

---

# Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

## 考研数学 试题解答

---



追求卓越排版, 巧解数学难题.

---

作者: 向禹老师  
完成时间: 2020 年 3 月 4 日  
Email: [739049687@qq.com](mailto:739049687@qq.com)

---

Version: 1.0



# 目录



1	2006 年考研数学三	2
2	2007 年考研数学三	11
3	2008 年考研数学三	21
4	2009 年考研数学三	29
5	2010 年考研数学三	38
6	2011 年考研数学三	46
7	2012 年考研数学三	54
8	2013 年考研数学三	62
9	2014 年考研数学三	70
10	2015 年考研数学三	78
11	2016 年考研数学三	86
12	2017 年考研数学三	95
13	2018 年考研数学三	103
14	2019 年考研数学三	111
15	2020 年考研数学三	120

## 第1章 2006年考研数学三

一、填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-1)^n \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)} = e^0 = 1.$

2. 设函数  $f(x)$  在  $x=2$  的某邻域内可导, 且  $f'(x) = e^{f(x)}$ ,  $f(2) = 1$ , 则  $f'''(2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 等式两边对  $x$  求导得  $f''(x) = e^{f(x)} f'(x) = e^{2f(x)}$ , 再次求导得  $f'''(x) = 2e^{2f(x)} f'(x) = 2e^{3f(x)}$ , 又  $f(2) = 1$ , 故  $f'''(2) = 2e^{3f(2)} = 2e^3.$

3. 设函数  $f(u)$  可微, 且  $f'(0) = \frac{1}{2}$ , 则  $z = f(4x^2 - y^2)$  在点  $(1, 2)$  处的全微分  $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 对  $z = f(4x^2 - y^2)$  两边进行微分得

$$dz = f'(4x^2 - y^2) d(4x^2 - y^2) = f'(4x^2 - y^2)(8x dx - 2y dy),$$

因此  $dz|_{(1,2)} = f'(0)(8dx - 2dy) = 4dx - 2dy.$

4. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  是二阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 由条件可得

$$B(A - E) = 2E \Rightarrow |B(A - E)| = |2E| \Rightarrow |B| |A - E| = 2^2 = 4,$$

因为  $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ , 所以  $|B| = 2.$

5. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布, 则  $P(\max\{X, Y\}) \leq 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$

解:  $P(\max\{X, Y\}) \leq 1 = P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1)P(Y \leq 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$


6. 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的简单随机样本, 其样本方差为  $S^2$ , 则  $ES^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

 **解:** 样本方差是总体方差的无偏估计, 即

$$\begin{aligned} ES^2 &= D(X) = EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-|x|} dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-|x|} dx \right)^2 \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx - 0 = 2. \end{aligned}$$

## 二、选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  处的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分, 若  $\Delta x > 0$ , 则 ( )  
 A.  $0 < dy < \Delta y$     B.  $0 < \Delta y < dy$     C.  $\Delta y < dy < 0$     D.  $dy < \Delta y < 0$

 **解:** 由拉格朗日中值定理知


$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

于是  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0$ ,  $\Delta x > 0$ , 即  $0 < dy < \Delta y$ , 选 A.


8. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$ , 则 ( )  
 A.  $f(0) = 0$  且  $f'_-(0)$  存在    B.  $f(0) = 1$  且  $f'_-(0)$  存在  
 C.  $f(0) = 0$  且  $f'_+(0)$  存在    D.  $f(0) = 1$  且  $f'_+(0)$  存在

9. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数 ( )

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛    B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛  
 C.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$  收敛    D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  收敛

 **解:** 由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  收敛, 选 D. 而 A, B, C 均可取反例  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .


10. 设非齐次线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  有两个不同的解  $y_1(x), y_2(x)$ ,  $C$  为任意常数, 则该方程的通解是 ( )  
 A.  $C[y_1(x) - y_2(x)]$     B.  $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$   
 C.  $C[y_1(x) + y_2(x)]$     D.  $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

 **解:**  $y_1(x) - y_2(x)$  是对应齐次线性微分方程  $y' + P(x)y = 0$  的非零解, 则它的通解为  $Y = C[y_1(x) - y_2(x)]$ , 故原方程的通解为  $y = y_1(x) + Y = y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$ , 选 B.

11. 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ . 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )



- A. 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$     B. 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$   
 C. 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$     D. 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

 解: 令  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ , 并记对应  $x_0, y_0$  的参数  $\lambda$  的值为  $\lambda_0$ , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases},$$


那么当  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$  时, 必有  $\lambda_0 \neq 0, \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 消去  $\lambda_0$  得

$$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

注意到  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ , 于是  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 选 D.

12. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均为  $n$  维列向量,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 下列选项正确的是 ( )

- A. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关  
 B. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关  
 C. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关  
 D. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性无关

 解: 注意到  $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ , 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则


$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s,$$

因此  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关, 选 A.

13. 设  $A$  为三阶矩阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行的  $B$ , 再将  $B$  的第 1 列的  $-1$  倍加到第

2 列得  $C$ , 记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则 ( )

- A.  $C = P^{-1}AP$     B.  $C = PAP^{-1}$     C.  $C = P^TAP$     D.  $C = PAP^T$


 解: 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PAP^{-1},$$

因此选 B.

14. 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y$  服从正态分布  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1)$ , 则必有 ( )

- A.  $\sigma_1 < \sigma_2$     B.  $\sigma_1 > \sigma_2$     C.  $\mu_1 < \mu_2$     D.  $\mu_1 > \mu_2$

 解: 将  $X, Y$  标准化, 则  $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1), \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0, 1)$ , 那么

$$P(|X - \mu_1| < 1) = P\left(\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1,$$



$$P(|Y - \mu_2| < 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1.$$

因此  $P(|X - \mu_1| < 1) > P(|Y - \mu_2| < 1) \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$ , 所以  $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$ , 即  $\sigma_1 < \sigma_2$ , 选 A.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 7 分)

设  $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$ ,  $x > 0, y > 0$ , 求

(1)  $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

解: (1)  $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1-\pi x}{\arctan x}, x > 0$ .

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1-\pi x}{\arctan x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x}{x \arctan x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x^2}{x \arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x^2}{x^2} = \pi. \end{aligned}$$

16.(本题满分 7 分)

计算二重积分  $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = 1, x = 0$  所围成的平面区域.

解: 化为先对  $x$  后对  $y$  的累次积分得

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy &= \int_0^1 \sqrt{y} dy \int_0^y \sqrt{y-x} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left( -\frac{2}{3}(y-x)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{x=0}^y dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

证明: 当  $0 < a < b < \pi$  时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$



证明: 令  $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x, x \in (0, \pi)$ , 则

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi, \quad f'(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = \cos x + x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

因此当  $x \in (0, \pi)$  时,  $f'(x)$  单调递减,  $f'(x) > f'(\pi) = 0$ , 则  $f(x)$  单调增加, 于是当  $0 < a < b < \pi$  时,  $f(b) > f(a)$ , 即

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

### 18.(本题满分 8 分)

在  $xOy$  坐标平面上, 连续曲线  $L$  过点  $M(1, 0)$ , 其上任意点  $P(x, y) (x \neq 0)$  处的切线斜率与直线  $OP$  的斜率之差等于  $ax$  (常数  $a > 0$ ).

(1) 求  $L$  的方程;

(2) 当  $L$  与直线  $y = ax$  所围成平面图形的面积为  $\frac{8}{3}$  时, 确定  $a$  的值.

解: (1) 设曲线  $L$  的方程为  $y = f(x)$ , 由题意得

$$y' - \frac{y}{x} = ax,$$

因此  $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = a, \frac{y}{x} = ax + C, y = ax^2 + Cx$ . 再由  $f(1) = 0$  知  $C = -a$ , 故曲线  $L$  的方程为  $y = ax^2 - ax (x \neq 0)$ .

(2) 曲线  $L$  与直线  $y = ax (a > 0)$  所围成的平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |ax - (ax^2 - ax)| dx \\ &= a \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}a = \frac{8}{3} \Rightarrow a = 2. \end{aligned}$$

### 19.(本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$  的收敛域及和函数.

解: 记  $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)} \bigg/ \frac{x^{2n+1}}{n(2n-1)} = x^2,$$

令  $x^2 < 1$  得  $-1 < x < 1$ , 即幂级数的收敛区间为  $(-1, 1)$ . 当  $x = \pm 1$  时, 对应的级数也收敛, 因此收敛域为  $[-1, 1]$ . 设幂级数的和函数为  $S(x)$ , 当  $x \in (-1, 1)$  时,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n-1)(2n)} = 2x S_1(x),$$





而

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x, S_1(0) = 0,$$

因此


$$\begin{aligned} S_1(x) &= \int_0^x S_1'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt \\ &= t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

由于级数在  $x = \pm 1$  处收敛, 则  $S(x)$  在  $x = \pm 1$  处均连续, 所以

$$S(x) = 2xS_1(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), x \in [1, 1].$$

## 20.(本题满分 13 分)

设 4 维向量组  $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$ . 问  $a$  为何值时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关? 当  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

 解: 记以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为列向量的矩阵为  $A$ , 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a)a^3.$$

于是当  $|A| = 0$  即  $a = 0$  或  $a = -10$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

当  $a = 0$  时, 显然  $\alpha_1$  是一个极大无关组, 且  $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$ .

当  $a = -10$  时,

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

由于此时  $A$  有三阶非零子式  $\begin{vmatrix} -9 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -400$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为极大无关组, 且  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \mathbf{0}$ , 即  $\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ .

## 21.(本题满分 13 分)


设 3 阶实对称矩阵  $A$  的各行元素之和均为 3, 向量  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $Ax = \mathbf{0}$  的两个解.

(1) 求  $A$  的特征值与特征向量;



(2) 求正交矩阵  $Q$  与对角矩阵  $\Lambda$ , 使得  $Q^T A Q = \Lambda$ ;

(3) 求  $A$  及  $\left(A - \frac{3}{2}E\right)^6$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

 解: (1) 因为  $A$  的各行元素之和为 3, 即有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵  $A$  的特征值,  $\alpha = (1, 1, 1)^T$  是  $A$  的属于 3 的特征向量. 又根据题意,  $\alpha_1, \alpha_2$  是矩阵  $A$  的属于  $\lambda = 0$  的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵  $A$  的特征值是 3, 0, 0.

特征值  $\lambda = 3$  的特征向量为  $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$ ;

特征值  $\lambda = 0$  的特征向量为  $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T, k_1, k_2$  不全为零.

(2) 先对  $\alpha_1, \alpha_2$  进行施密特正交化,

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化得 } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 令}$$

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

则  $Q^T A Q = \Lambda$ .

(3) 由 (2) 知  $Q^T A Q = \Lambda$ , 那么  $A = Q \Lambda Q^T, A - \frac{3}{2}E = Q^T \left( \Lambda - \frac{3}{2}E \right) Q$ , 则

$$\begin{aligned} \left( A - \frac{3}{2}E \right)^6 &= Q^T \left( \Lambda - \frac{3}{2}E \right)^6 Q = Q^T \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & & \\ & -\frac{3}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^6 Q \\ &= \left( \frac{3}{2} \right)^6 Q^T E Q = \left( \frac{3}{2} \right)^6 E. \end{aligned}$$

22.(本题满分 13 分)




随机变量  $X$  的概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 令  $Y = X^2$ ,  $F(x, y)$  为二维

随机变量  $(X, Y)$  的分布函数, 求:

(1)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ;

(2)  $\text{Cov}(X, Y)$ ;

(3)  $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ .

 解: (1)  $Y$  的分布函数为  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$ . 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ . 当  $0 < y < 1$  时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X < 0) + P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{4}\sqrt{y} = \frac{3}{4}\sqrt{y}. \end{aligned}$$

当  $y \geq 4$  时,  $F_Y(y) = 1$ , 因此  $Y$  的概率密度  $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(2)  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$ , 其中

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4}, \quad E(X^2) = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{5}{6}, \\ E(X^3) &= \int_{-1}^0 \frac{x^3}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

(3)

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4\right) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right) \\ &= P\left(X \leq -\frac{1}{2}, -2 \leq X \leq 2\right) = P\left(-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

23.(本题满分 13 分)


设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  是未知参数 ( $0 <$

$\theta < 1$ ),  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 记  $N$  为样本值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中小于 1 的个数.



(1) 求  $\theta$  的矩估计;

(2) 求  $\theta$  的最大似然估计.

 **解:** (1) 总体均值为  $\bar{X} = \int_0^1 \theta x \, dx + \int_1^2 (1-\theta)x \, dx = \frac{3}{2} - \theta$ , 令样本均值  $\bar{X} = \frac{3}{2} - \theta$ , 解得  $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$ , 即  $\theta$  的矩估计为  $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$ .

(2) 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N},$$

取对数得  $\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n-N) \ln(1-\theta)$ , 令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0,$$

解得  $\theta = \frac{N}{n}$ , 因此  $\theta$  的最大似然估计为  $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$ .



## 第2章 2007年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 ( )

- A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$       C.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

解: 当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$1 - e^{\sqrt{x}} = -\sqrt{x}, \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln \left( \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 + 1 \right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, 1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x.$$

因此选 B.

2. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 下列命题错误的是 ( )

- A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$   
 B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在, 则  $f(0) = 0$   
 C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则  $f'(0) = 0$   
 D. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0) = 0$

解: A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由  $f(x)$  的连续性知  $f(0) = 0$ .

若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 则

$$f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

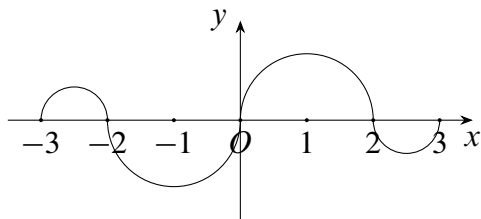
因此 C 正确. 可举反例  $f(x) = |x|$  说明 D 选项错误, 选 D.

3. 如图, 连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2], [2, 3]$

上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间  $[-2, 0], [0, 2]$  的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 则下列结论正确的是

( )

- A.  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$       B.  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$   
 C.  $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$       D.  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



第 3 题图

- 解: 根据定积分的几何意义知,  $F(2)$  是半径为 1 的半圆面积,  $F(2) = \frac{1}{2}\pi$ ,  $F(3)$  是两个半圆的面积之差,  $F(3) = \frac{1}{2}\pi \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}F(2)$ ,

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x) dx = - \int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数  $f(x, y)$  连续, 则二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$  等于 ( )

A.  $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$       B.  $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$   
C.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$       D.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

- 解: 积分区域  $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y < 1$ , 也可表示为

$$0 \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi,$$

因此  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dy$ , 选 B.

5. 设某商品的需求函数为  $Q = 160 - 2P$ , 其中  $Q, P$  分别表示需求量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是 ( )  
A. 10      B. 20      C. 30      D. 40

- 解: 商品需求弹性的绝对值为  $\left| \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \right| = \left| \frac{-2P}{160 - 2P} \right| = 1 \Rightarrow P = 40$ , 选 D.

6. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  渐近线的条数为 ( )  
A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

- 解: 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = \infty$ , 所以  $x = 0$  为垂直渐近线. 又  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0$ , 所以  $y = 0$  为水平渐近线. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

所以有斜渐近线  $y = x$ , 选 D.

7. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )  
A.  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$       B.  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$   
C.  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$       D.  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$



✎ 解: 不难知 A 中三个向量的和为  $\mathbf{0}$ , 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

8. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则 A 与 B ( )

- A. 合同, 且相似                      B. 合同, 但不相似  
C. 不合同, 但相似                      D. 既不合同, 也不相似

✎ 解: 由  $|\lambda E - A| = 0$  得 A 的特征值为 0, 3, 3, 而 B 的特征值为 0, 1, 1, 从而 A 与 B 合同而不相似, 选 B.

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次设计射击命中目标的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ( )

- A.  $3p(1-p)^2$               B.  $6p(1-p)^2$               C.  $3p^2(1-p)^2$               D.  $6p^2(1-p)^2$

✎ 解: “第 4 次射击恰好第 2 次命中” 表示第 4 次射击命中目标, 前 3 次中只有 1 次命中目标, 因此所求的概率为  $C_3^1 p^2 (1-p)^2 = 3p^2 (1-p)^2$ , 选 C.

10. 设随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且  $X$  与  $Y$  不相关,  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$  分别表示  $X, Y$  的概率密度, 则在  $Y = y$  的条件下,  $X$  的条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$  为 ( )

- A.  $f_X(x)$               B.  $f_Y(y)$               C.  $f_X(x)f_Y(y)$               D.  $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

✎ 解: 因为  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且  $X$  与  $Y$  不相关, 故  $X$  与  $Y$  相互独立, 于是  $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ , 因此选 A.

二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

✎ 解: 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $2x$  是比  $x^3$  高阶的无穷大, 而  $\sin x + \cos x$  有界, 根据无穷小乘以有界量为无穷小知原极限为 0.

12. 设函数  $y = \frac{1}{2x + 3}$ , 则  $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

✎ 解:  $y = (2x + 3)^{-1}$ ,  $y' = -1 \cdot 2(2x + 3)^{-2}$ ,  $y'' = -1 \cdot (-2)2^2(2x + 3)^{-3}$ , 归纳可知  $y^{(n)} = (-1)^n n! 2^n (2x + 3)^{-n-1}$ , 从而  $y^{(n)}(0) = \frac{1}{3} (-1)^n n! \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .



13. 设  $f(u, v)$  是二元可微函数,  $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{y}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$ , 于是有

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left(-\frac{y}{x^2} f'_1 + \frac{1}{y} f'_2\right) - y \left(\frac{1}{x} f'_1 - \frac{x}{y^2} f'_2\right) = -\frac{2y}{x} f'_1 + \frac{2x}{y} f'_2.$$

14. 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$  满足  $y|_{x=1} = 1$  的特解为  $y =$ \_\_\_\_\_.

解: 令  $y = xu$ , 则  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ , 代入原方程得

$$u + x \frac{du}{dx} = u - \frac{1}{2} u^3,$$

变量分离解得  $\frac{1}{u^2} = \frac{x^2}{y^2} = \ln|x| + C$ , 代入  $y|_{x=1} = 1$  得  $C = 1$ . 因此  $y^2 = \frac{x^2}{\ln|x| + 1}$ , 注意

到  $y(1) > 0$ , 因此特解为  $y = \frac{|x|}{\sqrt{\ln|x| + 1}}$ .

15. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为\_\_\_\_\_.

解: 直接计算可得  $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 故  $r(A^3) = 1$ .

16. 在区间  $(0, 1)$  中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于  $\frac{1}{2}$  的概率为\_\_\_\_\_.

解: 这是一个几何概型, 设  $x, y$  为所取的两个数, 则样本空间  $\Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$ , 记

$$A = \left\{ (x, y) \in \Omega, |x - y| < \frac{1}{2} \right\}.$$

于是所求概率为  $P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3}{4}$ , 其中  $S_A, S_\Omega$  分别表示  $A$  与  $\Omega$  的面积.

### 三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17. (本题满分 10 分)

设函数  $y = y(x)$  由方程  $y \ln y - x + y = 0$  确定, 试判断曲线  $y = y(x)$  在点  $(1, 1)$  附近的凹凸性.

解: 原方程两边对  $x$  求导得

$$y' \ln y - 1 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2 + \ln y},$$



因此  $y'(1) = \frac{1}{2}$ . 上式两边再对  $x$  求导得

$$y'' = -\frac{1}{(2 + \ln y)^2} \frac{y'}{y} = -\frac{y'}{y(2 + \ln y)^2}.$$


在点  $(1, 1)$  处,  $y''(1) = -\frac{1}{8} < 0$ , 且  $y''$  在  $(1, 1)$  附近连续, 因此  $y'' < 0$  在此点的邻域内成立, 所以  $y = y(x)$  在点  $(1, 1)$  附近是凸的.

### 18.(本题满分 11 分)

设二元函数

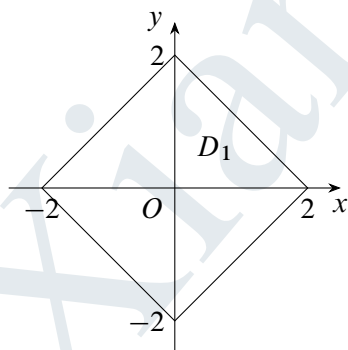
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2 \end{cases},$$

计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$ .

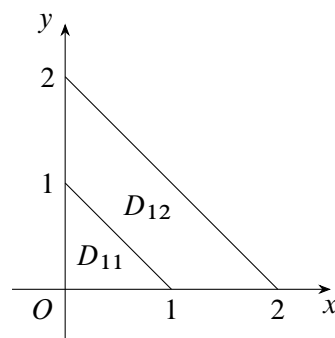
 **解:** 区域  $D$  如图 (1) 所示, 它关于  $x, y$  轴对称,  $f(x, y)$  关于  $x, y$  均为偶函数, 得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中  $D_1$  是  $D$  在第一象限的部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将  $D_1$  分成如图 (2) 所示的两部分:  $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$ , 其中

$$D_{11} : |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \quad D_{12} : 1 \leq |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

于是  $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$ , 其中

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$



$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

### 19.(本题满分 11 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数存在相等的最大值,  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

**证明:** 令  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 由题意有  $F(a) = F(b) = 0$ . 又  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内具有相等的最大值, 不妨设存在  $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$  使得

$$f(x_1) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x), g(x_2) = M = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$

若  $x_1 = x_2$ , 令  $c = x_1$ , 则  $F(c) = 0$ . 若  $x_1 < x_2$ , 因  $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$ , 从而存在  $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$ , 使得  $F(c) = 0$ .

在区间  $[a, c], [c, b]$  上分别利用罗尔定理知, 存在  $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再对  $F'(x)$  在区间  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用罗尔定理, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 有  $F''(\xi) = 0$ , 即  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

### 20.(本题满分 10 分)

将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$  展开成  $x - 1$  的幂级数, 并指出其收敛区间.

**解:** 令  $t = x - 1$ , 则

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^2 - 3x - 4} &= \frac{1}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{1}{(t - 3)(t + 2)} \\
 &= \frac{1}{5} \left( \frac{1}{t - 3} - \frac{1}{t + 2} \right) = -\frac{1}{15} \frac{1}{1 - \frac{t}{3}} - \frac{1}{10} \frac{1}{1 + \frac{t}{2}} \\
 &= -\frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{3} \right)^n - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{t}{2} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{1}{15} \left( \frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{10} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] (x - 1)^n.
 \end{aligned}$$

其收敛区间满足  $|x - 1| < 3, |x - 1| < 2$ , 即收敛区间为  $(-1, 3)$ .



21.(本题满分 11 分)


设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求  $a$  的值及所有公共解.

 **解:** 因为方程 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad (3)$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵  $\bar{A}$  进行初等行变换得

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array} \right).$$

于是当  $a = 1$  时, 有  $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ , 方程组 (3) 有解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

方程组是齐次的, 基础解系为  $(-1, 0, 1)^T$ , 所以 (1)、(2) 的公共解为  $k(-1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}$ .

当  $a = 2$  时,  $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ , 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

故方程 (3) 的解为  $(0, 1, -1)^T$ , 即 (1)、(2) 的公共解为  $(0, 1, -1)^T$ .

22.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ .  $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda_1$  的一个特征向量, 记  $B = A^5 - 4A^3 + E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.



(1) 验证  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的特征向量, 并求  $B$  的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵  $B$ .

 解: (1) 由  $A\alpha_1 = \alpha_1$  得  $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = \alpha_1, A^5\alpha_1 = \alpha_1$ , 故

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^4 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^4\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1.$$

因此  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的属于特征值  $-2$  的特征向量.

因为  $B = A^5 - 4A^4 + E$ , 及  $A$  的三个特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ , 得  $B$  的 3 个特征值为  $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$ .

设  $\alpha_2, \alpha_3$  为  $B$  的属于  $\mu_2 = \mu_3 = 1$  的两个线性无关的特征向量, 又  $A$  为对称矩阵, 则  $B$  也为对称矩阵, 因此  $\alpha_1$  与  $\alpha_2, \alpha_3$  正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_3 = 0.$$

所以  $\alpha_2, \alpha_3$  可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

其基础解系为  $(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$ , 故可取  $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$ , 即  $B$  的全部特征向量为  $k_1(1, -1, 1)^T, k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$ , 其中  $k_1 \neq 0, k_2, k_3$  不全为零.

$$(2) \text{ 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求  $P(X > 2Y)$ ;

(2) 求  $Z = X + Y$  的概率密度.

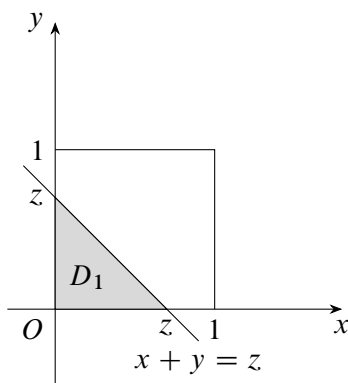


解: (1)  $P(X > 2Y) = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y}^1 (2-x-y) dx = \frac{7}{24}.$

(2) 先求  $Z$  的分布函数:

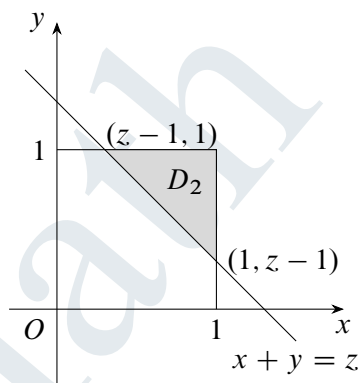
$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ;



$$0 \leq z < 1$$

当  $0 \leq z < 1$  时,  $F_Z(z) = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^z dy \int_0^{z-y} (2-x-y) dx = z^2 - \frac{1}{3}z^3;$



$$1 \leq z < 2$$

当  $1 \leq z < 2$  时,  $F_Z(z) = 1 - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 (2-x-y) dx = 1 - \frac{1}{3}(2-z)^3;$

当  $z \geq 2$  时,  $F_Z(z) = 1$ . 故  $Z = X + Y$  的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ (2-z)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

#### 24.(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为


$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) 未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  是样本均值.



(1) 求参数  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ ;

(2) 判断  $4\bar{X}^2$  是否为  $\theta^2$  的无偏估计量, 并说明理由.

 解: (1) 总体均值

$$E(X) = \int_0^{\theta} \frac{x}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}(1+\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}.$$

样本均值为  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 令  $\bar{X} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}$ , 解得  $\theta = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$ , 即  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$ .

(2)  $E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2] = 4\left[\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right]$ , 而

$$E(X^2) = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_{\theta}^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6},$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{\theta^2}{3} + \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}\theta^2 - \frac{1}{12}\theta + \frac{5}{48}.$$

故  $E(4\bar{X}^2) = 4\left(\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right) = \frac{3n+1}{3n}\theta^2 + \frac{3n-1}{3n}\theta + \frac{3n+5}{12n} \neq \theta^2$ , 所以  $4\bar{X}^2$  不是  $\theta^2$  的无偏估计量.

### 第3章 2008年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上连续, 则  $x = 0$  是函数  $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  的 ( )  
 A. 跳跃间断点      B. 可去间断点      C. 无穷间断点      D. 震荡间断点

解: 由洛必达法则知  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 因此  $x = 0$  是  $g(x)$  的可去间断点, 选 B.

2. 如图, 曲线段的方程为  $y = f(x)$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上有连续的导数, 则定积分

$$\int_0^a x f'(x) dx \text{ 等于}$$

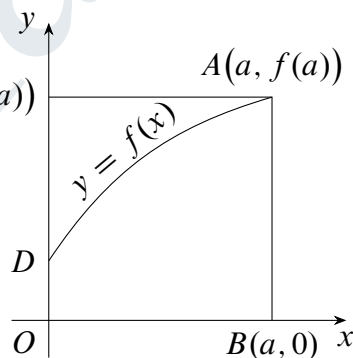
( )

- A. 曲边梯形  $ABOD$  的面积  
 B. 梯形  $ABOD$  的面积  
 C. 曲边三角形  $ACD$  的面积  
 D. 三角形  $ACD$  的面积

解: 由分部积分知

$$\int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x df(x) = af(a) - \int_0^a f(x) dx,$$

其中  $af(a)$  是矩形面积,  $\int_0^a f(x) dx$  为曲边三角形  $ACD$  的面积, 选 C.



第2题图

3. 已知  $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ , 则 ( )  
 A.  $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$  都存在      B.  $f'_x(0, 0)$  不存在,  $f'_y(0, 0)$  存在  
 C.  $f'_x(0, 0)$  不存在,  $f'_y(0, 0)$  存在      D.  $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$  都不存在

解: 由偏导数的定义得

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{0^2+y^4}} - 1}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2} - 1}{y - 0} = 0,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x^2+0^4}} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\sqrt{x^2+0^4}} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1.$$

因此  $f'_x(0, 0)$  不存在, 选 C.

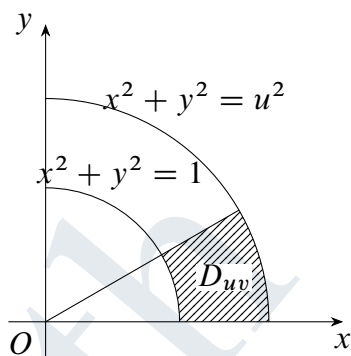
4. 设函数  $f(x)$  连续, 若  $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , 其中区域  $D_{uv}$  为图中阴影部

- 分, 则  $\frac{\partial F}{\partial u} =$  ( )
- A.  $vf(u^2)$       B.  $\frac{v}{u}f(u^2)$       C.  $vf(u)$       D.  $\frac{v}{u}f(u)$

解: 利用极坐标可得

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr, \end{aligned}$$

所以  $\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2)$ , 选 A.



第 4 题图

5. 设  $A$  为  $n$  阶非零矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 若  $A^3 = O$ , 则 ( )
- A.  $E - A$  不可逆,  $E + A$  不可逆      B.  $E - A$  不可逆,  $E + A$  可逆
- C.  $E - A$  可逆,  $E + A$  可逆      D.  $E - A$  可逆,  $E + A$  不可逆

解: 因为  $A^3 = O$ , 所以  $A$  的特征值  $\lambda$  满足  $\lambda^3 = 0$ , 即  $\lambda = 0$ . 因此  $E - A$  和  $E + A$  的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

6. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则在实数域上与  $A$  合同的矩阵为 ( )
- A.  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$       C.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解:  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$ , 则  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ ,  
记  $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ , 则

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0,$$

则  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ , 正负关系指数相同, 选 D.

7. 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 且  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $Z = \max\{X, Y\}$  的分布函数为 ( )
- A.  $F^2(x)$       B.  $F(x)F(y)$
- C.  $1 - [1 - F(x)]^2$       D.  $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

解: 由分布函数的定义可得  $Z$  的分布函数为

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\max\{X, Y\} \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x)$$



$$= P(X \leq x)P(Y \leq x) = F(x)F(x) = F^2(x),$$

选 A.

8. 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 4)$ , 且相关系数  $\rho_{XY} = 1$ , 则 ( )

A.  $P\{Y = -2X - 1\} = 1$

B.  $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

C.  $P\{Y = -2X + 1\} = 1$

D.  $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

解: 由于  $X, Y$  都服从正态分布, 且  $\rho_{XY} = 1$ , 所以一定存在常数  $a, b$  使得  $P(Y = aX + b) = 1$ , 且  $a > 0$ . 那么有  $E(Y) = aE(X) + b$ , 即  $1 = 0 + b, b = 1$ . 再由  $4 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2$  可知  $a = 2$ , 选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则  $c =$ \_\_\_\_\_.

解: 由条件知  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \Rightarrow c^2 + 1 = \frac{2}{c}, c = 1$ .

10. 设  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x + x^3}{1 + x^4}$ , 则  $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx =$ \_\_\_\_\_.

解: 由题意知  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{\frac{1}{x} + x}{\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - 2}$ , 所以  $f(t) = \frac{t}{t^2 - 2}$ , 于是

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

11. 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则  $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ \_\_\_\_\_.

解:  $\iint_D (x^2 - y) dx dy = \iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 2\pi r dr = \frac{\pi}{2}$ .

12. 微分方程  $xy' + y = 0$  满足条件  $y(1) = 1$  的解是  $y =$ \_\_\_\_\_.

解: 由  $xy' + y = (xy)' = 0$  知  $xy = C$ , 代入  $y(1) = 1$  知  $C = 1$ , 所以方程的解为  $y = \frac{1}{x}$ .

13. 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 1, 2, 2,  $E$  为 3 阶单位矩阵, 则  $|4A^{-1} - E| =$ \_\_\_\_\_.

解:  $A^{-1}$  的特征值为  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ,  $4A^{-1} - E$  的特征值为 3, 1, 1, 因此  $|4A^{-1} - E| = 3$ .

14. 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的泊松分布, 则  $P\{X = EX^2\} =$ \_\_\_\_\_.

解: 因为  $X \sim P(1)$ , 所以  $EX = DX = 1$ , 于是  $EX^2 = (EX)^2 + DX = 2$ ,  $P(X = EX^2) = P(X = 2) = \frac{1}{2e}$ .



15.(本题满分 9 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$ .

解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left( \frac{\sin x - x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{\sin x - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设  $z = z(x, y)$  是由方程  $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$  所确定的函数, 其中  $\varphi$  具有 2 阶导数且  $\varphi' \neq -1$ .

(1) 求  $dz$ ;

(2) 记  $u(x, y) = \frac{1}{x - y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

解: (1) 在方程  $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$  两边求全微分得

$$2x dx + 2y dy - dz = \varphi'(x + y + z) \cdot (dx + dy + dz),$$

$$\text{解得 } dz = \frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1} dx + \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1} dy.$$

$$(2) u(x, y) = \frac{1}{x - y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{x - y} \left( \frac{-\varphi' + 2x}{\varphi' + 1} - \frac{-\varphi' + 2y}{\varphi' + 1} \right) = \frac{2}{\varphi' + 1}, \text{ 于是}$$

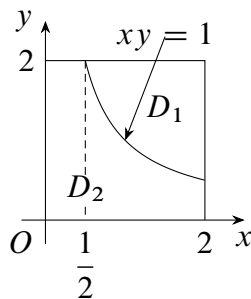
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2\varphi'' \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(\varphi' + 1)^2} = -\frac{2\varphi'' \cdot \left(1 + \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'}\right)}{(\varphi' + 1)^2} = -\frac{2\varphi'' \cdot (1 + \varphi' + 2x - \varphi')}{(\varphi' + 1)^3}.$$

17.(本题满分 11 分)

计算  $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ .

解: 曲线  $xy = 1$  将区域  $D$  分成如图所示的两个区域  $D_1$  和  $D_2$ , 于是

$$\begin{aligned} &\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \max\{xy, 1\} dx dy + \iint_{D_2} \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$



第 18 题图

18.(本题满分 10 分)

设  $f(x)$  是连续函数,

(1) 利用定义证明函数  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  可导, 且  $F'(x) = f(x)$ ;

(2) 当  $f(x)$  是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数  $G(x) = 2 \int_0^x f(t)dt - x \int_0^2 f(t)dt$  也是以 2 为周期的周期函数.

证明: (1) 对任意的  $x$ , 由于函数  $f(x)$  连续, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x). \end{aligned}$$

因此  $F(x)$  可导, 且  $F'(x) = f(x)$ .

(2) 令  $g(x) = G(x + 2) - G(x) = 2 \int_0^{x+2} f(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt - 2 \int_0^x f(t)dt$ , 则

$$g'(x) = 2f(x + 2) - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0,$$

因此  $g(x)$  为常函数,  $g(x) = g(0) = 2 \int_0^2 f(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0$ , 即  $G(x + 2) = G(x)$ , 这说明  $G(x)$  是以 2 为周期的周期函数.

### 19.(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为  $r = 0.05$ , 并依年复利计算, 某基金会希望通过存款  $A$  万元, 实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元,  $\dots$ , 第  $n$  年提取  $(10 + 9n)$  万元, 并能按此规律一直提取下去, 问  $A$  至少应为多少万元?

解: 设  $A_n$  为第  $n$  年的提现值, 则  $A_n = \frac{10 + 9n}{(1 + r)^n}$ , 故  $A$  至少应为

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + 9n}{(1 + r)^n} \\ &= 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + r)^n} + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1 + r)^n} = 200 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{1 + r} \right)^n. \end{aligned}$$

注意到  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ , 所以  $S\left(\frac{1}{1+r}\right) = S\left(\frac{1}{1.05}\right) = 420$ , 故至少应存入  $200 + 9 \times 420 = 3980$  万元存款.

### 20.(本题满分 12 分)




设  $n$  元线性方程组  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式  $|A| = (n+1)a^n$ ;

(2) 当  $a$  为何值时, 该方程组有唯一解, 并求  $x_1$ ;

(3) 当  $a$  为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

 解: (1) 从第 2 行开始, 第  $k$  行减去上一行的  $\frac{k}{k+1}$  倍,  $k = 2, 3, \dots, n$ , 可得

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n}{n-1}a \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n.$$

(2) 由克拉默法则知当  $a \neq 0$  时,  $|A| \neq 0$ , 此时方程组有唯一解, 且  $x_1 = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}$ .


(3) 当  $a = 0$  时, 容易得到  $r(A) = r(Ab) = n-1$ , 方程组有无穷多解, 此时的通解为  $x = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, \dots, 0)^T, k \in \mathbb{R}$ .

## 21. (本题满分 10 分)

设  $A$  为 3 阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $A$  的分别属于特征值  $-1, 1$  的特征向量, 向量  $\alpha_3$  满足  $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$ .

(1) 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;

(2) 令  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , 求  $P^{-1}AP$ .

 解: (1) 设存在数  $k_1, k_2, k_3$  使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \quad (1)$$

用  $A$  左乘 (1) 两边, 并由  $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$  得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \quad (2)$$

(1) - (2), 得

$$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的属于不同特征值的特征向量, 所以  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 从而  $k_1 = k_3 = 0$ . 代入 (1) 得  $k_2\alpha_2 = \mathbf{0}$ , 由于  $\alpha_2 \neq \mathbf{0}$ , 所以  $k_2 = 0$ , 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

(2) 由题设, 可得

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 (1) 知  $P$  为可逆矩阵, 从而  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

22.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  的概率分布为  $P(X=i) = \frac{1}{3} (i = -1, 0, 1)$ ,  $Y$  的

概率密度为  $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 记  $Z = X + Y$ .

(1) 求  $P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right)$ ;

(2) 求  $Z$  的概率密度.

解: (1)

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right) &= P\left(X + Y \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right) \\ &= P\left(Y \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right) = P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2)  $Z$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(X + Y \leq z, X = -1) + P(X + Y \leq z, X = 0) + P(X + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z + 1, X = -1) + P(Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq z - 1, X = 1) \\ &= P(Y \leq z + 1)P(X = -1) + P(Y \leq z)P(X = 0) + P(Y \leq z - 1)P(X = 1) \\ &= \frac{1}{3}[P(Y \leq z - 1) + P(Y \leq z) + P(Y \leq z + 1)] \\ &= \frac{1}{3}[F_Y(z + 1) + F_Y(z) + F_Y(z - 1)], \end{aligned}$$

于是  $Z$  的概率密度为  $f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .




23.(本题满分 11 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体为  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(1) 证明  $T$  是  $\mu^2$  的无偏估计量;

(2) 当  $\mu = 0, \sigma = 1$  时, 求  $DT$ .

 解: (1) 因为

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n} E(S^2) \\ &= (E\bar{X})^2 + D(\bar{X}) - \frac{1}{n} E(S^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2, \end{aligned}$$

所以  $T$  是  $\mu^2$  的无偏估计量.

(2) 当  $\mu = 0, \sigma = 1$  时, 由于  $\bar{X}$  与  $S^2$  独立, 则有

$$\begin{aligned} DT &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} D(S^2) \\ &= \frac{1}{n^2} D(\sqrt{n}\bar{X})^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} D[(n-1)S^2] \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot 2 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

## 第4章 2009年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数  $f(x) = \frac{x - x^3}{\sin \pi x}$  的可去间断点的个数为 ( )  
 A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 无穷多个

解: 显然  $f(x)$  的间断点为所有整数, 且  $x = 0, x = \pm 1$  为可去间断点, 其他为无穷间断点, 选 C.

2. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  是等价无穷小, 则 ( )  
 A.  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$                       B.  $a = 1, b = \frac{1}{6}$   
 C.  $a = -1, b = -\frac{1}{6}$                       D.  $a = -1, b = \frac{1}{6}$

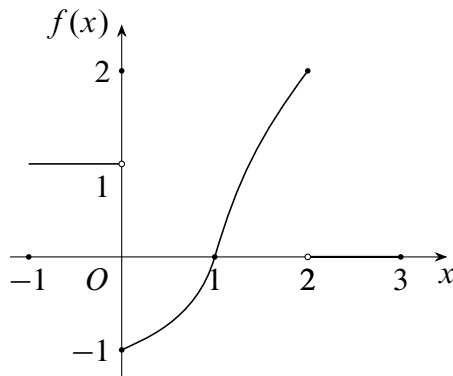
解: 首先当  $x \rightarrow 0$  时,  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx) \sim -bx^3$ , 利用泰勒公式得

$$f(x) = x - \sin ax = x - \left( ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3) \right) = (1 - a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3),$$

由  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小知  $1 - a = 0, \frac{a^3}{6} = -b$ , 因此  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ , 选 A.

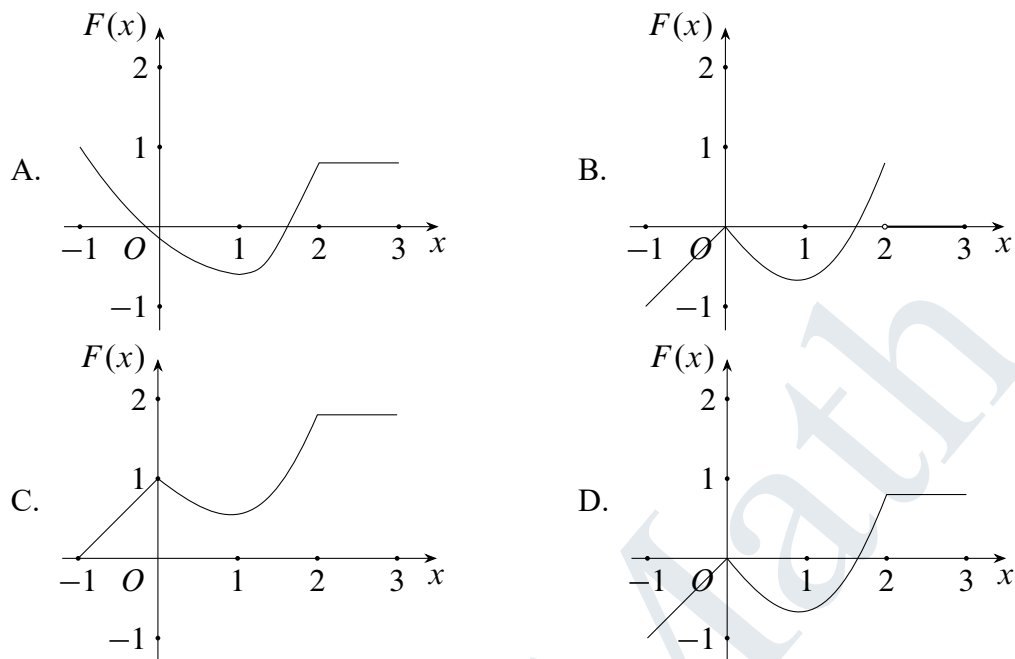
3. 使不等式  $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$  成立的  $x$  的范围是 ( )  
 A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, \frac{\pi}{2})$                       C.  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$                       D.  $(\pi, +\infty)$

解: 令  $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \ln x$ , 则当  $x > 0$  时,  $f'(x) = \frac{\sin x - 1}{x} \leq 0$ , 因此  $f(x)$  单调递减, 且  $f(1) = 0$ , 因此当  $0 < x < 1$  时  $f(x) > 0$ , 当  $x > 1$  时  $f(x) < 0$ , 选 A.



第4题图

4. 设函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 3]$  上的图形如图所示, 则函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的图形为 ( )



**解:** 首先  $F(x)$  是连续函数, 排除 B 选项. 当  $-1 < x < 0$  时,  $F'(x) = f(x) = 1$  且此时  $F(x) < 0$ , 排除 A, C 选项, 选 D.

5. 设  $A, B$  均为 2 阶矩阵,  $A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵, 若  $|A| = 2, |B| = 3$ , 则分块矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  的伴随矩阵为 ( )

A.  $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$  B.  $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$  C.  $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$  D.  $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

**解:** 由  $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$  知矩阵  $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$  可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. 设  $A, P$  均为 3 阶矩阵,  $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^T A Q$  为 ( )

A.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  B.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  C.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



解: 由题意可知把  $P$  的第二列加到第一列上得到  $Q$ , 因此有  $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$ . 记  $E_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 于是

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= [P E_{21}(1)]^T A [P E_{21}(1)] = E_{21}^T(1) P^T A P E_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此选 A.

7. 设事件  $A$  与事件  $B$  互不相容, 则 ( )

- A.  $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$                       B.  $P(AB) = P(A)P(B)$   
C.  $P(A) = 1 - P(B)$               D.  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$

解: 因为  $A$  与事件  $B$  互不相容, 即  $A \cap B = \emptyset$ , 于是  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1$ , 选 D, 其他选项容易判断都不对.

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X$  服从标准正态分布  $N(0, 1)$ ,  $Y$  的概率分布为  $P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$ . 记  $F_Z(z)$  为随机变量  $Z = XY$  的分布函数, 则函数  $F_Z(z)$  的间断点个数为 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

解:  $Z$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(Y = 0) P(XY \leq z | Y = 0) + P(Y = 1) P(XY \leq z | Y = 1) \\ &= \frac{1}{2} P(0 \leq z | Y = 0) + \frac{1}{2} P(X \leq z | Y = 1) \\ &= \frac{1}{2} P(0 \leq z) + \frac{1}{2} P(X \leq z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \Phi(z), & z < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(z), & z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此  $F_Z(z)$  在  $z = 0$  处有一个跳跃间断点, 选 B.


## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$


解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1 - e^{\cos x - 1})}{\frac{1}{3}x^2} = 3e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{3e}{2}.$




10. 设  $z = (x + e^y)^x$ , 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$  \_\_\_\_\_.

 解: 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = (x + e^y)^x \left[ \ln(x + e^y) + \frac{x}{x + e^y} \right]$ , 所以  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 2 \ln 2 + 1$ .

11. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_.


 解: 记  $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 [e^{n+1} - (-1)^{n+1}]}{(n+1)^2 [e^n - (-1)^n]} = e$ , 因此幂级数的收敛半径为  $\frac{1}{e}$ .

12. 设某产品的需求函数  $Q = Q(p)$ , 对其价格  $p$  的弹性  $\varepsilon_p = 0.2$ , 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 \_\_\_\_\_ 元.


 解: 收益函数  $R = pQ$ , 则  $\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp}$ . 由题意有  $\varepsilon_p = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = 0.2$ , 因此  $p \frac{dQ}{dp} = -0.2Q$ , 于是  $\frac{dR}{dp} = -0.2Q + Q = 0.8Q$ . 代入  $Q = 10000$ . 可知当价格增加 1 元会使产品收益增加 8000 元.

13. 设  $\alpha = (1, 1, 1)^T$ ,  $\beta = (1, 0, k)^T$ . 若矩阵  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

 解: 相似矩阵有相同的迹, 则  $\text{tr}(\alpha\beta^T) = 3 = \text{tr}(\beta^T\alpha) = \beta^T\alpha = 1 + k$ , 因此  $k = 2$ .

 注: 当矩阵  $A$  与  $B$  可以互乘时,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , 矩阵  $AB$  与  $BA$  的所有非零特征值及其重数都相同.


14. 设  $X_1, X_2, \dots, X_m$  为来自总体  $B(n, p)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别为样本均值和样本方差. 记统计量  $T = \bar{X} - S^2$ , 则  $ET =$  \_\_\_\_\_.

 解:  $ET = E(\bar{X} - S^2) = E\bar{X} - E(S^2) = np - np(1-p) = np^2$ .

### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 9 分)

求二元函数  $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$  的极值.

 解: 令  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$ , 解得唯一驻点为  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ . 由于

$$A = f''_{xx} \left(0, \frac{1}{e}\right) = 2(2 + y^2) \Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = 2 \left(2 + \frac{1}{e^2}\right),$$


$$B = f''_{xy} \left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy \Big|_{\left(0, \frac{1}{e}\right)} = 0,$$

$$C = f''_{yy} \left( 0, \frac{1}{e} \right) = \left( 2x^2 + \frac{1}{y} \right) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e,$$

所以  $AC - B^2 = -2e \left( 2 + \frac{1}{e^2} \right) < 0$ , 且  $A > 0$ , 所以  $f(x, y)$  的唯一极小值为  $f \left( 0, \frac{1}{e} \right) = -\frac{1}{e}$ .

16.(本题满分 10 分)


计算不定积分  $\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx \ (x > 0)$ .

 解: 令  $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}} > 1$ , 则  $x = \frac{1}{t^2 - 1}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx &= \int \ln(1+t) d \left( \frac{1}{t^2 - 1} \right) \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2 - 1} - \int \frac{1}{(t^2 - 1)(t + 1)} dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2 - 1} - \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2 - 1} - \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)} + C \\ &= x \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) \\ &\quad - \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} + C. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D (x-y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$ .

 解: 方法一 积分区域用极坐标表示为  $D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2(\cos \theta + \sin \theta) \right\}$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

方法二 作换元  $u = x-1, v = y-1$ , 则  $dx = du, dy = dv$ , 积分区域化为  $D_1 = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$ , 于是

$$\iint_D (x-y) dx dy = \iint_{D_1} (u-v) du dv = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr = -\frac{8}{3}.$$



### 18.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

(2) 证明: 若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 在  $(0, \delta)(\delta > 0)$  内可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 则  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

证明: (1) 令  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ , 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left( f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \right) - \left( f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a \right) \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0, \end{aligned}$$

因此由罗尔定理知存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ , 即  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ .

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf'(\xi)}{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = A.$$

注: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

### 19.(本题满分 10 分)

设曲线  $y = f(x)$ , 其中  $f(x)$  是可导函数, 且  $f(x) > 0$ . 已知曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = 0, x = 1$  及  $x = t(t > 1)$  所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的  $\pi t$  倍, 求该曲线的方程.

解: 旋转体的体积为  $V = \pi \int_1^t f^2(x)dx$ , 曲边梯形的面积为  $S = \int_1^t f(x)dx$ , 由题意可知

$$V = \pi t S \Rightarrow \pi \int_1^t f^2(x)dx = \pi t \int_1^t f(x)dx \Rightarrow \int_1^t f^2(x)dx = t \int_1^t f(x)dx.$$


上式两边对  $t$  求导得  $f^2(t) = \int_1^t f(x)dx + tf(t)$ , 令  $t = 1$  可得  $f(1) = 1$ . 继续对  $t$  求导得  $2f(t)f'(t) = f(t) + f(t) + tf'(t)$ , 化简可得  $(2f(t) - t)f'(t) = 2f(t)$ , 这是  $t$  关于  $y$  的一阶线性方程  $\frac{dt}{dy} + \frac{1}{2y}t = 1$ , 解得  $t = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$ . 由  $f(1) = 1$  可知  $C = \frac{1}{3}$ , 因此  $t = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$ ,

该曲线的方程为  $2y + \frac{1}{\sqrt{y}} - 3x = 0$ .

### 20.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2, \xi_3$ ;  
 (2) 对 (1) 中的任意向量  $\xi_2, \xi_3$ , 证明  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

 解: (1) 对增广矩阵  $(A, \xi_1)$  作初等行变换得

$$(A \ \xi_1) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

方程组  $Ax = \xi_1$  的通解为  $x = (0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$ , 从而  $\xi_2 = (-k, k, 1 - 2k)^T$ ,  $k$  为任意常数.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 对增广矩阵 } (A^2, \xi_1) \text{ 作初等行变换得}$$

$$(A^2, \xi_1) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

于是方程组  $A^2x = \xi_1$  的通解为  $x_1 = -\frac{1}{2} - u, x_2 = u, x_3 = v$ , 即  $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$ , 其中  $u, v$  为任意常数.

(2) 对任意的常数  $k, u, v$  有


$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量  $\xi_2, \xi_3$ , 恒有  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

## 21.(本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

- (1) 求二次型  $f$  的矩阵的所有特征值;  
 (2) 若二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

 解: (1) 二次型  $f$  的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$ , 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a+1))(\lambda - (a-2)),$$



所以  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$ .

(2) 因为二次型  $f$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 说明正惯性指数  $p = 2$ , 负惯性指数  $q = 0$ , 因此矩阵  $A$  的特征值为两正一零, 显然  $a - 2 < a < a + 1$ , 因此必有  $a = 2$ .

## 22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(1) 求条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ ;

(2) 求条件概率  $P(X \leq 1|Y \leq 1)$ .

 解: (1)  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x e^{-y} dy, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(2)  $Y$  的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{+\infty} e^{-x} dx, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

因此条件概率

$$\begin{aligned} P(X \leq 1, Y \leq 1) &= \frac{P(X \leq 1, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{\int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 f(x, y) dx dy}{\int_0^1 e^{-y} dy} \\ &= \frac{\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x} dy}{1 - e^{-1}} = \frac{e - 2}{e - 1}. \end{aligned}$$

## 23.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以  $X, Y, Z$  分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求  $P(X = 1|Z = 0)$ ;

(2) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布.



解: (1)  $P(X = 1|Z = 0) = \frac{P(X = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{C_{26}^1 \times \frac{1}{3}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{9}.$

(2) 由题意知  $X, Y$  的所有可能取值均为  $0, 1, 2$ .

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}, \quad P(X = 0, Y = 1) = 2 \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9},$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad P(X = 1, Y = 0) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 2, Y = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = 0.$$

因此  $(X, Y)$  的概率分布为


$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0




## 第5章 2010年考研数学三


一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$ , 则  $a =$  ( )  
A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3


 解: 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} (1 - e^x) + a e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + a = -1 + a = 1$  可得  $a = 2$ , 选 C.

2. 设  $y_1, y_2$  是一阶线性非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解, 若常数  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是该方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是该方程对应的齐次方程的解, 则 ( )  
A.  $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$                       B.  $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$   
C.  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$                       D.  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

 解:  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是非齐次方程的解, 则  $\lambda + \mu = 1$ , 而  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是对应的齐次方程的解, 则  $\lambda - \mu = 0$ , 因此  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ .

 注: 如果  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是非齐次方程的  $n$  个解, 则线性组合  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  仍然是此非齐次方程的解的充要条件是  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1$ ,  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  是对应齐次方程的解的充要条件是  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0$ ,


3. 设函数  $f(x), g(x)$  具有二阶导数, 且  $g''(x) < 0$ . 若  $g(x_0) = a$  是  $g(x)$  的极值, 则  $f(g(x))$  在  $x_0$  处取极大值的一个充分条件是 ( )  
A.  $f'(a) < 0$                       B.  $f'(a) > 0$                       C.  $f''(a) < 0$                       D.  $f''(a) > 0$

 解: 首先有题意有  $g(x_0) = a, g'(x_0) = 0, g''(x_0) < 0$ , 要想  $f(g(x))$  在  $x_0$  处取极大值, 首先  $[f(g(x))]'|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0) = 0$ , 它的一个充分条件是  $[f(g(x))]''|_{x=x_0} < 0$ , 即

$$[f''(g(x))g'^2(x) + f'(g(x))g''(x)]|_{x=x_0} = f'(a)g''(x_0) < 0,$$


而  $g''(x_0) < 0$ , 因此  $f'(a) > 0$ , 选 B.

4. 设  $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$ , 则当  $x$  充分大时有 ( )  
A.  $g(x) < h(x) < f(x)$                       B.  $h(x) < g(x) < f(x)$   
C.  $f(x) < g(x) < h(x)$                       D.  $g(x) < f(x) < h(x)$

 解: 由洛必达法则知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{10}}} \right)^{10} = 0$ , 因此当  $x$  充分大时,  $f(x) < g(x) < h(x)$ , 选 C.




5. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $E$  为  $m$  阶单位矩阵, 若  $AB = E$ , 则 ( )
- A. 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = m$       B. 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = n$   
 C. 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = m$       D. 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = n$


 解: 由题意有  $m = r(E) = r(AB) \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$ , 因此  $r(A) = m \leq n$ , 同理  $r(B) = m \leq n$ , 选 A.

6. 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ , 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于 ( )


A.  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$       B.  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$   
 C.  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

 解: 由  $A^2 + A = O$  知  $A$  的任一特征值  $\lambda$  必满足  $\lambda^2 + \lambda = 0$ , 则  $\lambda = 0$  或  $-1$ . 又  $r(A) = 3$ , 所以  $A$  的特征值为  $-1, -1, -1, 0$ , 且  $A$  为实对称矩阵, 则它相似于  $\text{diag}\{-1, -1, -1, 0\}$ , 选 D.

7. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $P(X = 1) =$  ( )
- A. 0      B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2} - e^{-1}$       D.  $1 - e^{-1}$

 解:  $P(X = 1) = F(1) - F(1-) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$ , 选 C.

8. 设  $f_1(x)$  为标准正态分布的概率密度,  $f_2(x)$  为  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度, 若  $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$  ( $a > 0, b > 0$ ) 为概率密度, 则  $a, b$  应满足 ( )
- A.  $2a + 3b = 4$       B.  $3a + 2b = 4$       C.  $a + b = 1$       D.  $a + b = 2$

 解:  $f(x)$  需要满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^3 f_2(x) dx = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = 1$ , 即  $2a + 3b = 4$ , 选 A.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设可导函数  $y = y(x)$  由方程  $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$  确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.



解: 当  $x = 0$  时  $y = 0$ , 原方程两边对  $x$  求导得  $e^{x+y}(1+y') = x \sin x^2 + \int_0^x \sin t^2 dt$ , 代入  $x = y = 0$  得  $y' = -1$ , 即  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1$ .

10. 设位于曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$  ( $e \leq x < +\infty$ ) 下方,  $x$  轴上方的无界区域为  $G$ , 则  $G$  绕  $x$  轴旋转一周所得空间区域的体积为\_\_\_\_\_.

解: 所求旋转体的体积为  $V = \pi \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \pi \arctan(\ln x) \Big|_e^{+\infty} = \frac{\pi^2}{4}$ .

11. 设某商品的收益函数为  $R(p)$ , 收益弹性为  $1 + p^3$ , 其中  $p$  为价格, 且  $R(1) = 1$ , 则  $R(p) =$ \_\_\_\_\_.

解: 由收益弹性的定义知  $\frac{ER}{Ep} = \frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = 1 + p^3$ , 解此变量分离的方程得  $\ln R = \frac{1}{3}p^3 + \ln p + C$ , 代入  $R(1) = 1$  得  $C = -\frac{1}{3}$ , 因此收益函数  $R(p) = pe^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$ .

12. 若曲线  $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$  有拐点  $(-1, 0)$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_.

解: 由条件有  $\begin{cases} y(-1) = -1 + a - b + 1 = 0 \\ y''(-1) = -6 + 2a = 0 \end{cases}$ , 解得  $a = b = 3$ .

13. 设  $A, B$  为 3 阶矩阵, 且  $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$ , 则  $|A + B^{-1}| =$ \_\_\_\_\_.

解:  $|A + B^{-1}| = |A(B + A^{-1})B^{-1}| = |A||B + A^{-1}||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$ .

14. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ) 的简单随机样本. 记统计量  $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , 则  $ET =$ \_\_\_\_\_.

解:  $E(T) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = EX_1^2 = (EX_1)^2 + DX_1 = \mu^2 + \sigma^2$ .

### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ .

解: 先取对数利用洛必达法则得


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x \cdot \frac{\ln x}{x}} = -1, \end{aligned}$$

因此原极限为  $e^{-1}$ .



16.(本题满分 10 分)


计算二重积分  $\iint_D (x+y)^3 dx dy$ , 其中  $D$  由曲线  $x = \sqrt{1+y^2}$  与直线  $x + \sqrt{2}y = 0$  及  $x - \sqrt{2}y = 0$  围成.

 **解:** 显然积分区域是关于  $x$  轴对称的, 记  $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$  为  $D$  在第一象限的部分, 则所求二重积分为

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy \\ &= \iint_D (3x^2y + y^3) dx dy + \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy \\ &= 2 \int_0^1 \left[ \frac{(1+y^2)^2 - 4y^4}{4} + \frac{3}{2}y^2(1+y^2 - 2y^2) \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}(1+2y^2-3y^4) + 3y^2(1-y^2) \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right) + 3 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求函数  $u = xy + 2yz$  在约束条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$  下的最大值和最小值.

 **解:** 令  $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$ , 令

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0 \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$


当  $\lambda \neq 0$  时, 由前三个方程消去参数  $\lambda$  可得  $\frac{y}{2x} = \frac{2+2z}{2y} = \frac{y}{z}$ , 代入第四个方程求得四个驻点为  $P_1 = (1, -\sqrt{5}, 2)$ ,  $P_2 = (1, \sqrt{5}, 2)$ ,  $P_3 = (-1, -\sqrt{5}, -2)$ ,  $P_4 = (-1, \sqrt{5}, -2)$ , 此时  $u(P_1) = u(P_4) = -5\sqrt{5}$ ,  $u(P_2) = u(P_3) = 5\sqrt{5}$ . 当  $\lambda = 0$  时, 不难得到另外两个驻点为  $P_5 = (-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ ,  $P_6 = (2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ , 此时  $u(P_5) = u(P_6) = 0$ . 因此函数  $u = xy + 2yz$  在约束条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$  下的最大值和最小值分别为  $5\sqrt{5}$  和  $-5\sqrt{5}$ .

18.(本题满分 10 分)



(1) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由.

(2) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

 **解:** (1) 当  $0 < t < 1$  时,  $0 < \ln(1+t) < t$ , 所以  $|\ln t| [\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$ , 由定积分保序性可知  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$ .

(2) 由 (1) 可知, 当  $0 < t < 1$  时,  $0 < \int_0^1 |\ln^n t \ln(1+t)| dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt$ . 由分部积分得

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

因此  $0 < u_n < \frac{1}{(n+1)^2}$ , 由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .


#### 19.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在  $[0, 3]$  上连续, 在  $(0, 3)$  内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3).$$

(1) 证明存在  $\eta \in (0, 2)$ , 使得  $f(\eta) = f(0)$ ;

(2) 证明存在  $\xi \in (0, 3)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

 **证明:** (1) 令  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ , 则由拉格朗日中值定理知存在  $\eta \in (0, 2)$ , 使得  $F(2) - F(0) = 2F'(\eta)$ , 即  $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$ ,  $f(\eta) = f(0)$ .

(2) 设  $f(x)$  在  $[2, 3]$  上的最小值和最大值分别为  $m$  和  $M$ , 则  $m \leq \frac{f(2) + f(3)}{2} \leq M$ , 因此由介值定理知存在  $\zeta \in [2, 3]$  使得  $f(\zeta) = \frac{f(2) + f(3)}{2} = f(\eta)$ . 根据罗尔定理知存在  $\xi_1 \in (0, \eta)$ ,  $\xi_2 \in (\eta, \zeta)$  使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ , 进一步存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 2)$  使得  $f''(\xi) = 0$ .

#### 20.(本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 已知线性方程组  $Ax = b$  存在两个不同的解.

(1) 求  $\lambda, a$ ;

(2) 求方程组  $Ax = b$  的通解.



解: (1) 因为方程组  $Ax = b$  有两个不同的解, 所以  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 于是

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

因此  $\lambda = \pm 1$ . 当  $\lambda = 1$  时,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 显然  $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$ , 方程组无解, 因

此  $\lambda = 1$  舍去. 当  $\lambda = -1$  时, 对  $Ax = b$  的增广矩阵进行初等行变换得

$$(A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right),$$

因为方程组  $Ax = b$  有解, 所以  $a = -2$ .

(2) 当  $\lambda = -1, a = -2$  时,  $\bar{A} = (A, b) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , 因此方程组  $Ax = b$  的通解为

$$x = \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)^T + k(1, 0, 1)^T, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

## 21. (本题满分 11 分)

已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 且  $Q$  的第 3 列为  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$ .

(1) 求矩阵  $A$ ;

(2) 证明  $A + E$  为正定矩阵, 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

解: (1) 二次型  $f$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 因此矩阵  $A$  的特征值为  $1, 1, 0$ , 于是  $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \text{diag}\{1, 1, 0\}$ , 且矩阵  $Q$  的第三列就是属于特征值 0 的特征向量. 设  $(x_1, x_2, x_3)^T$  是  $A$  的属于特征值 1 的特征向量, 由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交, 则  $x_1 + x_3 = 0$ , 解得  $\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)^T, \xi_2 = (0, 1, 0)^T$  为

$A$  的属于特征值 1 的连个正交的单位特征向量, 于是可取  $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ , 此时有

$Q^T A Q = \text{diag}\{1, 1, 0\}$ , 于是

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$




(2) 因为  $A$  的特征值为  $1, 1, 0$ , 所以  $A + E$  的特征值为  $2, 2, 1$ , 且  $A + E$  为实对称矩阵, 所以  $A + E$  为正定矩阵.

## 22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数  $A$  及条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ .

 解:  $X$  的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2-x^2} dy = Ae^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A\sqrt{\pi}e^{-x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{于是 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}.$$

当  $x \in (-\infty, +\infty)$  时,


$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

## 23.(本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个. 现从箱中随机地取出 2 个球, 记  $X$  为取出的红球个数,  $Y$  为取出的白球个数.

(1) 求随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

(2) 求  $\text{Cov}(X, Y)$ .

 解: (1) 由题意可知

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=0) &= \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, P(X=0, Y=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{2}{5}, \\ P(X=0, Y=2) &= \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, P(X=1, Y=0) = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \\ P(X=1, Y=1) &= \frac{C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}, P(X=1, Y=2) = 0. \end{aligned}$$

因此随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为



$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = i)$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
$P(Y = j)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	


(2) 由  $(X, Y)$  的分布可计算得  $EX = \frac{1}{3}$ ,  $EY = \frac{2}{3}$ ,  $E(XY) = \frac{2}{15}$ , 于是  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - (EX)(EY) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}$ .



## 第6章 2011年考研数学三


一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$  与  $cx^k$  是等价无穷小, 则 ( )  
A.  $k = 1, c = 4$     B.  $k = 1, c = -4$     C.  $k = 3, c = 4$     D.  $k = 3, c = -4$


 解: 利用麦克劳林公式得

$$f(x) = 3 \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \left( 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) \right) = 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3,$$

因此  $k = 3, c = 4$ , 选 C.

 注: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式  $\sin 3x = 3 \sin x - \sin^3 x$  更快.

2. 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $f(0) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$  ( )  
A.  $-2f'(0)$     B.  $-f'(0)$     C.  $f'(0)$     D. 0


 解: 注意到  $f(0) = 0$ , 利用导数定义得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x^3} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0),$$

因此选 B.

3. 设  $\{u_n\}$  是数列, 则下列命题正确的是 ( )


- A. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛  
B. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  
C. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛  
D. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

 解: 收敛的级数任意加括号后的级数仍然收敛, A 选项正确; B 选项不正确, 反例可取  $u_n = (-1)^n$ ; C 选项不正确, 反例可取  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ; D 选项不正确, 反例可取  $u_n = 1$ , 因此选 A.


4. 设  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$ ,  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$ ,  $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ , 则  $I, J, K$  的大小关系是 ( )

- A.  $I < J < K$     B.  $I < K < J$     C.  $J < I < K$     D.  $K < J < I$




 **解:** 当  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $\sin x < \cos x < \cot x$ , 即  $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$ , 因此  $I < K < J$ , 选 B.


5. 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第二列加到第一列得矩阵  $B$ , 再交换  $B$  的第二行与第一行得单位矩阵. 记  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A =$  ( )
- A.  $P_1 P_2$       B.  $P_1^{-1} P_2$       C.  $P_2 P_1$       D.  $P_2 P_1^{-1}$

 **解:** 由初等变换与初等矩阵的关系知  $AP_1 = B$ ,  $P_2 B = E$ , 所以  $A = BP_1^{-1} = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$ , 选 D.

6. 设  $A$  为  $4 \times 3$  矩阵,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是非齐次线性方程组  $Ax = \beta$  的 3 个线性无关的解,  $k_1, k_2$  为任意常数, 则  $Ax = \beta$  的通解为 ( )
- A.  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$   
 B.  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$   
 C.  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$   
 D.  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$


 **解:** 首先  $A$  不是零矩阵, 因此齐次线性方程组  $Ax = 0$  至多只有两个线性无关的解. 因为  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是方程组  $Ax = \beta$  的 3 个线性无关的解, 所以  $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$  是方程组  $Ax = 0$  的两个线性无关的解, 于是方程组  $Ax = 0$  的通解为  $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ . 且  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$  仍然是方程组  $Ax = \beta$  的解, 因此方程组  $Ax = \beta$  的通解为  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ , 选 D.

7. 设  $F_1(x)$  与  $F_2(x)$  为两个分布函数, 其相应的概率密度  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  是连续函数, 则必为概率密度的是 ( )
- A.  $f_1(x)f_2(x)$       B.  $2f_2(x)F_1(x)$   
 C.  $f_1(x)F_2(x)$       D.  $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

 **解:** 概率密度需要满足非负性和归一性, 非负性都满足, 直接验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)] dx = F_1(x)F_2(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

因此  $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$  为概率密度, 其他都不满足, 选 D.

 **注:** 在此题的条件下,  $2f_1(x)F_1(x)$ ,  $2f_2(x)F_2(x)$  和  $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$  都是概率密度.

8. 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量  $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  和  $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$ , 有 ( )



A.  $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$

B.  $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

C.  $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$

D.  $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

解:  $ET_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \lambda, ET_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} EX_i + \frac{1}{n} EX_n = \lambda + \frac{\lambda}{n} > ET_1, DT_1 = \frac{DX}{n} = \frac{\lambda}{n}, DT_2 = D\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + D\left(\frac{1}{n} X_n\right) = \frac{DX}{n-1} + \frac{DX}{n^2} = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2} > DT_1$ , 选 D.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$ , 则  $f'(x) =$ \_\_\_\_\_.

解:  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{3x}{3t}} = xe^{3x}$ , 于是  $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$ .

10. 设函数  $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$ , 则  $dz|_{(1,1)} =$ \_\_\_\_\_.

解:  $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y} \ln(1 + \frac{x}{y})}$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[ \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{1/y}{1 + x/y} \right], \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[ \frac{x}{y^2} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{-x/y^2}{1 + x/y} \right], \end{aligned}$$

所以  $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,1)} = 2 \ln 2 + 1, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,1)} = -1 - 2 \ln 2$ , 从而  $dz|_{(1,1)} = (1 + 2 \ln 2)(dx - dy)$ .

11. 曲线  $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$  在点  $(0, 0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

解: 原方程两边对  $x$  求导得  $\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 + y') = e^y y'$ , 代入  $x = 0, y = 0$  得  $y'(0) = -2$ , 因此曲线在  $(0, 0)$  处的切线方程为  $y = -2x$ .

12. 曲线  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ , 直线  $x = 2$  及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转所成的旋转体的体积为\_\_\_\_\_.


解: 利用旋转体的体积公式得  $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left( \frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3}$ .

13. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  的秩为 1,  $\mathbf{A}$  的各行元素之和为 3, 则  $f$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  下的标准形为\_\_\_\_\_.

解: 由题意  $r(\mathbf{A}) = 1$ , 因此  $\mathbf{A}$  至少有两个特征值是 0, 由于  $\mathbf{A}$  的各行元素之和为 3, 即  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 因此 3 也是  $\mathbf{A}$  的特征值, 则  $\mathbf{A}$  的相似标准形为  $\text{diag}\{3, 0, 0\}$ , 因此二次型  $f$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$  下的标准形为  $3y_1^2$ .




14. 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ , 则  $E(XY^2) =$ \_\_\_\_\_.

 解: 由条件知  $X, Y$  相互独立且都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 于是  $E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = \mu((EX)^2 + D(X)) = \mu(\mu^2 + \sigma^2) = \mu^3 + \mu\sigma^2$ .

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)


求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$ .

 解: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$ , 因此

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2\sin x + \sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2\sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8}(2\sin x)^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

设函数  $z = f(xy, yg(x))$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 函数  $g(x)$  可导且在  $x=1$  处取得极值  $g(1)=1$ , 求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ .

 解: 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(xy, yg(x)) \cdot y + f'_2(xy, yg(x)) \cdot g'(x) \cdot y$ , 所以  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} = yf'_1(y, y)$ . 故

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \left. \frac{d}{dy} \left( \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} \right) \right|_{y=1} = \left. \frac{d}{dy} [yf'_1(y, y)] \right|_{y=1} \\ &= [f'_1(y, y) + y(f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y))] \Big|_{y=1} \\ &= f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1). \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$ .

 解:

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) d(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - 2 \int \sqrt{x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= 2\sqrt{x} (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - \int \left( \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2\sqrt{x} (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$



18.(本题满分 10 分)

证明方程  $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$  恰有两个实根.

证明: 令  $f(x) = 4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ , 则

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{1+x^2} \begin{cases} > 0, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ = 0, & x = \pm\sqrt{3} \\ < 0, & x < -\sqrt{3} \text{ 或 } x > \sqrt{3} \end{cases}.$$

因此  $f(x)$  在  $(-\infty, -\sqrt{3})$  和  $(\sqrt{3}, +\infty)$  内单调递减, 在  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  内单调递增. 极小值  $f(-\sqrt{3}) = 0$ , 极大值  $f(\sqrt{3}) = 0$ , 且  $f(+\infty) = -\infty$ , 因此由零点定理知存在  $x_0 \in (\sqrt{3}, +\infty)$  使得  $f(x_0) = 0$ . 因此  $f(x)$  恰有两个根  $x = \sqrt{3}$  和  $x = x_0$ .

19.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  具有连续导数,  $f(0) = 1$ , 且满足  $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy =$

$\iint_{D_t} f(t) dx dy$ ,  $D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$ , 求  $f(x)$  的表达式.

解: 因为

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy &= \int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y) dy \\ &= \int_0^t [f(t) - f(x)] dx = tf(t) - \int_0^t f(x) dx \\ &= \iint_{D_t} f'(t) dx dy = \frac{1}{2} t^2 f'(t), \end{aligned}$$

等式两边对  $x$  求导得  $f'(t) + \frac{2}{t-2} f(t) = 0$ , 解此变量分离的方程得  $f(t) = \frac{C}{(t-2)^2}$ . 由  $f(0) = 1$  得  $C = 4$ , 所以  $f(x)$  的表达式为  $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}, 0 \leq x \leq 1$ .

20.(本题满分 11 分)

设向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能由向量组  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$  线性表示.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

解: (1) 首先有  $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , 于是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 因此  $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$  不能被  $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 =$

$(3, 4, a)^T$  线性表示等价于  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关, 于是  $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$ , 所以  $a = 5$ .

(2) 对增广矩阵  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$


于是  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$ .

21.(本题满分 11 分)

设  $A$  为 3 阶实对称矩阵,  $A$  的秩为 2, 且  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $A$  的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵  $A$ .

 **解:** (1) 由条件知  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 因此  $-1$  是一个特征值, 且它对应的特征向量为  $k_1(1, 0, -1)^T$ ,  $k_1 \neq 0$ ;  $1$  是一个特征值, 它所对应的特征向量为  $k_2(1, 0, 1)^T$ ,  $k_2 \neq 0$ . 再由  $r(A) = 2$  知  $0$  也是  $A$  的特征值, 设它的特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ , 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得  $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ , 解得特征值  $0$  对应的特征向量为  $k_3(0, 1, 0)^T$ ,  $k_3 \neq 0$ .

(2) 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = A$ , 因此

$$\begin{aligned} A &= PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



22.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$Y$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且  $P(X^2 = Y^2) = 1$ .

(1) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

(2) 求  $Z = XY$  的概率分布;

(3) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

解: (1) 由于  $P(X^2 = Y^2) = 1$ , 所以  $P(X^2 \neq Y^2) = 0$ , 即  $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0, Y = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0$ , 于是

$$P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 1, Y = -1) = P(Y = -1) - P(X = 0, Y = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 0, Y = 0) = P(Y = 0) - P(X = 1, Y = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{3}.$$

因此二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2)  $Z = XY$  的取值只有 -1, 0, 1, 且由  $(X, Y)$  的概率分布不难得到  $Z$  的概率分布为

$Z$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3)  $E(X) = \frac{2}{3}$ ,  $E(Y) = 0$ ,  $E(XY) = 0$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ , 因此  $X$  与  $Y$  的相关系数为  $\rho_{XY} = 0$ .

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $G$  上的均匀分布, 其中  $G$  是由  $x - y = 0$ ,  $x + y = 2$  与  $y = 0$  所围成的三角形区域.

(1) 求  $X$  的概率密度  $f_X(x)$ ;

(2) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$ .

解: (1)  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 所以  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^{2-x} dy, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(2) 因为  $Y$  的概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{2-y} dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

所以在  $Y = y (0 \leq y < 1)$  时,  $X$  的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & y < x < 2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$



## 第 7 章 2012 年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  的渐近线的条数为 ( )  
 A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

**解:** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$ , 所以直线  $y = 1$  是曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$  的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$ , 所以  $x = 1$  是一条垂直渐近线, 而  $x = -1$  不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数  $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ , 其中  $n$  为正整数, 则  $f'(0) =$  ( )  
 A.  $(-1)^{n-1}(n-1)!$     B.  $(-1)^n(n-1)!$     C.  $(-1)^{n-1}n!$     D.  $(-1)^nn!$

**解:** 利用导数的定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)] = (-1)^{n-1}(n-1)!, \end{aligned}$$

选 A.

3. 设函数  $f(t)$  连续, 则二次积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr =$  ( )

- A.  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$   
 B.  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$   
 C.  $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$   
 D.  $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$

**解:** 积分区域为  $\{(r, \theta) | 2\cos\theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 化为直角坐标即  $\{(x, y) | 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 此时先对  $y$  后对  $x$  的累次积分为  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$ , 选 B.

4. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$  绝对收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$  条件收敛, 则 ( )  
 A.  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$     B.  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$     C.  $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$     D.  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$



解: 由  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$  绝对收敛可得  $\alpha > \frac{3}{2}$ , 再由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$  条件收敛可知  $1 \leq \alpha < 2$ , 因此  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ , 选 D.

5. 设  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

B.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

C.  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

D.  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解: 显然可得  $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  一定线性相关, 选 C.

6. 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $P$  为 3 阶可逆矩阵, 且  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^{-1}AQ =$  ( )

A.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解: 由初等变换与初等矩阵的关系可知  $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 因此

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

选 B.

7. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从区间  $(0, 1)$  上的均匀分布, 则  $P(X^2 + Y^2 \leq 1) =$  ( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{\pi}{8}$

D.  $\frac{\pi}{4}$

解:  $X, Y$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ , 于是  $P(X^2 + Y^2 < 1) = \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4}$ , 选 D.



8. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为来自总体  $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$  的简单随机样本, 则统计量  $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$  的分布为

A.  $N(0, 1)$

B.  $t(1)$

C.  $\chi^2(1)$

D.  $F(1, 1)$

解: 由条件得  $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ ,  $X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ , 于是  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$  与  $\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}$  都服从标准正态分布, 且相互独立, 因此  $\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}} = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim t(1)$ , 选 B.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} =$  \_\_\_\_\_.

解: 先取对数用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(-\sin x - \cos x) \tan x} = -\sqrt{2},$$

因此原极限为  $e^{-\sqrt{2}}$ .

10. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$ ,  $y = f(f(x))$ , 则  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=e}$  \_\_\_\_\_.

解: 首先有

$$y = f(f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln f(x), & f(x) \geq 1 \\ 2f(x) - 1, & f(x) < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{2} \ln x \right), & x \geq e^2 \\ \ln x - 1, & 1 \leq x < e^2 \\ 2(2x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

因此  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=e} = (\ln x - 1)' \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$ .

11. 设连续函数  $z = f(x, y)$  满足  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$ , 则  $dz \Big|_{(0,1)} =$  \_\_\_\_\_.

解: 由题意知当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 1$  时,  $f(x, y) = 2x - y + 2 + o\left(\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}\right)$ , 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = -1, \text{ 故 } dz \Big|_{(0,1)} = 2dx - dy.$$

12. 由曲线  $y = \frac{4}{x}$  和直线  $y = x$  及  $y = 4x$  在第一象限中围成的平面图形的面积为 \_\_\_\_\_.

解: 利用定积分可求得此平面图形的面积为  $S = \int_0^1 (4x - x) dx + \int_1^2 \left( \frac{4}{x} - x \right) dx = 4 \ln 2$ .



13. 设  $\alpha$  为 3 为单位列向量,  $E$  为 3 阶单位矩阵, 则矩阵  $E - \alpha\alpha^T$  的秩为\_\_\_\_\_.

解:  $\alpha\alpha^T$  是秩为 1 的实对称矩阵, 故它可以对角化, 且它的特征值为  $\alpha^T\alpha, 0, 0$ , 即  $1, 0, 0$ . 则  $E - \alpha\alpha^T$  也可以对角化, 且它的特征值为  $0, 1, 1$ , 因此  $r(E - \alpha\alpha^T) = 2$ .

14. 设  $A, B, C$  是随机事件,  $A$  与  $C$  互不相容,  $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(AB|\bar{C}) =$ \_\_\_\_\_.

解: 由  $A$  与  $C$  互不相容可知  $P(AC) = P(ABC) = 0$ , 于是

$$P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{1 - P(C)} = \frac{1/2}{1 - 1/3} = \frac{3}{4}.$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$ .

解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-2\cos x} (e^{x^2-2+2\cos x} - 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{2x^3} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D e^x xy dx dy$ , 其中  $D$  是以曲线  $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  及  $y$  轴为边界的无界区域.

解: 积分区域可以写为  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, \sqrt{x} < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\}$ , 则

$$\begin{aligned} \iint_D e^x xy dx dy &= \int_0^1 x e^x dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} y dy = \int_0^1 x e^x \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} e^x (x-1)^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为  $x$ (件) 和  $y$ (件), 且这两种产品的边际成本分别为  $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与  $6 + y$ (万元/件).

(1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数  $C(x, y)$ (万元);



(2) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各位多少时可使总成本最小? 求最小总成本;

(3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本, 并解释其经济意义.

**解:** (1) 由题意知  $C'_x(x, y) = 20 + \frac{x}{2}$ , 对  $x$  积分得  $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + \varphi(y)$ , 再对  $y$  求导得  $C'_y(x, y) = \varphi'(y) = 6 + y$ , 于是对  $y$  积分得  $\varphi(y) = 6y + \frac{y^2}{2} + C$ , 所以  $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + C$ . 又  $C(0, 0) = 10000$ , 所以  $C = 10000$ ,  $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + 10000$ .

(2) 若  $x + y = 50$ , 则  $y = 50 - x (0 \leq x \leq 50)$ , 代入到成本函数中得

$$C(x) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6(50 - x) + \frac{1}{2}(50 - x)^2 + 10000 = \frac{3}{4}x^2 - 36x + 11550.$$

令  $C'(x) = \frac{3}{2}x - 36 = 0$  得  $x = 24$ , 不难得知这就是  $C(x)$  的最小值点. 此时  $y = 26$ , 最小成本为  $C(24, 26) = 11118$ .

(3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本为  $C'_x(24, 26) = 32$ , 其经济意义为在要求总产量为 50 件条件下, 当甲产品为 24 件时, 若甲产品的产量再增加一件, 则总成本将增加 32 万元.

#### 18.(本题满分 10 分)

证明:  $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$ .

**证明:** 注意到  $f(x)$  是偶函数, 因此只需要证明  $f'(x) \geq 0, x \in [0, 1)$  即可. 首先有  $f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$ , 且  $\ln \frac{1+x}{1-x} > 0, \frac{2x}{1-x^2} > 2x > x + \sin x$ , 因此  $f'(x) > 0, x \in (0, 1)$ . 而  $f(0) = 0$ , 则有  $f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$ , 证毕.

#### 19.(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x)$  满足方程  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  及  $f''(x) + f(x) = 2e^x$ .

(1) 求  $f(x)$  的表达式;

(2) 求曲线  $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$  的拐点.

**解:** (1) 微分方程  $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ , 故方程的通解为  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ . 将  $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$  代入方程  $f''(x) + f(x) = 2e^x$  得  $2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x$ , 所以  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , 故  $f(x) = e^x$ .

(2) 由 (1) 得到曲线  $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , 分别求一阶导数与二阶导数得

$$y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1, \quad y'' = 2e^{x^2} (1 + 2x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt + 2x,$$

令  $y'' = 0$  得  $x = 0, y = 0$ . 当  $x > 0$  时,  $y'' > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $y'' < 0$ , 因此点  $(0, 0)$  就是曲线  $y = f(x)$  的拐点.




20.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式  $|A|$ ;

(2) 当实数  $a$  为何值时, 方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解, 并求其通解.

 解: (1) 因为  $r(A) = r(A^T A) = 2$ , 对矩阵  $A$  作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以  $a = -1$ .

(2) 由  $a = -1$  可得  $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , 故矩阵  $A^T A$  的特征多项式为

$$|\lambda E - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

于是  $A^T A$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ .

当  $\lambda_1 = 0$  时, 解方程组  $A^T A x = 0$  得  $\lambda_1$  的单位特征向量  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$ ;

当  $\lambda_2 = 2$  时, 解方程组  $(2E - A^T A)x = 0$  得  $\lambda_2$  的单位特征向量  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ ;

当  $\lambda_3 = 6$  时, 解方程组  $(6E - A^T A)x = 0$  得  $\lambda_3$  的单位特征向量  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$ .

令  $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 则在正交变换  $x = Qy$  下, 原二次型化为标准形  $f = 2y_2^2 + 6y_3^2$ .

21.(本题满分 11 分)

已知  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ , 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x$  的秩为 2.

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 求正交变换  $x = Qy$  将二次型  $f$  化为标准形.



解: (1) 行列式按照第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(2) 对增广矩阵  $(A, \beta)$  作初等行变换得

$$(A, \beta) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right) \\ \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right).$$

由于方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解当且仅当  $r(A) = r(A, \beta) < 4$ , 因此  $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$ , 解得  $a = -1$ , 此时方程组  $Ax = \beta$  有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为  $x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$ , 其中  $k$  为任意常数.

## 22.(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求  $P(X = 2Y)$

(2) 求  $\text{Cov}(X - Y, Y)$ .

解: (1) 由  $(X, Y)$  的概率分布知  $P(X = 2Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4}$ .

(2) 由  $(X, Y)$  的概率分布知  $X, Y, XY$  的概率分布分别为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

所以  $E(X) = \frac{2}{3}, E(Y) = 1, E(Y^2) = \frac{5}{3}, D(Y) = \frac{2}{3}, E(XY) = \frac{2}{3}$ , 于是  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \text{Cov}(X - Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - D(Y) = -\frac{2}{3}$ .




23.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 记  $U = \max\{X, Y\}$ ,  $V = \min\{X, Y\}$ .

(1) 求  $V$  的概率密度  $f_V(v)$ ;

(2) 求  $E(U + V)$ .

 **解:** (1)  $X, Y$  的分布函数均为  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 且  $X, Y$  相互独立, 于是  $V$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) = P(\min\{X, Y\} \leq v) = 1 - P(\min\{X, Y\} > v) \\ &= 1 - P(X > v, Y > v) = 1 - P(X > v)P(Y > v) = 1 - [1 - F(v)]^2 \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

因此  $V$  的概率密度为  $f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ .

(2) 由于  $U = \max\{X, Y\}$ ,  $V = \min\{X, Y\}$ , 所以  $U + V = X + Y$ , 则  $E(U + V) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2$ .



## 第8章 2013年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.


1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 用  $o(x)$  表示比  $x$  高阶的无穷小量, 则下列式子错误的是 ( )

A.  $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

B.  $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

C.  $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

D.  $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

 解: 容易判断 A, B, C 都是对的, 而  $o(x) + o(x^2) = o(x)$ , 错误的选 D.


2. 函数  $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$  的可去间断点的个数为 ( )

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

 解: 由  $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$  知  $f(x)$  的间断点为  $x = 0, \pm 1$ . 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

因此  $f(x)$  的可取间断点是  $x = 0, 1$ , 选 C.


3. 设  $D_k$  是圆域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  位于第  $k$  象限的部分, 记  $I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), 则 ( )

A.  $I_1 > 0$

B.  $I_2 > 0$

C.  $I_3 > 0$

D.  $I_4 > 0$

 解: 根据对称性可知  $I_1 = I_3 = 0$ , 而当  $x \in D_2$  时,  $y - x > 0$ , 因此  $I_2 = \iint_{D_2} (y - x) dx dy > 0$ .

当  $x \in D_4$  时,  $y - x < 0$ ,  $I_4 < 0$ , 选 B.

4. 设  $\{a_n\}$  为正项数列, 下列选项正确的是 ( )

A. 若  $a_n > a_{n+1}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛

B. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛, 则  $a_n > a_{n+1}$

C. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则存在常数  $p > 1$ , 使  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$  存在



D. 若存在常数  $p > 1$ , 是  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$  存在, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

解: A 选项中  $a_n$  不一定趋于 0, A 不对. B 选项可取反例  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{n^2}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ , B 不对. C

选项可取反例  $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n} (n \geq 2)$ , 则对任意  $p > 1$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{\ln^2 n} = +\infty$ , C 不对. D 选项中存在正数数  $a$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = a$ , 那么当  $n \rightarrow \infty$  时,  $a_n$  为  $\frac{1}{n^p}$  的同阶或

高阶无穷小, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 选 D.

5. 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 若  $AB = C$ , 且  $B$  可逆, 则 ( )

- A. 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $A$  的行向量组等价
- B. 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价
- C. 矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $B$  的行向量组等价
- D. 矩阵  $C$  的列向量组与矩阵  $B$  的列向量组等价

解: 对一个矩阵  $A$  右乘一个可逆矩阵  $B$  就是对  $A$  进行一系列的初等列变换后得到矩阵  $C$ , 因此矩阵  $C$  的行向量组与矩阵  $A$  的列向量组等价, 选 B.

6. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似的充分必要条件为 ( )

- A.  $a = 0, b = 2$
- B.  $a = 0, b$  为任意常数
- C.  $a = 2, b = 0$
- D.  $a = 2, b$  为任意常数

解: 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

的特征值为  $2, b, 0$ , 而  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda ((\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2)$ , 因此当且仅当  $a = 0$  时,  $A$  的特征值为  $2, b, 0$ , 其中  $b$  可为任意常数, 选 B.

7. 设  $X_1, X_2, X_3$  是随机变量, 且  $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P(-2 \leq X_i \leq 2) (i = 1, 2, 3)$ , 则 ( )

- A.  $p_1 > p_2 > p_3$
- B.  $p_2 > p_1 > p_3$
- C.  $p_3 > p_1 > p_2$
- D.  $p_1 > p_3 > p_2$

解: 利用正态分布的性质可得

$$p_1 = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1,$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = 2\Phi(1) - 1,$$



$$p_3 = \Phi\left(\frac{2-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right) = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right).$$

利用标准正态分布的概率分布函数性质不难得到  $p_1 > p_2 > p_3$ , 选 A.

8. 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 且  $X$  和  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Y$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

则  $P(X + Y = 2) = 2$  ( )

A.  $\frac{1}{12}$

B.  $\frac{1}{8}$

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{1}{2}$

解: 利用  $X, Y$  的独立性得

$$\begin{aligned} P(X + Y = 2) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = -1) \\ &= P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0) + P(X = 3)P(Y = -1) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

选 C.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设曲线  $y = f(x)$  与  $y = x^2 - x$  在点  $(1, 0)$  处有公切线, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 由曲线  $y = f(x)$  与  $y = x^2 - x$  在点  $(1, 0)$  处有公切线知  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 则由导数定义得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) \stackrel{x=\frac{n}{n+2}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x} f(x) = -2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2f'(1) = -2.$$

10. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(z + y)^x = xy$  确定, 则  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 当  $x = 1, y = 2$  时,  $z = 2$ . 方程  $(z + y)^x = xy$  两边分别对  $x$  求偏导得

$$(z + y)^2 \left( \ln(z + y) + \frac{x}{z + y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = y,$$


代入  $x = 1, y = 2, z = 2$  可得  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2 - 2 \ln 2.$

11.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$


解:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} \\ &= \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) \Big|_1^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

12. 微分方程  $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

 **解:** 微分方程的特征方程为  $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ , 则方程的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

13. 设  $A = (a_{ij})$  是 3 阶非零矩阵,  $|A|$  为  $A$  的行列式,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式, 若  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ , 则  $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

 **解:** 由  $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$  可知  $A^T = -A^*$ , 于是  $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A^*| = -|A|^2$ , 因此  $|A| = 0$  或  $-1$ . 又  $A$  是非零矩阵, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ , 于是  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$ , 所以  $|A| = -1$ .

14. 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(0, 1)$ , 则  $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .


 **解:**

$$\begin{aligned} E(Xe^{2X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2} dx = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} dx = 2e^2. \end{aligned}$$

### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.


15. (本题满分 10 分)

当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$  与  $ax^n$  为等价无穷小, 求  $n$  和  $a$  的值.

 **解:** 当  $x \rightarrow 0$  时, 利用泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(1 + 2^2 + 3^2)x^2\right) + o(x^2) \sim 7x^2, \end{aligned}$$


因此  $a = 7, n = 2$

 **注:** 此题中有两点需要注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  的必要非充分条件, 也就是说由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ax^n} = 1$  是不能直接得到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{nax^{n-1}} = 1$  的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n (1 - \cos ax_k)}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$ .



16.(本题满分 10 分)

设  $D$  是由曲线  $y = x^{\frac{1}{3}}$ , 直线  $x = a (a > 0)$  及  $x$  轴所围成的平面图形,  $V_x, V_y$  分别是  $D$  绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积. 若  $V_y = 10V_x$ , 求  $a$  的值.

 解: 利用旋转体的体积公式得

$$V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}, V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}.$$

$$\text{由 } V_y = 10V_x \text{ 得 } \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \times \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}.$$

17.(本题满分 10 分)

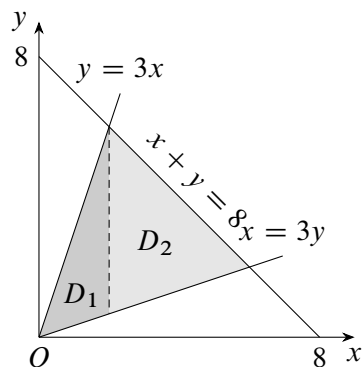
设平面区域  $D$  由直线  $x = 3y, y = 3x$  及  $x + y = 8$  围成, 计算  $\iint_D x^2 dx dy$ .

 解: 积分区域可分为两部分

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{3} \leq y \leq 3x \right\}, D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, \frac{x}{3} \leq y \leq 8 - x \right\}.$$

则

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy \\ &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy \\ &= \int_0^2 x^2 \left( 3x - \frac{x}{3} \right) dx + \int_2^6 x^2 \left( 8 - x - \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \frac{416}{3}. \end{aligned}$$




第 17 题图

18.(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为  $p = 60 - \frac{Q}{1000}$  ( $p$  为单价, 单位: 元;  $Q$  是销量, 单位: 件). 已知产销平衡, 求:

- (1) 该商品的边际利润;
- (2) 当  $p = 50$  时的边际利润, 并解释其经济利益;
- (3) 使得利润最大的定价  $p$ .

 解: (1) 商品的利润函数为  $L = pQ - (20Q + 60000) = 40Q - \frac{Q^2}{1000} - 60000$ , 边际利润为  $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500}$ .

(2) 当  $p = 50$  时, 边际利润为 20, 其经济意义为当  $p = 50$  时, 销售第 10001 件商品时所获得的利润为 20 元.

(3) 令  $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500} = 0$  得  $Q = 20000$ , 此时  $p = 60 - \frac{Q}{1000} = 40$ , 显然这是使得二次函数取得最大值的点, 因此使得利润最大的定价  $p = 40$ .

### 19.(本题满分 10 分)

奇函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导,  $f(0) = 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . 证明:

(1) 存在  $a > 0$ , 使得  $f(a) = 1$ ;

(2) 对 (1) 中的  $a$ , 存在  $\xi \in (0, a)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{1}{a}$ .

证明: (1) 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  可知存在  $X > 0$ , 当  $x > X$  时,  $f(x) > 1$  都成立. 即存在  $x_0 > 0$  使得  $f(x_0) > 1$  成立, 因此由连续函数介值定理知存在  $a \in [0, x_0]$  使得  $f(a) = 1$ .

(2) 由拉格朗日中值定理知存在  $\xi \in (0, a)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{1}{a}$ .

### 20.(本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$ , 并求所有矩阵  $C$ .

解: 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , 代入  $AC - CA = B$  得方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (*)$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right).$$

由此可知当  $a \neq -1$  或  $b \neq 0$  时, 方程组 (\*) 无解. 当  $a = -1$  且  $b = 0$  时, 方程组 (\*) 有解, 且此时方程组的通解为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1(1, -1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 0, 1)^T + (1, 0, 0, 0)^T$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数. 因此, 当且仅当  $a = -1, b = 0$  时存在矩阵  $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$  ( $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ) 使得  $AC - CA = B$ .

### 21.(本题满分 11 分)



设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ , 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型  $f$  对应的矩阵为  $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ ;

(2) 若  $\alpha, \beta$  正交且均为单位向量, 证明  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .

证明: (1) 记  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 则  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

因此

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(x^T\alpha)(\alpha^Tx) + (x^T\beta)(\beta^Tx) = x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x. \end{aligned}$$

且  $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$  为对称矩阵, 所以二次型  $f$  对应的矩阵为  $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ .

(2) 因为  $\alpha, \beta$  正交且均为单位向量, 所以

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha,$$

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta,$$

故  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  是矩阵  $A$  的特征值. 又  $A$  的秩  $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$ , 即  $A$  不是满秩矩阵, 所以  $\lambda_3 = 0$  也是  $A$  的特征值, 故二次型  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .

## 22.(本题满分 11 分)

设  $(X, Y)$  是二维随机变量,  $X$  的边缘概率密度为  $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 再给定  $X = x (0 < x < 1)$  的条件下  $Y$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y)$ ;

(2) 求  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y)$ ;

(3) 求  $P(X > 2Y)$ .

解: (1) 由  $X$  的边缘分布知当  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$  时,  $f(x, y) = 0$ . 当  $0 < x < 1$  时,

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因此求  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(2)  $Y$  的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$


$$(3) P(X > 2Y) = \iint_{x>2Y} f(x, y) xy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta$  为未知参数且大于零,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求  $\theta$  的矩估计量;

(2) 求  $\theta$  的最大似然估计量.

 解: (1) 总体均值  $E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta$ , 令  $E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 因此  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ .

(2) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  时,  $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$ , 令  $\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} -$

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$  得  $\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ , 所以  $\theta$  的最大似然估计量为  $\hat{\theta}_2 = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ .



## 第9章 2014年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  且  $a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时有 ( )

A.  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$       B.  $|a_n| < \frac{|a|}{2}$       C.  $a_n > a - \frac{1}{n}$       D.  $a_n < a + \frac{1}{n}$

解: 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \neq 0$ , 那么对任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $n$  充分大时, 有

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

即  $|a| - \varepsilon < |a_n| < |a| + \varepsilon$ . 取  $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$  可知 A 正确而 B 错误, C 可取反例  $a_n = a - \frac{1}{n}$ , D 可取反例  $a_n = a + \frac{1}{n}$ , 选 A.

2. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A.  $y = x + \sin x$       B.  $y = x^2 + \sin x$       C.  $y = x + \sin \frac{1}{x}$       D.  $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解: 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ , 从而直线  $y = x$  是曲线  $y = x + \sin \frac{1}{x}$  的斜渐近线.

3. 设  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 若  $p(x) - \tan x$  是比  $x^3$  高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是 ( )

A.  $a = 0$       B.  $b = 1$       C.  $c = 0$       D.  $d = \frac{1}{6}$

解: 利用  $\tan x$  的麦克劳林展开式知当  $x \rightarrow 0$  时,  $p(x) - \tan x = a + bx + cx^2 + dx^3 - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$  是比  $x^3$  高阶的无穷小, 因此  $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$ , 因此错误的选 D.

4. 设函数  $f(x)$  具有二阶导数,  $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , 则在区间  $[0, 1]$  上 ( )


A. 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       B. 当  $f'(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$   
C. 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \geq g(x)$       D. 当  $f''(x) \geq 0$  时,  $f(x) \leq g(x)$

解: 令  $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$ , 且  $F''(x) = f''(x)$ . 故当  $f''(x) > 0$  时,  $F(x)$  为凹函数, 它的最大值在端点  $x = 0$  或  $x = 1$  处取到, 而  $F(0) = F(1) = 0$ , 所以  $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ , 选 D.

5. 行列式  $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$  ( )




- A.  $(ad - bc)^2$       B.  $-(ad - bc)^2$       C.  $a^2d^2 - b^2c^2$       D.  $b^2c^2 - a^2d^2$

 解: 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2,$$

选 B.


6. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为三维向量, 则对任意常数  $k, l$ , 向量组  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$  线性无关是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关的 ( )
- A. 必要非充分条件      B. 充分非必要条件  
C. 充分必要条件      D. 既非充分也非必要条件

 解: 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 令  $\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0}$ , 即

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\alpha_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k\lambda_1 + l\lambda_2 = 0,$$

从而  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$  线性无关. 反之, 如果  $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$  线性无关, 不一定有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 如取反例  $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0)^T$ , 因此选 A.


7. 设随机事件  $A$  与  $B$  相互独立, 且  $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$ , 则  $P(B - A) =$  ( )
- A. 0.1      B. 0.2      C. 0.3      D. 0.4

 解: 由  $A, B$  相互独立可得

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A) - 0.5P(A) = 0.5P(A) = 0.3, \end{aligned}$$

所以  $P(A) = 0.6, P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.5P(A) = 0.2$ , 选 B.


8. 设  $X_1, X_2, X_3$  为来自正态总体  $N(0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 则统计量  $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$  服从的分布为 ( )
- A.  $N(0, 1)$       B.  $t(1)$       C.  $\chi^2(1)$       D.  $F(1, 1)$


 解: 首先  $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), X_3 \sim N(0, \sigma^2)$ , 因此  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1), \frac{X_3}{\sigma} \sim N(0, 1)$ , 则  $\frac{X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ , 且  $X_1 - X_2$  与  $X_3$  独立, 故  $\frac{(X_1 - X_2)/(\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{X_3^2/\sigma^2}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|} \sim t(1)$ , 选 C.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.


9. 设某商品的需求函数为  $Q = 40 - 2p$  ( $p$  为商品的价格), 则该商品的边际收益为\_\_\_\_\_.




 解: 由  $Q = 40 - 2p$  得  $p = \frac{40 - Q}{2}$ , 于是收益函数为  $R = pQ = \frac{(40 - Q)Q}{2}$ , 边际收益为  $\frac{dR}{dQ} = 20 - Q$ .

 注: 边际收益的定义是收益对销售量  $Q$  的导数, 而不是对价格  $p$  的导数.

10. 设  $D$  是由曲线  $xy + 1 = 0$  与直线  $y + x = 0$  及  $y = 2$  围成的有界区域, 则  $D$  的面积为\_\_\_\_\_.

 解: 画出积分区域图不难得到区域  $D$  的面积为  $S = \int_0^1 dy \int_{-y}^0 dx + \int_1^2 dy \int_{-\frac{1}{y}}^0 dx = \frac{1}{2} + \ln 2$ .

11. 设  $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

 解: 由条件得  $\int_0^a x e^{2x} dx = \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2x} \Big|_0^a = \left( \frac{a}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2a} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ , 因此  $a = \frac{1}{2}$ .

12. 二次积分  $\int_0^1 dy \int_y^1 \left( \frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$ \_\_\_\_\_.

 解:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 \left( \frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx &= \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x} dx - \int_0^1 dy \int_y^1 e^{y^2} dx \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x} dy - \int_0^1 (1 - y) e^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 (1 - y) e^{y^2} dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} e^{y^2} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{2}. \end{aligned}$$

13. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  的负惯性指数为 1, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

 解: 由配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$


因为负惯性指数为 1, 所以  $4 - a^2 \geq 0$ , 解得  $-2 \leq a \leq 2$ .

14. 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$



其中  $\theta$  是未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 若  $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$ , 则  $c =$ \_\_\_\_\_.

 解: 由条件得


$$\begin{aligned} E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cn E(X^2) \\ &= cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = \frac{2cn}{3\theta^2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_{\theta}^{2\theta} = \frac{5cn}{2} \theta^2 = \theta^2, \end{aligned}$$

因此  $c = \frac{2}{5n}$ .


三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}.$


 解: 当  $t > 0$  时,  $t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t > t^2 \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) - t = \frac{1}{2}$ , 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[ t^2 \left( e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \Big/ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 注: 事实上, 洛必达法则适用于  $\frac{?}{\infty}$  型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(本题满分 10 分)

设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 计算  $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$

 解: 积分区域关于直线  $y = x$  对称, 利用轮换对称性与极坐标可得

$$I = \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin(\pi r) dr \\
 &= -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z = f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$ , 若  $f(0) = 0, f'(0) = 0$ , 求  $f(u)$  的表达式.

 解: 利用多元复合函数偏导公式得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(e^x \cos y) e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y) e^x \cos y, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= -f'(e^x \cos y) e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y) e^x \cos y.
 \end{aligned}$$


所以等式  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$  化为

$$f''(e^x \cos y) e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y] e^{2x},$$

因此函数  $f(u)$  满足微分方程  $f''(u) = 4f(u) + u$ , 此方程的通解为  $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4}$ . 由  $f(0) = f'(0) = 0$  得  $C_1 + C_2 = 0, 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0$ , 解得  $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$ , 故  $f(u) = \frac{1}{16} (e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$ .

18.(本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$  的收敛域及和函数.

 解: 令  $a_n = (n+1)(n+3)$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ , 所以幂级数的收敛半径为  $R = 1$ . 当  $x = \pm 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$  发散, 因此幂级数的收敛域为  $(-1, 1)$ . 当  $x \in (-1, 1)$  时,

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left( \frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left( \frac{x}{1-x} \right)' \\
 &= \left( \frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' + \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' \\
 &= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3-x}{(1-x)^3}.
 \end{aligned}$$



19.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  单调增加,  $0 \leq g(x) \leq 1$ . 证明:

$$(1) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$(2) \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

解: (1) 因为  $0 \leq g(x) \leq 1$ , 所以  $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt = x - a, x \in [a, b]$ .

(2) 令  $F(x) = \int_a^x f(t) g(t) dt - \int_a^{a+\int_0^x g(u)du} f(t) dt$ , 则

$$F'(x) = f(x) g(x) - f\left(a + \int_a^x g(u) du\right) g(x) = \left[f(x) - a + \int_a^x g(u) du\right] g(x).$$

由 (1) 知  $a + \int_a^x g(t) dt \leq a + x - a = x$ , 而  $f(x)$  单调增加, 所以  $F'(x) \geq 0$ , 这说明  $F(x)$

单调增加. 又  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \geq 0$ , 即  $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$ .

20.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为三阶单位矩阵.

(1) 求方程  $Ax = 0$  的一个基础解系;

(2) 求满足  $AB = E$  的所有矩阵  $B$ .

解: (1) 对矩阵  $A$  作初等行变换得  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ , 则方程组

$Ax = 0$  的一个基础解系为  $\alpha = (-1, 2, 3, 1)^T$ .

(2) 对矩阵  $(A \ E)$  作初等行变换得

$$(A \ E) = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right).$$

记  $E = (e_1, e_2, e_3)$ , 则  $Ax = e_1$  的通解为  $x = (2, -1, -1, 0)^T + k_1 \alpha, k_1 \in \mathbb{R}$ ;  $Ax = e_2$  的通解为  $x = (6, -3, -4, 0)^T + k_2 \alpha, k_2 \in \mathbb{R}$ ;  $Ax = e_3$  的通解为  $x = (-1, 1, 1, 0)^T + k_3 \alpha, k_3 \in \mathbb{R}$ . 因此所求的矩阵为


$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1 \alpha, k_2 \alpha, k_3 \alpha) = \begin{pmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & -4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$



其中  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ .

## 21.(本题满分 11 分)

证明  $n$  阶矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$  相似.

 **解:** 先证明一个基本结论:

### 引理

秩为 1 的矩阵  $A$  可对角化的充要条件是  $\text{tr}(A) \neq 0$ . 且当  $\text{tr}(A) \neq 0$  时,  $A$  的相似标准形为  $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \cdots, 0\}$ .

• **证明:** 由于  $r(A) = 1$ , 所以方程组  $Ax = 0$  有且只有  $n-1$  个线性无关的解, 因此 0 至少是  $A$  的  $n-1$  重特征值, 且它只有  $n-1$  个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此  $A$  的最后一个特征值就是  $\text{tr}(A)$ . 当  $\text{tr}(A) \neq 0$  时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时  $A$  可对角化, 且其相似标准形为  $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \cdots, 0\}$ . 若  $\text{tr}(A) = 0$ , 则 0 是  $A$  的  $n$  重特征值, 但只有  $n-1$  个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.


由  $r(A) = r(B) = 1, \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = n$  可知  $A$  与  $B$  都相似于对角阵  $\text{diag}\{n, 0, \cdots, 0\}$ , 故  $A$  与  $B$  相似.

## 22.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率分布为  $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$ , 在给定  $X=i$  的条件下, 随机变量  $Y$  服从均匀分布  $U(0, i) (i=1, 2)$ .

(1) 求  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ ;

(2) 求  $EY$ .

 **解:** (1) 由分布函数定义得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X=1)P(Y \leq y|X=1) + P(X=2)P(Y \leq y|X=2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq y|X=1) + \frac{1}{2}P(Y \leq y|X=2) \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, & y \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$(2) Y \text{ 的概率密度为 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq y < 2, \text{ 因此} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$


$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}.$$

23.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X, Y$  的概率分布相同,  $X$  的概率分布为  $P(X=0) = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{2}{3}$ ,  
且  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$ .

(1) 求  $(X, Y)$  的概率分布;

(2) 求  $P(X+Y \leq 1)$ .

 **解:** (1) 由条件可得  $E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, D(X) = D(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ , 且  $E(XY) = P(X=1, Y=1)$ , 所以  $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{9}{2} \left( P(X=1, Y=1) - \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{2}$ , 于是  $P(X=1, Y=1) = \frac{5}{9}$ . 由此以及  $X, Y$  的边缘分布即可得  $(X, Y)$  的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

$$(2) P(X+Y \leq 1) = 1 - P(X+Y > 1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$



## 第 10 章 2015 年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设  $\{x_n\}$  是数列, 下列命题中不正确的是 ( )

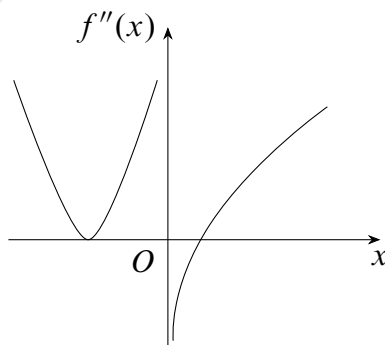
- A. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$   
 B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   
 C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$   
 D. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

**解:** 一个数列收敛的充要条件是它的任意子列都收敛于同一个极限, 因此 A 和 C 都对. 对于选项 B, 子列  $\{x_{2n}\}$  和  $\{x_{2n+1}\}$  刚好是  $\{x_n\}$  奇数子列和偶数子列, 这两个子列收敛于同一个极限, 也能说明  $\{x_n\}$  收敛. 但是 D 选项中少了子列  $\{x_{3n+2}\}$  的收敛性, 得不到  $\{x_n\}$  收敛, 错误的选 D.

2. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其二阶导函数  $f''(x)$  的图像如图所示, 则曲线  $y = f(x)$  的拐点个数为 ( )

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

**解:** 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知  $f''(x)$  的符号发生变化的点是原点和  $y = f''(x)$  在  $x > 0$  时与  $x$  轴的交点,  $x < 0$  时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.




第 2 题图

3. 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq 2y\}$ , 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \quad ( )$$

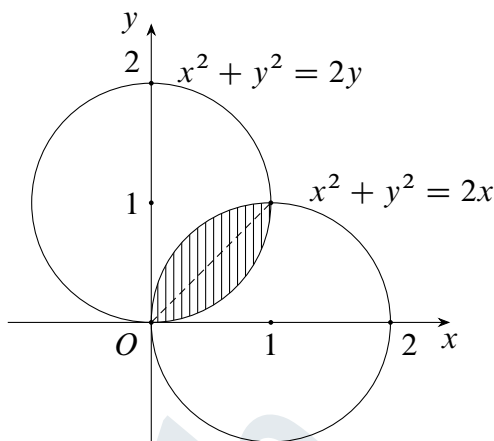
- A.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$   
 B.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$   
 C.  $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$   
 D.  $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$



 **解:** 积分区域如图. 如果化为直角坐标系下  $X$  型区域的累次积分, 积分区域可表示为

$$0 \leq x \leq 1, 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2},$$

那么累次积分为  $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ , 但是  $f(x, y)$  在区域的上下部分的积分不一定相等, 所以不能写成其中一半区域积分的两倍, C 和 D 都是不对的. 如果化为极坐标, 代入  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  可知上下两个圆的方程分别为  $r = 2 \sin \theta, r = 2 \cos \theta$ , 因此正确答案选 B.



第 3 题图


4. 下列级数中发散的是 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$

C.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$


 **解:** A 选项由比值法有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \frac{1}{3}$ , 故 A 选项收敛, B 选项中  $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ , 也收敛, C 选项中  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln(2n)}$  是发散的, D 选项由比值法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

所以 D 选项也收敛, 选 C.

5. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ , 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A.  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$     B.  $a \notin \Omega, d \in \Omega$     C.  $a \in \Omega, d \notin \Omega$     D.  $a \in \Omega, d \in \Omega$

 **解:** 方程组  $Ax = b$  有无穷多解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A \ b) < 3$ , 利用初等行变换得

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以  $a = 1$  或  $2, d = 1$  或  $2$ , 选 D.

6. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Py$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $P = (e_1, e_2, e_3)$ . 若  $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为 ( )



A.  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$     B.  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$     C.  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$     D.  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解: 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵为  $A$ , 由题意知  $P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . 由初等变换与初

等矩阵的关系知  $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = PC$ , 于是

$$Q^T A Q = C^T (P^T A P) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ , 选 A.

7. 设  $A, B$  为任意两个随机事件, 则 ( )

A.  $P(AB) \leq P(A)P(B)$     B.  $P(AB) \geq P(A)P(B)$   
C.  $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$     D.  $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$

解: 注意到  $P(AB) \leq P(A), P(AB) \leq P(B)$ , 因此  $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$ , 选 C.

8. 设随机变量  $X, Y$  不相关, 且  $EX = 2, EY = 1, DX = 3$ , 则  $E[X(X + Y - 2)] =$  ( )

A. -3    B. 3    C. -5    D. 5

解: 由条件可得

$$\begin{aligned} E[X(X + Y - 2)] &= E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X) \\ &= D(X) + (EX)^2 + E(X)E(Y) - 2E(X) = 5, \end{aligned}$$

选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.


解: 利用洛必达法则得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = -\frac{1}{2}$ .

10. 设函数  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt$ , 若  $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$ , 则  $f(1) =$  \_\_\_\_\_.

解: 由条件  $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$ , 求导得  $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2)$ , 故  $\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1, \varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$ , 则  $f(1) = 2$ .




11. 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$  确定, 则  $dz|_{(0,0)} =$ \_\_\_\_\_.

 解: 令  $x = y = 0$  可得  $z(0, 0) = 0$ , 原方程两边同时求全微分得


$$e^{x+2y+3z} (dx + 2dy + 3dz) + xyz = 0.$$

令  $x = y = z = 0$  得  $(dx + 2dy + 3dz)|_{(0,0)} = 0$ , 即  $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$ .

12. 设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的解, 且在  $x = 0$  处取得极值 3, 则  $y(x) =$ \_\_\_\_\_.

 解: 由题意知  $y(0) = 3, y'(0) = 0$ . 微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , 解得  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ , 所以微分方程的通解为  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ . 代入  $y(0) = 3, y'(0) = 0$  得  $C_1 = 2, C_2 = 1$ , 故  $y = 2e^x + e^{-2x}$ .

13. 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $2, -2, 1$ ,  $B = A^2 - A + E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 则行列式  $|B| =$ \_\_\_\_\_.

 解:  $A$  的特征值为  $2, -2, 1$  则  $B = A^2 - A + E$  的特征值为  $3, 7, 1$ , 因此  $|B| = 21$ .

14. 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(1, 0; 1, 1; 0)$ , 则  $P(XY - Y < 0) =$ \_\_\_\_\_.


 解: 由  $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$  知  $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 所以

$$\begin{aligned} P(XY - Y < 0) &= P((X - 1)Y < 0) = P(X - 1 > 0, Y < 0) + P(X - 1 < 0, Y > 0) \\ &= P(X > 1)P(Y < 0) + P(X < 1)P(Y > 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.


15. (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = x + a \ln(1 + x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值.

 解: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ , 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \ln(1 + x) + bx \sin x = x + a \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + bx^2 + o(x^3) \\ &= (1 + a)x + \left( b - \frac{a}{2} \right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$


因为  $f(x)$  与  $g(x) = kx^3$  当  $x \rightarrow 0$  时为等价无穷小, 所以  $1 + a = 0, b - \frac{a}{2} = 0, k = \frac{a}{3}$ , 解得  $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$ .

 注: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  是无法直接得到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$  的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.



16.(本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D x(x+y)dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$ .

 解: 区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 则由对称性得


$$\begin{aligned}\iint_D x(x+y)dx dy &= \iint_D x^2 dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy \\&= 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\&= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} \\&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cdot 2 \cos^2 t dt - \frac{2}{5} \quad (x = \sqrt{2} \sin t) \\&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

为实现利润的最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型. 设  $Q$  为该商品的需求量,  $P$  为价格,  $MC$  为边际成本,  $\eta$  为需求弹性 ( $\eta > 0$ ).

(1) 证明定价模型为  $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$ ;

(2) 若该商品的成本函数为  $C(Q) = 1600 + Q^2$ , 需求函数为  $Q = 40 - P$ , 试由 (1) 中的定价模型确定此商品的价格.

 解: (1) 由于利润函数  $L(Q) = R(Q) - C(Q) = PQ - C(Q)$ , 两边对  $Q$  求导得


$$\frac{dL}{dQ} = P + Q \frac{dP}{dQ} - C'(Q) = P + Q \frac{dP}{dQ} - MC.$$

当且仅当  $\frac{dL}{dQ} = 0$  时, 利润  $L(Q)$  最大. 又由于  $\eta = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$ , 故当  $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$  时, 利润最大.

(2) 由于  $MC = C'(Q) = 2Q = 3(40 - P)$ , 则  $\eta = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$ , 代入 (1) 中的定价模型, 得  $P = \frac{2(40-P)}{1 - \frac{40-P}{P}}$ , 解得  $P = 30$ .

18.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零, 若对任意的  $x_0 \in I$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$  及  $x$  轴所围成区域的面积恒为 4, 且  $f(0) = 2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

 解: 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线方程为  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , 此切线与  $x$  轴交点为  $(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0)$ . 根据题设条件可知  $\frac{1}{2} \frac{|f(x_0)|}{f'(x_0)} \cdot |f(x_0)| = 4$ , 即  $y = f(x)$  满足方程  $y' = \frac{1}{8} y^2$ , 解得  $y = -\frac{8}{8C + x}$ . 因为  $f(0) = 2$ , 所以  $C = -\frac{1}{2}$ , 故  $f(x) = \frac{8}{4-x}$ .




19.(本题满分 10 分)

(1) 设函数  $u(x), v(x)$  可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(2) 设  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导,  $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ , 写出  $f(x)$  的求导公式.

 解: (1) 因为函数  $u(x), v(x)$  可导, 记  $f(x) = u(x)v(x)$ , 则在任意点  $x_0$  处有

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0) + u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} u(x) + v(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\ &= u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

由  $x_0$  的任意性知  $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ .


(2)  $f'(x) = u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x)$ .

20.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 且  $A^3 = O$ .

(1) 求  $a$  的值;

(2) 若矩阵  $X$  满足  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ , 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵, 求  $X$ .

 解: (1) 因为  $|A| = O$ , 所以  $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0$ , 所以  $a = 0$ .

(2) 由  $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$  得  $(E - A)X(E - A^2) = E$ . 由 (1) 知

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$




21.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.

 解: (1) 由于矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相似, 所以  $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 + b \\ 2a - 3 = b \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$ .

(2) 由 (1) 知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , 由  $A$  与  $B$  相似知  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$ , 故  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$ .

当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  时, 解方程组  $(E - A)x = 0$ , 得线性无关特征向量  $\xi_1 = (2, 1, 0)^T, \xi_2 = (-3, 0, 1)^T$ .

当  $\lambda_3 = 5$  时, 解方程组  $(5E - A)x = 0$ , 得特征向量  $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$ .

取  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  为对角阵.

22.(本题满分 11 分)


设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

对  $X$  进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记  $Y$  为观测次数.

(1) 求  $Y$  的概率分布;

(2) 求  $EY$ .

 解: (1) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为  $p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$ , 则  $Y$  的概率分布为  $P(Y = k) = C_{k-1}^1 \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{k-2} \frac{1}{8} = (k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2, k = 2, 3, \dots$ .

(2)  $Y$  的数学期望为  $E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 16$ , 其中我们用到幂级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}, -1 < x < 1.$$



### 23.(本题满分 11 分)


设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中  $\theta$  为未知参数.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求  $\theta$  的矩估计量;

(2) 求  $\theta$  的最大似然估计量.

 **解:** (1) 由于总体  $X \sim U[\theta, 1]$ , 故总体均值  $E(X) = \frac{\theta+1}{2}$ , 令  $E(X) = \bar{X}$  得  $\theta = 2\bar{X} - 1$ , 即  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$ .

(2) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观测值, 则似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq x_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

当  $\theta \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  时, 显然  $L(\theta)$  关于  $\theta$  单调递增, 则当  $\theta = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  时  $L(\theta)$  最大, 即  $\theta$  的最大似然估计量为  $\hat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

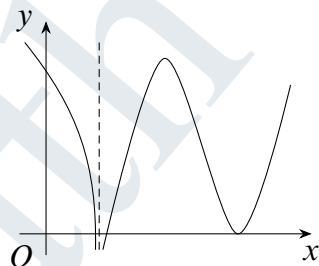


## 第 11 章 2016 年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ( )



第 1 题图

- A. 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点  
 B. 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 3 个拐点  
 C. 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 1 个拐点  
 D. 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点

**解:** 拐点是导函数单调性发生改变的点, 图中  $y = f'(x)$  的图像有两个极值点都是导函数单调性改变的点, 都是拐点, 而虚线处左右两侧的导函数单调性也相反, 从而也是拐点, 即共有 3 个拐点. 导函数为零的点有 3 个, 但只有前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 有 2 个极值点, 选 B.

2. 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x-y}$ , 则 ( )

- A.  $f'_x - f'_y = 0$       B.  $f'_x + f'_y = 0$       C.  $f'_x - f'_y = f$       D.  $f'_x + f'_y = f$

**解:** 由  $f(x) = \frac{e^x}{x-y}$  得  $f'_x(x, y) = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}$ ,  $f'_y(x, y) = \frac{e^x}{(x-y)^2}$ , 故  $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = \frac{e^x}{x-y} = f(x)$ , 选 D.

3. 设  $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} \, dx \, dy$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

则 ( )


- A.  $J_1 < J_2 < J_3$       B.  $J_3 < J_1 < J_2$       C.  $J_2 < J_3 < J_1$       D.  $J_2 < J_1 < J_3$

**解:** 注意到被积函数  $\sqrt[3]{x-y}$  当  $x > y$  时为正, 当  $x < y$  时为负, 画图比较三个积分区域易知选 B.

4. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$  ( $k$  为常数) ( )



- A. 绝对收敛                      B. 条件收敛  
C. 发散                              D. 收敛性与  $k$  有关

 解: 注意到

$$\left| \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| \leq \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

由正项级数比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$  绝对收敛, 选 A.

5. 设  $A, B$  是可逆矩阵, 且  $A$  与  $B$  相似, 则下列结论错误的是 ( )

- A.  $A^T$  与  $A^T$  相似                      B.  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似  
C.  $A + A^T$  与  $B + B^T$  相似                      D.  $A + A^{-1}$  与  $B + B^{-1}$  相似

 解: 由  $A$  与  $B$  相似知存在可逆矩阵  $P$  使得  $B = P^{-1}AP$ , 因此

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^T)^{-1}, B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$


$$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P,$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  与

$B$  相似, 但  $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$  与  $B + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$  不相似.

6. 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  的正负惯性指数分别为 1, 2, 则 ( )

- A.  $a > 1$                       B.  $a < -2$                       C.  $-2 < a < 1$                       D.  $a = 1$  或  $a = -2$


 解: 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ , 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2 = 0$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$ . 由于  $f(x_1, x_2, x_3)$  的正负惯性指数分别为 1, 2, 即正负特征值个数分别为 1, 2, 因此  $\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$ , 即  $-2 < a < 1$ , 选 C.

7. 设  $A, B$  为两个随机事件, 且  $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$ , 如果  $P(A|B) = 1$ , 则 ( )

- A.  $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$                       B.  $P(A|\bar{B}) = 1$                       C.  $P(A \cup B) = 1$                       D.  $P(B|A) = 1$

 解: 由条件得  $0 = P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}\bar{B})$ , 于是  $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} = 1$ , 选 A.




8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$ , 则  $D(XY) =$  ( )  
 A. 6                      B. 8                      C. 14                      D. 15

 解:

$$\begin{aligned} D(XY) &= E(X^2Y^2) - (EXY)^2 = (EX^2)(EY^2) - (EX)^2(EY)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EX)^2(EY)^2 = 14. \end{aligned}$$

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数  $f(x)$  满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ \_\_\_\_\_.

 解: 原极限存在, 且分母趋于 0, 所以分子趋于 0, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin 2x = 0$ , 利用等价无穷小替换得

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6.$$

10. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ \_\_\_\_\_.

 解: 利用定积分定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} = \int_0^1 x \sin x dx = \sin 1 - \cos 1. \end{aligned}$$


11. 设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} =$ \_\_\_\_\_.

 解: 原方程两边分别对  $x, y$  求偏导数得

$$\begin{cases} z + (x+1)z'_x = 2xf(x-z, y) + x^2(1-z'_x)f'_1(x-z, y) \\ (x+1)z'_y - 2y = x^2(-z'_y f'_1(x-z, y) + f'_2(x-z, y)) \end{cases}$$

代入  $x=0, y=1, z=1$  可得  $z'_x(0,1)=-1, z'_y(0,1)=2$ , 因此  $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$ .


12. 设  $D = \{(x, y) | |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ , 则  $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ \_\_\_\_\_.

 解: 设  $D_1$  是  $D$  在第一象限的部分, 根据对称性可得

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= 2 \iint_{D_1} x^2 e^{-y^2} dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{3} - \frac{2}{3e}. \end{aligned}$$




13.行列式  $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 **解:** 直接按照第一列展开得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left( \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4. \end{aligned}$$


14.设袋中有红、白、黑球各 1 个,从中有放回地取球,每次取 1 个,直到三种颜色的球都取到时停止,则取球次数恰为 4 的概率为\_\_\_\_\_.

 **解:** 4 次取球总的取法数为  $3^4 = 81$ ,要想取 4 次结束,则前 3 次刚好只取到了两种颜色,第 4 次取到了第三种颜色,因此所求概率为  $p = \frac{C_3^2 C_3^1 \times 2}{81} = \frac{2}{9}.$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$

 **解:** 首先有  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} \right),$  其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x - 1 + 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - 2 \sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (x - \sin x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{1}{6} x^3}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

因此原极限为  $e^{\frac{1}{3}}.$


16.(本题满分 10 分)

设某商品最大需求量为 1200 件,该商品的需求函数  $Q = Q(p),$  需求弹性  $\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0),$   $p$  为单价 (万元).



(1) 求需求函数的表达式;


(2) 求  $p = 100$  万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

 **解:** (1) 由弹性的计算公式  $\eta = \left| \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right|$  可知  $\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \frac{-p}{120-p}$ , 分离变量解方程得到  $Q = C(p-120)$ , 其中  $C$  为任意常数. 又商品的最大需求量为 1200 件, 则  $p = 0$  时  $Q = 1200$ , 因此  $C = -10$ , 则  $Q = 10(120-p)$ .

(2) 收益函数  $R(p) = pQ = \frac{Q(1200-Q)}{10} = 120Q - \frac{Q^2}{10}$ , 边际收益为  $R'(Q) = 120 - \frac{Q}{5}$ . 当  $p = 100$  时,  $Q = 200$ , 此时边际收益为  $R'(200) = 80$ , 其经济意义为当单价为 100 万元时, 需求量每增加 1 件, 收益将增加 80 万元.

17.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ , 求  $f'(x)$  并求  $f(x)$  的最小值.

 **解:** 首先


$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases},$$

于是  $f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ . 当  $x \geq 1$  时,  $f'(x) = 2x > 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时, 令

$f'(x) = 4x^2 - 2x = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ , 且  $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ , 因此  $x = \frac{1}{2}$  是唯一的极小值点, 从而是最小值点, 故  $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

18.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  连续, 且满足  $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$ , 求  $f(x)$ .

 **解:** 首先有  $\int_0^x f(x-t)dt \xrightarrow{x-t=u} \int_0^x f(u)du$ , 因此原方程化为

$$\int_0^x f(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1.$$

上式两边求导得  $f(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x} = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}$ . 注意到此方程右边可导, 从而继续求导得  $f'(x) = f(x) + e^{-x}$ , 且  $f(0) = -1$ , 解此一阶线性微分方程得  $f(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ .

19.(本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$  的收敛域及和函数.



**解:** 记  $u_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(2n-1)x^2}{(n+1)(2n+1)} \right| = x^2$ . 令  $x^2 < 1$  得  $-1 < x < 1$ , 因此幂级数的收敛区间为  $(-1, 1)$ . 且当  $x = \pm 1$  时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 2 \ln 2, \end{aligned}$$

因此幂级数的收敛域为  $[-1, 1]$ . 当  $x \in (-1, 1)$  时, 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n},$$

其中  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = -\ln(1-x^2)$ , 而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} = 2 \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = 2 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

因此原幂级数的和函数为  $S(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2), & x \in (-1, 1) \\ 2 \ln 2, & x = \pm 1 \end{cases}$ .

20.(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$ . 当  $a$  为何值时, 方程  $AX = B$

无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

**解:** 对方程的增广矩阵  $(A, B)$  作初等行变换得

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{当 } a \neq 1 \text{ 且 } a \neq -2 \text{ 时, } (A, B) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+3 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

$$\text{此时方程 } AX = B \text{ 有唯一解, 且 } X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



当  $a = 1$  时,  $(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , 此时方程  $AX = B$  有无穷多解, 且  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 - 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数.


当  $a = -2$  时, 由于  $(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ , 此时方程  $AX = B$  无解.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $A^{99}$ ;

(2) 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ , 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合.

 解: (1) 首先由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$  知  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$ .

当  $\lambda_1 = -1$  时, 解方程组  $(-E - A)x = 0$ , 得特征向量  $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$ .

当  $\lambda_2 = -2$  时, 解方程组  $(-2E - A)x = 0$ , 得特征向量  $\xi_2 = (1, 2, 0)^T$ .

当  $\lambda_3 = 0$  时, 解方程组  $Ax = 0$ , 得特征向量  $\xi_3 = (3, 2, 2)^T$ .

令  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$ , 所以

$$\begin{aligned} A^{99} &= (P\Lambda P^{-1})^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{99} - 2 & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ 2^{100} - 2 & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



(2) 由  $B^2 = BA$  知  $B^{100} = BA^{99} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 即  $\beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2$ ,  $\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2$ ,  $\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$ .

## 22.(本题满分 11 分)


设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$  上服从均匀

分布, 令  $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$ .

(1) 写出  $(X, Y)$  的概率密度;

(2) 问  $U$  与  $X$  是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求  $Z = U + X$  的分布函数  $F(z)$ .

 解: (1)  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(2) 对  $0 < t < 1$ , 有

$$P(U \leq 0, X \leq t) = P(X > Y, X \leq t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^x 3 dy = \frac{3}{2}t - t^3,$$

$$P(U \leq 0) = P(X > Y) = \frac{1}{2}, P(X \leq t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = 2t^{\frac{3}{2}} - t^3.$$

由于  $P(U \leq 0, X \leq t) \neq P(U \leq 0)P(X \leq t)$ , 所以  $U$  与  $X$  不独立.

(3)

$$\begin{aligned} F(z) &= P(U + X \leq z) = P(U + X \leq z, U = 0) + P(U + X \leq z, U = 1) \\ &= P(X \leq z, X > Y) + P(1 + X \leq z, X \leq Y) \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

## 23.(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta \in (0, +\infty)$  为未知参数.  $X_1, X_2, X_3$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 令  $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ .



(1) 求  $T$  的概率密度;

(2) 确定  $a$ , 使得  $E(aT) = \theta$ .

 解: (1)  $T$  的分布函数为

$$F(t) = P(T \leq t) = P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t)$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(\int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3} dx\right)^3, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t^9}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases}.$$

因此  $T$  的概率密度为  $f(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(2) 令  $E(aT) = \int_0^\theta at \frac{9t^8}{\theta^9} dt = \frac{9}{10}a\theta = \theta$ , 解得  $a = \frac{10}{9}$ .



## 第 12 章 2017 年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则 ( )
- A.  $ab = \frac{1}{2}$       B.  $ab = -\frac{1}{2}$       C.  $ab = 0$       D.  $ab = 2$

解: 由  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续得  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2},$$

选 A.

2. 二元函数  $z = xy(3 - x - y)$  的极值点是 ( )
- A. (0, 0)      B. (0, 3)      C. (3, 0)      D. (1, 1)

解: 由  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$  可得四个驻点 (0, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 1). 令  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 - 2x - 2y$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$ , 在四个驻点处分别考虑判别式  $AC - B^2$  的正负, 只有在  $(x, y) = (1, 1)$  处有  $AC - B^2 = 3 > 0$ , 且  $A = C = -2 < 0$ , 因此 (1, 1) 为极大值点. 其他选项都不满足, 选 D.

3. 设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(x) \cdot f'(x) > 0$ , 则 ( )
- A.  $f(1) > f(-1)$       B.  $f(1) < f(-1)$   
C.  $|f(1)| > |f(-1)|$       D.  $|f(1)| < |f(-1)|$

解: 由  $f(x)f'(x) > 0$  可知  $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) > 0$ , 因此  $f^2(x)$  单调递增, 有  $f^2(1) > f^2(-1)$ , 即  $|f(1)| > |f(-1)|$ , 选 C.

4. 若级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sin \frac{1}{n} - k \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right]$  收敛, 则  $k =$  ( )
- A. 1      B. 2      C. -1      D. -2

解: 利用泰勒公式可得知当  $n \rightarrow \infty$  时,


$$\sin \frac{1}{n} - k \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - k \left( -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{n} + \frac{k}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因此当且仅当  $1 + k = 0$  即  $k = -1$  时原级数收敛, 选 C.


5. 设  $\alpha$  为  $n$  维单位列向量,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则 ( )

- A.  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆                      B.  $E + \alpha\alpha^T$  不可逆  
C.  $E + 2\alpha\alpha^T$  不可逆                      D.  $E - 2\alpha\alpha^T$  不可逆

 解: 矩阵  $\alpha\alpha^T$  的秩为 1, 它有  $n-1$  个特征值为 0, 第  $n$  个特征值为  $\lambda = \text{tr}(\alpha\alpha^T) = \|\alpha\|^2 = 1$ , 因此  $E - \alpha\alpha^T$  有一个特征值为 0, 不可逆, 其他矩阵都可逆, 选 A.

6. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则 ( )

- A.  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  相似                      B.  $A$  与  $C$  相似,  $B$  与  $C$  不相似  
C.  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  相似                      D.  $A$  与  $C$  不相似,  $B$  与  $C$  不相似

 解: 注意到  $A, B$  的特征值都是 2, 2, 1, 要判断  $A, B$  是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值  $\lambda = 2$  的情形即可. 对矩阵  $A$  有  $r(2E - A) = 1$ , 因此  $A$  的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即  $A$  与  $C$  相似. 对矩阵  $B$ , 有  $r(2E - B) = 2$ , 它是不可对角化的,  $B$  与  $C$  不相似, 选 B.

7. 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 且  $A$  与  $C$  相互独立,  $B$  与  $C$  相互独立, 则  $A \cup B$  与  $C$  相互独立的充分必要条件是 ( )

- A.  $A$  与  $B$  相互独立                      B.  $A$  与  $B$  互不相容  
C.  $AB$  与  $C$  相互独立                      D.  $AB$  与  $C$  互不相容

 解:  $A \cup B$  与  $C$  相互独立  $\Leftrightarrow P((A \cup B)C) = P(A \cup B)P(C)$ , 由题意有

$$\begin{aligned} P((A \cup B)C) &= P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC), \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(ABC), \\ P(A \cup B)P(C) &= (P(A) + P(B) - P(AB))P(C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C), \end{aligned}$$

因此得到  $P(ABC) = P(AB)P(C)$ , 选 C.

8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自正态总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则下列结论中不正确的是 ( )

- A.  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布                      B.  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布  
C.  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布                      D.  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布

- 解: 对选项 B 有  $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$ ,  $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ ,  $\frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$ , B 不正确, 选项 A, C, D 都是基本结论, 都正确, 选 B.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

- 解: 利用定积分的区间对称性和几何意义可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = \frac{\pi^3}{2}.$$

10. 差分方程  $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

- 解: 首先齐次差分方程  $y_{t+1} - 2y_t = 0$  的通解为  $Y_t = C \cdot 2^t$ . 设非齐次方程  $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$  的一个特解为  $t_t = At \cdot 2^t$ , 代入方程可得  $A = \frac{1}{2}$ , 因此差分方程  $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$  的通解为  $y_t = C \cdot 2^t + t \cdot 2^{t-1}$ ,  $C$  为任意常数.

11. 设生产某产品的平均成本  $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$ , 其中  $Q$  为产量, 则边际成本为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

- 解: 总成本为  $C(Q) = Q(1 + e^{-Q})$ , 因此边际成本为  $C'(Q) = 1 + e^{-Q}(1 - Q)$ .

12. 设函数  $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 且  $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$ ,  $f(0, 0) = 0$ , 则  $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

- 解: 容易知道  $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy = d(xye^y)$ , 因此  $f(x, y) = xye^y + C$ , 再由  $f(0, 0) = 0$  知  $C = 0$ , 因此  $f(x, y) = xye^y$ .

13. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组  $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$  的秩为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

- 解: 依题意知  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  为可逆矩阵, 所以

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = r(A) = 2.$$

14. 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P(X = -2) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X = 1) = a$ ,  $P(X = 3) = b$ , 若  $EX = 0$ , 则  $DX = \underline{\hspace{2cm}}.$


- 解: 由分布律的归一性可知  $\frac{1}{2} + a + b = 1$ . 而  $EX = -2 \times \frac{1}{2} + a + 3b = 0$ , 所以  $a = b = \frac{1}{4}$ . 从而  $EX^2 = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2}$ ,  $DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{9}{2}$ .



### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)


求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}.$

 解: 令  $u = x - t$ , 则  $\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du$ , 故原极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16.(本题满分 10 分)

计算积分  $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$ , 其中  $D$  是第一象限中以曲线  $y = \sqrt{x}$  与  $x$  轴为边界的无界区域.

 解: 直接化为累次积分得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left( -\frac{1}{1+x^2+y^4} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right).$


 解: 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) d(x^2) \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知方程  $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$  在区间  $(0, 1)$  内有实根, 求  $k$  的范围.



 **解:** 令  $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ , 方程  $f(x) = k$  有实根的充要条件是  $k$  在  $f(x)$  的值域内. 求导得

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + (x+1)\ln^2(1+x)}{x^2(x+1)\ln^2(1+x)},$$

令  $g(x) = -x^2 + (x+1)\ln^2(1+x)$ , 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x + \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x), \\ g''(x) &= -2 + \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} = \frac{-2x + 2\ln(1+x)}{1+x}, \end{aligned}$$

因此  $g'(x)$  在  $(0, 1)$  内单调递减,  $g'(x) < g'(0) = 0$ , 故  $g(x)$  也在  $(0, 1)$  内单调递减,  $g(x) < g(0) = 0$ , 即  $f'(x) < 0$ . 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内单调递减. 而  $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$


故  $k$  的取值范围是  $\left(\frac{1}{\ln 2} - 1, \frac{1}{2}\right)$ .

#### 19.(本题满分 10 分)

设  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, \dots)$ ,  $S(x)$  为幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数.

(1) 证明幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径不小于 1;

(2) 证明  $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0, x \in (-1, 1)$ , 并求  $S(x)$  的表达式.

 **解:** (1) 由递推关系可得  $(n+1)a_{n+1} = na_n + a_{n-1}$ , 即  $(n+1)(a_{n+1} - a_n) = -(a_n - a_{n-1})$ , 因此

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1}) = \cdots = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1 - a_0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

于是  $a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \rightarrow e^{-1}$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 这说明原幂级数的收敛半径就是 1.

(2) 因为  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  且  $a_1 = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n + a_{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \end{aligned}$$



$$= xS'(x) + xS(x).$$


所以有  $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$ , 且  $S(0) = a_0 = 1$ , 解此微分方程得  $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

## 20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有三个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ .

(1) 证明:  $r(A) = 2$ ;

(2) 若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求方程  $Ax = \beta$  的通解.


 解: (1) 由于矩阵  $A$  有三个不同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 因此  $A$  与对角阵  $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以  $r(A) \geq 2$ . 又  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$  说明  $A$  的列向量组线性相关, 故  $r(A) \leq 2$ , 因此  $r(A) = 2$ .

(2) 因为  $r(A) = 2$ , 所以  $Ax = 0$  的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$  可知  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ , 即方程组  $Ax = 0$  的一个解就是  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . 而  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 则方程

组  $Ax = \beta$  的一个特解为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 进而方程组  $Ax = \beta$  的通解为  $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

## 21.(本题满分 11 分)

设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 求  $a$  的值及一个正交矩阵  $Q$ .

 解: 首先二次型的矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$ . 由于二次型在正交变换下的标准形为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 故  $A$  一定有零特征值, 所以  $|A| = 0$ , 解得  $a = 2$ .

由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 6)$  可知  $A$  的三个特征值为  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$ .

解方程组  $(-3E - A)x = 0$  得特征值  $\lambda_1 = -3$  的一个单位特征向量  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

解方程组  $(6E - A)x = 0$  得特征值  $\lambda_2 = 6$  的一个单位特征向量  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



解方程组  $Ax = 0$  得特征值  $\lambda_3 = 0$  的一个单位特征向量  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

因此  $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$  即为所求正交矩阵.


## 22.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且  $X$  的概率分布为  $P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{2}$ ,  $Y$  的

概率密度为  $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(1) 求概率  $P(Y \leq EY)$ ;

(2) 求  $Z = X + Y$  的概率密度.

 解: (1) 首先有  $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 y \cdot 2ydy = \frac{2}{3}$ , 于是

$$P(Y \leq EY) = P\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) = \int_0^{\frac{2}{3}} 2ydy = \frac{4}{9}.$$

(2)  $Z$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(Y + X \leq z | X=0)P(X=0) + P(Y + X \leq z | X=2)P(X=2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq z | X=0) + \frac{1}{2}P(Y + 2 \leq z) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z - 2) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z - 2). \end{aligned}$$

因此  $Z$  的概率密度为  $f_Z(z) = \frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z - 2) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ z - 2, & 2 < z < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

## 23.(本题满分 11 分)


某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做了  $n$  次测量, 该物体的质量  $\mu$  是已知的. 设  $n$  次测量的结果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且均服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ . 该工程师记录的是  $n$  次测量的绝对误差  $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$ , 利用  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  估计参数  $\sigma$ .

(1) 求  $Z_1$  的概率密度;

(2) 利用一阶矩求  $\sigma$  的矩估计量;



(3) 求参数  $\sigma$  的最大似然估计量.

 解: (1) 由  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  可知  $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .  $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$  独立同分布, 设  $Z_1$  的分布函数为  $F(z)$ , 则

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z_i \leq z) = P(|X_i - \mu| \leq z) = P\left(-\frac{z}{\sigma} \leq \frac{X_i - \mu}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned}$$

则  $Z_1$  的概率密度为

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数,  $\varphi(x)$  为标准正态概率密度.

(2) 设  $\bar{Z}$  为样本均值, 令

$$\bar{Z} = E(Z_1) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

由此可知  $\sigma$  的矩估计量  $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\bar{Z}$ .

(3) 设  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  对应的样本值为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(z_i) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2}, & z_1, z_2, \dots, z_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $z_1, z_2, \dots, z_n > 0$  时, 取对数得  $\ln L(\sigma) = \frac{n}{2} \ln \frac{2}{\pi} - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$ , 令

$$\frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0,$$

解得  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}$ , 故  $\sigma$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}$ .





## 第 13 章 2018 年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在  $x = 0$  处不可导的是 ( )

A.  $f(x) = |x| \sin |x|$

B.  $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C.  $f(x) = \cos |x|$

D.  $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

解: A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得  $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $f'_-(0) = \frac{1}{2}$ , 选 D.

2. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 则 ( )

A. 当  $f'(x) < 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

B. 当  $f''(x) < 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

C. 当  $f'(x) > 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D. 当  $f''(x) > 0$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

解: 考虑  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处的泰勒展开式:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当  $f''(x) > 0$  时,  $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 不等式两边在  $[0, 1]$  上进行积分可得  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ , 选 D.

3. 设  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$ ,  $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$ ,  $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$ , 则 ( )

A.  $M > N > K$

B.  $M > K > N$

C.  $K > M > N$

D.  $N > M > K$

解: 利用对称性可以计算  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi$ , 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见  $K > \pi = M > N$ .

4. 设某产品的成本函数  $C(Q)$  可导, 其中  $Q$  为产量, 若产量为  $Q_0$  时平均成本最小, 则 ( )

A.  $C'(Q_0) = 0$

B.  $C'(Q_0) = C(Q_0)$

C.  $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$

D.  $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$

解: 平均成本  $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q}$ ,  $\bar{C}' = \frac{C'(Q)Q - C(Q)}{Q^2}$ . 产量为  $Q_0$  时平均成本最小, 则  $\bar{C}'(Q_0) = 0$ , 可得  $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$ , 选 D.

5. 下列矩阵中, 与矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  相似的为 ( )

A.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  B.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  C.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  D.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解: 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵  $\lambda E - A$  的秩相等, 即  $E - A$  的秩相等, 选 A.

6. 设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 记  $r(X)$  为矩阵  $X$  的秩,  $(X \ Y)$  表示分块矩阵, 则 ( )

A.  $r(A \ AB) = r(A)$  B.  $r(A \ BA) = r(A)$   
C.  $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$  D.  $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$

解: 对于 A, 有  $(A \ AB) = A(E \ B)$ , 且  $(E \ B)$  为行满秩的矩阵, 则  $r(A \ AB) = r(A)$ , 即选 A. B 错误, 反例取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . C 错误,  $r(A \ B) \geq \max\{r(A), r(B)\}$ , 反例取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . D 错误, 反例取  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

7. 设随机变量  $X$  的概率密度  $f(x)$  满足  $f(1+x) = f(1-x)$ , 且  $\int_0^2 f(x)dx = 0.6$ , 则  $P(X < 0) =$  ( )  
A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

解: 由  $f(1+x) = f(1-x)$  知  $f(x)$  关于  $x = 1$  对称, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 0.3,$$

于是  $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0.5 - 0.3 = 0.2$ , 选 A.

8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$  的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2},$$

则 ( )

A.  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n)$  B.  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$   
C.  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n)$  D.  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1)$


解: 首先由  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  可知  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$ . 而样本方差

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  满足的分布为  $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$ , 且样本均值与样本方差独


立, 根据  $t$  分布的定义知  $\frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$ , 选 B.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线  $y = x^2 + 2 \ln x$  在其拐点处的切线方程是 \_\_\_\_\_.

 **解:** 计算可得  $y' = 2x + \frac{2}{x}$ ,  $y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$ , 由此得曲线的拐点坐标  $(1, 1)$ . 曲线在拐点处切线的斜率为  $y'|_{x=1} = 4$ , 故切线方程为  $y = 4x - 3$ .

10.  $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx =$  \_\_\_\_\_.

 **解:** 令  $\arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} = t$ , 则  $e^x = \cos t$ ,  $dx = -\frac{\sin t}{\cos t} du$ , 原积分化为

$$-\int t \cos t \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\int t \sin t dt = t \cos t - \int \cos t dt = t \cos t - \sin t + C,$$

带回原变量得原不定积分为  $e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$ .


11. 差分方程  $\Delta^2 y_x - y_x = 5$  的通解是 \_\_\_\_\_.

 **解:** 根据二阶差分的定义可得


$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x = (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

由  $\Delta^2 y_x - y_x = 5$  得  $y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$ . 先求齐次方程的通解, 齐次差分方程的特征方程  $\lambda - 2 = 0$ , 齐次方程通解为  $Y = C \cdot 2^x$ . 由于 1 不是特征根, 于是假设原差分方程的特解为  $y_x^* = A$ , 代入非齐次方程知特解为  $y_x^* = -5$ , 于是原方程的通解为  $y_x = C \cdot 2^x - 5$ .

12. 设函数  $f(x)$  满足  $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), 且  $f(0) = 2$ , 则  $f(1) =$  \_\_\_\_\_.

 **解:** 在等式  $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$  两边除以  $\Delta x$ , 并令  $\Delta x \rightarrow 0$  得  $f'(x) = 2xf(x)$ , 解得  $f(x) = Ce^{x^2}$ . 由  $f(0) = 2$  得  $C = 2$ , 于是  $f(1) = 2e$ .


13. 设  $A$  为三阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的向量组. 若  $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$ ,  $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$ , 则  $A$  的实特征值为 \_\_\_\_\_.

 **解:** 由题意得  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . 由于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

记  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P$  是可逆矩阵, 因此矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相似, 它们

有相同的特征值, 易求得  $B$  的实特征值为 2, 即  $A$  的实特征值为 2.

14. 随机事件  $A, B, C$  相互独立, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ , 则  $P(AC|A \cup B) =$  \_\_\_\_\_.


 **解:** 直接计算得  $P(AC|A \cup B) = \frac{P[(AC) \cup (ABC)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(AC)}{P(A) + P(B) - P(AB)} = \frac{1}{3}$ .



### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

#### 15.(本题满分 10 分)

已知实数  $a, b$  满足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$ , 求  $a, b$ .


 **解:** 直接利用泰勒公式得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (ax + b) \left( 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (a-1)x + a + b + \frac{b}{x} + (ax + b)o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= 2\end{aligned}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b)o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , 所以  $\begin{cases} a-1=0 \\ a+b=2 \end{cases}$ , 解得  $a=b=1$ .


#### 16.(本题满分 10 分)


设平面区域  $D$  由曲线  $y = \sqrt{3(1-x^2)}$  与直线  $y = \sqrt{3}x$  及  $y$  轴围成, 计算二重积分  $\iint_D x^2 dx dy$ .

 **解:** 直接化成累次积分计算可得


$$\begin{aligned}\iint_D x^2 dx dy &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 dx \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} dy \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \left( \sqrt{3(1-x^2)} - \sqrt{3}x \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{3(1-x^2)} dx - \sqrt{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{32} \pi - \frac{\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

#### 17.(本题满分 10 分)

 将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

 **解:** 设分成的三段依次为  $x, y, z$ , 则  $x + y + z = 2$ , 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为  $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$ , 因此三个面积的和为

$$S = \pi \left( \frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left( \frac{y}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{z}{3} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

 此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

方法一 令  $f(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 + \lambda(x + y + z - 2)$ , 首先求驻点. 由方程

$$\begin{cases} f'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ f'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0 \\ f'_z = \frac{\sqrt{3}}{18}z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{可得} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ 并且黑塞矩阵 } Hf = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{18} \right\} \text{ 正}$$


定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为  $S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} m^2$ .

方法二 由柯西不等式  $\left( \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 \right) \left( 4\pi + 16 + \frac{36}{\sqrt{3}} \right) \geq (x + y + z)^2 = 4$ , 因此

$$\text{当 } \frac{x}{2\pi} = \frac{y}{16} = \frac{z}{12\sqrt{3}} \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ 时, } S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} m^2.$$

18.(本题满分 10 分)

已知  $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $-1 < x < 1$ ), 求  $a_n$ .

 解: 首先  $\left( \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{1+x} \right)' = \cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2}$ , 而当  $-1 < x < 1$  时,

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1}, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$


. 求导得

$$\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n.$$

比较系数可得  $a_n = \begin{cases} 2k+2, & n = 2k+1 \\ \frac{(-4)^k}{(2k)!} - (2k+1), & n = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$

19.(本题满分 10 分)

设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明  $\{x_n\}$  收敛并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

 解: 首先由  $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 归纳可知所有  $x_n > 0$ . 考虑函数  $f(x) = e^x$ , 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$




这就说明  $x_n > x_{n+1} > 0$ , 因此  $\{x_n\}$  单调递减有下界, 故收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \geq 0$ , 在等式  $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$  两边取极限得  $xe^x = e^x - 1$ . 如果  $x > 0$ , 则  $e^x = \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ , 矛盾, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$ .

## 20.(本题满分 11 分)

设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$ , 其中  $a$  是参数.

(1) 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解;

(2) 求  $f(x_1, x_2, x_3)$  的规范形.

 解: (1) 由  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  可得方程组 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$$
. 对其系数矩阵进行初等行变换

换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果  $a = 2$ , 则方程组的通解为  $(x_1, x_2, x_3)^T = c(-2, -1, 1)^T$ . 如果  $a \neq 2$ , 则方程组只有零解  $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$ .

(2) 如果  $a \neq 2$ , 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Qx.$$

其中  $Q$  是可逆矩阵, 所以此时的规范形为  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

如果  $a = 2$ , 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$ .


## 21.(本题满分 11 分)

已知  $a$  是常数, 且矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$  可经初等列变换化为矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(1) 求  $a$ ;



(2) 求满足  $AP = B$  的可逆矩阵  $P$ .

 **解:** (1) 由于矩阵  $A$  可经过初等列变换化为矩阵  $B$ , 因此  $A$  和  $B$  的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array} \right).$$

因此  $a = 2$ .

(2) 问题等价于解矩阵方程  $AX = B$ , 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(A, B) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$


解得  $P = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$ ,  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数. 注意到  $P$  是可逆矩阵, 因此  $|P| \neq 0$ , 这要求  $k_2 \neq k_3$ .

## 22.(本题满分 11 分)

已知随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  的概率分布为  $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$ ,  $Y$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 令  $Z = XY$ .

(1) 求  $\text{Cov}(X, Z)$ ;

(2) 求  $Z$  的概率分布.

 **解:** (1) 直接计算可知  $E(X) = 0$ ,  $E(X^2) = 1$ , 而  $Y \sim P(\lambda)$ ,  $E(Y) = \lambda$ , 因此

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Z) &= \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) \\ &= E(X^2)E(Y) - (EX)^2E(Y) = \lambda. \end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X = 1)P(Z = k|X = 1) + P(X = -1)P(Z = k|X = -1) \\ &= P(X = 1)P(Y = k) + P(X = -1)P(Y = -k) \\ &= \frac{1}{2}P(Y = k) + \frac{1}{2}P(Y = -k). \end{aligned}$$

当  $k = 1, 2, 3, \dots$  时,  $P\{Z = k\} = \frac{1}{2}P\{Y = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{2k!}$ ;

当  $k = 0$  时,  $P(Z = 0) = P(Y = 0) = e^{-\lambda}$ ;

当  $k = -1, -2, -3, \dots$  时,  $P\{Z = k\} = \frac{1}{2}P\{Y = -k\} = \frac{\lambda^{-k} e^{-\lambda}}{2(-k)!}$ .



因此综上所述可得

$$P(Z = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^{|k|} e^{-\lambda}}{2 |k|!}, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{-\lambda}, & k = 0 \end{cases}.$$

### 23.(本题满分 11 分)


设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中  $\sigma \in (0, +\infty)$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 记  $\sigma$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}$ .

(1) 求  $\hat{\sigma}$ ;

(2) 求  $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$ .

 **解:** (1) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  对应的样本值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = 2^{-n} \sigma^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}},$$

取对数得  $\ln L(\sigma) = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|$ . 令  $\frac{d \ln L}{d \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$ , 解得

$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$ , 因此  $\sigma$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$ .

(2) 因为  $E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \sigma$ , 所以

$$E(\hat{\sigma}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E(|X|) = \sigma,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = 2\sigma^2,$$


$$D(\hat{\sigma}) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{1}{n} (E(X^2) - (E|X|)^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$




## 第 14 章 2019 年考研数学三

### 一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.


1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \tan x$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 则  $k =$  ( )  
A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

 解: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$ , 因此选 C.

2. 已知方程  $x^5 - 5x + k = 0$  有 3 个不同的实根, 则  $k$  的取值范围是 ( )  
A.  $(-\infty, -4)$               B.  $(4, +\infty)$               C.  $\{-4, 4\}$               D.  $(-4, 4)$

 解: 令  $f(x) = x^5 - 5x + k$ , 则  $f'(x) = 5x^4 - 5$ , 由  $f'(x) = 0$  可得  $x = \pm 1$ . 当  $-1 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x < -1$  或  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ . 因此有极大值  $f(-1) = 4 + k$ , 极小值  $f(1) = k - 4$ , 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 要想原方程有 3 个不同的实根, 则有  $f(-1) > 0, f(1) < 0$ , 解得  $-4 < k < 4$ , 选 D.


3. 已知微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的通解为  $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$ , 则  $a, b, c$  依次为 ( )  
A. 1, 0, 1                      B. 1, 0, 2                      C. 2, 1, 3                      D. 2, 1, 4

 解: 从通解的结构可知,  $Y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$  是对应齐次方程的通解, 因此  $\lambda = -1$  是特征方程的二重特征根, 因此  $a = 2, b = 1$ . 而  $y^* = e^x$  是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程  $y'' + 2y' + y = ce^x$  可得  $c = 4$ , 选 D.

4. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$  条件收敛, 则 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$  条件收敛  
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  收敛

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$  绝对收敛  
D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  发散

 解: 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$  条件收敛, 故它的通项趋于零, 则存在  $M > 0$  使得  $\left| \frac{v_n}{n} \right| \leq M$ , 因此  $|u_nv_n| = \left| nu_n \cdot \frac{v_n}{n} \right| \leq M|nu_n|$ . 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$  绝对收敛, 选 B. 对于 A 和 C 选项, 可取反例  $u_n = \frac{1}{n^3}, v_n = (-1)^n$ ; 对于 D 选项, 可取反例  $u_n = \frac{1}{n^3}, v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ .


5. 设  $A$  是四阶矩阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 若线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系中只有两个向量, 则  $r(A^*) =$  ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

 **解:** 由于方程组  $Ax = 0$  的基础解系中只有两个向量, 故  $r(A) = 2$ , 因此  $r(A^*) = 0$


6. 设  $A$  是 3 阶实对称矩阵,  $E$  是 3 阶单位矩阵, 若  $A^2 + A = 2E$ , 且  $|A| = 4$ , 则二次型  $x^T Ax$  的规范形为 ( )

- A.  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$       B.  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$       C.  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$       D.  $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

 **解:** 由  $A^2 + A = 2E$  可知矩阵  $A$  的特征值  $\lambda$  满足  $\lambda^2 + \lambda = 2$ , 因此  $\lambda = 1$  或  $-2$ . 再由  $|A| = 4$  可知  $A$  的特征值为  $-2, -2, 1$ . 因此二次型  $x^T Ax$  的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.


7. 设  $A, B$  为随机事件, 则  $P(A) = P(B)$  的充分必要条件是 ( )

- A.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$                       B.  $P(AB) = P(A)P(B)$   
C.  $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$                                       D.  $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

 **解:** 显然  $P(A) = P(B)$  等价于  $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$ , 即  $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$ , 选 C. 对于选项 A 和 D, 取  $A = B = \Omega$  可排除; 对于选项 B, 取  $B = \bar{A}$  即可排除.

8. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P\{|X - Y| < 1\}$  ( )

- A. 与  $\mu$  无关, 而与  $\sigma^2$  有关                      B. 与  $\mu$  有关, 而与  $\sigma^2$  无关  
C. 与  $\mu, \sigma^2$  都有关                                      D. 与  $\mu, \sigma^2$  都无关


 **解:** 由条件可知  $X - Y \sim N(0, 2\sigma^2)$ , 因此

$$\begin{aligned} P\{|X - Y| < 1\} &= P\left\{\left|\frac{X - Y}{\sqrt{2}\sigma}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1, \end{aligned}$$


此概率与  $\mu$  无关, 与  $\sigma^2$  有关, 选 A.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

 **解:** 首先  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ , 因此原极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)} = e^{-1}.$

10. 曲线  $y = x \sin x + 2 \cos x \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$  的拐点坐标为                     .


 **解:** 先求二阶导数

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

令  $y'' = 0$  可得  $x = 0$  或  $x = \pi$ . 当  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  或  $0 < x < \pi$  时  $y'' < 0$ , 当  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  时  $y'' > 0$ . 因此  $(0, 2)$  不是拐点,  $(\pi, -2)$  是拐点, 选 C.




11. 已知  $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$ , 则  $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$ \_\_\_\_\_.

 解: 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 f(x) dx &= - \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 \sqrt{1+t^4} dt = - \int_0^1 \sqrt{1+t^4} dt \int_0^t x^2 dx \\ &= - \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 \sqrt{1+t^4} dt = - \frac{1}{18} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1-2\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$


12. 以  $P_A, P_B$  分别表示  $A, B$  两个商品的价格, 设商品  $A$  的需求函数  $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$ , 则当  $P_A = 10, P_B = 20$  时, 商品  $A$  的需求量对自身价格的弹性  $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0)$  为\_\_\_\_\_.

 解: 由需求弹性公式可得

$$\begin{aligned} \eta_{AA} &= \left| \frac{P_A}{P_B} \frac{\partial Q_A}{\partial P_A} \right| = \left| \frac{P_A}{500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2} (-2P_A - P_B) \right| \\ &= \frac{P_A (2P_A + P_B)}{500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2}, \end{aligned}$$

代入  $P_A = 10, P_B = 20$  得  $\eta_{AA} = 0.4$ .


13. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ , 若线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

 解: 对增广矩阵作初等行变换得

$$(A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 & a \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{array} \right),$$


因此当  $a = 1$  时,  $r(A) = r(A, b) = 2 < 3$ , 方程组  $Ax = b$  有无穷多解.

14. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $F(x)$  为  $X$  的分布函数,  $E(X)$  为  $X$  的数学期望, 则  $P(F(X) > E(X) - 1) =$ \_\_\_\_\_.

 解: 首先  $E(X) = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}$ . 再令  $Y = F(X)$ , 则当  $y \leq 0$  时,  $P(Y \leq y) = 0$ ; 当  $y \geq 1$  时,  $P(Y \leq y) = 1$  (注意分布函数  $F(X)$  的取值范围). 当  $0 < y < 1$  时,

$$P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

因此  $Y = F(X) \sim U(0, 1)$ ,  $P(F(X) > E(X) - 1) = P\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ .


 注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果  $X$  是一个连续型随机变量,  $F(x)$  是它的分布函数, 则随机变量  $Y = F(X) \sim U(0, 1)$ .



### 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

#### 15.(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 求  $f'(x)$ , 并求  $f(x)$  的极值.

 **解:** 首先有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x + 1)$ , 因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续. 当  $x > 0$  时,  $f'(x) = e^{2x \ln x} (2 \ln x + 2)$ ; 当  $x < 0$  时,  $f'(x) = (x + 1)e^x$ . 而在  $x = 0$  处,


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty,$$

因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导, 于是  $f'(x) = \begin{cases} x^{2x} (2 + 2 \ln x), & x > 0 \\ \text{不存在}, & x = 0. \text{ 当 } x < -1 \text{ 或 } 0 < \\ (x + 1)e^x, & x < 0 \end{cases}$

$x < \frac{1}{e}$  时  $f'(x) < 0$ , 当  $-1 < x < 0$  或  $x > \frac{1}{e}$  时,  $f'(x) > 0$ . 由单调性可知  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$  和  $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$  是极小值,  $f(0) = 1$  是极大值.

#### 16.(本题满分 10 分)

已知  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数, 且  $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$ , 求  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ .

 **解:** 直接计算可得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - f'_1 - f'_2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x - f'_1 + f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -f''_{11} - f''_{12} - f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} - 2f''_{12} - f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 - f''_{11} + f''_{12} - f''_{21} + f''_{22} = 1 - f''_{11} + f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -f''_{11} + f''_{12} + f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} + 2f''_{12} - f''_{22}.$$

代入即可得  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11}(x + y, x - y) - f''_{22}(x + y, x - y)$ .


#### 17.(本题满分 10 分)

设  $y(x)$  是微分方程  $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$  满足条件  $y(1) = \sqrt{e}$  的特解.

(1) 求  $y(x)$ ;

(2) 设平面区域  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$ , 求  $D$  绕  $x$  旋转一周所得旋转体的体积.





 **解:** (1) 由条件可得  $\left(e^{-\frac{x^2}{2}} y\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} (y' - xy) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , 于是  $e^{-\frac{x^2}{2}} y = \sqrt{x} + C$ . 再由  $y(1) = \sqrt{e}$  可知  $C = 0$ , 因此  $y = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$ .

(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 xe^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} (e^4 - e).$$

### 18.(本题满分 10 分)

 求曲线  $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$  与  $x$  轴之间图形的面积.

 **解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+t)} |\sin(n\pi+t)| dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}. \end{aligned}$$


其中利用两次分部积分可得  $\int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$ .

### 19.(本题满分 10 分)

设  $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$ .

(1) 证明: 数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$ ;

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ .

 **解:** (1) 当  $0 < x < 1$  时,  $x^n \sqrt{1-x^2} > x^{n+1} \sqrt{1-x^2}$ , 因此由  $\{a_n\}$  的定义可知  $a_n > a_{n+1}$ , 即数列  $\{a_n\}$  单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n (x^2-1) + x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n-1} d(\sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

 此题源自2012年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题




$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{n+1}a_n - x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx \\
 &= -\frac{1}{n+1}a_n + \frac{n-1}{n+1}a_{n-2},
 \end{aligned}$$

因此  $\frac{n+2}{n+1}a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-2}$ , 即  $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$  ( $n=2,3,\dots$ ).

(2) 由于  $\frac{n-1}{n+2} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$ , 由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ .

20.(本题满分 11 分)

已知向量组 (I)  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$ , (II)  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$ . 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求  $a$  的取值, 并将  $\beta_3$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

 解: 记  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 由于向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以  $r(A) = r(B) = r(A, B)$ . 对矩阵  $(A, B)$  作初等行变换得

$$\begin{aligned}
 (A, B) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{array} \right) \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & a^2-5 & a-1 & -7-a & a^2-9 \end{array} \right) \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

因此当  $a=1$  时,  $r(A) = r(B) = r(A, B) = 2$ , 两个向量组等价. 当  $a=-1$  时,  $r(A) = 2 \neq r(A, B) = 3$ , 此时两个向量组不等价. 当  $a \neq \pm 1$  时,  $r(A) = r(B) = 3$ , 两个向量组等价. 因此, 当且仅当  $a \neq -1$  时, 两个向量组等价.

令  $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ , 当  $a=1$  时, 由初等行变换得  $(A, \beta_3) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ ,

解得  $\beta_3 = (3-2k)\alpha_1 + (-2+k)\alpha_2 + k\alpha_3, k \in \mathbb{R}$ .

当  $a \neq \pm 1$  时,  $(A, \beta_3) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ , 此时有  $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ .



21.(本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$  相似.

(1) 求  $x, y$ ;

(2) 求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = B$ .

 解: (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases},$$

解得  $x = 3, y = -2$ .

(2)  $B$  是上三角矩阵, 因此  $A, B$  的特征值均为  $2, -1, -2$ .

对矩阵  $B$ , 当  $\lambda_1 = 2$  时, 由方程  $(2E - B)x = 0$  可得  $\lambda_1$  的一个特征向量  $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$ ;

当  $\lambda_2 = -1$  时, 由方程  $(-E - B)x = 0$  可得  $\lambda_2$  的一个特征向量  $\xi_2 = (-1, 3, 0)^T$ ;

当  $\lambda_3 = -2$  时, 由方程  $(-2E - B)x = 0$  可得  $\lambda_3$  的一个特征向量  $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$ .

取  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $P_1^{-1}BP_1 = \text{diag}\{2, -1, -2\}$ .

同理对矩阵  $A$ , 也可求出一组线性无关特征向量, 取  $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , 则  $P_2^{-1}AP_2 =$

$\text{diag}\{2, -1, -2\}$ . 故

$$P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow (P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1}) = B,$$

因此当取

$$P = P_2P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

时, 则有  $P^{-1}AP = B$ .

22.(本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  服从参数为 1 的指数分布,  $Y$  的概率分布为  $P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p (0 < p < 1)$ . 令  $Z = XY$ .

(1) 求  $Z$  的概率密度;

(2)  $p$  为何值时,  $X$  与  $Z$  不相关;

(3)  $X$  与  $Z$  是否相互独立?



解: (1)  $X$  的分布函数为  $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ . 由  $X, Y$  的独立性可得  $Z$  的分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(XY \leq z | Y = -1) P(Y = -1) + P(XY \leq z | Y = 1) P(Y = 1) \\ &= pP(-X \leq z | Y = -1) + (1-p)P(X \leq z | Y = 1) \\ &= pP(X \geq -z) + (1-p)P(X \leq z) \\ &= p(1 - F_X(-z)) + (1-p)F_X(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ 1 + (1-p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此  $Z$  的概率密度为  $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases}$

(2) 由条件可得

$$\text{Cov}(X, Z) = E(XZ) - EX \cdot EZ = EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY = DX \cdot EY = 1 - 2p,$$

因此当  $p = \frac{1}{2}$  时,  $\text{Cov}(X, Z) = 0$ , 即  $\rho_{XZ} = 0$ . 因此  $p = \frac{1}{2}$  时,  $X$  与  $Z$  不相关.

(3) 由 (2) 可知当  $p \neq \frac{1}{2}$  时,  $X$  和  $Z$  是相关的, 从而不独立. 而当  $p = \frac{1}{2}$  时, 只需要注意到事件  $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{Z \leq \frac{1}{2}\right\}$ , 所以

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}, Z \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \neq P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right),$$

因此对任意  $p \in (0, 1)$ ,  $X, Z$  不独立.

### 23.(本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases},$$

$\mu$  是已知参数,  $\sigma > 0$  是未知参数,  $A$  是常数.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求  $A$ ;

(2) 求  $\sigma^2$  的最大似然估计量.

解: (1) 由概率密度的归一性可知  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ , 即

$$\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{A}{\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$





$$= \frac{\sqrt{2\pi}A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = A \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

得  $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .

(2) 设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  对应的观测值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu$  时, 取对数  $\ln L(\sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left[ \ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$ , 令

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0,$$

解得  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ , 因此  $\sigma^2$  的最大似然估计量为  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ .



## 第 15 章 2020 年考研数学三



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} =$  ( )  
 A.  $b \sin a$       B.  $b \cos a$       C.  $b \sin f(a)$       D.  $b \cos f(a)$

解: 利用拉格朗日中值定理得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \xi \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b \cos a.$$

2. 函数  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$  的第二类间断点的个数为 ( )  
 A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

解: 显然, 所有的间断点为  $x = -1, 0, 1, 2$ , 其中  $x = -1, 1, 2$  都是无穷间断点, 而  $x = 0$  则是可去间断点, 选 C.

3. 设奇函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续导数, 则 ( )  
 A.  $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$  是奇函数      B.  $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$  是偶函数  
 C.  $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$  是奇函数      D.  $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$  是偶函数

解: 易知  $\cos f(x)$  与  $f'(x)$  都是偶函数, 所以  $\cos f(x) + f'(x)$  是偶函数, 那么  $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$  是奇函数, 选 A.

4. 已知幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$  的收敛区间为  $(-2, 6)$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$  的收敛区间为 ( )  
 A.  $(-2, 6)$       B.  $(-3, 1)$       C.  $(-5, 3)$       D.  $(-17, 15)$

解: 由题意知幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  的收敛半径为 4, 那么它逐项积分以后的幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径仍为 4. 那么幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$  的收敛区间满足  $(x+1)^2 < 4 \Rightarrow -3 < x < 1$ , 选 B.

5. 设四阶矩阵  $A = (a_{ij})$  不可逆,  $a_{12}$  的代数余子式  $A_{12} \neq 0$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为矩阵  $A$  的列向量组,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 则  $A^* x = 0$  的通解为 ( )  
 A.  $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$       B.  $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_4$   
 C.  $x = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$       D.  $x = k_1 \alpha_2 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_4$

**解:** 因为  $A$  不可逆, 所以  $A^*A = |A|E = O$ , 因此  $A$  的列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  都是  $A^*x = O$  的解, 且  $r(A^*) \leq 1$ . 而  $A_{12} \neq 0$  说明  $A^* \neq O$ . 且  $A$  中对应的三列  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  是线性无关的, 即  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  是  $A^*x = O$  的基础解系, 因此正确答案选 C.

6. 设  $A$  为三阶矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $A$  的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,  $\alpha_3$  为  $A$  的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的可逆矩阵  $P$  可为

( )

A.  $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$

B.  $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$

C.  $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$

D.  $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

**解:** 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$A(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

7. 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12},$$

则  $A, B, C$  中恰有一个事件发生的概率为

( )

A.  $\frac{3}{4}$

B.  $\frac{2}{3}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{5}{12}$

**解:** 首先所求的概率为  $P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$ , 其中

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC) = \frac{7}{12},$$

$$P(A\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{B}\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{B \cup C}) - P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(B \cup C) - [1 - P(A \cup B \cup C)] = P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C)$$

$$= \frac{7}{12} - P(B) - P(C) + P(BC) = \frac{1}{6},$$

$$P(\bar{A}B\bar{C}) = \frac{7}{12} - P(A) - P(C) + P(AC) = \frac{1}{6},$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C) = \frac{7}{12} - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{1}{12},$$

因此  $A, B, C$  中恰有一个事件发生的概率为  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ , 选 D.

8. 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从  $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$ , 则下列服从标准正态分布且与  $X$  独立的是

( )



A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$     B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$     C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$     D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

解: 首先有  $(X, Y)$  服从二维正态分布,  $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 4)$ . 而

$$(X, X+Y) = (X, Y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以  $(X, X+Y)$  也服从二维正态分布. 且  $E(X+Y) = 0, D(X+Y) = DX + DY + 2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 3$ , 所以  $X+Y \sim N(0, 3)$ , 于是  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0, 1)$ . 又

$$\text{Cov}(X, X+Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = DX + \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = 0,$$

因此  $X$  与  $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$  独立, 选 C. 而  $\text{Cov}(X, X-Y) \neq 0$ , 所以  $X, X-Y$  不独立.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设  $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$ , 则  $dz|_{(0,\pi)} =$  \_\_\_\_\_.

解: 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2},$$

于是  $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,\pi)} = \pi - 1, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,\pi)} = -1$ , 因此  $dz|_{(0,\pi)} = (\pi - 1)dx - dy$ .

10. 曲线  $x + y + e^{2xy} = 0$  点  $(0, -1)$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_.

解: 原方程两边对  $x$  求导得  $1 + y' + e^{2xy}(2y + 2xy') = 0$ , 代入  $x = 0, y = -1$  得  $y' = 1$ , 所以曲线在  $(0, -1)$  处的切线方程为  $y = x - 1$ .

11. 设产量为  $Q$ , 单价为  $P$ , 厂商成本函数为  $C(Q) = 100 + 13Q$ , 需求函数为  $Q(P) = \frac{800}{P+3} - 2$ , 则厂商取得最大利润时的产量为 \_\_\_\_\_.

解: 由  $Q = \frac{800}{P+3} - 2$  可知  $P = \frac{800}{Q+2} - 3$ , 则利润函数为

$$L(Q) = \left( \frac{800}{Q+2} - 3 \right) Q - (100 + 13Q).$$

令  $\frac{dL(Q)}{dQ} = \frac{1600}{(Q+2)^2} - 16 = 0 \Rightarrow Q = 8$ , 且  $\frac{d^2L(Q)}{dQ^2} = -\frac{3200}{(Q+2)^3} < 0$ , 因此  $Q = 8$  时, 取得最大利润.

12. 设平面区域  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$ , 则  $D$  绕  $y$  轴旋转所成旋转体的体积为 \_\_\_\_\_.

解:  $V = 2\pi \int_0^1 x \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx = \pi \left( \ln(1+x^2) - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \ln 2 - \frac{1}{3} \right)$ .



13.行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 利用行列式的行列变换得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2. \end{aligned}$$

14.随机变量  $X$  的分布律为  $P(X = k) = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$ ,  $Y$  为  $X$  被 3 除的余数, 则  $EY = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 由题意知  $Y$  的取值为 0, 1, 2, 且


$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = 3n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{7}, \\ P(Y = 1) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{8^n} = \frac{4}{7}, \\ P(Y = 2) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 3n + 2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{8^n} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } EY = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}.$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设  $a, b$  为常数, 且当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$  与  $\frac{b}{n^a}$  为等价无穷小, 求  $a, b$  的值.

 解: 直接利用等价无穷小得

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e &= e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} - e = e \left( e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1} - 1 \right) \\ &\sim e \left[ n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = e \left[ n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1 \right] \\ &= -\frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{e}{2n}. \end{aligned}$$

因此  $a = 1, b = -\frac{e}{2}.$



16.(本题满分 10 分)

求函数  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$  的极值.

解: 由  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$  得  $(x, y) = (0, 0)$  或  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ . 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当  $(x, y) = (0, 0)$  时,  $A = 0, B = -1, C = 0$ , 那么  $AC - B^2 = -1 < 0$ , 所以  $(0, 0)$  不是极值点; 当  $(x, y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$  时,  $A = 1, B = -1, C = 4$ , 则  $AC - B^2 = 3 > 0$  且  $A > 0$ , 所以  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$  为极小值点, 且极小值  $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$ .

17.(本题满分 10 分)

设函数  $y = f(x)$  满足  $y'' + 2y' + 5y = 0$ , 且  $f(0) = 1, f'(0) = -1$ .

(1) 求  $f(x)$ ;

(2) 设  $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) dx$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

解: (1) 微分方程  $y'' + 2y' + 5y = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ , 特征根为  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ , 通解为  $y = e(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ , 代入  $f(0) = 1, f'(0) = -1$  得  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , 因此  $f(x) = e^{-x} \cos 2x$ .

(2) 直接计算得

$$a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{5} \left( -e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x \right) \Big|_{n\pi}^{+\infty} = \frac{1}{5} e^{-n\pi}.$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{5(e^\pi - 1)}.$$

18.(本题满分 10 分)

设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ , 连续函数  $f(x, y)$  满足

$$f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy,$$

计算  $\iint_D xf(x, y) dx dy$ .

解: 令  $\iint_D f(x, y) dx dy = A$ , 则  $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + Ax$ , 两边在区域  $D$  上积分可得

$$A = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D y\sqrt{1-x^2} dx dy + \iint_D Ax dx dy$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \iint_{D_1} y \sqrt{1-x^2} dx dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \\
 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

其中  $D_1$  为  $D$  在第一象限的部分. 于是  $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \iint_D xf(x, y) dx dy &= \iint_D x \left( y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x \right) dx dy \\
 &= \frac{3\pi}{16} \iint_D x^2 dx dy = \frac{3\pi}{16} \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta dr \\
 &= \frac{3\pi^2}{128}.
 \end{aligned}$$

#### 19.(本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上具有连续导数,  $f(0) = f(2) = 0$ ,  $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$ , 证明:

- (1) 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $|f'(\xi)| \geq M$ ;
- (2) 若对任意  $x \in (0, 2)$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , 则  $M = 0$ .

证明: (1) 设  $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)| = |f(x_0)|$ , 由拉格朗日中值定理知存在  $\xi_1 \in (0, x_0)$ ,  $\xi_2 \in (x_0, 2)$ , 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \right| = \frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \right| = \frac{M}{2 - x_0}.$$

注意到

$$|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2 - x_0} \geq \frac{2M}{\sqrt{x_0(2 - x_0)}} \geq M,$$

那么取  $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$  时, 必有  $|f'(\xi)| \geq M$ .

(2) 由条件有  $|f'(\xi_1)| = \frac{M}{x_0} \leq M$ , 因此  $x_0 \geq 1$ ;  $|f'(\xi_2)| = \frac{M}{2 - x_0} \leq M$ , 因此  $x_0 \leq 1$ . 于是只能  $x_0 = 1$ , 即  $|f(1)| = M$ .

$$M = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq \int_0^1 M dx = M,$$


等号成立当且仅当  $|f'(x)| \equiv M, x \in [0, 1]$ . 而  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极值, 由费马定理可知  $f'(1) = 0$ , 因此  $M = 0$ .

#### 20.(本题满分 11 分)

设二次型  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$  经过正交变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  化为二次型  $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$ , 其中  $a \geq b$ .



- (1) 求  $a, b$  的值;  
(2) 求正交矩阵  $Q$ .

 解: (1) 记  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ , 则  $Q^T A Q = B$ ,  $Q$  为正交矩阵. 因为  $A, B$  相似,

$$\text{所以 } \begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4 = a + b \\ 1 \times 4 = ab \end{cases}, a \geq b \Rightarrow a = 4, b = 1.$$

(2) 易知  $A, B$  的特征值均为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$ . 当  $\lambda_1 = 0$  时, 方程组  $(0E - A)x = 0$  的基础解系为  $\alpha_1 = (2, 1)^T$ , 方程组  $(0E - B)x = 0$  的基础解系为  $\beta_1 = (1, -2)^T$ ; 当  $\lambda_2 = 5$  时, 方程组  $(5E - A)x = 0$  的基础解系为  $\alpha_2 = (1, -2)^T$ , 方程组  $(5E - B)x = 0$  的基础解系为  $\beta_2 = (2, 1)^T$ . 令  $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , 则

$$P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} B P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}.$$

所以  $B = P_2 P_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = (P_1 P_2^{-1})^{-1} A P_1 P_2^{-1}$ , 且


$$P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此  $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

## 21.(本题满分 11 分)

设  $A$  为二阶矩阵,  $P = (\alpha, A\alpha)$ , 其中  $\alpha$  是非零向量, 且不是  $A$  的特征向量.

- (1) 证明:  $P$  是可逆矩阵;  
(2) 若  $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ , 求  $P^{-1}AP$ , 并判断  $A$  是否相似于对角矩阵.

 解: (1) 由题意  $\alpha$  是非零向量,  $A\alpha \neq k\alpha$ , 所以  $A\alpha, \alpha$  线性无关, 即  $P = (A\alpha, \alpha)$  为可逆矩阵.

$$(2) AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , 即  $A$  与  $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  相似. 不难知  $B$  有两个不同的特征值  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$ , 因此  $A$  的特征值也是  $2, -3$ , 所以  $A$  可以相似对角化.

## 22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) : 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\}$  上服从均匀分布, 且

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0 \\ 0, & X - Y \leq 0 \end{cases}, \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0 \\ 0, & X + Y \leq 0 \end{cases}.$$

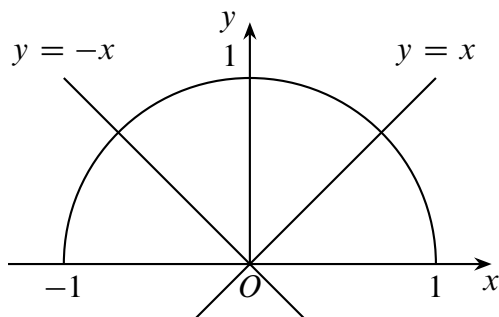




(1) 求二维随机变量  $(Z_1, Z_2)$  的概率分布;

(2) 求  $Z_1, Z_2$  的相关系数.

 解: (1) 如图, 不难得知



第 22 题图

$$P(Z_1 = 0, Z_2 = 0) = P(X - Y \leq 0, X + Y \leq 0) = P(Y \geq X, Y \leq -X) = \frac{1}{4},$$

$$P(Z_1 = 0, Z_2 = 1) = P(X - Y \leq 0, X + Y > 0) = P(Y \geq X, Y > -X) = \frac{1}{2},$$

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 0) = P(X - Y > 0, X + Y \leq 0) = P(Y < X, Y \leq -X) = 0,$$

$$P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(X - Y > 0, X + Y > 0) = P(Y < X, Y > -X) = \frac{1}{4}.$$

因此  $(Z_1, Z_2)$  的联合分布为

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(2) 由  $(Z_1, Z_2)$  的联合分布律可得边缘分布律为

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Z_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

于是  $E(Z_1) = \frac{1}{4}, E(Z_2) = \frac{3}{4}, D(Z_1) = D(Z_2) = \frac{3}{16}, E(Z_1 Z_2) = \frac{1}{4}$ , 因此  $Z_1, Z_2$  的相关系数为

$$\rho_{Z_1, Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \frac{E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2)}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}.$$

23.(本题满分 11 分)


设某种元件的使用寿命  $T$  的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



其中  $\theta, m$  为参数且大于零.

- (1) 求概率  $P(T > t)$  与  $P(T > s + t | T > s)$ , 其中  $s > 0, t > 0$ ;
- (2) 任取  $n$  个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 若  $m$  已知, 求  $\theta$  的最大似然估计值  $\hat{\theta}$ .

 解: (1) 当  $s > 0, t > 0$  时

$$\begin{aligned} P(T > t) &= 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, \\ P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = e^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}. \end{aligned}$$

(2) 总体  $T$  的概率密度为  $f(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} \frac{m t^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则样本的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \dots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$  时,  $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m + n \ln m + (m-1) \ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm \ln \theta$ , 令

$$\frac{d \ln(\theta)}{d \theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

即  $\theta$  的最大似然估计值为  $\hat{\theta} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}}$ .