

## 2020 届考研数学全真模拟卷(数学二)

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: \_\_\_\_\_

| 题号 | 选择题 1 ~ 8 | 填空题 9 ~ 14 | 解答题 15 ~ 23 | 总分  |
|----|-----------|------------|-------------|-----|
| 满分 | 32        | 24         | 94          | 150 |
| 得分 |           |            |             |     |

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数  $a > 1$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = a^x + a^{-x} - 2$  是  $x$  的 ( )  
 (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小  
 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

2. 已知函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 则函数  $|f(|x|)|$  在  $x = 0$  处可导的充要条件是 ( )  
 (A)  $f(0) = 0$  (B)  $f(0) \neq 0$  (C)  $f'(0) = 0$  (D)  $f'(0) \neq 0$

3. 设在区间  $[a, b]$  上有  $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ , 令

$$M = \int_a^b f(x) dx, \quad N = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a), \quad P = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

则 ( )

- (A)  $M < N < P$  (B)  $P < M < N$  (C)  $P < N < M$  (D)  $M < P < N$

4. 设  $0 < a \leq b \leq c$ , 则反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a + x^b + x^c}$  收敛的充要条件是 ( )  
 (A)  $a < 1 < c$  (B)  $a \leq 1 \leq c$  (C)  $a < 1 < b$  (D)  $b < 1 < c$

5. 已知微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的通解为  $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^x$ , 则  $a, b, c$  依次为 ( )  
 (A) 1, -2, 1 (B) 1, 0,  $\frac{1}{2}$  (C) 2, 1,  $\frac{1}{2}$  (D) -2, 1, 2

6. 设函数  $f(x, y)$  连续, 则累次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{-\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  可以写为 ( )

- (A)  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{-y-y^2}} f(x, y) dx$  (B)  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$   
 (C)  $\int_{-1}^0 dx \int_0^1 f(x, y) dy$  (D)  $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{-x-x^2}} f(x, y) dy$

7. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  为  $n$  维列向量, 满足  $A\alpha_1 = \beta_1, A\alpha_2 = \beta_2$ , 则 ( )
- (A) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  一定线性无关
- (B) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  一定线性相关
- (C) 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 则向量组  $\beta_1, \beta_2$  线性无关
- (D) 如果向量组  $\beta_1, \beta_2$  线性无关, 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关
8. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 则  $Ax = 0$  只有零解是  $A^T A$  正定的 ( )
- (A) 充分而非必要条件
- (B) 必要而非充分条件
- (C) 充要条件
- (D) 既非充分也非必要条件

答案 BCBADDDA

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案  $\frac{\pi}{4}.$

10. 设连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \ln x - 2x^2 \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案  $\ln x - e^{-2}x^2.$

11.  $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案  $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

12. 微分方程  $y'' - \frac{1}{x}y' = xe^x$  的通解为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

答案  $y = (x-1)e^x + C_1x^2 + C_2.$

13.  $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案  $\frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}.$

14. 设  $A$  为三阶矩阵,  $|\lambda E - A| = \lambda^3 + 2\lambda + 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  为  $A$  的特征值, 则  $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 0.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  具有连续的导数, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{e^x-1} f(t) dt}{x^3}.$

解 利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{e^x-1} f(t) dt}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)(e^x - 1 - x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{\xi}{x} = \frac{1}{2} f'(0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中在使用积分中值定理时,  $\xi$  是介于  $x$  与  $e^x - 1$  之间的量, 因此  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sim \xi \sim e^x - 1$ .

16. (本题满分 10 分)

设不定积分  $\int \frac{2x^2 + ax + 1}{(x+1)(x^2+1)} dx$  的结果中不含反正切函数, 求  $a$  的值并计算此不定积分.

解 将被积函数化为部分分式的和  $\frac{2x^2 + ax + 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$ , 通分可得

$$2x^2 + ax + 1 = (A+M)x^2 + (M+N)x + (A+N).$$

要使得积分中不含有反正切函数, 必有  $N=0$ , 因此

$$A+M=2, M=a, A=1 \Rightarrow A=M=a=1.$$

那么原不定积分为

$$\int \frac{2x^2 + ax + 1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

17. (本题满分 10 分)

设函数  $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$  满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ , 且  $f(0) = f'(0) = 0$ , 求  $f(v)$  的表达式.

解 记  $v = \ln r, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则  $\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r}, \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ , 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} \cdot f'(v), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r^2} \cdot f'(v).$$

进一步计算二阶偏导数得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^4} \cdot f''(v) + \frac{1}{r^2} \cdot f'(v) - \frac{2x^2}{r^4} \cdot f'(v), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^4} \cdot f''(v) + \frac{1}{r^2} \cdot f'(v) - \frac{2y^2}{r^4} \cdot f'(v).\end{aligned}$$

代入条件  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$  并化简得微分方程  $f''(v) = e^{5v}$ , 结合初值条件  $f(0) = f'(0) = 0$

解得  $f(v) = \frac{1}{25}e^{5v} - \frac{1}{5}v - \frac{1}{25}$ .

18. (本题满分 10 分)

设函数  $y = f(x) (x \geq 0)$  连续可导, 且  $f(0) = 1$ . 现已知曲线  $y = f(x)$ 、 $x$  轴、 $y$  轴及过点  $x$  且垂直于  $x$  轴的直线所围成的图形的面积与曲线  $y = f(x)$  在  $[0, x]$  上的一段弧长值相等, 求  $f(x)$ .

解 由题意可得方程

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt,$$

上式两端对  $x$  求导得

$$f(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

又  $f(0) = 1$ , 故所求函数  $f(x)$  满足

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 + y'^2} \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}.$$

由  $y = \sqrt{1 + y'^2}$  得  $y^2 = 1 + y'^2$ , 故  $y' = \pm\sqrt{y^2 - 1}$ , 从而

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx.$$

于是方程的通解为

$$\ln C (y \pm \sqrt{y^2 - 1}) = x.$$

将  $y|_{x=0} = 1$  代入上式得  $C = 1$ , 故所求的解为

$$y \pm \sqrt{y^2 - 1} = e^x.$$

$$\text{解得 } f(x) = y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

19. (本题满分 10 分)

设区域  $D = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 计算积分  $\iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma$ .

解 直线  $x + y = 1$  的极坐标方程为  $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \cos \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right) r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left( \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{1}{2 \cos^2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)} d \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] d \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sin \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin 1. \end{aligned}$$

20. (本题满分 11 分)

(1) 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, +\infty)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

(2) 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 且  $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, +\infty)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$ .

证明 (1) 令  $F(t) = \begin{cases} f(\tan t), & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ f(0), & t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ , 则函数  $F(t)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  内可导, 且有  $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  由罗尔定理知存在  $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 使得

$$F'(\eta) = f'(\tan \eta) \sec^2 \eta = 0 \Rightarrow f'(\tan \eta) = 0.$$

令  $\xi = \tan \eta \in (0, +\infty)$ , 则  $f'(\xi) = 0$ .

(2) 显然由条件可得  $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 令  $F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$ , 则  $F(x)$  满足 (1) 中的条件, 因此存在  $\xi \in (0, +\infty)$ , 使得  $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} = 0$ .

21. (本题满分 11 分)

设  $m, n$  为正整数, 令  $B(m, n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}$ .

(1) 利用  $\int_0^1 x^{m+k} dx = \frac{1}{m+k+1}$  证明  $B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = B(n, m)$ ;

(2) 证明:  $B(m, n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1)$ , 进一步证明  $B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ .

证明 (1) 利用积分以及二项式定理可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{m+k+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \int_0^1 x^{m+k} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{m+k} dx = \int_0^1 x^m \sum_{k=0}^n C_n^k (-x)^k dx \\ &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \stackrel{x=1-t}{=} \int_0^1 t^n (1-t)^m dt = B(n, m). \end{aligned}$$

(2) 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
 B(m, n) &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{1}{m+1} \int_0^1 (1-x)^n d(x^{m+1}) \\
 &= \frac{1}{m+1} \left[ (1-x)^n x^{m+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 x^{m+1} n(1-x)^{n-1} (-dx) \right] \\
 &= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) \\
 &= \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} B(m+2, n-2) = \cdots \\
 &= \frac{n(n-1) \cdots 1}{(m+1)(m+2) \cdots (m+n)} B(m+n, 0) \\
 &= \frac{n!}{(m+1)(m+2) \cdots (m+n)} \int_0^1 x^{m+n} dx \\
 &= \frac{n!}{(m+1)(m+2) \cdots (m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
 \end{aligned}$$

22. (本题满分 11 分)

设  $A$  为三阶矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是  $A$  的三个不同特征值, 对应的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 令  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

(1) 证明:  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关;

(2) 若  $A^3\beta = A\beta$ , 求秩  $r(A - E)$  及行列式  $|A + 2E|$ .

解 (1) 设

$$k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = 0, \quad (*)$$

由题设  $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 于是

$$\begin{aligned}
 A\beta &= A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3, \\
 A^2\beta &= \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3,
 \end{aligned}$$

代入 (\*) 式整理得

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\alpha_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\alpha_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\alpha_3 = 0.$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三个不同特征值对应的特征向量, 必线性无关, 于是

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0, \\ k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0 \end{cases}$$

其系数行列式非零, 因此必有  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ , 故  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关.

(2) 由  $A^3\beta = A\beta$  有

$$\begin{aligned} A(\beta, A\beta, A^2\beta) &= (A\beta, A^2\beta, A^3\beta) = (A\beta, A^2\beta, A\beta) \\ &= (\beta, A\beta, A^2\beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

令  $P = (\beta, A\beta, A^2\beta)$ , 则  $P$  可逆, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

从而有

$$\begin{aligned} r(A - E) &= r(B - E) = r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \\ |A + 2E| &= |B + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

23. (本题满分 11 分)

已知三元二次型  $x^T Ax$  经过正交变换化为  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ , 又知矩阵  $B$  满足矩阵方程

$$\left[ \left( \frac{1}{2}A \right)^* \right]^{-1} BA^{-1} = 2AB + 4E,$$

且  $A^*\alpha = \alpha$ , 其中  $\alpha = (1, 1, -1)^T$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 求二次型  $x^T Bx$  的表达式.

**解** 由条件知  $A$  的特征值为  $2, -1, -1$ , 则  $|A| = 2$ , 因为  $A^*$  的特征值为  $|A|/\lambda$ , 所以  $A^*$  的特征值为  $1, -2, -2$ . 由已知,  $\alpha$  是  $A^*$  的属于特征值  $\lambda = 1$  的特征向量, 也就是  $\alpha$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda = 2$  的特征向量. 由

$$\left( \frac{1}{2}A \right)^* = \left( \frac{1}{2} \right)^2 |A| A^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1}$$

得

$$2ABA^{-1} = 2AB + 4E \Rightarrow B = 2(E - A)^{-1},$$

则  $B$  的特征值为  $-2, 1, 1$ , 且  $B\alpha = -2\alpha$ . 设  $B$  属于  $\lambda = 1$  的特征向量为  $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 又  $B$  是实对称矩阵,  $\alpha$  与  $\beta$  正交, 故  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , 解出  $\beta_1 = (1, -1, 0)^T$ ,  $\beta_2 = (1, 0, 1)^T$ , 令

$$P = (\alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故  $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ .