导函数介值定理（达布定理）

定理 1. 闭区间 $[a,b]$ 上的可导函数一定可以取到介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的值.

证明. 我们证明它的等价形式, 即所谓导函数零点定理: 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 对于介值定理我们只需要考虑函数 $g(x)=f(x)-\mu x$, 其中 μ 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值.

不妨假定 $f'_+(a)<0<f'_-(b)$, 由导数定义

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限保号性, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 即 $f(x)-f(a)>0$, 这说明 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 同理 $f(b)$ 也不是最大值. 因此存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, 从而由费马定理可知 $f'(\xi)=0$. ☆

这个定理阐述了导函数很重要的性质: 介值性. 对于一般的函数而言, 连续才具有介值性, 而导函数的特殊之处在于它存在就具有介值性, 并不需要导函数连续, 当然, 我们有经典的导函数不连续的例子:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

导函数极限定理

定理 2. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 $x=0$ 的去心邻域内可导, 且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且

$$f'(x_0)=A.$$

证明. 这个定理看起来高大上, 实际上一步定义加洛必达就完了:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0).$$

☆

这个定理也阐述导函数的一个特性, 对于连续函数而言, 极限存在无法保证函数的连续性, 但是导函数很特殊, 极限存在就意味着连续. 当然, 上述结论对于单侧导数也同样成立.

步入正题, 以上两个定理是考研教材未列举出来, 而实则需要大家掌握其证明和应用的定理. 在此定理的基础上, 我们推出导函数的其他结论.

推论 1. 可导函数的导函数一定没有第一类间断点.

证明. 不管是第一类的可去间断点还是跳跃间断点, 因为导函数的左右极限均存在, 那么这都将与导函数的极限定理矛盾. ☆

注: 导函数可以有间断点, 但是只能是第二类间断点.

由于积分与导数的互逆性, 我们有

推论 2. 含有第一类间断点的函数在包含此间断的区间上不存在原函数.

利用导函数介值定理, 我们可以很容易证明广义的罗尔定理:

广义罗尔定理

定理 3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导, 其中 a,b 可以是无穷大, 且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=A$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明. 反证法. 假定不存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$, 那么根据导函数的介值定理可知 $f'(x)$ 在 (a,b) 上不变号, 即 $f'(x)$ 恒正或恒负, 因此 $f(x)$ 是严格单调的, 这与 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=A$ 矛盾, 因此存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$. ☆

当然, 广义的罗尔定理以及广义的柯西中值定理都有其特殊的证明方法, 我们假定 $a=-\infty, b=+\infty$, 令

$$F(t)=\begin{cases} f(\tan t), & t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ A, & t=\pm\frac{\pi}{2} \end{cases},$$

则 $F(t)$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上满足普通的罗尔定理条件, 存在 $\eta\in(-\pi/2,\pi/2)$ 使得 $F'(\eta)=f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0$, 取 $\xi=\tan\eta$, 则 $f'(\xi)=0$.

除此之外, 在这里会涉及到一些让多数同学混淆的符号, 这里留一个例题给大家:

例 1. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义,

(1) 如果 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在, 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否连续? 是否可导?

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在且相等, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否可导?

(3) 在 (2) 的基础上假定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 结果又如何?

一阶线性微分方程的通解形式

在同济高数教材上给出的方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+C\right) \\ &= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

首先同济教材对此公式的推导采用及其复杂的方法, 齐次此通解的形式是及其不明确的式子, 这里包含了三个不定积分符号, 所以每个不定积分都是都带有常数的, 虽然同济书上指出这里的不定积分理解为某个原函数, 但是这种写法无法让人理解, 那么它正确的写法应该怎么写呢, 我们利用积分因子给出它的推导, 和形式上的明确化:

$$y=C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x} q(s)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s.$$

积分因子法的推导

在同济高数教材上给出的方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+C\right) \\ &= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

注意到 $P(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, 在原方程两边乘以 $\mathrm{e}^{P(x)}$ 得

$$\mathrm{e}^{P(x)}\left(y'+p(x)y\right)=\left(y\mathrm{e}^{P(x)}\right)'=q(x)\mathrm{e}^{P(x)}$$

将上式从 x_0 到 x 再积分一次得

$$y\mathrm{e}^{P(x)}-y_0\mathrm{e}^{P(x_0)}=\int_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{P(t)}\,\mathrm{d}t$$

我们把形式简化一点可以写为

$$y=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x} q\left(s\right)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

上述解其实是满足 $y(x_0)=y_0$ 的解, 把 y_0 写为 C, 就得到通解形式

$$y=C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x} q\left(s\right)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

这就是非常明确的形式解, 不包含任何不定积分符号, 只有一个积分常数, 每个变限积分都是具体的一个函数.

一道级数敛散性判别

最近有读者问了我一道级数问题, 难度还不小, 之前也有读者问过类似的题, 今天一并给出解答.

例 2. 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0(n>1)$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n, n \geqslant 2$$

证明:

1. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n, n \geqslant 2;$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明 第一问显然, 只需要注意到

$$\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$

然后两边除以 $\ln n$ 即可. 然后

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}\left(1+\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}b_n\right)=\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}(1+c_n) \qquad (*)$$

注意到

$$c_n=\frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}b_n \sim b_n$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也是绝对收敛, 则存在常数 $m\in\mathbb{N}$, 当 $k \geqslant m$ 时 $|c_k| < \dfrac{1}{2}$. 而由 $(*)$ 式可知

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} > \frac{a_n}{\frac{1}{n\ln n}(1+c_n)} > \cdots > \frac{a_m}{\frac{1}{m\ln m}\prod_{k=m}^{n}(1+c_k)}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 则当 $n\to\infty$ 时, $\prod\limits_{k=m}^{n}(1+c_k)$ 收敛到某个正的常数, 也就是当 n 充分大时, $a_n > \dfrac{C}{n\ln n}$, C 为某个正的常数, 这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

同类似的一道题

如果正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O\left(b_n\right), n\to\infty$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 这题是史济怀数学分析课后问题, 有上一题就知道这题该怎么做了, 和上面类似的推导, 记 $c_n=\frac{n}{n+1}O\left(b_n\right)$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\frac{1}{1+c_n},$$

于是得到

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{a_m}{\frac{1}{m}\prod_{k=m}^{n}\left(1+c_k\right)}$$

然后 $\prod_{k=m}^{n}\left(1+c_k\right)$ 当 $n\to\infty$ 的极限存在, 说明 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 同阶, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

解答黄之老师两道征解题

向 禹

征解题一解答

1. 设 $f(t)=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x-tx)\,\mathrm{d}x, t\in\mathbb{R}$. 证明: 当 t 为非负整数时, $f(t)=\frac{\pi}{t!}$; 当 t 为负整数时, $f(t)=0$. 并证明:若 n 为正整数, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}\pi.$$

解 利用留数定理可得

$$\begin{aligned}
f(t)&=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x-tx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos x+\mathrm{i}\sin x-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{i}tx\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \mathrm{i} \cdot \mathrm{res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}}, z=0\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{t!}, & t \in \mathbb{N} \\ 0, & t \in \mathbb{Z}^- \end{cases}.$$

最后一步留数的计算只需要将 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^{t+1}\mathrm{i}}$ 展开为 Laurent 级数, 找其负一次幂系数即可.

注意到

$$\begin{aligned} &\cos\left(\sin x - \frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2} \\ =&\left(\cos(\sin x)\cos\frac{nx}{2} + \sin(\sin x)\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2} \\ =&\frac{1}{2}\cos(\sin x)\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sin\frac{x}{2}\right] + \frac{1}{2}\sin(\sin x)\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]. \end{aligned}$$

于是原极限可以成四部分, 其中由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$L_4 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x = 0.$$

而

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\pi + \pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{\mathrm{e}\pi}{2}. \end{aligned}$$

上述积分利用傅里叶级数

$$\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x) = \mathrm{Re}\left[\exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right] = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!}$$

即可得到.

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(0) = \frac{\pi}{2}, \\ L_3 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{\cos^2(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\int_0^{2\pi} \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) \frac{1+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/2}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)/(2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\oint_{|z|=1} \mathrm{e}^z \frac{z+1}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\,(\mathrm{e}-1)\right] = \frac{(\mathrm{e}-1)\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

注意上述积分中, 极点 $z=1$ 在围道边界上, 由小弧引理, 辐角值取 π 而不是 2π.

因此最后所求极限为

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{(n+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = L_1+L_2+L_3-L_4 = \mathrm{e}\pi.
$$

征解题二解答

2. 当 $t\in\mathbb{R}$ 时, 以下两个极限分别是什么?

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{tx}{2}\right)\sin\frac{(t+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x, \\
&\lim_{t\to-\infty}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos\left(\sin x-\frac{tx}{2}\right)\sin\frac{(t+1)x}{2}\csc\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

解 注意到在第一题中, 如果 $n\to-\infty$, 则 $L_1=-\frac{\mathrm{e}\pi}{2}$, $L_2=\frac{\pi}{2}$, $L_3=\frac{(\mathrm{e}-1)\pi}{2}$, 则当 $n\to-\infty$ 时原极限为零, 那么根据归结原理, 这里的两个极限如果存在一定和上述 $n\to+\infty$ 和 $n\to-\infty$ 的极限分别相等. 事实上, 这里的极限利用积化和差公式也可以拆开成四部分. 其中 L_2, L_3 为常数, L_4 由 Riemann-Lebesgue 引理知为 0. 剩下 L_1, 我们只证明

$$
\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t,x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(n,x)\,\mathrm{d}x,
$$

其中

$$
g(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.
$$

对任意 $t>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $n\leqslant t<n+1$, 且 $t\to+\infty \Leftrightarrow n\to+\infty$, 则

$$
\begin{aligned}
g(t,x)-g(n,x) &= \frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{t-n}{2}x\cos\left(\frac{n+t}{2}+1\right)x.
\end{aligned}
$$

注意到

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{t-n}{2}x\right| < \left|\frac{\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)}{\sin\frac{x}{2}}\right|$$

上式右端在 $[0,\pi]$ 绝对可积, 于是用类似 Riemann-Lebesgue 引理的证法可知,

$$\lim_{n\to\infty}\left[g(t,x)-g(n,x)\right]=0.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(n,x)=\mathrm{e}\pi$, 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t,x)=\mathrm{e}\pi$. 同理可得 $\lim\limits_{t\to-\infty}g(t,x)=0$.

几个略有难度的考研极限题

今天讲三个极限题的计算, 其中前两个是非数类难度, 第三个是数学类难度, 那么这里介绍的都是常规的计算技巧, 非常规技巧参见我在 2017 年 9 月份左右发布的 Stolz 定理的函数 Stolz 定理的内容.

经典考题

例 3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{n\pi}$$

注意到 $\displaystyle\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=n\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2n$, 于是

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

不难得知所求的极限为 $\dfrac{2}{\pi}$.

注: 本题的结论可以有一些推广, 比如上述 $\sin t$ 换为 $\cos t$, 结论照样不变, 利用辅助角公式我们可以进一步得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|a\sin t+b\cos t|\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\int_0^x|\sin(t+\varphi)|\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\pi}$$

事实上, 更一般的结论是

定理 4. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}t}{x}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

复习全书上的一道题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$, 于是

$$\frac{\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(n+1)^2\,\pi^2}\leqslant\frac{\int_0^x t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}\leqslant\frac{\int_0^{(n+1)\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}{n^2\pi^2}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boxed{\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}&=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\,|\sin(n\pi-t)|\,\mathrm{d}t\\&=\boxed{\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t}\\&=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=n^2\pi\end{aligned}$$

于是

$$\frac{n^2\pi}{(n+1)^2\,\pi^2}\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{(n+1)^2\,\pi}{n^2\pi^2}$$

不难得知所求的极限为 $\frac{1}{\pi}$.

注: 上述方法虽然对于更高次的极限也可以使用, 但是极限的计算越来越难, 最好是使用函数 Stolz 定理了. 当然了, 利用 $\sin x$ 的傅里叶级数可以得到更一般的结论, 这里就不再介绍.

最后再看一个数学类难度的问题

小有难度的一题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

解 对任意 $x>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$, 且 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$,

于是

$$\frac{1}{\ln (n+1)\pi}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\ln x}\int_0^{x}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\ln (n\pi)}\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

注意到

$$\begin{gathered}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t,\\ \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\mathrm{d}t<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\mathrm{d}t,\\ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}\mathrm{d}t<\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.\end{gathered}$$

而上述左右两边的等价无穷大均为 $\frac{2}{\pi}\ln n$, 于是原极限为 $\frac{2}{\pi}$.

注: 作为练习, 读者可以求如下极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{x}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

解答一道颇有难度的反常积分证明

难题

今天有同学问了我下面这道题:

例 4. 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 满足 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$. 求证: 函数

$$g(x)=f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^{x}\mathrm{e}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

这道题的话, 三年前我在贴吧就解答过一次, 记得当时很快就解决了. 但是今天这位同学问我的时候才让记起来事实上我当时忽略了一个很重要的问题. 现在贴吧抽风, 帖子都找不到了. 下面来看正确解答:

证明 要证明

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x\\=&\int_0^{+\infty}\left(f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\\=&\int_0^{+\infty}\left(f^2(x)-4\mathrm{e}^{-x}f(x)\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t+4\mathrm{e}^{-2x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\right)\mathrm{d}x\\=&\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

等价于证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x.$$

这只需要利用分部积分

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

三年前在贴吧的时候我做到这里就结束了, 现在看来其实是不对的. 在最后一步分部积分中, 我们需要证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}{\mathrm{e}^{2x}}=0\quad\text{或}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=0.$$

之前我忽略了, 而恰巧这是本题最难的地方. 值得一提的是, 以下洛必达法则的做法是错误的:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}=0$$

因为仅从题目 $f\in L^2\cap C[0,+\infty)$ 是无法得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 的, 比如我们有经典的反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

收敛, 而其被积函数不趋于 0, 甚至是无界的. 正确做法应该是由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_0^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)<\mathrm{e}^x\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f^2(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

令 $F(x) = \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$, 则由题意知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A$ 存在,

$$\int_0^x \mathrm{e}^t f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}F(t) = \mathrm{e}^x F(x) - \int_0^x \mathrm{e}^t F(t)\,\mathrm{d}t$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x F(x) - \int_0^x \mathrm{e}^t F(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x} = A - \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \mathrm{e}^t F(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x} = A - A = 0$$

这就意味着极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$$

证毕.