

2019 年上海新星夏季数学奥林匹克试题

1. 设 $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ 是实数, 且满足 $x_1 + \dots + x_{2019} \in \mathbb{Z}$. 求

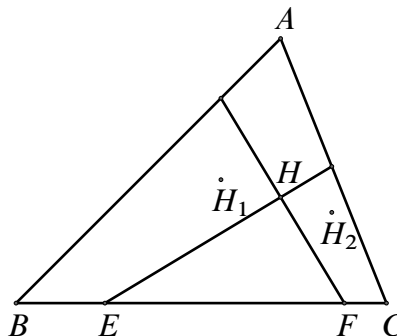
$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2019} \{x_i + x_j\}$$

的最大值.

(山西大学附属中学 王永喜 供题)

2. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, E, F 在 BC 上, $EH \perp HF$, 延长 EH 与 AC 交于 M , 延长 FH 与 AB 交于 N . H_1, H_2 为 $\triangle BNF, \triangle CME$ 的垂心. 证明: H_1, H, H_2 共线.

(广西钦州 卢圣 供题)



3. 设 n, r 为正整数, $n > r$. 将圆周上给定的 $2n$ 个点染 n 种颜色, 每色染 2 个点, 且任何两个同色点之间恰有 r 个点.

(1) 试问: n, r 能否同为奇数?

(2) 如果 $r + 1$ 为质数, 求 n 的所有可能值.

(深圳高级中学 冯跃峰 供题)

4. 证明: 存在全体正整数的一个排列 a_1, a_2, \dots , 使得对任意自然数 i , 均有

$$(a_i, a_{i+1}) \geq \frac{i}{2}.$$

(哥伦比亚大学 饶家鼎 供题)

5. 设 n 是正整数, $2n$ 个实数 x_i, y_i ($1 \leq i \leq n$) 满足

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1.$$

已知 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n, 1 \in [\lambda_1, \lambda_n]$. 证明:

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2} \leq \lambda_n.$$

(北京大学 王逸轩 供题)

6. 对边不平行的四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$. 设对角线 AC, BD 交于点 P , 直线 AD, BC 交于点 E , M 是 OP 的中点. 已知 $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle APB, \triangle CPD$ 的外心共圆, 证明: 该圆圆心是 $\triangle OME$ 的垂心.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)