2020 届考研数学全真模拟卷(数学二)

命题人 向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数 $a>1$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)=a^x+a^{-x}-2$ 是 x 的 ( )

   (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
   (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则函数 $|f(|x|)|$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 ( )

   (A) $f(0)=0$ (B) $f(0)\neq 0$ (C) $f'(0)=0$ (D) $f'(0)\neq 0$

3. 设在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$, 令

$$M=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a),\quad P=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

   则 ( )

   (A) $M<N<P$ (B) $P<M<N$ (C) $P<N<M$ (D) $M<P<N$

4. 设 $0<a\leqslant b\leqslant c$, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^a+x^b+x^c}$ 收敛的充要条件是 ( )

   (A) $a<1<c$ (B) $a\leqslant 1\leqslant c$ (C) $a<1<b$ (D) $b<1<c$

5. 已知微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x+x^2)\mathrm{e}^x$, 则 a,b,c 依次为 ( )

   (A) $1,-2,1$ (B) $1,0,\frac{1}{2}$ (C) $2,1,\frac{1}{2}$ (D) $-2,1,2$

6. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则累次积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 可以写为 ( )

   (A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{-y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

   (C) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ (D) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{-x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为 n 维列向量, 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$, 则 ( )
   (A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性无关
   (B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 一定线性相关
   (C) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关
   (D) 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定的 ( )
   (A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件
   (C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x^2}=$________.

10. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-2x^2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$________.

11. $\displaystyle\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

12. 微分方程 $y''-\dfrac{1}{x}y'=x\mathrm{e}^x$ 的通解为________.

13. $\displaystyle\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x=$________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+2\lambda+1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\begin{vmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_3&\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_2&\lambda_3&\lambda_1\end{vmatrix}=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）
设函数 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{\mathrm{e}^x-1}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

16.（本题满分 10 分）
设不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x^2+ax+1}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ 的结果中不含反正切函数, 求 a 的值并计算此不定积分.

17.（本题满分 10 分）
设函数 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac32}$, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

18.（本题满分 10 分）
设函数 $y=f(x)\,(x\geqslant0)$ 连续可导, 且 $f(0)=1$. 现已知曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

19.（本题满分 10 分）

设区域 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, 计算积分 $\iint\limits_D \cos\dfrac{x-y}{x+y}\,\mathrm{d}\sigma$.

20.（本题满分 11 分）

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(0)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$, 证明: 存在 $\xi\in(),+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

21.（本题满分 11 分）

设 m,n 为正整数, 令 $B(m,n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\dfrac{(-1)^k}{m+k+1}$.

(1) 利用 $\int_0^1 x^{m+k}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m+k+1}$ 证明 $B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=B(n,m)$;

(2) 证明: $B(m,n)=\dfrac{n}{m+1}B(m+1,n-1)$, 进一步证明 $B(m,n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

22.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, 令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明:$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$, 求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

23.（本题满分 11 分）

已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 又知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.