2020 年考研数学一模拟卷二

命题人:向禹

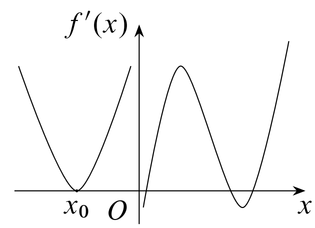
考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = e^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{1+x^2}{x}$ ( )
   (A) 有一条垂直渐近线和一条斜渐近线 (B) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线
   (C) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线 (D) 只有一条斜渐近线

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中 x_0 处曲线与 x 轴相切, 则函数 $f(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 分别有 ( )
   (A) 4 个极值点和 2 个拐点 (B) 3 个极值点和 2 个拐点
   (C) 4 个极值点和 3 个拐点 (D) 5 个极值点和 3 个拐点



第 2 题图

3. 下列使得闭曲线积分 $\oint_L (x^2y-y)\,dx - \dfrac{xy^2}{3}\,dy$ 最大的曲线 L 为 ( )
   (A) $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$, 逆时针 (B) $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$, 顺时针
   (C) $x^2+y^2=1$, 逆时针 (D) $x^2+y^2=1$, 顺时针

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n+1}|$ 收敛的 ( )
   (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

5. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有完全相同的特征向量, 则下列说法正确的是 ( )
   (A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 一定相似 (B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 一定合同
   (C) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ (D) 如果 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则 $\boldsymbol{B}$ 正定

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 一定有解
(B) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不可能有无穷多解
(C) 如果 $m=n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解
(D) 如果方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 也有非零解

7. 设随机事件 A, B 满足 $P(A|B)>P(\bar{A}|B)$, 则下列说法正确的是 ( )

(A) $2P(A)>P(B)$ (B) $2P(\bar{A})>P(B)$ (C) $2P(B)>P(A)$ (D) $2P(\bar{B})>P(A)$

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=\dfrac{1}{3}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $X\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-X\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的概率为 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) 0

答案 DCADCDAC

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上曲率最大点处的曲率半径为________.

答案 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

10. 曲面 $xyz=2$ 上任一点处的切平面与坐标轴的交点以及原点所构成的四面体的体积为________.

答案 9.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{4-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=$________.

答案 $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

12. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛, 则幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^n$ 的收敛区间为________.

答案 $(-2,0)$.

13. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________.

答案 $(0,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,3,2,1)^{\mathrm{T}}$.

14. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的独立的简单随机样本, 如果 $k\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从 F 分布, 则 $k=$________.

答案 $\dfrac{1}{9}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\arctan\sqrt{x-1}$, 则 $\sqrt{x-1}=\tan t, x=\sec^2 t, \mathrm{d}x=2\sec^2 t\tan t$, 则原积分

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\tan t\cdot t}{\sec^2 t}\cdot 2\sec^2 t\tan t\,\mathrm{d}t=2\int t\tan^2 t\,\mathrm{d}t=2\int(t\sec^2 t-t)\,\mathrm{d}t\\&=-t^2+2\int t\,\mathrm{d}(\tan t)=-t^2+2t\tan t+2\ln|\cos t|+C\\&=-\arctan^2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x+C.\end{aligned}$$

16.（本题满分 10 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定 a 的值.

解 由复合函数偏导法则可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{a}{2\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{a}{\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

代入方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2-a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$$

于是有 $1-\dfrac{a^2}{4}=0, 2-a\neq 0$, 所以 $a=-2$.

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(x)>0$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}&=\exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h}\right)\\&=\exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h\cos^2 x}\cos^2 x\right)\\&=\exp\left([\ln f(x)]'\cos^2 x\right)=\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x}.\end{aligned}$$

由条件得

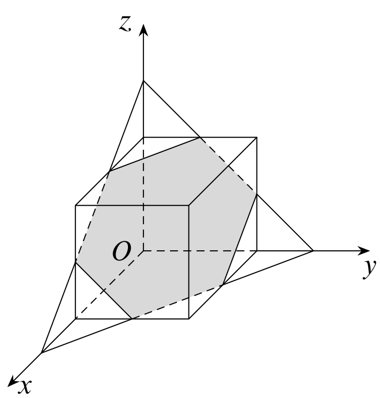
$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x = x\cos^2 x + \tan x, \frac{f'(x)}{f(x)} = x + \tan x \sec^2 x.$$

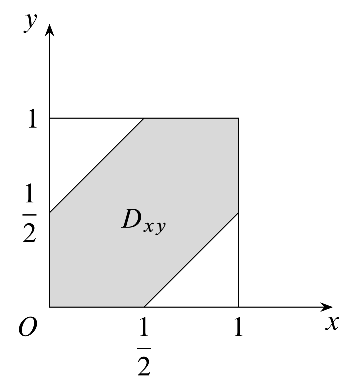
积分可得 $\ln|f(x)| = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\tan^2 x + \ln|C|$, 即 $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 由 $f(0) = 1$ 得 $C = 1$, 故 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 又 $f'(x) = (x + \tan x\sec^2 x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$. 不难得知 $f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 1$.

18.（本题满分 10 分）
设空间曲线 C 由立方体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面与平面 $x + y + z = \dfrac{3}{2}$ 相截而成, 从 z 轴正向往负向看, 方向为逆时针, 试计算曲线积分

$$\oint_C (z^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + 2(x^2 - z^2)\,\mathrm{d}y + 3(y^2 - x^2)\,\mathrm{d}z.$$

解 如图, 设曲线 C 所围成的平面区域为 Σ, 它的法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}, 利用斯托克斯公式得原积分





第 18 题图

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - y^2 & 2(x^2 - z^2) & 3(y^2 - x^2) \end{vmatrix}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}[6y - (-4z) + 2z - (-6x) + 4x - (-2y)]\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(10x + 8y + 6z)\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

由对称性可知 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$, 于是

$$\begin{aligned}
I &= \frac{24}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S = 8\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{3}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 24\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}+x}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x\int_{x-\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}y\right) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且满足 $f(0)=0, f(1)=2, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)=-12$, 并给出一个满足条件的函数 $f(x)$.

证明 (1) 由积分中值定理知存在 $\zeta\in(0,1)$ 使得 $2=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f(\zeta)=f(1)$, 再由罗尔定理可知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 先构造一个满足题意的二次多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$, 由

$$\begin{cases}
f(0)=c=0 \\
f(1)=a+b+c=2 \\
\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,\mathrm{d}x=2
\end{cases}$$

可得 $a=-6, b=8, c=0$, 于是 $f(x)=-6x^2+8x$ 就是一个满足条件的函数. 令

$$F(x)=f(x)+6x^2-8x,$$

那么 $F(x)$ 满足 $F(0)=F(1)=0, \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=0$, 由积分中值定理知存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $F(\theta)=0$, 由罗尔定理知存在 $\eta_1\in(0,\theta), \eta_2\in(\theta,1)$, 使得 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$, 进一步由罗尔定理知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$ 使得 $F''(\eta)=f''(\eta)+12=0$, 即 $f''(\eta)=-12$.

20.（本题满分 11 分）

a,b 取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases}
ax_1+x_2+x_3=4 \\
x_1+bx_2+x_3=3 \\
x_1+2bx_2+x_3=4
\end{cases}$$

有解? 在有解的情形下, 求出方程组的所有解.

解 首先系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1).$$

当 $b \neq 0, a \neq 1$ 时, 方程组有唯一解, 由克拉默法则不难得知解为

$$x_1 = \frac{1-2b}{b(1-a)}, \quad x_2 = \frac{1}{b}, \quad x_3 = \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}.$$

当 $b = 0$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases},$$

此时显然方程组无解. 当 $a = 1$ 时, 方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases},$$

这时系数矩阵行列式为零. 对齐增广矩阵进行初等行变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 $b = \frac{1}{2}$, 则 $b - 1 = -\frac{1}{2}$, 可得一般解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (2-k, 2, k), k \in \mathbb{R}.$$

如果 $b \neq \frac{1}{2}$, 系数矩阵非零的最高阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2b-1 \end{vmatrix} \neq 0$, 故其秩为 2, 而其增广矩阵有三级非零子式, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

这时, 方程组无解.

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $g(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求出一个满足题意的正交变换;

(3) 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面?

解 (1) 由题意, 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 2b\\ 1 & 2b & 1\end{pmatrix}$ 的特征值为 0, 1, 2, 因此

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 2b\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=-a^2+4ab-4b^2=0, |\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & -a & -1\\ -a & 0 & -2b\\ -1 & -2b & 0\end{vmatrix}=-4ab=0,$$

于是 $a=b=0$.

(2) 对特征值 $\lambda_1=0$, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_1 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$; 对特征值 $\lambda_2=1$, 解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_2 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$; 对特征值 $\lambda_3=2$, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_3 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 原二次型化为标准形 $y_2^2+2y_3^2$.

(3) 注意到二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 即 $y_2^2+2y_3^2=1$, 此曲面为椭圆柱面.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 记 $Y=\min\{X_2,X_3\}$, 求 Y 的概率密度;

(2) 求 $P\big(X_1=\min\{X_1,X_2,X_3\}\big)$.

解 (1) 参数为 1 的指数分布的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$, Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P\big(\min\{X_2,X_3\}\leqslant y\big)=1-P\big(\min\{X_2,X_3\}\geqslant y\big)\\&=1-P(X_2\geqslant y,X_3\geqslant y)=1-P(X_2\geqslant y)P(X_3\geqslant y)\\&=1-[1-F(y)]^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}.\end{aligned}$$

因此 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$.

(2) $\min\{X_1,X_2,X_3\}=\min\{X_1,Y\}$, X_1 与 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x-2y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

那么

$$P\big(X_1=\min\{X_1,Y\}\big)=P(X_1\leqslant y)=\iint\limits_{x\leqslant y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

23. 设总体 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

其中参数 $\sigma>0$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$, 并计算 $E(\hat{\sigma}_2^2)$.

解 (1) 样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$, 总体均值为

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma.$$

令 $\bar{X}=E(X)$, 解得 $\sigma^2=\dfrac{2}{\pi}\bar{X}^2$, 即 σ^2 的矩估计量为 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{2}{\pi}\bar{X}^2$.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{\sigma^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, $\ln L(\sigma^2)=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-n\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n x_i^2=0,$$

解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$, 即 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$, 且

$$E(\hat{\sigma}_2^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n E(X_i^2)=\frac{1}{2}E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma^2.$$