2020 届考研数学全真模拟卷(数学一)

命题人 向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数 $a>1$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)=a^x+a^{-x}-2$ 是 x 的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

2. 设在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$, 令

$$M=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a),\quad P=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

则 ( )

(A) $M<N<P$ (B) $P<M<N$ (C) $P<N<M$ (D) $M<P<N$

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f'_x(0,0)=2, f'_y(0,0)=1$, 则 ( )

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $\big(0,0,f(0,0)\big)$ 的一个法向量为 $(2,1,0)$

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $\big(0,0,f(0,0)\big)$ 处的一个切向量为 $(2,0,1)$

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$ 在点 $\big(0,0,f(0,0)\big)$ 处的一个切向量为 $(0,1,1)$

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则下列级数中一定收敛的是 ( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n}$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^3-a_{n+1}^3\right)$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为 n 维列向量, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$, 则 ( )

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性无关

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性相关

(C) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(D) 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

6. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维正交的单位列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 1 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值　(B) 2 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵　(D) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

7. 已知随机事件 A,B 满足 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(B|A)=2$, 则 ( )

(A) $A\subset B$　(B) $B\subset A$　(C) $P(A|\bar{B})=0$　(D) $P(B|\bar{A})=1$

8. 已知随机变量 $X\sim t(n),Y\sim F(1,n)$, 给定 $\alpha\in(0.5,1)$ 时, $P(X<x_\alpha)=\alpha$, 则 $P(Y<x_\alpha^2)=$ ( )

(A) $2\alpha-1$　(B) $\alpha-\dfrac{1}{2}$　(C) α　(D) $1-\alpha$

答案　BBDDDDCA

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=$________.

答案　$\ln 3$.

10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant 0\\ x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$, a_n,b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 则 $a_2=$________.

答案　0.

11. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{-\sin x}f(x)\,\mathrm{d}y$ 的积分顺序的结果为________.

答案　$-\displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\arcsin y}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

12. 已知向量场 $\boldsymbol{A}=(2x-3y,3x-z,y-2x)$, 则 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=$________.

答案　$(2,2,6)$ 或者 $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+2\lambda+1$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\begin{vmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\ \lambda_3&\lambda_1&\lambda_2\\ \lambda_2&\lambda_3&\lambda_1\end{vmatrix}=$________.

答案　0.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本, $\bar{X}$ 为样本均值, $T=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则 $E(\bar{X}^2T)=$________.

答案　$\dfrac{n-1}{n}\sigma^4$.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f(0)=0, f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{e^x-1} f(t)\,dt}{x^3}$.

解 利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{e^x-1} f(t)\,dt}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)(e^x-1-x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中在使用积分中值定理时, ξ 是介于 x 与 e^x-1 之间的量, 因此 $x\to 0$ 时, $x\sim\xi\sim e^x-1$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

解 记 $v=\ln r, r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{dv}{dr}=\dfrac{1}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dv}\cdot\frac{dv}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r^2}\cdot f'(v),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{dv}\cdot\frac{dv}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r^2}\cdot f'(v).$$

进一步计算二阶偏导数得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{x^2}{r^4}\cdot f''(v)+\frac{1}{r^2}\cdot f'(v)-\frac{2x^2}{r^4}\cdot f'(v),\\\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{y^2}{r^4}\cdot f''(v)+\frac{1}{r^2}\cdot f'(v)-\frac{2y^2}{r^4}\cdot f'(v).\end{aligned}$$

代入条件 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ 并化简得微分方程 $f''(v)=e^{5v}$, 结合初值条件 $f(0)=f'(0)=0$ 解得 $f(v)=\dfrac{1}{25}e^{5v}-\dfrac{1}{5}v-\dfrac{1}{25}$.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)\,(x\geqslant 0)$ 连续可导, 且 $f(0)=1$. 现已知曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

解 由题意可得方程

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt,$$

上式两端对 x 求导得

$$f(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}.$$

又 $f(0)=1$, 故所求函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{cases}y=\sqrt{1+y'^2}\\ y\big|_{x=0}=1\end{cases}.$$

由 $y=\sqrt{1+y'^2}$ 得 $y^2=1+y'^2$, 故 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x.$$

于是方程的通解为

$$\ln C\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)=x.$$

将 $y\big|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C=1$, 故所求的解为

$$y\pm\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^x.$$

解得 $f(x)=y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

18.（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2-2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中, Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 与 $z=2$ 截下的那部分的外侧.

解 记 $P=0, Q=y^2-2y, R=(z+1)^2$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=0, \dfrac{\partial Q}{\partial y}=2y-2, \dfrac{\partial R}{\partial z}=2(z+1)$, 补面 $\Sigma_1: z=1\,(x^2+y^2\leqslant 1)$, 下侧；$\Sigma_2: z=2\,(x^2+y^2\leqslant 2)$, 上侧. 由高斯公式知

$$\begin{aligned}I_0&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}(y^2-2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}(2y+2z)\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

由对称性知, $\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=0$, 且利用切片法得

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=\int_1^2 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}\sigma=\pi\int_1^2 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{7}{3}\pi,$$

故

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\frac{14}{3}\pi.$$

又

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D 4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi,$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_2}(y^2-2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_2}9\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D 9\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=18\pi,$$

所以 $I=I_0-I_1-I_2=\dfrac{14}{3}\pi-(-4\pi)-18\pi=-\dfrac{28}{3}\pi$.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0)=1, F(x)f(x)=\cos 2x, a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 求出 a_n 的表达式;

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数.

解 (1) 由条件知 $\int F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x=\int F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x, F^2(x)=\sin 2x+C$. 由 $F(0)=1$ 知 $C=1$, 因此

$$F(x)=\sqrt{1+\sin 2x}=|\cos x+\sin x|, |f(x)|=\frac{\cos 2x}{F(x)}=\frac{|\cos^2 x-\sin^2 x|}{|\cos x+\sin x|}=|\cos x-\sin x|,$$

$$\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}.$$

因为 $|f(x)|$ 的周期为 π, 则

$$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=2n\sqrt{2},$$

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n=2\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n$, 其收敛域为 $[-1,1)$. 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n=\sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)x^n\\&=\sqrt{2}\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right),\end{aligned}$$

且 $S(0)=0$. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\leqslant x<1$, 故当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}S(x)&=\sqrt{2}\left[-x\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)\right]\\&=-\sqrt{2}\left(\frac{1+x^2}{2}\ln(1-x)+1+\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}-\sqrt{2}\left(\dfrac{1+x^2}{2}\ln(1-x)+1+\dfrac{x}{2}\right), & -1\leqslant x<1\text{且}x\neq 0\\0, & x=0\end{cases}.$$

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$, 求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解 (1) 设

$$k_1\boldsymbol{\beta} + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} + k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}, \tag{$*$}$$

由题设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i \ (i = 1,2,3)$, 于是

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} = \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3, \end{gathered}$$

代入 ($*$) 式整理得

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量, 必线性无关, 于是

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0, \\ k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0 \end{cases}$$

其系数行列式非零, 因此必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B},$$

从而有

$$\begin{gathered} r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}) = r\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \\ |\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6. \end{gathered}$$

21.（本题满分 11 分）

已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 又知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.

解 由条件知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-1,-1$, 则 $|\boldsymbol{A}|=2$, 因为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $|\boldsymbol{A}|/\lambda$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $1,-2,-2$. 由已知, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量, 也就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量. 由

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$$

得

$$2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1},$$

则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-2,1,1$, 且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=-2\boldsymbol{\alpha}$. 设 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 又 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 故 $x_1+x_2+x_3=0$, 解出 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 $y=-x^2+2x+3$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$;

(2) 求 X,Y 的边缘密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解 (1) 所围区域的面积为
$$S=2\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x=\frac{64}{3},$$
故有
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{64}, & -1<x<3, x^2-2x-3<y<-x^2+2x+3\\ 0, & 其他\end{cases}.$$
(2) X 的边缘密度为
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{32}(-x^2+2x+3), & -1<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$
Y 的边缘密度为
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{32}\sqrt{4-y}, & 0<y<4\\ \dfrac{3}{32}\sqrt{4+y}, & -4<y\leqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}\cdot$$
(3) 当 $-1<x<3$ 时, 条件密度
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(-x^2+2x+3)}, & x^2-2x-3<y<-x^2+2x+3\\ 0, & 其他\end{cases}.$$
(4) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0=0.$

23. 设总体 X 服从双参数指数分布, 其密度为
$$f(x;\mu,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x>\mu\\ 0, & x\leqslant\mu\end{cases}.$$
其中 $-\infty<\mu<+\infty, 0<\theta<+\infty$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求参数 μ,θ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1,\hat{\theta}_1$;

(2) 求参数 μ,θ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2,\hat{\theta}_2$.

解 (1) 总体一阶矩和二阶矩分别为
$$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}=\theta+\mu,$$
$$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\,\mathrm{d}x=2\theta^2+\mu^2+2\theta\mu=\theta^2+(\theta+\mu)^2,$$
令
$$\begin{cases}\overline{X}=\theta+\mu\\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\theta^2+(\theta+\mu)^2\end{cases},$$

解得矩估计量 $\hat{\theta}_1=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}, \hat{\mu}_1=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}$.

(2) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为对应的样本值, 则似然函数为

$$L(\mu,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu,\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$ 时, $\ln L(\mu,\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$. 注意到对任意给定的 $\theta>0$, $L(\mu,\theta)$ 关于 μ 是单调递增的, 但 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$, 因此当 $\mu=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时, L 关于 μ 取最大值. 要求 θ 的最大似然估计值, 令

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0,$$

解得 $\theta=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\bar{x}-\mu$, 因此所求最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}, \hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_2)=\bar{X}-\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$