第五周作业参考答案

2-9　图 2-85 所示为三个储槽组成的系统，其中 Q_i 为输入变量，h_3 为输出变量。试建立该系统下列三种形式的数学模型。（1）微分方程式；（2）传递函数；（3）状态空间模型。其中 R_1、R_2、R_3 分别为三只阀线性化后的阻力系数。F_1、F_2、F_3 为三只储槽的截面积。

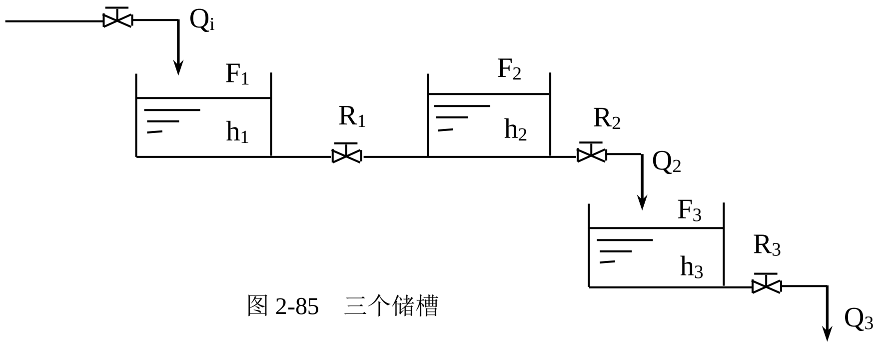

图 2-85　三个储槽

解：（1）微分方程式：

$$F_1R_1F_2R_2F_3R_3\frac{d^3h_3}{dt^3}+(F_1R_1F_2R_2+F_1R_1F_3R_3+F_2R_2F_3R_3+F_1R_2F_3R_3)\frac{d^2h_3}{dt^2}$$

$$+(F_1R_1+F_2R_2+F_3R_3+F_1R_2)\frac{dh_3}{dt}+h_3=R_3Q_i$$

（2）传递函数：若令：

$$a_0=F_1R_1F_2R_2F_3R_3$$
$$a_1=F_1R_1F_2R_2+F_1R_1F_3R_3+F_2R_2F_3R_3+F_1R_2F_3R_3$$
$$a_2=F_1R_1+F_2R_2+F_3R_3+F_1R_2$$

则 $$G(s)=\frac{H_3(s)}{Q_i(s)}=\frac{R_3}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+1}$$

（3）状态空间模型

$$\dot{x}=Ax+bu=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\frac{1}{a_0}&-\frac{a_2}{a_0}&-\frac{a_1}{a_0}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{R_3}{a_0}\end{bmatrix}u$$

$$y=Cx=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x$$

2-12　图 2-88 表示弹簧阻尼器系统，图中，f 表示粘性摩擦系数，k 表示弹簧刚度。试列写输入位移 x_i 与输出位移 x_o 之间的微分方程式。（相似系统不需要证明）

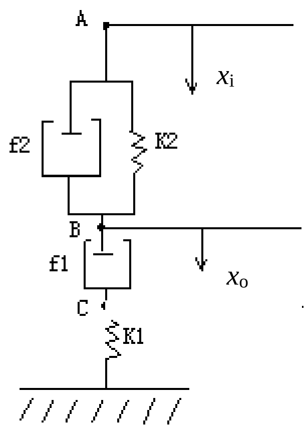

图 2-88 弹簧阻尼器系统

解：$F_{f2}+F_{k2}=F_B=F_C$

设 C 点的位移为 x_c，方向向下。则 $F_B=F_{f1}=f_1(\dot{x}_c-\dot{x}_o)$，　$F_C=k_1x_c$

$F_{f2}=f_2(\dot{x}_i-\dot{x}_o)$，　$F_{k2}=k_2(x_i-x_o)$

利用 $F_B=F_C$ 将 x_c 用 x_o 表示，回代入 $F_{f2}+F_{k2}=F_B=F_C$，得到输入位移 x_i 与输出位移 x_o 之间的微分方程式为

$$f_1f_2\ddot{x}_o+(f_1k_2+f_1k_1+f_2k_1)\dot{x}_o+k_1k_2x_o=f_1f_2\ddot{x}_i+(f_1k_2+f_2k_1)\dot{x}_i+k_1k_2x_i$$

2-33 设弹簧特性由下式描述：$F=12.65y^{1.1}$

其中，F 是弹簧力，y 是变形位移。若弹簧在变形位移 0.25 附近作微小变化，试推导ΔF的线性化方程。

解：根据题意，我们在 y=0.25 附近将 F 展开为泰勒级数，并取一次项近似，则有

$$F\approx F_0+\dot{F}\ \Big|_{y=0.25}(y-0.25)$$

$$\Delta F=F-F_0=\dot{F}\ \Big|_{y=0.25}(y-0.25)=12.65\times1.1\times0.25^{0.1}(y-0.25)$$
$$=12.11(y-0.25)=12.11\Delta y$$