# Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

# 考研数学 试题解答

追求卓越排版, 巧解数学难题.

作者: 向禹老师
完成时间: 2020 年 3 月 4 日
Email: 739049687@qq.com

Version: 1.0

# 目录

# 第 1 章 2006 年考研数学二

## 一、填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线为________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$________.

3. 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

4. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

## 二、选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量, $\Delta y$ 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 (  )

   A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$  B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$  C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$  D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

8. 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 (  )

   A. 连续的奇函数  B. 连续的偶函数
   
   C. 在 $x=0$ 间断的奇函数  D. 在 $x=0$ 间断的偶函数

9. 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$, 则 $g(1)$ 等于 (  )

   A. $\ln 3-1$  B. $-\ln 3-1$  C. $-\ln 2-1$  D. $\ln 2-1$

10. 函数 $y=C\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是 (  )

    A. $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$  B. $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$
    
    C. $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$  D. $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$

11.设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$ 等于 ( )

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

12.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$. 已知 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

13.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 $n$ 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 $-1$ 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$

## 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

试确定常数 $A,B,C$ 的值, 使得

$$\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 $x^3$ 高阶的无穷小.

16.(本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

17.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$, 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

18.(本题满分 12 分)

设数列 $x_n$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

19.(本题满分 10 分)

证明: 当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

20.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足中等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

21.(本题满分 12 分)

已知曲线 $L$ 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$.

(1) 讨论 $L$ 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1,0)$ 引 $L$ 的切线, 求切点 $(x_0,y_0)$, 并写出切线的方程;

(3) 求此切线与 $L$ (对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分) 及 $x$ 轴所围成的平面图形的面积.

22.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ ax_1+x_2+3x_2+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 $a,b$ 的值及方程组的通解.

23.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

# 第 2 章 2007 年考研数学二

**一、选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.**

1\. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

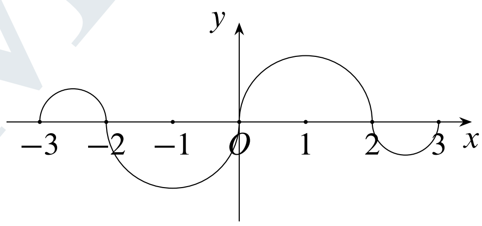
2\. 函数 $f(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}\right)\tan x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

3\. 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )

A. $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　B. $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　D. $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$




第 3 题图

4\. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

5\. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6\. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n), n=1,2,\cdots$, 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛　　B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛　　D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

7\. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 ( )

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$

8. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 ( )

A. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

9. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

10.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( )

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

**二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

11.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

12.曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t\\ y=1+\cos t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

13.设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0)=$________.

14.二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

15.设 $f(u,v)$ 是二元可微函数, $z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

16.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

**三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.**

17.(**本题满分** 10 **分**)

设 $f(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $f^{-1}$ 是 $f$ 的反函数, 求 $f(x)$.

18.(**本题满分** 11 **分**)

设 $D$ 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}\ (a>1,0\leqslant x<+\infty)$ 下方、$x$ 轴上方的无界区域.

(1) 求区域 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(2) 当 $a$ 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

19.(**本题满分** 10 **分**)

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

20.(**本题满分** 11 **分**)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定, 设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

21.(**本题满分** 11 **分**)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\end{cases},$$

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

23.(**本题满分** 11 **分**)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \tag{2}$$

有公共解, 求 $a$ 的值及所有公共解.

24.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1$ 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

# 第 3 章 2008 年考研数学二

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x+2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ( )

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

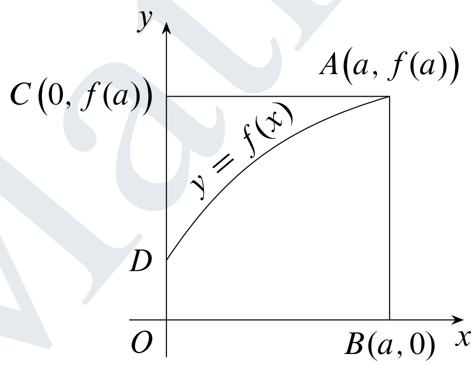
2. 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a x f'(x)\,\mathrm{d}x$ 等于 ( )

   A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

   B. 梯形 $ABOD$ 的面积

   C. 曲边三角形 $ACD$ 的面积

   D. 三角形 $ACD$ 的面积




第 2 题图

3. 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ ($C_1, C_2, C_3$ 为任意常数) 为通解的是 ( )

   A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$　　B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

   C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$　　D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

4. 设函数 $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有 ( )

   A. 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点　　B. 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点

   C. 2 个跳跃间断点　　D. 2 个无穷间断点

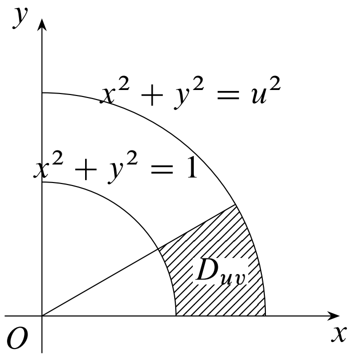
5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ( )

   A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

   C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

6. 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $F(u, v) = \displaystyle\iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 $D_{uv}$ 为图中阴影部分, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial u} =$ ( )

   A. $vf(u^2)$　　B. $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　　C. $vf(u)$　　D. $\dfrac{v}{u}f(u)$




第 6 题图

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$, 则 $f(0)=$________.

10.微分方程 $(y+x^2\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $y=$________.

11.曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

12.曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

13.设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

14.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,\lambda$, 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$, 则 $\lambda=$________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

16.(本题满分 10 分)

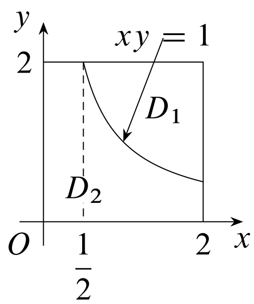
设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=\displaystyle\int_0^{t^2}\ln(1+u)\,\mathrm{d}u \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2t\mathrm{e}^{-x}=0 \\ x\big|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

17.(本题满分 9 分)

计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

18.(本题满分 11 分)

计算 $\displaystyle\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.




第 18 题图

19.(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$, 直线 $x=0, x=t$, 曲线 $y=f(x)$ 以及 $x$ 轴所围成的曲边梯形绕 $x$ 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

20.(本题满分 11 分)

(1) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$.

(2) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2)>\varphi(1), \varphi(2)>\displaystyle\int_2^3\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$, 使得 $\varphi''(\xi)<0$.

21.(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

22.(本题满分 12 分)

设 $n$ 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(2) 当 $a$ 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 $x_1$;

(3) 当 $a$ 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

23.(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

# 第 4 章 2009 年考研数学二

**一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

2. 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ( )

   A. $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$　　B. $a=1, b=\dfrac{1}{6}$

   C. $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$　　D. $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$, 则点 $(0,0)$ ( )

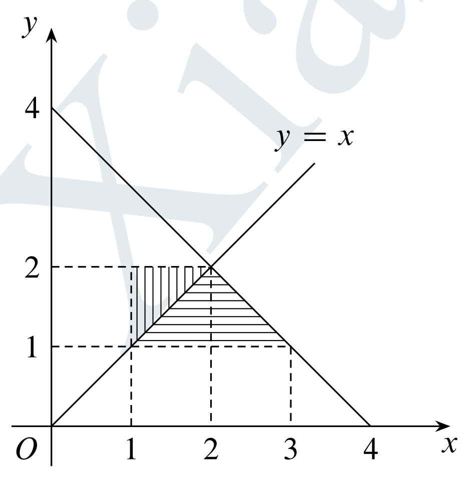
   A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的极值点

   C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

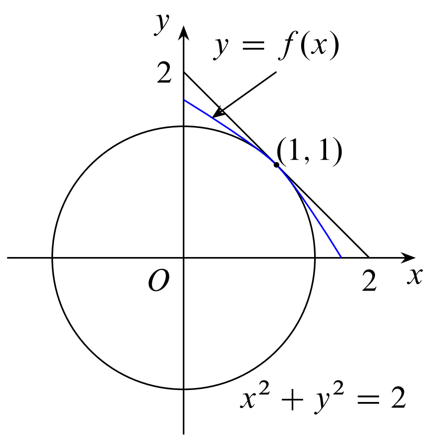
4. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则 $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{4-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$ ( )

   A. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

   C. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}y\int_1^{4-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$




第 4 题图



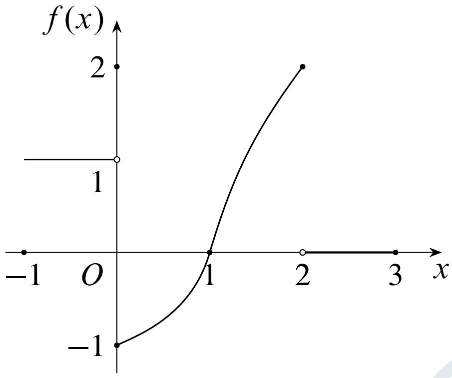

第 5 题图

5. 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内 ( )

A. 有极值点, 无零点　　B. 无极值点, 有零点

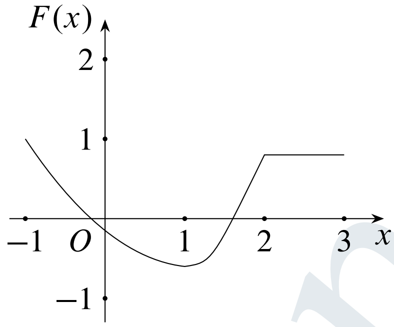
C. 有极值点, 无零点　　D. 无极值点, 无零点

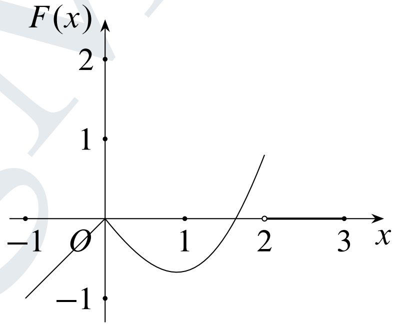
6. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示,

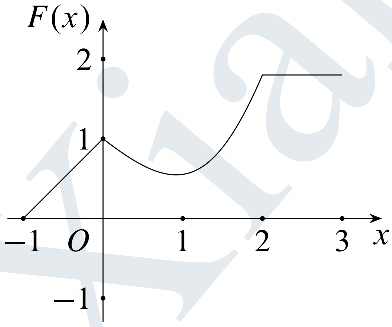


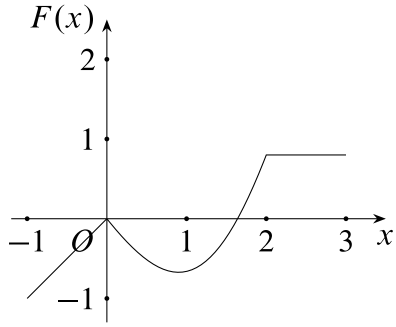

第 6 题图

则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为　　(　　)

A. 


B. 


C. 


D. 


7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为　　(　　)

A. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+$

$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 曲线 $\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^{1-t} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ y = t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

10.已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\,\mathrm{d}x = 1$, 则 $k =$________.

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\,\mathrm{d}x =$________.

12.设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + \mathrm{e}^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} =$________.

13.函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________.

14.设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} =$________.

**注:** 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 9 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x - \ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

16.(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x > 0)$.

17.(本题满分 10 分)

设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 $f$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

18.(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 $D$ 的面积为 2, 求 $D$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转体的体积.

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

20.(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时, 曲线上任一点处的法线过原点; 当 $0\leqslant x<\pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

21.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

**注:** 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

22.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

23.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 $a$ 的值.

# 第 5 章 2010 年考研数学二

**一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 设 $y_1,y_2$ 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解, 若常数 $\lambda,\mu$ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ( )

A. $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　B. $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

C. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　D. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

**注:** 如果 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是非齐次方程的 $n$ 个解, 则线性组合 $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 仍然是此非齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=1$, $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是对应齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=0$,

3. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切, 则 $a=$ ( )

A. 4e　　B. 3e　　C. 2e　　D. e

4. 设 $m,n$ 是正整数, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性 ( )

A. 仅与 $m$ 的取值有关　　B. 仅与 $n$ 的取值有关

C. 与 $m,n$ 的取值都有关　　D. 与 $m,n$ 的取值都无关

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 $F$ 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

A. $x$　　B. $z$　　C. $-x$　　D. $-z$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　B. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　D. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

7. 设向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是 ( )

A. 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leqslant s$　　B. 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$

C. 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leqslant s$　　D. 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 (　)

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$________.

10.曲线 $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________.

11.函数 $y = \ln(1-2x)$ 在 $x = 0$ 处的 $n$ 阶导数 $y^{(n)}(0) =$________.

12.当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时, 对数螺线 $r = \mathrm{e}^{\theta}$ 的弧长为________.

13.已知一个长方形的长 $l$ 以 2 cm/s 的速率增加, 宽 $w$ 以 3 cm/s 的速率增加, 则当 $l = 12$ cm, $w = 5$ cm 时, 它的对角线增长的速率为________.

14.设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}| = 3, |\boldsymbol{B}| = 2, |\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}| = 2$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}| =$________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} (x^2 - t)\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

16.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \,\mathrm{d}t$ 与 $\displaystyle\int_0^1 t^n |\ln t| \,\mathrm{d}t\,(n = 1, 2, \cdots)$ 的大小, 说明理由.

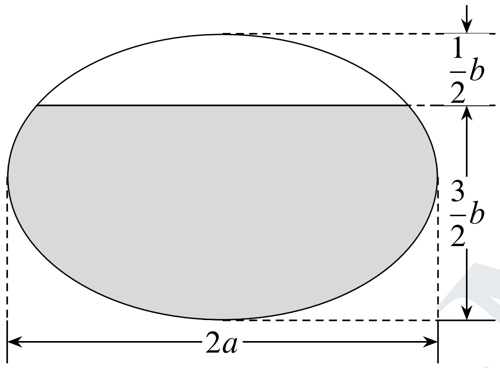
(2) 记 $u_n = \displaystyle\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \,\mathrm{d}t\,(n = 1, 2, \cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

17.(本题满分 11 分)

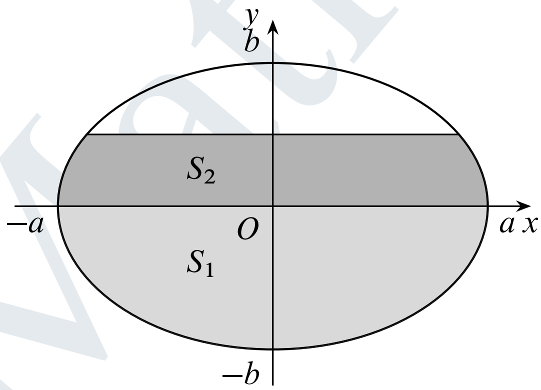
设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}, \psi'(1)=6$, 已知 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

18.(本题满分 10 分)

一个高为 $l$ 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中右面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时 (如图 1), 计算油的质量.(长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数 $\rho\,\mathrm{kg/m^3}$.)




第 18 题图 1




第 18 题图 2

19.(本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 确定 $a,b$ 的值, 使等式在变换 $\xi=x+ay, \eta=x+by$ 下简化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

20.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant\sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$

21.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明: 存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

22.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 $\lambda, a$；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

23.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵. 若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 求 $a, \boldsymbol{Q}$.

# 第 6 章 2011 年考研数学二

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 已知当 $x \to 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 $cx^k$ 是等价无穷小, 则 ( )

A. $k = 1, c = 4$　　B. $k = 1, c = -4$　　C. $k = 3, c = 4$　　D. $k = 3, c = -4$

**注:** 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - \sin^3 x$ 更快.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ( )

A. $-2f'(0)$　　B. $-f'(0)$　　C. $f'(0)$　　D. 0

3. 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = \mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda > 0)$ 的特解形式为 ( )

A. $a\left(\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$　　B. $ax\left(\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$

C. $x\left(a\mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$　　D. $x^2\left(a\mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$

5. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$ , 则函数 $z = f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f(0) > 1, f''(0) > 0$　　B. $f(0) > 1, f''(0) < 0$

C. $f(0) < 1, f''(0) > 0$　　D. $f(0) < 1, f''(0) < 0$

6. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$, 则 $I, J, K$ 的大小关系是 ( )

A. $I < J < K$　　B. $I < K < J$　　C. $J < I < K$　　D. $K < J < I$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} =$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

8. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

10.微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

11.曲线 $y=\displaystyle\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)=$ ________.

12.设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$, $\lambda>0$, 则 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=$________.

13.设平面区域 $D$ 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 $y$ 轴所围成, 则二重积分 $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=$________.

14.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$, 则 $f$ 的正惯性指数为________.

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2,
\end{aligned}
$$

因此 $f$ 的正惯性指数为 2.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.**(本题满分 10 分)**

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$, 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$, 试求 $\alpha$ 的取值范围.

16.**(本题满分 11 分)**

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定, 求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

17.**(本题满分 9 分)**

设函数 $z=f\big(xy,yg(x)\big)$, 其中函数 $f$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点. 记 $\alpha$ 为曲线 $l$ 在点 $(x,y)$ 处切线的倾角, 若 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

19.(本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数 $n$, 都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

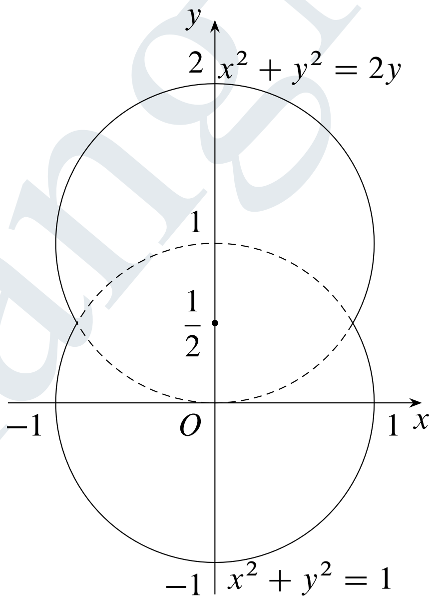
(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

20.(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 $y$ 轴旋转一周而成的曲面, 该曲面由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m, 重力加速度为 $g\mathrm{m/s^2}$, 水的密度为 $10^3\mathrm{kg/m^3}$).




第 20 题图

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算二重积分 $I=\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

22.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

23.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

# 第 7 章 2012 年考研数学二

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 $n$ 为正整数, 则 $f'(0)=$ ( )

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$　　C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

3. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ( )

A. 充分必要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

4. 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$, 则有 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_3<I_2<I_1$　　C. $I_2<I_3<I_1$　　D. $I_2<I_1<I_3$

5. 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且对任意的 $x,y$ 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是 ( )

A. $x_1>x_2, y_1<y_2$　　B. $x_1>x_2, y_1>y_2$

C. $x_1<x_2, y_1<y_2$　　D. $x_1<x_2, y_1>y_2$

6. 设区域 $D$ 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\dfrac{\pi}{2}, y=1$ 围成, 则 $\displaystyle\iint\limits_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

A. $\pi$　　B. 2　　C. $-2$　　D. $-\pi$

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$, 其中 $c_1,c_2,c_3,c_4$ 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = \mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} =$________.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n^2}\right) =$________.

11. 设 $z = f\left(\ln x + \dfrac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} =$________.

12. 微分方程 $y\mathrm{d}x + \left(x - 3y^2\right)\mathrm{d}y = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 $y =$________.

13. 曲线 $y = x^2 + x(x < 0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标为________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 3$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*| =$________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \dfrac{1+x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$, 记 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 若 $x \to 0$ 时, $f(x) - a$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小, 求常数 $k$ 的值.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

17.(本题满分 12 分)

过 $(0, 1)$ 点作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 $A$, 又 $L$ 与 $x$ 轴交于 $B$ 点, 区域 $D$ 由 $L$ 与直线 $AB$ 围成, 求区域 $D$ 的面积及 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积.

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$, 其中区域 $D$ 为曲线 $r = 1 + \cos\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 与极轴围成.

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.

20.(本题满分 10 分)

证明: $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

21.(本题满分 10 分)

(1) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ ($n$ 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为 $x_n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求此极限.

22.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 $a$ 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

23.(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 $a$ 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f$ 化为标准形.

# 第 8 章 2013 年考研数学二

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\cos x - 1 = x \cdot \sin\alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \dfrac{\pi}{2}$, 当 $x \to 0$ 时, $\alpha(x)$ ( )

A. 比 $x$ 高阶的无穷小　　B. 比 $x$ 低阶的无穷小

C. 与 $x$ 同阶但不等价的无穷小　　D. 与 $x$ 等价的无穷小

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right) - 1\right] =$ ( )

A. 2　　B. 1　　C. $-1$　　D. $-2$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 ( )

A. $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点　　B. $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点

C. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导　　D. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < \mathrm{e} \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geqslant \mathrm{e} \end{cases}$, 若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 ( )

A. $\alpha < -2$　　B. $\alpha > 2$　　C. $-2 < \alpha < 0$　　D. $0 < \alpha < 2$

5. 设 $z = \dfrac{y}{x} f(xy)$, 其中函数 $f$ 可微, 则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ( )

A. $2yf'(xy)$　　B. $-2yf'(xy)$　　C. $\dfrac{2}{x}f(xy)$　　D. $-\dfrac{2}{x}f(xy)$

6. 设 $D_k$ 是圆域 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 $k$ 象限的部分, 记 $I_k = \displaystyle\iint_{D_k} (y - x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y (k = 1, 2, 3, 4)$, 则 ( )

A. $I_1 > 0$　　B. $I_2 > 0$　　C. $I_3 > 0$　　D. $I_4 > 0$

7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 ( )

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ( )

A. $a=0, b=2$ B. $a=0, b$ 为任意常数

C. $a=2, b=0$ D. $a=2, b$ 为任意常数

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ________.

10.设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$, 则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0} =$ ________.

11.设封闭曲线 $L$ 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta, -\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}$, 则 $L$ 所围平面图形的面积为 ________.

12.曲线 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 处的法线方程为________.

13.已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y=$________.

14.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 $ax^n$ 为等价无穷小, 求 $n$ 和 $a$ 的值.

**注:** 此题中有两点指的注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ 是 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 的必要非充分条件, 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ax^n}=1$ 是不能直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{nax^{n-1}}=1$ 的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod_{k=1}^{n}(1-\cos a_k x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2$.

16.(本题满分 10 分)

设 $D$ 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a(a > 0)$ 及 $x$ 轴所围成的平面图形, $V_x, V_y$ 分别是 $D$ 绕 $x$ 轴, $y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y = 10V_x$, 求 $a$ 的值.

$$V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}, V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y = 10V_x$ 得 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}} = 10 \times \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 $D$ 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

19.(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

21.(本题满分 11 分)

设曲线 $L$ 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x (1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e})$.

(1) 求 $L$ 的弧长;

(2) 设 $D$ 是由曲线 $L$, 直线 $x = 1, x = \mathrm{e}$ 及 $x$ 轴所围平面图形, 求 $D$ 的形心的横坐标.

22.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 $a, b$ 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

23.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

# 第 9 章 2014 年考研数学二

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小, 则 $\alpha$ 的取值范围是 ( )

A. $(2, +\infty)$　　B. $(1, 2)$　　C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$　　D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

2. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A. $y = x + \sin x$　　B. $y = x^2 + \sin x$　　C. $y = x + \sin\frac{1}{x}$　　D. $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ( )

A. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$　　B. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$　　D. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

4. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是 ( )

A. $\frac{\sqrt{10}}{50}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{100}$　　C. $10\sqrt{10}$　　D. $5\sqrt{10}$

5. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2} =$ ( )

A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

6. 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 在 $D$ 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ( )

A. $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的边界上取得

B. $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 $D$ 的内部取得

C. $u(x, y)$ 的最大值在 $D$ 的内部取得, $u(x, y)$ 的最小值在 $D$ 的边界上取得

D. $u(x, y)$ 的最小值在 $D$ 的内部取得, $u(x, y)$ 的最大值在 $D$ 的边界上取得

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

A. $(ad-bc)^2$　　B. $-(ad-bc)^2$　　C. $a^2d^2 - b^2c^2$　　D. $b^2c^2 - a^2d^2$

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 $k,l$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$________.

10.设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$, 则 $f(7)=$________.

11.设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $\mathrm{d}z\big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$________.

12.曲线 $L$ 的极坐标方程是 $r=\theta$, 则 $L$ 在点 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是________.

13.一根长为 1 的细棒位于 $x$ 轴的区间 $[0,1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$________.

14.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 $a$ 的取值范围是________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.**(本题满分 10 分)**

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

**注:** 事实上, 洛必达法则适用于 $\dfrac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.**(本题满分 10 分)**

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$, 且 $y(2)=0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

17.**(本题满分 10 分)**

设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 计算 $\displaystyle\iint_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}$, 若 $f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明:

(1) $0\leqslant \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$;

(2) $\displaystyle\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0,1]$. 定义函数列 $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f\big(f_1(x)\big),\cdots, f_n(x)=f\big(f_{n-1}(x)\big)$, 记 $S_n$ 是由曲线 $y=f_n(x)$, 直线 $x=1$ 及 $x$ 轴所围成平面图形的面积, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=(y+1)^2-2(2-y)\ln y$. 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

23.(本题满分 11 分)

证明 $n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

# 第 10 章 2015 年考研数学二

**一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 下列反常积分中收敛的是 ( )

   A. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ B. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ C. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ D. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

2. 函数 $f(x)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 ( )

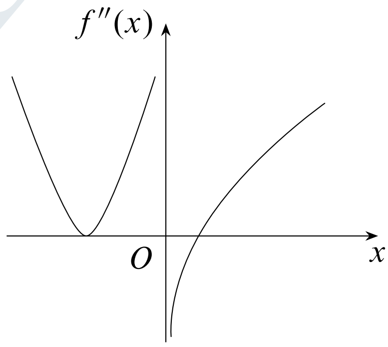
   A. 连续型 B. 有可去间断点 C. 有跳跃间断点 D. 有无穷间断点

3. 设函数 $\begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( )

   A. $\alpha-\beta>1$ B. $0<\alpha-\beta\leqslant 1$ C. $\alpha-\beta>2$ D. $0<\alpha-\beta\leqslant 2$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 ( )

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3




第 4 题图

5. 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次为 ( )

   A. $\dfrac{1}{2},0$ B. $0,\dfrac{1}{2}$ C. $-\dfrac{1}{2},0$ D. $0,-\dfrac{1}{2}$

6. 设 $D$ 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上连续, 则 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

   A. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$ B. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$

   C. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$ D. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega=\{1,2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ B. $a\notin\Omega, d\in\Omega$ C. $a\in\Omega, d\notin\Omega$ D. $a\in\Omega, d\in\Omega$

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 ( )

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

**二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

10.函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(0)=$________.

11.设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1, \varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$________.

12.设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解, 且在 $x=0$ 处取得极值 3, 则 $y(x)=$________.

13.若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定, 则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=$________.

14.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

**三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.**

15.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 $a,b,k$ 的值.

**注:** 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(**本题满分** 10 **分**)

设 $A>0$, $D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, $V_1, V_2$ 分别表示 $D$ 绕 $x$ 轴与 $y$ 轴旋转所成旋转体的体积, 若 $V_1=V_2$, 求 $A$ 的值.

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$, $f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$, $f(0,y)=y^2+2y$, 求 $f(x,y)$ 的极值.

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 的零点个数.

20.(本题满分 11 分)

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至 30°C. 若要将该物体的温度继续降至 21°C, 还需冷却多长时间?

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数, $f(a)=0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. 设 $b>a$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\big(b,f(b)\big)$ 处的切线与 $x$ 轴的交点是 $(x_0,0)$, 证明 $a<x_0<b$.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

23.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $a,b$ 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

# 第 11 章 2016 年考研数学二

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 设 $a_1 = x\left(\cos\sqrt{x} - 1\right), a_2 = \sqrt{x}\ln\left(1 + \sqrt[3]{x}\right), a_3\sqrt[3]{x+1} - 1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ( )

   A. $a_1, a_2, a_3$　　B. $a_2, a_3, a_1$　　C. $a_2, a_1, a_3$　　D. $a_3, a_2, a_1$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

   A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geqslant 1 \end{cases}$　　B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

   C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$　　D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

3. 反常积分① $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$, ② $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性为 ( )

   A. ①收敛, ②收敛　B. ①收敛, ②发散　C. ①发散, ②收敛　D. ①发散, ②发散

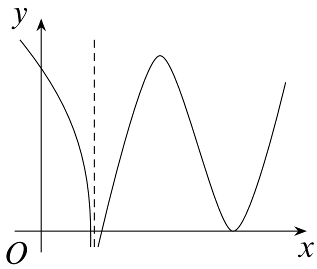
4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ( )

   A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

   B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点

   C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点

   D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点



第 4 题图

5. 设函数 $f_i(x)\,(i = 1, 2)$ 具有二阶连续导数, 且 $f_i''(x_0) < 0\,(i = 1, 2)$, 若两条曲线 $y = f_i(x)\,(i = 1, 2)$ 在点 $(x_0, y_0)$ 处具有公切线 $y = g(x)$, 且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率, 则在 $x_0$ 的某个邻域内, 有 ( )

   A. $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant g(x)$　　B. $f_2(x) \leqslant f_1(x) \leqslant g(x)$

   C. $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$　　D. $f_2(x) \leqslant g(x) \leqslant f_1(x)$

6. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x - y}$, 则 ( )

   A. $f_x' - f_y' = 0$　　B. $f_x' + f_y' = 0$　　C. $f_x' - f_y' = f$　　D. $f_x' + f_y' = f$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似 B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似 D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 $1,2$, 则 ( )

A. $a>1$ B. $a<-2$ C. $-2<a<1$ D. $a=1$或$a=-2$

**二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________.

10.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

11.以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________.

12.已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)=(x+1)^2+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则当 $n\geqslant 2$ 时, $f^{(n)}(0)=$________.

13.已知动点 $P$ 在曲线 $y=x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 $P$ 间的距离为 $l$. 若点 $P$ 的横坐标对事件的变化率为常数 $v_0$, 则当点 $P$ 运动到点 $(1,1)$ 时, $l$ 对时间的变化率是________.

14.设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a=$________.

**三、解答题, 15 ∼ 23 题, 共 94 分.**

15.**(本题满分 10 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

16.**(本题满分 10 分)**

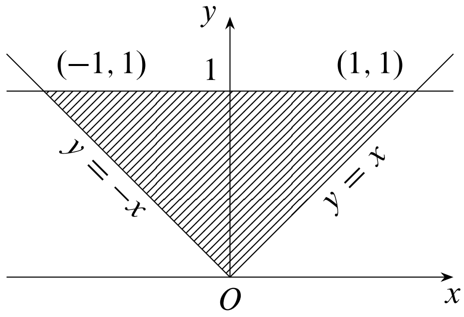
设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1 |t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

17.**(本题满分 10 分)**

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定, 求 $z=z(x,y)$ 的极值.

18.(本题满分 10 分)

设 $D$ 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域, 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



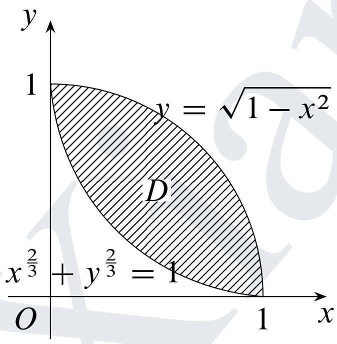

第 18 题图

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $y_1(x)=\mathrm{e}^x, y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解, 若 $u(-1)=\mathrm{e}, u(0)=-1$, 求 $u(x)$ 并写出微分方程的通解.

20.(本题满分 11 分)

设 $D$ 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域, 求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.




第 20 题图

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$, 且方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

23.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

# 第 12 章 2017 年考研数学二

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( )

   A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　　C. $ab=0$　　D. $ab=2$

2. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1$, $f(0)=-1$, 且 $f''(x)>0$, 则 ( )

   A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>0$　　B. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<0$

   C. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 ( )

   A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

   B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

   C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

   D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sin x_n\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

4. 微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$ ( )

   A. $A\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　B. $Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

   C. $A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　D. $Ax\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

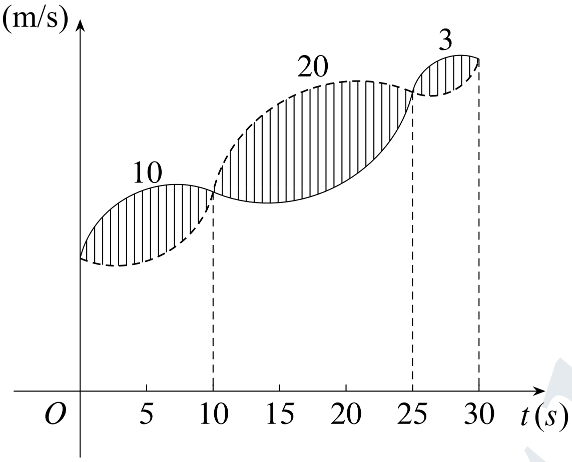
5. 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数, 且在任意的 $(x,y)$, 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则 ( )

   A. $f(0,0)>f(1,1)$　　B. $f(0,0)<f(1,1)$

   C. $f(0,1)>f(1,0)$　　D. $f(0,1)<f(1,0)$

6. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$, 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 $t_0$ (单位: s), 则 ( )

   A. $t_0=10$　　B. $15<t_0<20$　　C. $t_0=25$　　D. $t_0>25$




第 6 题图

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=$ ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$ C. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似
B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似
C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似
D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^t\\y=\sin t\end{cases}$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

12. 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$, $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$________.

13. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=$________.

14.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, 则 $a=$________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(**本题满分 10 分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

16.(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

17.(**本题满分 10 分**)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

18.(**本题满分 10 分**)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

19.(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

20.(**本题满分 11 分**)

已知平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant2y\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

21.(**本题满分 11 分**)

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 内的可导函数, 且 $y(1)=0$. 点 $P$ 是曲线 $L:y=y(x)$ 上任意一点, $L$ 在点 $P$ 处的切线与 $y$ 轴相交于点 $(0,Y_p)$ 法线与 $x$ 轴相交于点 $(X_p,0)$. 若 $X_p=Y_p$, 求 $L$ 上点的坐标 $(x,y)$ 满足的方程.

22.(**本题满分 11 分**)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

23.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 $a$ 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

# 第 13 章 2018 年考研数学二

## 一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 则 ( )

   A. $a=\dfrac{1}{2}, b=-1$  B. $a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$

   C. $a=\dfrac{1}{2}, b=1$  D. $a=-\dfrac{1}{2}, b=1$

2. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

   A. $f(x)=|x|\sin|x|$  B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

   C. $f(x)=\cos|x|$  D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geqslant 0\end{cases}$, 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 ( )

   A. $a=3, b=1$  B. $a=3, b=2$  C. $a=-3, b=1$  D. $a=-3, b=2$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 ( )

   A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$  B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

   C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$  D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

5. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

   A. $M>N>K$  B. $M>K>N$  C. $K>M>N$  D. $N>M>K$

6. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y=$ ( )

   A. $\dfrac{5}{3}$  B. $\dfrac{5}{6}$  C. $\dfrac{7}{3}$  D. $\dfrac{7}{6}$

7. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$ B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$ D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan(x)] =$________.

10.曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ________.

11.$\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \mathrm{d}x =$________.

12.曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 ________.

13.设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + \mathrm{e}^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})} =$________.

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 ________.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.**(本题满分 10 分)**

求不定积分 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x} \arctan\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

16.**(本题满分 10 分)**

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x t f(x-t)\,\mathrm{d}t = ax^2$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1, 求 $a$ 的值.

17.**(本题满分 10 分)**

设平面区域 $D$ 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 $x$ 轴围成, 计算二重积分

$$\iint\limits_D (x + 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

18.(本题满分 10 分)

已知常数 $k \geqslant 2\ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)\left(x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1\right) \geqslant 0$.

19.(本题满分 10 分)

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

20.(本题满分 11 分)

已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geqslant 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$. 设 $P$ 是 $L$ 上的动点,$S$ 是直线 $OA$ 与直线 $AP$ 及曲线 $L$ 所围成的图形的面积. 若 $P$ 运动到点 $(3,4)$ 时沿 $x$ 轴正向的速度是 4, 求此时 $S$ 关于时间 $t$ 的变化率.

21.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1\,(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

22.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 $a$ 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

23.(本题满分 11 分)

已知 $a$ 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $a$;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

# 第 14 章 2019 年考研数学二

**一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为 ( )

A. $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ B. $(0, 2)$ C. $(\pi, -2)$ D. $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$

3. 下列反常积分发散的是 ( )

A. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ B. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

C. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ D. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 $a, b, c$ 依次为 ( )

A. 1, 0, 1 B. 1, 0, 2 C. 2, 1, 3 D. 2, 1, 4

5. 已知平面区域 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x| + |y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$, 记

$$I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \iint\limits_D \left(1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 $I_1, I_2, I_3$ 的大小关系为 ( )

A. $I_3 < I_2 < I_1$ B. $I_2 < I_1 < I_3$ C. $I_1 < I_2 < I_3$ D. $I_2 < I_3 < I_1$

6. 已知 $f(x), g(x)$ 的二阶导函数在 $x = a$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0$ 是两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切且曲率相等的 ( )

A. 充分非必要条件 B. 充分必要条件

C. 必要非充分条件 D. 既非充分也非必要条件

**注:** 本题还是有一定难度的, 且在此题中有几个值得注意的地方:

- 本题中只需要 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 处二阶可导即可, 并不需要二阶导数连续.

- 对于必要性的否定, 可以直接举反例 $a=0$, $f(x)=x^2, g(x)=-x^2$ 即可.
- 在充分性的推导中, 切勿乱用洛必达法则. 如果要用, 应当这么使用: 为方便, 我们记 $h(x)=f(x)-g(x)$. 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{(x-a)^2}=0$ 可知 $h(a)=0$, 且

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}(x-a)=0.$$

由于 $h''(a)$ 是存在的, 因此

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{h'(x)-h'(a)}{x-a}=\frac{h''(a)}{2}=0.$$

这里必须先用定义求出 $h'(a)=0$, 再用洛必达法则求出 $h''(a)=0$ (为什么?).

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$ ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$________.

10. 曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处的切线在 $y$ 轴的截距为________.

11. 设函数 $f(u)$ 可导, $z=f\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

12. 曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为________.

13. 已知函数 $f(x)=x\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$, 则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

14. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$, $A_{ij}$ 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 $(i,j)$ 元的代数余子式, 则 $A_{11}-A_{12}=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^x+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

16.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

17.(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 $D$ 绕 $x$ 旋转一周所得旋转体的体积.

18.(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqslant y, \left(x^2+y^2\right)^3\leqslant y^4\right\}$, 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19.(本题满分 10 分)

☞设 $n$ 是正整数, 记 $S_n$ 为曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(0\leqslant x\leqslant n\pi)$ 与 $x$ 轴所围图形的面积, 求 $S_n$, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

20.(本题满分 11 分)

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 $a,b$ 的值, 使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

**注:** 这个证法恰到好处的地方在于当我们取 $f(x)=4x-3x^2$ 时, $f(x)$ 刚好满足条件, 且 $f''(x)\equiv -6$, 这个例子说明 $f''(x)$ 能够保证取到的最小值就是 $-6$. 至于如何构造出这个例子, 只需要待定一组系数 $a,b,c$ 使得 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ 即可.

22.(**本题满分 11 分**)

已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$, (II) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 $a$ 的取值, 并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

23.(**本题满分 11 分**) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 $x,y$;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

# 2020 年考研数学二

四、选择题, $1 \sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} \, dt$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx =$ ( )

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$　C. $\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{\pi}{8}$

4. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 则当 $n \geqslant 3$ 时, $f^{(n)}(0)=$ ( )

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$　B. $\dfrac{n!}{n-2}$　C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

5. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y=0 \\ y, & x=0 \end{cases}$ ,给出下列结论:

(1) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$;　　(2) $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}=1$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$;　　(4) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

其中正确的个数为 ( )

A. 4　B. 3　C. 2　D. 1

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 则 ( )

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$　C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$　D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

7. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, $a_{12}$ 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $-1$ 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为(　　)

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$　　B. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$　　D. $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2)$

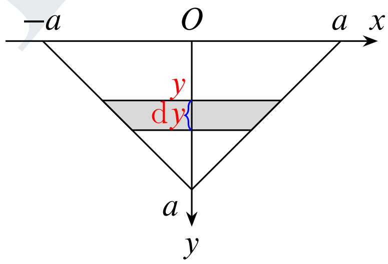
**五、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$________.

10. $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x =$________.

11. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)} =$________.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 $g$, 水的密度为 $\rho$, 则三角形平板的一侧受到的水压力为________.




第 12 题图

13. 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x =$________.

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$________.

**六、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15. **(本题满分 10 分)**

求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x > 0)$ 的斜渐近线.

16. **(本题满分 10 分)**

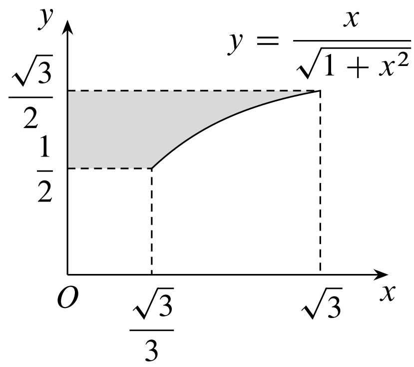
已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$, 并求曲线 $y=f(x), y=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $y$ 轴所围成的图形绕 $x$ 轴旋转所成旋转体的体积.




第 18 题图

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中区域 $D$ 由 $x=1, x=2, y=x$ 及 $x$ 轴围成.

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 证明

(1) 存在 $\xi\in(1,2)$, 使得 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta\in(1,2)$, 使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)>0\,(x>0)$. 曲线 $y=f(x)$ 过原点, 点 $M$ 为曲线 $y=f(x)$ 上任意一点, 过点 $M$ 的切线与 $x$ 轴相交于点 $T$, 过点 $M$ 作 $MP$ 垂直 $x$ 轴于点 $P$, 且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $MP$ 以及 $x$ 轴所围成图形的面积与三角形 $MTP$ 的面积比恒为 3 : 2, 求曲线满足的方程.

22.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1,y_2.y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

23.(**本题满分** 11 **分**)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.