对偶的定义

原问题

$\max\ z = \boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$

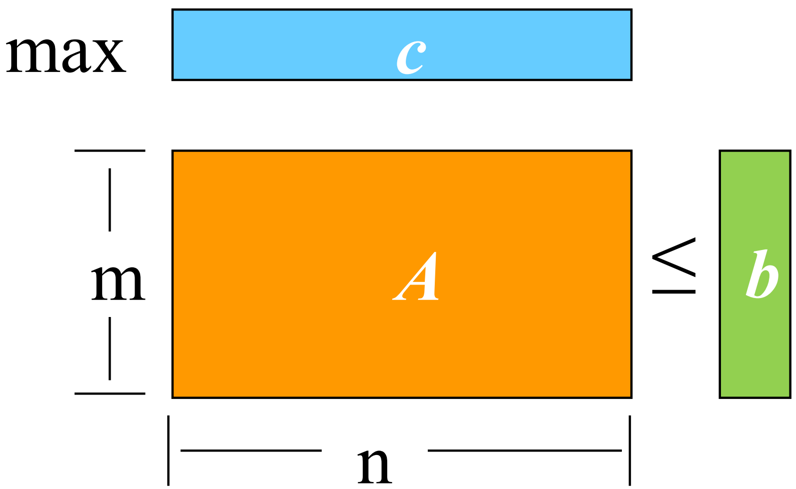
$\boldsymbol{x} \ge 0$

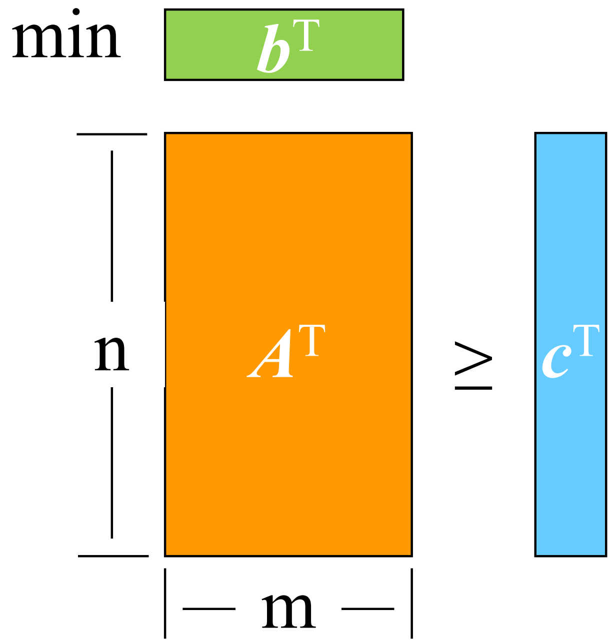
对偶问题

$\min\ w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{s.t.}\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}^T$

$\boldsymbol{y} \ge 0$





自返性

$$\max\ z = \boldsymbol{cx}$$
$$s.t.\quad \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge 0$$

对偶的定义

$$\min\ w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$
$$s.t.\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c}^T$$
$$\boldsymbol{y} \ge 0$$

$$\max\ w = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$
$$s.t.\quad -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \le -\boldsymbol{c}^T$$
$$\boldsymbol{y} \ge 0$$

对偶的定义

$$\min\ z = -\boldsymbol{cx}$$
$$s.t.\quad -\boldsymbol{Ax} \ge -\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge 0$$

对偶问题的性质

弱对偶性：原问题、对偶问题可行解的目标函数值之间的关系

推导： 设$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$分别是原始问题和对偶问题的可行解，有

$$z=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^0 \le \boldsymbol{y}^{0T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 \le \boldsymbol{y}^{0T}\boldsymbol{b}=w$$

说明： 目标函数值互为对方问题的上、下界

推论： 一个问题是无界解时，另一个问题无可行解

最优性

设x^0、y^0分别是原问题和对偶问题的可行解，则当$cx^0=b^Ty^0$时， x^0、y^0均为最优解。

证：设x^*、y^*分别是原问题和对偶问题的最优解，有

$$cx^0 \le cx^* \le b^Ty^* \le b^Ty^0$$

所以 $cx^o = cx^* = b^Ty^* = b^Ty^0$

强对偶性

设$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$分别是原始问题和对偶问题的可行解，则必存在最优解$\boldsymbol{x}^*$、$\boldsymbol{y}^*$，且有$\boldsymbol{cx}^*=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$。

证：由弱对偶性知原问题的目标函数值有上界，对偶问题的目标函数值有下界，故均有最优值。

设原问题的最优解为$\boldsymbol{x}^*$时，有$\boldsymbol{x}_B{}^*=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，由单纯形法的矩阵分析，可知$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$是一个可行解，满足：

$$w=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B{}^*=\boldsymbol{cx}^*=z^*$$

由最优性得 $w=z^*=w^*$

单纯形法的矩阵分析

初始单纯形表

	$\boldsymbol{c}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$ $\quad \boldsymbol{x_s}$ $\quad \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}$	$\mathbf{I}$
σ_j	$\boldsymbol{c}$	$\mathbf{0}$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i a_{ij}$$

$$\sigma_j = c_j - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{p}_j$$

$$\boldsymbol{c}_B \triangleq [\bar{c}_1, \cdots, \bar{c}_m]$$

最终单纯形表

	$\boldsymbol{c}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{c_B}$ $\quad \boldsymbol{x_B}$ $\quad \boldsymbol{B^{-1}b}$	$\boldsymbol{B^{-1}A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$
σ_j	$\boldsymbol{c - c_B B^{-1} A}$	$\boldsymbol{-c_B B^{-1}}$

$$\sigma_j = c_j - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_j$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}$$

原问题和对偶问题解的关系

(1)两个问题都有可行解，则都有最优解。

(2)一个问题有无界解，另一个问题必无可行解。

(3)两个问题都无可行解

互补松弛性

可行解$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$分别是原始问题和对偶问题最优解的充要条件是

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b})^T\boldsymbol{y}^0=0 \text{ 和 } \boldsymbol{x}^{0T}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{c}^T)=0$$

或

$$\boldsymbol{x}_s^{0T}\boldsymbol{y}^0=0 \text{ 和 } \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{y}_s^0=0。$$

互补松弛性证明（充分性）

充分性

原问题

$\max z = \boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$

$\qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_s \geq 0$

对偶问题

$\min w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{s.t.}\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{c}^T$

$\qquad \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_s \geq \boldsymbol{0}$

可得：$z = \boldsymbol{cx}^0 = \boldsymbol{x}^{0T}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{y}_s{}^0) = \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{y}_s{}^0$

$w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0 = (\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{x}_s{}^{0T})\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{x}_s{}^{0T}\boldsymbol{y}^0$

互补松弛性证明（必要性）

必要性

若$\boldsymbol{x}^0$、$\boldsymbol{y}^0$是最优解,有：$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0=z^*=w^*$

原问题

$$\max\ z=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

$$s.t.\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_s\ge 0$$

对偶问题

$$\min\ w=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{s.t.}\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{c}^T$$

$$\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}_s\ge 0$$

可得：$\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0\le\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0=w^*=z^*=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^0\le\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0$

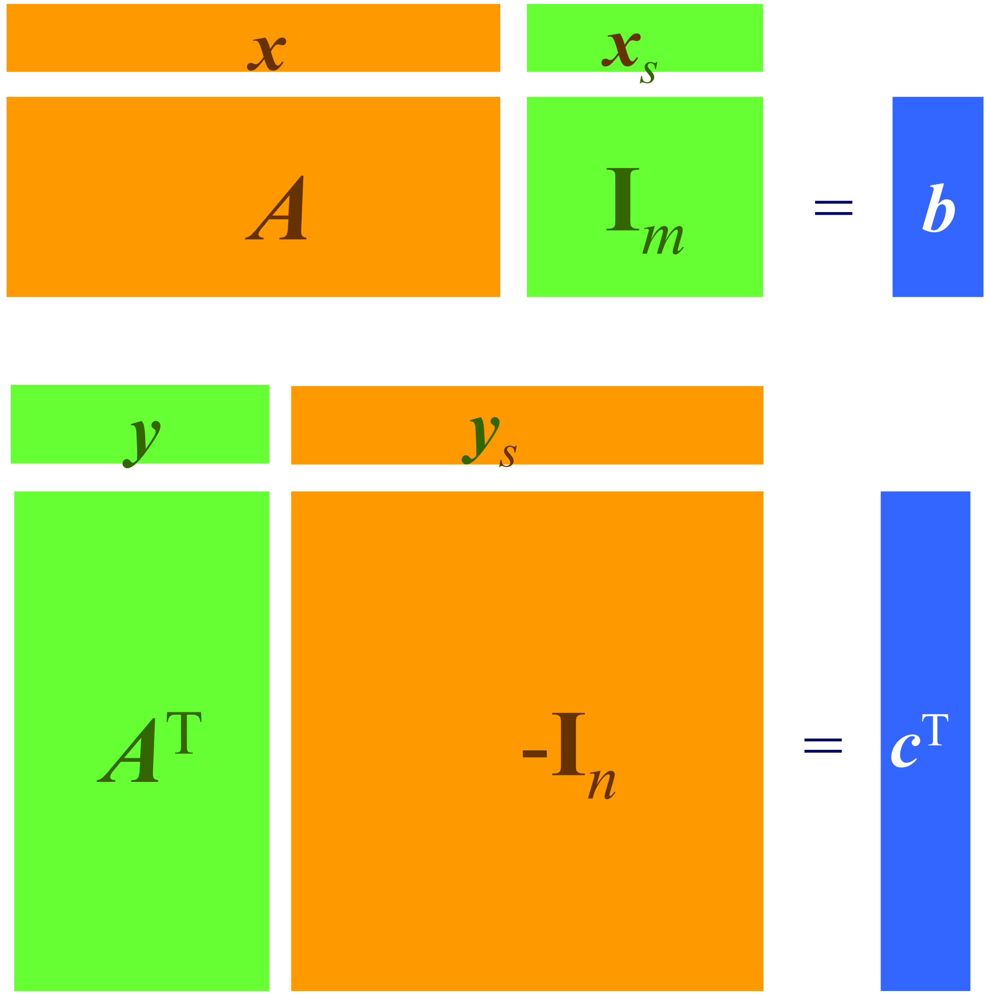
即：$z^*=w^*=\boldsymbol{x}^{0T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0$

原始问题和对偶问题变量、松弛变量的维数

$\max\ z = \boldsymbol{cx}$

$s.t.\quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$

$\quad \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_s \geq 0$



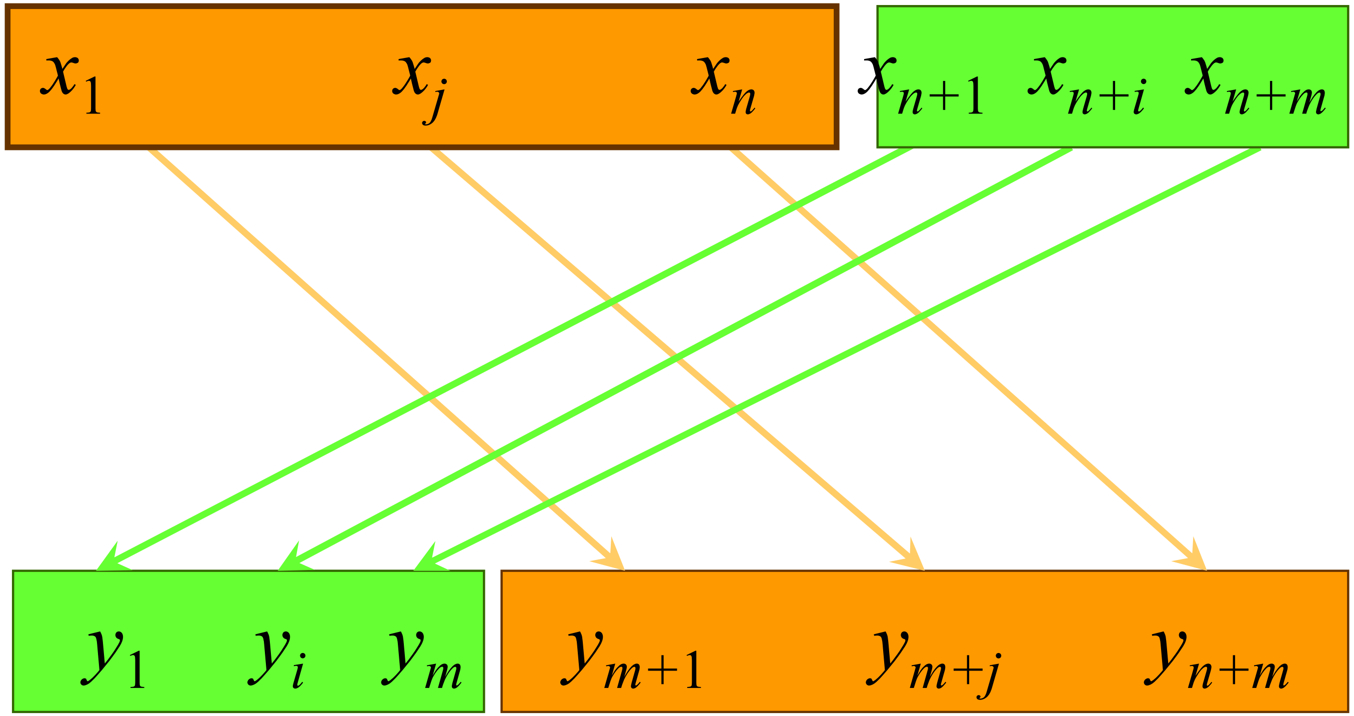
$\min\ w = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

$s.t.\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{c}^T$

$\quad \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}_s \geq 0$

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}_s = 0$

$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}_s = 0$



$x_j y_{m+j}=0 \quad y_i x_{n+i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个必等于0