2020 届考研数学全真模拟卷(数学三)

命题人　向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则函数 $|f(|x|)|$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 ( )

(A) $f(0)=0$　(B) $f(0)\neq 0$　(C) $f'(0)=0$　(D) $f'(0)\neq 0$

2. 设在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$, 令

$$M=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a),\quad P=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

则 ( )

(A) $M<N<P$　(B) $P<M<N$　(C) $P<N<M$　(D) $M<P<N$

3. 已知微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x+x^2)\mathrm{e}^x$, 则 a,b,c 依次为 ( )

(A) $1,-2,1$　(B) $1,0,\frac{1}{2}$　(C) $2,1,\frac{1}{2}$　(D) $-2,1,2$

4. 已知数列 a_n,b_n 均非零, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, 则 ( )

(A) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　(B) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(C) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散　(D) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定的 ( )

(A) 充分而非必要条件　(B) 必要而非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分也非必要条件

6. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维正交的单位列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 1 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值　(B) 2 必为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵　(D) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

7. 已知随机事件 A, B 满足 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(B|A) = 2$, 则 ( )

(A) $A \subset B$　　(B) $B \subset A$　　(C) $P(A|\overline{B}) = 0$　　(D) $P(B|\overline{A}) = 1$

8. 已知随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha \in (0.5, 1)$ 时, $P(X < x_\alpha) = \alpha$, 则 $P(Y < x_\alpha^2) =$ ( )

(A) $2\alpha - 1$　　(B) $\alpha - \dfrac{1}{2}$　　(C) α　　(D) $1 - \alpha$

答案　CBDBCDCA

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x^2} =$________.

答案　$\dfrac{\pi}{4}$.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \ln x - 2x^2 \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x) =$________.

答案　$\ln x - \mathrm{e}^{-2}x^2$.

11. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{-\sin x} f(x)\,\mathrm{d}y$ 的积分顺序的结果为________.

答案　$-\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\arcsin y}^{\pi + \arcsin y} f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

12. 差分方程 $\Delta y_x - \Delta y_{x-1} - y_{x-1} = 2^x$ 的通解为________.

答案　$y_x = C \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 + 2\lambda + 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 \end{vmatrix} =$________.

答案　0.

14. 袋子里面有一红一白两个球, 随机从中有放回地取球, 直到两种颜色的球均取到为止, 则取球次数的数学期望为________.

答案　3.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 令

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) + x f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$$

若 $g'(0) = 1$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

解 由题意以及泰勒公式可得

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)+xf(x)}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+xf(x)-\frac{1}{2}x^2}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x\left(f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2\right)-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+f(0))x+\left(f'(0)-1\right)x^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}f''(0)\right)x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=1.
\end{aligned}$$

由此得 $1+f(0)=f'(0)-1=0, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}f''(0)=1$, 所以 $f(0)=-1, f'(0)=1, f''(0)=\dfrac{4}{3}$.

16.(本题满分 10 分)

设区域 $D=(x,y)|x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$, 计算积分 $\displaystyle\iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}\sigma$.

解 直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$, 则

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \cos\frac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}\cos\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)r\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\frac{1}{2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\sin\left[\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin 1.
\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设函数 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

解 记 $v=\ln r, r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\dfrac{1}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r^2}\cdot f'(v),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r^2}\cdot f'(v).$$

进一步计算二阶偏导数得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^4}\cdot f''(v)+\frac{1}{r^2}\cdot f'(v)-\frac{2x^2}{r^4}\cdot f'(v),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^4}\cdot f''(v)+\frac{1}{r^2}\cdot f'(v)-\frac{2y^2}{r^4}\cdot f'(v).
\end{aligned}$$

代入条件 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ 并化简得微分方程 $f''(v)=\mathrm{e}^{5v}$, 结合初值条件 $f(0)=f'(0)=0$ 解得 $f(v)=\dfrac{1}{25}\mathrm{e}^{5v}-\dfrac{1}{5}v-\dfrac{1}{25}$.

18.（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sqrt{|\cos x|}\,(x\geqslant 0)$ 与 x 轴所围成的区域绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解 由旋转体的体积公式得所求体积为

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\cos x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\cos x|\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x}|\cos x|\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-(t+k\pi)}|\cos(t+k\pi)|\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\pi}\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\\
&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}.
\end{aligned}$$

19.（本题满分 10 分）设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0)=1, F(x)f(x)=\cos 2x, a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 求出 a_n 的表达式;

(2) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数.

解 (1) 由条件知 $\displaystyle\int F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x=\int F(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x$, $F^2(x)=\sin 2x+C$. 由 $F(0)=1$ 知 $C=1$, 因此

$$F(x)=\sqrt{1+\sin 2x}=|\cos x+\sin x|,\ |f(x)|=\frac{\cos 2x}{F(x)}=\frac{|\cos^2 x-\sin^2 x|}{|\cos x+\sin x|}=|\cos x-\sin x|,$$

$$\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}.$$

因为 $|f(x)|$ 的周期为 π, 则

$$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=2n\sqrt{2},$$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n=2\sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n$, 其收敛域为 $[-1,1)$. 当 $x\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n=\sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)x^n\\&=\sqrt{2}\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right),\end{aligned}$$

且 $S(0)=0$. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\leqslant x<1$, 故当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}S(x)&=\sqrt{2}\left[-x\ln(1-x)+\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)\right]\\&=-\sqrt{2}\left(\frac{1+x^2}{2}\ln(1-x)+1+\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

所以

$$S(x)=\begin{cases}-\sqrt{2}\left(\dfrac{1+x^2}{2}\ln(1-x)+1+\dfrac{x}{2}\right), & -1\leqslant x<1\text{且}x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明: $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$, 求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解 (1) 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{A\beta}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},\tag{$*$}$$

由题设 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$, 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\beta}&=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}&=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

代入 ($*$) 式整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个不同特征值对应的特征向量, 必线性无关, 于是

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0,\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases}$$

其系数行列式非零, 因此必有 $k_1=k_2=k_3=0$, 故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})&=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

从而有

$$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=r\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=2,$$

$$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=6.$$

21.（本题满分 11 分）

已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 又知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.

解 由条件知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-1,-1$, 则 $|\boldsymbol{A}|=2$, 因为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $|\boldsymbol{A}|/\lambda$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $1,-2,-2$. 由已知, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量, 也就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量. 由

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$$

得

$$2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1},$$

则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-2,1,1$, 且 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=-2\boldsymbol{\alpha}$. 设 $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 又 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 故 $x_1+x_2+x_3=0$, 解出 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 $y=-x^2+2x+3$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$；

(2) 求 X,Y 的边缘密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(4) 计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解 (1) 所围区域的面积为

$$S=2\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x=\frac{64}{3},$$

故有

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{64}, & -1<x<3, x^2-2x-3<y<-x^2+2x+3\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

(2) X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{32}(-x^2+2x+3), & -1<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Y 的边缘密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{32}\sqrt{4-y}, & 0<y<4\\ \dfrac{3}{32}\sqrt{4+y}, & -4<y\leqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

(3) 当 $-1<x<3$ 时, 条件密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(-x^2+2x+3)}, & x^2-2x-3<y<-x^2+2x+3\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

(4) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0=0.$

23. 设总体 X 服从双参数指数分布, 其密度为

$$f(x;\mu,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x>\mu\\ 0, & x\leqslant\mu\end{cases}.$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty, 0<\theta<+\infty$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求参数 μ,θ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1,\hat{\theta}_1$;

(2) 求参数 μ,θ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2,\hat{\theta}_2$.

解 (1) 总体一阶矩和二阶矩分别为

$$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}=\theta+\mu,$$

$$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\,\mathrm{d}x=2\theta^2+\mu^2+2\theta\mu=\theta^2+(\theta+\mu)^2,$$

令

$$\begin{cases}\bar{X}=\theta+\mu\\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\theta^2+(\theta+\mu)^2\end{cases},$$

解得矩估计量 $\hat{\theta}_1=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}, \hat{\mu}_1=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2}$.

(2) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为对应的样本值, 则似然函数为

$$L(\mu,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu,\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$ 时, $\ln L(\mu,\theta)=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$. 注意到对任意给定的 $\theta>0$, $L(\mu,\theta)$ 关于 μ 是单调递增的, 但 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\mu$, 因此当 $\mu=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时, L 关于 μ 取最大值. 要求 θ 的最大似然估计值, 令

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\bar{x}-\mu$, 因此所求最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_2)=\bar{X}-\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$