

2020 年考研数学三模拟卷二

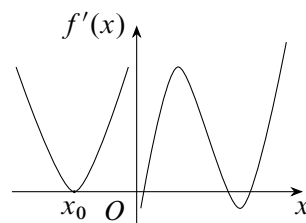
命题人: 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: _____

题号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总分
满分	32	24	94	150
得分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中 x_0 处曲线与 x 轴相切, 则函数 $f(x)$ 与曲线 $y = f(x)$ 分别有 ()



第 1 题图

- (A) 4 个极值点和 2 个拐点 (B) 3 个极值点和 2 个拐点
(C) 4 个极值点和 3 个拐点 (D) 5 个极值点和 3 个拐点
2. 设函数 $f(x) = (x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ ($\alpha > 1$), 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()
(A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续
3. 设平面区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 记

$$I_1 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma, \quad I_2 = \iint_D \cos x^2 \sin y^2 d\sigma, \quad I_3 = \iint_D [e^{-(x^2+y^2)} - 1] d\sigma,$$

则有 ()

- (A) $I_2 > I_1 > I_3$ (B) $I_1 > I_2 > I_3$ (C) $I_1 > I_3 > I_2$ (D) $I_2 > I_3 > I_1$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n+1}|$ 收敛的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件
5. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 ()
(A) 当 $m > n$ 时, $|AB| \neq 0$ (B) 当 $m > n$ 时, $|AB| = 0$
(C) 当 $n > m$ 时, $|AB| \neq 0$ (D) 当 $n > m$ 时, $|AB| = 0$

6. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, b 为 n 维列向量, 则下列说法错误的是 ()
- (A) 如果 $r(A) = m$, 则方程组 $Ax = b$ 一定有解
- (B) 如果 $r(A) = n$, 则方程组 $Ax = b$ 不可能有无穷多解
- (C) 如果 $m = n$, 则方程组 $A^T Ax = A^T b$ 一定有解
- (D) 如果方程组 $Ax = 0$ 有非零解, 则方程组 $A^T y = 0$ 也有非零解
7. 设随机事件 A, B 满足 $P(A|B) > P(\bar{A}|B)$, 则下列说法正确的是 ()
- (A) $2P(A) > P(B)$ (B) $2P(\bar{A}) > P(B)$ (C) $2P(B) > P(A)$ (D) $2P(\bar{B}) > P(A)$
8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = 1) = P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$, 向量组 α_1, α_2 线性无关, 则向量组 $X\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - X\alpha_2$ 线性无关的概率为 ()
- (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

答案 CCADBDCB

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(1+n) - \ln n} - n \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $\frac{1}{2}.$

10. 设在一定范围内, 某商品的需求函数为 $Q = 100 - 2p$, 其中 p 为商品的价格, 则该商品的边际收益为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $50 - Q.$

11. 差分方程 $y_{x+1} - 2y_x = e^x$ 的通解为 $y_x = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $C \cdot 2^x + \frac{e^x}{e-2}.$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{(2n+1)!} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $\frac{3}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \sin 1.$

13. 设四阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0$, 向量 $\beta = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $(0, 1, 1, 1)^T + k(1, 3, 2, 1)^T.$

14. 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_9 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_9 是来自总体 X 的独立的简单随机样本, 如果 $k \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_9)^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_9^2}$ 服从 F 分布, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 1.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax+1), & x \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x > 0 \end{cases}$, 确定常数 a, b , 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 并求其导数.

解 直接计算可知

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax+1), & x \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax+1), & x \leq 0 \\ e^{-(x+b)}, & x > 0 \end{cases}.$$

首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-b} = f(0) = \frac{1}{2}$, $b = \ln 2$. 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导得

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{2} = f'_+(0) = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = -1,$$

$$\text{因此 } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $z = z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases} u = x + a\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 化

为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 试确定 a 的值.

解 由复合函数偏导法则可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{a}{2\sqrt{y}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{a}{\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \right), \end{aligned}$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (2-a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

于是有 $1 - \frac{a^2}{4} = 0, 2 - a \neq 0$, 所以 $a = -2$.

17. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1$, $f(x) > 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h \cos^2 x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{x \cos^2 x + \tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h \cos^2 x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} &= \exp \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + h \cos^2 x) - \ln f(x)}{h} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln f(x + h \cos^2 x) - \ln f(x)}{h \cos^2 x} \cos^2 x \right) \\ &= \exp ([\ln f(x)]' \cos^2 x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)} \cos^2 x}. \end{aligned}$$

由条件得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cos^2 x = x \cos^2 x + \tan x, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = x + \tan x \sec^2 x.$$

积分可得 $\ln |f(x)| = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln |C|$, 即 $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x}$. 由 $f(0) = 1$ 得 $C = 1$, 故 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x}$. 又 $f'(x) = (x + \tan x \sec^2 x)e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$. 不难得知 $f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 1$.

18. (本题满分 10 分)

求二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

解 利用极坐标可得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \frac{r}{\sqrt{4a^2 - r^2}} r dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \left(\frac{4a^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} - \sqrt{4a^2 - r^2} \right) dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left[4a^2 \arcsin \frac{r}{2a} - \left(\frac{r}{2} \sqrt{4a^2 - r^2} + 2a^2 \arcsin \frac{r}{2a} \right) \right] \Big|_0^{-2a \sin \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(2a^2 \arcsin \frac{r}{2a} - \frac{r}{2} \sqrt{4a^2 - r^2} \right) \Big|_0^{-2a \sin \theta} d\theta \\ &= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(-\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \\ &= a^2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

19. (本题满分 10 分)

设定义在有界闭区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) > 0$ 且 $f(a) > 0, f(b) < 0$.

(1) 证明: 存在唯一的 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$;

(2) 设 $x_0 \in (a, b), f(x_0) > 0$, 定义数列 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

证明 (1) 首先由 $f(a) > 0, f(b) < 0$, 根据零点定理可知存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$. 如果还存在点 $c' \in (a, b)$ 使得 $f(c') = 0$. 不妨设 $c' > c$, 那么存在 $\xi_1 \in (c, c'), \xi_2 \in (c', b)$, 使得

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c')}{b - c'} = \frac{f(b)}{b - c'} < 0,$$

这与 $f''(x) > 0$ 矛盾, 因此必存在唯一的 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $a < x < c$ 时, $f(x) > 0$, 当 $c < x < b$ 时, $f(x) < 0$. 由于 $f(x_0) > 0$, 所以 $x_0 \in (a, c)$. 存在 $\xi \in (c, b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} < 0$, 又 $f''(x) > 0$, 说明 $f'(x)$ 单调递增, 因此当 $x \in (a, c)$ 时, $f'(x) < f'(\xi) < 0$. 下面归纳证明 $x_n < x_{n+1} < c$.

• $n = 0$ 时, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$ 成立, 而由拉格朗日中值定理可得

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0) - f(c)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{(x_0 - c)f'(\eta)}{f'(x_0)} < x_0 - (x_0 - c) = c,$$

其中 $\eta \in (x_0, c), f'(x_0) < f'(\eta) < 0$.

• 假定 $n = k - 1$ 时, $x_{k-1} < x_k < c$ 成立, 那么 $n = k$ 时, $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} > x_k$, 与 $n = 0$ 的情况类似, 由拉格朗日中值定理可知

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k - c)f'(\eta_k)}{f'(x_k)} < x_k - (x_k - c) = c.$$

因此由数学归纳法知 $x_n < x_{n+1} < c$ 对所有 n 都成立, 即 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 从而 $\{x_n\}$ 的极限存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 在 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 中令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, 因此 $f(a) = 0$, 即 $a = c, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

20. (本题满分 11 分)

已知三维列向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix},$$

且向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 α_1, α_2 等价.

(1) 求参数 a, b, c 的值;

(2) 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 求矩阵 X , 使得 $AX = B$.

解 (1) 由题意首先有 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩为 2, 于是

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = 3c = 0, c = 0.$$

同理, 由 $|\alpha_1, \beta_1, \beta_2| = 3a + 3 = 0$ 得 $a = -1$, 由 $|\alpha_2, \beta_1, \beta_2| = 3b - 3 = 0$ 得 $b = 1$.

(2) 对增广矩阵 (A, B) 进行初等行变换得

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此所求的矩阵 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换化二次型为标准形;

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

解 (1) 二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 因为 $r(A) = 2$, 所以 $|A| = -8a = 0, a = 0$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. 对特征值 $\lambda_1 = 0$, 解方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得

$\lambda_1 = 0$ 的单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$; 对特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 解方程组 $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的单位特征向量 $\xi_2 = (0, 0, 1)^T, \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$. 令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则 P 为正交矩阵, 在正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 下, 二次型化为标准形 $2y_2^2 + 2y_3^2$.

(3) 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0$ 即为方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

此方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3) = (k, -k, 0), k \in \mathbb{R}$.

22. (本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 记 $Y = \min\{X_2, X_3\}$, 求 Y 的概率密度;

(2) 求 $P(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\})$.

解 (1) 参数为 1 的指数分布的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, Y 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\min\{X_2, X_3\} \leq y) = 1 - P(\min\{X_2, X_3\} \geq y) \\ &= 1 - P(X_2 \geq y, X_3 \geq y) = 1 - P(X_2 \geq y)P(X_3 \geq y) \\ &= 1 - [1 - F(y)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

因此 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$.

(2) $\min\{X_1, X_2, X_3\} = \min\{X_1, Y\}$, X_1 与 Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

那么

$$\begin{aligned} P(X_1 = \min\{X_1, Y\}) &= P(X_1 \leq Y) = \iint_{x \leq y} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} 2e^{-2y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-2x} dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

23. 设总体 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

其中参数 $\sigma > 0$, X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本.

(1) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$, 并计算 $E(\hat{\sigma}_2^2)$.

解 (1) 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 总体均值为

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sigma.$$

令 $\bar{X} = E(X)$, 解得 $\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \bar{X}^2$, 即 σ^2 的矩估计量为 $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{2}{\pi} \bar{X}^2$.

(2) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 所对应的样本值为 x_1, x_2, \dots, x_n , 似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\sigma^{2n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\sigma^2) = \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - n \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$, 令

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

解得 $\sigma^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 即 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 且

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{2} E(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$