导函数介值定理（达布定理）

定理 1. 闭区间 $[a,b]$ 上的可导函数一定可以取到介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的值.

证明. 我们证明它的等价形式, 即所谓导函数零点定理: 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 对于介值定理我们只需要考虑函数 $g(x)=f(x)-\mu x$, 其中 μ 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值.

不妨假定 $f'_+(a)<0<f'_-(b)$, 由导数定义

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限保号性, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 即 $f(x)-f(a)>0$, 这说明 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 同理 $f(b)$ 也不是最大值. 因此存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 从而由费马定理可知 $f'(\xi)=0$. ☆

这个定理阐述了导函数很重要的性质: 介值性. 对于一般的函数而言, 连续才具有介值性, 而导函数的特殊之处在于它存在就具有介值性, 并不需要导函数连续, 当然, 我们有经典的导函数不连续的例子:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

导函数极限定理

定理 2. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 $x=0$ 的去心邻域内可导, 且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且

$$f'(x_0)=A.$$

证明. 这个定理看起来高大上, 实际上一步定义加洛必达就完了:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0).$$

☆

这个定理也阐述导函数的一个特性, 对于连续函数而言, 极限存在无法保证函数的连续性, 但是导函数很特殊, 极限存在就意味着连续. 当然, 上述结论对于单侧导数也同样成立.

步入正题, 以上两个定理是考研教材未列举出来, 而实则需要大家掌握其证明和应用的定理. 在此定理的基础上, 我们推出导函数的其他结论.

推论 1. 可导函数的导函数一定没有第一类间断点.

证明. 不管是第一类的可去间断点还是跳跃间断点, 因为导函数的左右极限均存在, 那么这都将与导函数的极限定理矛盾. ☆

注: 导函数可以有间断点, 但是只能是第二类间断点.

由于积分与导数的互逆性, 我们有

推论 2. 含有第一类间断点的函数在包含此间断的区间上不存在原函数.

利用导函数介值定理, 我们可以很容易证明广义的罗尔定理:

广义罗尔定理

定理 3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导, 其中 a,b 可以是无穷大, 且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 反证法. 假定不存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 那么根据导函数的介值定理可知 $f'(x)$ 在 (a,b) 上不变号, 即 $f'(x)$ 恒正或恒负, 因此 $f(x)$ 是严格单调的, 这与 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$ 矛盾, 因此存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. ☆

当然, 广义的罗尔定理以及广义的柯西中值定理都有其特殊的证明方法, 我们假定 $a = -\infty, b = +\infty$, 令

$$F(t) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ A, & t = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases},$$

则 $F(t)$ 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上满足普通的罗尔定理条件, 存在 $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $F'(\eta) = f'(\tan\eta)\sec^2\eta = 0$, 取 $\xi = \tan\eta$, 则 $f'(\xi) = 0$.

除此之外, 在这里会涉及到一些让多数同学混淆的符号, 这里留一个例题给大家:

例 1. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义,

(1) 如果 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在, 问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否连续? 是否可导?

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在且相等, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否可导?

(3) 在 (2) 的基础上假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 结果又如何?

一阶线性微分方程的通解形式

在同济高数教材上给出的方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解形式如下:

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C\right) \\
&= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

首先同济教材对此公式的推导采用及其复杂的方法, 齐次此通解的形式是及其不明确的式子, 这里包含了三个不定积分符号, 所以每个不定积分都是都带有常数的, 虽然同济书上指出这里的不定积分理解为某个原函数, 但是这种写法无法让人理解, 那么它正确的写法应该怎么写呢, 我们利用积分因子给出它的推导, 和形式上的明确化:

$$
y = C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} q(s)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s.
$$

积分因子法的推导

在同济高数教材上给出的方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解形式如下:

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C\right) \\
&= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

注意到 $P(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, 在原方程两边乘以 $\mathrm{e}^{P(x)}$ 得

$$
\mathrm{e}^{P(x)}\big(y' + p(x)y\big) = \left(y\mathrm{e}^{P(x)}\right)' = q(x)\mathrm{e}^{P(x)}
$$

将上式从 x_0 到 x 再积分一次得

$$
y\mathrm{e}^{P(x)} - y_0\mathrm{e}^{P(x_0)} = \int_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{P(t)}\,\mathrm{d}t
$$

我们把形式简化一点可以写为

$$
y = y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} q\,(s)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s
$$

上述解其实是满足 $y(x_0) = y_0$ 的解, 把 y_0 写为 C, 就得到通解形式

$$
y = C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} q\,(s)\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s
$$

这就是非常明确的形式解, 不包含任何不定积分符号, 只有一个积分常数, 每个变限积分都是具体的一个函数.

一道级数敛散性判别

最近有读者问了我一道级数问题, 难度还不小, 之前也有读者问过类似的题, 今天一并给出解答.

例 2. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0(n>1)$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n, n\geqslant 2$$

证明:

1. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n, n\geqslant 2$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明 第一问显然, 只需要注意到

$$\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$$

然后两边除以 $\ln n$ 即可. 然后

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}\left(1+\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}b_n\right)=\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}(1+c_n) \qquad (*)$$

注意到

$$c_n=\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}b_n\sim b_n$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也是绝对收敛, 则存在常数 $m\in\mathbb{N}$, 当 $k\geqslant m$ 时 $|c_k|<\dfrac{1}{2}$. 而由 $(*)$ 式可知

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}>\frac{a_n}{\frac{1}{n\ln n}(1+c_n)}>\cdots>\frac{a_m}{\frac{1}{m\ln m}\prod_{k=m}^{n}(1+c_k)}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛, 则当 $n\to\infty$ 时, $\prod\limits_{k=m}^{n}(1+c_k)$ 收敛到某个正的常数, 也就是当 n 充分大时, $a_n>\dfrac{C}{n\ln n}$, C 为某个正的常数, 这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

同类似的一道题

如果正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O\left(b_n\right), n\to\infty$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 这题是史济怀数学分析课后问题, 有上一题就知道这题该怎么做了, 和上面类似的推导, 记 $c_n=\dfrac{n}{n+1}O\left(b_n\right)$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\frac{1}{1+c_n},$$

于是得到

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{a_m}{\frac{1}{m}\prod_{k=m}^{n}\left(1+c_k\right)}$$

然后 $\prod\limits_{k=m}^{n}\left(1+c_k\right)$ 当 $n\to\infty$ 的极限存在, 说明 a_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 同阶, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

解答黄之老师两道征解题

向 禹

征解题一解答

1. 设 $f(t)=\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x-tx)\,\mathrm{d}x, t\in\mathbb{R}$. 证明: 当 t 为非负整数时, $f(t)=\dfrac{\pi}{t!}$; 当 t 为负整数时, $f(t)=0$. 并证明:若 n 为正整数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}\pi.$$

解 利用留数定理可得

$$\begin{aligned}
f(t)&=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x-tx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x+\mathrm{i}\sin x-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{i}tx\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^{z}}{z^{t+1}\mathrm{i}}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}},z=0\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{t!}, & t\in\mathbb{N}\\ 0, & t\in\mathbb{Z}^-\end{cases}.$$

最后一步留数的计算只需要将 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}}$ 展开为 Laurent 级数, 找其负一次幂系数即可.

注意到

$$\begin{aligned}&\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\\ =&\left(\cos(\sin x)\cos\frac{nx}{2}+\sin(\sin x)\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\\ =&\frac{1}{2}\cos(\sin x)\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}\sin(\sin x)\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].\end{aligned}$$

于是原极限可以成四部分, 其中由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$L_4=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0.$$

而

$$\begin{aligned}L_1&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{\mathrm{e}\pi}{2}.\end{aligned}$$

上述积分利用傅里叶级数

$$\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)=\operatorname{Re}\left[\exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right]=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!}$$

即可得到.

$$\begin{aligned}L_2&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(0)=\frac{\pi}{2},\\ L_3&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{\cos^2(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\frac{1+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/2}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/(2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\oint_{|z|=1}\mathrm{e}^{z}\frac{z+1}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\,(\mathrm{e}-1)\right]=\frac{(\mathrm{e}-1)\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

注意上述积分中, 极点 $z=1$ 在围道边界上, 由小弧引理, 辐角值取 π 而不是 2π.

因此最后所求极限为

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=L_1+L_2+L_3-L_4=\mathrm{e}\pi.
$$

征解题二解答

2. 当 $t\in\mathbb{R}$ 时, 以下两个极限分别是什么?

$$
\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{tx}{2}\right)\sin\frac{(t+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,
$$
$$
\lim_{t\to-\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{tx}{2}\right)\sin\frac{(t+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.
$$

解 注意到在第一题中, 如果 $n\to-\infty$, 则 $L_1=-\frac{\mathrm{e}\pi}{2}, L_2=\frac{\pi}{2}, L_3=\frac{(\mathrm{e}-1)\pi}{2}$, 则当 $n\to-\infty$ 时原极限为零, 那么根据归结原理, 这里的两个极限如果存在一定和上述 $n\to+\infty$ 和 $n\to-\infty$ 的极限分别相等. 事实上, 这里的极限利用积化和差公式也可以拆开成四部分. 其中 L_2, L_3 为常数, L_4 由 Riemann-Lebesgue 引理知为 0. 剩下 L_1, 我们只证明

$$
\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t,x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(n,x)\,\mathrm{d}x,
$$

其中

$$
g(t,x)=\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.
$$

对任意 $t>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant t<n+1$, 且 $t\to+\infty\Leftrightarrow n\to+\infty$, 则

$$
\begin{aligned}
g(t,x)-g(n,x)&=\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\\
&=\frac{2\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{t-n}{2}x\cos\left(\frac{n+t}{2}+1\right)x.
\end{aligned}
$$

注意到

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{t-n}{2}x\right| < \left|\frac{\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\right|$$

上式右端在 $[0,\pi]$ 绝对可积, 于是用类似 Riemann-Lebesgue 引理的证法可知,

$$\lim_{n\to\infty}[g(t,x)-g(n,x)]=0.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n,x)=\mathrm{e}\pi$, 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t,x)=\mathrm{e}\pi$. 同理可得 $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t,x)=0$.

几个略有难度的考研极限题

今天讲三个极限题的计算, 其中前两个是非数类难度, 第三个是数学类难度, 那么这里介绍的都是常规的计算技巧, 非常规技巧参见我在 2017 年 9 月份左右发布的 Stolz 定理的函数 Stolz 定理的内容.

经典考题

例 3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{n\pi}$$

注意到 $\displaystyle\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2n$, 于是

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

不难得知所求的极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

注: 本题的结论可以有一些推广, 比如上述 $\sin t$ 换为 $\cos t$, 结论照样不变, 利用辅助角公式我们可以进一步得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|a\sin t+b\cos t|\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\int_0^x|\sin(t+\varphi)|\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\pi}$$

事实上, 更一般的结论是

定理 4. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

复习全书上的一道题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)^2\,\pi^2}\leqslant\frac{\int_0^{x} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{n^2\pi^2}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boxed{\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}&=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\,|\sin(n\pi-t)|\,\mathrm{d}t\\&=\boxed{\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}\\&=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=n^2\pi\end{aligned}$$

于是

$$\frac{n^2\pi}{(n+1)^2\,\pi^2}\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{(n+1)^2\,\pi}{n^2\pi^2}$$

不难得知所求的极限为 $\frac{1}{\pi}$.

注: 上述方法虽然对于更高次的极限也可以使用, 但是极限的计算越来越难, 最好是使用函数 Stolz 定理了. 当然了, 利用 $\sin x$ 的傅里叶级数可以得到更一般的结论, 这里就不再介绍.

最后再看一个数学类难度的问题

小有难度的一题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$,

于是

$$\frac{1}{\ln{(n+1)}\,\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\ln{(n\pi)}}\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

注意到

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{(k+1)\,\pi}\mathrm{d}t<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t<\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

而上述左右两边的等价无穷大均为 $\frac{2}{\pi}\ln n$, 于是原极限为 $\frac{2}{\pi}$.

注: 作为练习, 读者可以求如下极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$