2020 年考研数学三模拟卷二

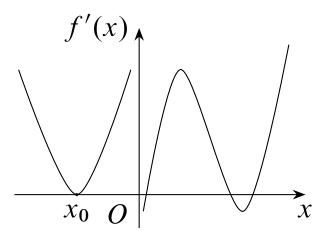
命题人:向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ～ 8	填空题 9 ～ 14	解答题 15 ～ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中 x_0 处曲线与 x 轴相切, 则函数 $f(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 分别有 ( )
   (A) 4 个极值点和 2 个拐点 (B) 3 个极值点和 2 个拐点
   (C) 4 个极值点和 3 个拐点 (D) 5 个极值点和 3 个拐点



第 1 题图

2. 设函数 $f(x)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(\alpha>1)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )
   (A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续

3. 设平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$, 记
$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D \left[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1\right]\mathrm{d}\sigma,$$
   则有 ( )
   (A) $I_2>I_1>I_3$ (B) $I_1>I_2>I_3$ (C) $I_1>I_3>I_2$ (D) $I_2>I_3>I_1$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n+1}|$ 收敛的 ( )
   (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 ( )
   (A) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$ (B) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$
   (C) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$ (D) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量, 则下列说法错误的是 ( )
(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解
(B) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 不可能有无穷多解
(C) 如果 $m=n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解
(D) 如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 也有非零解

7. 设随机事件 A,B 满足 $P(A|B)>P(\bar{A}|B)$, 则下列说法正确的是 ( )
(A) $2P(A)>P(B)$ (B) $2P(\bar{A})>P(B)$ (C) $2P(B)>P(A)$ (D) $2P(\bar{B})>P(A)$

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=\dfrac{1}{3}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $X\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-X\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的概率为 ( )
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) 1

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right)=$________.

10. 设在一定范围内, 某商品的需求函数为 $Q=100-2p$, 其中 p 为商品的价格, 则该商品的边际收益为________.

11. 差分方程 $y_{x+1}-2y_x=\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y_x=$________.

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+2}{(2n+1)!}=$________.

13. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________.

14. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的独立的简单随机样本, 如果 $k\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从 F 分布, 则 $k=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)
设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}$, 确定常数 a,b, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求其导数.

16.(本题满分 10 分)
设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定 a 的值.

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(x)>1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

求二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

19.（本题满分 10 分）

设定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)>0$ 且 $f(a)>0$, $f(b)<0$.

(1) 证明: 存在唯一的 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$;

(2) 设 $x_0\in(a,b)$, $f(x_0)>0$, 定义数列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,(n=0,1,2,\cdots)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

20.（本题满分 11 分）

已知三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix},$$

且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 等价.

(1) 求参数 a,b,c 的值;

(2) 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

21.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换化二次型为标准形;

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 记 $Y=\min\{X_2,X_3\}$, 求 Y 的概率密度;

(2) 求 $P\big(X_1=\min\{X_1,X_2,X_3\}\big)$.

23. 设总体 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

其中参数 $\sigma>0$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$, 并计算 $E(\hat{\sigma}_2^2)$.