Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

考研数学 试题解答

追求卓越排版, 巧解数学难题.

作者: 向禹老师
完成时间: 2020 年 3 月 4 日
Email: 739049687@qq.com

Version: 1.0

目录

第 1 章 2006 年考研数学三

一、填空题, 1 ～ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

✎ **解:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=\mathrm{e}^0=1.$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导, 且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$, 则 $f'''(2)=$________.

✎ **解:** 等式两边对 x 求导得 $f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}$, 再次求导得 $f'''(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$, 又 $f(2)=1$, 故 $f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^3$.

3. 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, 则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$________.

✎ **解:** 对 $z=f(4x^2-y^2)$ 两边进行微分得

$$\mathrm{d}z=f'(4x^2-y^2)\,\mathrm{d}(4x^2-y^2)=f'(4x^2-y^2)(8x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y),$$

因此 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=f'(0)(8\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y)=4\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

✎ **解:** 由条件可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|2\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2^2=4,$$

因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$, 所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\big(\max\{X,Y\}\big)\leqslant 1=$________.

✎ **解:** $P\big(\max\{X,Y\}\big)\leqslant 1=P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)=P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}.$

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,(-\infty<x<+\infty)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2, 则 $ES^2=$________.

✎ **解:** 样本方差是总体方差的无偏估计, 即

$$ES^2 = D(X) = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$= \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - 0 = 2.$$

二、选择题, 7 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 (　)
A. $0 < \mathrm{d}y < \Delta y$　B. $0 < \Delta y < \mathrm{d}y$　C. $\Delta y < \mathrm{d}y < 0$　D. $\mathrm{d}y < \Delta y < 0$

✎ **解:** 由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

于是 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0$, $\Delta x > 0$, 即 $0 < \mathrm{d}y < \Delta y$, 选 A.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则 (　)
A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　B. $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　D. $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 (　)
A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛
C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

✎ **解:** 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 选 D. 而 A, B, C 均可取反例 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

10. 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x), C$ 为任意常数, 则该方程的通解是 (　)
A. $C[y_1(x) - y_2(x)]$　B. $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
C. $C[y_1(x) + y_2(x)]$　D. $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

✎ **解:** $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解, 则它的通解为 $Y = C[y_1(x) - y_2(x)]$, 故原方程的通解为 $y = y_1(x) + Y = y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$, 选 B.

11. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 (　)

A. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$
C. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

✎ **解:** 令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 并记对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值为 λ_0, 则

$$\begin{cases}F_x'(x_0,y_0,\lambda_0)=0\\F_y'(x_0,y_0,\lambda_0)=0\end{cases},\quad \text{即}\quad \begin{cases}f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x'(x_0,y_0)=0\\f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0\end{cases},$$

那么当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0\neq 0,\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 消去 λ_0 得

$$f_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0,$$

注意到 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$, 于是 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 选 D.

12.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关
B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关
C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关
D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

✎ **解:** 注意到 $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s,$$

因此 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关, 选 A.

13.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行的 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$ C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$

✎ **解:** 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{PAP}^{-1},$$

因此选 B.

14.设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 $P\left(|X-\mu_1|<1\right)>P\left(|Y-\mu_2|<1\right)$, 则必有 ( )

A. $\sigma_1<\sigma_2$ B. $\sigma_1>\sigma_2$ C. $\mu_1<\mu_2$ D. $\mu_1>\mu_2$

✎ **解:** 将 X,Y 标准化, 则 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$, $\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(0,1)$, 那么

$$P\left(|X-\mu_1|<1\right)=P\left(\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1,$$

$$P(|Y-\mu_2|<1)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1.$$

因此 $P(|X-\mu_1|<1)>P(|Y-\mu_2|<1)\Rightarrow\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$, 所以 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1<\sigma_2$, 选 A.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 7 分)

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x>0, y>0$, 求

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

✎ **解:** (1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}, x>0$.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}g(x)&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x}{x\arctan x}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x\arctan x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x^2}{x^2}=\pi.\end{aligned}$$

16.(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的平面区域.

✎ **解:** 化为先对 x 后对 y 的累次积分得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^1\sqrt{y}\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y-x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sqrt{y}\cdot\left(-\frac{2}{3}(y-x)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{y}\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{y}\cdot y^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1y^2\,\mathrm{d}y=\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

证明: 当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

☛ **证明:** 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x, x\in(0,\pi)$, 则

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi,\quad f'(\pi)=0,$$
$$f''(x)=\cos x+x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,$$

因此当 $x\in(0,\pi)$ 时, $f'(x)$ 单调递减, $f'(x)>f'(\pi)=0$, 则 $f(x)$ 单调增加, 于是当 $0<a<b<\pi$ 时, $f(b)>f(a)$, 即

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

18.(本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1,0)$, 其上任意点 $P(x,y)\ (x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a>0$).

(1) 求 L 的方程;

(2) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

✎ **解:** (1) 设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$, 由题意得

$$y'-\frac{y}{x}=ax,$$

因此 $\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{xy'-y}{x^2}=a$, $\frac{y}{x}=ax+C$, $y=ax^2+Cx$. 再由 $f(1)=0$ 知 $C=-a$, 故曲线 L 的方程为 $y=ax^2-ax\ (x\neq 0)$.

(2) 曲线 L 与直线 $y=ax\ (a>0)$ 所围成的平面图形的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2|ax-(ax^2-ax)|\,\mathrm{d}x\\&=a\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}\Rightarrow a=2.\end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

✎ **解:** 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}\Bigg/\frac{x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x^2,$$

令 $x^2<1$ 得 $-1<x<1$, 即幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时, 对应的级数也收敛, 因此收敛域为 $[-1,1]$. 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)(2n)}=2xS_1(x),$$

而

$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x,\ S_1(0)=0,$$

因此

$$\begin{aligned}S_1(x)&=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}t\\&=t\arctan t\big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

由于级数在 $x=\pm1$ 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=\pm1$ 处均连续, 所以

$$S(x)=2xS_1(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),x\in[1,1].$$

20.(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$. 问 a 为何值时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关? 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

✎ **解:** 记以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)a^3.$$

于是当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时, 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是一个极大无关组, 且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a=-10$ 时,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix},$$

由于此时 $\boldsymbol{A}$ 有三阶非零子式 $\begin{vmatrix}-9&2&3\\1&-8&3\\1&2&-7\end{vmatrix}=-400$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为极大无关组, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

✎ **解:** (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 即有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 3, 0, 0.

特征值 $\lambda=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}, k\neq 0$;

特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}, k_1,k_2$ 不全为零.

(2) 先对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 进行斯密特正交化,

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(3) 由 (2) 知 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$, 那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{Q}$, 则

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}^6\boldsymbol{Q}$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{E}.$$

22.(本题满分 13 分)

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(3) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解: (1) Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$. 当 $y\leqslant 0$ 时, $F_Y(y)=0$. 当 $0<y<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\left(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right)=P\left(-\sqrt{y}\leqslant X<0\right)+P\left(0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y}.\end{aligned}$$

当 $y\geqslant 4$ 时, $F_Y(y)=1$, 因此 Y 的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)$, 其中

$$\begin{gathered}E(X)=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}, E(X^2)=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{6},\\ E(X^3)=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{7}{8},\end{gathered}$$

因此 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$.

(3)

$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{2},4\right)&=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right)=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right)\\&=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right)=P\left(-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right)=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

23.(**本题满分 13 分**)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数.

(1) 求 θ 的矩估计;

(2) 求 θ 的最大似然估计.

✎ **解:** (1) 总体均值为 $\bar{X} = \int_0^1 \theta x \, \mathrm{d}x + \int_1^2 (1-\theta)x \, \mathrm{d}x = \frac{3}{2} - \theta$, 令样本均值 $\bar{X} = \frac{3}{2} - \theta$, 解得 $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$, 即 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$.

(2) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N},$$

取对数得 $\ln L(\theta) = N \ln\theta + (n-N)\ln(1-\theta)$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0,$$

解得 $\theta = \frac{N}{n}$, 因此 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

第 2 章 2007 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

   A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

✎ **解:** 当 $x \to 0^+$ 时,

$$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = -\sqrt{x}, \ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1+1\right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, 1-\cos\sqrt{x}\frac{1}{2}x.$$

因此选 B.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

   A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

   B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

   C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

   D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

✎ **解:** A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则

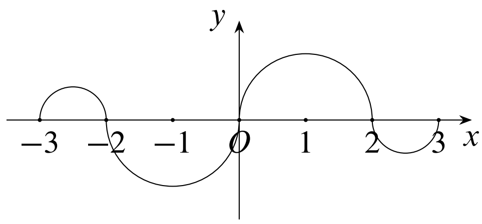
$$f(0)=0, f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例 $f(x)=|x|$ 说明 D 选项错误, 选 D.

3. 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$, $[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0]$, $[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )

   A. $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　B. $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

   C. $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　D. $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$



第 3 题图

✎ **解:** 根据定积分的几何意义知, $F(2)$ 是半径为 1 的半圆面积, $F(2)=\frac{1}{2}\pi$, $F(3)$ 是两个半圆的面积之差, $F(3)=\frac{1}{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}F(2)$,

$$F(-3)=\int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 ( )

A. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

✎ **解:** 积分区域 $D:\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi, \sin x\leqslant y<1$, 也可表示为

$$0\leqslant 1, \pi-\arcsin y\leqslant x\leqslant\pi,$$

因此 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, 选 B.

5. 设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$, 其中 Q,P 分别表示需求量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是 ( )

A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

✎ **解:** 商品需求弹性的绝对值为 $\left|\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\cdot\frac{P}{Q}\right|=\left|\frac{-2P}{160-2P}\right|=1\Rightarrow P=40$, 选 D.

6. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

✎ **解:** 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x)=\infty$, 所以 $x=0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x)=0$, 所以 $y=0$ 为水平渐近线. 又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=1.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y-x)&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})=0,\end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y=x$, 选 D.

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

✎ **解:** 不难知 A 中三个向量的和为 $\mathbf{0}$, 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( )

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

✎ **解:** 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,3,3$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $0,1,1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同而不相似, 选 B.

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次设计射击命中目标的概率为 $p\,(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ( )

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$　　C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

✎ **解:** "第 4 次射击恰好第 2 次命中" 表示第 4 次射击命中目标, 前 3 次中只有 1 次命中目标, 因此所求的概率为 $C_3^1p^2(1-p)^2=3p^2(1-p)^2$, 选 C.

10.设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ( )

A. $f_X(x)$　　B. $f_Y(y)$　　C. $f_X(x)f_Y(y)$　　D. $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

✎ **解:** 因为 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, 故 X 与 Y 相互独立, 于是 $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$, 因此选 A.

二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

✎ **解:** 当 $x\to+\infty$ 时, 2^x 是比 x^3 高阶的无穷大, 而 $\sin x+\cos x$ 有界, 根据无穷小乘以有界量为无穷小知原极限为 0.

12.设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0)=$________.

✎ **解:** $y=(2x+3)^{-1}$, $y'=-1\cdot2(2x+3)^{-2}$, $y''=-1\cdot(-2)2^2(2x+3)^{-3}$, 归纳可知 $y^{(n)}=(-1)^n n!2^n(2x+3)^{-n-1}$, 从而 $y^{(n)}(0)=\dfrac{1}{3}(-1)^n n!\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

13.设 $f(u,v)$ 是二元可微函数, $z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

✎ **解:** $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$, 于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(-\frac{y}{x^2}f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)-y\left(\frac{1}{x}f_1'-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=-\frac{2y}{x}f_1'+\frac{2x}{y}f_2'.$$

14.微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$________.

✎ **解:** 令 $y=xu$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\frac{1}{2}u^3,$$

变量分离解得 $\frac{1}{u^2}=\frac{x^2}{y^2}=\ln|x|+C$, 代入 $y\big|_{x=1}=1$ 得 $C=1$. 因此 $y^2=\frac{x^2}{\ln|x|+1}$, 注意到 $y(1)>0$, 因此特解为 $y=\frac{|x|}{\sqrt{\ln|x|+1}}$.

15.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

✎ **解:** 直接计算可得 $\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 故 $r(\boldsymbol{A}^3)=1$.

16.在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

✎ **解:** 这是一个几何概型, 设 x,y 为所取的两个数, 则样本空间 $\Omega=\{(x,y)|0<x,y<1\}$, 记

$$A=\left\{(x,y)\in\Omega,|x-y|<\frac{1}{2}\right\}.$$

于是所求概率为 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{3}{4}$, 其中 S_A,S_Ω 分别表示 A 与 Ω 的面积.

三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17.(**本题满分 10 分**)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定, 试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

✎ **解:** 原方程两边对 x 求导得

$$y'\ln y-1+2y'=0\Rightarrow y'=\frac{1}{2+\ln y},$$

因此 $y'(1)=\dfrac{1}{2}$. 上式两边再对 x 求导得

$$y''=-\frac{1}{(2+\ln y)^2}\frac{y'}{y}=-\frac{y'}{y(2+\ln y)^2}.$$

在点 $(1,1)$ 处, $y''(1)=-\dfrac{1}{8}<0$, 且 y'' 在 $(1,1)$ 附近连续, 因此 $y''<0$ 在此点的邻域内成立, 所以 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的.

18.(**本题满分 11 分**)

设二元函数

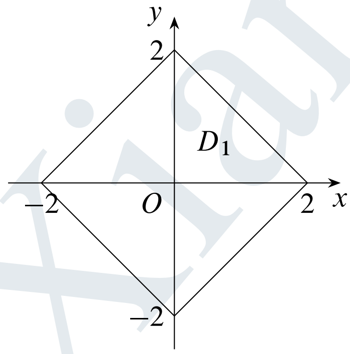
$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2 \end{cases},$$

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\big||x|+|y|\leqslant 2\}$.

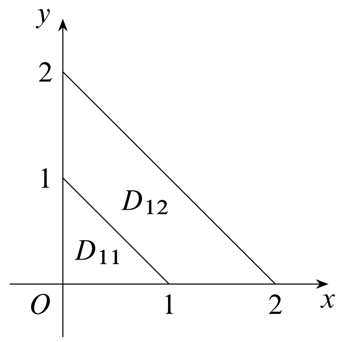
✎ **解:** 区域 D 如图 (1) 所示, 它关于 x,y 轴对称, $f(x,y)$ 关于 x,y 均为偶函数, 得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 D_1 是 D 在第一象限的部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将 D_1 分成如图 (2) 所示的两部分: $D_1=D_{11}\cup D_{12}$, 其中

$$D_{11}:|x|+|y|\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0,\qquad D_{12}:1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2, x\geqslant 0, y\geqslant 0.$$

于是 $\displaystyle\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中

$$\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{r}\cdot r\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

19.(**本题满分** 11 **分**)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

☛ **证明:** 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 由题意有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1\leqslant x_2, x_1, x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]}, g(x_2)=M=\max_{x\in[a,b]} g(x).$$

若 $x_1=x_2$, 令 $c=x_1$, 则 $F(c)=0$. 若 $x_1<x_2$, 因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0$, $F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$, 从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$, 使得 $F(c)=0$.

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1\in(a,c), \xi_2\in(c,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 有 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.(**本题满分** 10 **分**)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

✎ **解:** 令 $t=x-1$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-3x-4} &= \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{(t-3)(t+2)}\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+2}\right) = -\frac{1}{15}\frac{1}{1-\frac{t}{3}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{t}{2}}\\ &= -\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right](x-1)^n.\end{aligned}$$

其收敛区间满足 $|x-1|<3, |x-1|<2$, 即收敛区间为 $(-1,3)$.

21.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \tag{2}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

✎ **解:** 因为方程 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}. \tag{3}$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right).$$

于是当 $a=1$ 时, 有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$, 方程组 (3) 有解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 所以 (1)、(2) 的公共解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}, k\in\mathbb{R}$.

当 $a=2$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (3) 的解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 即 (1)、(2) 的公共解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

22.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

✎ **解:** (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$ 得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 故

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 -2 的特征向量.

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E}$, 及 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 得 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=1,\mu_3=1$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0, \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

其基础解系为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征向量为 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}}, k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k_1\neq 0, k_2, k_3$ 不全为零.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(1) 求 $P(X>2Y)$;

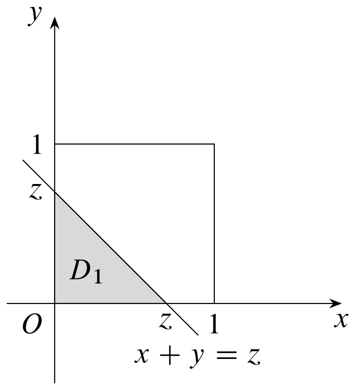
(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

✎ **解:** (1) $P(X>2Y)=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{2y}^{1}(2-x-y)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{24}$.

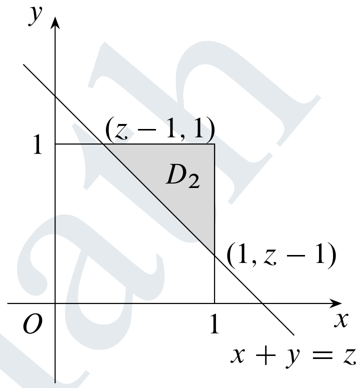
(2) 先求 Z 的分布函数:

$$F_Z(z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=0$;



$0\leqslant z<1$



$1\leqslant z<2$

当 $0\leqslant z<1$ 时, $F_Z(z)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{z}\mathrm{d}y\int_0^{z-y}(2-x-y)\,\mathrm{d}x=z^2-\frac{1}{3}z^3$;

当 $1\leqslant z<2$ 时, $F_Z(z)=1-\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{z-y}^{1}(2-x-y)\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3}(2-z)^3$;

当 $z\geqslant 2$ 时, $F_Z(z)=1$. 故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1\\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

24.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中参数 $\theta\,(0<\theta<1)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(2) 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

✎ **解:** (1) 总体均值

$$E(X)=\int_0^\theta \frac{x}{2\theta}\,\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta}{4}+\frac{1}{4}(1+\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}.$$

样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, 令 $\overline{X}=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}$, 解得 $\theta=2\overline{X}-\frac{1}{2}$, 即 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$.

(2) $E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4\left[D(\overline{X})+(E\overline{X})^2\right]=4\left[\frac{D(X)}{n}+(EX)^2\right]$, 而

$$E(X^2)=\int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta}\,\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{12}\theta^2-\frac{1}{12}\theta+\frac{5}{48}.$$

故 $E(4\overline{X}^2)=4\left(\frac{D(X)}{n}+(EX)^2\right)=\frac{3n+1}{3n}\theta^2+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+5}{12n}\neq\theta^2$, 所以 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

第 3 章 2008 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$ 的 ( )

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 震荡间断点

✎ **解:** 由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, 因此 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点, 选 B.

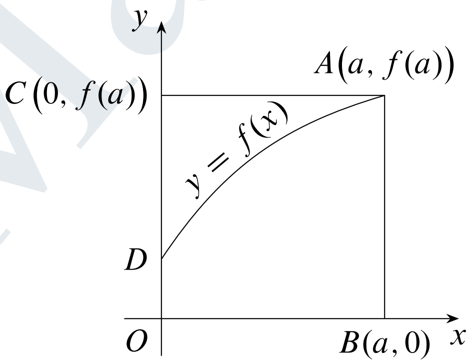
2. 如图, 曲线段的方程为 $y=f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\displaystyle\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 等于 ( )

A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

B. 梯形 $ABOD$ 的面积

C. 曲边三角形 ACD 的面积

D. 三角形 ACD 的面积



第 2 题图

✎ **解:** 由分部积分知

$$\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a x\,\mathrm{d}f(x)=af(a)-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $af(a)$ 是矩形面积, $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 为曲边三角形 ACD 的面积, 选 C.

3. 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ( )

A. $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都存在　　B. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在

C. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在　　D. $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 都不存在

✎ **解:** 由偏导数的定义得

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{0^2+y^4}}-1}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y-0}=0,$$

而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=-1.$$

因此 $f_x'(0,0)$ 不存在, 选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $F(u,v)=\displaystyle\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部

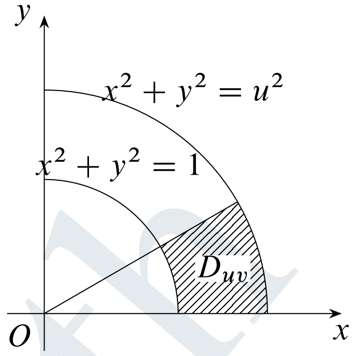
分, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$ ( )

A. $vf(u^2)$ B. $\dfrac{v}{u}f(u^2)$ C. $vf(u)$ D. $\dfrac{v}{u}f(u)$

✎ **解:** 利用极坐标可得

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^v\mathrm{d}v\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}r\,\mathrm{d}r=v\int_1^u f(r^2)\,\mathrm{d}r,$$

所以 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$, 选 A.



第 4 题图

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆 B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆 D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

✎ **解:** 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^3=0$, 即 $\lambda=0$. 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

✎ **解:** $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$, 则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$, 记 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}$, 则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)=0,$$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$, 正负关系指数相同, 选 D.

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 ( )

A. $F^2(x)$ B. $F(x)F(y)$

C. $1-[1-F(x)]^2$ D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

✎ **解:** 由分布函数的定义可得 Z 的分布函数为

$$F_Z(x)=P(Z\leqslant x)=P\big(\max\{X,Y\}\leqslant x\big)=P(X\leqslant x,Y\leqslant x)$$

$$= P(X \leqslant x)P(Y \leqslant x) = F(x)F(x) = F^2(x),$$

选 A.

8. 设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim N(1,4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ( )

A. $P\{Y = -2X - 1\} = 1$　　B. $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

C. $P\{Y = -2X + 1\} = 1$　　D. $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

✎ **解:** 由于 X, Y 都服从正态分布, 且 $\rho_{XY} = 1$, 所以一定存在常数 a, b 使得 $P(Y = aX + b) = 1$, 且 $a > 0$. 那么有 $E(Y) = aE(X) + b$, 即 $1 = 0 + b, b = 1$. 再由 $4 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2$ 可知 $a = 2$, 选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leqslant c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c =$________.

✎ **解:** 由条件知 $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) \Rightarrow c^2 + 1 = \dfrac{2}{c}, c = 1$.

10. 设 $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x + x^3}{1 + x^4}$, 则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x =$________.

✎ **解:** 由题意知 $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} + x}{(\frac{1}{x} + x)^2 - 2}$, 所以 $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 2}$, 于是

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2)\Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

11. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, 则 $\displaystyle\iint_D (x^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$________.

✎ **解:** $\displaystyle\iint_D (x^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$.

12. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$________.

✎ **解:** 由 $xy' + y = (xy)' = 0$ 知 $xy = C$, 代入 $y(1) = 1$ 知 $C = 1$, 所以方程的解为 $y = \dfrac{1}{x}$.

13. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 2, 2$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}| =$________.

✎ **解:** $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$, $4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3, 1, 1$, 因此 $|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E}| = 3$.

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$________.

✎ **解:** 因为 $X \sim P(1)$, 所以 $EX = DX = 1$, 于是 $EX^2 = (EX)^2 + DX = 2$, $P(X = EX^2) = P(X = 2) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

15.(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x-x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{\sin x-x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$.

(1) 求 $\mathrm{d}z$;

(2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

✎ **解:** (1) 在方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两边求全微分得

$$2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(x+y+z)\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z),$$

解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}\,\mathrm{d}x+\dfrac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}\,\mathrm{d}y$.

(2) $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\dfrac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}\right)=\dfrac{2}{\varphi'+1}$, 于是

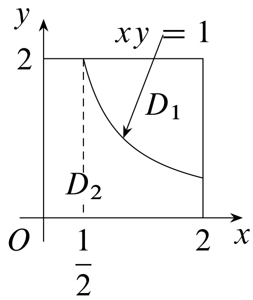
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''\cdot\left(1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''\cdot(1+\varphi'+2x-\varphi')}{(\varphi'+1)^3}.$$

17.(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

✎ **解:** 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如图所示的两个区域 D_1 和 D_2, 于是

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\,\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y\\&=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.\end{aligned}$$



第 18 题图

18.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

☛ **证明:** (1) 对任意的 x, 由于函数 $f(x)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x}\quad(\text{积分中值定理})\\&=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).\end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$.

(2) 令 $g(x)=G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$g'(x)=2f(x+2)-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0,$$

因此 $g(x)$ 为常函数, $g(x)=g(0)=2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=0$, 即 $G(x+2)=G(x)$, 这说明 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

19.(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$, 并依年复利计算, 某基金会希望通过存款 A 万元, 实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, $\cdots$, 第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

✎ **解:** 设 A_n 为第 n 年的提现值, 则 $A_n=\dfrac{10+9n}{(1+r)^n}$, 故 A 至少应为

$$\begin{aligned}A&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+9n}{(1+r)^n}\\&=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}=200+9\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{1+r}\right)^n.\end{aligned}$$

注意到 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$, 所以 $S\left(\dfrac{1}{1+r}\right)=S\left(\dfrac{1}{1.05}\right)=420$, 故至少应存入 $200+9\times 420=3980$ 万元存款.

20.(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

✎ **解:** (1) 从第 2 行开始, 第 k 行减去上一行的 $\dfrac{k}{k+1}$ 倍, $k=2,3,\cdots,n$, 可得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}=2a\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{4}{3}a\cdots\frac{n}{n-1}a\cdot\frac{n+1}{n}a=(n+1)a^n.$$

(2) 由克拉默法则知当 $a\neq 0$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 此时方程组有唯一解, 且 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

(3) 当 $a=0$ 时, 容易得到 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})=n-1$, 方程组有无穷多解, 此时的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,0\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, k\in\mathbb{R}$.

21.(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

✎ **解:** (1) 设存在数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘 (1) 两边, 并由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$ 得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

(1) − (2), 得

$$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - k_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}. \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$. 代入 (1) 得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 由题设, 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 (1) 知 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P(X = i) = \dfrac{1}{3}\ (i = -1, 0, 1)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$, 记 $Z = X + Y$.

(1) 求 $P\left(Z \leqslant \dfrac{1}{2} \middle| X = 0\right)$;

(2) 求 Z 的概率密度.

✎ **解:** (1)

$$\begin{aligned} P\left(Z \leqslant \frac{1}{2} \middle| X = 0\right) &= P\left(X + Y \leqslant \frac{1}{2} \middle| X = 0\right) \\ &= P\left(Y \leqslant \frac{1}{2} \middle| X = 0\right) = P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\ &= P(X + Y \leqslant z, X = -1) + P(X + Y \leqslant z, X = 0) + P(X + Y \leqslant z, X = 1) \\ &= P(Y \leqslant z + 1, X = -1) + P(Y \leqslant z, X = 0) + P(Y \leqslant z - 1, X = 1) \\ &= P(Y \leqslant z + 1)P(X = -1) + P(Y \leqslant z)P(X = 0) + P(Y \leqslant z - 1)P(X = 1) \\ &= \frac{1}{3}[P(Y \leqslant z - 1) + P(y \leqslant z) + P(Y \leqslant z - 1)] \\ &= \frac{1}{3}[F_Y(z + 1) + F_Y(z) + F_Y(z - 1)], \end{aligned}$$

于是 Z 的概率密度为 $f_Z(z) = F_Z'(z) = \dfrac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & -1 \leqslant z \leqslant 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

23.(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT.

✎ **解:** (1) 因为

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E\left(\bar{X}^2\right) - \frac{1}{n}E\left(S^2\right) \\ &= \left(E\bar{X}\right)^2 + D\left(\bar{X}\right) - \frac{1}{n}E\left(S^2\right) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2, \end{aligned}$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 由于 $\bar{X}$ 与 S^2 独立, 则有

$$\begin{aligned} DT &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = D\left(\bar{X}^2\right) + \frac{1}{n^2}D\left(S^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\bar{X}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot 2 + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

第 4 章 2009 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为 (　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

✎ **解:** 显然 $f(x)$ 的间断点为所有整数, 且 $x=0, x=\pm1$ 为可去间断点, 其他为无穷间断点, 选 C.

2. 当 $x\to0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 (　)

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$　　B. $a=1, b=\dfrac{1}{6}$

C. $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$　　D. $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$

✎ **解:** 首先当 $x\to0$ 时, $g(x)=x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$, 利用泰勒公式得

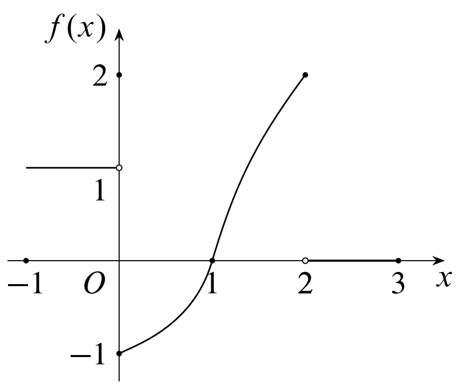
$$f(x)=x-\sin ax=x-\left(ax-\frac{a^3}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o\left(x^3\right),$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $1-a=0, \dfrac{a^3}{6}=-b$, 因此 $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$, 选 A.

3. 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是 (　)

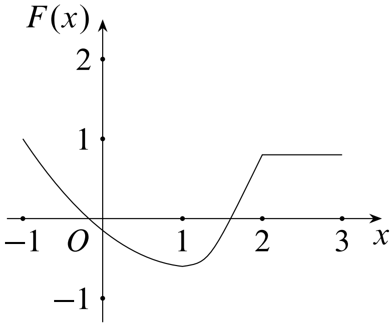
A. $(0,1)$　　B. $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　D. $(\pi,+\infty)$

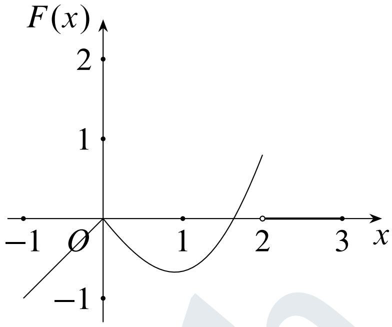
✎ **解:** 令 $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x$, 则当 $x>0$ 时, $f'(x)=\dfrac{\sin x-1}{x}\leqslant 0$, 因此 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(1)=0$, 因此当 $0<x<1$ 时 $f(x)>0$, 当 $x>1$ 时 $f(x)<0$, 选 A.

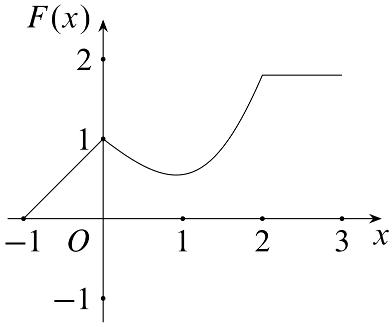


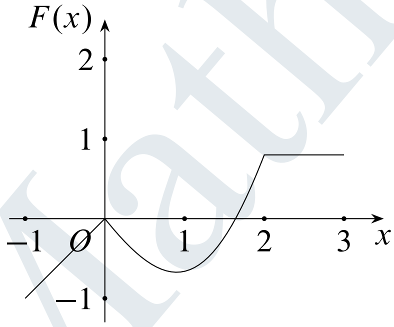
第 4 题图

4. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为 ( )

A.


B.


C.


D.


✎ **解:** 首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$ 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

✎ **解:** 由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{B}^{-1} \\ 6\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

✎ **解:** 由题意可知把 $\boldsymbol{P}$ 的第二列加到第一列上得到 $\boldsymbol{Q}$, 因此有 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}$. 记 $\boldsymbol{E}_{21}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)]=\boldsymbol{E}_{21}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{21}(1)\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

因此选 A.

7. 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则　　(　　)

A. $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

✎ **解:** 因为 A 与事件 B 互不相容, 即 $A\cap B=\varnothing$, 于是 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)=1$, 选 D, 其他选项容易判断都不对.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P(Y=0)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

✎ **解:** Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(Y=0)P(XY\leqslant z\,|Y=0)+P(Y=1)P(XY\leqslant z\,|Y=1)\\&=\frac{1}{2}P(0\leqslant z\,|Y=0)+\frac{1}{2}P(X\leqslant z\,|Y=1)\\&=\frac{1}{2}P(0\leqslant z)+\frac{1}{2}P(X\leqslant z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $F_Z(z)$ 在 $z=0$ 处有一个跳跃间断点, 选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

✎ **解:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{\cos x-1}\right)}{\frac{1}{3}x^2}=3\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

10.设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.

✎ **解:** 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x+\mathrm{e}^y)^x\left[\ln(x+\mathrm{e}^y)+\dfrac{x}{x+\mathrm{e}^y}\right]$, 所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=2\ln 2+1$.

11.幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.

✎ **解:** 记 $a_n=\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}$, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left[\mathrm{e}^{n+1}-(-1)^{n+1}\right]}{(n+1)^2\left[\mathrm{e}^n-(-1)^n\right]}=\mathrm{e}$, 因此幂级数的收敛半径为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

12.设某产品的需求函数 $Q=Q(p)$, 对其价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$, 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加________ 元.

✎ **解:** 收益函数 $R=pQ$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$. 由题意有 $\varepsilon_p=-\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=0.2$, 因此 $p\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=-0.2Q$, 于是 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=-0.2Q+Q=0.8Q$. 代入 $Q=10000$. 可知当价格增加 1 元会使产品收益增加 8000 元.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $k=$________.

✎ **解:** 相似矩阵有相同的迹, 则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=3=\operatorname{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1+k$, 因此 $k=2$.

注: 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

14.设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\bar{X}-S^2$, 则 $ET=$________.

✎ **解:** $ET=E\left(\bar{X}-S^2\right)=E\bar{X}-E\left(S^2\right)=np-np(1-p)=np^2$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 9 分**)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

✎ **解:** 令 $\begin{cases}f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0\\ f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$, 解得唯一驻点为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 由于

$$A=f_{xx}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2(2+y^2)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right),$$

$$B=f_{xy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=0,$$

$$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=\mathrm{e},$$

所以 $AC-B^2=-2\mathrm{e}\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$, 且 $A>0$, 所以 $f(x,y)$ 的唯一极小值为 $f\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

16.(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

✎ **解:** 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}>1$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, 于是

$$\begin{aligned}\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x&=\int\ln(1+t)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)\\&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t\\&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{4}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{2(t+1)}+C\\&=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)\\&\quad-\frac{\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}+C.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

✎ **解:** *方法一* 积分区域用极坐标表示为 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 2(\cos\theta+\sin\theta)\right\}$, 故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r\\&=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

方法二 作换元 $u=x-1, v=y-1$, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u,\mathrm{d}y=\mathrm{d}v$, 积分区域化为 $D_1=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 2, v\geqslant u\}$, 于是

$$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r=-\frac{8}{3}.$$

18.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

证明: (1) 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 则

$$
\begin{aligned}
F(b)-F(a) &= \left(f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b\right)-\left(f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a\right)\\
&= f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0,
\end{aligned}
$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$
f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf'(\xi)}{x}=\lim_{\xi\to 0}f'(\xi)=A.
$$

注: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.(本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程.

解: 旋转体的体积为 $V=\pi\displaystyle\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$, 曲边梯形的面积为 $S=\displaystyle\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$, 由题意可知

$$
V=\pi t S \Rightarrow \pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x.
$$

上式两边对 t 求导得 $f^2(t)=\displaystyle\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t)$, 令 $t=1$ 可得 $f(1)=1$. 继续对 t 求导得 $2f(t)f'(t)=f(t)+f(t)+tf'(t)$, 化简可得 $(2f(t)-t)f'(t)=2f(t)$, 这是 t 关于 y 的一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{2y}t=1$, 解得 $t=\dfrac{C}{\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y$. 由 $f(1)=1$ 可知 $C=\dfrac{1}{3}$, 因此 $t=\dfrac{1}{3\sqrt{y}}+\dfrac{2}{3}y$, 该曲线的方程为 $2y+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-3x=0$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

✎ **解:** (1) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}$, 从而 $\xi_2=(-k,k,1-2k)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数.

$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$, 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $x_1=-\frac{1}{2}-u, x_2=u, x_3=v$, 即 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-u,u,v\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 u,v 为任意常数.

(2) 对任意的常数 k,u,v 有

$$|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|=\begin{vmatrix}-1&-k&-\frac{1}{2}-u\\1&k&u\\-2&1-2k&v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\1&k&u\\-2&1-2k&v\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

因此对任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 恒有 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

✎ **解:** (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)\big(\lambda-(a+1)\big)\big(\lambda-(a-2)\big),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(2) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为两正一零, 显然 $a-2 < a < a+1$, 因此必有 $a = 2$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 求条件概率 $P(X \leqslant 1 | Y \leqslant 1)$.

✎ **解:** (1) X 的概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(2) Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_y^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

因此条件概率

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1) &= \frac{P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)}{P(Y \leqslant 1)} = \frac{\int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1 \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y} \\ &= \frac{\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}. \end{aligned}$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X = 1 | Z = 0)$;

(2) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

✎ **解:** (1) $P(X=1|Z=0)=\dfrac{P(X=1,Z=0)}{P(Z=0)}=\dfrac{\mathrm{C}_2^1\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{9}$.

(2) 由题意知 X,Y 的所有可能取值均为 $0,1,2$.

$$P(X=0,Y=0)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4},\quad P(X=0,Y=1)=2\times\frac{2}{6}\times 36=\frac{1}{3},$$
$$P(X=0,Y=2)=\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{1}{9},\quad P(X=1,Y=0)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6},$$
$$P(X=1,Y=1)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9},\quad P(X=2,Y=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36},$$
$$P(X=1,Y=2)=P(X=2,Y=1)=P(X=2,Y=2)=0.$$

因此 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

第 5 章 2010 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$, 则 $a=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解: 由 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}\left(1-\mathrm{e}^x\right)+a\mathrm{e}^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x}+a=-1+a=1$ 可得 $a=2$, 选 C.

2. 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ( )

A. $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　B. $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

C. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　D. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

解: $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次方程的解, 则 $\lambda+\mu=1$, 而 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是对应的齐次方程的解, 则 $\lambda-\mu=0$, 因此 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

注: 如果 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是非齐次方程的 n 个解, 则线性组合 $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 仍然是此非齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=1$, $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是对应齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=0$,

3. 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f\big(g(x)\big)$ 在 x_0 处取极大值的一个充分条件是 ( )

A. $f'(a)<0$　　B. $f'(a)>0$　　C. $f''(a)<0$　　D. $f''(a)>0$

解: 首先有题意有 $g(x_0)=a, g'(x_0)=0, g''(x_0)<0$, 要想 $f(g(x))$ 在 x_0 处取极大值, 首先 $\left[f\left(g(x)\right)\right]'\big|_{x=x_0}=f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0)=0$, 它的一个充分条件是 $\left[f\left(g(x)\right)\right]''\big|_{x=x_0}<0$, 即

$$\left[f''\big(g(x)\big)g'^2(x)+f'\big(g(x)\big)g''(x)\right]\big|_{x=x_0}=f'(a)\,g''(x_0)<0,$$

而 $g''(x_0)<0$, 因此 $f'(a)>0$, 选 B.

4. 设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ( )

A. $g(x)<h(x)<f(x)$　　B. $h(x)<g(x)<f(x)$

C. $f(x)<g(x)<h(x)$　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$

解: 由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{10}}}\right)^{10}=0$, 因此当 x 充分大时, $f(x)<g(x)<h(x)$, 选 C.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 ( )

A. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　B. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

C. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　D. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

✎ **解:** 由题意有 $m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=m\leqslant n$, 同理 $r(\boldsymbol{B})=m\leqslant n$, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ 必满足 $\lambda^2+\lambda=0$, 则 $\lambda=0$ 或 -1. 又 $r(\boldsymbol{A})=3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-1,-1,0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则它相似于 $\mathrm{diag}\{-1,-1,-1,0\}$, 选 D.

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $P(X=1)=$ ( )

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　D. $1-\mathrm{e}^{-1}$

✎ **解:** $P(X=1)=F(1)-F(1-)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$, 选 C.

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度, 则 a,b 应满足 ( )

A. $2a+3b=4$　　B. $3a+2b=4$　　C. $a+b=1$　　D. $a+b=2$

✎ **解:** $f(x)$ 需要满足 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)\,\mathrm{d}x+b\int_0^3 f_2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=1$, 即 $2a+3b=4$, 选 A.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\displaystyle\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\,\mathrm{d}t$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

✎ **解:** 当 $x=0$ 时 $y=0$, 原方程两边对 x 求导得 $\mathrm{e}^{x+y}\left(1+y'\right)=x\sin x^2+\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t$, 代入 $x=y=0$ 得 $y'=-1$, 即 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$.

10.设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x\left(1+\ln^2 x\right)}}\ (\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域为 G, 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

✎ **解:** 所求旋转体的体积为 $V=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}=\pi\arctan(\ln x)\big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}$.

11.设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1+p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1)=1$, 则 $R(p)=$________.

✎ **解:** 由收益弹性的定义知 $\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=1+p^3$, 解此变量分离的方程得 $\ln R=\frac{1}{3}p^3+\ln p+C$, 代入 $R(1)=1$ 得 $C+-\frac{1}{3}$, 因此收益函数 $R(p)=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

12.若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$, 则 $b=$________.

✎ **解:** 由条件有 $\begin{cases} y(-1)=-1+a-b+1=0 \\ y''(-1)=-6+2a=0 \end{cases}$, 解得 $a=b=3$.

13.设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

✎ **解:** $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=\left|\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|=3\times2\times\frac{1}{2}=3$.

14.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)\,(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $ET=$________.

✎ **解:** $E(T)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=EX_1^2=(EX_1)^2+DX_1=\mu^2+\sigma^2$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

✎ **解:** 先取对数利用洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{\ln x}{x}}=-1,\end{aligned}$$

因此原极限为 e^{-1}.

16.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

解: 显然积分区域是关于 x 轴对称的, 记 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,\sqrt{2}y\leqslant x\leqslant\sqrt{1+y^2}\}$ 为 D 在第一象限的部分, 则所求二重积分为

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{D}(x+y)^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{D}\left(3x^2y+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\iint\limits_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y\\
&=2\int_0^1\left[\frac{\left(1+y^2\right)^2-4y^4}{4}+\frac{3}{2}y^2\left(1+y^2-2y^2\right)\right]\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(1+2y^2-3y^4\right)+3y^2\left(1-y^2\right)\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解: 令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$, 令

$$\begin{cases}F_x'=y+2\lambda x=0\\F_y'=x+2z+2\lambda y=0\\F_z'=2y+2\lambda z=0\\F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0\end{cases}$$

当 $\lambda\neq 0$ 时, 由前三个方程消去参数 λ 可得 $\frac{y}{2x}=\frac{2+2z}{2y}=\frac{y}{z}$, 代入第四个方程求得四个驻点为 $P_1=\left(1,-\sqrt{5},2\right)$, $P_2=\left(1,\sqrt{5},2\right)$, $P_3=\left(-1,-\sqrt{5},-2\right)$, $P_4=\left(-1,\sqrt{5},-2\right)$, 此时 $u(P_1)=u(P_4)=-5\sqrt{5},u(P_2)=u(P_3)=5\sqrt{5}$. 当 $\lambda=0$ 时, 不难得到另外两个驻点为 $P_5=\left(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)$, $P_6=\left(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$, 此时 $u(P_5)=u(P_6)=0$. 因此函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值分别为 $5\sqrt{5}$ 和 $-5\sqrt{5}$.

18.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

✎ **解:** (1) 当 $0<t<1$ 时, $0<\ln(1+t)<t$, 所以 $|\ln t|\,[\ln(1+t)]^n<t^n\,|\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0<t<1$ 时, $0<\int_0^1 |\ln^n t\ln(1+t)|\mathrm{d}t<\int_0^1 |\ln t|t^n\mathrm{d}t$. 由分部积分得

$$\int_0^1 |\ln t|\,t^n\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0<u_n<\frac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(),3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(1) 证明存在 $\eta\in(0,2)$, 使得 $f(\eta)=f(0)$;

(2) 证明存在 $\xi\in(0,3)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

☛ **证明:** (1) 令 $F(t)=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 则由拉格朗日中值定理知存在 $\eta\in(0,2)$, 使得 $F(2)-F(0)=2F'(\eta)$, 即 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2f(\eta)$, $f(\eta)=f(0)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最小值和最大值分别为 m 和 M, 则 $m\leqslant\frac{f(2)+f(3)}{2}\leqslant M$, 因此由介值定理知存在 $\zeta\in[2,3]$ 使得 $f(\zeta)=\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(\eta)$. 根据罗尔定理知存在 $\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,\zeta)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 进一步存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ,a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

✎ **解:** (1) 因为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$, 于是

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0,$$

因此 $\lambda=\pm1$. 当 $\lambda=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$, 显然 $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$, 方程组无解, 因此 $\lambda=1$ 舍去. 当 $\lambda=-1$ 时, 对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right),$$

因为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 所以 $a=-2$.

(2) 当 $\lambda=-1, a=-2$ 时, $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, 因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$\boldsymbol{x}=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $x=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

✎ **解:** (1) 二次型 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,0$, 于是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\{1,1,0\}$, 且矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列就是属于特征值 0 的特征向量. 设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量, 由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交, 则 $x_1+x_3=0$, 解得 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的连个正交的单位特征向量, 于是可取 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 此时有

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\{1,1,0\}$, 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,0$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $2,2,1$, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

✎ **解:** X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y\\&=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2-x^2}\mathrm{d}y=A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=A\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2},\end{aligned}$$

于是 $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,\mathrm{d}x=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=A\pi\Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y|x)&=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2},\quad-\infty<y<+\infty.\end{aligned}$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 $1,2,3$ 个. 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(1) 求随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

✎ **解:** (1) 由题意可知

$$P(X=0,Y=0)=\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{5},P(X=0,Y=1)=\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{2}{5},$$
$$P(X=0,Y=2)=\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{15},P(X=1,Y=0)=\frac{\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{5},$$
$$P(X=1,Y=1)=\frac{\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{2}{15},P(X=1,Y=2)=0.$$

因此随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
$P(Y=j)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

(2) 由 (X,Y) 的分布可计算得 $EX=\frac{1}{3}, EY=\frac{2}{3}, E(XY)=\frac{2}{15}$, 于是 $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}$.

第 6 章 2011 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当 $x \to 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 ( )

A. $k = 1, c = 4$ B. $k = 1, c = -4$ C. $k = 3, c = 4$ D. $k = 3, c = -4$

解: 利用麦克劳林公式得

$$f(x) = 3\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) = 4x^3 + o\left(x^3\right) \sim 4x^3,$$

因此 $k = 3, c = 4$, 选 C.

注: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - \sin^3 x$ 更快.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ( )

A. $-2f'(0)$ B. $-f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

解: 注意到 $f(0) = 0$, 利用导数定义得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x) - 2f\left(x^3\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)}{x^3} - 2\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^3\right)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0),$$

因此选 B.

3. 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是 ( )

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

解: 收敛的级数任意加括号后的级数仍然收敛, A 选项正确; B 选项不正确, 反例可取 $u_n = (-1)^n$; C 选项不正确, 反例可取 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; D 选项不正确, 反例可取 $u_n = 1$, 因此选 A.

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\,\mathrm{d}x$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$, 则 I, J, K 的大小关系是 ( )

A. $I < J < K$ B. $I < K < J$ C. $J < I < K$ D. $K < J < I$

✎ **解:** 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \cos x < \cot x$, 即 $\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$, 因此 $I < K < J$, 选 B.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} =$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$ C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

✎ **解:** 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$, 选 D.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 ( )

A. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)$

B. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)$

C. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1)$

D. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1)$

✎ **解:** 首先 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵, 因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 至多只有两个线性无关的解. 因为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解, 所以 $\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解, 于是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1)$. 且 $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2}$ 仍然是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的解, 因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1)$, 选 D.

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ( )

A. $f_1(x)f_2(x)$ B. $2f_2(x)F_1(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$ D. $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

✎ **解:** 概率密度需要满足非负性和归一性, 非负性都满足, 直接验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]\,\mathrm{d}x = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

因此 $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度, 其他都不满足, 选 D.

注: 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x), 2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 和 $T_2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} X_i + \dfrac{1}{n}X_n$, 有 ( )

A. $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$ B. $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$
C. $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$ D. $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

✎ **解:** $ET_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \lambda, ET_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} EX_i + \frac{1}{n}EX_n = \lambda + \frac{\lambda}{n} > ET_1, DT_1 = \frac{DX}{n} = \frac{\lambda}{n}, DT_2 = D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + D\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{DX}{n-1} + \frac{DX}{n^2} = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2} > DT_1$, 选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $f(x) = \lim_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$________.

✎ **解:** $f(x) = \lim_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = \lim_{t\to 0} x(1+3t)^{\frac{3x}{3t}} = xe^{3x}$, 于是 $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$.

10.设函数 $z = \left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz\big|_{(1,1)} =$________.

✎ **解:** $z = \left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(1+\frac{x}{y}\right)\left[\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cdot\frac{1/y}{1+x/y}\right],$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\left[\frac{x}{y^2}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cdot\frac{-x/y^2}{1+x/y}\right],$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = 2\ln 2 + 1, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = -1 - 2\ln 2$, 从而 $dz\big|_{(1,1)} = (1+2\ln 2)(dx - dy)$.

11.曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

✎ **解:** 原方程两边对 x 求导得 $\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y') = e^y y'$, 代入 $x=0, y=0$ 得 $y'(0) = -2$, 因此曲线在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y = -2x$.

12.曲线 $y = \sqrt{x^2-1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴选项所成的旋转体的体积为________.

✎ **解:** 利用旋转体的体积公式得 $V = \pi\int_1^2 (x^2-1)dx = \pi\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}$.

13.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1, $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

✎ **解:** 由题意 $r(\boldsymbol{A}) = 1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 至少有两个特征值是 0, 由于 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 即 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 因此 3 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形为 $\mathrm{diag}\{3,0,0\}$, 因此二次型 f 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $3y_1^2$.

14.设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则 $E(XY^2)=$________.

✎ **解:** 由条件知 X,Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 于是 $E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=\mu((EX)^2+D(X))=\mu(\mu^2+\sigma^2)=\mu^3+\mu\sigma^2$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

✎ **解:** 当 $x\to 0$ 时, $x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6}$, $(1+x)^\alpha-1-\alpha x\sim\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, 因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}\cdot 2\sin x+\sin x-x}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}\cdot 2\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{8}(2\sin x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

16.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $z=f\left(xy,yg(x)\right)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

✎ **解:** 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left(xy,yg(x)\right)\cdot y+f_2'\left(xy,yg(x)\right)\cdot g'(x)\cdot y$, 所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf_1'(y,y)$. 故

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\right|_{y=1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[yf_1'(y,y)\right]\right|_{y=1}\\
&=\left[f_1'(y,y)+y\left(f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)\right)\right]\big|_{y=1}\\
&=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).
\end{aligned}
$$

17.(**本题满分** 10 **分**)

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

✎ **解:**

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)\\
&=2\sqrt{x}\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)-2\int\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&=2\sqrt{x}\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)-\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\\
&=2\sqrt{x}\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.
\end{aligned}
$$

18.(本题满分 10 分)

证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

☛ **证明:** 令 $f(x) = 4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$, 则

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{1+x^2}\begin{cases} >0, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ =0, & x = \pm\sqrt{3} \\ <0, & x < -\sqrt{3}\text{或}x > \sqrt{3} \end{cases}.$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ 和 $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ 内单调递减, 在 $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ 内单调递增. 极小值 $f\left(-\sqrt{3}\right) = 0$, 极大值 $f\left(\sqrt{3}\right) = 0$, 且 $f(+\infty) = -\infty$, 因此由零点定理知存在 $x_0 \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ 使得 $f(x_0) = 0$. 因此 $f(x)$ 恰有两个根 $x = \sqrt{3}$ 和 $x = x_0$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 具有连续导数, $f(0) = 1$, 且满足 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D_t = \{(x,y)|0 \leqslant y \leqslant t-x, 0 \leqslant x \leqslant t\}(0 < t \leqslant 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

✎ **解:** 因为

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^t \mathrm{d}x \int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^t [f(t) - f(x)]\mathrm{d}x = tf(t) - \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_{D_t} f'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}t^2 f(t),\end{aligned}$$

等式两边对 x 求导得 $f'(t) + \frac{2}{t-2}f(t) = 0$, 解此变量分离的方程得 $f(t) = \frac{C}{(t-2)^2}$. 由 $f(0) = 1$ 得 $C = 4$, 所以 $f(x)$ 的表达式为 $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

✎ **解:** (1) 首先有 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能被 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 =$

$(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示等价于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关, 于是 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$, 所以 $a=5$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 作初等行变换得

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

✎ **解:** (1) 由条件知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 -1 是一个特征值, 且它对应的特征向量为 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}, k_1 \neq 0$; 1 是一个特征值, 它所对应的特征向量为 $k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}, k_2 \neq 0$. 再由 $r(\boldsymbol{A}) = 2$ 知 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$, 解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0,1,0)^{\mathrm{T}}, k_3 \neq 0$.

(2) 令 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 因此

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2 = Y^2) = 1$.

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布；

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布；

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

✎ **解:** (1) 由于 $P(X^2 = Y^2) = 1$, 所以 $P(X^2 \neq Y^2) = 0$, 即 $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$, 于是

$$P\left(X = 1, Y = 1\right) = P\left(Y = 1\right) - P\left(X = 0, Y = 1\right) = P\left(Y = 1\right) = \frac{1}{3},$$

$$P\left(X = 1, Y = -1\right) = P\left(Y = -1\right) - P\left(X = 0, Y = -1\right) = P\left(Y = -1\right) = \frac{1}{3},$$

$$P\left(X = 0, Y = 0\right) = P\left(Y = 0\right) - P\left(X = 1, Y = 0\right) = P\left(Y = 0\right) = \frac{1}{3}.$$

因此二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) $Z = XY$ 的取值只有 $-1, 0, 1$, 且由 (X, Y) 的概率分布不难得到 Z 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) $E(X) = \frac{2}{3}, E(Y) = 0, E(XY) = 0, \mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, 因此 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = 0$.

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0, x + y = 2$ 与 $y = 0$ 所围成的三角形区域.

(1) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

✎ **解:** (1) (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$, 所以 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x \mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \int_0^{2-x}\mathrm{d}y, & 1<x\leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

(2) 因为 Y 的概率密度为

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{2-y}\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, 其他\end{cases}=\begin{cases}2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

所以在 $Y=y(0\leqslant y<1)$ 时, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

第 7 章 2012 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

✎ **解:** 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$, 所以直线 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$, 所以 $x=1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x=-1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$ ( )

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$　　C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

✎ **解:** 利用导数的定义得

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to0}\left[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\right)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\end{aligned}$$

选 A.

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\,\mathrm{d}r=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

B. $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

D. $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

✎ **解:** 积分区域为 $\{(r,\theta)|2\cos\theta\leqslant r\leqslant2,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$, 化为直角坐标即 $\{(x,y)|2x\leqslant x^2+y^2\leqslant4,x\geqslant0,y\geqslant0\}$, 此时先对 y 后对 x 的累次积分为 $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$, 选 B.

4. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则 ( )

A. $0<\alpha\leqslant\dfrac12$　　B. $\dfrac12<\alpha\leqslant1$　　C. $1<\alpha\leqslant\dfrac32$　　D. $\dfrac32<\alpha<2$

✎ **解:** 由 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛可得 $\alpha>\frac{3}{2}$, 再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛可知 $1\leqslant\alpha<2$, 因此 $\frac{3}{2}<\alpha<2$, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$, 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

✎ **解:** 显然可得 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定线性相关, 选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ ( )

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

✎ **解:** 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

选 B.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则 $P(X^2+Y^2\leqslant 1)=$ ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{4}$

✎ **解:** X,Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\0, & 其他\end{cases}$, 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,0<x<1,0<y<1\}$, 于是 $P(X^2+Y^2<1)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$, 选 D.

8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为 ( )

A. $N(0,1)$ B. $t(1)$ C. $\chi^2(1)$ D. $F(1,1)$

✎ **解:** 由条件得 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$, $X_3+X_4-2\sim N(0,2\sigma^2)$, 于是 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}$ 都服从标准正态分布, 且相互独立, 因此 $\dfrac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}=\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t\,(1)$, 选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

✎ **解:** 先取对数用洛必达法则得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{(-\sin x-\cos x)\tan x}=-\sqrt{2},$$

因此原极限为 $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

10.设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$, $y=f\big(f(x)\big)$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}$________.

✎ **解:** 首先有

$$y=f(f(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln f(x), & f(x)\geqslant 1\\ 2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\ln x\right), & x\geqslant \mathrm{e}^2\\ \ln x-1, & 1\leqslant x<\mathrm{e}^2\\ 2(2x-1), & x<1\end{cases},$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=(\ln x-1)'\big|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

11.设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

✎ **解:** 由题意知当 $x\to 0, y\to 1$ 时, $f(x,y)=2x-y+2+o\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)$, 由此可得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$, 故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

12.由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________.

✎ **解:** 利用定积分可求得此平面图形的面积为 $S=\displaystyle\int_0^1(4x-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x=4\ln 2$.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 为单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

✎ **解:** $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的实对称矩阵, 故它可以对角化, 且它的特征值为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},0,0$, 即 $1,0,0$. 则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 也可以对角化, 且它的特征值为 $0,1,1$, 因此 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2$.

14.设 A,B,C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB)=\dfrac{1}{2}$, $P(C)=\dfrac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$________.

✎ **解:** 由 A 与 C 互不相容可知 $P(AC)=P(ABC)=0$, 于是

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{1/2}{1-1/3}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}&=\lim_{x\to0}e^{2-2\cos x}\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

16.**(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D e^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

✎ **解:** 积分区域可以写为 $D=\{(x,y)|0<x<1,\sqrt{x}<y<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\}$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}y\mathrm{d}y=\int_0^1 xe^x\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}e^x(x-1)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

17.**(本题满分 10 分)**

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件) 和 y(件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$(万元/件) 与 $6+y$(万元/件).

(1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元);

(2) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各位多少时可使总成本最小? 求最小总成本;

(3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本, 并解释其经济意义.

✎ **解:** (1) 由题意知 $C_x'(x,y)=20+\frac{x}{2}$, 对 x 积分得 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+\varphi(y)$, 再对 y 求导得 $C_y'(x,y)=\varphi'(y)=6+y$, 于是对 y 积分得 $\varphi(y)=6y+\frac{y^2}{2}+C$, 所以 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}+C$. 又 $C(0,0)=10000$, 所以 $C=10000$, $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}+10000$.

(2) 若 $x+y=50$, 则 $y=50-x(0\leqslant x\leqslant 50)$, 代入到成本函数中得

$$C\ (x)=20x+\frac{x^2}{4}+6\,(50-x)+\frac{1}{2}\,(50-x)^2+10000=\frac{3}{4}x^2-36x+11550.$$

令 $C'(x)=\frac{3}{2}x-36=0$ 得 $x=24$, 不难得知这就是 $C(x)$ 的最小值点. 此时 $y=26$, 最小成本为 $C(24,26)=11118$.

(3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本为 $C_x'(24,26)=32$, 其经济意义为在要求总产量为 50 件条件下, 当甲产品为 24 件时, 若甲产品的产量再增加一件, 则总成本将增加 32 万元.

18.(**本题满分 10 分**)

证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

☛ **证明:** 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x)\geqslant 0, x\in[0,1)$ 即可. 首先有 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x, x\in(0,1)$, 且 $\ln\frac{1+x}{1-x}>0$, $\frac{2x}{1-x^2}>2x>x+\sin x$, 因此 $f'(x)>0, x\in(0,1)$. 而 $f(0)=0$, 则有 $f(x)\geqslant 0, x\in[0,1)$, 证毕.

19.(**本题满分 10 分**)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

✎ **解:** (1) 微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$, 故方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$, $f''(x)=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $2C_1\mathrm{e}^x+5C_2\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^x$, 所以 $C_1=1, C_2=0$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

(2) 由 (1) 得到曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 分别求一阶导数与二阶导数得

$$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+1,\quad y''=2\mathrm{e}^{x^2}\left(1+2x^2\right)\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+2x,$$

令 $y''=0$ 得 $x=0, y=0$. 当 $x>0$ 时, $y''>0$; 当 $x<0$ 时, $y''<0$, 因此点 $(0,0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

✎ **解:** (1) 因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $a=-1$.

(2) 由 $a=-1$ 可得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$, 故矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_1 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_2 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=6$ 时, 解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 λ_3 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 原二次型化为标准形 $f=2y_2^2+6y_3^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

✎ **解:** (1) 行列式按照第一行展开得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}0&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right).$$

由于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<4$, 因此 $1-a^4=-a-a^2=0$, 解得 $a=-1$, 此时方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}+k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X=2Y)$

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

✎ **解:** (1) 由 (X,Y) 的概率分布知 $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}$.

(2) 由 (X,Y) 的概率分布知 X,Y,XY 的概率分布分别为

$$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},XY\sim\begin{pmatrix}0&1&4\\\frac{7}{12}&\frac{1}{3}&\frac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

所以 $E(X)=\frac{2}{3},E(Y)=1,E(Y^2)=\frac{5}{3},D(Y)=\frac{2}{3},E(XY)=\frac{2}{3}$, 于是 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$, $\mathrm{Cov}(X-Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\frac{2}{3}$.

23.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$.

(1) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(2) 求 $E(U+V)$.

✎ **解:** (1) X, Y 的分布函数均为 $F(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$, 且 X, Y 相互独立, 于是 V 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leqslant v) = P(\min\{X, Y\} \leqslant v) = 1 - P(\min\{X, Y\} > v) \\ &= 1 - P(X > v, Y > v) = 1 - P(X > v)P(Y > v) = 1 - [1 - F(v)]^2 \\ &= \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

因此 V 的概率密度为 $f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$.

(2) 由于 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 所以 $U+V = X+Y$, 则 $E(U+V) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2$.

第 8 章 2013 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小量, 则下列式子错误的是 ( )

A. $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$　　B. $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

C. $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　　D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

✎ **解:** 容易判断 A, B, C 都是对的, 而 $o(x) + o(x^2) = o(x)$, 错误的选 D.

2. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

✎ **解:** 由 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 知 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, \pm 1$. 且

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x\ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to -1} \frac{e^{x\ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to -1} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

因此 $f(x)$ 的可取间断点是 $x = 0, 1$, 选 C.

3. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \displaystyle\iint_{D_k} (y - x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y (k = 1, 2, 3, 4)$, 则 ( )

A. $I_1 > 0$　　B. $I_2 > 0$　　C. $I_3 > 0$　　D. $I_4 > 0$

✎ **解:** 根据对称性可知 $I_1 = I_3 = 0$, 而当 $x \in D_2$ 时, $y - x > 0$, 因此 $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} (y - x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$. 当 $x \in D_4$ 时, $y - x < 0$, $I_4 < 0$, 选 B.

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

B. 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$

C. 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在

D. 若存在常数 $p>1$, 是 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

✎ **解:** A 选项中 a_n 不一定趋于 0, A 不对. B 选项可取反例 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^3}, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{1}{n^2}, & n\text{为奇数}\end{cases}$, B 不对. C 选项可取反例 $a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}(n\geqslant 2)$, 则对任意 $p>1$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{p-1}}{\ln^2 n}=+\infty$, C 不对. D 选项中存在正数 a, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n=a$, 那么当 $n\to\infty$ 时, a_n 为 $\dfrac{1}{n^p}$ 的同阶或高阶无穷小, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 ( )

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

✎ **解:** 对一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 选 B.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ( )

A. $a=0,b=2$ B. $a=0,b$ 为任意常数

C. $a=2,b=0$ D. $a=2,b$ 为任意常数

✎ **解:** 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2,b,0$, 而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\left((\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\right)$, 因此当且仅当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,b,0$, 其中 b 可为任意常数, 选 B.

7. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量, 且 $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2),p_i=P(-2\leqslant X_i\leqslant 2)(i=1,2,3)$, 则 ( )

A. $p_1>p_2>p_3$ B. $p_2>p_1>p_3$ C. $p_3>p_1>p_2$ D. $p_1>p_3>p_2$

✎ **解:** 利用正态分布的性质可得

$$p_1=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1,$$
$$p_2=\Phi\left(\frac{2}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2}{2}\right)=2\Phi(1)-1,$$

$$p_3=\Phi\left(\frac{2-5}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right)=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right).$$

利用标准正态分布的概率分布函数性质不难得到 $p_1>p_2>p_3$, 选 A.

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

则 $P(X+Y=2)=2$ ( )

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

✎ **解:** 利用 X,Y 的独立性得

$$\begin{aligned}P(X+Y=2)&=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)+P(X=3,Y=-1)\\&=P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)+P(X=3)P(Y=-1)=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

选 C.

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公切线, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$________.

✎ **解:** 由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公切线知 $f(1)=0, f'(1)=1$, 则由导数定义得

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)\xlongequal{x=\frac{n}{n+2}}\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{1-x}f(x)=-2\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2f'(1)=-2.$$

10.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

✎ **解:** 当 $x=1,y=2$ 时, $z=2$. 方程 $(z+y)^x=xy$ 两边分别对 x 求偏导得

$$(z+y)^2\left(\ln(z+y)+\frac{x}{z+y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=y,$$

代入 $x=1,y=2,z=0$ 可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2.$

11.$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$________.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx&=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d\left(\frac{1}{1+x}\right)\\&=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}\\&=\left.\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right|_1^{+\infty}=\ln 2.\end{aligned}$$

12.微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$________.

✎ **解:** 微分方程的特征方程为 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$, 特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$, 则方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}, C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

13.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

✎ **解:** 由 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$ 可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2$, 因此 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 -1. 又 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

14.设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 则 $E\left(X\mathrm{e}^{2X}\right)=$________.

✎ **解:**

$$
\begin{aligned}
E\left(X\mathrm{e}^{2X}\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^2.
\end{aligned}
$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

✎ **解:** 当 $x\to 0$ 时, 利用泰勒公式得

$$
\begin{aligned}
f(x)&=1-\cos x\cos 2x\cos 3x\\
&=1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{(3x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\\
&=1-\left(1-\frac{1}{2}\left(1+2^2+3^2\right)x^2\right)+o\left(x^2\right)\sim 7x^2,
\end{aligned}
$$

因此 $a=7, n=2$

注: 此题中有两点指的注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$ 是 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 的必要非充分条件, 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ax^n}=1$ 是不能直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{nax^{n-1}}=1$ 的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\prod_{k=1}^n(1-\cos a_kx)}{x^2}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$.

16.(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$, 求 a 的值.

✎ **解:** 利用旋转体的体积公式得

$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}, V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y=10V_x$ 得 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\times\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$.

17.(本题满分 10 分)

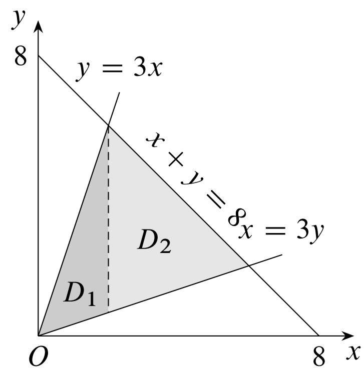
设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 积分区域可分为两部分

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 2,\frac{x}{3}\leqslant y\leqslant 3x\right\}, D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,2\leqslant x\leqslant 6,\frac{x}{3}\leqslant y\leqslant 8-x\right\}.$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y\\&=\int_0^2 x^2\left(3x-\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x+\int_2^6 x^2\left(8-x-\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{416}{3}.\end{aligned}$$



第 17 题图

18.(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1000}$(p 为单价, 单位: 元; Q 是销量, 单位: 件). 已知产销平衡, 求:

(1) 该商品的边际利润;

(2) 当 $p=50$ 时的边际利润, 并解释其经济利益;

(3) 使得利润最大的定价 p.

✎ **解:** (1) 商品的利润函数为 $L=pQ-(20Q+60000)=40Q-\frac{Q^2}{1000}-60000$, 边际利润为 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=40-\frac{Q}{500}$.

(2) 当 $p=50$ 时, 边际利润为 20, 其经济意义为当 $p=50$ 时, 销售第 10001 件商品时所获得的利润为 20 元.

(3) 令 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=40-\dfrac{Q}{500}=0$ 得 $Q=20000$, 此时 $p=60-\dfrac{Q}{1000}=40$, 显然这是使得二次函数取得最大值的点, 因此使得利润最大的定价 $p=40$.

19.(**本题满分 10 分**)

奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 证明:

(1) 存在 $a>0$, 使得 $f(a)=1$;

(2) 对 (1) 中的 a, 存在 $\xi\in(0,a)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

☛ **证明:** (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ 可知存在 $X>0$, 当 $x>X$ 时, $f(x)>1$ 都成立. 即存在 $x_0>0$ 使得 $f(x_0)>1$ 成立, 因此由连续函数介值定理知存在 $a\in[0,x_0]$ 使得 $f(a)=1$.

(2) 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(0,a)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(0)}{a}=\dfrac{1}{a}$.

20.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

✎ **解:** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$, 代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}. \tag{$*$}$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&b\end{array}\right).$$

由此可知当 $a\neq-1$ 或 $b\neq0$ 时, 方程组 $(*)$ 无解. 当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时, 方程组 $(*)$ 有解, 且此时方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k_1(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a=-1,b=0$ 时存在矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1&-k_1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2\in\mathbb{R})$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

21.(**本题满分 11 分**)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

☛ **证明:** (1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

且 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha},\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}&=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

故 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 又 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2$, 即 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3=0$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

22.(**本题满分 11 分**)

设 (X,Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$, 再给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(1) 求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$;

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 求 $P(X>2Y)$.

✎ **解:** (1) 由 X 的边缘分布知当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时, $f(x,y)=0$. 当 $0<x<1$ 时,

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x\\0, & \text{其他}\end{cases}.$$

因此求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(2) Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1 \frac{9y^2}{x}\mathrm{d}x & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(3) $P(X>2Y)=\displaystyle\iint\limits_{x>2Y} f(x,y)\mathrm{xy}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 总体均值 $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta$, 令 $E(X)=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$, 因此 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, $\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}-3\sum_{i=1}^n\ln x_i$, 令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=0$ 得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}$, 所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i}}$.

第 9 章 2014 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ( )

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$ C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$ D. $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

✎ **解:** 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \neq 0$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon,$$

即 $|a| - \varepsilon < |a_n| < |a| + \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ 可知 A 正确而 B 错误, C 可取反例 $a_n = a - \dfrac{1}{n}$, D 可取反例 $a_n = a + \dfrac{1}{n}$, 选 A.

2. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A. $y = x + \sin x$ B. $y = x^2 + \sin x$ C. $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ D. $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

✎ **解:** 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim\limits_{x\to\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x} = 0$, 从而直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ 的斜渐近线.

3. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \to 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是 ( )

A. $a = 0$ B. $b = 1$ C. $c = 0$ D. $d = \dfrac{1}{6}$

✎ **解:** 利用 $\tan x$ 的麦克劳林展开式知当 $x \to 0$ 时, $p(x) - \tan x = a + bx + cx^2 + dx^3 - x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 因此 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \dfrac{1}{3}$, 因此错误的选 D.

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

A. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$ B. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$ D. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

✎ **解:** 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F''(x) = f''(x)$. 故当 $f''(x) > 0$ 时, $F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x = 0$ 或 $x = 1$ 处取到, 而 $F(0) = F(1) = 0$, 所以 $F(x) = f(x) - g(x) \leqslant 0$, 选 D.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

A. $(ad-bc)^2$　　B. $-(ad-bc)^2$　　C. $a^2d^2-b^2c^2$　　D. $b^2c^2-a^2d^2$

✎ **解:** 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2,$$

选 B.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k, l, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的　(　)

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

✎ **解:** 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 令 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3) + \lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$, 即

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k\lambda_1 + l\lambda_2 = 0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 反之, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 不一定有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 如取反例 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 因此选 A.

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5$, $P(A-B) = 0.3$, 则 $P(B-A) =$ (　)

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

✎ **解:** 由 A, B 相互独立可得

$$\begin{aligned} P(A-B) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A) - 0.5P(A) = 0.5P(A) = 0.3, \end{aligned}$$

所以 $P(A) = 0.6$, $P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.5P(A) = 0.2$, 选 B.

8. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分布为　(　)

A. $N(0,1)$　　B. $t(1)$　　C. $\chi^2(1)$　　D. $F(1,1)$

✎ **解:** 首先 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $X_3 \sim N(0,\sigma^2)$, 因此 $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$, $\dfrac{X_3}{\sigma} \sim N(0,1)$, 则 $\dfrac{X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 且 $X_1 - X_2$ 与 X_3 独立, 故 $\dfrac{(X_1 - X_2)/(\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{X_3^2/\sigma^2}} = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|} \sim t(1)$, 选 C.

二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格), 则该商品的边际收益为________.

解: 由 $Q=40-2p$ 得 $p=\dfrac{40-Q}{2}$, 于是收益函数为 $R=pQ=\dfrac{(40-Q)Q}{2}$, 边际收益为 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=20-Q$.

注: 边际收益的定义是收益对销售量 Q 的导数, 而不是对价格 p 的导数.

10.设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为________.

解: 画出积分区域图不难得到区域 D 的面积为 $S=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^0\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-\frac{1}{y}}^0\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}+\ln 2$.

11.设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$, 则 $a=$________.

解: 由条件得 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^a=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2a}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$, 因此 $a=\dfrac{1}{2}$.

12.二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

解:

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y-\int_0^1(1-y)\,\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1(1-y)\,\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}-1}{2}.\end{aligned}$$

13.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是________.

解: 由配方法得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-\left(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2\right)+4x_3^2-a^2x_3^2\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+\left(4-a^2\right)x_3^2,\end{aligned}$$

因为负惯性指数为 1, 所以 $4-a^2\geqslant 0$, 解得 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

14.设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & 其他\end{cases},$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) = \theta^2$, 则 $c =$________.

✎ **解:** 由条件得

$$
\begin{aligned}
E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) &= c\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right) = cnE\left(X^2\right) \\
&= cn\int_{\theta}^{2\theta}\frac{2x^3}{3\theta^2}\mathrm{d}x = \frac{2cn}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\bigg|_{\theta}^{2\theta} = \frac{5cn}{2}\theta^2 = \theta^2,
\end{aligned}
$$

因此 $c = \dfrac{2}{5n}$.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

✎ **解:** 当 $t>0$ 时,$t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t > t^2\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}\right)-t = \dfrac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}\bigg/\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

注: 事实上, 洛必达法则适用于 $\dfrac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(**本题满分** 10 **分**)

设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 计算 $\displaystyle\iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 积分区域关于直线 $y=x$ 对称, 利用轮换对称性与极坐标可得

$$
I = \iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D\frac{y\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_{D} \frac{x \sin \left(\pi \sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)}{x+y} \mathrm{d} x \mathrm{d} y+\iint\limits_{D} \frac{y \sin \left(\pi \sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)}{x+y} \mathrm{d} x \mathrm{d} y\right) \\
&=\frac{1}{2} \iint\limits_{D} \sin \left(\pi \sqrt{x^{2}+y^{2}}\right) \mathrm{d} x \mathrm{d} y=\frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d} \theta \int_{1}^{2} r \sin (\pi r) \mathrm{d} r \\
&=-\frac{3}{4} .
\end{aligned}
$$

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(\mathrm{e}^{x} \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}}=(4 z+\mathrm{e}^{x} \cos y) \mathrm{e}^{2 x}$, 若 $f(0)=0, f^{\prime}(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

✎ **解:** 利用多元复合函数偏导公式得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=f^{\prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{x} \cos y, \frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}=f^{\prime \prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{2 x} \cos ^{2} y+f^{\prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{x} \cos y, \\
&\frac{\partial z}{\partial y}=-f^{\prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{x} \sin y, \frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}}=f^{\prime \prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{2 x} \sin ^{2} y-f^{\prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{x} \cos y .
\end{aligned}
$$

所以等式 $\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}}=\left(4 z+\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{2 x}$ 化为

$$
f^{\prime \prime}\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right) \mathrm{e}^{2 x}=\left[4 f\left(\mathrm{e}^{x} \cos y\right)+\mathrm{e}^{x} \cos y\right] \mathrm{e}^{2 x},
$$

因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f^{\prime \prime}(u)=4 f(u)+u$, 此方程的通解为 $f(u)=C_{1} \mathrm{e}^{2 u}+C_{2} \mathrm{e}^{-2 u}-\frac{u}{4}$. 由 $f(0)=f^{\prime}(0)=0$ 得 $C_{1}+C_{2}=0, 2 C_{1}-2 C_{2}-\frac{1}{4}=0$, 解得 $C_{1}=\frac{1}{16}, C_{2}=-\frac{1}{16}$, 故 $f(u)=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{2 u}-\mathrm{e}^{-2 u}-4 u\right)$.

18.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3) x^{n}$ 的收敛域及和函数.

✎ **解:** 令 $a_{n}=(n+1)(n+3)$, 因为 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=1$, 所以幂级数的收敛半径为 $R=1$. 当 $x=\pm 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3) x^{n}$ 发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 当 $x \in(-1,1)$ 时,

$$
\begin{aligned}
S(x) &=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3) x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1) x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) x^{n} \\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)^{\prime \prime}+\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)^{\prime}=\left(\frac{x^{2}}{1-x}\right)^{\prime \prime}+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\prime} \\
&=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)^{\prime \prime}+\left(\frac{1}{1-x}-1\right)^{\prime} \\
&=\frac{2}{(1-x)^{3}}+\frac{1}{(1-x)^{2}}=\frac{3-x}{(1-x)^{3}} .
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. 证明:

(1) $0 \leqslant \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x-a, x \in [a,b]$;

(2) $\displaystyle\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

✎ **解:** (1) 因为 $\leqslant g(x) \leqslant 1$, 所以 $0 \leqslant \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \mathrm{d}t = x-a, x \in [a,b]$.

(2) 令 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a+\int_0^x g(u)\mathrm{d}u} f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x) = f(x)\,g(x) - f\left(a + \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u\right) g(x) = \left[f(x) - a + \int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u\right] g(x).$$

由 (1) 知 $a + \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant a + x - a = x$, 而 $f(x)$ 单调增加, 所以 $F'(x) \geqslant 0$, 这说明 $F(x)$ 单调增加. 又 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geqslant 0$, 即 $\displaystyle\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

✎ **解:** (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 对矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{E})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = (2,-1,-1,0)^{\mathrm{T}} + k_1\boldsymbol{\alpha}, k_1 \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = (6,-3,-4,0)^{\mathrm{T}} + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, k_2 \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $x = (-1,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_3\boldsymbol{\alpha}, k_3 \in \mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\boldsymbol{\alpha}, k_2\boldsymbol{\alpha}, k_3\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

解: 先证明一个基本结论:

引理

秩为 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$. 且当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形为 $\operatorname{diag}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), 0, \cdots, 0\}$.

证明: 由于 $r(\boldsymbol{A}) = 1$, 所以方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有且只有 $n-1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值, 且它只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个特征值就是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$. 当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 且其相似标准形为 $\operatorname{diag}\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), 0, \cdots, 0\}$. 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$, 则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值, 但只有 $n-1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 1, \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = n$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角阵 $\operatorname{diag}\{n, 0, \cdots, 0\}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1) = P(X=2) = \dfrac{1}{2}$, 在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i)(i = 1, 2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 EY.

解: (1) 由分布函数定义得

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) \\
&= P(X=1) P(Y \leqslant y | X=1) + P(X=2) P(Y \leqslant y | X=2) \\
&= \frac{1}{2} P(Y \leqslant y | X=1) + \frac{1}{2} P(Y \leqslant y | X=2) \\
&= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{1}{2} y + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} y, & 0 \leqslant y < 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} y, & 1 \leqslant y < 2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} & y \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{3y}{4}, & 0 \leqslant y < 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{y}{4}, & 1 \leqslant y < 2 \\ 1, & y \geqslant 2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

(2) Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, 因此

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \frac{3}{4}y\mathrm{d}y+\int_1^2 \frac{1}{4}y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}.$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 X,Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{2}{3}$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(1) 求 (X,Y) 的概率分布;

(2) 求 $P(X+Y\leqslant 1)$.

✎ **解:** (1) 由条件可得 $E(X)=E(Y)=\frac{2}{3}$, $D(X)=D(Y)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$, 且 $E(XY)=P(X=1,Y=1)$, 所以 $\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{9}{2}\left(P\,(X=1,Y=1)-\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{2}$, 于是 $P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}$. 由此以及 X,Y 的边缘分布即可得 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(2) $P(X+Y\leqslant 1)=1-P(X+Y>1)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

第 10 章 2015 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

B. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

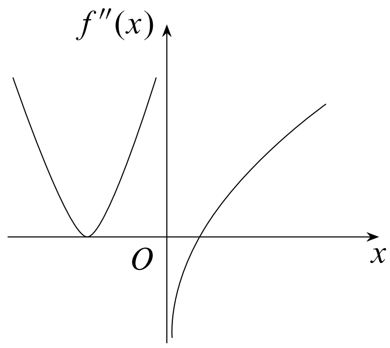
C. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

✎ **解:** 一个数列收敛的充要条件是它的任意子列都收敛于同一个极限, 因此 A 和 C 都对. 对于选项 B, 子列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 刚好是 $\{x_n\}$ 奇数子列和偶数子列, 这两个子列收敛于同一个极限, 也能说明 $\{x_n\}$ 收敛. 但是 D 选项中少了子列 $\{x_{3n+2}\}$ 的收敛性, 得不到 $\{x_n\}$ 收敛, 错误的选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



第 2 题图

✎ **解:** 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y = f''(x)$ 在 $x > 0$ 时与 x 轴的交点, $x < 0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

3. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 2, x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ( )

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

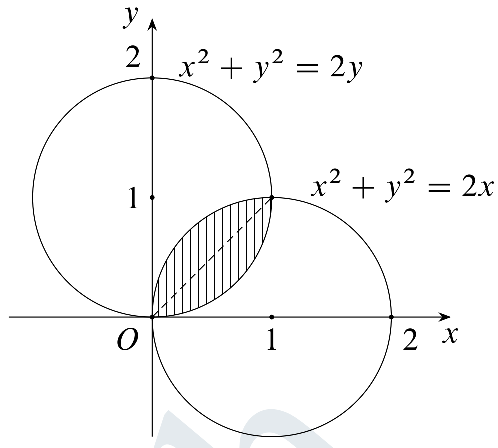
C. $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x, y)\mathrm{d}y$

D. $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$

✎ **解:** 积分区域如图. 如果化为直角坐标系下 X 型区域的累次积分, 积分区域可表示为

$$0 \leqslant x \leqslant 1, 1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2},$$

那么累次积分为 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, 但是 $f(x,y)$ 在区域的上下部分的积分不一定相等, 所以不能写成其中一半区域积分的两倍, C 和 D 都是不对的. 如果化为极坐标, 代入 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可知上下两个圆的方程分别为 $r = 2\sin\theta, r = 2\cos\theta$, 因此正确答案选 B.



第 3 题图

4. 下列级数中发散的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$ D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

✎ **解:** A 选项由比值法有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \dfrac{1}{3}$, 故 A 选项收敛, B 选项中 $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 也收敛, C 选项中 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+1}{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\ln(2n)}$ 是发散的, D 选项由比值法有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

所以 D 选项也收敛, 选 C.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1,2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$ C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

✎ **解:** 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) < 3$, 利用初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以 $a = 1$ 或 2, $d = 1$ 或 2, 选 D.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 ( )

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

✎ **解:** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由题意知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$, 于是

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

因此 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$, 选 A.

7. 设 A,B 为任意两个随机事件, 则 ( )

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$ B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ D. $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

✎ **解:** 注意到 $P(AB)\leqslant P(A),P(AB)\leqslant P(B)$, 因此 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$, 选 C.

8. 设随机变量 X,Y 不相关, 且 $EX=2,EY=1,DX=3$, 则 $E[X(X+Y-2)]=$ ( )

A. -3 B. 3 C. -5 D. 5

✎ **解:** 由条件可得

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)\\&=D(X)+(EX)^2+E(X)E(Y)-2E(X)=5,\end{aligned}$$

选 D.

二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

✎ **解:** 利用洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{2x\cos x}=-\dfrac{1}{2}$.

10.设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$________.

✎ **解:** 由条件 $\varphi(x)=x\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$, 求导得 $\varphi'(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$, 故 $\varphi(1)=\displaystyle\int_0^1f(t)\mathrm{d}t=1,\varphi'(1)=1+2f(1)=5$, 则 $f(1)=2$.

11.若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$________.

✎ **解:** 令 $x=y=0$ 可得 $z(0,0)=0$, 原方程两边同时求全微分得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)+xy\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y=0.$$

令 $x=y=z=0$ 得 $(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)\big|_{(0,0)}=0$, 即 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y$.

12.设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解, 且在 $x=0$ 处取得极值 3, 则 $y(x)=$________.

✎ **解:** 由题意知 $y(0)=3, y'(0)=0$. 微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 解得 $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$, 所以微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 代入 $y(0)=3, y'(0)=0$ 得 $C_1=2, C_2=1$, 故 $y=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}$.

13.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

✎ **解:** $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$ 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3,7,1$, 因此 $|\boldsymbol{B}|=21$.

14.设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$, 则 $P(XY-Y<0)=$________.

✎ **解:** 由 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$ 知 $X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$, 且 X,Y 相互独立, 所以

$$\begin{aligned}P(XY-Y<0)&=P((X-1)Y<0)=P(X-1>0,Y<0)+P(X-1<0,Y>0)\\&=P(X>1)P(Y<0)+P(X<1)P(Y>0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a,b,k 的值.

✎ **解:** 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right), \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$, 所以

$$\begin{aligned}f(x)&=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o\left(x^3\right)\\&=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)=kx^3$ 当 $x\to 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, k=\frac{a}{3}$, 解得 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$.

注: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

✎ **解:** 区域 D 关于 y 轴对称, 则由对称性得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\mathrm{d}y\\ &= 2\int_0^1 x^2\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 t\cdot 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}\quad\left(x=\sqrt{2}\sin t\right)\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,\mathrm{d}u-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

为实现利润的最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量, P 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

(1) 证明定价模型为 $P=\dfrac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}$;

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$, 需求函数为 $Q=40-P$, 试由 (1) 中的定价模型确定此商品的价格.

✎ **解:** (1) 由于利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=PQ-C(Q)$, 两边对 Q 求导得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}-C'(Q)=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}-\mathrm{MC}.$$

当且仅当 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=0$ 时, 利润 $L(Q)$ 最大. 又由于 $\eta=-\dfrac{P}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$, 故当 $P=\dfrac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}$ 时, 利润最大.

(2) 由于 $\mathrm{MC}=C'(Q)=2Q=3(40-P)$, 则 $\eta=-\dfrac{P}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$, 代入 (1) 中的定价模型, 得 $P=\dfrac{2(40-P)}{1-\frac{40-P}{P}}$, 解得 $P=30$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0\in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

✎ **解:** 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, 此切线与 x 轴交点为 $\left(x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$. 根据题设条件可知 $\dfrac{1}{2}\dfrac{|f(x_0)|}{f'(x_0)}\cdot|f(x_0)|=4$, 即 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\dfrac{1}{8}y^2$, 解得 $y=-\dfrac{8}{8C+x}$. 因为 $f(0)=2$, 所以 $C=-\dfrac{1}{2}$, 故 $f(x)=\dfrac{8}{4-x}$.

19.(本题满分 10 分)

(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

✎ **解:** (1) 因为函数 $u(x), v(x)$ 可导, 记 $f(x) = u(x)v(x)$, 则在任意点 x_0 处有

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_0)+u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}u(x)+v(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\\
&= u(x_0)v'(x_0)+v(x_0)u'(x_0).
\end{aligned}$$

由 x_0 的任意性知 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

(2) $f'(x) = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

✎ **解:** (1) 因为 $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{O}$, 所以 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix} = a^3 = 0$, 所以 $a = 0$.

(2) 由 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$ 得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{E}$. 由 (1) 知

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

21.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+a=2+b\\2a-3=b\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$.

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得线性无关特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 为对角阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY.

✎ **解:** (1) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为 $p=P(X>3)=\displaystyle\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$, 则 Y 的概率分布为 $P(Y=k)=\mathrm{C}_{k-1}^{1}\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{8}\right)^{k-2}\dfrac{1}{8}=(k-1)\left(\dfrac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\dfrac{1}{8}\right)^2,k=2,3,\cdots$.

(2) Y 的数学期望为 $E(Y)=\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2=16$, 其中我们用到幂级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},-1<x<1.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解: (1) 由于总体 $X\sim U[\theta,1]$, 故总体均值 $E(X)=\dfrac{\theta+1}{2}$, 令 $E(X)=\bar{X}$ 得 $\theta=2\bar{X}-1$, 即 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}-1$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

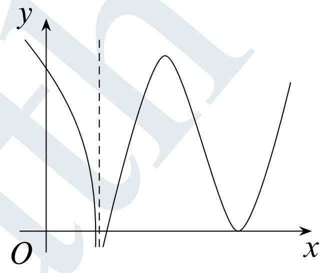
$$\begin{aligned}L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1\,(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant \min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.\end{aligned}$$

当 $\theta\leqslant\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时, 显然 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递增, 则当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 最大, 即 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

第 11 章 2016 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 (　　)



第 1 题图

A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

✎ **解:** 拐点是导函数单调性发生改变的点, 图中 $y=f'(x)$ 的图像有两个极值点都是导函数单调性改变的点, 都是拐点, 而虚线处左右两侧的导函数单调性也相反, 从而也是拐点, 即共有 3 个拐点. 导函数为零的点有 3 个, 但只有前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 有 2 个极值点, 选 B.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x-y}$, 则 (　　)

A. $f'_x-f'_y=0$　　B. $f'_x+f'_y=0$　　C. $f'_x-f'_y=f$　　D. $f'_x+f'_y=f$

✎ **解:** 由 $f(x)=\dfrac{e^x}{x-y}$ 得 $f'_x(x,y)=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$, $f'_y(x,y)=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$, 故 $f'_x(x,y)+f'_y(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}=f(x)$, 选 D.

3. 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy\ (i=1,2,3)$, 其中

$$D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},$$
$$D_3=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\},$$

则 (　　)

A. $J_1<J_2<J_3$　　B. $J_3<J_1<J_2$　　C. $J_2<J_3<J_1$　　D. $J_2<J_1<J_3$

✎ **解:** 注意到被积函数 $\sqrt[3]{x-y}$ 当 $x>y$ 时为正, 当 $x<y$ 时为负, 画图比较三个积分区域易知选 B.

4. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$(k 为常数) (　　)

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛
C. 发散　　D. 收敛性与 k 有关

✎ **解:** 注意到

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right| \leqslant \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} < \frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

由正项级数比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ 绝对收敛, 选 A.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 (　)

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似
C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 因此

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P},$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-8\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-6\end{pmatrix}$ 不相似.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$, 则 (　)

A. $a>1$　　B. $a<-2$　　C. $-2<a<1$　　D. $a=1$或$a=-2$

✎ **解:** 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a+2, \lambda_2=\lambda_3=a-1$. 由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$, 即正负特征值个数分别为 $1,2$, 因此 $\begin{cases}a+2>0\\a-1<0\end{cases}$, 即 $-2<a<1$, 选 C.

7. 设 A,B 为两个随机事件, 且 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 如果 $P(A|B)=1$, 则 (　)

A. $P(\bar{B}|\bar{A})=1$　　B. $P(A|\bar{B})=1$　　C. $P(A\cup B)=1$　　D. $P(B|A)=1$

✎ **解:** 由条件得 $0=P(B)-P(AB)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})-P(\bar{A}\bar{B})$, 于是 $P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=1$, 选 A.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1,2), Y \sim N(1,4)$, 则 $D(XY) =$ ( )

A. 6 B. 8 C. 14 D. 15

✎ **解:**

$$\begin{aligned} D(XY) &= E(X^2Y^2) - (EXY)^2 = (EX^2)(EY^2) - (EX)^2(EY)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EX)^2(EY)^2 = 14. \end{aligned}$$

二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$________.

✎ **解:** 原极限存在, 且分母趋于 0, 所以分子趋于 0, 即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin 2x = 0$, 利用等价无穷小替换得

$$2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} f(x)\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 6.$$

10.极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n} + 2\sin\dfrac{2}{n} + \cdots + n\sin\dfrac{n}{n}\right) =$________.

✎ **解:** 利用定积分定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{k}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\frac{k}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sin\frac{k}{n} = \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x = \sin 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

11.设函数 $f(u,v)$ 可微, $z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} =$________.

✎ **解:** 原方程两边分别对 x, y 求偏导数得

$$\begin{cases} z + (x+1)z_x' = 2xf(x-z,y) + x^2\left(1-z_x'\right) f_1'(x-z,y) \\ (x+1)z_y' - 2y = x^2\left(-z_y' f_1'(x-z,y) + f_2'(x-z,y)\right) \end{cases}.$$

代入 $x=0, y=1, z=1$ 可得 $z_x'(0,1) = -1, z_y'(0,1) = 2$, 因此 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$.

12.设 $D = \{(x,y)\,||x| \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, 则 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$________.

✎ **解:** 设 D_1 是 D 在第一象限的部分, 根据对称性可得

$$\begin{aligned} \iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint\limits_{D_1} x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 y^3 e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3e}. \end{aligned}$$

13.行列式 $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} =$ ________.

✎ **解:** 直接按照第一列展开得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.\end{aligned}$$

14.设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰为 4 的概率为________.

✎ **解:** 4 次取球总的取法数为 $3^4 = 81$, 要想取 4 次结束, 则前 3 次刚好只取到了两种颜色, 第 4 次取到了第三种颜色, 因此所求概率为 $p = \dfrac{\mathrm{C}_3^2 \mathrm{C}_3^1 \times 2}{81} = \dfrac{2}{9}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

✎ **解:** 首先有 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} \right)$, 其中

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x\sin x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x\sin x - 1 + 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + 2x\sin x - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x - 2\sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\,(x - \sin x)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

因此原极限为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

16.(**本题满分** 10 **分**)

设某商品最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性 $\eta = \dfrac{p}{120 - p} (\eta > 0)$, p 为单价 (万元).

(1) 求需求函数的表达式;

(2) 求 $p=100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

解: (1) 由弹性的计算公式 $\eta=\left|\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right|$ 可知 $\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{-p}{120-p}$, 分离变量解方程得到 $Q=C(p-120)$, 其中 C 为任意常数. 又商品的最大需求量为 1200 件, 则 $p=0$ 时 $Q=1200$, 因此 $C=-10$, 则 $Q=10(120-p)$.

(2) 收益函数 $R(p)=pQ=\frac{Q(1200-Q)}{10}=120Q-\frac{Q^2}{10}$, 边际收益为 $R'(Q)=120-\frac{Q}{5}$. 当 $p=100$ 时, $Q=200$, 此时边际收益为 $R'(200)=80$, 其经济意义为当单价为 100 万元时, 需求量每增加 1 件, 收益将增加 80 万元.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解: 首先

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, & 0<x<1\\ \int_0^1\left(x^2-t^2\right)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}, & x\geqslant 1\end{cases},$$

于是 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$. 当 $x\geqslant 1$ 时, $f'(x)=2x>0$; 当 $0<x<1$ 时, 令 $f'(x)=4x^2-2x=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$, 且 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=2>0$, 因此 $x=\frac{1}{2}$ 是唯一的极小值点, 从而是最小值点, 故 $f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$, 求 $f(x)$.

解: 首先有 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$, 因此原方程化为

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1.$$

上式两边求导得 $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{-x}=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}$. 注意到此方程右边可导, 从而继续求导得 $f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}$, 且 $f(0)=-1$, 解此一阶线性微分方程得 $f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

19.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解: 记 $u_n(x)=\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(2n-1)x^2}{(n+1)(2n+1)}\right|=x^2$. 令 $x^2<1$ 得 $-1<x<1$, 因此幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$. 且当 $x=\pm1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=2\ln 2,\end{aligned}$$

因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$. 当 $x\in(-1,1)$ 时, 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n},$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n}=-\ln\left(1-x^2\right)$, 而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+1}=2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\mathrm{d}t=2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\ln\frac{1+x}{1-x},$$

因此原幂级数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2), & x\in(-1,1)\\ 2\ln 2, & x=\pm1\end{cases}$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

解: 对方程的增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right).$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+3&3&-3&a-4\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\dfrac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)$,

此时方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解, 且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

当 $a=1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$, 此时方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解, 且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\k_1-1&k_2-1\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数.

当 $a=-2$ 时, 由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$, 此时方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

✎ **解:** (1) 首先由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=-2$ 时, 解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{\Lambda}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{99}&=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^{99}=\boldsymbol{P\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 知 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 即 $\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$.

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

✎ **解:** (1) (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(2) 对 $0<t<1$, 有

$$P(U\leqslant 0,X\leqslant t)=P(X>Y,X\leqslant t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}t-t^3,$$
$$P(U\leqslant 0)=P(X>Y)=\frac{1}{2}, P(X\leqslant t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\,\mathrm{d}y=2t^{\frac{3}{2}}-t^3.$$

由于 $P(U\leqslant 0,X\leqslant t)\neq P(U\leqslant 0)P(X\leqslant t)$, 所以 U 与 X 不独立.

(3)

$$\begin{aligned}F(z)&=P(U+X\leqslant z)=P(U+X\leqslant z,U=0)+P(U+X\leqslant z,U=1)\\&=P(X\leqslant z,X>Y)+P(1+X\leqslant z,X\leqslant Y)\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1\\ \dfrac{1}{2}, & z\geqslant 1\end{cases}+\begin{cases}0, & z<1\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2\\ \dfrac{1}{2}, & z\geqslant 2\end{cases}\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}.\end{aligned}$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$, 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数. X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a, 使得 $E(aT)=\theta$.

✎ **解:** (1) T 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F(t) &= P(T\leqslant t)=P\big(\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\big)=P(X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t)\\
&=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \left(\displaystyle\int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}\theta\right)^3, & 0<t<\theta\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \dfrac{t^9}{\theta^9}. & 0<t<\theta\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}.
\end{aligned}
$$

因此 T 的概率密度为 $f(t)=F'(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^2}{\theta^9}, & 0<t<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(2) 令 $E(aT)=\displaystyle\int_0^\theta at\frac{9t^2}{\theta^9}\mathrm{d}\theta=\frac{9}{10}a\theta=\theta$, 解得 $a=\dfrac{10}{9}$.

第 12 章 2017 年考研数学三

一、选择题, 1 ∼ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( )

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　　C. $ab=0$　　D. $ab=2$

✎ **解:** 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$, 即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\frac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\frac{1}{2},$$

选 A.

2. 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是 ( )

A. $(0,0)$　　B. $(0,3)$　　C. $(3,0)$　　D. $(1,1)$

✎ **解:** 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3y-2xy-y^2=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x-x^2-2xy=0\end{cases}$ 可得四个驻点 $(0,0),(0,3),(3,0),(1,1)$. 令 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y$, $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3-2x-2y$, $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$, 在四个驻点处分别考虑判别式 $AC-B^2$ 的正负, 只有在 $(x,y)=(1,1)$ 处有 $AC-B^2=3>0$, 且 $A=C=-2<0$, 因此 $(1,1)$ 为极大值点. 其他选项都不满足, 选 D.

3. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)\cdot f'(x)>0$, 则 ( )

A. $f(1)>f(-1)$　　B. $f(1)<f(-1)$

C. $|f(1)|>|f(-1)|$　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$

✎ **解:** 由 $f(x)f'(x)>0$ 可知 $[f^2(x)]'=2f(x)f'(x)>0$, 因此 $f^2(x)$ 单调递增, 有 $f^2(1)>f^2(-1)$, 即 $|f(1)|>|f(-1)|$, 选 C.

4. 若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

✎ **解:** 利用泰勒公式可得知当 $n\to\infty$ 时,

$$\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-k\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{n} + \frac{k}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因此当且仅当 $1+k=0$ 即 $k=-1$ 时原级数收敛, 选 C.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆 B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆 D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

✎ **解:** 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1, 它有 $n-1$ 个特征值为 0, 第 n 个特征值为 $\lambda = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = 1$, 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 有一个特征值为 0, 不可逆, 其他矩阵都可逆, 选 A.

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似 B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似 D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

✎ **解:** 注意到 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值都是 $2, 2, 1$, 要判断 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda = 2$ 的情形即可. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. 对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 2$, 它是不可对角化的, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, 选 B.

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是 ( )

A. A 与 B 相互独立 B. A 与 B 互不相容

C. AB 与 C 相互独立 D. AB 与 C 互不相容

✎ **解:** $A \cup B$ 与 C 相互独立 $\Leftrightarrow P\big((A \cup B)C\big) = P(A \cup B)P(C)$, 由题意有

$$\begin{aligned} P\big((A \cup B)C\big) &= P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC), \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(ABC), \\ P(A \cup B)P(C) &= \big(P(A) + P(B) - P(AB)\big)P(C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C), \end{aligned}$$

因此得到 $P(ABC) = P(AB)P(C)$, 选 C.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, 则下列结论中不正确的是 ( )

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布 B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布 D. $n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

✎ **解:** 对选项 B 有 $X_n - X_1 \sim N(0,2)$, $\dfrac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$, $\dfrac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$, B 不正确, 选项 A, C, D 都是基本结论, 都正确, 选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x =$ ________.

✎ **解:** 利用定积分的区间对称性和几何意义可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{2}.$$

10.差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 $y =$________.

✎ **解:** 首先齐次差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 0$ 的通解为 $Y_t = C \cdot 2^t$. 设非齐次方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的一个特解为 $t_t = At \cdot 2^t$, 代入方程可得 $A = \dfrac{1}{2}$, 因此差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 $y_t = C \cdot 2^t + t \cdot 2^{t-1}$, C 为任意常数.

11.设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + \mathrm{e}^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为________.

✎ **解:** 总成本为 $C(Q) = Q\left(1 + \mathrm{e}^{-Q}\right)$, 因此边际成本为 $C'(Q) = 1 + \mathrm{e}^{-Q}(1 - Q)$.

12.设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}f(x,y) = y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x + x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$, $f(0,0) = 0$, 则 $f(x,y) =$________.

✎ **解:** 容易知道 $\mathrm{d}f(x,y) = y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x + x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy\mathrm{e}^y)$, 因此 $f(x,y) = xy\mathrm{e}^y + C$, 再由 $f(0,0) = 0$ 知 $C = 0$, 因此 $f(x,y) = xy\mathrm{e}^y$.

13.设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

✎ **解:** 依题意知 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵, 所以

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_3) = r\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\right) = r(\boldsymbol{A}) = 2.$$

14.设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = -2) = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 3) = b$, 若 $EX = 0$, 则 $DX =$____.

✎ **解:** 由分布律的归一性可知 $\dfrac{1}{2} + a + b = 1$. 而 $EX = -2 \times \dfrac{1}{2} + a + 3b = 0$, 所以 $a = b = \dfrac{1}{4}$. 从而 $EX^2 = (-2)^2 \times \dfrac{1}{2} + 1^2 \times \dfrac{1}{4} + 3^2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{2}$, $DX = EX^2 - (EX)^2 = \dfrac{9}{2}$.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

✎ **解:** 令 $u=x-t$, 则 $\displaystyle\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$, 故原极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.$$

16.(本题满分 10 分)

计算积分 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

✎ **解:** 直接化为累次积分得

$$\iint\limits_D\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2+y^4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

17.(本题满分 10 分)

求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

✎ **解:** 利用定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}(x^2)$$
$$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}.$$

18.(本题满分 10 分)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根, 求 k 的范围.

✎ **解:** 令 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$, 方程 $f(x)=k$ 有实根的充要条件是 k 在 $f(x)$ 的值域内. 求导得

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+(x+1)\ln^2(1+x)}{x^2(x+1)\ln^2(1+x)},$$

令 $g(x)=-x^2+(x+1)\ln^2(1+x)$, 则

$$g'(x)=-2x+\ln^2(1+x)+2\ln(1+x),$$
$$g''(x)=-2+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}=\frac{-2x+2\ln(1+x)}{1+x},$$

因此 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减, $g'(x)<g'(0)=0$, 故 $g(x)$ 也在 $(0,1)$ 内单调递减, $g(x)<g(0)=0$, 即 $f'(x),0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减. 而 $f(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

故 k 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{\ln 2}-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

19.(**本题满分 10 分**)

设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1;

(2) 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,x\in(-1,1)$, 并求 $S(x)$ 的表达式.

✎ **解:** (1) 由递推关系可得 $(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$, 即 $(n+1)(a_{n+1}-a_n)=-(a_n-a_{n-1})$, 因此

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})=\cdots=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1-a_0)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

于是 $a_n=a_0+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}\to \mathrm{e}^{-1}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, 这说明原幂级数的收敛半径就是 1.

(2) 因为 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 且 $a_1=0$, 所以

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(na_n+a_{n-1})x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\end{aligned}$$

$$= xS'(x) + xS(x).$$

所以有 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$, 且 $S(0) = a_0 = 1$, 解此微分方程得 $S(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}, x \in (-1,1)$.

20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A}) = 2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

✎ **解:** (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$ 说明 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, 故 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$, 因此 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

(2) 因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$, 即方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 进而方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

✎ **解:** 首先二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\1 & -1 & 1\\-4 & 1 & a\end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 一定有零特征值, 所以 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 解得 $a = 2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\-1 & \lambda+1 & -1\\4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$.

解方程组 $(-3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_1 = -3$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $(6\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_2 = 6$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_3=0$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 X,Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y\leqslant EY)$;

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

✎ **解:** (1) 首先有 $EY=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$, 于是

$$P(Y\leqslant EY)=P\left(Y\leqslant\frac{2}{3}\right)=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(2) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)\\&=P(Y+X\leqslant z|X=0)P(X=0)+P(Y+X\leqslant z|X=2)P(X=2)\\&=\frac{1}{2}P(Y\leqslant z|X=0)+\frac{1}{2}P(Y+2\leqslant z)\\&=\frac{1}{2}P(Y\leqslant z)+\frac{1}{2}P(Y\leqslant z-2)=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-2).\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2}f_Y(z)+\dfrac{1}{2}f_Y(z-2)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-2, & 2<z<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

23.(**本题满分** 11 **分**)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做了 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$, 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计参数 σ.

(1) 求 Z_1 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(3) 求参数 σ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 由 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. $Z_i = |X_i-\mu|\,(i=1,2,\cdots,n)$ 独立同分布, 设 Z_1 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned}F(z) &= P(Z_i \leqslant z) = P(|X_i-\mu| \leqslant z) = P\left(-\frac{z}{\sigma} \leqslant \frac{X_i-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{z}{\sigma}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1.\end{aligned}$$

则 Z_1 的概率密度为

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases}\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right), & z \geqslant 0\\ 0, & z < 0\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geqslant 0\\ 0, & z < 0\end{cases}.$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

(2) 设 $\bar{Z}$ 为样本均值, 令

$$\bar{Z} = E(Z_1) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\sigma z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

由此可知 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\bar{Z}$.

(3) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 对应的样本值为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i) = \begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2}, & z_1,z_2,\cdots,z_n > 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $z_1,z_2,\cdots,z_n > 0$ 时, 取对数得 $\ln L(\sigma) = \dfrac{n}{2}\ln\dfrac{2}{\pi} - n\ln\sigma - \dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0,$$

解得 $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2}$, 故 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i^2}$.

第 13 章 2018 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

✎ **解:** A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_{+}(0)=-\dfrac{1}{2}$, $f'_{-}(0)=\dfrac{1}{2}$, 选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 ( )

A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$　　D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

✎ **解:** 考虑 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当 $f''(x)>0$ 时, $f(x)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, 不等式两边在 $[0,1]$ 上进行积分可得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$, 选 D.

3. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$　　C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

✎ **解:** 利用对称性可以计算 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量, 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 ( )

A. $C'(Q_0)=0$　　B. $C'(Q_0)=C(Q_0)$

C. $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$　　D. $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

✎ **解:** 平均成本 $\bar{C}=\dfrac{C(Q)}{Q}$, $\bar{C}'=\dfrac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}$. 产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 $\bar{C}'(Q_0)=0$, 可得 $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$, 选 D.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

✎ **解:** 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$ B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$ D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

✎ **解:** 对于 A, 有 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$, 即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P(X<0)=$ ( )

A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

✎ **解:** 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.3,$$

于是 $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.5-0.3=0.2$, 选 A.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n\geqslant 2)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)\ (\sigma>0)$ 的简单随机样本, 令

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,\ S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2},\ S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2},$$

则 ( )

A. $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$ B. $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

C. $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$ D. $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$

✎ **解:** 首先由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$. 而样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ 满足的分布为 $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$, 且样本均值与样本方差独

立, 根据 t 分布的定义知 $\dfrac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2}{n-1}}}=\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S}\sim t\left(n-1\right)$, 选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ________.

✎ **解:** 计算可得 $y'=2x+\dfrac{2}{x}, y''=2-\dfrac{2}{x^2}$, 由此得曲线的拐点坐标 $(1,1)$. 曲线在拐点处切线的斜率为 $y'\big|_{x=1}=4$, 故切线方程为 $y=4x-3$.

10. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=$ ________.

✎ **解:** 令 $\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}=t$, 则 $\mathrm{e}^x=\cos t, \mathrm{d}x=-\dfrac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}u$, 原积分化为

$$-\int t\cos t\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t=-\int t\sin t\mathrm{d}t=t\cos t-\int\cos t\mathrm{d}t=t\cos t-\sin t+C,$$

带回原变量得原不定积分为 $\mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C$.

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的通解是 ________.

✎ **解:** 根据二阶差分的定义可得

$$\Delta^2 y_x=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x,$$

由 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 得 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$. 先求齐次方程的通解, 齐次差分方程的特征方程 $\lambda-2=0$, 齐次方程通解为 $Y=C\cdot 2^x$. 由于 1 不是特征根, 于是假设原差分方程的特解为 $y_x^*=A$, 带入非齐次方程知特解为 $y_x^*=-5$, 于是原方程的通解为 $y_x=C\cdot 2^x-5$.

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$, 且 $f(0)=2$, 则 $f(1)=$________.

✎ **解:** 在等式 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$ 两边除以 Δx, 并令 $\Delta x\to 0$ 得 $f'(x)=2xf(x)$, 解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{x^2}$. 由 $f(0)=2$ 得 $C=2$, 于是 $f(1)=2\mathrm{e}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 A 的实特征值为 ________.

✎ **解:** 由题意得 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 记 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 它们有相同的特征值, 易求得 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值为 2, 即 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 2.

14. 随机事件 A,B,C 相互独立, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$, 则 $P(AC|A\cup B)=$____.

✎ **解:** 直接计算得 $P\left(AC|A\cup B\right)=\dfrac{P\left[(AC)\cup(ABC)\right]}{P\left(A\cup B\right)}=\dfrac{P\left(AC\right)}{P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)}=\dfrac{1}{3}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知实数 a, b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$, 求 a, b.

✎ **解:** 直接利用泰勒公式得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]&=\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[(a-1)x+a+b+\frac{b}{x}+(ax+b)o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\&=2\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0, \lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)o\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, 所以 $\begin{cases}a-1=0\\a+b=2\end{cases}$, 解得 $a=b=1$.

16.(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 直接化成累次积分计算可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\left(\sqrt{3(1-x^2)}-\sqrt{3}x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3(1-x^2)}\mathrm{d}x-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{3}}{32}\pi-\frac{\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

✎ **解:** 设分成的三段依次为 x, y, z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\dfrac{x}{2\pi}, \dfrac{y}{4}, \dfrac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

方法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程 $\begin{cases} f_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ f_y'=\frac{y}{8}+\lambda=0 \\ f_z'=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$, 并且黑塞矩阵 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 时, $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

18.(**本题满分 10 分**)

已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$, 求 a_n.

✎ **解:** 首先 $\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{1+x}\right)'=\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}$, 而当 $-1<x<1$ 时,

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1},\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

. 求导得

$$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n.$$

比较系数可得 $a_n=\begin{cases} 2k+2, & n=2k+1 \\ \frac{(-4)^k}{(2k)!}-(2k+1), & n=2k \end{cases}\quad(k\in\mathbb{N})$.

19.(**本题满分 10 分**)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\,(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

✎ **解:** 首先由 $x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\,(n=1,2,\cdots)$ 归纳可知所有 $x_n>0$. 考虑函数 $f(x)=e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=e^{\xi_n}<e^{x_n},\quad \xi_n\in(0,x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $\mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \mathrm{e}^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

✎ **解:** (1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + a x_3 = 0 \end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = c(-2, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.
如果 $a = 2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

✎ **解:** (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\0&1&-a&-1&1-a&-1\\0&0&0&0&a-2&0\end{array}\right).$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z=XY$.

(1) 求 $\operatorname{Cov}(X,Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

✎ **解:** (1) 直接计算可知 $E(X)=0$, $E(X^2)=1$, 而 $Y\sim P(\lambda)$, $E(Y)=\lambda$, 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Z)&=\operatorname{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)\\&=E(X^2)E(Y)-(EX)^2E(Y)=\lambda.\end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(X=1)P(Z=k|X=1)+P(X=-1)P(Z=k|X=-1)\\&=P(X=1)P(Y=k)+P(X=-1)P(Y=-k)\\&=\frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k).\end{aligned}$$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\dfrac{1}{2}P\{Y=k\}=\dfrac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{2k!}$;
当 $k=0$ 时, $P(Z=0)=P(Y=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}$;
当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\dfrac{1}{2}P\{Y=-k\}=\dfrac{\lambda^{-k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(-k)!}$.

因此综上所述可得

$$P(Z=k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2,\cdots\\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0\end{cases}.$$

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

✎ **解:** (1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln2-n\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. 令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=\dfrac{-n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 $\sigma=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$, 所以

$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E(|X|)=\sigma,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2,$$

$$D(\hat{\sigma})=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{1}{n}\left(E(X^2)-(E|X|)^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

第 14 章 2019 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

✎ **解:** 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty, -4)$　　B. $(4, +\infty)$　　C. $\{-4, 4\}$　　D. $(-4, 4)$

✎ **解:** 令 $f(x) = x^5 - 5x + k$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \pm 1$. 当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$. 因此有极大值 $f(-1) = 4 + k$, 极小值 $f(1) = k - 4$, 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 要想原方程有 3 个不同的实根, 则有 $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$, 解得 $-4 < k < 4$, 选 D.

3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a, b, c 依次为 ( )

A. 1, 0, 1　　B. 1, 0, 2　　C. 2, 1, 3　　D. 2, 1, 4

✎ **解:** 从通解的结构可知, $Y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}$ 是对应齐次方程的通解, 因此 $\lambda = -1$ 是特征方程的二重特征根, 因此 $a = 2, b = 1$. 而 $y^* = \mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程 $y'' + 2y' + y = c\mathrm{e}^x$ 可得 $c = 4$, 选 D.

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

✎ **解:** 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛, 故它的通项趋于零, 则存在 $M > 0$ 使得 $\left|\dfrac{v_n}{n}\right| \leqslant M$, 因此 $|u_n v_n| = \left|n u_n \cdot \dfrac{v_n}{n}\right| \leqslant M |n u_n|$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛, 选 B. 对于 A 和 C 选项, 可取反例 $u_n = \dfrac{1}{n^3}, v_n = (-1)^n$; 对于 D 选项, 可取反例 $u_n = \dfrac{1}{n^3}, v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*) =$ ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

✎ **解:** 由于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$, 因此 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 -2. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

7. 设 A,B 为随机事件, 则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$ D. $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

✎ **解:** 显然 $P(A)=P(B)$ 等价于 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$, 即 $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A=B=\Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B=\bar{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$ ( )

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关 B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

C. 与 μ,σ^2 都有关 D. 与 μ,σ^2 都无关

✎ **解:** 由条件可知 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$, 因此

$$\begin{aligned}P\{|X-Y|<1\}&=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1,\end{aligned}$$

此概率与 μ 无关, 与 σ^2 有关, 选 A.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)^n=$________.

✎ **解:** 首先 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$, 因此原极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}=\mathrm{e}^{-1}$.

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为________.

✎ **解:** 先求二阶导数

$$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x,\ y''=\cos x+\cos x-x\sin x-2\cos x=-x\sin x,$$

令 $y''=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=\pi$. 当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 或 $0<x<\pi$ 时 $y''<0$, 当 $\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$ 时 $y''>0$. 因此 $(0,2)$ 不是拐点, $(\pi,-2)$ 是拐点, 选 C.

11.已知 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:** 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x&=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t=-\int_0^1\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t\int_0^t x^2\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t=-\frac{1}{18}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}.\end{aligned}$$

12.以 P_A,P_B 分别表示 A,B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$, 则当 $P_A=10,P_B=20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$ 为________.

✎ **解:** 由需求弹性公式可得

$$\begin{aligned}\eta_{AA}&=\left|\frac{P_A}{P_B}\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}\right|=\left|\frac{P_A}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2}(-2P_A-P_B)\right|\\&=\frac{P_A(2P_A+P_B)}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2},\end{aligned}$$

代入 $P_A=10,P_B=20$ 得 $\eta_{AA}=0.4$.

13.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $a=$________.

✎ **解:** 对增广矩阵作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{array}\right),$$

因此当 $a=1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\big(F(X)>E(X)-1\big)=$________.

✎ **解:** 首先 $E(X)=\int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. 再令 $Y=F(X)$, 则当 $y\leqslant 0$ 时, $P(Y\leqslant y)=0$; 当 $y\geqslant 1$ 时, $P(Y\leqslant y)=1$ (注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0<y<1$ 时,

$$P(Y\leqslant y)=P\big(F(X)\leqslant y\big)=P\big(X\leqslant F^{-1}(y)\big)=F\big(F^{-1}(y)\big)=y.$$

因此 $Y=F(X)\sim U(0,1)$, $P\big(F(X)>E(X)-1\big)=P\left(Y>\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y=F(X)\sim U(0,1)$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^x+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

解: 首先有 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x}=1=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x\mathrm{e}^x+1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. 而在 $x=0$ 处,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty,$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 于是 $f'(x)=\begin{cases} x^{2x}(2+2\ln x), & x>0 \\ \text{不存在}, & x=0 \\ (x+1)\mathrm{e}^x, & x<0 \end{cases}$. 当 $x<-1$ 或 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $f'(x)<0$, 当 $-1<x<0$ 或 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)>0$. 由单调性可知 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{2}{\mathrm{e}}}$ 和 $f(-1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 是极小值, $f(0)=1$ 是极大值.

16.(本题满分 10 分)

已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解: 直接计算可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'-f_2',\ \frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'+f_2',$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{11}''-f_{12}''-f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}'',$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{11}''+f_{12}''-f_{21}''+f_{22}''=1-f_{11}''+f_{22}'',$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''.$$

代入即可得 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)$.

17.(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

✎ **解:** (1) 由条件可得 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(y'-xy\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, 于是 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}y = \sqrt{x}+C$. 再由 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 可知 $C=0$, 因此 $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) 所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}\right).$$

18.(**本题满分** 10 **分**)

☞求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

✎ **解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(n\pi+t)}\left|\sin\left(n\pi+t\right)\right|\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}\\
&=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}.
\end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

19.(**本题满分** 10 **分**)

设 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

(2) 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

✎ **解:** (1) 当 $0<x<1$ 时, $x^n\sqrt{1-x^2}>x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n>a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right)\\
&=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n\left(x^2-1\right)+x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n+1}a_n+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{n+1}a_n-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}$$

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

$$= -\frac{1}{n+1}a_n - x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{n+1}a_n + \frac{n-1}{n+1}a_{n-2},$$

因此 $\frac{n+2}{n+1}a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-2}$, 即 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n = 2,3,\cdots)$.

(2) 由于 $\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

20.(本题满分 11 分)

已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$, (II) $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

✎ **解:** 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 由于向量组向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. 对矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & a^2-5 & a-1 & -7-a & a^2-9 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array}\right).$$

因此当 $a = 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 2$, 两个向量组等价. 当 $a = -1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = 2 \neq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 3$, 此时两个向量组不等价. 当 $a \neq \pm 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 3$, 两个向量组等价. 因此, 当且仅当 $a \neq -1$ 时, 两个向量组等价.

令 $\boldsymbol{\beta}_3 = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 当 $a = 1$ 时, 由初等行变换得 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}_3) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

解得 $\boldsymbol{\beta}_3 = (3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3, k \in \mathbb{R}$.

当 $a \neq \pm 1$ 时, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}_3) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, 此时有 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(**本题满分 11 分**) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解: (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-8=-2y\\ -2+x-2=2-1+y\end{cases},$$

解得 $x=3,y=-2$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵, 因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $2,-1,-2$.
对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当 $\lambda_1=2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_2=-1$ 时, 由方程 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_1=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_3=-2$ 时, 由方程 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.
取 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=$ $\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$. 故

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\Rightarrow(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B},$$

因此当取

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

时, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p,P(Y=1)=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

✎ **解:** (1) X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$. 由 X,Y 的独立性可得 Z 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(XY\leqslant z\,|Y=-1)P(Y=-1)+P(XY\leqslant z\,|Y=1)P(Y=1)\\&=pP(-X\leqslant z\,|Y=-1)+(1-p)P(X\leqslant z\,|Y=1)\\&=pP(X\geqslant -z)+(1-p)P(X\leqslant z)\\&=p\big(1-F_X(-z)\big)+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\ 1+(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}$

(2) 由条件可得

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=1-2p,$$

因此当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$, 即 $\rho_{XZ}=0$. 因此 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时, X 和 Z 是相关的, 从而不独立. 而当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}\subset\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)\neq P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

因此对任意 $p\in(0,1)$, X,Z 不独立.

23.**(本题满分 11 分)**

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 由概率密度的归一性可知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

得 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 对应的观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\sigma^2) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2\cdots, x_n \geqslant \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant \mu$ 时, 取对数 $\ln L\left(\sigma^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L\left(\sigma^2\right)}{\mathrm{d}\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0,$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, 因此 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

2020 年考研数学三

四、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ ( )

A. $b\sin a$ B. $b\cos a$ C. $b\sin f(a)$ D. $b\cos f(a)$

✎ **解:** 利用拉格朗日中值定理得

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\xi\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b\cos a.$$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

✎ **解:** 显然, 所有的间断点为 $x=-1,0,1,2$, 其中 $x=-1,1,2$ 都是无穷间断点, 而 $x=0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数, 则 ( )

A. $\displaystyle\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数 B. $\displaystyle\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是偶函数

C. $\displaystyle\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数 D. $\displaystyle\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,\mathrm{d}t$ 是偶函数

✎ **解:** 易知 $\cos f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是偶函数, 所以 $\cos f(x)+f'(x)$ 是偶函数, 那么 $\displaystyle\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数, 选 A.

4. 已知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 ( )

A. $(-2,6)$ B. $(-3,1)$ C. $(-5,3)$ D. $(-17,15)$

✎ **解:** 由题意知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径为 4, 那么它逐项积分以后的幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径仍为 4. 那么幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间满足 $(x+1)^2<4\Rightarrow -3<x<1$, 选 B.

5. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

✎ **解:** 因为 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 且 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 而 $A_{12}\neq 0$ 说明 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$. 且 $\boldsymbol{A}$ 中对应的三列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 ( )

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$ B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

✎ **解:** 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

✎ **解:** 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC)=\frac{7}{12},$$

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P(\bar{B}\bar{C})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{B\cup C})-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(B\cup C)-[1-P(A\cup B\cup C)]=P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)\\&=\frac{7}{12}-P(B)-P(C)+P(BC)=\frac{1}{6},\\P(\bar{A}B\bar{C})&=\frac{7}{12}-P(A)-P(C)+P(AC)=\frac{1}{6},\\P(\bar{A}\bar{B}C)&=\frac{7}{12}-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{12},\end{aligned}$$

因此 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$, 选 D.

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$, 则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是 ( )

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

✎ **解:** 首先有 (X,Y) 服从二维正态部分, $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,4)$. 而

$$(X,X+Y)=(X,Y)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $(X,X+Y)$ 也服从二维正态分布. 且 $E(X+Y)=0, D(X+Y)=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3$, 所以 $X+Y\sim N(0,3)$, 于是 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1)$. 又

$$\mathrm{Cov}(X,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=DX+\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=0,$$

因此 X 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ 独立, 选 C. 而 $\mathrm{Cov}(X,X-Y)\neq 0$, 所以 $X, X-Y$ 不独立.

五、填空题, 9 $\sim$ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

✎ **解:** 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\pi-1$, $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=-1$, 因此 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\,\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

10.曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 点 $(0,-1)$ 处的切线方程为________.

✎ **解:** 原方程两边对 x 求导得 $1+y'+\mathrm{e}^{2xy}(2y+2xy')=0$, 代入 $x=0, y=-1$ 得 $y'=1$, 所以曲线在 $(0,-1)$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

11.设产量为 Q, 单价为 P, 厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$, 需求函数为 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$, 则厂商取得最大利润时的产量为________.

✎ **解:** 由 $Q=\frac{800}{P+3}-2$ 可知 $P=\frac{800}{Q+2}-3$, 则利润函数为

$$L(Q)=\left(\frac{800}{Q+2}-3\right)Q-(100+13Q).$$

令 $\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}Q}=\frac{1600}{(Q+2)^2}-16=0\Rightarrow Q=8$, 且 $\frac{\mathrm{d}^2L(Q)}{\mathrm{d}Q^2}=-\frac{3200}{(Q+2)^3}<0$, 因此 $Q=8$ 时, 取得最大利润.

12.设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1\right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积为________.

✎ **解:** $V=2\pi\int_0^1 x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\ln(1+x^2)-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right)$.

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$________.

✎ **解:** 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14.随机变量 X 的分布律为 $P(X=k) = \dfrac{1}{2^k}, k = 1, 2, \cdots$, Y 为 X 被 3 除的余数, 则 $EY =$________.

✎ **解:** 由题意知 Y 的取值为 $0, 1, 2$, 且

$$P(Y=0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=3n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{7},$$
$$P(Y=1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=3n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{8^n} = \frac{4}{7},$$
$$P(Y=2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=3n+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\frac{1}{8^n} = \frac{2}{7}.$$

所以 $EY = 0 \times \dfrac{1}{7} + 1 \times \dfrac{4}{7} + 2 \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{8}{7}$.

六、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

设 a, b 为常数, 且当 $n \to \infty$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$ 与 $\dfrac{b}{n^a}$ 为等价无穷小, 求 a, b 的值.

✎ **解:** 直接利用等价无穷小得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} - \mathrm{e} = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1} - 1\right)$$
$$\sim \mathrm{e}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \mathrm{e}\left[n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right]$$
$$= -\frac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{\mathrm{e}}{2n}.$$

因此 $a = 1, b = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y.$$

于是当 $(x,y)=(0,0)$ 时, $A=0, B=-1, C=0$, 那么 $AC-B^2=-1<0$, 所以 $(0,0)$ 不是极值点; 当 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A=1, B=-1, C=4$, 则 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$, 且 $f(0)=1, f'(0)=-1$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 设 $a_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

✎ **解:** (1) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$, 特征根为 $\lambda_{1,2}=-1\pm 2\mathrm{i}$, 通解为 $y=\mathrm{e}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$, 代入 $f(0)=0, f'(0)=-1$ 得 $C_1=1, C_2=0$, 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$.

(2) 直接计算得

$$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\Big(-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x\Big)\Big|_{n\pi}^{+\infty}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}.$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{5(\mathrm{e}^{\pi}-1)}$.

18.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$, 连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

计算 $\displaystyle\iint\limits_D xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 令 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A$, 则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$, 两边在区域 D 上积分可得

$$A=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D Ax\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (1-x^2(^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}
$$

其中 D_1 为 D 在第一象限的部分. 于是 $f(x,y) = y\sqrt{1-x^2} + \dfrac{3\pi}{16}x$, 所以

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D} x\left(y\sqrt{1-x^2}+\frac{3\pi}{16}x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{3\pi}{16}\iint\limits_{D} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{16}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{3\pi^2}{128}.
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

证明: (1) 设 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|=|f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,2)$, 使得

$$
|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x-x_0}\right| = \frac{M}{x_0},\ |f'(\xi_2)| = \left|\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}\right| = \frac{M}{2-x_0}.
$$

注意到

$$
\left|f'(\xi_1)\right| + \left|f'(\xi_2)\right| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2-x_0} \geqslant \frac{2M}{\sqrt{x_0(2-x_0)}} \geqslant M,
$$

那么取 $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 由条件有 $|f'(\xi_1)| = \dfrac{M}{x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\geqslant 1$; $|f'(\xi_2)| = \dfrac{M}{2-x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\leqslant 1$. 于是只能 $x_0=1$, 即 $|f(1)|=M$.

$$
M = |f(1)-f(0)| = \left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 M\,\mathrm{d}x = M,
$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)|\equiv M$, $x\in[0,1]$. 而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1)=0$, 因此 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

✎ **解:** (1) 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+4=a+b\\1\times4=ab\end{cases}$, $a\geqslant b\Rightarrow a=4,b=1$.

(2) 易知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$. 当 $\lambda_1=0$ 时, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-2)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_2=5$ 时, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_2=(2,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$, 且

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $\boldsymbol{Q}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2,-3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

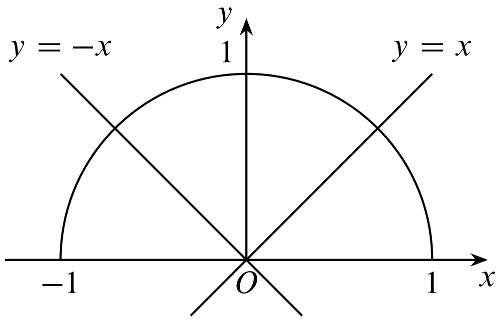
设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y):0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1=\begin{cases}1,&X-Y>0\\0,&X-Y\leqslant0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1,&X+Y>0\\0,&X+Y\leqslant0\end{cases}.$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;

(2) 求 Z_1, Z_2 的相关系数.

✎ **解:** (1) 如图, 不难得知



第 22 题图

$$P(Z_1=0,Z_2=0)=P(X-Y\leqslant 0,X+Y\leqslant 0)=P(Y\geqslant X,Y\leqslant -X)=\frac{1}{4},$$

$$P(Z_1=0,Z_2=1)=P(X-Y\leqslant 0,X+Y>0)=P(Y\geqslant X,Y>-X)=\frac{1}{2},$$

$$P(Z_1=1,Z_2=0)=P(X-Y>0,X+Y\leqslant 0)=P(Y<X,Y\leqslant -X)=0,$$

$$P(Z_1=1,Z_2=1)=P(X-Y>0,X+Y>0)=P(Y<X,Y>-X)=\frac{1}{4}.$$

因此 (Z_1, Z_2) 的联合分布为

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(2) 由 (Z_1, Z_2) 的联合分布律可得边缘分布律为

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Z_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

于是 $E(Z_1)=\frac{1}{4}, E(Z_2)=\frac{3}{4}, D(Z_1)=D(Z_2)=\frac{3}{16}, E(Z_1Z_2)=\frac{1}{4}$, 因此 Z_1, Z_2 的相关系数为

$$\rho_{Z_1,Z_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)}{\frac{3}{16}}=\frac{1}{3}.$$

23.(**本题满分 11 分**)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t>0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T>t)$ 与 $P(T>s+t|T>s)$, 其中 $s>0, t>0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

✎ **解:** (1) 当 $s>0, t>0$ 时

$$
\begin{aligned}
P(T>t)&=1-F(t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},\\
P(T>s+t|T>s)&=\frac{P(T>s+t, T>s)}{P(T>s)}\\
&=\frac{P(T>s+t)}{P(T>s)}=\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=\mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m-s^m}{\theta^m}}.
\end{aligned}
$$

(2) 总体 T 的概率密度为 $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$
L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(t_i)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^n t^m} m^n\left(t_1 t_2\cdots t_n\right)^{m-1}\theta^{-nm}, & t_1, t_2, \cdots, t_n>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.
$$

当 $t_1, t_2, \cdots, t_n>0$ 时, $\ln L(\theta)=-\dfrac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^n t^m+n\ln m+(m-1)\ln(t_1 t_2\cdots t_n)-nm\ln\theta$, 令

$$
\frac{\mathrm{d}\ln(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{m}{\theta^{m+1}}\sum_{i=1}^n t_i^m-\frac{nm}{\theta}=0\Rightarrow\theta=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i^m\right)^{\frac{1}{m}},
$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.