Poisson 分布

例 1. 某人准备读一章数学书或者一章历史书, 如果他在读一章数学书中印刷错误数是服从均值为 2 的 Poisson 分布, 而他在读一章历史书中的印刷错误数是服从均值为 5 的 Poisson 分布. 假设该读者选取哪一本书是等可能时, 求该读者遇到的印刷错误数的期望是多少?

解 记 X 表示该读者遇到的印刷错误数. 令

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{如果读者选取数学书} \\ 2, & \text{如果读者选取历史书} \end{cases},$$

则由全期望公式得

$$\begin{aligned} E(X) &= E\big(E(X|Y)\big) \\ &= P(Y=1)E(X|Y=1) + P(Y=2)E(X|Y=2) \\ &= \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 5 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

随机变量的随机数量和的期望

例 2. 假定一工厂设备每周出现事故次数的期望为 4, 又假定在每次事故中受伤工人数是具有相同均值 2 的独立随机变量, 再假定在每次事故中受伤工人数与每周发生的事故数目相互独立, 每周受伤人数的期望是多少?

解 以 N 记世故次数, 以 X_i 记在第 i 次世故中的手上人数 ($i=1,2,\cdots$), 那么伤者总数可以表示为 $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$. 现在

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right].$$

但是

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{N} \middle| N=n\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} \middle| N=n\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \quad (\text{由 } N \text{ 与 } X_i \text{ 相互独立}) \\ &= nE(X_1) \end{aligned}$$

由它导出[a]

$$E\left(\sum_{i=1}^{N}\middle|N=n\right)=NE(X_1).$$

因此

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)&=E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\middle|N\right)\right]\\&=E\big(NE(X_1)\big)=E(N)E(X_1)=4\times 2=8.\end{aligned}$$

[a]事实上这里推导了一遍 Wald 等式

几何分布的期望

例 3. 连续抛掷一枚出现证明的概率为 p 得用硬币直至出现正面位置. 问需要抛掷的次数的期望是多少?

解 以 N 记需要抛掷的次数, 而令

$$Y=\begin{cases}1, & \text{如果第一次抛掷的结果是正面}\\0, & \text{如果第一次抛掷的结果是反面}\end{cases}.$$

现在

$$\begin{aligned}E(N)&=E\big(E(N|Y)\big)\\&=P(Y=1)E(N|Y=1)+P(Y=0)E(N|Y=0)\\&=pE(N|Y=1)+(1-p)E(N|Y=0).\end{aligned}\tag{1}$$

而

$$E(N|Y=1)=1, E(N|Y=0)=1+E(N)\tag{2}$$

为了明白为什么式 (**??**) 是正确的, 我们考察 $E(N|Y=1)$. 由于 $Y=1$, 我们知道第一次抛掷结果是正面, 所以, 需要抛掷的次数的期望是 1. 另一方面, 如果 $Y=0$, 第一次抛掷结果是反面, 然而, 由于假定相继的抛掷是独立的, 这就推出在第一次出现反面直到正面首次出现时的附加抛掷次数的期望是 $E(N)$. 因此

$$E(N|Y=1)=1.$$

将 (**??**) 代入 (**??**) 得

$$E(N)=p+(1-p)\big(1+E(N)\big),$$

解方程得 $E(N) = \dfrac{1}{p}$.[✍]

[✍]几何分布的概率分布其实是可以求出的, 然后级数求和也可以, 但是这里的方法我们还有更广的用途.

矿工问题

例 4. 某矿工身陷有三个门的矿井之中. 经第 1 个门的通道行进 2 小时后, 他将到达安全地; 经第 2 个门的通道前进 3 小时后, 他将回到矿井原地; 经第 3 个门的通道前进 5 小时后, 他又将回到矿井原地. 假定这个矿工每次都等可能地任意一个门, 问直到他到达安全地所需时间的期望是多少?

解 令 X 表示矿工到达安全地所需的时间, Y 表示他最初选取的门. 现在

$$\begin{aligned} E(X) &= E\big(E(X|Y)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P(Y=i)E(X|Y=i) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} E(X|Y=i), \end{aligned}$$

而

$$E(X|Y=1) = 2, \quad E(X|Y=2) = 3 + E(X), \quad E(X|Y=3) = 5 + E(X), \tag{3}$$

为了理解为什么这是正确的, 我们以 $E(X|Y=2)$ 为例, 给出其如下推理, 如果矿工选取第 2 个门, 那么 3 小时后他将回到他的矿井. 但是, 一旦他回到矿井, 问题就和以前一样了, 而直到他到达安全地的附加时间的期望正是 $E(X)$. 因此,

$$E(X|Y=2) = 3 + E(X).$$

在方程 (**??**) 中其它等式后面的推理是相似的. 因此,

$$E(X) = \frac{1}{3}\big(2 + 3 + E(X) + 5 + E(X)\big) \Rightarrow E(X) = 10.$$

取帽子问题

例 5. 在一次聚会上, N 个人将自己戴的帽子扔到屋子中央. 将这些帽子充分混合后, 每人随机选取一顶, 求取到自己的帽子的人数的期望数.

解 以 X 表示取到自己帽子的人数, 再令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个人取到自己的帽子}\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}, \quad i=1,2,\cdots,N,$$

则有 $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$. 现在, 因为第 i 个人等可能地在 N 个帽子中取一个, 这就推出

$$P(X_i=1)=P(\text{第 } i \text{ 个人取到自己的帽子})=\frac{1}{N},$$

因此

$$E(X_i)=1\cdot P(X_i=1)+0\cdot P(X_i=0)=\frac{1}{N},\quad i=1,2,\cdots.$$

将上式代入上面的方程, 得

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=\sum_{i=1}^{N}E(X_i)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}=1.$$

因此, 无论聚会上有多少人, 平均总有一人取到自己的帽子.

匹配轮数问题

例 6. 假设在上面的例题中, 取到自己的帽子的人离开, 而其余人（没有匹配到的那些人）将他们取的帽子放到房间中央, 混杂后重新取. 假定这个过程连续进行到每个人都取到自己的帽子为止. 假定 R_n 是开始时有 n 个人出席的轮数, 求 $E(R_n)$.

解 由上例推出, 不论留在那里的人有多少, 平均每轮有一次匹配. 这就容易想到

$$E(R_n)=n.$$

这个结果是正确的, 现在给出一个归纳性证明. 由于显然有 $E(R_1)=1$, 假定对于 $k=1,\cdots,n-1$, 有 $E(R_k)=k$. 为了计算 $E(R_n)$, 我们对第一轮中的匹配数 Y_n 取条件, 它给出

$$E(R_n)=E\big(E(R_n|Y_n)\big)=\sum_{i=0}^{n}P(Y_n=i)E(R_n|Y_n=i).$$

现在, 给定最初一轮的全部匹配数 i, 需要的轮数将等于 1 加上余下的 $n-i$ 个人

匹配他们的帽子需要的匹配轮数. 所以

$$
\begin{aligned}
E(R_n) &= \sum_{i=0}^{n} P(Y_n = i)\big(1 + E(R_{n-i})\big) \\
&= 1 + E(R_n)P(Y_n = 0) + \sum_{i=1}^{n} P(Y_n = i)\big(E(R_{n-i})\big) \\
&= 1 + E(R_n)P(Y_n = 0) + \sum_{i=1}^{n}(n-i)P(Y_n = i) \quad \text{(归纳假设)} \\
&= 1 + E(R_n)P(Y_n = 0) + n\big(1 - P(Y_n = 0)\big) - E(Y_n) \\
&= E(R_n)P(Y_n = 0) + n\big(1 - P(Y_n = 0)\big).
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式用了上例中建立的结果 $E(Y_n) = 1$. 由前面的方程推出 $E(R_n) = n$.

几何分布推广

例 7. 连续地做每次成功的概率为 p 的独立试验, 直至有 k 次相继的成功. 所需试验的次数的均值为多少?

解 以 N_k 记为了得到次相继的成功必须试验的次数, 并记 $M_k = E(N_k)$. 通过对 $k-1$ 次相继的成功所必须试验的次数 N_{k-1} 取条件, 我们将得到 M_k 的一个递推方程, 由此推出

$$M_k = E(N_k) = E\big(E(N_k|N_{k-1})\big)$$

现在

$$E(N_k|N_{k-1}) = p(N_{k-1}+1) + (1-p)[1 + N_{k-1} + E(N_k)]. \tag{4}$$

其中 (**??**) 式是得自若取 N_{k-1} 次试验得到 $k-1$ 次相继的成功, 则或者下一次以概率 p 成功, 我们就会得到第 k 次成功; 或者下一次以概率 $1-p$ 失败, 我们必须从头开始. 对 (**??**) 式两端取期望得

$$
\begin{aligned}
M_k &= E\big(E(N_k|N_{k-1})\big) = E\Big(p(N_{k-1}+1) + (1-p)\big(1 + N_{k-1} + E(N_k)\big)\Big) \\
&= 1 + E(N_{k-1}) + (1-p)E(N_k) = 1 + M_{k-1} + (1-p)M_k,
\end{aligned}
$$

于是 $M_k = \dfrac{1}{p} + \dfrac{M_{k-1}}{p}$. 由于首次成功的次数 N_1 是参数为 p 的几何分布, 因此

$M_1 = E(N_1) = \frac{1}{p}$, 由此及递推式得

$$M_k + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p}\left(M_{k-1} + \frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p^{k-1}}\left(M_1 + \frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p^k(1-p)}.$$

因此 $M_k = \left(\frac{1}{p^k} - 1\right)\frac{1}{1-p} = \frac{1-p^k}{p^k(1-p)}$.