Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

考研数学 试题解答

追求卓越排版, 巧解数学难题.

作者: 向禹老师

完成时间: 2020 年 3 月 4 日

Email: 739049687@qq.com

Version: 1.0

目录

第 1 章 2006 年考研数学三

一、填空题, 1 ～ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导, 且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$, 则 $f'''(2)=$________.

3. 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, 则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$________.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\left(\max\{X,Y\}\right)\leqslant 1=$________.

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,(-\infty<x<+\infty)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2, 则 $ES^2=$________.

二、选择题, 7 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 (　　)

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则 (　　)

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则级数 (　　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

10.设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是 ( )

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$

B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$

D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

11.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

B. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

D. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

12.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

13.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行的 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$

B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$

C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$

D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$

14.设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 $P\big(|X-\mu_1|<1\big)>P\big(|Y-\mu_2|<1\big)$, 则必有 ( )

A. $\sigma_1<\sigma_2$

B. $\sigma_1>\sigma_2$

C. $\mu_1<\mu_2$

D. $\mu_1>\mu_2$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 7 分**)

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x>0$, $y>0$, 求

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

16.(**本题满分 7 分**)

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x$, $y=1$, $x=0$ 所围成的平面区域.

17.(本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b\sin b + 2\cos b + \pi b > a\sin a + 2\cos a + \pi a.$$

18.(本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1,0)$, 其上任意点 $P(x,y)\ (x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(1) 求 L 的方程;

(2) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

19.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

20.(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$. 问 a 为何值时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关? 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

21.(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,2,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$;

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A} - \frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

22.(本题满分 13 分)

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leqslant x < 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$, 令 $Y = X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(3) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

23.(本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数.

(1) 求 θ 的矩估计;

(2) 求 θ 的最大似然估计.

第 2 章 2007 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

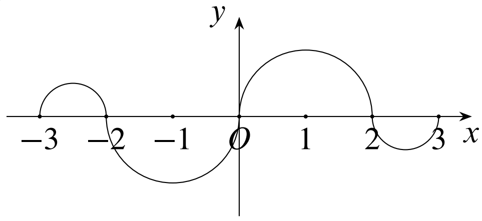
C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

3. 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )

A. $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　B. $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　D. $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$



第 3 题图

4. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则二次积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于 ( )

A. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

5. 设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$, 其中 Q,P 分别表示需求量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是 ( )

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　)

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次设计射击命中目标的概率为 $p\,(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 (　)

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$　　C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

10.设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 (　)

A. $f_X(x)$　　B. $f_Y(y)$　　C. $f_X(x)f_Y(y)$　　D. $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

12.设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0)=$________.

13.设 $f(u,v)$ 是二元可微函数, $z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

14.微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$________.

15.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

16.在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17.(**本题满分 10 分**)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定, 试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

在点 $(1,1)$ 处, $y''(1)=-\dfrac{1}{8}<0$, 且 y'' 在 $(1,1)$ 附近连续, 因此 $y''<0$ 在此点的邻域内成立, 所以 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的.

18.(本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant |x|+|y|\leqslant 2 \end{cases},$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$.

19.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.(本题满分 10 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

21.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \tag{2}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

22.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求 $P(X>2Y)$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

24.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leqslant x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

其中参数 $\theta\,(0 < \theta < 1)$ 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

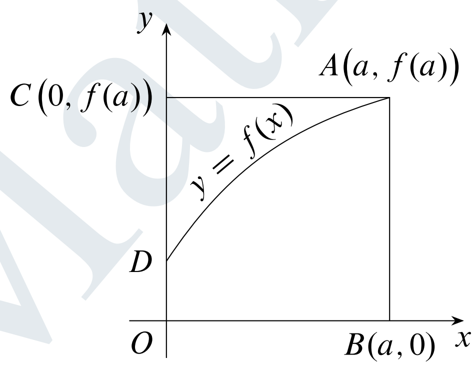
(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

第 3 章 2008 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}$ 的 ( )
A. 跳跃间断点 B. 可去间断点 C. 无穷间断点 D. 震荡间断点

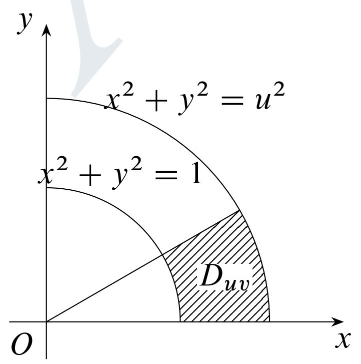
2. 如图, 曲线段的方程为 $y=f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 等于 ( )
A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积
B. 梯形 $ABOD$ 的面积
C. 曲边三角形 ACD 的面积
D. 三角形 ACD 的面积



第 2 题图

3. 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ( )
A. $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都存在 B. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在
C. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在 D. $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都不存在

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$ ( )
A. $vf(u^2)$ B. $\dfrac{v}{u}f(u^2)$ C. $vf(u)$ D. $\dfrac{v}{u}f(u)$



第 4 题图

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 (　)

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 (　)

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 (　)

A. $F^2(x)$　B. $F(x)F(y)$

C. $1-[1-F(x)]^2$　D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$, 且相关系数 $\rho_{XY}=1$, 则 (　)

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　B. $P\{Y=2X-1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　D. $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 则 $c=$________.

10.设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$, 则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

11.设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则 $\displaystyle\iint_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

12.微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

13.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,2$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

14.设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X=EX^2\}=$________.

15.**(本题满分 9 分)**

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

16.**(本题满分 10 分)**

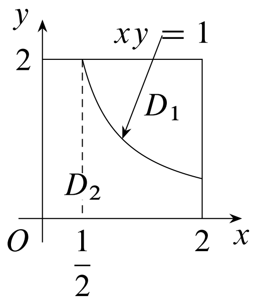
设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$.

(1) 求 $\mathrm{d}z$；

(2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

17.(本题满分 11 分)

计算 $\displaystyle\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.



第 18 题图

18.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$；

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

19.(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$, 并依年复利计算, 某基金会希望通过存款 A 万元, 实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, $\cdots$, 第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

20.(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

21.(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P(X = i) = \dfrac{1}{3}\ (i = -1, 0, 1)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 记 $Z = X + Y$.

(1) 求 $P\left(Z \leqslant \dfrac{1}{2} \,\middle|\, X = 0\right)$;

(2) 求 Z 的概率密度.

23.(本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT.

第 4 章 2009 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 无穷多个

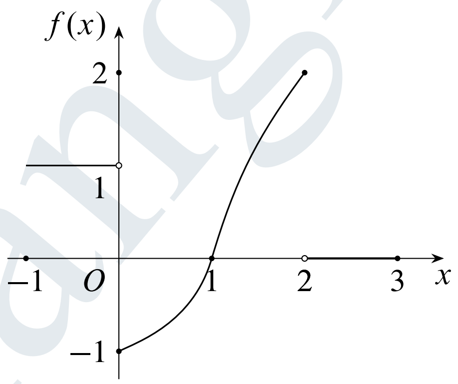
2. 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ( )

A. $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ B. $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

C. $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ D. $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

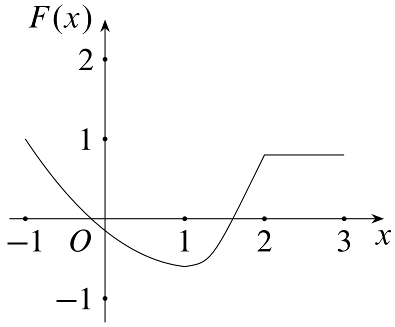
3. 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是 ( )

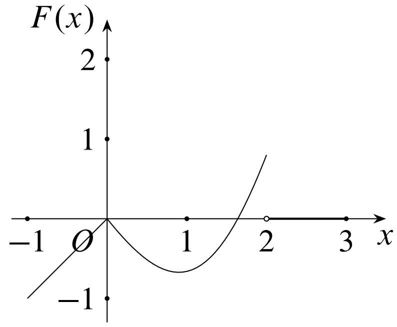
A. $(0,1)$ B. $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ D. $(\pi,+\infty)$

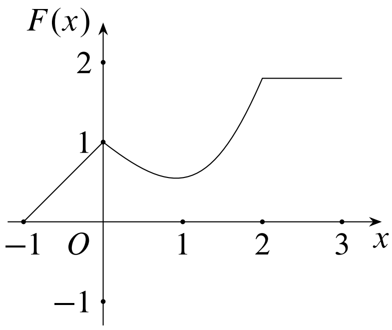


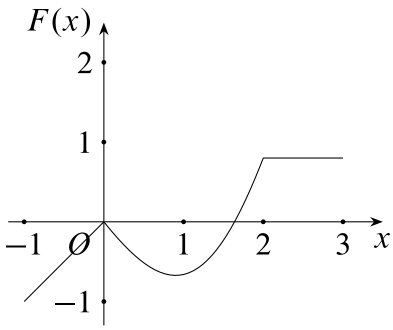
第 4 题图

4. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为 ( )

A. 

B. 

C. 

D. 

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为 ( )

A. $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

7. 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则 ( )

A. $P(\bar{A}\bar{B})=0$ B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$ D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P(Y=0)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

10.设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.

11.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.

12.设某产品的需求函数 $Q=Q(p)$, 对其价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$, 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加________ 元.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $k=$________.

注: 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

14.设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\bar{X}-S^2$, 则 $ET=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 9 分)**

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

16.**(本题满分 10 分)**

计算不定积分 $\displaystyle\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

17.**(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

18.**(本题满分 11 分)**

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

注: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.**(本题满分 10 分)**

设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(2) 求条件概率 $P(X\leqslant 1|Y\leqslant 1)$.

23.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X=1|Z=0)$;

(2) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

第 5 章 2010 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$, 则 $a=$ ( )
   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ( )
   A. $\lambda=\dfrac{1}{2}, \mu=\dfrac{1}{2}$ B. $\lambda=-\dfrac{1}{2}, \mu=-\dfrac{1}{2}$
   C. $\lambda=\dfrac{2}{3}, \mu=\dfrac{1}{3}$ D. $\lambda=\dfrac{2}{3}, \mu=\dfrac{2}{3}$

注: 如果 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是非齐次方程的 n 个解, 则线性组合 $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 仍然是此非齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=1$, $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是对应齐次方程的解的充要条件是 $C_1+C_2+\cdots+C_n=0$,

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f\big(g(x)\big)$ 在 x_0 处取极大值的一个充分条件是 ( )
   A. $f'(a)<0$ B. $f'(a)>0$ C. $f''(a)<0$ D. $f''(a)>0$

4. 设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ( )
   A. $g(x)<h(x)<f(x)$ B. $h(x)<g(x)<f(x)$
   C. $f(x)<g(x)<h(x)$ D. $g(x)<f(x)<h(x)$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 ( )
   A. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$ B. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$
   C. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$ D. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )
   A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \leqslant x<1 \\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $P(X=1)=$ ( )

A. 0 B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$ D. $1-\mathrm{e}^{-1}$

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x)=\begin{cases} a f_1(x), & x \leqslant 0 \\ b f_2(x), & x>0 \end{cases}$ $(a>0, b>0)$ 为概率密度, 则 a, b 应满足 ( )

A. $2a+3b=4$ B. $3a+2b=4$ C. $a+b=1$ D. $a+b=2$

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\displaystyle\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t=\int_0^x x \sin t^2 \,\mathrm{d}t$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

10.设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x\left(1+\ln^2 x\right)}}$ $(\mathrm{e} \leqslant x<+\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域为 G, 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

11.设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1+p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1)=1$, 则 $R(p)=$________.

12.若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$, 则 $b=$________.

13.设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,\left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\right|=2$, 则 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\right|=$________.

14.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $E T=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x \rightarrow+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

16.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

17.(本题满分 10 分)

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

18.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(),3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(1) 证明存在 $\eta\in(0,2)$, 使得 $f(\eta)=f(0)$;

(2) 证明存在 $\xi\in(0,3)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $x=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

22.(**本题满分 11 分**)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

23.(**本题满分 11 分**)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 $1, 2, 3$ 个. 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(1) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

第 6 章 2011 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当 $x \to 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 ( )

A. $k = 1, c = 4$ B. $k = 1, c = -4$ C. $k = 3, c = 4$ D. $k = 3, c = -4$

注: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - \sin^3 x$ 更快.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ( )

A. $-2f'(0)$ B. $-f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

3. 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是 ( )

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x \mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x \mathrm{d}x$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x \mathrm{d}x$, 则 I, J, K 的大小关系是 ( )

A. $I < J < K$ B. $I < K < J$ C. $J < I < K$ D. $K < J < I$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} =$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$ C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 ( )

A. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)$

B. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)$

C. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

D. $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ( )

A. $f_1(x)f_2(x)$　　B. $2f_2(x)F_1(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$　　D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

注: 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x), 2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$, 有 ( )

A. $ET_1>ET_2, DT_1>DT_2$　　B. $ET_1>ET_2, DT_1<DT_2$

C. $ET_1<ET_2, DT_1>DT_2$　　D. $ET_1<ET_2, DT_1<DT_2$

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x)=$________.

10. 设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$________.

11. 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

12. 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$, 直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴选项所成的旋转体的体积为________.

13. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1, $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则 $E(XY^2)=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $z=f\big(xy,yg(x)\big)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

17.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

18.(本题满分 10 分)

证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 具有连续导数, $f(0)=1$, 且满足 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D_t = \{(x,y)|0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2=Y^2)=1$.

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(2) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

23.(**本题满分 11 分**)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(1) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

第 7 章 2012 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 ( )

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 设函数 $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{2x} - 2)\cdots(\mathrm{e}^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ( )

   A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$　　C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r \mathrm{d}r =$ ( )

   A. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}y$

   B. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}y$

   C. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}y$

   D. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}y$

4. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则 ( )

   A. $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$　　C. $1 < \alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数,

   则下列向量线性相关的为 ( )

   A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$,

   $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} =$ ( )

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则 $P(X^2+Y^2\leqslant 1)=$ ( )

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{\pi}{8}$ D. $\dfrac{\pi}{4}$

8. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为 ( )

A. $N(0,1)$ B. $t(1)$ C. $\chi^2(1)$ D. $F(1,1)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

10.设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$, $y=f\big(f(x)\big)$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}$________.

11.设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$________.

12.由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 为单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

14.设 A,B,C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB)=\dfrac{1}{2}$, $P(C)=\dfrac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

16.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

17.(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件) 和 y(件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$(万元/件) 与 $6+y$(万元/件).

(1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元);

(2) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各位多少时可使总成本最小? 求最小总成本;

(3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲的边际成本, 并解释其经济意义.

18.(本题满分 10 分)

证明: $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y=f(x^2)\displaystyle\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

21.(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

22.(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X=2Y)$

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

23.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从参数为 1 的指数分布,记 $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$.

(1) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(2) 求 $E(U+V)$.

第 8 章 2013 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, 用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小量, 则下列式子错误的是 ( )

A. $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$　　B. $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

C. $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　　D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

2. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$, 则 ( )

A. $I_1 > 0$　　B. $I_2 > 0$　　C. $I_3 > 0$　　D. $I_4 > 0$

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在

D. 若存在常数 $p > 1$, 是 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 ( )

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ( )

A. $a = 0, b = 2$　　B. $a = 0, b$ 为任意常数

C. $a = 2, b = 0$　　D. $a = 2, b$ 为任意常数

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2), p_i = P(-2 \leqslant X_i \leqslant 2)(i=1,2,3)$, 则 ( )

A. $p_1 > p_2 > p_3$ B. $p_2 > p_1 > p_3$ C. $p_3 > p_1 > p_2$ D. $p_1 > p_3 > p_2$

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

则 $P(X+Y=2)=2$ ( )

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公切线, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right) =$________.

10.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$________.

11.$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$________.

12.微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$________.

13.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

14.设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 则 $E\left(X\mathrm{e}^{2X}\right) =$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 分)

当 $x \to 0$ 时, $1-\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

注: 此题中有两点指的注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ 是 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 的必要非充分条件, 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ax^n}=1$ 是不能直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{nax^{n-1}}=1$ 的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod_{k=1}^n(1-\cos a_k x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$.

16.(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$, 求 a 的值.

$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}, V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y=10V_x$ 得 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\times\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18.(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1000}$(p 为单价, 单位: 元; Q 是销量, 单位: 件). 已知产销平衡, 求:

(1) 该商品的边际利润;

(2) 当 $p=50$ 时的边际利润, 并解释其经济利益;

(3) 使得利润最大的定价 p.

19.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 证明:

(1) 存在 $a>0$, 使得 $f(a)=1$;

(2) 对 (1) 中的 a, 存在 $\xi\in(0,a)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

22.(本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$, 再给定 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

(1) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 求 $P(X > 2Y)$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

第 9 章 2014 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ( )

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$ C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$ D. $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

2. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A. $y = x + \sin x$ B. $y = x^2 + \sin x$ C. $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ D. $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

3. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \to 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是 ( )

A. $a = 0$ B. $b = 1$ C. $c = 0$ D. $d = \dfrac{1}{6}$

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

A. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$ B. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$ D. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

A. $(ad-bc)^2$ B. $-(ad-bc)^2$ C. $a^2d^2 - b^2c^2$ D. $b^2c^2 - a^2d^2$

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k, l, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5$, $P(A-B) = 0.3$, 则 $P(B-A) =$ ( )

A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

8. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 ( )

A. $N(0,1)$ B. $t(1)$ C. $\chi^2(1)$ D. $F(1,1)$

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格), 则该商品的边际收益为________.

注: 边际收益的定义是收益对销售量 Q 的导数, 而不是对价格 p 的导数.

10. 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为________.

11. 设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, 则 $a =$________.

12. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} - \mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x =$________.

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是________.

14. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E\left(c\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$, 则 $c =$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15. **(本题满分 10 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x \left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1\right) - t\right]\mathrm{d}t}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

注: 事实上, 洛必达法则适用于 $\frac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16. **(本题满分 10 分)**

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, 计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{x + y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17. **(本题满分 10 分)**

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(\mathrm{e}^x \cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + \mathrm{e}^x \cos y)\mathrm{e}^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

18.(**本题满分 10 分**)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

19.(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. 证明:

(1) $0 \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x-a, x \in [a,b]$;

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

20.(**本题满分 11 分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

21.(**本题满分 11 分**)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 EY.

23.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X, Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$, $P(X=1)=\dfrac{2}{3}$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 (X,Y) 的概率分布;

(2) 求 $P(X+Y \leqslant 1)$.

第 10 章 2015 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是 ( )

   A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

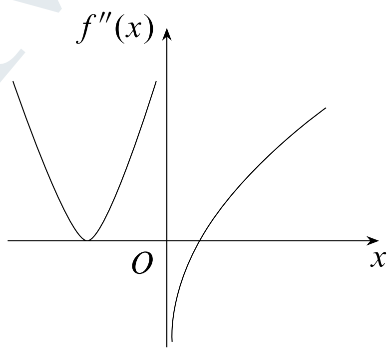
   B. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   C. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

   D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ( )

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



第 2 题图

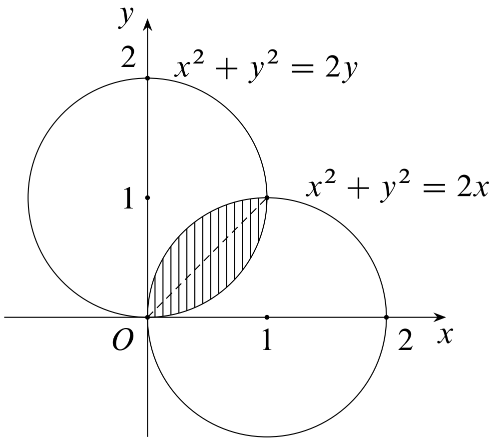
3. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 2, x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ( )

   A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$

   B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$

   C. $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x, y)\,\mathrm{d}y$

   D. $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y$



第 3 题图

4. 下列级数中发散的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$ D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega=\{1,2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ B. $a\notin\Omega, d\in\Omega$ C. $a\in\Omega, d\notin\Omega$ D. $a\in\Omega, d\in\Omega$

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 ( )

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

7. 设 A,B 为任意两个随机事件, 则 ( )

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$ B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ D. $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

8. 设随机变量 X,Y 不相关, 且 $EX=2, EY=1, DX=3$, 则 $E[X(X+Y-2)]=$ ( )

A. -3 B. 3 C. -5 D. 5

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

10.设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$________.

11.若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$________.

12.设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解, 且在 $x=0$ 处取得极值 3, 则 $y(x)=$________.

13.设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

14.设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$, 则 $P(XY-Y<0)=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a,b,k 的值.

注: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.**(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

17.**(本题满分 10 分)**

为实现利润的最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量, P 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

(1) 证明定价模型为 $P=\dfrac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}$;

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$, 需求函数为 $Q=40-P$, 试由 (1) 中的定价模型确定此商品的价格.

18.**(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0\in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

19.**(本题满分 10 分)**

(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

20.(**本题满分** 11 **分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

21.(**本题满分** 11 **分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY.

23.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 θ 为未知参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

第 11 章 2016 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

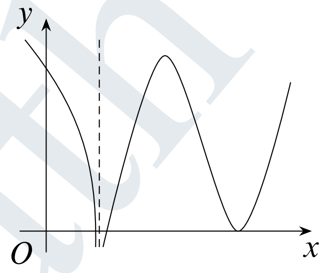
1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ( )

A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点



第 1 题图

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x-y}$, 则 ( )

A. $f_x'-f_y'=0$　B. $f_x'+f_y'=0$　C. $f_x'-f_y'=f$　D. $f_x'+f_y'=f$

3. 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (i=1,2,3)$, 其中

$$D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},$$
$$D_3=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\},$$

则 ( )

A. $J_1<J_2<J_3$　B. $J_3<J_1<J_2$　C. $J_2<J_3<J_1$　D. $J_2<J_1<J_3$

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$(k 为常数) ( )

A. 绝对收敛　B. 条件收敛

C. 发散　D. 收敛性与 k 有关

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则 ( )

A. $a>1$　B. $a<-2$　C. $-2<a<1$　D. $a=1$或$a=-2$

7. 设 A,B 为两个随机事件, 且 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 如果 $P(A|B)=1$, 则 (　)

A. $P(\bar{B}|\bar{A})=1$　　B. $P(A|\bar{B})=1$　　C. $P(A\cup B)=1$　　D. $P(B|A)=1$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X\sim N(1,2), Y\sim N(1,4)$, 则 $D(XY)=$ (　)

A. 6　　B. 8　　C. 14　　D. 15

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

11. 设函数 $f(u,v)$ 可微, $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

12. 设 $D=\{(x,y)\,||x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$, 则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

14. 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰为 4 的概率为________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. **(本题满分 10 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

16. **(本题满分 10 分)**

设某商品最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q=Q(p)$, 需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$, p 为单价 (万元).

(1) 求需求函数的表达式;

(2) 求 $p=100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

17. **(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

19.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{BA}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leqslant Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$.

(1) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a, 使得 $E(aT) = \theta$.

第 12 章 2017 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( )

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　　C. $ab=0$　　D. $ab=2$

2. 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是 ( )

A. $(0,0)$　　B. $(0,3)$　　C. $(3,0)$　　D. $(1,1)$

3. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)\cdot f'(x)>0$, 则 ( )

A. $f(1)>f(-1)$　　B. $f(1)<f(-1)$

C. $|f(1)|>|f(-1)|$　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$

4. 若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛, 则 $k=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是 ( )

A. A 与 B 相互独立　　B. A 与 B 互不相容

C. AB 与 C 相互独立　　D. AB 与 C 互不相容

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本, 记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 则下列结论中不正确的是 ( )

A. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布 B. $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布 D. $n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

10.差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y=$________.

11.设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为________.

12.设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$, $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$________.

13.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

14.设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=-2)=\frac{1}{2}$, $P(X=1)=a$, $P(X=3)=b$, 若 $EX=0$, 则 $DX=$____.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

16.(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

17.(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

18.(本题满分 10 分)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根, 求 k 的范围.

19.(本题满分 10 分)

设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1;

(2) 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0, x\in(-1,1)$, 并求 $S(x)$ 的表达式.

20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

21.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y\leqslant EY)$;

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

23.(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做了 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$, 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计参数 σ.

(1) 求 Z_1 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(3) 求参数 σ 的最大似然估计量.

第 13 章 2018 年考研数学三

一、选择题, 1 ∼ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

   A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

   C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 ( )

   A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

   C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

3. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

   A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$　　C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量, 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 ( )

   A. $C'(Q_0)=0$　　B. $C'(Q_0)=C(Q_0)$

   C. $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$　　D. $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

   A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

   A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$　　B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

   C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$　　D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P(X<0)=$ ( )

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)(\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2},$$

则 (　)

A. $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S} \sim t(n)$　　B. $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S} \sim t(n-1)$

C. $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S^*} \sim t(n)$　　D. $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S^*} \sim t(n-1)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________.

10. $\int \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x =$ ________.

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是 ________.

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 则 A 的实特征值为 ________.

14. 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 则 $P(AC|A \cup B) =$____.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. **(本题满分 10 分)**

已知实数 a, b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\right] = 2$, 求 a, b.

16. **(本题满分 10 分)**

设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3\left(1-x^2\right)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17. **(本题满分 10 分)**

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

18.(本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1\,(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

21.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \dfrac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

第 14 章 2019 年考研数学三

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty, -4)$　　B. $(4, +\infty)$　　C. $\{-4, 4\}$　　D. $(-4, 4)$

3. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a, b, c 依次为 ( )

A. 1, 0, 1　　B. 1, 0, 2　　C. 2, 1, 3　　D. 2, 1, 4

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*) =$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$　　B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$　　C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

7. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$　　B. $P(AB) = P(A)P(B)$

C. $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$　　D. $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ ( )

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关　　B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

C. 与 μ, σ^2 都有关　　D. 与 μ, σ^2 都无关

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\,(n+1)}\right)^n=$________.

10.曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为________.

11.已知 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$, 则 $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$________.

12.以 P_A, P_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$, 则当 $P_A=10, P_B=20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$ 为________.

13.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $a=$________.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\big(F(X)>E(X)-1\big)=$________.

注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y=F(X)\sim U(0,1)$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ x\mathrm{e}^x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

16.(本题满分 10 分)

已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

17.(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

18.(**本题满分** 10 **分**)

☞求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

19.(**本题满分** 10 **分**)

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

20.(**本题满分** 11 **分**)

已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$, (II) $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

21.(**本题满分** 11 **分**) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p, P(Y=1)=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立?

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

2020 年考研数学三

四、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ ( )

A. $b\sin a$ B. $b\cos a$ C. $b\sin f(a)$ D. $b\cos f(a)$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数, 则 ( )

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,dt$ 是奇函数 B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\,dt$ 是偶函数

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,dt$ 是奇函数 D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\,dt$ 是偶函数

4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 ( )

A. $(-2,6)$ B. $(-3,1)$ C. $(-5,3)$ D. $(-17,15)$

5. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq0$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 ( )

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$ B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

7. 设 A,B,C 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(0,0;1,4;-\dfrac{1}{2}\right)$, 则下列服从标准正态分布且与 X 独立的是 (　)

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

五、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

10. 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 点 $(0,-1)$ 处的切线方程为________.

11. 设产量为 Q, 单价为 P, 厂商成本函数为 $C(Q)=100+13Q$, 需求函数为 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2$, 则厂商取得最大利润时的产量为________.

12. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积为________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

14. 随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$, Y 为 X 被 3 除的余数, 则 $EY=$________.

六、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设 a,b 为常数, 且当 $n\to\infty$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\dfrac{b}{n^a}$ 为等价无穷小, 求 a,b 的值.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$, 且 $f(0)=1$, $f'(0)=-1$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 设 $a_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

18.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\right\}$, 连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

计算 $\iint\limits_D xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y):0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0\\0, & X-Y\leqslant 0\end{cases},\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0\\0, & X+Y\leqslant 0\end{cases}.$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布;

(2) 求 Z_1,Z_2 的相关系数.

23.(**本题满分 11 分**)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T>t)$ 与 $P(T>s+t|T>s)$, 其中 $s>0, t>0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.