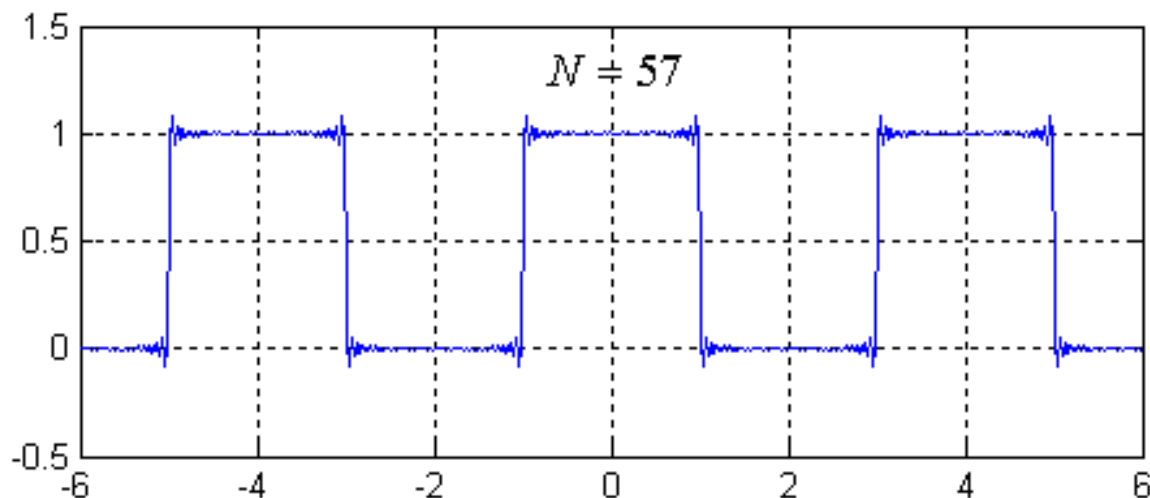
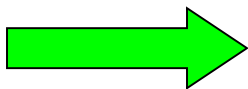
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_T |x_N(t) - x(t)| dt = 0$$







## 4、周期信号的傅立叶级数的收敛与近似



吉布斯现象：

用**Fourier**级数前**N**次谐波近似周期方波，在信号间断点两侧总存在起伏的高频信号和上冲超量，随着**N**的增大，起伏和超量向间断点处压缩、靠近，但不会消失。



## 4、周期信号的傅立叶级数的收敛与近似



关于 $x_N(t)$ 的收敛方式的结论:

- (1) 当 $N \rightarrow \infty$ 时,  $x_N(t)$ 均方收敛于 $x(t)$
- (2) 除去 $x(t)$ 的间断点, 当 $N \rightarrow \infty$ 时,  $x_N(t)$ 处处收敛于 $x(t)$
- (3) 在 $x(t)$ 的间断点,  $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t) \neq x(t)$ , 吉布斯现象



## 二、非周期信号的频谱分析



- 从傅立叶级数到傅立叶变换
- 常见非奇异信号的频谱
- 奇异信号的频谱
- 周期信号的傅立叶变换



# 1、从傅立叶级数到傅立叶变换



周期信号（周期 $T_0$ ）

$T_0 \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0$

非周期信号

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

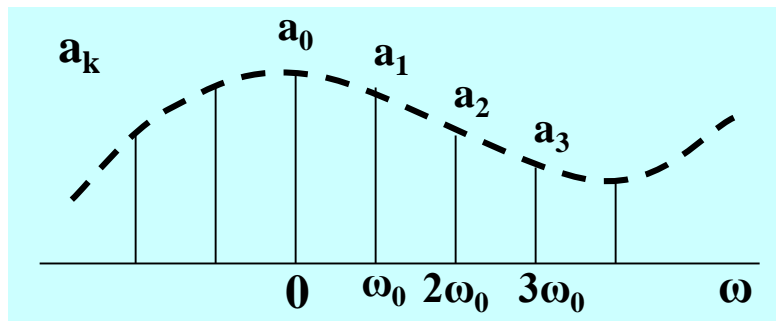
$e^{jk\omega_0 t}$

在频率上无限靠近

$a_k$ 的 $\omega$ 域由离散变为连续

傅里叶变换

方法：

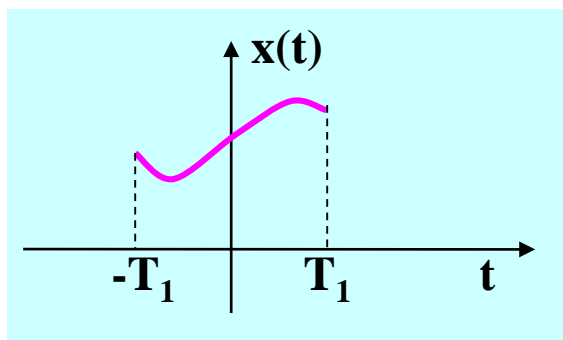


FT—Fourier Transform

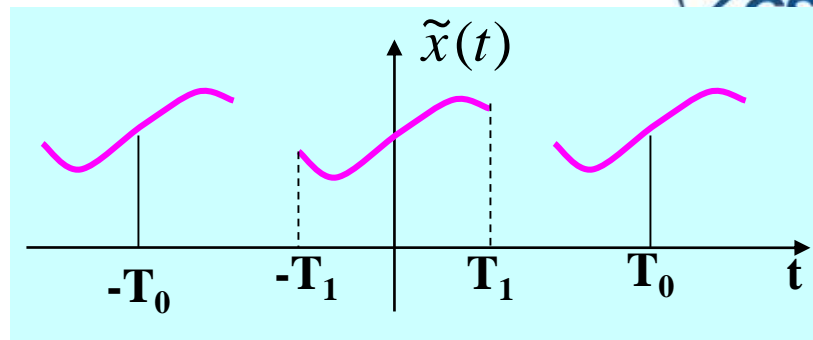
将非周期信号看成周期信号的 $T_0 \rightarrow \infty$ 时的极限，来研究 $T_0 \rightarrow \infty$ 时的周期信号的傅里叶级数表示式的极限情况。



# (1) 非周期信号的Fourier变换的导出



周期延拓



有限长度非周期信号  $x(t) = 0 \text{ if } |t| > T_1$

周期信号

由周期信号的**Fourier**级数:  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$   $T_0 \rightarrow \infty, \tilde{x}(t) = x(t) \forall t < \infty$   
 $\tilde{x}(t) = x(t) \text{ for } |t| < \frac{T_0}{2}, \text{ and } x(t) = 0 \text{ for } |t| \geq \frac{T_0}{2},$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

定义 $T_0 a_k$ 的包络线:

$$T_0 a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$



# (1) 非周期信号的Fourier变换的导出



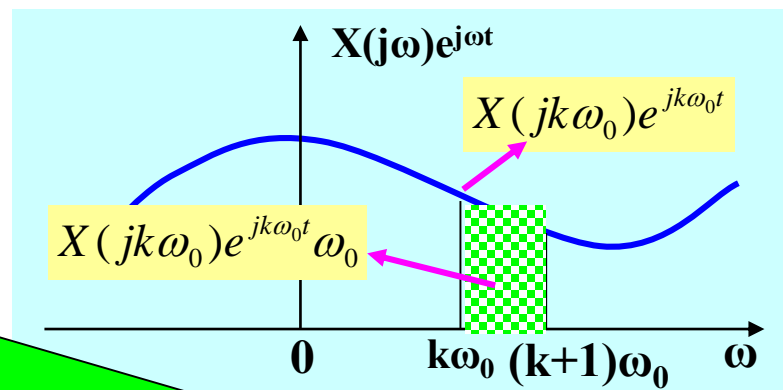
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$x(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

非周期信号的Fourier变换:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



**x(t)**的频谱；不同频率复指数信号组成成分的相对度量

**x(t)**的傅里叶变换（频谱密度）

复指数信号的线性组合；

复指数信号出现在连续频率上

加权“幅度”为 $X(j\omega)d\omega/(2\pi)$ （绝对度量）



# (1) 非周期信号的Fourier变换的导出



记:  $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$   $X(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$   $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\theta(j\omega)}$

非周期信号      幅度谱      相位谱

$\{a_k\}$ 与 $X(j\omega)$ 的区别:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

**\*1 对周期信号:** 复指数信号出现在成谐波关系的一组离散点 $k\omega_0$ 上, 复指数信号的幅度为 $\{a_k\}$ ——绝对复幅度。——FS

**\*2 对非周期信号:** 复指数信号出现在连续频率点 $\omega$ 上, 其绝对复幅度为 $X(j\omega)d\omega/(2\pi)$ , 相对复幅度为 $X(j\omega)$ 。——FT

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

周期信号

FS:

$$x(t) \xrightarrow{F_s} a_k$$

$$a_k = |a_k| e^{j\theta_k}$$



$|a_k|$ ——幅度谱系数

$\theta_k$ ——相位谱系数



# 连续时间傅里叶变换的收敛



与傅里叶级数收敛条件类似，连续时间傅里叶变换收敛的条件为：

**收敛条件1：** 若 $\mathbf{x(t)}$ 能量有限， $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$  则 $\mathbf{x(t)}$ 与  $\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$  在能量上无差别，但不能保证在时域上处处相等。

**收敛条件2：** 狄里赫利条件

能保证除了在 $\mathbf{x(t)}$ 不连续的、孤立的 $\mathbf{t}$ 值外， $\mathbf{x(t)}$ 等于它的FS表示；在那些不连续点上，FS收敛于不连续点两边值的平均值(均方收敛)。

1.  $\mathbf{x(t)}$ 绝对可积

2. 在任何有限区间内， $\mathbf{x(t)}$ 只有有限个最大值和最小值

3. 在任何有限区间内， $\mathbf{x(t)}$ 只有有限个不连续点，并且在每个不连续点上信号都必须是有限值





# 连续时间傅里叶变换的收敛



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$(3) x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{称为周期信号 } x(t) \text{ 的有限项FS}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

有限频宽来近似原信号:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{+W} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

吉布斯现象?



## 2、常见非奇异信号的频谱



- 矩形脉冲信号
- 单边指数信号
- 双边指数信号
- 双边奇指数信号



# 常见非奇异信号的傅里叶变换对 (1-1)

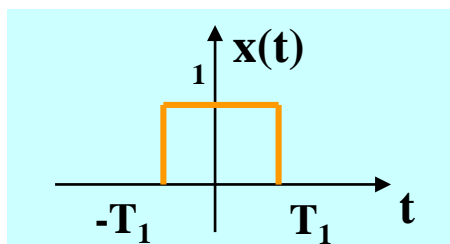
$$\sin ct = \frac{\sin \pi t}{\pi}$$

抽样函数

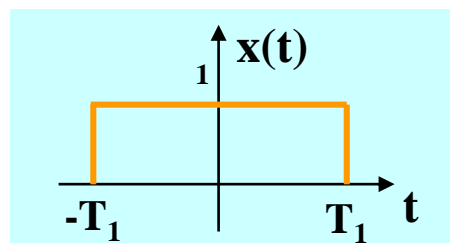
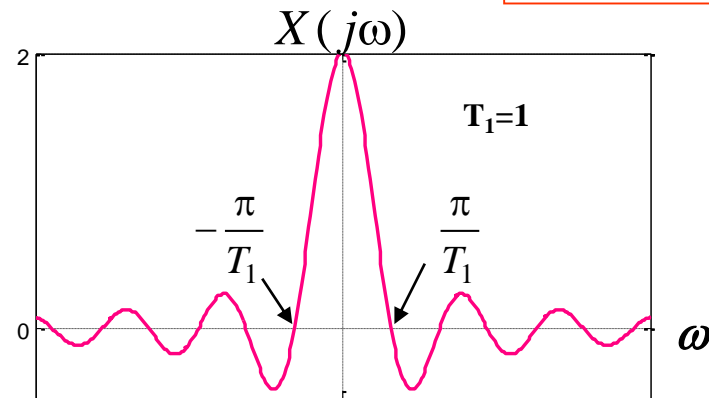
(1) 矩形窗函数  $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

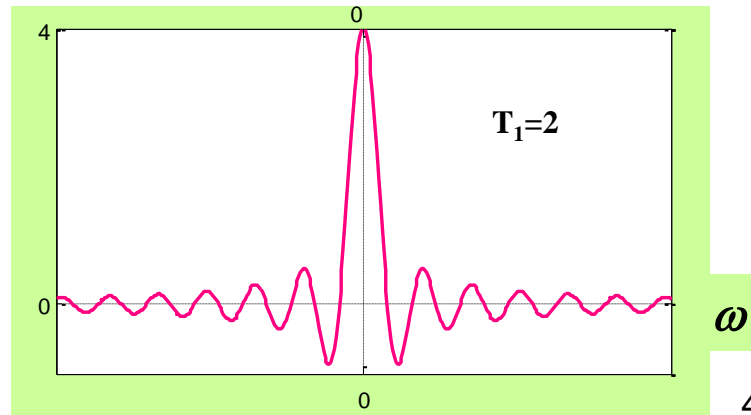
解:  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$



实偶  $\xrightarrow{\text{FT}}$  实偶



$\xrightarrow{\text{FT}}$   
时域扩展, 频域压缩  
(互反关系?)



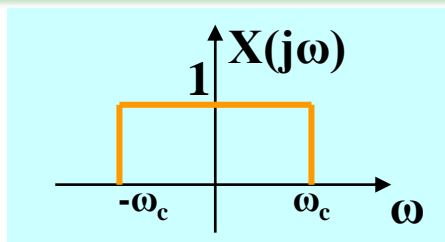


# 常见非奇异信号的傅里叶变换对 (1-2)



讨论: 若已知

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



求  $x(t)$ 。

$$\sin ct = \frac{\sin \pi t}{\pi}$$

抽样函数

抽样函数的频谱

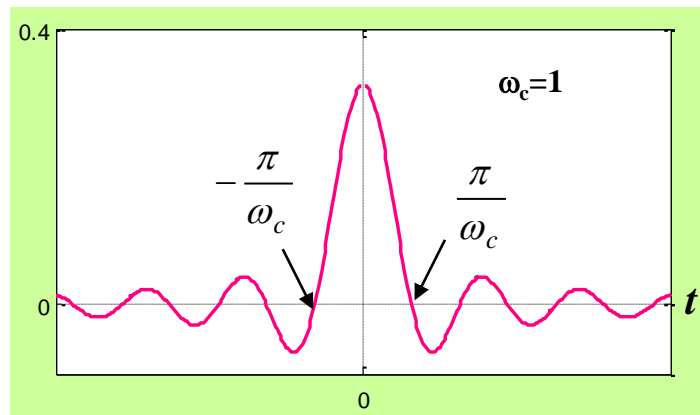
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\omega_c} \cos(\omega t) d\omega = \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} \Big|_0^{\omega_c} = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) = \frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\omega_c}{\pi} \sin c\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

对偶? 矩形波  $\longleftrightarrow$  Sinc(.)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \xleftrightarrow{F} 2T_1 \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$x(t)$





# 常见非奇异信号的傅里叶变换对 (2)



(2) 单边指数信号  $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$

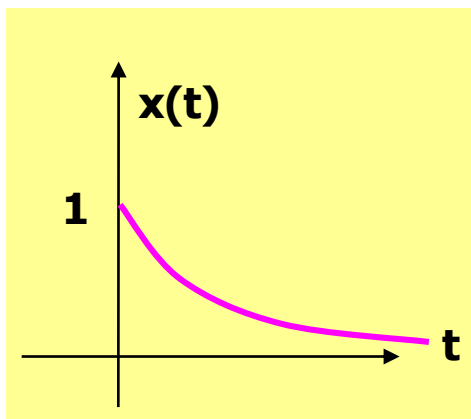
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

解: 
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

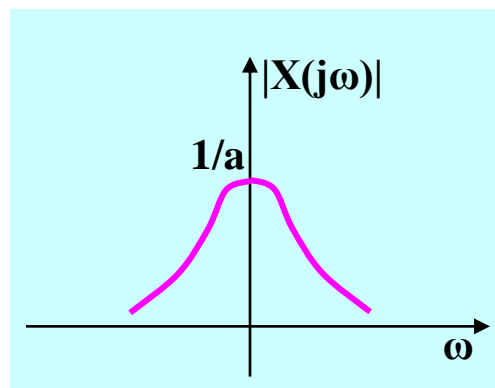
$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

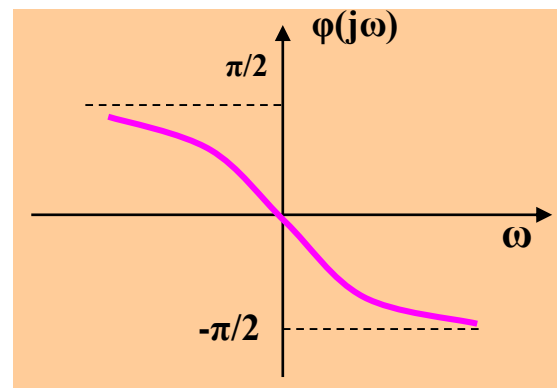
$$\theta(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



实信号



$|X(j\omega)|$  幅度谱偶对称



$\angle X(j\omega)$  相位谱奇对称

FS: 时域信号:实  $\longrightarrow$   $|a_k|$  偶,  $\angle a_k$  奇



# 常见非奇异信号的傅里叶变换对 (3)



(3) 双边指数信号  $x(t) = e^{-a|t|}$   $a > 0$

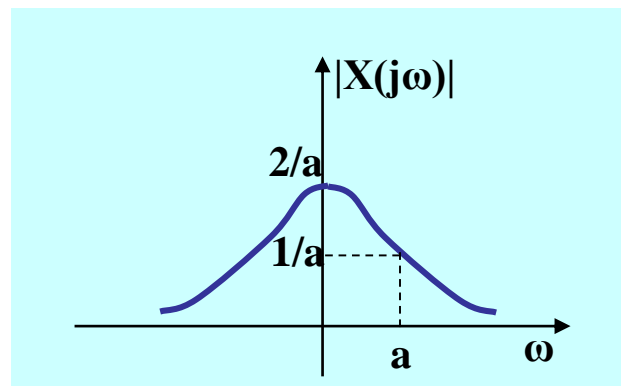
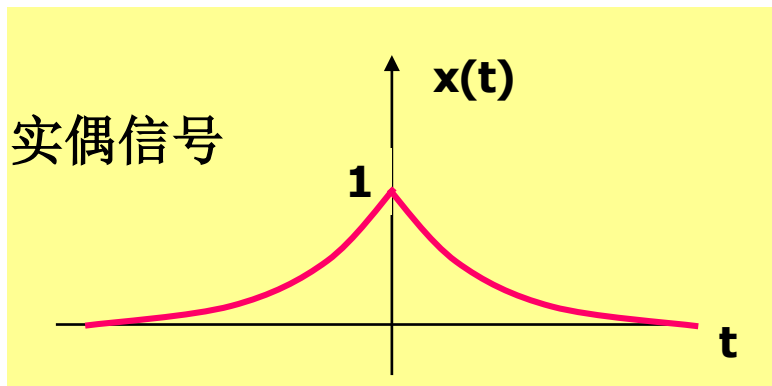
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

解: 
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad a > 0$$

实、偶信号  $\rightarrow$  实、偶函数



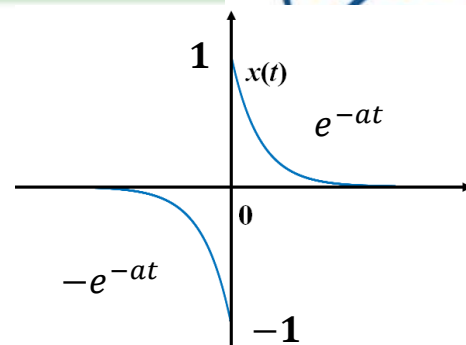
**FS:** 时域信号:实、偶  $\rightarrow$  频谱:实、偶



# 常见非奇异信号的傅里叶变换对 (4)

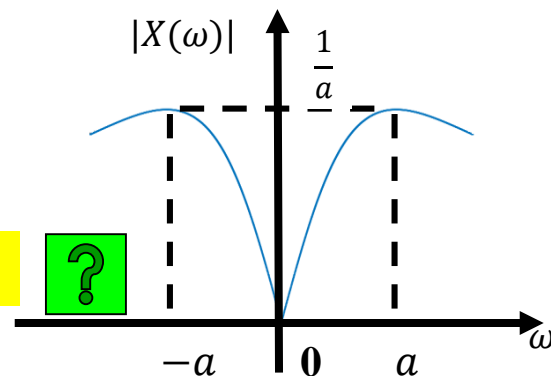
## (4) 双边奇指数信号

$$x(t) = \begin{cases} -e^{at} & t < 0, a > 0 \\ e^{-at} & t > 0, a > 0 \end{cases}$$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 (-e^{at} e^{-j\omega t}) dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

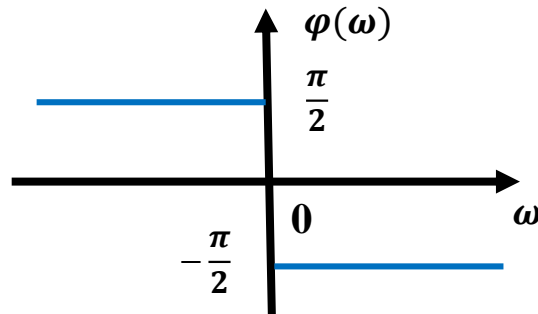
$$= -\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = -j \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2}$$



实、奇信号 → 纯虚频谱

幅频  $|X(\omega)| = \frac{2|\omega|}{a^2 + \omega^2}$

相频  $\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$





### 3、奇异信号的频谱



- 单位冲激信号
- 单位直流信号
- 单位冲激偶信号
- 符号函数信号
- 单位阶跃信号

往往不满足狄里赫利条件，通常用求极限的方法得到其频谱。





# 典型奇异信号的傅里叶变换对 (1)

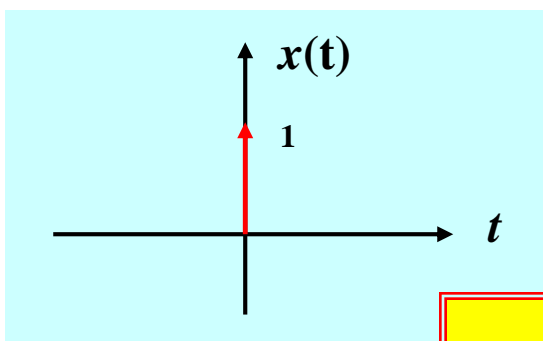


## (1) 单位冲激信号 $\delta(t)$

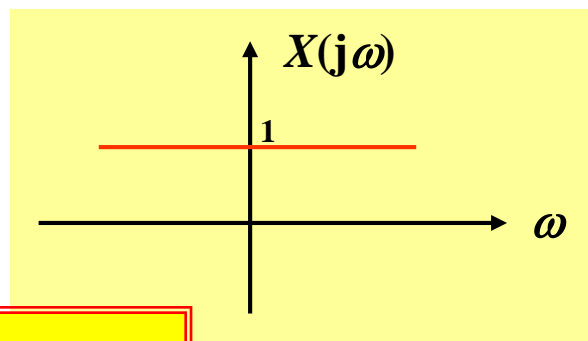
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

解:  $\because X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$



FT



讨论

$$X(j\omega) = \delta(\omega)$$

求  $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

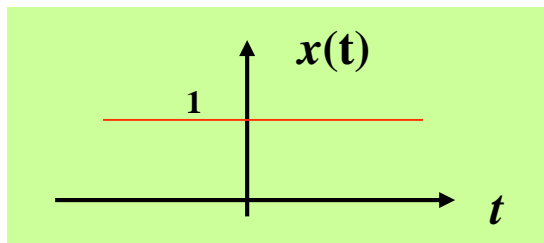
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

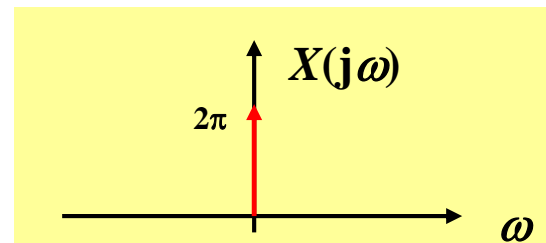
$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

对偶?

## (2) 单位直流信号



FT





## 典型奇异信号的傅里叶变换对 (2)



### (3) 单位冲激偶信号 $\delta'(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

微分性质

解:  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

$$\delta'(t) \xleftrightarrow{F} j\omega$$

$$x'(t) \xrightarrow{F} j\omega X(j\omega) \quad ?$$

**备注:** 上述过程说明, 不仅可以利用傅里叶变换式求  $X(j\omega)$ , 还可以利用傅里叶反变换式求  $X(j\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) \xrightarrow{F} P(j\omega)$$



# 典型奇异信号的傅里叶变换对 (3)



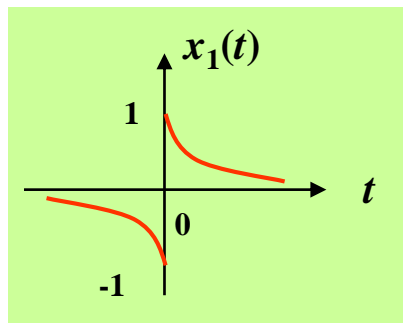
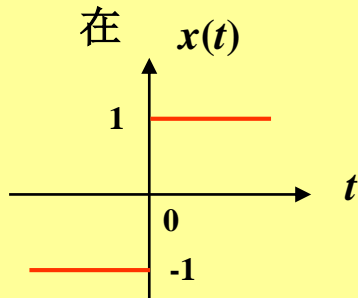
## (4) 符号函数sgn(t)

不满足绝对可积条件, 但FT存在

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a > 0, a \in \mathbb{R}$$

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^0 (-e^{at})e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{j\omega - a} + \frac{1}{j\omega + a} = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

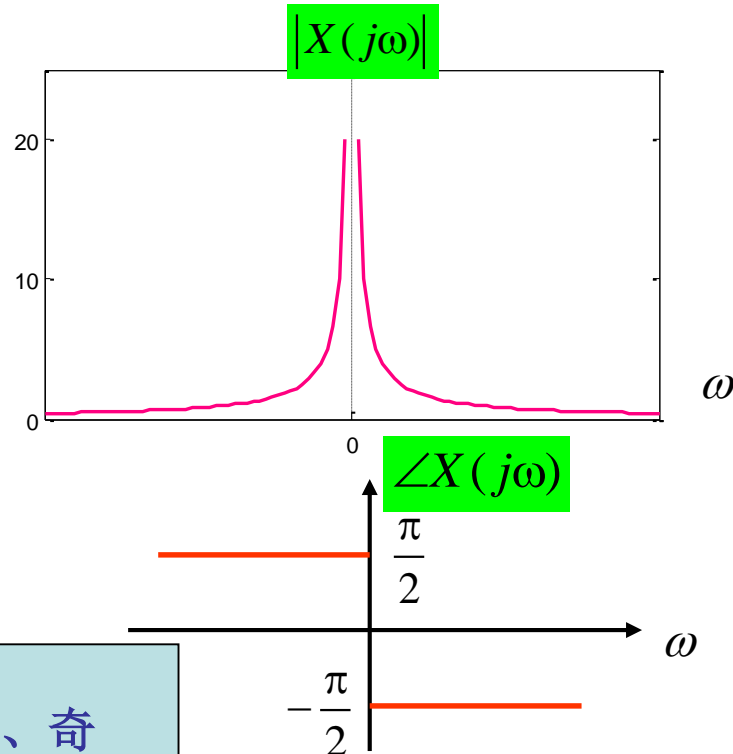


$$x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} x_1(t)$$

$$X(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} X_1(j\omega) = \frac{-2j\omega}{\omega^2} = \boxed{\frac{2}{j\omega}}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|}$$

$$\angle X(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$$



**FS:** 时域信号:实、奇  $\longrightarrow$  频谱:纯虚、奇



# 典型奇异信号的傅里叶变换对 (4)



## (5) 单位阶跃信号 $u(t)$

不满足绝对可积条件, 但FT存在

$$\because u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{F} \pi\delta(\omega)$$

$$\text{sgn}(t) \xrightarrow{F} \frac{2}{j\omega}$$

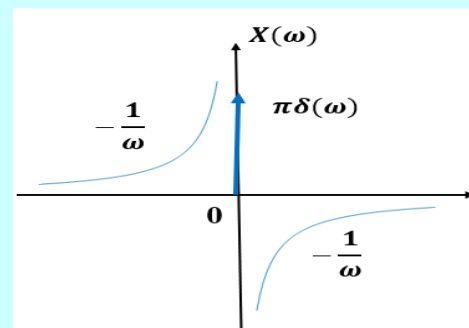
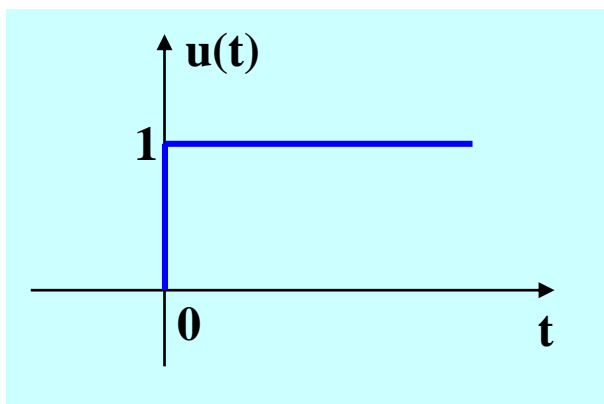


$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\text{sgn}(t) \xrightarrow{F} \frac{2}{j\omega}$$





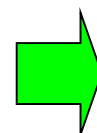
## 4、周期信号的傅立叶变换 (1)



周期信号不满足**FT**的收敛条件，但可以用复指数信号表示，所以周期信号的傅里叶变换存在，用冲激串信号表示，并使**FT**反变换收敛。

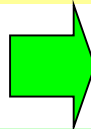
考虑：某一函数  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$



即：

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



$$a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (\text{频域为冲激函数的线性组合})$$

$\tilde{x}(t)$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad \text{—周期信号的FT公式}$$

结论：一个傅里叶级数系数为 **$\{a_k\}$** 的周期信号的傅里叶变换可以看成是成谐波关系的频率上的一串冲激串，且发生于第 **$k$** 次谐波频率 **$k\omega_0$** 上冲激函数的面积是 **$2\pi a_k$** 。



## 4、周期信号的傅立叶变换 (2)



例：正弦、余弦信号的频谱

解：

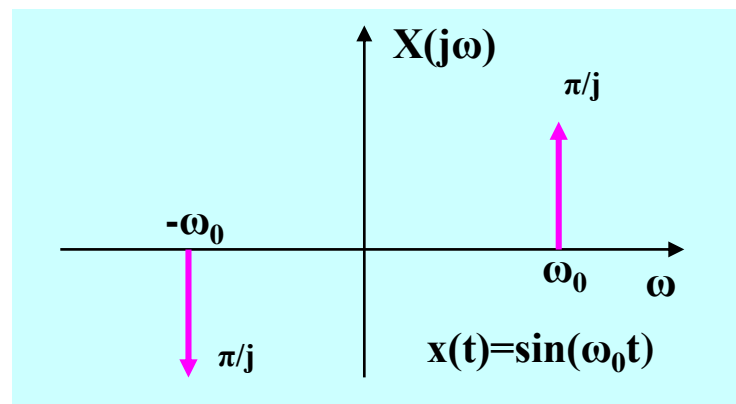
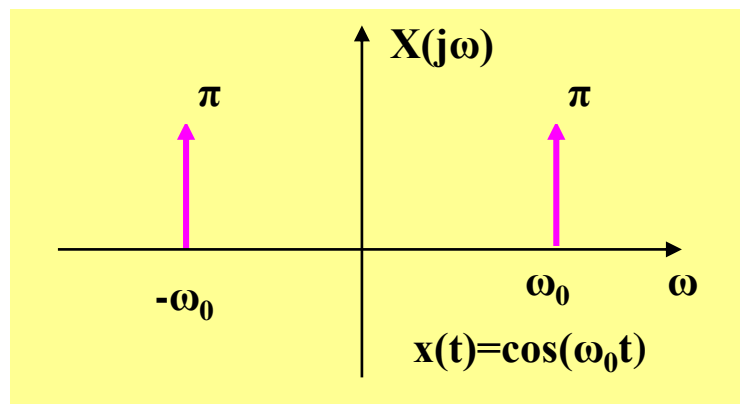
$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\text{已知: } e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin \omega_0 t \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



时域信号:实、偶  $\Rightarrow$  频谱:实、偶

时域信号:实、奇  $\Rightarrow$  频谱:纯虚、奇



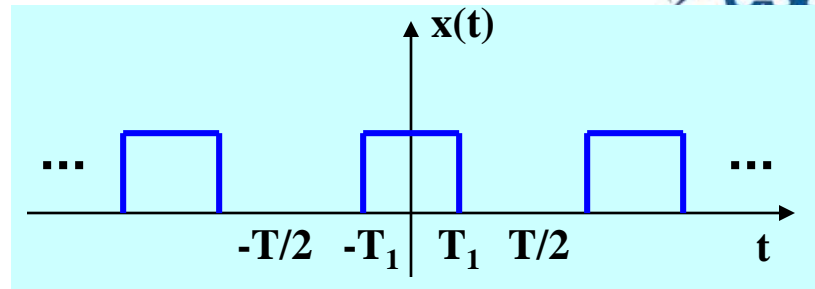
## 4、周期信号的傅立叶变换 (3)



例：求周期方波的Fourier变换.

解：Fourier级数系数 $a_k$

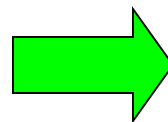
$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k} \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

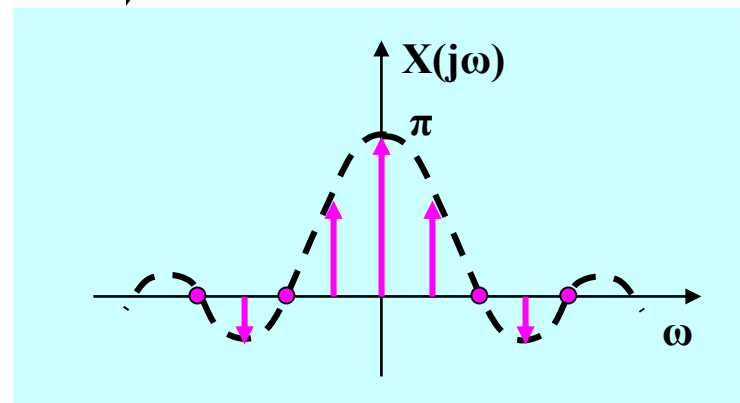
当 $T=4T_1$ 时

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\frac{\pi k}{2})}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$



$$X(j0) = \frac{2\sin(\frac{\pi k}{2})}{k} \delta(\omega) \bigg|_{k=0} = \frac{\pi \sin(\frac{\pi k}{2})}{\frac{\pi k}{2}} \delta(\omega) \bigg|_{k=0} = \pi \delta(\omega)$$

$$X(j\omega_0) = 2\sin(\frac{\pi}{2})\delta(\omega - \omega_0) = 2\delta(\omega - \omega_0)$$





## 4、周期信号的傅立叶变换 (4)



例：周期冲激串的**Fourier**变换

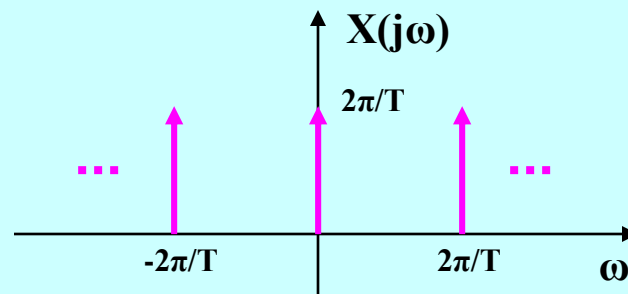
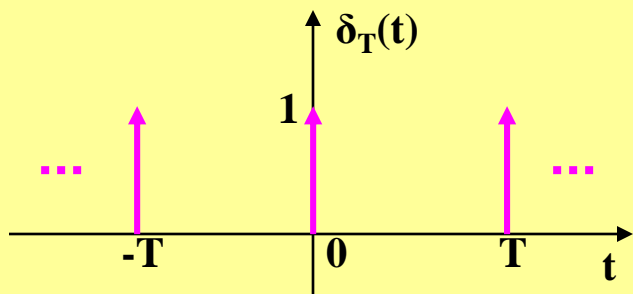
解：先求**Fourier**级数系数

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$



时域冲激时间间隔增大/减小  $\rightarrow$  频域冲激之间的间隔减小/增大  
即：时域和频域之间具有相反的关系





# 课后作业



## ➤ 作业： P99

–15

–22

–59

–61

## ➤ 预习内容：

–MATLAB软件

–傅立叶变换的性质