现代控制理论
Modern Control Theory

http://course.zju.edu.cn 学在浙大

第九章 Chapter 9

非线性系统分析

主要内容

- 简介
- Description Function（描述函数）
- Lyapunov（李亚普诺夫）稳定性分析

Lyapunov 稳定性分析

- Lyapunov意义下的稳定性问题
- 预备知识
- Lyapunov第一法（间接法）
- Lyapunov第二法（直接法）
- 线性系统的Lyapunov稳定性分析
- 克拉索夫斯基法

Lyapunov意义下的稳定性问题

自治系统及其平衡状态

没有外部输入的动态系统 $\dot{x} = f(x(t))$ 称为自治系统。

式中 x 为 n 维状态向量，$f(x, t)$ 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 t 的 n 维向量函数。

线性自治系统 $\dot{x} = Ax$ 由线性系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 取 $u(t) \equiv 0$ 得到。

若$x_e \in R^n$，满足$f(x_e) = 0$，称x_e为自治系统$\dot{x} = f(x)$的平衡状态或平衡点。

对于$\dot{x} = f(x)$，若初始状态取为平衡状态，即$x(t_0) = x_e \in R^n$，则状态轨迹$x(t) \equiv x_e$ 。

Lyapunov意义下的稳定性问题

自治系统及其平衡状态

若自治系统是线性定常的，即有 $f(x, t) = Ax$，则当A为非奇异矩阵时，系统存在一个唯一的平衡状态；当A为奇异矩阵时，系统将存在无穷多个平衡状态。

对于非线性系统，可有零个、一个或多个平衡状态，这些状态对应于系统的常值解（对所有 t，总存在 $x = x_e$）。

Lyapunov意义下的稳定性问题

李雅普诺夫意义下的稳定性定义

定义系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ **平衡状态** $\boldsymbol{x}_e$ **的** $\boldsymbol{H}$ **邻域**

$$S(H)=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in R^n,\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\right\|\le H\right\}$$

$S(\varepsilon)$表示以平衡状态为球心，以ε为半径的闭球域

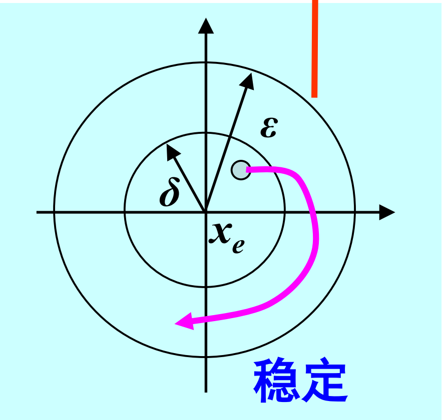
其中，H>0，$\|\cdot\|$ 为向量的 2 范数或欧几里德范数，即

$$\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e\right\|=\sqrt{(x_1-x_{1e})^2+(x_2-x_{2e})^2+\cdots+(x_n-x_{ne})^2}$$

(1) **$\boldsymbol{x}_e$是自治系统$\dot{x}=f(x)$的平衡状态，如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得始于$S(\delta)$的任意状态轨迹$x(t)$均在$S(\varepsilon)$内，则该系统的平衡点$\boldsymbol{x}_e$称为在李亚普诺夫意义下是稳定的。**

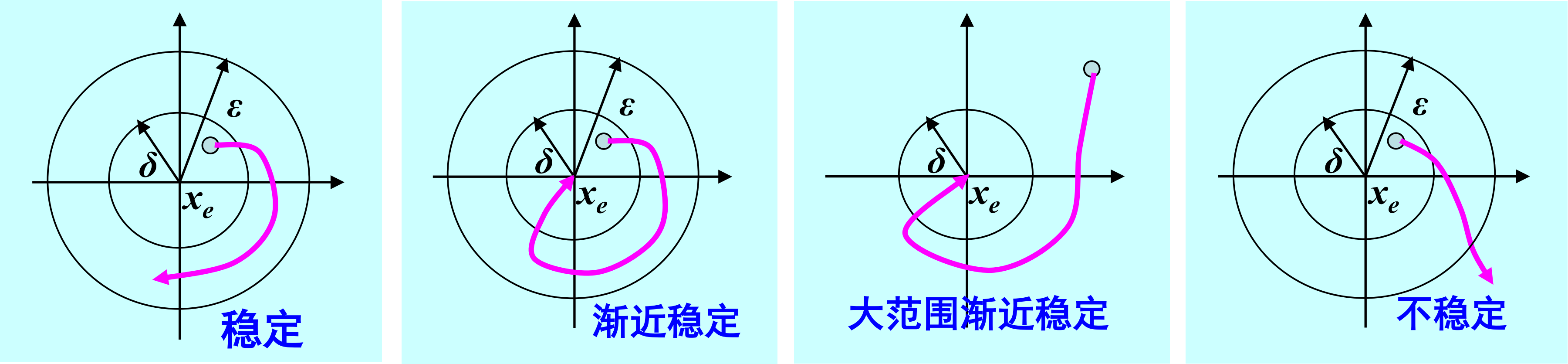
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0)\in S(\delta),\forall t\in[0,\infty),x(t)\in S(\varepsilon)$

平衡点$\boldsymbol{x}_e$在李亚普诺夫意义下稳定



Lyapunov意义下的稳定性问题

李雅普诺夫意义下的稳定性定义



(1) 李雅普诺夫意义下稳定。

(2) 如果平衡状态 $x_e=0$，在李雅普诺夫意义下是稳定的，并且始于域 $S(\delta)$ 的任一条轨迹，当时间 t 趋于无穷时，都不脱离 $S(\varepsilon)$，且收敛于 $x_e=0$，则称系统之平衡状态 $x_e=0$ 为渐近稳定的，其中球域 $S(\delta)$ 被称为平衡状态 $x_e=0$ 的吸引域。

(3) 对所有的状态（状态空间中的所有点），如果由这些状态出发的轨迹都保持渐近稳定性，则平衡状态 $x_e=0$ 称为大范围渐近稳定。

(4) 如果存在 $\varepsilon>0$，对任意实数 $\delta>0$，不管这两个实数多么小，在 $S(\delta)$ 内总存在一个状态，使得始于这一状态的轨迹最终会脱离开 $S(\varepsilon)$，那么平衡状态 $x_e=0$ 称为不稳定的。

$\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x(0)\in S(\delta),\exists t\in[0,\infty),x(t)\notin S(\varepsilon)$ 平衡点x_e在李亚普诺夫意义下不稳定

Lyapunov意义下的稳定性问题

李雅普诺夫意义下的稳定性定义

在经典控制理论中只有渐近稳定的系统才称为稳定的系统，在李雅普诺夫意义下是稳定的，但却不是渐近稳定的系统，则叫做不稳定系统。两者的区别与联系如下表所示。

经典控制理论 (线性系统)	不稳定 (Re(s)>0)	临界情况 (Re(s)=0)	稳定 (Re(s)<0)
李雅普诺夫意义下	不稳定	稳定	渐近稳定

预备知识

➢ 在Lyapunov 稳定性理论中，能量函数是一个非常重要的概念。该概念在数学上可以用一类二次函数来描述。下面给出一些基本知识。

标量函数的正定性

如果对所有非零状态 $x\neq0$，有$V(x)>0$，且在$x=0$处有$V(0)=0$， 则称标量函数$V(x)$ 为正定函数，例如 $V(x)=x_1^2+x_2^2$ 是正定的。

标量函数的负定性

如果 $-V(x)$是正定函数，则标量函数$V(x)$称为负定函数。

例如$V(x)=-(x_1^2+2x_2^2)$ 是负定的

标量函数的正半定性

如果标量函数$V(x)$在原点等于零，在其它状态大于或等于零，则称$V(x)$正半定。

标量函数的负半定性

如果 $-V(x)$是正半定函数，则标量函数$V(x)$称为负半定函数。

预备知识

标量函数的不定性

如果$V(x)$ 既可为正值，也可为负值时，标量函数$V(x)$称为不定的标量函数。

二次型

建立在李雅普诺夫第二法基础上的稳定性分析中，有一类标量函数起着很重要的作用，即二次型函数。

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px \qquad P\in R^{n\times n}\text{为对称矩阵}$$

二次型$V(x)$的正定性可用赛尔维斯特准则判断。该准则指出，二次型$V(x)$为正定的充要条件是矩阵P的所有主子行列式均为正值。若矩阵P的所有各顺序主子行列式负正相间则P是负定的。

预备知识

例 9-2 试证明下列二次型是正定的。

$$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

解：二次型$V(x)$可写为

$$V(x) = x^T Px = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

利用赛尔维斯特准则，可得

$$10 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

因为矩阵P的所有主子行列式均为正值，所以$V(x)$是正定的。

Lyapunov第一法（间接法）

➢ 第一法（间接法）基本思路：首先将非线性自治系统在平衡状态处线性化，然后计算线性化方程的特征值，最后判定原非线性自治系统的稳定性。

➢ 考虑如下非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n)^T, \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n)^T$

设系统的平衡点为 x_e，在 x_e 处将 $f(\,.\,)$ 函数展开为泰勒级数，可得

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)$$

*B*为泰勒级数展开的高阶余项

Lyapunov第一法（间接法）

- 考虑如下非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e) \xleftrightarrow{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$$

其中：

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e} = \boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$$

称为Jacobian矩阵

第一法的基础是线性化系数矩阵A。

Lyapunov第一法（间接法）

定理9-1：对于线性定常系统 $\dot{x}=Ax, x(0)=x_0, t\geq 0$

1）系统的每一平衡状态在李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件是，A的所有特征值均具有非正（负或零）实部，且具有零实部的特征值为A的最小多项式的单根。

2）系统的唯一平衡状态x_e=0渐近稳定的充分必要条件是，A的所有特征值均具有负实部。

Lyapunov第一法（间接法）

- 第一法将线性系统的稳定性判据推广到非线性系统。其结论如下：

1. 若线性化系统的系数矩阵A的特征值全部具有负实部，则非线性自治系统在x_e渐近稳定。线性化过程被忽略的高阶导数项对系统的稳定性没有影响；

2. 线性化系统的系数矩阵A只要有一个实部为正的特征值，则非线性自治系统在x_e不稳定，与线性化过程被忽略的高阶导数项无关；

3. 若线性化系统的系数矩阵A的特征值中，即使只有一个实部为零，其余的都具有负实部，此时不能依靠线性化的数学模型判别非线性自治系统在x_e的稳定性。这种情况下的系统稳定与否，与被忽略的高阶导数项有关，必须分析原始的非线性数学模型才能决定其稳定性。

- Lyapunov第一法的基础是线性化系数矩阵A，但它是局部的，其局域的大小由函数$f(*)$ 及其泰勒展开级数的性质决定。

Lyapunov第二法（直接法）

- Lyapunov第二法是建立在更为普遍的情况之上的，其**基本思想是用能量的观点分析系统的稳定性**。即：如果系统有一个渐近稳定的平衡状态，则当其运动到平衡状态的吸引域内时，系统存储的能量随着时间的增长而衰减，直到在平稳状态达到极小值为止。反之，若是不断地从外界吸取能量，储能越来越多，则平衡状态是不稳定的。

任意一个平衡状态都可通过坐标变换，统一化为$f(0)=0$或 $x_e = 0$

在李亚普诺夫第二法中，除非特别申明，我们将仅讨论原点平衡状态的稳定性问题。

Lyapunov第二法（直接法）

➢ 关于渐近稳定性

可以证明：如果 x 为n维向量，且其标量函数 $V(x)$ 正定，则满足

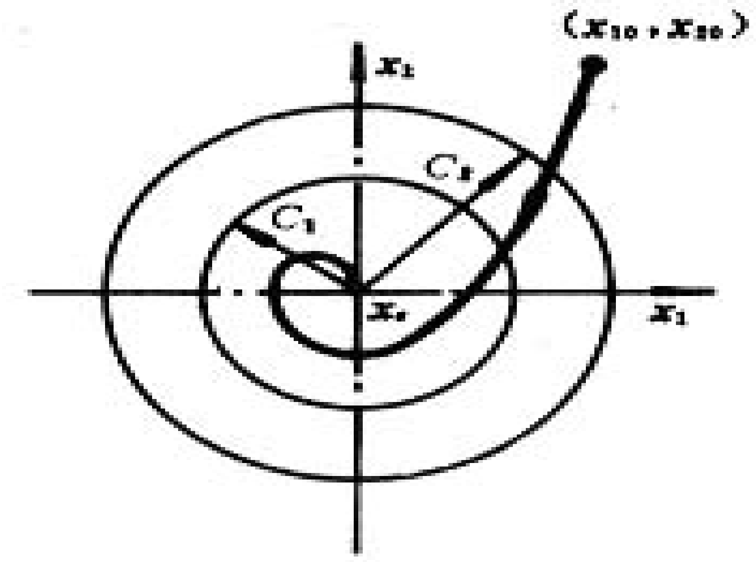
$$V(x) = C$$

的状态x处于n维状态空间的封闭超曲面上，且至少处于原点附近，式中C是正常数。随着 $\|x\| \to \infty$ ，上述封闭曲面可扩展为整个状态空间。如果 $C_1 < C_2$ ，则超曲面 $V(x) = C_1$ 完全处于超曲面 $V(x) = C_2$ 的内部。

➢ Lyapunov 构造了一个上述虚拟的“能量函数” $V(x)$，称之为**Lyapunov函数**，用其来衡量系统的能量，判别平衡点的稳定性。

Lyapunov第二法（直接法）

- **注意，**若使取一系列的常值 $0, C_1, C_2, \cdots, (0 < C_1 < C_2 < \cdots)$ 则 $V(x)=0$ 对应于状态平面的原点，而 $V(x)=C_1$ ，$V(x)=C_2$ ，…，描述了包围状态平面原点的互不相交的一簇圆，如下图所示。



常数V圆和典型轨迹

- **还应注意，**由于$V(x)$在径向是无界的，即随着 $\|x\| \to \infty$ ，$V(x)\to\infty$，所以这一簇圆可扩展到整个状态平面。

- 由于圆 $V(x)=C_k$ 完全处在 $V(x)=C_{k+1}$ 的内部，所以典型轨迹从外向里通过V圆的边界。因此李雅普诺夫函数的**几何意义**可阐述如下：$V(x)$表示状态 x 到状态空间原点距离的一种度量。如果原点与瞬时状态 $x(t)$ 之间的距离随 t 的增加而连续地减小（即 $\dot{V}(x(t))<0$ ），则$x(t)\to 0$。

Lyapunov第二法（直接法）

定理9-2 考虑如下非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$

式中 $f(0)=0$，对所有 $t \geq t_0$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数$V(x, t)$，且满足以下条件：

1、$V(x, t)$ 正定；

2、 $\dot{V}(x,t)$ 负定，

则在原点处的平衡状态是（一致）渐近稳定的。

- 进一步地，若 $\|x\| \to \infty$，$V(x,t) \to \infty$，则在原点处的平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

Lyapunov第二法（直接法）

例 9-3 考虑如下非线性系统：$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$

请判断其稳定性。 $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$

解：显然，原点（ $x_1 = 0$ ，$x_2 = 0$ ）是唯一的平衡状态。

如果定义一个正定标量函数$V(x)$ $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2(-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2\end{aligned}$$

是负定的，这说明$V(x)$沿任一轨迹连续地减小，由于$V(x)$随 x 偏离平衡状态趋于无穷而变为无穷，则按照定理9-2，该系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

➢ Lyapunov 构造了一个上述虚拟的“能量函数” $V(x)$，称之为Lyapunov函数，用其来衡量系统的能量，判别平衡点的稳定性。

Lyapunov第二法（直接法）

定理9-2是李雅普诺夫第二法的基本定理，下面是几点说明。

(1) 这里仅给出了充分条件，也就是说，如果我们能构造出李雅普诺夫函数$V(x)$，那么系统是渐近稳定的。但李雅普诺夫函数不是惟一的。

(2) 对于渐近稳定的平衡状态，则李雅普诺夫函数必存在。

(3) 对于非线性系统，通过构造某个具体的李雅普诺夫函数，可以证明系统在某个稳定域内是渐近稳定的，但这并不意味着稳定域外的运动是不稳定的。对于线性系统，如果存在渐近稳定的平衡状态，则它必定是大范围渐近稳定的。

(4) 稳定性定理9-2 ，既适合于线性系统、非线性系统，也适合于定常系统、时变系统，具有极其一般的普遍意义。

定理9-2 的限制条件，$\dot{V}(x,t)$ 必须是负定函数，能否放宽？

Lyapunov第二法（直接法）

定理9-3 （克拉索夫斯基，巴巴辛）考虑如下非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$

式中 $f(0)=0$，对所有 $t \geq t_0$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(x, t)$，且满足以下条件：

1、$V(x, t)$ 是正定的；

2、$\dot{V}(x,t)$ 负半定的；

3、$\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$ 对于任意 t_0 和任意 $x_0 \neq 0$ ，在 $t \geq t_0$ 时，不恒等于零，其中的 $\Phi(t;x_0,t_0),t$ 表示在 t_0 时从 x_0 出发的轨迹或解。

4、当 $\|x\| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$

则在系统原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

令 $\dot{V}(x,t) = 0$

求解只有全零解

- 注意，这是若 $\dot{V}(x,t)$ 不是负定的，而只是负半定的情况。

Lyapunov第二法（直接法）

例 9-4 考虑如下线性系统：
判断其稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

解：显然，原点（ $x_1 = 0$，$x_2 = 0$ ）是唯一的平衡状态。

如果定义一个正定标量函数$V(x)$ $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 当$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_2^2$$

对于非零状态（$(x_2 = 0, x_1 \neq 0)$），$\dot{V}(x,t) = 0$

对于其他任意状态，存在 $\dot{V}(x,t) < 0$，所以 $\dot{V}(x,t)$负半定。

假设有从非零状态出发的状态轨迹 $\Phi(t) = \begin{bmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，使得 $\dot{V}(\Phi(t)) \equiv 0$

则 $\phi_2(t) \equiv 0$ 。 由 $\dot{\phi}_2(t) = -\phi_1(t) - \phi_2(t)$及 $\phi_2(t) \equiv 0$，可得 $\phi_1(t) \equiv 0$

与从非零状态出发的假设矛盾。只有从原点出发的状态轨迹满足 $\dot{V}(\Phi(t)) \equiv 0$

因此，在该系统任意的从非零状态出发的状态轨迹上，$\dot{V}$ 不恒等于零

由定理9-3，原点是渐近稳定的，且是大范围渐近稳定。

Lyapunov第二法（直接法）

关于稳定性

定理9-4（李雅普诺夫）考虑如下非线性系统 $\dot{x}(t)=f(x(t))$

式中 $f(0)=0$，对所有 $t \geq t_0$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(x, t)$，且满足以下条件：

1、$V(x, t)$ 是正定的；

2、$\dot{V}(x,t)$ 负半定的；

3、$\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$ 对于任意 t_0 和任意 $x_0 \neq 0$，在 $t \geq t_0$ 时，均恒等于零，其中的 $\Phi(t;x_0,t_0),t$ 表示在 t_0 时从 x_0 出发的轨迹或解。则在系统原点处的平衡状态是李雅普诺夫意义下稳定的。

Lyapunov第二法（直接法）

例 9-5 考虑如下线性系统：
判断其稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_2 \ (k>0) \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

解：显然，原点（ $x_1 = 0$，$x_2 = 0$ ）是唯一的平衡状态。

如果定义一个正定标量函数$V(x)$ $V(x) = x_1^2 + kx_2^2$

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2kx_2\dot{x}_2 = 2kx_1x_2 - 2kx_1x_2 = 0$$

$\dot{V}(x,t)$ 负半定。且对任意非零状态 $(x_2 \neq 0, x_1 \neq 0)$ 恒为零

由定理9-4，系统是在李雅普诺夫意义下稳定的。

Lyapunov第二法（直接法）

关于不稳定性

定理9-5（李雅普诺夫）考虑如下非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$

式中$f(0)=0$，对所有 $t \geq t_0$

若存在一个标量函数 $V(x, t)$，具有连续的一阶偏导数，且满足以下条件：

1、$V(x, t)$在原点附近的某一邻域内是正定的；

2、$\dot{V}(x,t)$ 在同样的邻域内是正定的；

则原点处的平衡状态是不稳定的。

若 $\dot{V}(x,t)$ 正半定，

在非零状态时，$\dot{V}(x,t)$ 不恒为零，则系统不稳定。

Lyapunov第二法（直接法）

例 9-6 考虑如下线性系统：
判断其稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

解：显然，原点（ $x_1 = 0$ ， $x_2 = 0$ ）是唯一的平衡状态。

如果定义一个正定标量函数 $V(x)$ $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_2^2$$ 与 x_1 无关。

对任意非零状态 $(x_2 = 0, x_1 \neq 0)$， $\dot{V}(x,t) = 0$

而对其他任意状态，$\dot{V}(x,t) > 0$，所以 $\dot{V}(x,t)$ 正半定

非零状态时，$\dot{V}(x,t)$不恒为零，则系统不稳定。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

➢ 线性系统是非线性系统的一种特殊形式， Lyapunov第二法自然可行，且Lyapunov 函数有规律可循。

给定 $\dot{x} = Ax$ ， 设A为非奇异矩阵，则有唯一的平衡状态 $x_e = 0$

其平衡状态的稳定性很容易通过李雅普诺夫第二法进行研究。

设 $V(x) = x^T Px$

则
$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = (Ax)^T Px + x^T PAx \\ &= x^T A^T Px + x^T PAx = x^T \underline{(A^T P + PA)} x = -x^T Qx\end{aligned}$$

$A^T P + PA + Q = 0$，该矩阵代数方程称为Lyapunov方程

➢ 如果能找到正定矩阵P及矩阵Q满足上述Lyapunov方程，则$V(x)>0$， $\dot{V}(x) < 0$ ，系统在原点渐近稳定。

线性定常系统$\dot{x} = Ax + Bu$内稳定（A的所有特征值均具有负实部）

等价于其自治系统$\dot{x} = Ax$在原点平衡状态渐近稳定

线性系统的Lyapunov稳定性分析

$$A^T P + PA = -Q$$

- 从上推导知，判别一个线性定常系统是否稳定的步骤：
  1）假设一个正定的实对称矩阵 P；
  2）利用 Lyapunov 方程计算 Q 阵；
  3）判别 Q 阵的正定性：若正定，则系统渐近稳定。

- 实际应用中，上述步骤麻烦，所以采取如下通用方法：
  1）取 $Q=I$，这一定是正定的；
  2）利用 Lyapunov 方程计算 P 阵；
  3）判别 P 阵的正定性：若正定，则系统渐近稳定。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

定理9-6 线性定常连续系统渐近稳定的充分必要条件：

给定任意正定实对称矩阵 Q，存在正定对称矩阵 P，满足Lyapunov 方程：

$$A^T P + PA + Q = 0$$

标量函数 $V(x) = x^T Px$ 是系统的一个Lyapunov 函数。

- 若 P 负定，则系统不稳定；P不定，则非渐近稳定。

由定理9-3 推知，若系统任意轨迹在非零状态不存在恒为零时的 $\dot{V}(x,t)$，Q 阵可给定为正半定的，即允许 Q 单位阵对角线上部分元素为零，而解得的 P 仍应为正定。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

对该定理作以下几点说明：

(1) 如果 $\dot{V}(x) = -x^T Qx$ 沿任一条轨迹不恒等于零，则 Q 可取正半定矩阵。

(2) 如果取任意的正定矩阵Q，或者如果 $\dot{V}(x)$沿任一轨迹不恒等于零时取任意的正半定矩阵Q，并求解矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q$$

以确定P，则对于在平衡点 $x_e = 0$ 处的渐近稳定性，P为正定是充要条件。

(3) 只要选择的矩阵Q为正定的（或根据情况选为正半定的），则最终的判定结果将与矩阵Q的不同选择无关。通常取$Q=I$。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

例 9-7 考虑线性系统的稳定性。 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 2 & -6\end{bmatrix}x$

解：1）选 $Q=I$；

$|\lambda I-A|=0\Rightarrow\lambda_1=-2<0,\lambda_2=-8<0$

2） 利用 Lyapunov 方程计算 P 阵；

$$A^TP+PA=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 2 & -6\end{bmatrix}=-Q=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-8p_{11}+4p_{12}&=-1\\ 4p_{11}-10p_{12}+2p_{22}&=0\\ 8p_{12}-12p_{22}&=-1\end{aligned}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{40}\begin{bmatrix}7 & 4\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

3）判别 P 阵的正定性：因为P的各阶主子行列式＞0，故正定，所以系统渐近稳定。

4） Lyapunov 函数 $V(x)=x^TPx=\dfrac{1}{40}(7x_1^2+8x_1x_2+6x_2^2)$

线性系统的Lyapunov稳定性分析

例 9-8 考虑线性系统的稳定性。 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x$

解：1）选 $Q=I$；

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 1 > 0$$

2） 利用 Lyapunov 方程计算 P 阵；

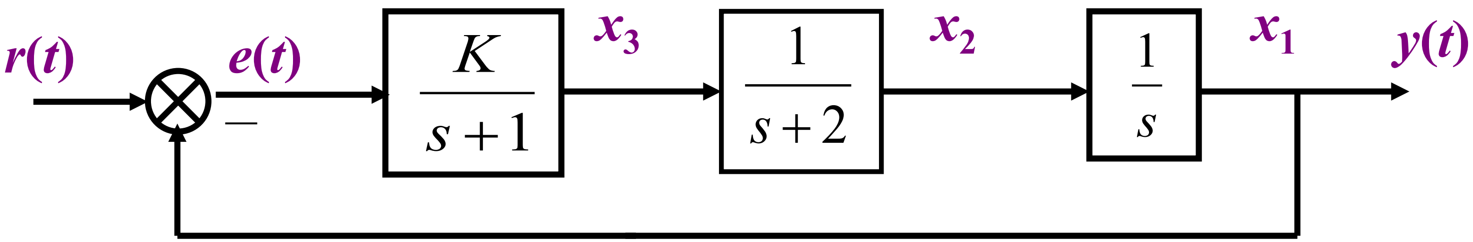
$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2p_{12} &= -1 \\ p_{11} + 2p_{12} - 2p_{22} &= 0 \\ 2p_{12} + 4p_{22} &= -1 \end{aligned} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3）判别 P 阵的正定性：因为P的一阶主子行列式<0，二阶主子式>0，故P负定，所以系统不稳定。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

例 9-9 考虑图示系统的K值范围，使系统渐近稳定。



解：1）由图列出状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -K & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ K\end{bmatrix}r$$

研究稳定性时，可令r=0

因为 det$A$=-K，故 A 非奇异，原点为唯一的平衡状态。若取 Q 为正半定阵：

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则：$\dot{V}(x)=-x^TQx=-x_3^2$ 负半定。令 $\dot{V}(x)\equiv 0\Rightarrow x_3\equiv 0\Rightarrow x_1\equiv 0\Rightarrow x_2\equiv 0$

故惟有在原点处 $\dot{V}(x)\equiv 0$，所以可用正半定Q来简化稳定性分析

线性系统的Lyapunov稳定性分析

解：2）利用 Lyapunov 方程计算 P 阵；

$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

展开的代数方程数为 $n(n+1)/2$

$$\begin{aligned} &-2Kp_{13} = 0 \\ &2p_{12} - 4p_{22} = 0 \\ &-Kp_{23} + p_{11} - 2p_{12} = 0 \\ &p_{13} - 3p_{23} + p_{22} = 0 \\ &-Kp_{33} + p_{12} - p_{13} = 0 \\ &2p_{23} - 2p_{33} = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{K^2+12K}{12-2K} & \dfrac{6K}{12-2K} & 0 \\ \dfrac{6K}{12-2K} & \dfrac{3K}{12-2K} & \dfrac{K}{12-2K} \\ 0 & \dfrac{K}{12-2K} & \dfrac{6K}{12-2K} \end{bmatrix}$$

使P正定的充要条件：$12-2K>0$, $K>0$

所以在$0<K<6$时系统渐近稳定。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

定理9-7 设线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = Gx(k)$$

系统在其平衡状态 $x_e=0$ 为渐近稳定的充分必要条件：

给定任一个正定实对称矩阵 Q， 存在一个正定对称矩阵 P，满足Lyapunov 方程：

$$G^T PG - P + Q = 0$$

标量函数 $V[x(k)] = x^T(k)Px(k)$ 就是该系统的一个Lyapunov 函数。

与连续系统不同是因为这里采用 $\Delta V(x) = V[x(k+1)] - V[x(k)]$ 代替 $\dot{V}(x)$ ，计算方法与连续系统是相同的。

- 如果沿任意一个解的序列不恒为零，Q也可以取为半正定矩阵。

非线性系统的Lyapunov稳定性分析

克拉索夫斯基方法——判断非线性渐近稳定的充分条件

克拉索夫斯基方法的基本思想是不用状态变量，而是用其导数来构造李雅普诺夫函数。不失一般性，仍可认为状态空间的原点是系统的平衡状态。

定理9-8（克拉索夫斯基定理）考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = f(x)$$

式中，x 为 n 维状态向量，$f(x)$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的非线性 n 维向量函数，假定 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 对 x_i 可微（i=1,2,…, n）。

该系统的雅可比矩阵定义为

非线性系统的Lyapunov稳定性分析

克拉索夫斯基方法——判断非线性渐近稳定的充分条件

$$\dot{x} = f(x)$$

$$F(x) = \left[\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

又定义

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x)$$

式中，$F(x)$是雅可比矩阵，$F^T(x)$是$F(x)$的转置矩阵，$\hat{F}(x)$为实对称矩阵。如果 $\hat{F}(x)$ 是负定的，则平衡状态$x=0$是渐近稳定的。该系统的李雅普诺夫函数为

$$V(x) = \dot{x}^T \dot{x} = f^T(x) f(x)$$

非线性系统的Lyapunov稳定性分析

克拉索夫斯基方法——判断非线性渐近稳定的充分条件

$$\dot{x} = f(x)$$

此外，若随着 $\|x\| \to \infty,\ f^T(x)f(x) \to \infty$，则平衡状态是大范围渐近稳定的。

证明： 由于 $\hat{F}(x)$ 是负定的，所以除 x=0 外，$\hat{F}(x)$ 的行列式处处不为零。因而，在整个状态空间中，除 x=0 这一点外，没有其他平衡状态，即在 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$ 。因为 $f(0)=0$，在 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，且 $V(x)=f^T(x)f(x)$，所以 $V(x)$是正定的。

注意到 $\dot{f}(x) = F(x)\dot{x} = F(x)f(x)$

从而

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{f}^T(x)f(x) + f^T(x)\dot{f}(x)\\ &= [F(x)f(x)]^T f(x) + f^T(x)F(x)f(x)\\ &= f^T(x)[F^T(x) + F(x)]f(x)\\ &= f^T(x)\hat{F}(x)f(x)\end{aligned}$$

特别注意：这是充分条件，不是充要条件。当条件不满足时，系统还有可能是稳定的。

非线性系统的Lyapunov稳定性分析

因为 $\hat{F}(x)$ 是负定的，所以 $\dot{V}(x)$ 也是负定的。因此，$V(x)$是一个李雅普诺夫函数。所以原点是渐近稳定的。如果随着 $\|x\| \to \infty$，$V(x) = f^T(x) f(x) \to \infty$，则根据定理 9-2 可知，平衡状态是大范围渐近稳定的。

例 9-10 考虑具有两个非线性因素的二阶系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + a x_2$$

假设 $f_1(0) = f_2(0) = 0$，$f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$是实函数且可微。又假定当 $\|x\| \to \infty$ 时，$[f_1(x_1) + f_2(x_2)]^2 + (x_1 + a x_2)^2 \to \infty$。试确定使平衡状态$x$=0渐近稳定的充分条件。

在该系统中，$F(x)$为

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

非线性系统的Lyapunov稳定性分析

克拉索夫斯基方法——判断非线性渐近稳定的充分条件

$$F(x)=\begin{bmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

式中 $f_1'(x_1)=\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$， $f_2'(x_2)=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$

于是 $\hat{F}(x)$为

$$\hat{F}(x)=F^T(x)+F(x)=\begin{bmatrix} 2f_1'(x_1) & 1+f_2'(x_2) \\ 1+f_2'(x_2) & 2a \end{bmatrix}$$

由克拉索夫斯基定理可知，如果 $\hat{F}(x)$ 是负定的，则所考虑系统的平衡状态 x=0 是大范围渐近稳定的。因此，若

$$f_1'(x_1)<0 \quad \text{，对所有 } x_1\neq 0$$

$$4af_1'(x_1)-[1+f_2'(x_2)]^2>0 \quad \text{，对所有 } x_1\neq 0 \text{，} x_2\neq 0$$

则平衡状态 $x_e=0$ 是大范围渐近稳定的。

线性系统的Lyapunov稳定性分析

- 非线性系统与线性系统有着明显的差异：

（1）线性系统中，A若非奇异，平衡状态惟一，若渐近稳定则一定是大范围渐近稳定；非线性系统的稳定性具有局部性质，对某一平衡点 x_e 而言，若渐近稳定，只是局部性质，不一定是大范围的渐近稳定。

（2）线性系统总可以用二次型构造系统的Lyapunov函数；非线性系统则没有统一的构造系统的Lyapunov函数的一般方法，很大程度上依靠经验和技巧。

本节内容

- Lyapunov 稳定性分析
  - Lyapunov意义下的稳定性问题：
    - 基本概念：平衡状态， Lyapunov意义下的稳定性，渐近稳定
  - 预备知识
  - Lyapunov第一法（间接法）：线性系统特征值判据
  - Lyapunov第二法（直接法）：
    - 能量函数、标量函数定号性（二次型），稳定性定理
  - 线性系统的Lyapunov稳定性分析
    - Lyapunov方程，求解P阵方法，判别方法
  - 克拉索夫斯基法——判别非线性系统渐近稳定的充分条件
    - 关于非线性系统的分析还有很多方法

本章主要内容

- 简介
- Description Function（描述函数）
- Lyapunov（李亚普诺夫）稳定性分析

The End