2020 年考研数学二模拟卷二

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: ________

题 号	选择题 1 ∼ 8	填空题 9 ∼ 14	解答题 15 ∼ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ∼ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{1+x^2}{x}$ ( )

   (A) 有一条垂直渐近线和一条斜渐近线 (B) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线
   (C) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线 (D) 只有一条斜渐近线

2. 下列广义积分收敛的是 ( )

   (A) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (B) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ (C) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$ (D) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

3. 设 $u = x^{y^z}$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,2,2)} =$ ( )

   (A) $4\ln 3$ (B) $8\ln 3$ (C) $324\ln 3$ (D) $324\ln 2\ln 3$

4. 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 则 ( )

   (A) 当 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界时, $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内也无界
   (B) 当 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内也无界
   (C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$
   (D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

5. 设函数 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(\alpha > 1)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )

   (A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续

6. 设平面区域 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$, 记

$$I_1 = \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2 = \iint_D \cos x^2 \sin y^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3 = \iint_D \left[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} - 1\right]\mathrm{d}\sigma,$$

   则有 ( )

   (A) $I_2 > I_1 > I_3$ (B) $I_1 > I_2 > I_3$ (C) $I_1 > I_3 > I_2$ (D) $I_2 > I_3 > I_1$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 ( )

(A) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$ (B) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$ (D) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, 当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) 如果对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 可推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=n$

(C) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则对任意 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有解

(D) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则对任意 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解

答案 DBCACABD

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right)=$________.

答案 $\dfrac{1}{2}$.

10. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

答案 $-\ln 2$.

11. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上曲率最大点处的曲率半径为________.

答案 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

12. 已知动点 $M(x,y)$ 在 xOy 面上运动方程为 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$, 则在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 动点 M 的运动速率为________.

13. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 的积分次序的结果为________.

答案 $\sqrt{2}$.

答案 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 其特征值为 $1,2,0$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行加到第一行得到 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的 -1 倍加到第二列得到 $\boldsymbol{C}$, 则 $|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}|=$________.

答案 6.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}$, 确定常数 a,b, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,

并求其导数.

解 直接计算可知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-(x+b)}, & x>0\end{cases}.$$

首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\mathrm{e}^{-b}=f(0)=\dfrac{1}{2}, b=\ln 2$. 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导得

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2}=f'_+(0)=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=-1,$$

因此 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$.

16.（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\arctan\sqrt{x-1}$, 则 $\sqrt{x-1}=\tan t, x=\sec^2 t, \mathrm{d}x=2\sec^2 t\tan t$, 则原积分

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\tan t\cdot t}{\sec^2 t}\cdot 2\sec^2 t\tan t\,\mathrm{d}t=2\int t\tan^2 t\,\mathrm{d}t=2\int(t\sec^2 t-t)\,\mathrm{d}t\\&=-t^2+2\int t\,\mathrm{d}(\tan t)=-t^2+2t\tan t+2\ln|\cos t|+C\\&=-\arctan^2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x+C.\end{aligned}$$

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, f(x)>0$, 且满足

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}&=\exp\left(\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h}\right)\\&=\exp\left(\lim_{h\to0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h\cos^2 x}\cos^2 x\right)\\&=\exp\left([\ln f(x)]'\cos^2 x\right)=\mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x}.\end{aligned}$$

由条件得

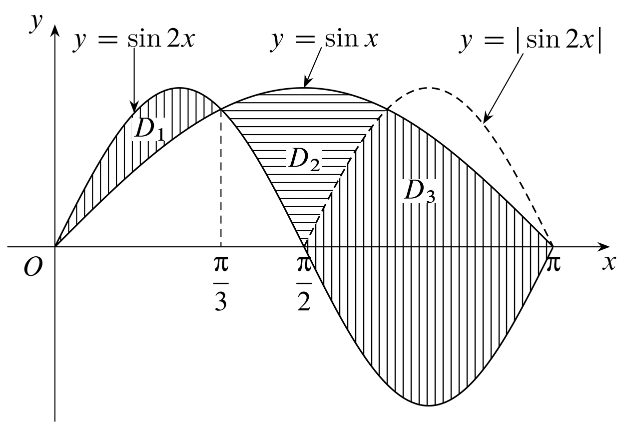
$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x=x\cos^2 x+\tan x,\ \frac{f'(x)}{f(x)}=x+\tan x\sec^2 x.$$

积分可得 $\ln|f(x)| = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|C|$, 即 $f(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 由 $f(0) = 1$ 得 $C = 1$, 故 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 又 $f'(x) = (x + \tan x \sec^2 x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$. 不难得知 $f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 1$.

18.（本题满分 10 分）

求曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \sin 2x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V.

解 D 的图形如图所示, 将区域适当分块, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, 记 D_1, D_2, D_3 三部分旋转所得旋转体的体积分别为 V_1, V_2, V_3, 则 $V = V_1 + V_2 + V_3$, 其中



第 18 题图

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin^2 2x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}[(1-\cos 4x) - (1-\cos 2x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x - \cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi, \\
V_2 &= \pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(\sin^2 x - \sin^2 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(\cos 4x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi, \\
V_3 &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

因此 $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi + \frac{\pi^2}{4}$.

19.（本题满分 10 分）

求二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2-x^2}\ (a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

解 利用极坐标可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r\\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\left(\frac{4a^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}-\sqrt{4a^2-r^2}\right)\mathrm{d}r\\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[4a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\left(\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}+2a^2\arcsin\frac{r}{2a}\right)\right]\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(2a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}\right)\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

20.（本题满分 11 分）

证明: 对每个 $x>0$, 存在唯一的 $\xi=\xi(x)\in(0,1)$ 使得 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$, 并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi$.

解 对任意 $x>0$, 由积分中值定理知存在 $\eta=\eta(x)\in(0,x)$, 使得

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\eta^2},$$

令 $\xi=\dfrac{\eta^2}{x^2}\in(0,1)$, 则 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$. 如果存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,x)$, 使得 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi_1x^2}=x\mathrm{e}^{\xi_2x^2}$, 显然有 $\xi_1=\xi_2$, 唯一性得证.

由 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$ 可得 $\xi=\dfrac{1}{x^2}\left(\ln\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-\ln x\right)$, 那么

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\xi &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\ln\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}-\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}}=1.\end{aligned}$$

21.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且

$$f(0)f(1)>0,\ f''(x)>0,\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

证明:

(1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恰有两个零点;

(2) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明　(1) 由 $f(0)f(1)>0$ 知 $f(0),f(1)$ 同号, 如果 $f(0)<0,f(1)<0$, 结合 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 为凹函数, 那么 $f(x)<0,x\in[0,1]$, 这与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾, 因此 $f(0)>0,f(1)>0$.

$f(x)$ 不可能在 $(0,1)$ 内恒为正, 因此存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f(\eta)<0$, 于是由零点定理知存在 $\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,1)$ 使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$. 如果还存在一点 η_3 使得 $f(\eta_3)=0$, 则必然存在一点 $\zeta\in(0,1)$ 使得 $f''(\zeta)=0$, 矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恰有两个零点.

(2) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=F(1)=0,F''(x)=f'(x)$. 由 (1) 可知, $f(x)$ 在 $(0,\eta_1),(\eta_2,1)$ 内为正, 在 (η_1,η_2) 内为负, 因此 $F(\eta_1>0),F(\eta_2)<0$, 于是存在 $c\in(\eta_1,\eta_2)$ 使得 $F(c)=0$. 令

$$G(x)=F(x)\mathrm{e}^{-x},G'(x)=[F'(x)-F(x)]\mathrm{e}^{-x}$$

$G(0)=G(c)=G(1)=0$, 于是存在 $\xi_1\in(0,c),\xi_2\in(c,1)$ 使得 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$, 即 $F'(\xi_1)-F(\xi_1)=F'(\xi_2)-F(\xi_2)=0$. 再令 $H(x)=[F'(x)-F(x)]\mathrm{e}^{x}$, 则 $H(\xi_1)=H(\xi_2)=0$, 于是存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得

$$H'(\xi)=[F''(\xi)-F(\xi)]\mathrm{e}^{\xi}=0,$$

即 $F''(\xi)-F(\xi)=0$, 也就是 $f'(\xi)=\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

22.（本题满分 11 分）

已知三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix},$$

且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 等价.

(1) 求参数 a,b,c 的值;

(2) 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

解　(1) 由题意首先有 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$, 且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2, 于是

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&2&c\end{vmatrix}=3c=0,c=0.$$

同理, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=3a+3=0$ 得 $a=-1$, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=3b-3=0$ 得 $b=1$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\-1&1&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此所求的矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

23.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值；

(2) 用正交变换化二次型为标准形；

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解 (1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-8a=0, a=0$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=2$. 对特征值 $\lambda_1=0$, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$; 对特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下, 二次型化为标准形 $2y_2^2+2y_3^2$.

(3) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$ 即为方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_3=0\end{cases},$$

此方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)=(k,-k,0), k\in\mathbb{R}$.