2020 年考研数学一模拟卷二

命题人:向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 $1\sim 8$	填空题 $9\sim 14$	解答题 $15\sim 23$	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, $1\sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{1+x^2}{x}$ ( )

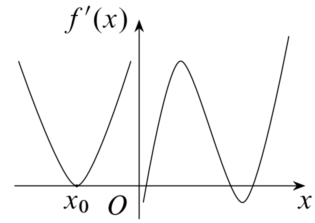
   (A) 有一条垂直渐近线和一条斜渐近线 (B) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线

   (C) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线 (D) 只有一条斜渐近线

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中 x_0 处曲线与 x 轴相切, 则函数 $f(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 分别有 ( )

   (A) 4 个极值点和 2 个拐点 (B) 3 个极值点和 2 个拐点

   (C) 4 个极值点和 3 个拐点 (D) 5 个极值点和 3 个拐点



第 2 题图

3. 下列使得闭曲线积分 $\displaystyle\oint_L (x^2y-y)\,\mathrm{d}x-\frac{xy^2}{3}\,\mathrm{d}y$ 最大的曲线 L 为 ( )

   (A) $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$, 逆时针 (B) $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$, 顺时针

   (C) $x^2+y^2=1$, 逆时针 (D) $x^2+y^2=1$, 顺时针

4. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n+1}|$ 收敛的 ( )

   (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

   (C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

5. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有完全相同的特征向量, 则下列说法正确的是 ( )

   (A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 一定相似 (B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 一定合同

   (C) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ (D) 如果 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则 $\boldsymbol{B}$ 正定

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

(B) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 不可能有无穷多解

(C) 如果 $m=n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解

(D) 如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 也有非零解

7. 设随机事件 A,B 满足 $P(A|B)>P(\bar{A}|B)$, 则下列说法正确的是 ( )

(A) $2P(A)>P(B)$ (B) $2P(\bar{A})>P(B)$ (C) $2P(B)>P(A)$ (D) $2P(\bar{B})>P(A)$

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=\dfrac{1}{3}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $X\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-X\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的概率为 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) 0

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上曲率最大点处的曲率半径为________.

10. 曲面 $xyz=2$ 上任一点处的切平面与坐标轴的交点以及原点所构成的四面体的体积为________.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{4-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=$________.

12. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛, 则幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^n$ 的收敛区间为________.

13. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________.

14. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的独立的简单随机样本, 如果 $k\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从 F 分布, 则 $k=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定 a 的值.

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(x)>0$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）
设空间曲线 C 由立方体 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 相截而成,从 z 轴正向往负向看,方向为逆时针,试计算曲线积分

$$\oint_C (z^2-y^2)\,\mathrm{d}x + 2(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y + 3(y^2-x^2)\,\mathrm{d}z.$$

19.（本题满分 10 分）
设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内二阶可导,且满足 $f(0)=0, f(1)=2, \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$,证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta \in (0,1)$,使得 $f''(\eta)=-12$,并给出一个满足条件的函数 $f(x)$.

20.（本题满分 11 分）
a, b 取什么值时,线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有解? 在有解的情形下,求出方程组的所有解.

21.（本题满分 11 分）
设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3) = y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求出一个满足题意的正交变换;

(3) 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面?

22.（本题满分 11 分）
设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立,且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 记 $Y = \min\{X_2, X_3\}$,求 Y 的概率密度;

(2) 求 $P\big(X_1 = \min\{X_1, X_2, X_3\}\big)$.

23. 设总体 X 服从瑞利分布,其概率密度为

$$f(x;\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

其中参数 $\sigma > 0$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本.

(1) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$, 并计算 $E(\hat{\sigma}_2^2)$.