
Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

考研数学 试题解答



追求卓越排版, 巧解数学难题.

作者: 向禹老师
完成时间: 2020 年 3 月 4 日
Email: 739049687@qq.com

Version: 1.0



目录



| | | |
|----|-------------|-----|
| 1 | 2006 年考研数学二 | 2 |
| 2 | 2007 年考研数学二 | 10 |
| 3 | 2008 年考研数学二 | 19 |
| 4 | 2009 年考研数学二 | 27 |
| 5 | 2010 年考研数学二 | 36 |
| 6 | 2011 年考研数学二 | 44 |
| 7 | 2012 年考研数学二 | 52 |
| 8 | 2013 年考研数学二 | 60 |
| 9 | 2014 年考研数学二 | 68 |
| 10 | 2015 年考研数学二 | 75 |
| 11 | 2016 年考研数学二 | 82 |
| 12 | 2017 年考研数学二 | 91 |
| 13 | 2018 年考研数学二 | 98 |
| 14 | 2019 年考研数学二 | 107 |
| 15 | 2020 年考研数学二 | 116 |

第1章 2006年考研数学二

一、填空题, 1~6题, 每题4分, 共24分.

1. 曲线 $y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x}$ 的水平渐近线为_____.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x} = \frac{1}{5}$, 故曲线的水平渐近线方程为 $y = \frac{1}{5}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

解: 根据连续的定义, 由洛必达法则得 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

3. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =$ _____.

解: $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

4. 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解为_____.

解: 原方程变量分离得 $\frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x} dx$, 解得 $\ln |y| = \ln |Cx| - \ln e^x$, 即 $y = Cxe^{-x}$ ($x \neq 0$), C 为任意常数.

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} =$ _____.

解: 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 原方程两边对 x 求导得 $y' = -e^y - xe^y y'$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = -e$.

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 是二阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$ _____.


解: 由条件可得

$$B(A - E) = 2E \Rightarrow |B(A - E)| = |2E| \Rightarrow |B| |A - E| = 2^2 = 4,$$

因为 $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 所以 $|B| = 2$.

二、选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.


7. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ()
 A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$ C. $\Delta y < dy < 0$ D. $dy < \Delta y < 0$

 **解:** 由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

于是 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > f'(x_0)\Delta x > 0, \Delta x > 0$, 即 $0 < dy < \Delta y$, 选 A.


8. 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是 ()
 A. 连续的奇函数 B. 连续的偶函数
 C. 在 $x = 0$ 间断的奇函数 D. 在 $x = 0$ 间断的偶函数

 **解:** 首先, 可积函数的变上限积分一定是连续的, 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则


$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u) d(-u) = \int_0^x f(u) du = F(x),$$

因此 $F(x)$ 是连续的偶函数, 选 B.

9. 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}, h'(1) = 1, g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于 ()
 A. $\ln 3 - 1$ B. $-\ln 3 - 1$ C. $-\ln 2 - 1$ D. $\ln 2 - 1$

 **解:** $h(x) = e^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导得 $h'(x) = e^{1+g(x)}g'(x)$, 令 $x = 1$, 结合 $h'(1) = 1, g'(1) = 2$, 解得 $g(1) = -\ln 2 - 1$, 选 C.

10. 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是 ()
 A. $y'' - y' - 2y = 3x e^x$ B. $y'' - y' - 2y = 3e^x$
 C. $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ D. $y'' + y' - 2y = 3e^x$

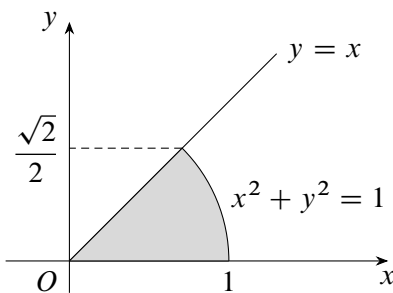
 **解:** 由所给解的形式知, 原微分方程对应的齐次方程有特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 即对应的特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 故对应的齐次方程为 $y'' + y' - 2y = 0$. 又 $y = x e^x$ 为原微分方程的一个特解, 而 λ_1 为单特征根, 那么非齐次方程的右端应具有形式 $f(x) = k e^x$, 正确答案选 D.

11. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于 ()

$$\begin{aligned} \text{A. } & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy & \text{B. } & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \\ \text{C. } & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx & \text{D. } & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \end{aligned}$$



解: 如图所示, 积分区域是一个 Y 型区域, 则原式 $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$, 选 C.



第 11 题图

12. 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ()

- A. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ B. 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
C. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$ D. 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

解: 令 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0 , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases},$$

那么当 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0 \neq 0, \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 消去 λ_0 得

$$f'_x(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

注意到 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 于是 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 选 D.

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ()

- A. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
B. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关
C. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关
D. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

解: 注意到 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s,$$

因此 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 选 A.

14. 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第

2 列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()

- A. $C = P^{-1}AP$ B. $C = PAP^{-1}$ C. $C = P^TAP$ D. $C = PAP^T$



 **解:** 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A, C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P A P^{-1},$$

因此选 B.


三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

 **解:** 将 e^x 的泰勒展开式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 代入题设等式得

$$\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right](1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

展开整理得

$$1 + (B + 1)x + \left(B + C + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3),$$

比较两边同次幂的系数可得

$$\begin{cases} B + 1 = A \\ B + C + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{B}{2} + C + \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

 **解:** 首先分部积分得

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= - \int \arcsin e^x d(e^{-x}) = -e^{-x} \arcsin e^{-x} + \int e^{-x} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx \\ &= -e^{-x} \arcsin e^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}. \end{aligned}$$

令 $t = \sqrt{1 - e^{2x}}$, 则 $x = \frac{1}{2} \ln(1 - t^2)$, $dx = -\frac{t}{1 - t^2} dt$, 那么

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} &= \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2x}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2x}}} + C, \end{aligned}$$

因此原积分 $= -e^{-x} \arcsin e^x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - e^{2x}}}{1 + \sqrt{1 - e^{2x}}} + C$.



17.(本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

 解: 区域 D 关于 y 轴对称, 因此 $\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$, 于是


$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

18.(本题满分 12 分)

设数列 x_n 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

 解: (1) 因为 $x_2 = \sin x_1 \in (0, 1]$, 那么归纳可知当 $n \geq 2$ 时, 均有 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 因此极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在. 在 $x_{n+1} = \sin x_n$ 中令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $a = \sin a$, 此方程的唯一解为 $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.


(2) 令 $t = x_n \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{t^2} \ln \frac{\sin t}{t} \right) \\ &= \exp \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left(\frac{\sin t - t}{t} + 1 \right) \right] \\ &= \exp \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \right) = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

 证明: 令 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x, x \in (0, \pi)$, 则

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi, \quad f'(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = \cos x + x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

因此当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f'(x)$ 单调递减, $f'(x) > f'(\pi) = 0$, 则 $f(x)$ 单调增加, 于是当 $0 < a < b < \pi$ 时, $f(b) > f(a)$, 即

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$




20.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足中等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(1) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(2) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

 解: (1) 令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 由复合函数偏导数公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(u) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \\ &= f''(u) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 以及 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ 得 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$.

(2) 令 $f'(u) = p$, 则 $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}$, 解得 $\ln|p| = \ln\left|\frac{C}{u}\right|$, 所以 $f'(u) = p = \frac{C}{u}$. 由 $f'(1) = 1$ 知 $C = 1$, 于是 $f(u) = \ln u + C_2, u > 0$. 再由 $f(1) = 0$ 知 $C_2 = 0$, 于是 $f(u) = \ln u, u > 0$.


21.(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$.

(1) 讨论 L 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(3) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

 解: (1) 注意到

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2-t}{t}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \left(-\frac{2}{t^2} \right) \bigg/ (2t) = -\frac{1}{t^3} < 0, t \geq 0, \end{aligned}$$

因此曲线 L 是凸的.

(2) 由 (1) 知, 切线的方程为 $y - 0 = \frac{2-t_0}{t_0}(x + 1)$. 设 $x_0 = t_0^2 + 1, y_0 = 4t_0 - t_0^2$, 则

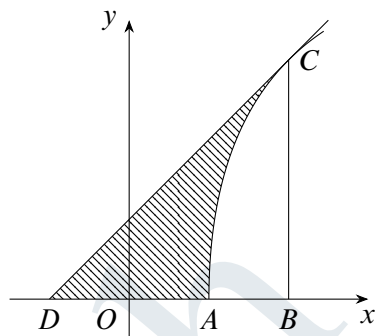
$$4t_0 - t_0^2 = \frac{2-t_0}{t_0}(t_0^2 + 2), \text{ 即 } 4t_0 - t_0^2 = (2-t_0)(t_0^2 + 2).$$



整理得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$ 或 -2 (舍去). 将 $t_0 = 1$ 代入参数方程, 得切点为 $(2, 3)$, 故切线方程为 $y = x + 1$.

(3) 所求平面图形如图所示, 其中各点的坐标分别为 $A(1, 0), B(2, 0), C(2, 3), D(-1, 0)$. 设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 则所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle BCD} - \int_1^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$



第 21 题图

22.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

解: (1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组的三个线性无关的解, 那么 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 因此 $n - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$. 又显然矩阵 A 中有 2 阶子式不为 0, 又有 $r(A) \geq 2$, 故 $r(A) = 2$.

(2) 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{array} \right). \end{aligned}$$

由题设和第一问知, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 则

$$4 - 2a = b + 4a - 5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3.$$

此时 $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, 那么 $\alpha = (2, -3, 0, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, $\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (4, -5, 0, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以方程组的通解为


$$x = \alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

23.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q 与对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

 解: (1) 因为 A 的各行元素之和为 3, 即有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 A 的特征值, $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是 A 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, α_1, α_2 是矩阵 A 的属于 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 A 的特征值是 3, 0, 0.

特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$;

特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T, k_1, k_2$ 不全为零.

(2) 先对 α_1, α_2 进行施密特正交化,

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{单位化得 } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 令}$$

$$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

则 $Q^T A Q = \Lambda$.



第2章 2007年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

解: 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$1 - e^{\sqrt{x}} = -\sqrt{x}, \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 + 1 \right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} - 1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, 1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x.$$

因此选 B.

2. 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$ ()

- A. 0 B. 1 C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}$

解: $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的无定义点, 即间断点为 $x = 0, 1, \pm \frac{\pi}{2}$, 不难得知 $x = 1, \pm \frac{\pi}{2}$ 均为第二类的无穷间断点, 而

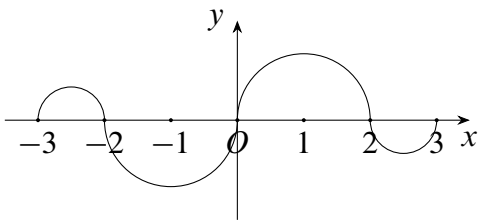
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = 1 \cdot 1 = 1,$$

因此 $x = 0$ 为第一类的跳跃间断点, 选 A.

3. 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是 ()

- A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



第3题图

解: 根据定积分的几何意义知, $F(2)$ 是半径为 1 的半圆面积, $F(2) = \frac{1}{2}\pi$, $F(3)$ 是两个半圆的面积之差, $F(3) = \frac{1}{2}\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}F(2)$,

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x) dx = - \int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ()

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
 B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
 C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$
 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$

解: A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0) = 0$. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则

$$f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例 $f(x) = |x|$ 说明 D 选项错误, 选 D.

5. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0$, 所以 $y = 0$ 为水平渐近线. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0, \end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y = x$, 选 D.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n), n = 1, 2, \dots$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
 C. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

解: 如果 $u_2 > u_1$, 即 $f(2) > f(1)$, 由于 $f''(x) > 0$, 那么 $f'(x)$ 单调递增, 对任意正整数 n ,

$$f(n+2) - f(n+1) = f'(\xi_1) > f'(\xi_2) > f(n+1) - f(n),$$



因此 $f(n)$ 单调递增, 且 $f'(x) > f(2) - f(1), x \geq 2$, 那么

$$f(n) - f(2) = f'(\xi)(n - 2) > [f(2) - f(1)](n - 2),$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$, 即 $\{u_n\}$ 发散, 选 D. 对于 A 和 B 可分别取 $f(n) = n^2$ 和 $f(n) = \frac{1}{n}$ 作为反例.


7. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是 ()

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$

 解: 选项 A, B 分别是连续和偏导数的定义, 这都不是可微的充分条件, 对于 D 选项可取反例 $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$, 可知 $f(x, y)$ 满足条件, 但 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续. 正确答案选 C, 事实上, C 选项就是可微的定义,

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = 0 \cdot f'_x(0, 0)x + 0 \cdot f'_y(0, 0)y + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 因此选 C.


8. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 ()

A. $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

B. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

 解: 积分区域 $D: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y < 1$, 也可表示为

$$0 \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi,$$

因此 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$, 选 B.


9. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ()

A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$


D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

 解: 不难知 A 中三个向量的和为 $\mathbf{0}$, 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ()
- A. 合同, 且相似 B. 合同, 但不相似
C. 不合同, 但相似 D. 既不合同, 也不相似

 解: 由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 A 的特征值为 $0, 3, 3$, 而 B 的特征值为 $0, 1, 1$, 从而 A 与 B 合同而不相似, 选 B.


二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$


 解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x + x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$


12. 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{-\sin t - 2\cos t \sin t}$, 于是 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, 故法线的斜率为 $1+\sqrt{2}$.

13. 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: $y = (2x+3)^{-1}$, $y' = -1 \cdot 2(2x+3)^{-2}$, $y'' = -1 \cdot (-2)2^2(2x+3)^{-3}$, 归纳可知 $y^{(n)} = (-1)^n n! 2^n (2x+3)^{-n-1}$, 从而 $y^{(n)}(0) = \frac{1}{3}(-1)^n n! \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

14. 二阶常系数非齐次线性方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, 因此齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. 设非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的特解为 $y^* = ke^{2x}$, 代入可得 $k = -2$, 因此原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.



15. 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_2 \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{1}{x} + f'_2 \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$, 于是有

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left(-\frac{y}{x^2} f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 \right) - y \left(\frac{1}{x} f'_1 - \frac{x}{y^2} f'_2 \right) = -\frac{2y}{x} f'_1 + \frac{2x}{y} f'_2.$$

16. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

解: 直接计算可得 $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $r(A^3) = 1$.

三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

解: 等式两边对 x 求导得

$$x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = f^{-1}[f(x)] f'(x) = x f'(x),$$

因此 $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$, $f(x) = \ln(\sin x + \cos x) + C$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. 当 $x = 0$ 时,

$$\int_0^{f(0)} f^{-1}(t) dt = 0.$$

注意到 $f^{-1}(t) \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 因此必有 $f(0) = 0$, 即 $C = 0$, 所以 $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.

18. (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x} a^{-\frac{x}{2a}}$ ($a > 1, 0 \leq x < +\infty$) 下方、 x 轴上方的无界区域.

(1) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(2) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.



解: (1) $V(a) = \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_0^{+\infty} \pi \left(\sqrt{x} a^{-\frac{x}{2a}} \right)^2 dx = \pi \int_0^{+\infty} x e^{-bx} dx = \frac{\pi}{b^2} = \frac{a^2 \pi}{\ln^2 a}$,
其中 $b = \frac{\ln a}{a}$.

(2) 令 $g(a) = \frac{a}{\ln a}$, 则 $g'(a) = \frac{\ln a - 1}{\ln^2 a}$, $a = e$ 是唯一驻点, 也是最小值点, 因此 $a = e$ 时, $V(a)$ 取最小值 $V(e) = \pi e^2$.

19.(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''(x + y^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

解: 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 原方程变为 $p'(x + p^2) = p$, 即

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p} = p$$

解得 $x = p(p + C_1)$, 代入 $p(1) = y'(1) = 1 > 0$ 可得 $C_1 = 0$, 所以 $x = p^2$, $p = y' = \sqrt{x}$,
进一步得 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2$, 结合 $y(1) = 1$ 得 $C_2 = \frac{1}{3}$, 因此 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$.

20.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定, 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\frac{d^2 z}{dx^2} \Big|_{x=0}$, $\frac{dz}{dx} \Big|_{x=0}$.

解: 在 $y - xe^{y-1} = 1$ 中令 $x = 0$ 得 $y = 1$, 在方程两端对 x 求导得

$$y' - e^{y-1} - xe^{y-1}y' = y' - e^{y-1} - (y-1)y' = 0.$$

代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = 1$. 上式两端再对 x 求导得

$$-y'^2 + (2-y)y'' - e^{y-1}y' = 0,$$

代入 $x = 0, y = 1, y' = 1$ 可得 $y''(0) = 2$.

又 $\frac{dz}{dx} = f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)$, 则 $\frac{dz}{dx} \Big|_{x=0} = 0$. 进一步,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= f''(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} + \sin x \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= f'(0)(2-1) = f'(0) = 1. \end{aligned}$$

21.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

证明: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 由题意有 $F(a) = F(b) = 0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得

$$f(x_1) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x), g(x_2) = M = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$



若 $x_1 = x_2$, 令 $c = x_1$, 则 $F(c) = 0$. 若 $x_1 < x_2$, 因 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0$, $F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$, 从而存在 $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$, 使得 $F(c) = 0$.

在区间 $[a, c], [c, b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$


再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 有 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

22.(本题满分 11 分)

设二元函数

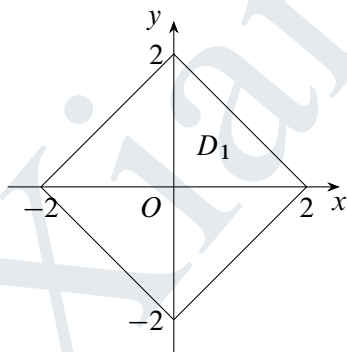
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2 \end{cases},$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

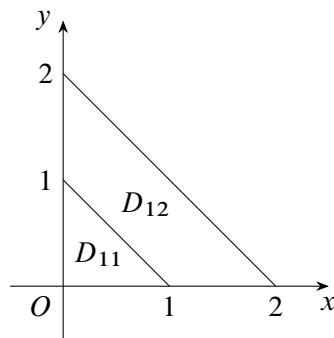
 **解:** 区域 D 如图 (1) 所示, 它关于 x, y 轴对称, $f(x, y)$ 关于 x, y 均为偶函数, 得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中 D_1 是 D 在第一象限的部分.



(1)



(2)

由于被积函数分块表示, 将 D_1 分成如图 (2) 所示的两部分: $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$, 其中

$$D_{11} : |x| + |y| \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \quad D_{12} : 1 \leq |x| + |y| \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

于是 $\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma$, 其中

$$\iint_{D_{11}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy = \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{12}} f(x, y) d\sigma &= \iint_{D_{12}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r} \cdot r dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

23.(本题满分 11 分)


设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

 **解:** 因为方程 (1)、(2) 有公共解, 将 (1)、(2) 联立组成方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad (3)$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 \bar{A} 进行初等行变换得

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array} \right).$$

于是当 $a = 1$ 时, 有 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组 (3) 有解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1, 0, 1)^T$, 所以 (1)、(2) 的公共解为 $k(-1, 0, 1)^T, k \in \mathbb{R}$.



当 $a = 2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组 (3) 有唯一解, 此时

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (3) 的解为 $(0, 1, -1)^T$, 即 (??)、(??) 的公共解为 $(0, 1, -1)^T$.

24.(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 B .

 解: (1) 由 $A\alpha_1 = \alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1 = A\alpha_1 = \alpha_1, A^3\alpha_1 = \alpha_1, A^5\alpha_1 = \alpha_1$, 故

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1.$$

因此 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 -2 的特征向量.

因为 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 及 A 的三个特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 得 B 的 3 个特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$.

设 α_2, α_3 为 B 的属于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 A 为对称矩阵, 则 B 也为对称矩阵, 因此 α_1 与 α_2, α_3 正交, 即

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 0, \alpha_1^T \alpha_3 = 0.$$

所以 α_2, α_3 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

其基础解系为 $(1, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T$, 故可取 $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$, 即 B 的全部特征向量为 $k_1(1, -1, 1)^T, k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$, 其中 $k_1 \neq 0, k_2, k_3$ 不全为零.

$$(2) \text{ 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 得}$$


$$\begin{aligned} B &= P \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



第3章 2008年考研数学二

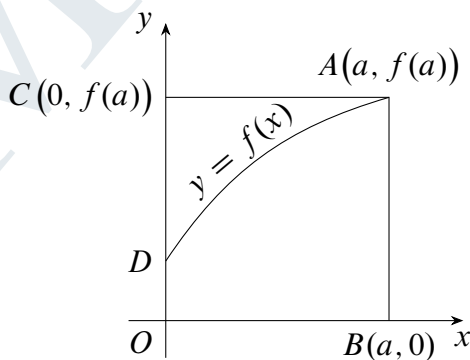
一、选择题, 1~8题, 每题4分, 共32分.

1. 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x+2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3


 解: 注意到 $f(0) = f(1) = f(-2) = 0$, 因此由罗尔定理知存在 $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (-2, 0)$ 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 且由定义知 $f'(0) = 0$. 而 $f'(x)$ 为三次多项式, 因此 $f'(x)$ 有且只有3个零点, 选D.

2. 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于 ()

- A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积
B. 梯形 $ABOD$ 的面积
C. 曲边三角形 ACD 的面积
D. 三角形 ACD 的面积




第2题图

 解: 由分部积分知


$$\int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x df(x) = af(a) - \int_0^a f(x) dx,$$

其中 $af(a)$ 是矩形面积, $\int_0^a f(x) dx$ 为曲边三角形 ACD 的面积, 选C.

3. 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是 ()
A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

 解: 从通解形式可知微分方程的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i$. 因此对应的特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$, 故对应的微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 选D.

4. 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有 ()
A. 1个可去间断点, 1个跳跃间断点 B. 1个可去间断点, 1个无穷间断点
C. 2个跳跃间断点 D. 2个无穷间断点

 解: 直接计算可知 $x = 0$ 是可去间断点, $x = 1$ 是跳跃间断点, 选A.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ()
- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
- C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛 D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

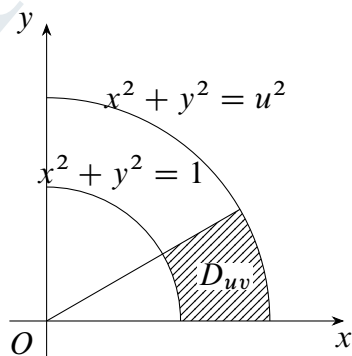
解: 对 B 选项, 因为数列 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 由单调有界准则知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. A 选项可取反例 $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2+x^2}, & x \geq 0 \\ -1 - \frac{1}{2+x^2}, & x < 0 \end{cases}, x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, C 和 D 选项可取反例 $f(x) = \arctan x, x_n = n$, 选 B.

6. 设函数 $f(x)$ 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$ ()
- A. $vf(u^2)$ B. $\frac{v}{u}f(u^2)$ C. $vf(u)$ D. $\frac{v}{u}f(u)$

解: 利用极坐标可得

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \int_0^v dv \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr, \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2)$, 选 A.



第 6 题图

7. 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则 ()
- A. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆 B. $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆
- C. $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆 D. $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆

解: 因为 $A^3 = O$, 所以 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3 = 0$, 即 $\lambda = 0$. 因此 $E - A$ 和 $E + A$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为 ()
- A. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解: $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$, 则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$,


记 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, 则

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0,$$

则 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$, 正负关系指数相同, 选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.


9. 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) =$ _____.

 解: 利用等价无穷小替换得


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 f^2(x)}{x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2} = 1,$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, 又 $f(x)$ 连续, 可知 $f(0) = 2$.


10. 微分方程 $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

 解: 原方程变形得 $y' - \frac{y}{x} = x e^{-x}$, 于是 $\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{xy' - y}{x^2} = e^{-x}$, 因此 $\frac{y}{x} = -e^{-x} + C$, 即方程的通解为 $y = x(C - e^{-x})$.


11. 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____.

 解: 原方程两边对 x 求导得 $\cos(xy)(y + xy') + \frac{y' - 1}{y - x} = 1$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = 1$, 因此曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$.


12. 曲线 $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为_____.

 解: $y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{2}}, y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1 + x)$, 于是拐点的坐标为 $(-1, -6)$.

13. 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} =$ _____.

 解: $z = e^{\frac{x}{y} \ln \frac{y}{x}} = e^{\frac{x}{y} (\ln y - \ln x)}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y} (\ln y - \ln x)} \left(\frac{\ln y - \ln x}{y} - \frac{1}{y} \right)$, 代入 $x = 1, y = 2$ 可知 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\ln 2 - 1)$.

14. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, 3, \lambda$, 若行列式 $|2A| = -48$, 则 $\lambda =$ _____.


 解: $|2A| = 2^3 |A| = 8 \times 2 \times 3 \lambda = 48 \lambda = -48, \lambda = -1$.



三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.


 解: 利用等价无穷小可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x \cdot \sin x}{\sin^4 x} = \frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u) \, du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases} \text{ 的解, 求 } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

 解: 由 $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$ 得 $e^x dx = 2t dt$, 积分并由条件 $x|_{t=0} = 0$ 得 $e^x = 1 + t^2$, 即 $x = \ln(1 + t^2)$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t \ln(1+t^2)}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) \ln(1+t^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} [(1+t^2) \ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2t \ln(1+t^2) + 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) [\ln(1+t^2) + 1]. \end{aligned}$$

17.(本题满分 9 分)


计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

 解:

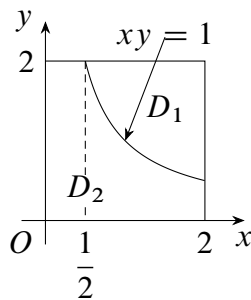
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin 2t) \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

 **解:** 曲线 $xy = 1$ 将区域 D 分成如图所示的两个区域 D_1 和 D_2 , 于是

$$\begin{aligned} & \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \max\{xy, 1\} dx dy + \iint_{D_2} \max\{xy, 1\} dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$



第 18 题图

19.(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x = 0, x = t$, 曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

 **解:** 旋转体的体积 $V = \pi \int_0^t f^2(x) dx$, 侧面积 $S = 2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$, 由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x) dx = \int_0^t f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

上式两端对 t 求导, 得 $f^2(t) = f(t) \sqrt{1 + f'^2(t)}$, 即 $y' = \sqrt{y^2 - 1}$, 由变量分离法解得

$$\ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) = t + C_1,$$

即 $y + \sqrt{y^2 - 1} = Ce^t$. 将 $y(0) = 1$ 代入知 $C = 1$, 故


$$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^t, \quad y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

于是所求函数为 $y = f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

20.(本题满分 11 分)

(1) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b - a)$.

(2) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

 **证明:** (1) 方法一 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 即

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b],$$



由定积分的性质, 有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M,$$

由连续函数的介值定理可知, 至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

方法二 令 $F(t) = \int_a^t f(x) dx, x \in [a, b]$, 则 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 由拉格朗日中值定理知存在 $\eta \in (a, b)$ ^③ $\subset [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F'(\eta)(b-a) = f(\eta)(b-a).$$

(2) 由 (1) 知, 至少存在一点 $\eta \in (2, 3)$, 使得

$$\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta).$$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2]$ 和 $[2, \eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2), \varphi(\eta) < \varphi(2)$, 得

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi_1) &= \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2-1} > 0, & 1 < \xi_1 < 2, \\ \varphi'(\xi_2) &= \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta-2} < 0, & 2 < \xi_2 < \eta < 3. \end{aligned}$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \quad \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3).$$

21.(本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

 **解:** 作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4),$$

令

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases},$$

解方程组得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$, 所求最大值为 72, 最小值为 6.

^③事实上, 这里的结论更强.

22.(本题满分 12 分)


设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

 解: (1) 从第 2 行开始, 第 k 行减去上一行的 $\frac{k}{k+1}$ 倍, $k = 2, 3, \dots, n$, 可得

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n}{n-1}a \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n.$$

(2) 由克拉默法则知当 $a \neq 0$ 时, $|A| \neq 0$, 此时方程组有唯一解, 且 $x_1 = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}$.


(3) 当 $a = 0$ 时, 容易得到 $r(A) = r(Ab) = n-1$, 方程组有无穷多解, 此时的通解为 $x = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, \dots, 0)^T, k \in \mathbb{R}$.

23.(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

 解: (1) 设存在数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \quad (1)$$

用 A 左乘 (1) 两边, 并由 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$ 得

$$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \quad (2)$$



(1) - (2), 得

$$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = \mathbf{0}. \quad (3)$$

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$. 代入 (1) 得 $k_2\alpha_2 = \mathbf{0}$, 由于 $\alpha_2 \neq \mathbf{0}$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 由题设, 可得

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 (1) 知 P 为可逆矩阵, 从而 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$




第4章 2009年考研数学二




一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 无穷多个

 解: 显然 $f(x)$ 的间断点为所有整数, 且 $x=0, x=\pm 1$ 为可去间断点, 其他为无穷间断点, 选 C.


2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 ()
A. $a=1, b=-\frac{1}{6}$ B. $a=1, b=\frac{1}{6}$
C. $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ D. $a=-1, b=\frac{1}{6}$

 解: 首先当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) = x^2 \ln(1-bx) \sim -bx^3$, 利用泰勒公式得


$$f(x) = x - \sin ax = x - \left(ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3) \right) = (1-a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3),$$

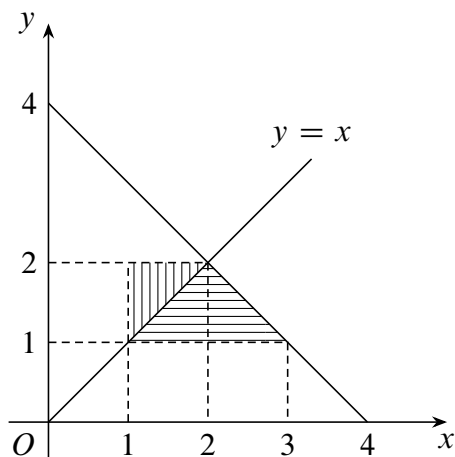
由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $\begin{cases} 1-a=0 \\ \frac{a^3}{6}=-b \end{cases}$, 因此 $a=1, b=-\frac{1}{6}$, 选 A.

3. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$ ()
A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点 B. 不是 $f(x, y)$ 的极值点
C. 是 $f(x, y)$ 的极大值点 D. 是 $f(x, y)$ 的极小值点

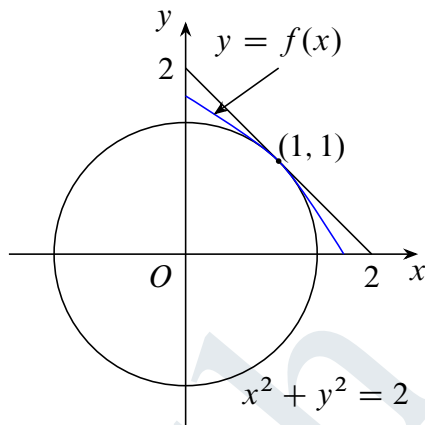
 解: 由 $dz = xdx + ydy = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ 知 $z = \frac{x^2+y^2}{2} + C$, 因此点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.

4. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$ ()
A. $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy$ B. $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$
C. $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$ D. $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$

 解: 由题意可知积分区域有两部分: $D_1 = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}$, $D_2 = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4-y\}$, 如图, 两部分区域可以用 Y 型区域表示为 $D = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4-y\}$, 选 C.



第 4 题图

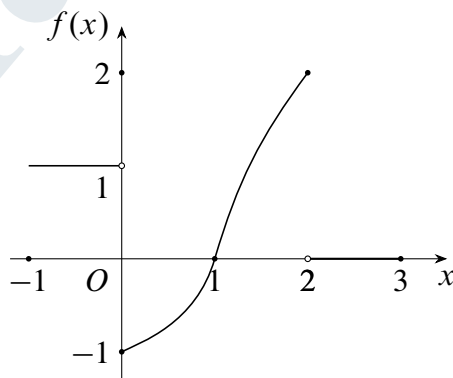


第 5 题图

5. 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内 ()
- A. 有极值点, 无零点 B. 无极值点, 有零点
- C. 有极值点, 无零点 D. 无极值点, 无零点

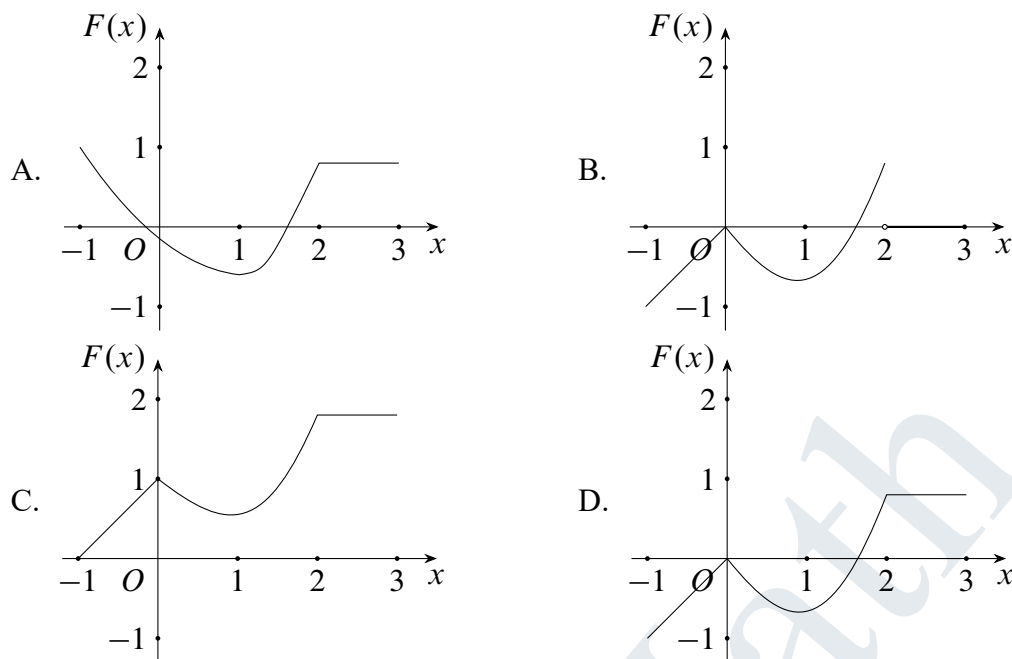
解: 如图, 由曲率圆的概念知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处与曲率圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 且二者具有相同的凹凸性和曲率, 于是由 $f(1) = 1, f'(1) = -1$ 易求得 $f''(1) = -2 < 0$. 因为 $f''(x)$ 不变号, 所以有 $f''(x) < 0$. 从而 $f'(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递减, $f'(x) < f'(1) = -1 < 0$, 进而 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递减, 故 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内没有极值点. 且曲线 $y = f(x)$ 为凸曲线, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的下方, 即 $f(x) < 2 - x (1 < x < 2)$, 故 $f(2) < 0$. 由连续函数的零点定理知 $y = f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点, 选 B.

6. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示,



第 6 题图

则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为 ()



解: 首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$ 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

7. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

A. $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

解: 由 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. 设 A, P 均为 3 阶矩阵, $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为 ()

A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



解: 由题意可知把 P 的第二列加到第一列上得到 Q , 因此有 $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$. 记 $E_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= [P E_{21}(1)]^T A [P E_{21}(1)] = E_{21}^T(1) P^T A P E_{21}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此选 A.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

解: $(0, 0)$ 点对应的参数 $t = 1$, 曲线在这一点处的切线斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy/dt}{dx/dt} \right|_{t=1} = \left. \frac{2t \ln(2-t^2) - \frac{2t^3}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}} \right|_{t=1} = 2,$$

于是切线方程为 $y = 2x$.

10. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k =$ _____.

解: 显然有 $k < 0$, 且 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{kx} dx = -\frac{2}{k}$, 因此 $k = -2$.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ _____.


解: 首先 $\int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x} d(\cos nx) = \frac{1 - e^{-1} \cos n}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x} \cos nx dx$, 则根据无穷小乘以有界量知此极限为 0.

12. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ _____.


解: 原方程中令 $x = 0$ 得 $y = 0$, 方程两边对 x 求导得 $y + xy' + e^y y' = 1$, 代入 $x = y = 0$ 得 $y' = 1$. 方程两边继续对 x 求导得 $y' + y' + xy'' + e^y y'^2 + e^y y'' = 0$, 代入 $x = y = 0, y' = 1$ 得 $y'' = -3$, 即 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -3$.




13. 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为_____.

 解: 求导得 $y' = 2x^{2x}(\ln x + 1)$, 不难知最小值点就是 $x = \frac{1}{e}$, 最小值为 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

14. 设 α, β 为 3 维列向量, β^T 为 β 的转置. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^T\alpha =$ _____.

 解: $\beta^T\alpha = \text{tr}(\beta^T\alpha) = \text{tr}(\alpha\beta^T) = 2$.

 注: 当矩阵 A 与 B 可以互乘时, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 矩阵 AB 与 BA 的所有非零特征值及其重数都相同.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 9 分)


求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

 解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x + \tan x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x^2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx \ (x > 0)$.

 解: 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}} > 1$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, 于是


$$\begin{aligned} \int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx &= \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)} + C \\ &= x \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) \end{aligned}$$



$$-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C.$$

17.(本题满分 10 分)

设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

 解: 直接求全微分得


$$\begin{aligned} dz &= f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy) + f'_3 \cdot (ydx + xdy) \\ &= (f'_1 + f'_2 + yf'_3) dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3) dy \end{aligned}$$

由于 f 具有二阶连续偏导数, 所以 $f''_{21} = f''_{12}$, $f''_{31} = f''_{13}$, $f''_{23} = f''_{32}$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (f'_1 + f'_2 + yf'_3) \\ &= f''_{11} - f''_{12} + xf''_{13} + f''_{21} - f''_{22} + xf''_{23} + f'_3 + y(f''_{31} - f''_{32} + xf''_{33}) \\ &= f''_{11} + (x+y)f''_{13} - f''_{22} + (x-y)f''_{23} + yf''_{33} + f'_3. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)


设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$. 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

 解: 当 $x > 0$ 时, 原方程即 $y'' - \frac{y'}{x} = -\frac{2}{x}$, 于是 $\left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{xy'' - y'^2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$, $y' = C_1x + 2$, 再次积分得 $y = C_2x^2 + 2x + C_3$. 因为 $y(0) = 0$, 那么令 $x \rightarrow 0^+$ 可得 $C_3 = 0$, 因此 $y = C_2x^2 + 2x$. 由题意有 $\int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 (C_2x^2 + 2x)dx = \frac{C_2}{3} + 1 = 2$, 于是 $C_2 = 3$, $y = 3x^2 + 2x$. D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_0^1 xy(x)dx = 2\pi \int_0^1 (3x^3 + 2x^2)dx = \frac{17}{6}\pi.$$

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x-y)dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

 解: 方法一 积分区域用极坐标表示为 $D = \left\{ (r, \theta) \left| \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2(\cos \theta + \sin \theta) \right. \right\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y)dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \end{aligned}$$




$$= \frac{2}{3} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}.$$

方法二 作换元 $u = x-1, v = y-1$, 则 $dx = du, dy = dv$, 积分区域化为 $D_1 = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$, 于是

$$\iint_D (x-y) dx dy = \iint_{D_1} (u-v) du dv = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr = -\frac{8}{3}.$$

20.(本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点处的法线过原点; 当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

 **解:** 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线 $y = y(x)$ 上任一点 (x, y) 处的法线方程为 $Y = -\frac{1}{y'}(X-x) + y$, 而此法线过原点, 因此 $y' = -\frac{x}{y}$, 积分可得 $x^2 + y^2 = C$. 由 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 可得 $C = \pi^2$, 于是 $y = \sqrt{\pi^2 - x^2} (-\pi < x < 0)$.

当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数 $y = y(x)$ 满足二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + y + x = 0$, 其通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x$. 而曲线 $y = y(x)$ 光滑, 因此 $y(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 于是

$$y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\pi^2 - x^2} = \pi, y'(0) = y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2} - \pi}{x} = 0.$$


由此可解得 $C_1 = \pi, C_2 = 1$, 当 $0 \leq x < \pi$ 时, $y = \pi \cos x + \sin x - x$, 因此最后所求的函数

$$\text{为 } y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

21.(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)(\delta > 0)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

 **证明:** (1) 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$, 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \left(f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b\right) - \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a\right) \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0, \end{aligned}$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, 即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.



(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf'(\xi)}{x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = A.$$


 注: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

22.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

 解: (1) 对增广矩阵 (A, ξ_1) 作初等行变换得

$$(A \ \xi_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $x = (0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$, 从而 $\xi_2 = (-k, k, 1 - 2k)^T, k$ 为任意常数.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{对增广矩阵 } (A^2, \xi_1) \text{ 作初等行变换得}$$

$$(A^2, \xi_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

于是方程组 $A^2x = \xi_1$ 的通解为 $x_1 = -\frac{1}{2} - u, x_2 = u, x_3 = v$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$, 其中 u, v 为任意常数.

(2) 对任意的常数 k, u, v 有

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1 - 2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量 ξ_2, ξ_3 , 恒有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.


23.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.



(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

 解: (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a + 1))(\lambda - (a - 2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

(2) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 因此矩阵 A 的特征值为两正一零, 显然 $a - 2 < a < a + 1$, 因此必有 $a = 2$.



第5章 2010年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解: 函数 $f(x)$ 的间断点只有 $x = 0, \pm 1$, 不难判断 $x = -1$ 是无穷间断点, $x = 0$ 是跳跃间断点, $x = 1$ 是可去间断点, 因此只有一个无穷间断点, 选 B.

2. 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()
 A. $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ B. $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$
 C. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ D. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

解: $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是非齐次方程的解, 则 $\lambda + \mu = 1$, 而 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是对应的齐次方程的解, 则 $\lambda - \mu = 0$, 因此 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

注: 如果 y_1, y_2, \dots, y_n 是非齐次方程的 n 个解, 则线性组合 $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ 仍然是此非齐次方程的解的充要条件是 $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 1$, $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ 是对应齐次方程的解的充要条件是 $C_1 + C_2 + \dots + C_n = 0$,

3. 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$ ()
 A. $4e$ B. $3e$ C. $2e$ D. e

解: 设两条曲线的切点为 (x_0, x_0^2) , 则 $a \ln x_0 = x_0^2$, 且切点处的切线斜率相同, 即 $2x_0 = \frac{a}{x_0}$, 解得 $x_0 = \sqrt{e}, a = 2e$, 选 C.

4. 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性 ()
 A. 仅与 m 的取值有关 B. 仅与 n 的取值有关
 C. 与 m, n 的取值都有关 D. 与 m, n 的取值都无关


解: 任取 $c \in (0, 1)$, 原反常积分 $I = \int_0^c \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_c^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = I_1 + I_2$.

对 I_1 而言, $x = 0$ 是瑕点, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{n} - \frac{2}{m}}}$, 而 $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$, 所以

$\int_0^c \frac{dx}{x^{\frac{1}{n} - \frac{2}{m}}}$, 由比较判别法知 I_1 收敛.

对 I_2 而言, $x = 1$ 是瑕点, 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = 0$, 积分 $\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 于是 I_2 收敛, 所以原积分 I 收敛, 与 m, n 的取值都无关, 选 D.

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
- A. x B. z C. $-x$ D. $-z$

 解: 方程两边分别关于 x 和 y 求偏导得 $\begin{cases} F'_1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \\ F'_1 \cdot \frac{1}{x} + F'_2 \cdot \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$, 于是解

得 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yF'_1}{xF'_2} + \frac{z}{x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1}{F'_2} \end{cases}$, 因此 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, 选 B.


6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ ()
- A. $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ B. $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$
- C. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ D. $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

 解:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2} \right) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy, \end{aligned}$$

选 D.

7. 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是 ()
- A. 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$ B. 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$
- C. 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$ D. 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$

 解: 因为向量组 I 被向量组 II 线性表示, 所以 $r(I) \leq r(II)$, 因此当向量组 I 线性无关时, $r = r(I) \leq r(II) \leq s$, 选 A.

8. 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ()



A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

解: 由 $A^2 + A = O$ 知 A 的任一特征值 λ 必满足 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 -1 . 又 $r(A) = 3$, 所以 A 的特征值为 $-1, -1, -1, 0$, 且 A 为实对称矩阵, 则它相似于 $\text{diag}\{-1, -1, -1, 0\}$, 选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 原方程的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2) = 0$, 因此特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_3 = 2$, 方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x}$.

10. 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} (y - 2x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$, 所以曲线的渐近线方程为 $y = 2x$.

11. 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由 n 阶麦克劳林公式得

$$f(x) = \ln(1 - 2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(-2x)^n}{n} + o(x^n),$$

而 x^n 的系数应为 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 即 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(-2)^n}{n}$, 因此 $f^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!$.

12. 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由极坐标系下曲线的弧长公式得对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为

$$s = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi e^\theta d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

13. 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3 cm/s 的速率增加, 则当 $l = 12 \text{ cm}, w = 5 \text{ cm}$ 时, 它的对角线增长的速率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解: 对角线的长为 $L = \sqrt{l^2 + w^2}$, 由全导数公式得 $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{\partial L}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{2l + 3w}{\sqrt{l^2 + w^2}}$, 于是 $\left. \frac{dL}{dt} \right|_{\substack{l=12 \\ w=5}} = \frac{2 \times 12 + 3 \times 5}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 3 \text{ cm/s}$.



14. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

解:

$$|A + B^{-1}| = |A(B + A^{-1})B^{-1}| = |A||B + A^{-1}||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

解: $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$, $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$. 分析 $f'(x)$ 的零点及正负可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$, 极小值为 $f(-1) = f(1) = 0$, 极大值为 $f(0) = \int_1^0 (0 - t)e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

16. (本题满分 10 分)

(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

解:

(1) 当 $0 < t < 1$ 时, $0 < \ln(1+t) < t$, 所以 $|\ln t| [\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0 < t < 1$ 时, $0 < \int_0^1 |\ln t| \ln^n(1+t) dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt$. 由分部积分得

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = - \int_0^1 \ln t d\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0 < u_n < \frac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

17. (本题满分 11 分)

设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ($t > -1$) 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 且 $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

解: 利用参数方程求导得 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2(1+t)}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4(1+t)} \left(\frac{\psi''(t)}{1+t} - \frac{\psi'(t)}{(1+t)^2} \right),$$



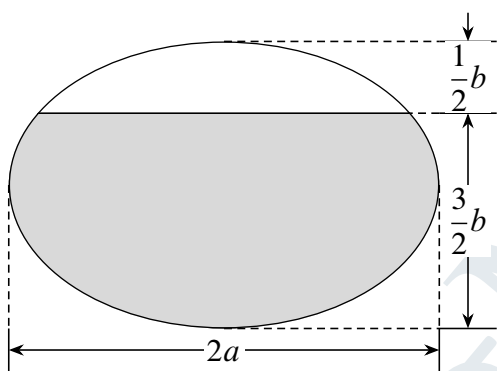
由题设条件 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ 可得 $\psi''(t) - \frac{1}{1+t}\psi'(t) = 3(1+t)$, 因此

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{1+t}\right) = \frac{1}{1+t}\left(\psi''(t) - \frac{\psi'(t)}{1+t}\right) = 3,$$

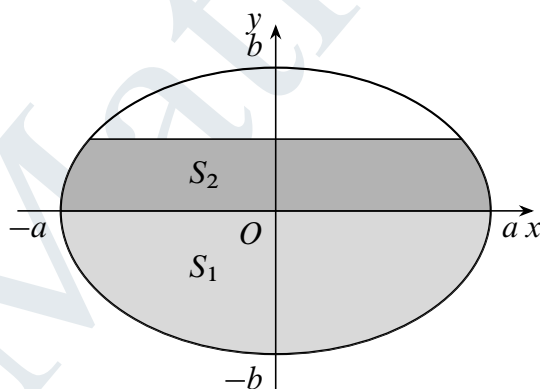
于是 $\psi'(t) = (3t + C_1)(1+t)$, 由 $\psi'(1) = 6$ 得 $C_1 = 0$, 则 $\psi'(t) = 3t(1+t)$, $\psi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3 + C_2$. 由 $\psi(1) = \frac{5}{2}$ 得 $C_2 = 0$, 所以 $\psi(t) = \frac{3}{2}t^2 + t^3, t > -1$.

18.(本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中右面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图 1), 计算油的质量. (长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数 $\rho \text{ kg/m}^3$.)



第 18 题图 1



第 18 题图 2

解: 以椭圆长轴为 x 轴, 短轴为 y 轴建立坐标系, 用 S_1 和 S_2 分别表示在 x 轴下方和 x 轴上方的阴影部分的面积, 则 $S_1 = \frac{\pi}{2}ab$, 而

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2a}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - y^2} dy \stackrel{y=b \sin t}{=} \frac{2a}{b} \int_0^{\frac{\pi}{6}} b^2 \cos^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = ab \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = ab \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right). \end{aligned}$$

因此油的质量为 $M = (S_1 + S_2)l\rho = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) abl\rho \text{ kg}$.

19.(本题满分 11 分)

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

解: 利用多元复合函数的偏导公式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

把以上各式代入题设等式得

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + [10ab + 12(a+b) + 8] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\text{根据条件有 } \begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0 \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0 \\ 10ab + 12(a+b) + 8 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}.$$

20.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$


 **解:** 积分区域用直角坐标可表示为 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 则

$$\begin{aligned}I &= \iint_D y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 + y^2} \Big|_0^x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[1 - (\sqrt{1 - x^2})^3 \right] dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

21.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$.

证明: 存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

 **解:** 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$, 则根据条件有 $F(0) = F(1) = 0$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 使得 } \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2}F'(\xi) \\ F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}F'(\eta) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2) \\ -F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2) \end{cases}, \text{ 两式相加得 } f'(\xi) + f'(\eta) - \xi^2 - \eta^2 = 0, \text{ 即 } f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2.$$




22.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a ;

(2) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

 解: (1) 因为方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 于是

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

因此 $\lambda = \pm 1$. 当 $\lambda = 1$ 时, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 方程组无解, 因

此 $\lambda = 1$ 舍去. 当 $\lambda = -1$ 时, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right),$$

因为方程组 $Ax = b$ 有解, 所以 $a = -2$.


(2) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时, $\bar{A} = (A, b) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, 因此方程组 $Ax = b$ 的通解为

$$x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)^T + k(1, 0, 1)^T, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

23.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵. 若 Q 的第 1 列为

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \text{ 求 } a, Q.$$

 解: 设 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ 是矩阵 A 的属于特征值 λ_1 的特征向量, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1 \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1 \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ a = -1 \end{cases}.$$



由 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0$ 可得 \mathbf{A} 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$.

对 $\lambda_2 = 5$, 解方程 $(5\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 5 的单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$;

对 $\lambda_3 = -4$, 解方程 $(-4\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得特征值 -4 的单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$.

取 $\mathbf{Q} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \text{diag}\{2, 5, -4\}$.



第6章 2011年考研数学二

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 ()
A. $k = 1, c = 4$ B. $k = 1, c = -4$ C. $k = 3, c = 4$ D. $k = 3, c = -4$

解: 利用麦克劳林公式得

$$f(x) = 3 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) \right) = 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3,$$

因此 $k = 3, c = 4$, 选 C.

注: 事实上, 利用正弦函数的三倍角公式 $\sin 3x = 3 \sin x - \sin^3 x$ 更快.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()
A. $-2f'(0)$ B. $-f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

解: 注意到 $f(0) = 0$, 利用导数定义得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x^3} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0),$$

因此选 B.

3. 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解: 因为 $f(x) = \ln |x-1| + \ln |x-2| + \ln |x-3|$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

由 $f'(x) = 0$ 得 $3x^2 - 12x + 11 = 0$, 解得 $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因此有两个驻点.

4. 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为 ()
A. $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$ B. $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$
C. $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$ D. $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

解: 齐次方程的特征方程为 $r^2 - \lambda^2 = 0$, 特征根为 $r_1 = \lambda, r_2 = -\lambda$, 则方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x}$ 的特解形式为 $y_1^* = axe^{\lambda x}$, 方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $y_1^* = bxe^{-\lambda x}$, 由叠加原理知原方程的特解形式为 $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$, 选 C.

5. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ()

A. $f(0) > 1, f''(0) > 0$ B. $f(0) > 1, f''(0) < 0$
C. $f(0) < 1, f''(0) > 0$ D. $f(0) < 1, f''(0) < 0$

解: 由 $z = f(x) \ln f(y)$ 可知 $z'_x = f'(x) \ln f(y), z'_y = \frac{f(x)}{f(y)}, z''_{xx} = f''(x) \ln f(y), z''_{xy} = \frac{f'(x)}{f(y)} f'(y), z''_{yy} = f(x) \frac{f''(y)f(y) - f'^2(y)}{f^2(y)}$. 在点 $(0, 0)$ 处, $z''_{xx} = f''(0) \ln f(0), z''_{xy} = 0, z''_{yy} = f''(0)$. 由二元函数极小值的充分条件, 需要满足 $f''(0) \ln f(0) > 0, f''(0) \ln f(0) \cdot f''(0) > 0$, 因此 $f(0) > 1, f''(0) > 0$, 选 C.

6. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是 ()

A. $I < J < K$ B. $I < K < J$ C. $J < I < K$ D. $K < J < I$

解: 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \cos x < \cot x$, 即 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$, 因此 $I < K < J$, 选 B.

7. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第一

行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

A. $P_1 P_2$ B. $P_1^{-1} P_2$ C. $P_2 P_1$ D. $P_2 P_1^{-1}$

解: 由初等变换与初等矩阵的关系知 $AP_1 = B, P_2 B = E$, 所以 $A = BP_1^{-1} = P_2^{-1} P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$, 选 D.

8. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ()

A. α_1, α_3 B. α_1, α_2 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解: 方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只有一个向量 $(1, 0, 1, 0)^T$, 则 $r(A) = 3$ 且 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, 所以 $r(A^*) = 1$. 再由 $A^*A = |A|E = O$ 可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是方程组 $A^*x = 0$ 的解. $A^*x = 0$ 的基础解系中有三个线性无关的向量, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 和 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是线性无关的, 选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____.


解: 先取对数得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+2^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{2^x - 1}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x} = \frac{\ln 2}{2},$$




因此原极限为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}$.

10. 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

 **解:** 由条件得 $e^x(y' + y) = (ye^x)' = \cos x$, 于是 $ye^x = \sin x + C$. 由 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$, 因此 $ye^x = \sin x$, $y = e^{-x} \sin x$.

11. 曲线 $y = \int_0^x \tan t \, dt \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right) =$ _____.

 **解:** 根据曲线的弧长公式得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+y'^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx =$ _____.

 **解:**


$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \, dx \stackrel{\lambda x=t}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t d(e^{-t}) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

13. 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所围成, 则二重积分 $\iint_D xy \, d\sigma =$ _____.

 **解:** 利用极坐标计算得

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, d\sigma &= \iint_D xy \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r \, dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \, dr = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \theta)^4 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \, d\sin \theta = \frac{2}{3} \sin^6 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^6 \right] = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

14. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为_____.

 **解:** 利用配方可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2, \end{aligned}$$


因此 f 的正惯性指数为 2.



三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 α 的取值范围.

 **解:** 显然由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ 可知 $\alpha > 0$, 由题设及洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}},$$

这里要求 $\alpha > 1$, 否则不可能使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 且在 $\alpha > 1$ 的条件下有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha-1}(1+x^2)} = 0.$$

再由等价无穷小得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t^2 dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{3x^\alpha},$$

此时必有 $\alpha < 3$ 才能有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 因此综合起来 α 的范围是 $1 < \alpha < 3$.

16.(本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.


 **解:** 利用参数方程求导得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2-1}{t^2+1} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2+1)^3}.$$

令 $y' = 0$ 得 $t = \pm 1$. $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, 此时 $y'' > 0$, 所以 $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ 是极小值.
当 $t = -1$ 时, $x = -1$, $y = 1$, 此时 $y'' < 0$, 所以 $y(1) = 1$ 是极大值.

17.(本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

 **解:** 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(xy, yg(x)) \cdot y + f'_2(xy, yg(x)) \cdot g'(x) \cdot y$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{x=1} = y f'_1(y, y)$. 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{x=1} \right) \bigg|_{y=1} = \frac{d}{dy} [y f'_1(y, y)] \bigg|_{y=1} \\ &= [f'_1(y, y) + y(f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y))] \bigg|_{y=1} \\ &= f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1). \end{aligned}$$



18.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 处切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

解: 因为曲线 $y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点, 所以 $\alpha(0) = \frac{\pi}{4}, y(0) = 0, y'(0) = 1$. 由 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$ 可知 $\alpha = y + C_1$, 代入 $y(0) = 0, \alpha(0) = \frac{\pi}{4}$ 可得 $C_1 = \frac{\pi}{4}$. 由 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ 分离变量解得 $x = \ln(\sin \alpha) + C_2$, 取 $x = 0$ 可得 $C_2 = -\ln\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \ln \sqrt{2}$, 所以 $x = \ln(\sin \alpha) + \ln \sqrt{2} = \ln\left[\sqrt{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right]$, 因此 $y(x) = \arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}$.

19.(本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: (1) 由拉格朗日中值定理得 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, 其中 $\xi \in (n, n+1)$, 得证.

(2) 首先有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0, \end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 再将不等式 $\frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln k$ 对 k 从 1 到 n 求和得 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1) > \ln n$, 因此 $a_n > 0$. 根据单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

20.(本题满分 11 分)

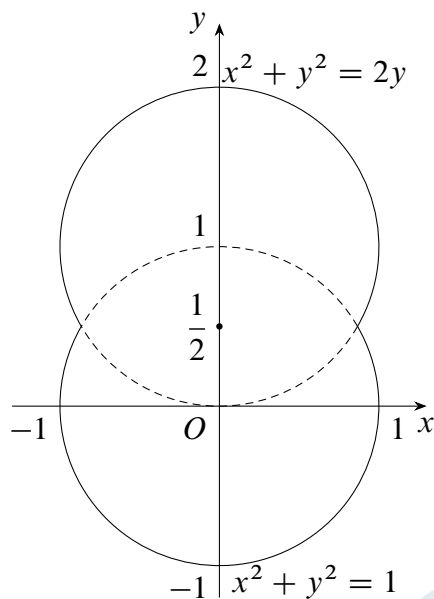
一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲面由 $x^2 + y^2 = 2y \left(y \geq \frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2 + y^2 = 1 \left(y \leq \frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m, 重力加速度为 $g \text{ m/s}^2$, 水的密度为 10^3 kg/m^3).

解: (1) 由旋转体体积公式可得容器的容积为

$$V = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi(1 - y^2) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi(2y - y^2) dy = \frac{9}{4}\pi.$$



第 20 题图


(2) 所求的功分为两部分: 抽出对应于 $y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 部分容器里的水所做的功 W_1 和抽出对应于 $y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 部分容器里的水所做的功 W_2 . 当 $y \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 时, 功微元 $dW = (2 - y)\rho g \pi(2y - y^2)dy$; 当 $y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 时, 功微元 $dW = (2 - y)\rho g \pi(1 - y^2)dy$, 因此

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = \rho g \pi \left[\int_{\frac{1}{2}}^2 (2 - y)(2y - y^2) dy + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y)(1 - y^2) dy \right] \\ &= \rho g \pi \left[\int_{\frac{1}{2}}^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y - 2y^2 + y^3) dy \right] \\ &= 3375\pi g. \end{aligned}$$

即将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做的功为 $3375\pi g$ J.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0$, $f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D f''_{xy}(x, y) dx dy$.

 **解:** 由 $f(1, y) = f(x, 1) = 0$ 知 $f'_y(1, y) = f'_x(x, 1) = 0$, 原积分化为累次积分利用分部积分得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 xy f''_{xy}(x, y) dx \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 xy d(f'_y(x, y)) = \int_0^1 \left(xy f'_y(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 y f'_y(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$




$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(y f'_y(1, y) - \int_0^1 y f'_y(x, 1) dx \right) dy = - \int_0^1 dy \int_0^1 y f'_y(x, y) dx \\
 &= - \int_0^1 dx \int_0^1 y f'_y(x, y) dy = - \int_0^1 dx \int_0^1 y d(f(x, y)) \\
 &= - \int_0^1 \left(y f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_D f(x, y) dx dy = a.
 \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

 解: (1) 首先有 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 因此 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能被 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示等价于 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 于是 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$, 所以 $a = 5$.

(2) 对增广矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 作初等行变换得

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

于是 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.


23.(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 A .



 **解:** (1) 由条件知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 -1 是一个特征值, 且它对应的特征向量为 $k_1(1, 0, -1)^T$, $k_1 \neq 0$; 1 是一个特征值, 它所对应的特征向量为 $k_2(1, 0, 1)^T$, $k_2 \neq 0$. 再由 $r(A) = 2$ 知 0 也是 A 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$
, 解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0, 1, 0)^T$, $k_3 \neq 0$.


(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda$, 因此

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$


第7章 2012年考研数学二

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

 解: 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, 所以直线 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x = -1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.


2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()
A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$ B. $(-1)^n(n-1)!$ C. $(-1)^{n-1}n!$ D. $(-1)^nn!$

 解: 利用导数的定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)] = (-1)^{n-1}(n-1)!, \end{aligned}$$

选 A.

3. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()
A. 充分必要条件 B. 充分非必要条件
C. 必要非充分条件 D. 既非充分也非必要条件

 解: 由于 $a_n > 0$, 所以数列 $\{S_n\}$ 单调递增. 若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. 反之若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 不一定有界, 如取 $a_n = 1$ 即可, 因此数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分不必要条件, 选 B.

4. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有 ()
A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_2 < I_3 < I_1$ D. $I_2 < I_1 < I_3$


 解:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < I_1, \\ I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_0^{\pi} e^{(2\pi-t)^2} \sin t dt + \int_0^{\pi} e^{(2\pi+t)^2} \sin t dt \end{aligned}$$


$$= I_1 + \int_0^\pi \left[e^{(2\pi+t)^2} - e^{(2\pi-t)^2} \right] \sin t dt > I_1.$$

选 D.

5. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意的 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是 ()
- A. $x_1 > x_2, y_1 < y_2$ B. $x_1 > x_2, y_1 > y_2$
C. $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ D. $x_1 < x_2, y_1 > y_2$


 解: 由题意知 $f(x, y)$ 关于 x 单调递增, 而关于 y 单调递减, 因此当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时, $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$, 选 D.

6. 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy =$ ()
- A. π B. 2 C. -2 D. $-\pi$

 解: 直接化为累次积分计算得

$$\begin{aligned} \iint_D (x^5 y - 1) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 (x^5 y - 1) dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} x^5 \cos^2 x - 1 + \sin x \right) dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = -\pi. \end{aligned}$$

7. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ()
- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

 解: 显然可得 $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 一定线性相关, 选 C.

8. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



解: 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 令 $x = 0$ 可得 $y(0) = 0$. 原方程两边对 x 求导得 $2x - y' = e^y y'$, 代入 $x = y = 0$ 得 $y'(0) = 0$. 等式两边再对 x 求导的 $2 - y'' = e^y y'' + e^y y'^2$, 代入 $x = y = 0, y'(0) = 0$ 得 $y''(0) = 1$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 1$.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 利用定积分定义得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{k^2 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

11. 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 由 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ 可知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} f'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} f'$, 于是 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{x} f' + y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) f' = 0$.

12. 微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 由条件得 $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 3y$, 于是 $\frac{d}{dy}(xy) = x + y \frac{dx}{dy} = 3y^2$, $xy = y^3 + C$. 当 $x = 1$ 时 $y = 1$, 所以 $C = 0$, $x = y^2$, $y = \sqrt{x}$ (初值条件是 $y(1) = 1$, 因此舍去 $y = -\sqrt{x}$).

13. 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

解: 由条件得 $y' = 2x + 1$, $y'' = 2$, 曲率 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 0$ (舍去). 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 因此坐标为 $(-1, 0)$.



14. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

解: 记 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则由题意知 $PA = B$. 又 $|A| = 3$, 所以 $|A^*| = |A|^2 = 9$, 因此 $|BA^*| = |B||A^*| = |P||A||A^*| = -27$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求常数 k 的值.

解:

(1) 由题意得

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) - a &= \frac{x + x^2 - \sin x}{x \sin x} - 1 = \frac{x + x^2 - \sin x - x \sin x}{x \sin x} \\ &\sim \frac{(1+x)(x - \sin x)}{x^2} \sim \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2} = \frac{1}{6}x, \end{aligned}$$

因此 $k = 1$.

16. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解: 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \\ f'_y(x, y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0 \end{cases}$ 解得 $f(x, y)$ 的驻点为 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$. 记

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(x, y) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, B = f''_{xy}(x, y) = y(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \\ C &= f''_{yy}(x, y) = x(y^2 - 1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \end{aligned}$$

在驻点 $(1, 0)$ 处, 由于 $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0$, $A = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$, 所以 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x, y)$ 的极大值. 在驻点 $(-1, 0)$ 处, 由于 $AC - B^2 = 2e^{-1} > 0$, $A = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0$, 所以 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x, y)$ 的极小值.



17.(本题满分 12 分)

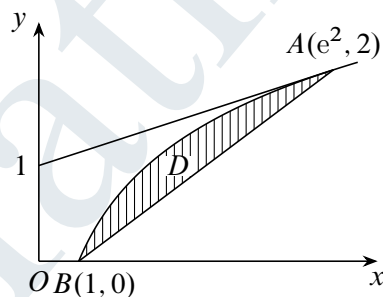
过 $(0, 1)$ 点作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解: 设 A 点的坐标为 $(x_0, \ln x_0)$, 则切线的方程为 $y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0 = \frac{x}{x_0} - 1 + \ln x_0$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $x_0 = e^2$, 因此切线的方程为 $y = \frac{1}{e^2}x + 1$, 切点 A 为 $(e^2, 2)$, 而 L 与 x 轴的交点为 $B(1, 0)$. 那么区域 D 的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \ln x dx - \frac{1}{2} (e^2 - 1) \cdot 2 \\ &= x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx - (e^2 - 1) \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) - (e^2 - 1) = 2. \end{aligned}$$

D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \frac{\pi}{3} \times 2^2 (e^2 - 1) \\ &= \pi x \ln^2 x \Big|_1^{e^2} - \pi \int_1^{e^2} 2 \ln x dx - \frac{4}{3} \pi (e^2 - 1) \\ &= 4\pi e^2 - 2\pi x \ln x \Big|_1^{e^2} + 2\pi (e^2 - 1) - \frac{4}{3} \pi (e^2 - 1) \\ &= \frac{2}{3} \pi (e^2 - 1). \end{aligned}$$



第 17 题图

18.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 为曲线 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 与极轴围成.

解: 化为极坐标系下的累次积分计算得

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r^3 dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^4 \cos \theta d(\cos \theta) \\ &= -\frac{1}{4} \int_1^{-1} (1 + u)^4 u du = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点.

解: (1) 微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 故方程的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 将 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$ 代入方程 $f''(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 所以 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故 $f(x) = e^x$.

(2) 由 (1) 得到曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 分别求一阶导数与二阶导数得

$$y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1, \quad y'' = 2e^{x^2} (1 + 2x^2) \int_0^x e^{-t^2} dt + 2x,$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, y = 0$. 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 因此点 $(0, 0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

20.(本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

证明: 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x) \geq 0, x \in [0, 1)$ 即可. 首先有 $f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$, 且 $\ln \frac{1+x}{1-x} > 0, \frac{2x}{1-x^2} > 2x > x + \sin x$, 因此 $f'(x) > 0, x \in (0, 1)$. 而 $f(0) = 0$, 则有 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$, 证毕.

21.(本题满分 10 分)

(1) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

证明: (1) 令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$, 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, \quad f(1) = n > 1,$$

因此由介值定理知方程 $f(x) = 1$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有根. 再由 $f'(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 \geq 1 > 0$ 知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内为增函数, 因此方程 $f(x) = 1$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且只有一个根.

(2) 由题意 $f(x_n) = 1$, 由拉格朗日中值定理得 $f(x_n) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi) \left(x_n - \frac{1}{2}\right)$. 因为 $f'(\xi_n) \geq 1$, 所以

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| \leq \left|f(x_n) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right| = \frac{1}{2^n},$$

由夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|x_n - \frac{1}{2}\right| = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.




22.(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 计算行列式 $|A|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

 解: (1) 行列式按照第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.$$

(2) 对增广矩阵 (A, β) 作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, \beta) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

由于方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解当且仅当 $r(A) = r(A, \beta) < 4$, 因此 $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$, 此时方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.


23.(本题满分 11 分)

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x \text{ 的秩为 } 2.$$

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 f 化为标准形.



 **解:** (1) 因为 $r(A) = r(A^T A) = 2$, 对矩阵 A 作初等行变换得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $a = -1$.

(2) 由 $a = -1$ 可得 $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 故矩阵 $A^T A$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

于是 $A^T A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $A^T A x = 0$ 得 λ_1 的单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$;

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 解方程组 $(2E - A^T A)x = 0$ 得 λ_2 的单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$;

当 $\lambda_3 = 6$ 时, 解方程组 $(6E - A^T A)x = 0$ 得 λ_3 的单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$.


令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则在正交变换 $x = Qy$ 下, 原二次型化为标准形 $f = 2y_2^2 + 6y_3^2$.




第8章 2013年考研数学二

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\cos x - 1 = x \cdot \sin \alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ ()
- A. 比 x 高阶的无穷小 B. 比 x 低阶的无穷小
C. 与 x 同阶但不等价的无穷小 D. 与 x 等价的无穷小

 解: 利用等价无穷小可知当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \alpha(x) = \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 因此 $\sin \alpha(x) \sim -\frac{1}{2}x$. 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) \rightarrow 0$, 于是 $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \sim -\frac{1}{2}x$, 即 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小, 选 C.


2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] =$ ()
- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

 解: 当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 两边对 x 求导得 $-\sin(xy)(y + xy') + \frac{1}{y} \cdot y' - 1 = 0$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = f'(0) = 1$. 则由导数定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] \stackrel{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x) - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x) - 1}{2x} = 2f'(0) = 2,$$

选 A.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 ()
- A. $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点 B. $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点
C. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导 D. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导


 解: 首先变上限积分函数一定是连续的, $f(x)$ 在区间 $[0, \pi)$ 和 $(\pi, 2\pi]$ 内都连续, 利用洛必达法则得

$$F'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\int_0^x f(t) dt - \int_0^\pi f(t) dt}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0,$$
$$F'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\int_0^x f(t) dt - \int_0^\pi f(t) dt}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 2.$$

因此 $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$, $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导, 选 C.


4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 ()

- A. $\alpha < -2$ B. $\alpha > 2$ C. $-2 < \alpha < 0$ D. $0 < \alpha < 2$

 解: 由 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{+\infty} f(x) dx$ 收敛可知 $\int_1^e f(x) dx$ 与 $\int_e^{+\infty} f(x) dx$ 都收敛. 根据 p 积分与对数 p 积分的敛散性结论知 $\int_1^e f(x) dx$ 收敛当且仅当 $\alpha - 1 < 1$, $\int_e^{+\infty} f(x) dx$ 收敛当且仅当 $\alpha + 1 > 1$, 解得 $0 < \alpha < 2$, 选 D.

5. 设 $z = \frac{y}{x} f(xy)$, 其中函数 f 可微, 则 $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

- A. $2yf'(xy)$ B. $-2yf'(xy)$ C. $\frac{2}{x}f(xy)$ D. $-\frac{2}{x}f(xy)$


 解: 利用复合函数求偏导得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f(xy) + yf'$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{y} \left(-\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy) \right) + \left(\frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) \right) \\ &= -\frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) + \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) = 2yf'(xy), \end{aligned}$$

选 A.


6. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy$ ($k = 1, 2, 3, 4$), 则 ()

- A. $I_1 > 0$ B. $I_2 > 0$ C. $I_3 > 0$ D. $I_4 > 0$

 解: 根据对称性可知 $I_1 = I_3 = 0$, 而当 $x \in D_2$ 时, $y - x > 0$, 因此 $I_2 = \iint_{D_2} (y - x) dx dy > 0$. 当 $x \in D_4$ 时, $y - x < 0$, $I_4 < 0$, 选 B.

7. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则 ()


- A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

 解: 对一个矩阵 A 右乘一个可逆矩阵 B 就是对 A 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 C , 因此矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的列向量组等价, 选 B.

8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ()

- A. $a = 0, b = 2$ B. $a = 0, b$ 为任意常数
C. $a = 2, b = 0$ D. $a = 2, b$ 为任意常数



 **解:** 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

的特征值为 $2, b, 0$, 而 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda((\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2)$, 因此
当且仅当 $a = 0$ 时, A 的特征值为 $2, b, 0$, 其中 b 可为任意常数, 选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.


9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 **解:** 先取对数利用等价无穷小可得


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{\frac{1}{2}}$.

10. 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$


 **解:** 由题意知 $f(-1) = 0$, $f'(x) = \sqrt{1-e^x}$, 所以 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$, $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=-1} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$

11. 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta$, $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, 则 L 所围平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

 **解:** 利用极坐标系下的面积公式得


$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 6\theta}{6} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}.$$

12. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$


 **解:** 由参数方程求导公式得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{t/(1+t^2)}{1/(1+t^2)} = t$. 当 $t = 1$ 时, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \ln 2$, 曲线上对应点的法线斜率为 $k = -1$, 因此法线方程为 $y = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \ln 2 = -x + \frac{\pi}{4} + \ln 2.$



13. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

 **解:** 因为 $y_1 - y_3 = e^{3x}$, $y_2 - y_3 = e^x$ 是该非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的两个解, 且 e^{3x} 与 e^x 线性无关. 又因为 $y_3 = -xe^{2x}$ 是非齐次线性微分方程的特解, 所以该方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - xe^{2x}$.


14. 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

 **解:** 由 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 可知 $A^T = -A^*$, 于是 $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A^*| = -|A|^2$, 因此 $|A| = 0$ 或 -1 . 又 A 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 于是 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$, 所以 $|A| = -1$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.


15. (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

 **解:** 当 $x \rightarrow 0$ 时, 利用泰勒公式得


$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(1 + 2^2 + 3^2)x^2\right) + o(x^2) \sim 7x^2, \end{aligned}$$

因此 $a = 7, n = 2$

 **注:** 此题中有两点需要注意的地方, 一是泰勒公式展开的原则是要保留到最近低阶的非零无穷小, 这样能做到不漏也不多余. 二是此题不建议大家用洛必达法则, 因为在洛必达法则中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 的必要非充分条件, 也就是说由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ax^n} = 1$ 是不能直接得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{nax^{n-1}} = 1$ 的, 中间需要一些麻烦的说明, 因此用泰勒公式直截了当. 此题可以推广为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n (1 - \cos a_k x)}{x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$.

16. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.

 **解:** 利用旋转体的体积公式得


$$V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}, V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y = 10V_x$ 得 $\frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \times \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$.



17.(本题满分 10 分)

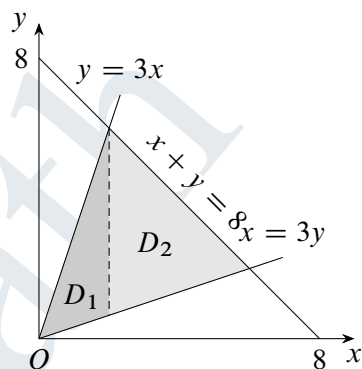
设平面区域 D 由直线 $x = 3y$, $y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$.

 **解:** 积分区域可分为两部分

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{3} \leq y \leq 3x \right\}, D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, \frac{x}{3} \leq y \leq 8 - x \right\}.$$

则

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy \\ &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy \\ &= \int_0^2 x^2 \left(3x - \frac{x}{3} \right) dx + \int_2^6 x^2 \left(8 - x - \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \frac{416}{3}. \end{aligned}$$




第 17 题图

18.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;
- (2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

 **证明:** (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = f(0) = 0$, $F(1) = f(1) - 1 = 0$, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法一 令 $G(x) = f(x) + f'(x) - x$, 则

$$G(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1),$$

$$G(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1.$$


由罗尔定理知存在 $\eta \in (-1, 1)$ 使得 $G'(\eta) = f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

方法二 令 $H(x) = e^x(f'(x) - 1)$, 由 (1) 可知 $f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$, 因此 $H(\xi) = H(-\xi) = 0$, 由罗尔定理知存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ 使得 $H'(\eta) = e^\eta(f''(\eta) + f'(\eta) - 1) = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

19.(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.



 **解:** 设 $M(x, y)$ 为曲线上一点, 该点到坐标原点的距离为 $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda(3x^2 - y) = 0 \\ F'_y = 2y + \lambda(3y^2 - x) = 0 \\ F'_\lambda = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$


$(1, 1)$ 是唯一的驻点, 且 $d(1, 1) = \sqrt{2}$. 考虑边界点 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 有 $d(0, 1) = d(1, 0) = 1$, 因此曲线上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$, 最短距离为 1.

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

 **证明:** (1) 由题意得 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$, 则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的唯一驻点, 且当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f_{\min}(x) = f(1) = 1$.

(2) 由 (1) 知 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$, 又 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 所以 $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

再由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 可知 $\ln x_n < 1 \Rightarrow 0 < x_n < e$, 所以 $\{x_n\}$ 由上界, 由单调有界准则知

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 在等式 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 两边取极限得 $\ln A + \frac{1}{A} \leq 1$. 由 (1)

知对任意 $x > 0$ 都有 $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, 等号成立当且仅当 $x = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = 1$.

21.(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x (1 \leq x \leq e)$.

(1) 求 L 的弧长;

(2) 设 D 是由曲线 L , 直线 $x = 1, x = e$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

 **解:** (1) 由曲线的弧长公式得 L 的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_1^e \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x\right) \Big|_1^e = \frac{1+e^2}{4}. \end{aligned}$$




(2) 由形心公式得 D 的形心的横坐标为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x} x dy}{\int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x} dy} = \frac{\int_0^1 x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right) dx} \\ &= \frac{\frac{1}{16}e^4 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{12}e^3 - \frac{1}{12} - \frac{1}{2}} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}.\end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

 解: 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 代入 $AC - CA = B$ 得方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (*)$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right).$$

由此可知当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组 (*) 无解. 当 $a = -1$ 且 $b = 0$ 时, 方程组 (*) 有解, 且此时方程组的通解为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k_1(1, -1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 0, 1)^T + (1, 0, 0, 0)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时存在矩阵 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$) 使得 $AC - CA = B$.

23.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.



☛ **证明:** (1) 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x}) + (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

且 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ 为对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $\mathbf{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} &= (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\alpha}) = 2\boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} &= (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

故 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是矩阵 \mathbf{A} 的特征值. 又 \mathbf{A} 的秩 $r(\mathbf{A}) = r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) \leq r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) + r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) = 2$, 即 \mathbf{A} 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3 = 0$ 也是 \mathbf{A} 的特征值, 故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.



第9章 2014年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是 ()
- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, 2)$ C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{2})$

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, 由题意得 $\alpha > 1, \frac{2}{\alpha} > 1$, 因此 $1 < \alpha < 2$, 选 B.

2. 下列曲线中有渐近线的是 ()
- A. $y = x + \sin x$ B. $y = x^2 + \sin x$ C. $y = x + \sin \frac{1}{x}$ D. $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

解: 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 从而直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 的斜渐近线.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()
- A. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ B. 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
- C. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ D. 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

解: 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F''(x) = f''(x)$. 故当 $f''(x) > 0$ 时, $F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x = 0$ 或 $x = 1$ 处取到, 而 $F(0) = F(1) = 0$, 所以 $F(x) = f(x) - g(x) \leq 0$, 选 D.


4. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是 ()
- A. $\frac{\sqrt{10}}{50}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{100}$ C. $10\sqrt{10}$ D. $5\sqrt{10}$

解: 由参数方程求导公式得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t+4}{2t}$, 于是

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{2 \cdot 2t - 2(2t+4)}{(2t)^2} \bigg/ (2t) = -\frac{1}{t^3}.$$

在 $t = 1$ 对应的点处有 $y' = 3, y'' = -1$, 曲率半径为 $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = 10\sqrt{10}$, 选 C.


5. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()
- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

 解: 因为 $\frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+\xi^2}$, 所以 $\xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x}$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{3}x^3}{x^2 \cdot x} = \frac{1}{3},$$


选 D.

6. 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ()
- A. $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得
- B. $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得
- C. $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, $u(x, y)$ 的最小值在 D 的边界上取得
- D. $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, $u(x, y)$ 的最大值在 D 的边界上取得

 解: 如果内部有最值点, 那么这一点一定是驻点, 且判别式要满足 $AC - B^2 \geq 0$. 而在 D 内的任意驻点处有 $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$, 因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 即 $A + C = 0$, 那么一定有 $AC - B^2 < 0$, 矛盾. 因此 D 的内部没有最值点, 最值都在边界上取到, 选 A.

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ()


A. $(ad - bc)^2$ B. $-(ad - bc)^2$ C. $a^2d^2 - b^2c^2$ D. $b^2c^2 - a^2d^2$

 解: 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2,$$

选 B.

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()
- A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
- C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

 解: 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 令 $\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0}$, 即

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\alpha_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = k\lambda_1 + l\lambda_2 = 0,$$



从而 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$ 线性无关. 反之, 如果 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + k\alpha_3$ 线性无关, 不一定有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 如取反例 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0)^T$, 因此选 A.


二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$


 解:

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{3\pi}{8}.$$


10. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = \int 2(x-1)dx = x^2 - 2x + C$, 由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 即 $f(x) = x^2 - 2x$. 又 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 故 $f(7) = f(-1) = -f(1) = 1$.


11. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 原方程中令 $x = y = \frac{1}{2}$ 得 $z = 0$. 方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 两边求全微分得 $e^{2yz}(2ydz + 2zdx) + dx + 2ydy + dz = 0$, 代入 $x = y = \frac{1}{2}, z = 0$ 得 $dz + dx + dy + dz = 0$, 因此 $dz|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$.

12. 曲线 L 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = r \cos \theta = \theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta = \theta \sin \theta \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta}$. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0, y = \frac{\pi}{2}, \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\pi}$, 则该点处的切线方程为 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$.

13. 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 利用质心的横坐标公式得 $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1) dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx} = \frac{11}{20}$.

14. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 由配方法得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2, \end{aligned}$$


因为负惯性指数为 1, 所以 $4 - a^2 \geq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 2$.




三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.


 **解:** 当 $t > 0$ 时, $t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t > t^2 (\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}) - t = \frac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2 (e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 (e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \bigg/ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

 **注:** 事实上, 洛必达法则适用于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.


16.(本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

 **解:** 由已知等式得 $y' = \frac{1 - x^2}{1 + y^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $y = y(x)$ 的驻点为 $x = \pm 1$. 当 $x < -1$ 时, $y' < 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$. 原为分方程变量分离得 $(1 + y^2)dy = (1 - x^2)dx$, 积分可得 $y + \frac{1}{3}y^3 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$. 由 $y(2) = 0$ 可知 $C = \frac{2}{3}$. 分别代入 $x = \pm 1$ 可得函数 $y(x)$ 的极大值 $y(1) = 1$, 极小值 $y(-1) = 0$.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

 **解:** 积分区域关于直线 $y = x$ 对称, 利用轮换对称性与极坐标可得


$$I = \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin(\pi r) dr \\
 &= -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

 解: 利用多元复合函数偏导公式得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(e^x \cos y) e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y) e^x \cos y, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= -f'(e^x \cos y) e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y) e^x \cos y.
 \end{aligned}$$

所以等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$ 化为

$$f''(e^x \cos y) e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y] e^{2x},$$


因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f''(u) = 4f(u) + u$, 此方程的通解为 $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4}$. 由 $f(0) = f'(0) = 0$ 得 $C_1 + C_2 = 0, 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{4} = 0$, 解得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$, 故 $f(u) = \frac{1}{16} (e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

$$(1) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$(2) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

 解: (1) 因为 $0 \leq g(x) \leq 1$, 所以 $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt = x - a, x \in [a, b]$.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_a^x f(t) g(t) dt - \int_a^{a+\int_0^x g(u) du} f(t) dt, \text{ 则}$$

$$F'(x) = f(x) g(x) - f\left(a + \int_a^x g(u) du\right) g(x) = \left[f(x) - a + \int_a^x g(u) du\right] g(x).$$


由 (1) 知 $a + \int_a^x g(t) dt \leq a + x - a = x$, 而 $f(x)$ 单调增加, 所以 $F'(x) \geq 0$, 这说明 $F(x)$

单调增加. 又 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geq 0$, 即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$.



20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, 1]$. 定义函数列 $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, \dots , $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, 记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$.

 解: 因为 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $f_1(x) = f(x)$, 所以

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x},$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}} = \frac{x}{1+3x}.$$


依此类推可得 $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$. 于是 $f'_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0$, $f_n(x)$ 单调增加. 因为 $f_n(0) = 0$, 所以 $f_n(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$. 因此

$$S_n = \int_0^1 \frac{x}{1+nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \ln(1+n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n^2} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1.$$

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $\frac{\partial f}{\partial x} = (y+1)^2 - 2(2-y)\ln y$. 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

 解: 由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ 对 y 积分可得 $f(x, y) = y^2 + 2y + \varphi(x)$. 又 $f(x, y) = y^2 + 2y + \varphi(y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 所以 $\varphi(y) = 1 - (2-y)\ln y$. 因此

$$f(x, y) = y^2 + 2y + \varphi(x) = y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x = (y+1)^2 - (2-x)\ln x.$$

则 $f(x, y) = 0$ 对应的曲线方程为 $(y+1)^2 = (2-x)\ln x$, 当 $y = -1$ 时, $x = 1$ 或 2 . 从而所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx = \pi \int_1^2 \ln x d\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \pi \left[\left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) \ln x - \left(2x - \frac{1}{4}x^2\right) \right]_1^2 = \left(2\ln 2 - \frac{5}{4}\right) \pi. \end{aligned}$$

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.



(1) 求方程 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

解: (1) 对矩阵 A 作初等行变换得 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, 则方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\alpha = (-1, 2, 3, 1)^T$.

(2) 对矩阵 $(A \ E)$ 作初等行变换得

$$(A \ E) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right).$$

记 $E = (e_1, e_2, e_3)$, 则 $Ax = e_1$ 的通解为 $x = (2, -1, -1, 0)^T + k_1\alpha, k_1 \in \mathbb{R}$; $Ax = e_2$ 的通解为 $x = (6, -3, -4, 0)^T + k_2\alpha, k_2 \in \mathbb{R}$; $Ax = e_3$ 的通解为 $x = (-1, 1, 1, 0)^T + k_3\alpha, k_3 \in \mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha) = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

23.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

解: 先证明一个基本结论:

引理

秩为 1 的矩阵 A 可对角化的充要条件是 $\text{tr}(A) \neq 0$. 且当 $\text{tr}(A) \neq 0$ 时, A 的相似标准形为 $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$.

证明: 由于 $r(A) = 1$, 所以方程组 $Ax = 0$ 有且只有 $n-1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 A 的 $n-1$ 重特征值, 且它只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 A 的最后一个特征值就是 $\text{tr}(A)$. 当 $\text{tr}(A) \neq 0$ 时, 此非零特征值有一个线性无关特征向量, 此时 A 可对角化, 且其相似标准形为 $\text{diag}\{\text{tr}(A), 0, \dots, 0\}$. 若 $\text{tr}(A) = 0$, 则 0 是 A 的 n 重特征值, 但只有 $n-1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(A) = r(B) = 1, \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = n$ 可知 A 与 B 都相似于对角阵 $\text{diag}\{n, 0, \dots, 0\}$, 故 A 与 B 相似.

第 10 章 2015 年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列反常积分中收敛的是 ()

A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ B. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ C. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ D. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

解: 直接计算可知 $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2}$, 其他选项都发散, 选 D.

2. 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

A. 连续型 B. 有可去间断点 C. 有跳跃间断点 D. 有无穷间断点

解: 首先有 $x \neq 0$, 且 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\frac{x^2 \sin t}{t x}} = e^x$, 因此 $f(x)$ 有可去间断点 $x = 0$, 选 B.

3. 设函数 $\begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()

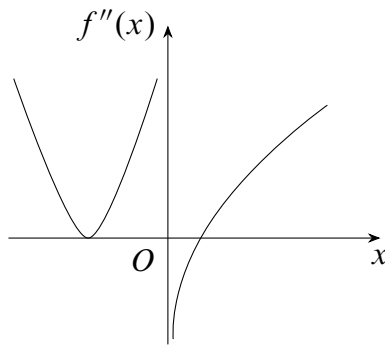
A. $\alpha - \beta > 1$ B. $0 < \alpha - \beta \leq 1$ C. $\alpha - \beta > 2$ D. $0 < \alpha - \beta \leq 2$

解: 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 0$, $f'_-(0) = 0$, 则 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = f'_-(0) = 0$, 这要求 $\alpha > 1$. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}$. 要想 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $0 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}\right)$, 因此 $\alpha - \beta - 1 > 0$, 选 A.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3


解: 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y = f''(x)$ 在 $x > 0$ 时与 x 轴的交点, $x < 0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.



第 4 题图


5. 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 依次为 ()

- A. $\frac{1}{2}, 0$ B. $0, \frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}, 0$ D. $0, -\frac{1}{2}$

 **解:** 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$. 当 $u = v = 1$ 时, $x = y = \frac{1}{2}$, 从而 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ 变为 $f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}$. 因此 $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u(1-v)}{1+v}, \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2u^2}{(1+v)^2}$, 故 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=1, v=1} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{u=1, v=1} = -\frac{1}{2}$, 选 D.


6. 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ ()

- A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

 **解:** 首先把四条曲线化为极坐标方程, 代入 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 得四条曲线分别为 $r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}, \theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 正确答案选 B.

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为 ()


- A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$ C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

 **解:** 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \ b) < 3$, 利用初等行变换得

$$(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以 $a = 1$ 或 $2, d = 1$ 或 2 , 选 D.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 ()
- A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

 **解:** 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 A , 由题意知 $P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 由初等变换与初


等矩阵的关系知 $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{C}$, 于是

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{C}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 选 A.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.


9. 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ _____.

 解: 利用参数方程求导公式得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3+3t^2}{1/(1+t^2)} = 3(1+t^2)^2$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{12t(1+t^2)}{1/(1+t^2)} = 12t(1+t^2)^2,$$


因此 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = 48$.

10. 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$ _____.


 解: 根据莱布尼茨公式可得

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 \cdot 2(2^x)^{(n-2)} \Big|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \ln^{n-2} 2 = n(n-1) \ln^{n-2} 2.$$


11. 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

 解: 由条件 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$, 求导得 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2)$, 故 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1, \varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$, 则 $f(1) = 2$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

 解: 由题意知 $y(0) = 3, y'(0) = 0$. 微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 所以微分方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 代入 $y(0) = 3, y'(0) = 0$ 得 $C_1 = 2, C_2 = 1$, 故 $y = 2e^x + e^{-2x}$.

13. 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.


 解: 令 $x = y = 0$ 可得 $z(0, 0) = 0$, 原方程两边同时求全微分得

$$e^{x+2y+3z} (dx + 2dy + 3dz) + xydz + yzdx + xzdy = 0.$$

令 $x = y = z = 0$ 得 $(dx + 2dy + 3dz)|_{(0,0)} = 0$, 即 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$.




14. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

 解: A 的特征值为 $2, -2, 1$ 则 $B = A^2 - A + E$ 的特征值为 $3, 7, 1$, 因此 $|B| = 21$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.


15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

 解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, 所以


$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \ln(1+x) + bx \sin x = x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + bx^2 + o(x^3) \\ &= (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2} \right) x^2 + \frac{a}{3} x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x) = kx^3$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, k=\frac{a}{3}$, 解得 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$.

 注: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 是无法直接得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(本题满分 10 分)

设 $A > 0$, D 是由曲线段 $y = A \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积, 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

 解: 由旋转体的体积公式得


$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A \sin x)^2 dx = \frac{\pi^2 A^2}{4}, \\ V_2 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x |f(x)| dx = 2\pi A \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2\pi A. \end{aligned}$$

由题意有 $V_1 = V_2$, 且 $A > 0$, 所以 $A = \frac{8}{\pi}$.

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$, $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$, $f(0, y) = y^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$ 的极值.



 **解:** 由 $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分得

$$f'_x(x, y) = 2\left(\frac{1}{2}y^2 + y\right)e^x + \varphi(x) = (y^2 + 2y)e^x + \varphi(x).$$

故 $f'_x(x, 0) = \varphi(x) = (x+1)e^x$, $f'_x(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + (1+x)e^x$. 两边再对 x 积分得 $f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x + \psi(y)$. 由 $f(0, y) = y^2 + 2y$ 知 $\psi(y) = 0$, 所以 $f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x$.


令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(x, y) = (0, -1)$. 又

$$f''_{xx} = (y^2 + 2y)e^x + (x+2)e^x, f''_{xy} = 2(y+1)e^x, f''_{yy} = 2e^x.$$

当 $x = 0, y = -1$ 时, $A = f''_{xx}(0, -1) = 1, B = f''_{xy}(0, -1) = 0, C = f''_{yy}(0, -1) = 2$, 因此 $AC - B^2 > 0, A > 0$, 故 $f(0, -1) = -1$ 为极小值.

18.(本题满分 10 分)


计算二重积分 $\iint_D x(x+y)dxdy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

 **解:** 区域 D 关于 y 轴对称, 则由对称性得

$$\begin{aligned} \iint_D x(x+y)dxdy &= \iint_D x^2dxdy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cdot 2 \cos^2 t dt - \frac{2}{5} \quad (x = \sqrt{2} \sin t) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)


已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$, 求 $f(x)$ 的零点个数.

 **解:** 求导得 $f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}(2x-1)$, 令 $f'(x) = 0$ 得唯一驻点 $x = \frac{1}{2}$. $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调递增, 所以 $f(\frac{1}{2})$ 是唯一的极小值, 也是最小值. 而 $f(\frac{1}{2}) < f(1) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 内有一个零点 $x = 1$. 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 也有一个零点, 共两个零点.

20.(本题满分 11 分)




已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至 30°C . 若要将该物体的温度继续降至 21°C , 还需冷却多长时间?

 **解:** 设 t (单位: min) 时刻物体温度为 $x(t)$, 则由题意得 $\frac{dx}{dt} = -k(x - m)$, 其中比例常数为 $k > 0$, 介值温度为 $m = 20^{\circ}\text{C}$, 解得 $x(t) = Ce^{-kt} + 20$. 代入 $x(0) = 120$ 得 $C = 100$, 再由 $x(30) = 30$ 可得 $k = \frac{\ln 10}{30}$, 所以 $x(t) = 100e^{-\frac{\ln 10}{30}t} + 20$. 令 $x = 21$ 得 $t = 60$. 因此要降到 21°C , 还需要 30min .

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上具有二阶导数, $f(a) = 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 设 $b > a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$.

 **解:** 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线方程为 $y = f(b) + f'(b)(x - b)$, 令 $y = 0$ 得 $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. 因为 $f'(x) > 0$, $f(a) = 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, $f(b) > f(a)$. 又 $f'(b) > 0$, 所以 $x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$. 又 $x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)}$, 在区间 (a, b) 上应用拉格朗日中值定理得 $f(b) = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, $\xi \in (a, b)$. 所以

$$x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{f(b)}{f'(\xi)} - \frac{f(b)}{f'(b)} = f(b) \frac{f'(b) - f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)},$$


因为 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增, 故 $f'(b) > f'(\xi)$, $x_0 > a$, 因此 $a < x_0 < b$.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

 **解:** (1) 因为 $A^3 = O$, 所以 $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0$, 所以 $a = 0$.

(2) 由 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$ 得 $(E - A)X(E - A^2) = E$. 由 (1) 知

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此


$$X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

 **解:** (1) 由于矩阵 A 与矩阵 B 相似, 所以 $\begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 2 + b \\ 2a - 3 = b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$.

(2) 由 (1) 知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, 由 A 与 B 相似知 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)$, 故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(E - A)x = 0$, 得线性无关特征向量 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T, \xi_2 = (-3, 0, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 解方程组 $(5E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$.

取 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 为对角阵.



第 11 章 2016 年考研数学二

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ()

A. a_1, a_2, a_3 B. a_2, a_3, a_1 C. a_2, a_1, a_3 D. a_3, a_2, a_1

解: 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1) \sim x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2,$$
$$a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}, a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x,$$

所以三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 a_2, a_3, a_1 , 选 B.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

解: 从四个选项中选一个函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$ 对任意 x 成立即可, 其中 B 和 C 当 $x > 1$ 时 $F'(x) \neq f(x)$, 而 A 不满足 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, D 满足这个条件, 选 D.

3. 反常积分① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为 ()
- A. ①收敛, ②收敛 B. ①收敛, ②发散 C. ①发散, ②收敛 D. ①发散, ②发散

解: 直接计算得

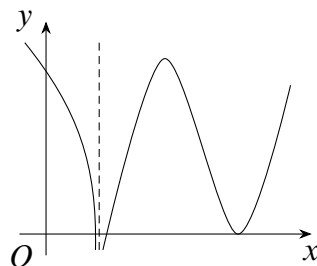
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} \Big|_{-\infty}^{0^-} = 1,$$

则①收敛, 而

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} \Big|_{0^+}^{+\infty} = +\infty,$$

则②发散, 选 B.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ()



第 4 题图

- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

解: 拐点是导函数单调性发生改变的点, 图中 $y = f'(x)$ 的图像有两个极值点都是导函数单调性改变的点, 都是拐点, 而虚线处左右两侧的导函数单调性也相反, 从而也是拐点, 即共有 3 个拐点. 导函数为零的点有 3 个, 但只有前面 2 个驻点左右两侧导数符号相反, 有 2 个极值点, 选 B.

5. 设函数 $f_i(x)$ ($i = 1, 2$) 具有二阶连续导数, 且 $f_i''(x_0) < 0$ ($i = 1, 2$), 若两条曲线 $y = f_i(x)$ ($i = 1, 2$) 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$, 且在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个邻域内, 有 ()
- A. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$ B. $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$
C. $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ D. $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$

解: 曲线 $y = f_1(x)$ 与 $y = f_2(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线, 故 $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$. 又在该点处曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率 K_1 大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率 K_2 , 其中

$$K_1 = \frac{|f_1''(x_0)|}{(1 + f_1'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}, K_2 = \frac{|f_2''(x_0)|}{(1 + f_2'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}},$$

且 $f_i''(x) < 0$ ($i = 1, 2$), 因此 $f_1''(x_0) < f_2''(x_0) < 0$. 由二阶导数的连续性知在 x_0 的某个邻域内都有 $f_1''(x) < f_2''(x) < 0$, 由泰勒公式

$$f_i(x) = f_i(x_0) + f_i'(x_0)(x - x_0) + \frac{f_i''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \quad (i = 1, 2)$$

以及 $g(x) = f_i(x_0) + f_i'(x_0)(x - x_0)$ 可得在 x_0 的某邻域内有 $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x - y}$, 则 ()
- A. $f'_x - f'_y = 0$ B. $f'_x + f'_y = 0$ C. $f'_x - f'_y = f$ D. $f'_x + f'_y = f$

解: 由 $f(x) = \frac{e^x}{x - y}$ 得 $f'_x(x, y) = \frac{e^x(x - y) - e^x}{(x - y)^2}$, $f'_y(x, y) = \frac{e^x}{(x - y)^2}$, 故 $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = \frac{e^x}{x - y} = f(x)$, 选 D.

7. 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()
- A. A^T 与 A^T 相似 B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似
C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

作为选择题而言, 建议大家用切线, 凹凸性和曲率的几何意义做.



解: 由 A 与 B 相似知存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$, 因此

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^T)^{-1}, B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P,$$

$$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P,$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, 则 A 与

B 相似, 但 $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ 与 $B + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 不相似.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 ()

A. $a > 1$ B. $a < -2$ C. $-2 < a < 1$ D. $a = 1$ 或 $a = -2$

解: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2 = 0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$. 由于 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 即正负特征值个数分别为 1, 2, 因此 $\begin{cases} a + 2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$, 即 $-2 < a < 1$, 选 C.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为_____.

解:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) \right) = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{1+x^2} + \arctan(1+x^2) \right) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为 $y = x + \frac{\pi}{2}$.


10. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

解: 利用定积分定义可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n} = \int_0^1 x \sin x dx = \sin 1 - \cos 1.$$


11. 以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为_____.

 **解:** 设一阶非齐次线性微分方程为 $y' + p(x)y = q(x)$, 将特解代入得


$$\begin{cases} 2x + x^2 p(x) = q(x) \\ 2x - e^x + (x^2 - e^x) p(x) = q(x) \end{cases}.$$

解得 $p(x) = -1, q(x) = 2x - x^2$, 故此微分方程为 $y' - y = 2x - x^2$.

12. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 则当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0) =$ _____.

 **解:** 注意到 $f(0) = 1$, 且等式两边是可导的, 两边求导得 $f'(x) = 2(1+x) + 2f(x)$, 则 $f'(0) = 4$. 两边再求导得 $f''(x) = 2 + 2f'(x)$, 则 $f''(0) = 10$, 两边同时求 $n-2$ 阶导数得到 $f^{(n)}(x) = 2f^{(n-1)}(x)$, 则 $f^{(n)}(0) = 2f^{(n-1)}(0) = \dots = 2^{n-2} f''(0) = 5 \cdot 2^{n-1}$.


13. 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l . 若点 P 的横坐标对事件的变化率为常数 v_0 , 则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时, l 对时间的变化率是_____.

 **解:** 注意到 $l = \sqrt{x^2 + x^6}$, 两边对时间 t 求得

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2x + 6x^5}{2\sqrt{x^2 + x^6}} \frac{dx}{dt},$$

$$x = 1 \text{ 时, } \frac{dx}{dt} = v_0, \text{ 所以 } \left. \frac{dl}{dt} \right|_{x=1} = \frac{8}{2\sqrt{2}} v_0 = 2\sqrt{2} v_0.$$

14. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a =$ _____.

 **解:** 因为矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 所以 $r(A) = r(B) = 2$, 因


此 $|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2) = 0$, 得 $a = 2$ 或 $a = -1$. 注意到 $a = -1$ 时, $r(A) = 1$ 不满足条件, 因此 $a = 2$.



三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.


 解: 首先有 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} \right)$, 其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos 2x + 2x \sin x - 1 + 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + 2x \sin x - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - 2 \sin^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (x - \sin x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{1}{6} x^3}{x^4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{\frac{1}{3}}$.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

 解: 首先


$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}, & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases},$$

于是 $f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$. 当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) = 2x > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, 令

$f'(x) = 4x^2 - 2x = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$, 且 $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, 因此 $x = \frac{1}{2}$ 是唯一的极小值点, 从而是最小值点, 故 $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

 解: 原方程两边分别对 x, y 求偏导数得

$$2xz + (x^2 + y^2)z'_x + \frac{1}{z}z'_x + 2 = 0 \quad (1)$$

$$2yz + (x^2 + y^2)z'_y + \frac{1}{z}z'_y + 2 = 0 \quad (2)$$

令 $z'_x = z'_y = 0$ 得 $\begin{cases} xz + 1 = 0 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}$, 解得 $y = x, z = -\frac{1}{x}$, 代入原方程得 $2x + 2 + \ln(-x) = 0$, 利用求导考虑单调性知此方程的唯一根为 $x = -1$, 于是 $y = -1, z = 1$, 点 $(-1, -1)$ 是函数 $z(x, y)$ 的唯一驻点. 等式 (1) 两边分别对 x, y 求偏导数, 等式 (2) 两边对 y 求偏导数并代入 2 得

$$2z + 2xz'_x + 2xz'_x + (x^2 + y^2)z''_{xx} + \frac{1}{z}z''_{xx} + \left(-\frac{1}{z^2}z'_x\right)z'_x = 0 \quad (3)$$

$$2z + 2yz'_y + 2yz'_y + (x^2 + y^2)z''_{yy} + \frac{1}{z}z''_{yy} + \left(-\frac{1}{z^2}z'_y\right)z'_y = 0 \quad (4)$$

$$2xyz'_y + 2yz'_x + (x^2 + y^2)z''_{xy} + \left(-\frac{1}{z^2}z'_y\right)z'_x + \frac{1}{z}z''_{xy} = 0 \quad (5)$$


代入 $z(-1-1) = 1, z'_x(-1-1) = z'_y(-1-1) = 0$ 得

$$\begin{cases} 2z + (x^2 + y^2)z''_{xx} + \frac{1}{z}z''_{xx} = 0 \\ 2z + (x^2 + y^2)z''_{yy} + \frac{1}{z}z''_{yy} = 0, \\ (x^2 + y^2)z''_{xy} + \frac{1}{z}z''_{xy} = 0 \end{cases}$$

因此 $A = z''_{xx}(-1, -1) = -\frac{2}{3}, B = z''_{xy}(-1, -1) = 0, C = z''_{yy}(-1, -1) = -\frac{2}{3}$. 由 $AC - B^2 > 0, A < 0$ 知 $z(-1, -1) = 1$ 是函数 $z(x, y)$ 的极大值.

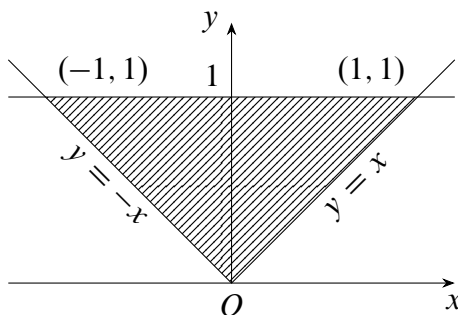
18.(本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y = 1, y = x, y = -x$ 围成的有界区域, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

 解: 首先 $D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \right\}$,

且利用积分区域关于 y 轴对称可得原积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cot^2 \theta - 1) d\theta = 1 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



第 18 题图

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的两个解, 若 $u(-1) = e, u(0) = -1$, 求 $u(x)$ 并写出微分方程的通解.



解: 由 $y_2(x) = u(x)e^x$ 得 $y_2' = u(x)e^x + u'(x)e^x$, $y_2'' = u(x)e^x + 2u'(x)e^x + u''(x)e^x$, 代入原方程得

$$(2x-1)e^x[u''(x) + 2u'(x) + u(x)] - (2x+1)e^x(u'(x) + u(x)) + 2u(x)e^x = 0.$$

即 $(2x-1)u''(x) + (2x-3)u'(x) = 0$, 变量分离得到 $\frac{du'(x)}{u'(x)} = -\frac{2x-3}{2x-1}dx$, 两边积分得

$$\ln|u'(x)| = -\int\left(1 - \frac{2}{2x-1}\right)dx = -x + \ln|2x-1| + \ln C_1,$$

因此 $u'(x) = C_1(2x-1)e^{-x}$, $u(x) = -C_1(2x+1)e^{-x} + C_2$. 由 $u(-1) = e$, $u(0) = -1$ 得 $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, 所以 $u(x) = -(2x+1)e^{-x}$. 由二阶线性微分方程解的结构定理知原方程的通解为 $y = k_1y_1 + k_2y_2 = k_1e^x - k_2(2x+1)$, k_1, k_2 为任意常数.

20.(本题满分 11 分)

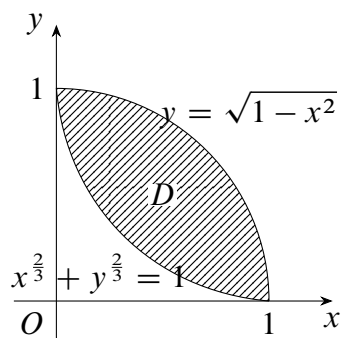
设 D 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解: 上下两条曲线分别记为 $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, 利用曲线的参数方程得 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y_1^2(x) dx - \pi \int_0^1 y_2^2(x) dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t (-\sin t) dt - \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt - 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t) dt \\ &= \frac{18\pi}{35}. \end{aligned}$$

旋转体的表面积为

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= 2\pi + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{3 \cos^2 t (\sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi + 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{16\pi}{5}. \end{aligned}$$




第 20 题图

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

 解: (1) 由题意知 $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt$, 因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt \\ &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} dt \int_t^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dx \\ &= -\frac{1}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{3\pi}. \end{aligned}$$


(2) 由 $f'(x) = \frac{\cos x}{2x-3\pi} = 0$ 得 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内的唯一驻点为 $x = \frac{\pi}{2}$. 且当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内的最小值点. 由 $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt < 0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} > 0$ 结合零点定理与单调性可知 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

22.(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

 解: (1) 对增广矩阵 (A, β) 进行初等行变换得

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 & a-2 \end{pmatrix},$$

方程组 $Ax = \beta$ 无解, 所以 $r(A) < r(A, \beta)$, 可知 $a = 0$.

(2) 由于 $a = 0$, 所以

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\ A\beta &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的增广矩阵 $(A^T A, A^T \beta)$ 作初等行变换得

$$(A^T A, A^T \beta) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$




$A^T A x = 0$ 的基础解系为 $\xi = (0, -1, 1)^T$, $A^T A x = A \beta$ 的特解为 $\eta = (1, -2, 0)^T$, 所以 $A^T A x = A^T \beta$ 的通解为 $x = k(0, -1, 1)^T + (1, -2, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

23.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A^{99} ;

(2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

 解: (1) 首先由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$ 知 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$.

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 解方程组 $(-E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_1 = (1, 1, 0)^T$.

当 $\lambda_2 = -2$ 时, 解方程组 $(-2E - A)x = 0$, 得特征向量 $\xi_2 = (1, 2, 0)^T$.

当 $\lambda_3 = 0$ 时, 解方程组 $Ax = 0$, 得特征向量 $\xi_3 = (3, 2, 2)^T$.

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \Lambda$, 所以

$$\begin{aligned} A^{99} &= (P\Lambda P^{-1})^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{99} - 2 & 1 - 2^{99} & 2 - 2^{98} \\ 2^{100} - 2 & 1 - 2^{100} & 2 - 2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 由 $B^2 = BA$ 知 $B^{100} = BA^{99} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 即 $\beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2$, $\beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2$, $\beta_3 = (2 - 2^{98})\alpha_1 + (2 - 2^{99})\alpha_2$.

第 12 章 2017 年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()
- A. $ab = \frac{1}{2}$ B. $ab = -\frac{1}{2}$ C. $ab = 0$ D. $ab = 2$

解: 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \frac{1}{2a} = b \Rightarrow ab = \frac{1}{2},$$

选 A.

2. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, 且 $f''(x) > 0$, 则 ()
- A. $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$ B. $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$
- C. $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx$ D. $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$

解: 由于 $f''(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 为凸函数, 从而 $f(x)$ 图像上连接两点的弧在连接着两点的割线的下方, 即

$$f(x) < f(0) + [f(1) - f(0)]x = 2x - 1, x \in (0, 1),$$


因此 $\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 (2x - 1) dx = 0$. 同理有 $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$, 选 B.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 ()
- A. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
- B. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
- C. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + x_n^2) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$
- D. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

解: A 不对, 反例取 $x_n = \pi$; B, C 不对, 反例取 $x_n = -1$; D 是对的, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \sin x_n) = x + \sin x = 0$, 而方程 $x + \sin x = 0$ 的唯一实根就是 $x = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 选 D.


4. 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} (1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$ ()

- A. $Ae^{2x} + e^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x)$ B. $Axe^{2x} + e^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x)$
 C. $Ae^{2x} + xe^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x)$ D. $Axe^{2x} + xe^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x)$

 解: 齐次方程的特征根为 $\lambda = 2 \pm 2i$, 原方程的非齐次项有两项, 其中 e^{2x} 对应的特解形式 $y_1 = Ae^{2x}$, $e^{2x} \cos 2x$ 对应的特解形式 $y_2 = xe^{2x} (B \cos 2x + C \sin 2x)$, 选 C.

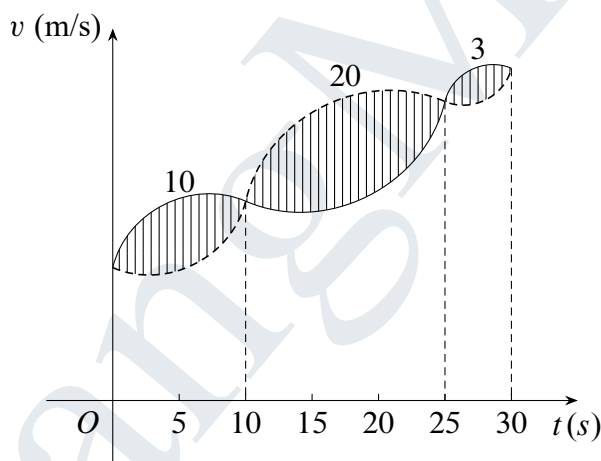
5. 设 $f(x, y)$ 具有一阶偏导数, 且在任意的 (x, y) , 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则 ()

- A. $f(0, 0) > f(1, 1)$ B. $f(0, 0) < f(1, 1)$
 C. $f(0, 1) > f(1, 0)$ D. $f(0, 1) < f(1, 0)$


 解: 由题意可知 $f(x, y)$ 关于 x 递增, 关于 y 递减, 因此 $f(0, 1) < f(0, 0) < f(1, 0)$, 选 D.

6. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$, 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则 ()

- A. $t_0 = 10$ B. $15 < t_0 < 20$ C. $t_0 = 25$ D. $t_0 > 25$




第 6 题图

 解: 从 0 到 t_0 时刻, 甲和乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t) dt$ 与 $\int_0^{t_0} v_2(t) dt$. 要使乙追上甲, 则有 $\int_0^{t_0} (v_2(t) - v_1(t)) dt = 10$, 由定积分的几何意义知 $\int_0^{25} (v_2(t) - v_1(t)) dt = 20 - 10 = 10$, 可知 $t_0 = 25$, 选 C.


7. 设 A 为三阶矩阵, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
 $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) =$ ()

- A. $\alpha_1 + \alpha_3$ B. $\alpha_2 + 2\alpha_3$ C. $\alpha_2 + \alpha_3$ D. $\alpha_1 + 2\alpha_2$

 解: 根据题意知 A 的特征值为 0, 1, 2, 且 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = 2\alpha_3$, 则 $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_2 + 2\alpha_3$, 选 B.


8. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- A. A 与 C 相似, B 与 C 相似
B. A 与 C 相似, B 与 C 不相似
C. A 与 C 不相似, B 与 C 相似
D. A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

 **解:** 注意到 A, B 的特征值都是 2, 2, 1, 要判断 A, B 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda = 2$ 的情形即可. 对矩阵 A 有 $r(2E - A) = 1$, 因此 A 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 A 与 C 相似. 对矩阵 B , 有 $r(2E - B) = 2$, 它是不可对角化的, B 与 C 不相似, 选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$ 的斜渐近线方程为_____.

 **解:** 直接计算有 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) = 1$, 而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x} \right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{2}{x} = 2,$$

因此斜渐近线方程为 $y = ax + b = x + 2$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

 **解:** 由参数方程求导公式得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t}{1 + e^t}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-(1 + e^t) \sin t - e^t \cos t}{(1 + e^t)^3},$$

因此 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{1}{8}$.


11. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx =$ _____.

 **解:**


$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \ln(1+x) d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \left. \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= - \left. \frac{1}{1+x} \right|_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$



12. 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$, $f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) =$ _____.


 **解:** 容易知道 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy = d(xye^y)$, 因此 $f(x, y) = xye^y + C$, 再由 $f(0, 0) = 0$ 知 $C = 0$, 因此 $f(x, y) = xye^y$.

13. $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx =$ _____.

 **解:** 交换二重积分次序可得

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy = \int_0^1 \tan x dx = -\ln(\cos 1).$$


14. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____.

 **解:** 由题意得 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 因此 $\lambda = 1, a = -1$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)


求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

 **解:** 令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du$, 故原极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{\sqrt{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

 **解:** 由复合函数的偏导数法则可得 $\frac{dy}{dx} = e^x f'_1 + f'_2 (-\sin x)$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_1(0, 0)$. 进而

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= e^x f'_1 + e^x \frac{\partial f'_1}{\partial x} - \cos x \cdot f'_2 - \sin x \frac{\partial f'_2}{\partial x} \\ &= e^x f'_1 + e^x (e^x f''_{11} - \sin x \cdot f''_{12}) - \cos x \cdot f'_2 - \sin x (e^x f''_{21} - \sin x \cdot f''_{22}) \\ &= e^x f'_1 - f'_2 \cos x + e^{2x} f''_{11} - 2e^x f''_{21} \sin x - f''_{22} \sin^2 x, \end{aligned}$$

所以 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1) + f''_{11}(1, 1)$.



17.(本题满分 10 分)


$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right).$$

 **解:** 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) d(x^2) \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

 **解:** 将方程中的 y 视为 x 的函数, 两边求导得 $3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 3y' = 0$. 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$, 且 $x = 1$ 时 $y = 1$, $x = -1$ 时 $y = 0$. 等式两边再对 x 求导得

$$2x + 2yy'^2 + y^2 y'' + y'' = 0,$$


从而 $y'' = -\frac{2(x + yy'^2)}{1 + y^2}$. 于是在点 $(1, 1)$ 处有 $y'' = -1 < 0$, 从而 $y(1) = 1$ 是极大值; 而在点 $(-1, 0)$ 处有 $y'' = 2 > 0$, 从而 $y(-1) = 0$ 是极小值.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个实根.


 **解:** (1) 因为极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 所以 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. 且由极限的保号性知存在 $\eta \in (0, 1)$ 使得 $\frac{f(\eta)}{\eta} < 0$, 即 $f(\eta) < 0$. 又 $f(1) > 0$, 所以由零点定理知存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 即 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有根.

(2) 由于 $f(0) = f(\xi) = 0$, 所以根据罗尔定理知存在 $\zeta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\zeta) = 0$. 令 $F(x) = f(x)f'(x)$, 则 $F'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2$. 那么有 $F(0) = F(\zeta) = F(\xi) = 0$, 因此再由罗尔定理知存在 $\xi_1 \in (0, \zeta)$, $\xi_2 \in (\zeta, \xi)$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即方程 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个实根.

20.(本题满分 11 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x+1)^2 dx dy$.




 **解:** 积分区域关于 y 轴对称, 于是

$$\begin{aligned}\iint_D (x+1)^2 dx dy &= \iint_D x^2 dx dy + \iint_D dx dy \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \cos^2\theta \cdot r dr + \pi \\ &= \pi + 4 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin^4\theta d\theta \\ &= \pi + 8 \int_0^\pi (\sin^4\theta - \sin^6\theta) d\theta \\ &= \pi + 8 \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} \right) = \frac{5\pi}{4}.\end{aligned}$$

21.(本题满分 11 分)

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 内的可导函数, 且 $y(1) = 0$. 点 P 是曲线 $L: y = y(x)$ 上任意一点, L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, Y_p)$ 法线与 x 轴相交于点 $(X_p, 0)$. 若 $X_p = Y_p$, 求 L 上点的坐标 (x, y) 满足的方程.

 **解:** 点 (x, y) 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$, 令 $X = 0$ 可得 $Y_p = -xy' + y$. 法线方程为 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$, 令 $Y = 0$ 可得 $X_p = x + yy'$. 由条件 $X_p = Y_p$ 得 $x + y' = y - xy'$, 即 $y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{y/x-1}{y/x+1}$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $x \frac{du}{dx} + u = \frac{u-1}{u+1}$, 即

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} - u = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

分离变量得 $\int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x}$, 解得 $\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctan u = -\ln x + C (x > 0)$. 当 $x = 1$ 时 $u = 0$, 于是 $C = 0$, 故

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+y^2}{x^2} \right) + \arctan \frac{y}{x} = -\ln x,$$


$$\text{即 } \ln(x^2+y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = 0.$$

22.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1) 证明: $r(A) = 2$;

(2) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程 $Ax = \beta$ 的通解.


 **解:** (1) 由于矩阵 A 有三个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 因此 A 与对角阵 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(A) \geq 2$. 又 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 说明 A 的列向量组线性相关, 故 $r(A) \leq 2$, 因此 $r(A) = 2$.



(2) 因为 $r(A) = 2$, 所以 $Ax = 0$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 可知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, 即方程组 $Ax = 0$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 而 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 则方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 进而方程组 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

23.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

 解: 首先二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 故 A 一定有零特征值, 所以 $|A| = 0$, 解得 $a = 2$.

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 6)$ 可知 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$.

解方程组 $(-3E - A)x = 0$ 得特征值 $\lambda_1 = -3$ 的一个单位特征向量 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解方程组 $(6E - A)x = 0$ 得特征值 $\lambda_2 = 6$ 的一个单位特征向量 $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解方程组 $Ax = 0$ 得特征值 $\lambda_3 = 0$ 的一个单位特征向量 $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

因此 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.



第 13 章 2018 年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 则 ()

A. $a = \frac{1}{2}, b = -1$

B. $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

C. $a = \frac{1}{2}, b = 1$

D. $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

解: 由条件得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + ax^2 + bx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1 + ax^2 + bx)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + ax^2 + bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + ax^2 + bx}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+b)x + (\frac{1}{2} + a)x^2 + o(x^2)}{x^2}, \end{aligned}$$

因此 $b = -1, a = -\frac{1}{2}$.

2. 下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是 ()

A. $f(x) = |x| \sin |x|$

B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C. $f(x) = \cos |x|$

D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

解: A, B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0) = -\frac{1}{2}, f'_-(0) = \frac{1}{2}$, 选 D.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2 - ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x - b, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(x) + g(x)$ 在 \mathbb{R}

上连续, 则 ()

A. $a = 3, b = 1$

B. $a = 3, b = 2$


C. $a = -3, b = 1$

D. $a = -3, b = 2$

解: 即 $f(x) + g(x) = \begin{cases} 1 - ax, & x \leq -1 \\ x - 1, & -1 < x < 0 \\ x - b + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ 连续, 可得 $a = -3, b = 2$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则 ()


- A. 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ B. 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
 C. 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ D. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

 解: 考虑 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的泰勒展开式:


$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, 不等式两边在 $[0, 1]$ 上进行积分可得 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, 选 D.

5. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则 ()
 A. $M > N > K$ B. $M > K > N$ C. $K > M > N$ D. $N > M > K$


 解: 利用对称性可以计算 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K > \pi = M > N$.

6. $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy =$ ()
 A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{7}{6}$

 解: 注意到积分区域 D 关于 y 轴对称, 由对称性可得

$$I = \iint_D (1-xy) dx dy = \iint_D dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy = 2 \int_0^1 (2-x^2-x) dx = \frac{7}{3}.$$

7. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ()
 A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

 解: 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda E - A$ 的秩相等, 即 $E - A$ 的秩相等, 选 A.

8. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵, 则 ()
 A. $r(A \ AB) = r(A)$ B. $r(A \ BA) = r(A)$
 C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$ D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$



- ✎ 解: 对于 A, 有 $(A \ B) = A (E \ B)$, 且 $(E \ B)$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(A \ B) = r(A)$, 即选 A. B 错误, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C 错误, $r(A \ B) \geq \max\{r(A), r(B)\}$, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan(x)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

- ✎ 解: 由拉格朗日中值定理知 $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \frac{1}{1+\xi^2}, x < \xi < x+1$, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+\xi^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

10. 曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

- ✎ 解: 计算可得 $y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$, 由此得曲线的拐点坐标为 $(1, 1)$. 曲线在拐点处切线的斜率为 $y'|_{x=1} = 4$, 故切线方程为 $y = 4x - 3$.

11. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

✎ 解:

$$\begin{aligned} I &= \int_5^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = -\frac{1}{2} \int_5^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x-3)] \Big|_5^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

12. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$


- ✎ 解: 直接由参数方程曲率计算公式得 $K = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{3/2}} = \frac{2}{3}.$

13. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}.$

- ✎ 解: 原方程两边对 x 求偏导数得 $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + e^{z-1} \frac{\partial z}{\partial x} = y$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\frac{1}{z} + e^{z-1}}$, 当 $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 时, $z = 1$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}.$

14. 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$




 **解:** 由题意得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 P 是可逆矩阵, 因此矩阵 A 与矩阵 B 相似, 它们有相同的特征值, 易求得 B 的实特征值为 2, 即 A 的实特征值为 2.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

 **解:** 利用分部积分法

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \arctan \sqrt{e^x - 1} d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x - 1} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} d(e^x) &= \int \frac{t}{\sqrt{t - 1}} dt = \int \frac{t - 1 + 1}{\sqrt{t - 1}} dt \\ &= \int \sqrt{t - 1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t - 1}} \\ &= \frac{2}{3} (t - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t - 1} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{e^x - 1} + C \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1} + C_1.$$


16.(本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(x - t) dt = ax^2$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.



 解: (1) 首先 $\int_0^x t f(x-t) dt = \int_0^x (x-u) f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$, 因此在方程 $\int_0^x f(t) dt + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = ax^2$ 两边求导得

$$f(x) + xf(x) + \int_0^x f(u) du - xf(x) = f(x) + \int_0^x f(u) du = 2ax.$$


可知 $f(0) = 0$. 注意到等式两边是可导的, 继续求导得 $f'(x) + f(x) = 2a$, 等式两边乘以 e^x 可得 $(e^x f(x))' = 2ae^x$, 因此 $e^x f(x) = 2ae^x + C$. 由 $f(0) = 0$ 知 $C = -2a$, 因此 $f(x) = 2a - 2ae^{-x}$.

(2) 根据条件可得 $\int_0^1 f(x) dx = 2a \int_0^1 (1 - e^{-x}) dx = 2ae^{-1} = 1, a = \frac{e}{2}$.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分


$$\iint_D (x + 2y) dx dy.$$

 解: 积分区域看成为 X 型区域: $\begin{cases} 0 \leq y \leq \varphi(x) \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$, 化成累次积分得

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\varphi(x)} (x + 2y) dy = \int_0^{2\pi} (x\varphi(x) + 2\varphi^2(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} ((t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2) d(t - \sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} ((t - \sin t)(1 - \cos t) + (1 - \cos t)^2)(1 - \cos t) dt \\ &= 5\pi + 3\pi^2. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

已知常数 $k \geq 2\ln 2 - 1$, 证明: $(x - 1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$.

 解: 原不等式等价于 $\begin{cases} x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \geq 0, & x \geq 1 \\ x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \leq 0, & x < 1 \end{cases}$.

令 $f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2k}{x} = \frac{x - 2 \ln x + 2k}{x}$.

令 $g(x) = x - 2 \ln x + 2k$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} \begin{cases} > 0, & x > 2 \\ = 0, & x = 2 \\ < 0, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 因此 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调

递减, 在 $(2, +\infty)$ 内单调递增, $g_{\min}(x) = g(2) \geq 2\ln 2 > 0$. 这就说明 $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$,



因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 且 $f(1) = 0$, 所以

$$\begin{cases} x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \geq 0, & x \geq 1 \\ x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1 \leq 0, & x < 1 \end{cases}.$$

成立, 原不等式得证.

19.(本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

解: 设分成的三段依次为 x, y, z , 则 $x + y + z = 2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{y}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{z}{3} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 + \lambda(x + y + z - 2)$, 首先求驻点. 由方程

$$\begin{cases} f'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0 \\ f'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0 \\ f'_z = \frac{\sqrt{3}}{18}z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{可得} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ 并且黑塞矩阵 } Hf = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{18} \right\} \text{ 正}$$

定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}z^2 \right) \left(4\pi + 16 + \frac{36}{\sqrt{3}} \right) \geq (x + y + z)^2 = 4$, 因此

$$\text{当 } \frac{x}{2\pi} = \frac{y}{16} = \frac{z}{12\sqrt{3}} \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{cases} \text{ 时, } S_{\min} = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \text{m}^2.$$

20.(本题满分 11 分)

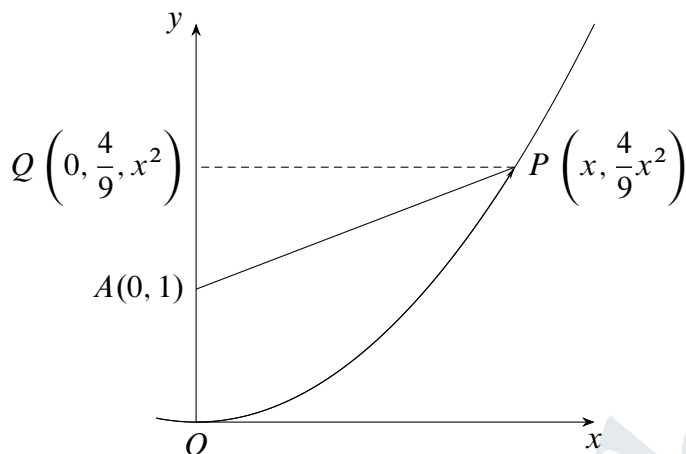
已知曲线 $L: y = \frac{4}{9}x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0, 0)$, 点 $A(0, 1)$. 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成的图形的面积. 若 P 运动到点 $(3, 4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率.

解: 如图所示, 其中 $PQ \perp y$ 轴. 在时刻 t 时, P 运动到 $\left(x, \frac{4}{9}x^2\right)$ 处的速度 v_t 沿着曲线 L 在这一点切线方向. 此时由直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 围成的图形的面积为

$$S = S_{\text{曲边} \triangle POQ} - S_{\triangle PAQ} = \int_0^{\frac{4}{9}x^2} \frac{3}{2}\sqrt{y}dy - \frac{1}{2}AQ \cdot QP$$

此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.





第 20 题图


$$= y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{4}{9}x^2} - \frac{1}{2}x \left(\frac{4}{9}x^2 - 1 \right) = \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{2}x.$$

P 运动到点 $(3, 4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 所以此时 S 关于时间 t 的变化率为

$$\frac{dS}{dt} \Big|_{x=3} = \frac{dS}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{x=3} = 4 \left(\frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{2} \right) \Big|_{x=3} = 10.$$

21.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

 **解:** 首先由 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \geq 0$, 在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x e^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \frac{e^x - 1}{x} < e^x$, 矛盾, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$.


22.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.



 **解:** (1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$$
. 对其系数矩阵进行初等行变

换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^T = c(-2, -1, 1)^T$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)^T$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{x}.$$

其中 \mathbf{Q} 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

如果 $a = 2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$


此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

23.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a ;

(2) 求满足 $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ 的可逆矩阵 \mathbf{P} .

 **解:** (1) 由于矩阵 \mathbf{A} 可经过初等列变换化为矩阵 \mathbf{B} , 因此 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array} \right).$$

因此 $a = 2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



解得 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, k_1, k_2, k_3 为任意常数. 注意到 \mathbf{P} 是可逆矩阵, 因此 $|\mathbf{P}| \neq 0$, 这要求 $k_2 \neq k_3$.

XiangMath



第 14 章 2019 年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ 的拐点坐标为 ()
 A. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ B. $(0, 2)$ C. $(\pi, -2)$ D. $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \right)$

解: 先求二阶导数

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

令 $y'' = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = \pi$. 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 或 $0 < x < \pi$ 时 $y'' < 0$, 当 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 时 $y'' > 0$. 因此 $(0, 2)$ 不是拐点, $(\pi, -2)$ 是拐点, 选 C.

3. 下列反常积分发散的是 ()

A. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ B. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
 C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

解: 因为 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$, D 选项是发散的, 其他的都收敛.

4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为 ()
 A. 1, 0, 1 B. 1, 0, 2 C. 2, 1, 3 D. 2, 1, 4

解: 从通解的结构可知, $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ 是对应齐次方程的通解, 因此 $\lambda = -1$ 是特征方程的二重特征根, 所以 $a = 2, b = 1$. 而 $y^* = e^x$ 是非齐次方程的特解, 将此特解代入方程 $y'' + 2y' + y = ce^x$ 可得 $c = 4$, 选 D.


5. 已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$, 记

$$I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

$$I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

则 I_1, I_2, I_3 的大小关系为 ()

A. $I_3 < I_2 < I_1$ B. $I_2 < I_1 < I_3$ C. $I_1 < I_2 < I_3$ D. $I_2 < I_3 < I_1$

 解: 在区域 $\{(x, y) \mid |x| + |y| < \frac{\pi}{2}\}$ 内有 $x^2 + y^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, 则

$$\sin \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy < \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

故 $I_1 < I_2$. 令 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, 于是


$$1 - \cos u - \sin u = 1 - \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0,$$

等号只在 $u = 0$ 和 $u = \frac{\pi}{2}$ 成立, 因此

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy > \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy,$$

即 $I_2 > I_3$, 选 A.

6. 已知 $f(x), g(x)$ 的二阶导函数在 $x = a$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = 0$ 是两条曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切且曲率相等的 ()
- A. 充分非必要条件 B. 充分必要条件
C. 必要非充分条件 D. 既非充分也非必要条件

 解: 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = 0$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x) - g(x) = o((x - a)^2)$, 利用泰勒公式可得

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k - \sum_{k=0}^2 \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^2) \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^2), \end{aligned}$$

于是有 $f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2$. 因此曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切, 且由曲率公式 $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ 可知对应的曲率也相等, 充分性成立.

反之, 如果两曲线在 $x = a$ 对应的点处有相同的切线, 则 $f(a) = g(a), f'(a) = g'(a)$. 再由两者在这一点曲率相等有 $\frac{|f''(a)|}{(1 + f'^2(a))^{3/2}} = \frac{|g''(a)|}{(1 + g'^2(a))^{3/2}}$, 因此 $f''(a) = \pm g''(a)$. 当 $f''(a) = -g''(a) \neq 0$ 时, 由洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - g'(x)}{2(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - g''(x)}{2} = f''(a) \neq 0.$$

因此必要性不成立, 选 A.

 注: 本题还是有一定难度的, 且在此题中有几个值得注意的地方:

- 本题中只需要 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 处二阶可导即可, 并不需要二阶导数连续.
- 对于必要性的否定, 可以直接举反例 $a = 0, f(x) = x^2, g(x) = -x^2$ 即可.
- 在充分性的推导中, 切勿乱用洛必达法则. 如果要用, 应当这么使用: 为方便, 我们记 $h(x) = f(x) - g(x)$. 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x-a)^2} = 0$ 可知 $h(a) = 0$, 且

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x-a)^2} (x-a) = 0.$$

由于 $h''(a)$ 是存在的, 因此


$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h'(x)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{h'(x) - h'(a)}{x-a} = \frac{h''(a)}{2} = 0.$$

这里必须先用定义求出 $h'(a) = 0$, 再用洛必达法则求出 $h''(a) = 0$ (为什么?).

7. 设 A 是四阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 则 $r(A^*) =$ ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3


 解: 由于方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有两个向量, 故 $r(A) = 2$, 因此 $r(A^*) = 0$

8. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为 ()
- A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$


 解: 由 $A^2 + A = 2E$ 可知矩阵 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 + \lambda = 2$, 因此 $\lambda = 1$ 或 -2 . 再由 $|A| = 4$ 可知 A 的特征值为 $-2, -2, 1$. 因此二次型 $x^T Ax$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} =$ _____.


 解: 先取对数用洛必达法则得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x + 2^x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^x \ln 2}{x + 2^x} = 2 + 2 \ln 2$, 故原极限为 $4e^2$.

10. 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{3}{2}\pi$ 对应点处的切线在 y 轴的截距为 _____.


 解: $t = \frac{3}{2}\pi$ 所对应的点是 $(\frac{3}{2}\pi + 1, 1)$, 该点处切线的斜率为 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t=\frac{3}{2}\pi} = -1$. 该点处切线方程为 $y = -x + \frac{3}{2}\pi + 2$, 它在 y 轴上的截距为 $\frac{3}{2}\pi + 2$.



11. 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$, 则 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.


 **解:** 直接计算得 $\frac{\partial z}{\partial x} = y f' \left(\frac{y^2}{x} \right) \cdot \left(-\frac{y^2}{x^2} \right) = -\frac{y^3}{x^2} f' \left(\frac{y^2}{x} \right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f \left(\frac{y^2}{x} \right) + y f' \left(\frac{y^2}{x} \right) \frac{2y}{x}$.
因此 $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x \left(-\frac{y^3}{x^2} f' \left(\frac{y^2}{x} \right) \right) + y \left(f \left(\frac{y^2}{x} \right) + y f' \left(\frac{y^2}{x} \right) \frac{2y}{x} \right) = y f \left(\frac{y^2}{x} \right)$.

12. 曲线 $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$ 的弧长为_____.

 **解:** 由 $y = \ln \cos x$ 得 $y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, 于是曲线的弧长为


$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\ln 3}{2}.$$

13. 已知函数 $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

 **解:** 利用二重积分交换次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= - \int_0^1 x dx \int_x^1 \frac{\sin t^2}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\sin t^2}{t} dt \int_0^t x dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \frac{\sin t^2}{t} dt = - \frac{1}{2} \int_0^1 t \sin t^2 dt = \frac{\cos 1 - 1}{4}. \end{aligned}$$


14. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i, j) 元的代数余子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$ _____.

 **解:** 直接计算可得 $A_{11} - A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

 **解:** 首先有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x + 1)$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = e^{2x \ln x} (2 \ln x + 2)$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (x + 1)e^x$. 而在 $x = 0$ 处,


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = -\infty,$$



因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 于是 $f'(x) = \begin{cases} x^{2x}(2 + 2\ln x), & x > 0 \\ \text{不存在}, & x = 0 \\ (x+1)e^x, & x < 0 \end{cases}$. 当 $x < -1$ 或 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时 $f'(x) < 0$, 而当 $-1 < x < 0$ 或 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$. 于是结合单调性可知 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$ 和 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$ 是极小值, $f(0) = 1$ 是极大值.

16.(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.

 解: 利用待定系数法可得

$$\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

因此


$$\begin{aligned} \int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx &= -2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{1}{x^2+x+1} d(x^2+x+1) \\ &= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 旋转一周所得旋转体的体积.

 解: (1) 由条件可得 $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(y' - xy) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 于是 $e^{-\frac{x^2}{2}}y = \sqrt{x} + C$. 再由 $y(1) = \sqrt{e}$ 可知 $C = 0$, 因此 $y = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.


(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 xe^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

18.(本题满分 10 分)


已知平面区域 $D = \{(x, y) | |x| \leq y, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.




 **解:** 区域 D 关于 y 轴对称, 把它化为极坐标形式, $|x| \leq y$ 即 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. $(x^2 + y^2)^3 \leq y^4$ 就是 $r^6 \leq r^4 \sin^4 \theta, r \leq \sin^2 \theta$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin^2 \theta} \frac{r \sin \theta}{r} r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta) \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d(\cos \theta) \\ &= - \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \frac{1}{5} \cos^5 \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{43}{120} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

 设 n 是正整数, 记 S_n 为曲线 $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq n\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积, 求 S_n , 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.


 **解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{k=0}^{n\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=0}^{n\pi} \int_0^{\pi} e^{-(k\pi+t)} |\sin(k\pi+t)| dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \sum_{k=0}^n e^{-k\pi} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} (1-e^{-n\pi}). \end{aligned}$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$, 最后极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$.

20.(本题满分 11 分)

已知函数 $u(x, y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 求 a, b 的值, 使得在变换 $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为 $v(x, y)$ 不含一阶偏导数的等式.

 **解:** 由 $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} e^{ax+by} + av(x, y) e^{ax+by}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} e^{ax+by} + bv(x, y) e^{ax+by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{ax+by} + a \frac{\partial v}{\partial x} e^{ax+by} + a \left(\frac{\partial v}{\partial x} e^{ax+by} + av(x, y) e^{ax+by} \right) \end{aligned}$$

 此题源自2012年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{ax+by} + 2a \frac{\partial v}{\partial x} e^{ax+by} + a^2 v(x, y) e^{ax+by}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{ax+by} + 2b \frac{\partial v}{\partial y} e^{ax+by} + b^2 v(x, y) e^{ax+by}. \end{aligned}$$

将上述式子代入 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 整理可得

$$e^{ax+by} \left(2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (4a+3)\frac{\partial v}{\partial x} + (3-4b)\frac{\partial v}{\partial y} + (2a^2 - 2b^2 + 3a + 3b)v \right) = 0.$$


依题意有 $\begin{cases} 4a+3=0 \\ 3-4b=0 \end{cases}$, 因此 $\begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;


(2) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) < -2$.

 **解:** (1) 由积分中值定理知存在 $\zeta \in (0, 1)$ 使得 $\int_0^1 f(x)dx = f(\zeta) = 1 = f(1)$, 于是由罗尔定理知存在 $\xi \in (\zeta, 1) \subset (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 考虑函数 $F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x$, 首先有 $F(0) = F(1) = 0$ 且

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 [f(x) + 3x^2 - 4x]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (3x^2 - 4x)dx = 0.$$

由积分中值定理可知存在 $\eta_1 \in (0, 1)$ 使得 $F(\eta_1) = 0$. 因此由罗尔定理知存在 $\eta_2 \in (0, \eta_1), \eta_3 \in (\eta_1, 1)$ 使得 $F'(\eta_2) = F'(\eta_3) = 0$. 再由罗尔定理知存在 $\eta \in (\eta_2, \eta_3) \subset (0, 1)$ 使得 $F''(\eta) = f''(\eta) + 6 = 0$, 从而 $f''(\eta) = -6 < -2$, 证毕.


 **注:** 这个证法恰到好处的地方在于当我们取 $f(x) = 4x - 3x^2$ 时, $f(x)$ 刚好满足条件, 且 $f''(x) \equiv -6$, 这个例子说明 $f''(x)$ 能够保证取到的最小值就是 -6 . 至于如何构造出这个例子, 只需要待定一组系数 a, b, c 使得 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足条件 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$ 即可.

22.(本题满分 11 分)

已知向量组 (I) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$, (II) $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{pmatrix}, \beta_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$. 若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.



 **解:** 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由于向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 所以 $r(A) = r(B) = r(A, B)$. 对矩阵 (A, B) 作初等行变换得

$$\begin{aligned} (A, B) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & a^2-5 & a-1 & -7-a & a^2-9 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

因此当 $a = 1$ 时, $r(A) = r(B) = r(A, B) = 2$, 两个向量组等价. 当 $a = -1$ 时, $r(A) = 2 \neq r(A, B) = 3$, 此时两个向量组不等价. 当 $a \neq \pm 1$ 时, $r(A) = r(B) = 3$, 两个向量组等价. 因此, 当且仅当 $a \neq -1$ 时, 两个向量组等价.

令 $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$, 当 $a = 1$ 时, 由初等行变换得 $(A, \beta_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$,

解得 $\beta_3 = (3-2k)\alpha_1 + (-2+k)\alpha_2 + k\alpha_3, k \in \mathbb{R}$.

当 $a \neq \pm 1$ 时, $(A, \beta_3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$, 此时有 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

23.(本题满分 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

 **解:** (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8 = -2y \\ -2 + x - 2 = 2 - 1 + y \end{cases},$$

解得 $x = 3, y = -2$.

(2) B 是上三角矩阵, 因此 A, B 的特征值均为 $2, -1, -2$.

对矩阵 B , 当 $\lambda_1 = 2$ 时, 由方程 $(2E - B)x = 0$ 可得 λ_1 的一个特征向量 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$;

当 $\lambda_2 = -1$ 时, 由方程 $(-E - B)x = 0$ 可得 λ_2 的一个特征向量 $\xi_2 = (-1, 3, 0)^T$;

当 $\lambda_3 = -2$ 时, 由方程 $(-2E - B)x = 0$ 可得 λ_3 的一个特征向量 $\xi_3 = (0, 0, 1)^T$.



取 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P_1^{-1}BP_1 = \text{diag}\{2, -1, -2\}$.

同理对矩阵 A , 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $P_2^{-1}AP_2 = \text{diag}\{2, -1, -2\}$. 故

$$P_1^{-1}BP_1 = P_2^{-1}AP_2 \Rightarrow (P_2P_1^{-1})^{-1}A(P_2P_1^{-1}) = B,$$

因此当取

$$P = P_2P_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

时, 则有 $P^{-1}AP = B$.



第 15 章 2020 年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ()

A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解: 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt &\sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt &\sim \int_0^x \sqrt{t^3} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}, \\ \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt &\sim \int_0^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt &\sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5, \end{aligned}$$

正确答案选 D.

2. 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解: 显然, 所有的间断点为 $x = -1, 0, 1, 2$, 其中 $x = -1, 1, 2$ 都是无穷间断点, 而 $x = 0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx =$ ()

A. $\frac{\pi^2}{4}$

B. $\frac{\pi^2}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{8}$

解: 令 $t = \arcsin \sqrt{x}$, 则 $x = \sin^2 t$,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t \cos t} 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{\pi^2}{4},$$

选 A.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 则当 $n \geq 3$ 时, $f^{(n)}(0) =$ ()
 A. $-\frac{n!}{n-2}$ B. $\frac{n!}{n-2}$ C. $-\frac{(n-2)!}{n}$ D. $\frac{(n-2)!}{n}$

 解: 方法一 由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(n-k)} [\ln(1-x)]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^2 C_n^k (x^2)^{(k)} [\ln(1-x)]^{(n-k)} \\ &= x^{2-(n-1)!} \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} + C_n^1 x \frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} + 2C_n^2 \frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}, \end{aligned}$$

代入 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0) = -2C_n^2(n-3)! = -n(n-1)(n-3)! = -\frac{n!}{n-2}$, 选 A.

方法二 利用函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式系数的唯一性, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \ln(1-x) = x^2 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right) \\ &= -x^3 - \frac{x^4}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n-2} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \end{aligned}$$

那么由对应项系数相等可得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n-2}$, 所以 $f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}$, 选 A.

5. 关于函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y = 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$, 给出下列结论:

(1) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 1;$

(2) $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1;$

(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0;$

(4) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$

其中正确的个数为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

 解: 直接计算可得


$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

所以 (1) 正确. 当 $xy \neq 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, 那么

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 1}{y} = \infty,$$

因此 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)}$ 不存在, (2) 错误. 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 不论取 x, y , 或者 xy , 都是无穷小量, 因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, (3) 正确. 又

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} xy = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

 注意这是个累次极限, x 和 y 都是趋于 0 而不等于 0.



因此 (4) 正确, 选 B.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ()

- A. $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ B. $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$ C. $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ D. $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解: 由 $f'(x) > f(x) > 0$ 可知 $f'(x) - f(x) > 0$, 且 $f(x)$ 单调递增. 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$, 则 $F'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x)] > 0$, 因此 $F(x)$ 单调递增且为正, 于是 $F(0) > F(-1)$, 选 B.

7. 设四阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^*x = 0$ 的通解为 ()

- A. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ B. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$
C. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$ D. $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$

解: 因为 A 不可逆, 所以 $A^*A = |A|E = O$, 因此 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $A^*x = 0$ 的解, 且 $r(A^*) \leq 1$. 而 $A_{12} \neq 0$ 说明 $A^* \neq O$. 且 A 中对应的三列 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性无关的, 即 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $A^*x = 0$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

8. 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的

属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为 ()

- A. $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ B. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
C. $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ D. $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

解: 同一个特征值对应的特征向量的非零线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$A(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由参数方程求导公式可得


$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big/ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \Big/ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t = 1$ 可得 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = -\sqrt{2}$.




10. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} dy = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{2}{9} (x^3+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$


11. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

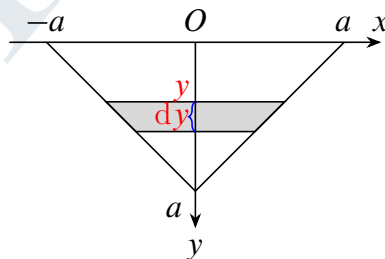
 解: 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,\pi)} = \pi - 1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,\pi)} = -1$, 因此 $dz|_{(0,\pi)} = (\pi - 1)dx - dy$.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g , 水的密度为 ρ , 则三角形平板的一侧受到的水压力为 $\underline{\hspace{2cm}}.$


 解: 如图, 以斜边所在的直线为 x 轴, 斜边中点为原点, 垂直于 x 轴向下的方向为 y 轴, 考虑在深度为 y 处, 宽度为 dy 的窄条, 压强为 ρgy , 那么窄条一侧承受的压力为 $\rho gy \cdot 2(a-y)dy$, 因此整个平面一侧承受的压力为




第 12 题图

$$F = \int_0^a \rho gy \cdot 2(a-y) dy = \frac{1}{3} \rho g a^3.$$

13. 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$, 再由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 可得 $C_1 = 0, C_2 = 1$, 因此 $y(x) = xe^{-x}$, $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1$.

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 利用行列式的行列变换得


$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线.


 **解:** 设所求斜渐近线为 $y = ax + b$, 则

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{1}{e}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[e^{-x \ln(1 + \frac{1}{x})} - \frac{1}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[e^{1 - x \ln(1 + \frac{1}{x})} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[1 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[1 - x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

因此所求的斜渐近线为 $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$.

16.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

 **解:** 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f(x)$ 连续, 则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{显然 } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x = 0 \end{cases}. \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du. \text{ 当}$$

$x = 0$ 时,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此 } g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}, \text{ 且}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = g'(0),$$

因此 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.



17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

解: 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 为极小值点, 且极小值 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且满足 $2f(x) + x^2 f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$,

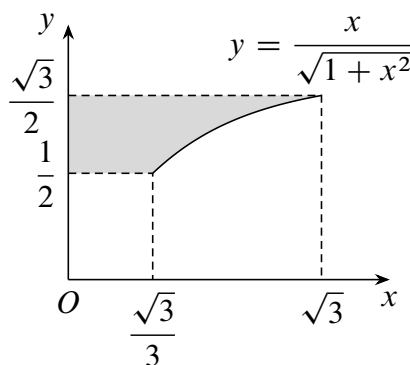
并求曲线 $y = f(x), y = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

解: (1) 把已知等式中的 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

与原式联立消去 $f(\frac{1}{x})$ 解得 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 如图, 由 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 得 $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, 因此所求旋转体的体积为



第 18 题图

$$V = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} d\sigma$, 其中区域 D 由 $x = 1, x = 2, y = x$ 及 x 轴围成.

解: 直接化为极坐标计算得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec \theta}^{2 \sec \theta} \frac{r}{r \cos \theta} r dr = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$, 证明



(1) 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$.

证明: (1) 令 $F(x) = f(x) - (2 - x)e^{x^2}$, 则

$$F(1) = f(1) - e = -e < 0, \quad F(2) = f(2) - 0 = f(2) > 0,$$

因此由零点定理知存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$.

(2) 令 $g(x) = \ln x$, 则 $f(x), g(x)$ 都在 $[1, 2]$ 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 由柯西中值定理知存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即 $\frac{f(2)}{\ln 2} = \frac{e^{\eta^2}}{1/\eta}$, 也就是 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0 (x > 0)$. 曲线 $y = f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y = f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T , 过点 M 作 MP 垂直 x 轴于点 P , 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 $3:2$, 求曲线满足的方程.

解: 设 M 的坐标为 $(x, f(x))$, 则 M 处的切线方程为

$$Y = f'(x)(X - x) + f(x).$$

当 $Y = 0$ 时, $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 且

$$S_{\triangle MTP} = \frac{1}{2} f(x) \left[x - \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right] = \frac{f^2(x)}{2f'(x)}.$$

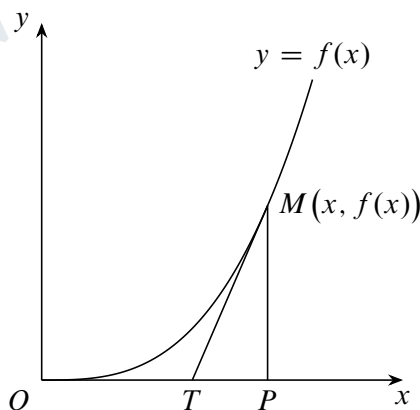
由题意有 $\int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{f^2(x)}{2f'(x)}$, $f(0) = 0$. 等式两边求导得

$$f(x) = \frac{3[2f(x)f'(x) - f^2(x)f''(x)]}{4f'^2(x)},$$

整理即得 $f(x)f''(x) - \frac{2}{3}f'^2(x) = 0$, 于是 $f'(0) = 0$. 且

$$\left(\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}} \right)' = \frac{y''y^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'^2}{y^{\frac{4}{3}}} = \frac{y''y - \frac{2}{3}y'^2}{y'y^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

因此 $y' = Cy^{\frac{2}{3}}$. 再分离变量解得 $3y^{\frac{1}{3}} = Cx + C_1$, 即 $y = (C_2x + C_3)^3$. 再由 $y(0) = y'(0) = 0$ 知 $C_3 = 0$, 因此 $y = kx^3$, k 为任意正数, 此即为所求曲线的方程.




第 21 题图

22.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变

换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.

- (1) 求 a 的值;
- (2) 求可逆矩阵 P .

 解: (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3), g(y_1, y_2, y_3)$ 的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

由于 A, B 合同, 所以 $r(A) = r(B) = 2$, 因此

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a)(1-a)^2 = 0,$$

于是 $a = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$. 当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$ 舍去, 于是 $a = -\frac{1}{2}$.

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2$, 令

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则在可逆线性变换 $z = P_1 x$, 即 $x = P_1^{-1} z$ 下, $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形 $z_1^2 + z_2^2$. 同理, $g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$, 令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 2y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则在可逆线性变换 $z = P_2 y$, 即 $y = P_2^{-1} z$ 下, $g(y_1, y_2, y_3)$ 化为标准形 $z_1^2 + z_2^2$. 因此 $P_1 x = P_2 y$, 即 $x = P_1^{-1} P_2 y$, 所以

$$P = P_1^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量, 且不是 A 的特征向量.

- (1) 证明: P 是可逆矩阵;
- (2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.



✎ 解: (1) 由题意 α 是非零向量, $A\alpha \neq k\alpha$, 所以 $A\alpha, \alpha$ 线性无关, 即 $P = (A\alpha, \alpha)$ 为可逆矩阵.

$$(2) AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 B 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 A 的特征值也是 $2, -3$, 所以 A 可以相似对角化.

