Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

考研数学 试题解答

追求卓越排版, 巧解数学难题.

作者: 向禹老师
完成时间: 2020 年 3 月 4 日
Email: 739049687@qq.com

Version: 1.0

目录

1 2006 年考研数学一 2

2 2007 年考研数学一 6

3 2008 年考研数学一 10

4 2009 年考研数学一 14

5 2010 年考研数学一 18

6 2011 年考研数学一 22

7 2012 年考研数学一 25

8 2013 年考研数学一 29

9 2014 年考研数学一 33

10 2015 年考研数学一 37

11 2016 年考研数学一 41

12 2017 年考研数学一 45

13 2018 年考研数学一 49

14 2019 年考研数学一 53

15 2020 年考研数学一 57

第 1 章 2006 年考研数学一

一、填空题, 1 ～ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

2. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________.

3. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

4. 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\big(\max\{X,Y\}\big)\leqslant 1=$________.

二、选择题, 7 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 (　)

   A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　　C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于 (　)

   A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

   C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则级数 (　)

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

   C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

10.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

11.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

12.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$ C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$

13.设 A,B 为随机事件, 且 $P(B)=0$, $P(A|B)=1$, 则必有 ( )

A. $P(A\cup B)>P(A)$ B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$ D. $P(A\cup B)=P(B)$

14.设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 $P\big(|X-\mu_1|<1\big)>P\big(|Y-\mu_2|<1\big)$, 则必有 ( )

A. $\sigma_1<\sigma_2$ B. $\sigma_1>\sigma_2$ C. $\mu_1<\mu_2$ D. $\mu_1>\mu_2$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$, 计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

16.(本题满分 12 分)

设数列 x_n 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

17.(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足中等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

19.(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内, 函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明: 对 D 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

20.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_2+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

21.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

22.(本题满分 9 分)

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$, 令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

23.(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

第 2 章 2007 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.

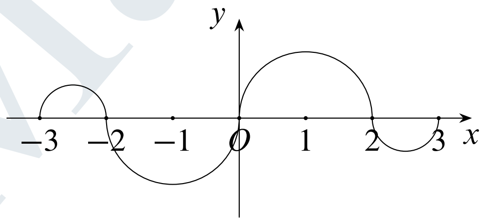
1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ D. $1-\cos\sqrt{x}$

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$, $[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0]$, $[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )



第 3 题图

A. $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$ B. $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$ D. $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

B. 若 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

C. 若 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

D. 若 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n), n=1,2,\cdots$, 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

6. 设曲线 $L: f(x,y)=1$ ($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数) 过第二象限内的点 M 和第四象限内的点 N, Γ 为 L 上从点 M 到 N 的一段弧, 则下列小于零的是 ( )

A. $\displaystyle\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}x$ B. $\displaystyle\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s$ D. $\displaystyle\int_\Gamma f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y$

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( )

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p\,(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ( )

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$　　C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

10.设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ( )

A. $f_X(x)$　　B. $f_Y(y)$　　C. $f_X(x)f_Y(y)$　　D. $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.

11.$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=$________.

12.设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f(x^y,y^x)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

13.二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

14.设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 则 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\,\mathrm{d}S=$________.

15.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

16.在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17.**(本题满分 11 分)**

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

18.**(本题满分 10 分)**

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

19.**(本题满分 11 分)**

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.**(本题满分 10 分)**

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

(1) 证明: $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$;

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

21.**(本题满分 11 分)**

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\tag{2}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

22.**(本题满分 11 分)**

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(1) 求 $P(X>2Y)$;

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

24.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中参数 $\theta\,(0<\theta<1)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

第 3 章 2008 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ( )

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于 ( )

   A. $\boldsymbol{i}$　　B. $-\boldsymbol{i}$　　C. $\boldsymbol{j}$　　D. $-\boldsymbol{j}$

3. 在下列微分方程中, 以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数) 为通解的是 ( )

   A. $y'''+y''-4y'-4y=0$　　B. $y'''+y''+4y'+4y=0$

   C. $y'''-y''-4y'+4y=0$　　D. $y'''-y''+4y'-4y=0$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ( )

   A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

   C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 ( )

   A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

   C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为 ( )

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 ( )

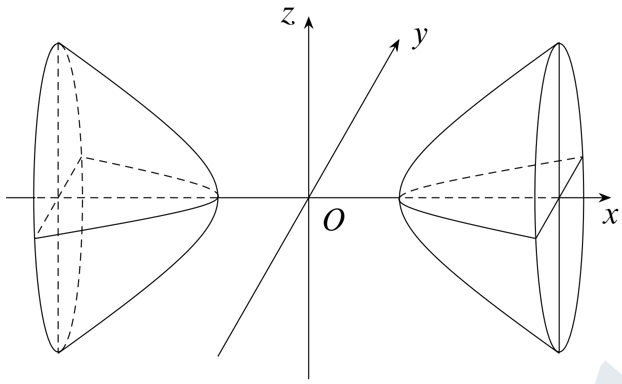
   A. $F^2(x)$　　B. $F(x)F(y)$

   C. $1-[1-F(x)]^2$　　D. $[1-F(x)][1-F(y)]$

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$, 且相关系数 $\rho_{XY}=1$, 则 ( )

   A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　B. $P\{Y=2X-1\}=1$

   C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　D. $P\{Y=2X+1\}=1$



第 6 题图

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

10. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

11. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

12. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X=EX^2\}=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

16.(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$, 其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

17.(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$, 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

18.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

19.(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

20.(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) 秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

21.(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1;

(3) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P(X=i)=\frac{1}{3}\ (i=-1,0,1)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$, 记 $Z=X+Y$.

(1) 求 $P\left(Z\leqslant \frac{1}{2}\middle| X=0\right)$;

(2) 求 Z 的概率密度.

23.(**本题满分** 11 **分**)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2.$$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT.

第 4 章 2009 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

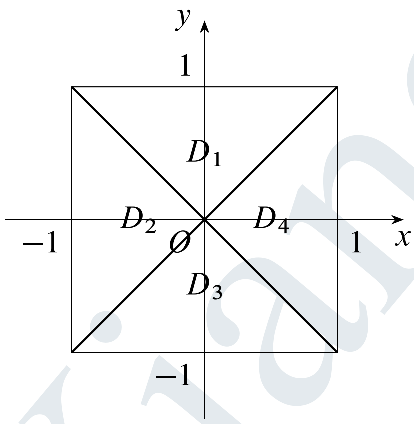
1. 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ( )

   A. $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$　　B. $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$

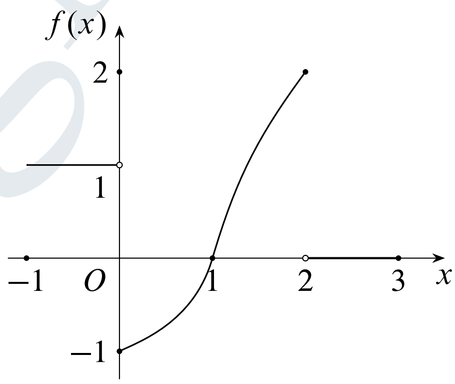
   C. $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$　　D. $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$

2. 如图所示, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint\limits_{D} y \cos x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 4} I_k =$ ( )

   A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D. I_4



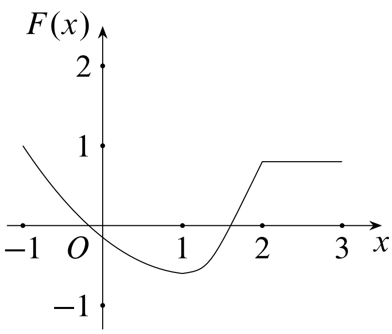
第 2 题图



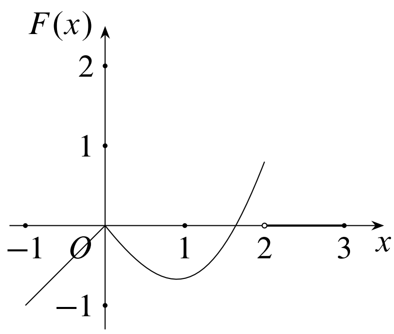
第 3 题图

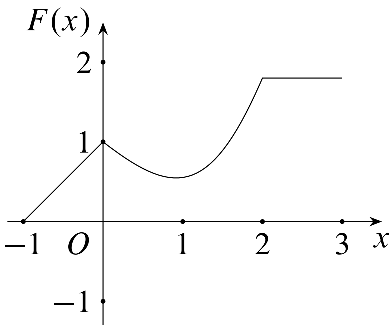
3. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为 ( )

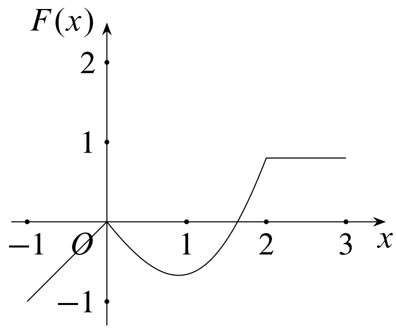
A.



B.



C. 

D. 

4. 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则 ( )

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛

D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=2, |\boldsymbol{B}|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X)=$ ( )

A. 0 B. 0.3 C. 0.7 D. 1

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

11. 已知曲线 $L: y=x^2\left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\right)$, 则 $\int_L x\mathrm{d}s=$________.

12. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, 则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

13. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

注: 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 9 分)**

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

16.**(本题满分 9 分)**

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

17.**(本题满分 11 分)**

设椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(2) 求 S_1 与 S_2 之间立体的体积.

18.**(本题满分 11 分)**

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

注: 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

22.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X=1|Z=0)$;

(2) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中参数 $\lambda\,(\lambda>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量;

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

第 5 章 2010 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1\. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ ( )

A. 1　　B. e　　C. e^{a-b}　　D. e^{b-a}

2\. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

A. x　　B. z　　C. $-x$　　D. $-z$

3\. 设 m,n 是正整数, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性 ( )

A. 仅与 m 的取值有关　　B. 仅与 n 的取值有关

C. 与 m,n 的取值都有关　　D. 与 m,n 的取值都无关

4\. $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　B. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　D. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

5\. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 ( )

A. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　B. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

C. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$　　D. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

6\. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $P(X=1)=$ ( )

A. 0 B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$ D. $1-\mathrm{e}^{-1}$

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度, 则 a,b 应满足 ( )

A. $2a+3b=4$ B. $3a+2b=4$ C. $a+b=1$ D. $a+b=2$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\\ y=\displaystyle\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

10. $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$________.

11. 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\big(x\in[-1,1]\big)$, 起点是 $(-1,0)$, 终点是 $(1,0)$, 则曲线积分 $\displaystyle\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$________.

12. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$________.

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$, 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a=$________.

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\dfrac{C}{k!},k=0,1,2,\cdots$, 则 $E(X^2)=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

17.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\displaystyle\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t$ 与 $\displaystyle\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \, \mathrm{d}t \, (n = 1, 2, \cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

18.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

19.(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C, 并计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{\left(x + \sqrt{3}\right)|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \mathrm{d}S$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A\mathrm{e}^{-2x^2 + 2xy - y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$. 试求常数 a_1, a_2, a_3, 使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

第 6 章 2011 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ( )

A. $(1,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

2. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n=1,2,\cdots)$ 无界, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 ( )

A. $(-1,1]$　　B. $[-1,1)$　　C. $[0,2)$　　D. $(0,2]$

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x)>0, f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f(0)>1, f''(0)>0$　　B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$　　D. $f(0)<1, f''(0)<0$

4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$, 则 I,J,K 的大小关系是 ( )

A. $I<J<K$　　B. $I<K<J$　　C. $J<I<K$　　D. $K<J<I$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

6. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ( )

A. $f_1(x)f_2(x)$　　B. $2f_2(x)F_1(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$　　D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

注: 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x), 2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在. 记 $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$, 则 $E(UV)=$ ( )

A. $E(U)\cdot E(V)$ B. $E(X)\cdot E(Y)$ C. $E(U)\cdot E(Y)$ D. $E(X)\cdot E(V)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)=$________.

10. 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

11. 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

12. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$________.

13. 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$, 则 $a=$________.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则 $E(XY^2)=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.

16. (本题满分 9 分)

设函数 $z=f\big(xy, yg(x)\big)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

17. (本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

18. (本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

19.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=a$,其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P(X^2=Y^2)=1$.

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(2) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

23.(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知, $\sigma^2>0$ 未知. $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(1) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(2) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

第 7 章 2012 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$ ( )

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$ B. $(-1)^n(n-1)!$ C. $(-1)^{n-1}n!$ D. $(-1)^n n!$

3. 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 ( )

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

4. 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\,(k=1,2,3)$, 则有 ( )

A. $I_1<I_2<I_3$ B. $I_3<I_2<I_1$ C. $I_2<I_3<I_1$ D. $I_2<I_1<I_3$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$, 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ ( )

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P(X<Y)=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

8. 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ( )

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$, 则 $f(x)=$ ________.

10. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

11. $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$________.

12. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=$________.

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

14. 设 A,B,C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$ ________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

17.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

18.(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0$, $f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

19.(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I=\oint_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

21.(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 将二次型 f 化为标准形.

22.(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P(X=2Y)$

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

23.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(1) 求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

(2) 设 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

第 8 章 2013 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数, 且 $c\neq 0$, 则 ( )

   A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 ( )

   A. $x-y+z=-2$　B. $x+y+z=0$

   C. $x-2y+z=-3$　D. $x-y-z=0$

3. 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|,b_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$, 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$ ( )

   A. $\dfrac{3}{4}$　B. $\dfrac{1}{4}$　C. $-\dfrac{1}{4}$　D. $-\dfrac{3}{4}$

4. 设 $L_1:x^2+y^2=1,L_2:x^2+y^2=2,L_3:x^2+2y^2=2,L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\ (i=1,2,3,4)\,,$$

   则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$ ( )

   A. I_1　B. I_2　C. I_3　D. I_4

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 ( )

   A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

   B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

   C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

   D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

6. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ( )

   A. $a=0,b=2$　B. $a=0,b$ 为任意常数

   C. $a=2,b=0$　D. $a=2,b$ 为任意常数

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2), p_i = P(-2 \leqslant X_i \leqslant 2)\,(i=1,2,3)$, 则 ( )

A. $p_1 > p_2 > p_3$　　B. $p_2 > p_1 > p_3$　　C. $p_3 > p_1 > p_2$　　D. $p_1 > p_3 > p_2$

8. 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $\alpha\,(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P(X > c) = \alpha$, 则 $P(Y > c^2) =$ ( )

A. α　　B. $1-\alpha$　　C. 2α　　D. $1-2\alpha$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right] =$________.

10. 已知 $y_1 = \mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{2x}, y_2 = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{2x}, y_3 = -x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y =$________.

11. 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$________.

12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$________.

13. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0\,(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$________.

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P(Y \leqslant a+1 | Y > a) =$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. **(本题满分 10 分)**

计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 其中 $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

16. **(本题满分 10 分)**

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geqslant 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

17. **(本题满分 10 分)**

求函数 $f(x,y) = \left(y + \dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值.

18.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0), B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ, Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(1) 求曲面 Σ 的方程;

(2) 求 Ω 的形心坐标.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$, 当 a,b 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\geqslant 2\end{cases}$.

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P(X\leqslant Y)$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

第 9 章 2014 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A. $y=x+\sin x$　　B. $y=x^2+\sin x$　　C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

A. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$　　B. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$　　D. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

B. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$

D. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$

4. 若 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\min_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\,\mathrm{d}x\right\}$, 则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

A. $2\sin x$　　B. $2\cos x$　　C. $2\pi\sin x$　　D. $2\pi\cos x$

5. 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$ ( )

A. $(ad-bc)^2$　　B. $-(ad-bc)^2$　　C. $a^2d^2-b^2c^2$　　D. $b^2c^2-a^2d^2$

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 k,l, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A)=$ ( )

A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

8. 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\dfrac{1}{2}(f_1(y)+f_2(y))$, 随机变量 $Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$, 则 ( )

A. $EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$ B. $EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

C. $EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$ D. $EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$

二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

10.设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$, 则 $f(7)=$________.

11.微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为________.

12.设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

13.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是________.

14.设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 θ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 θ^2 的无偏估计, 则 $c=$________.

三、解答题, 15 ∼ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

注: 事实上, 洛必达法则适用于 $\dfrac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+2y^2+x^2y+6=0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(\mathrm{e}^x \cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + \mathrm{e}^x \cos y)\,\mathrm{e}^{2x}$, 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

18.(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2\ (z \leqslant 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注: 这题还可以用补面 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ 的方法用高斯公式来做, 但这里用投影法更直接.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \dfrac{\pi}{2}, 0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(2) 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

21.(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

由 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 1, \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = n$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角阵 $\mathrm{diag}\{n, 0, \cdots, 0\}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 EY.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

其中 θ 是未知参数且大于零, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

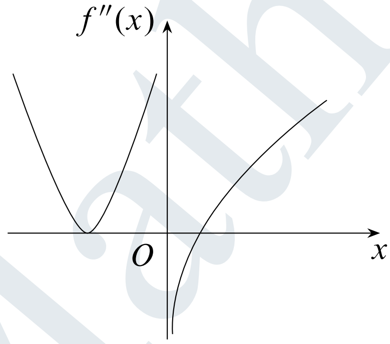
(3) 是否存在实数 a, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0$?

第 10 章 2015 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



第 1 题图

2. 设 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解, 则 ( )

A. $a=-3, b=2, c=-1$ B. $a=3, b=2, c=-1$

C. $a=-3, b=2, c=1$ D. $a=3, b=2, c=1$

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 ( )

A. 收敛点, 收敛点 B. 收敛点, 发散点 C. 发散点, 收敛点 D. 发散点, 发散点

4. 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

A. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ B. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

C. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$ D. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega=\{1,2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ B. $a\notin\Omega, d\in\Omega$ C. $a\in\Omega, d\notin\Omega$ D. $a\in\Omega, d\in\Omega$

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 ( )

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

7. 设 A,B 为任意两个随机事件, 则 ( )

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$ B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ D. $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

8. 设随机变量 X,Y 不相关, 且 $EX=2, EY=1, DX=3$, 则 $E[X(X+Y-2)]=$ ( )

A. -3 B. 3 C. -5 D. 5

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$________.

11. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

12. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的空间区域, 则 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

13. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}=$________.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$, 则 $P(XY-Y<0)=$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a,b,k 的值.

注: 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0\in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

17.(**本题满分** 10 **分**)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$, 曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$, 求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

18.(**本题满分** 10 **分**)

(1) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导, $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

19.(**本题满分** 10 **分**)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$, 起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$, 终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$, 计算曲线积分 $I=\displaystyle\int_L (y+z)\,\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$.

20.(**本题满分** 11 **分**)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+1(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

(2) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

21.(**本题满分** 11 **分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

22.**(本题满分 11 分)**

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY.

23.**(本题满分 11 分)**

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

第 11 章 2016 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛, 则 ( )

A. $a<1$ 且 $b>1$　　B. $a>1$ 且 $b>1$

C. $a<1$ 且 $a+b>1$　　D. $a>1$ 且 $a+b>1$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

3. 若 $y_1=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2}, y_2=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 则 $q(x)=$ ( )

A. $3x(1+x^2)$　　B. $-3x(1+x^2)$　　C. $\frac{x}{(1+x)^2}$　　D. $-\frac{x}{(1+x)^2}$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\end{cases}, n=1,2,\cdots$, 则 ( )

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 ( )

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 ( )

A. 单叶双曲面　　B. 双叶双曲面　　C. 椭球面　　D. 柱面

7. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)\,(\sigma>0)$, 记 $p=P(X\leqslant\mu+\sigma^2)$, 则 ( )

A. p 随着 μ 的增加而增加　　B. p 随着 σ 的增加而增加

C. p 随着 μ 的增加而减少　　D. p 随着 σ 的增加而减少

8. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做两次, X 表示两次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ( )

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $-\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{1}{2}$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$________.

10.向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=$________.

11.设函数 $f(u,v)$ 可微, $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

12.设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0)=1$, 则 $a=$________.

13.行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$ ________.

14.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x}=9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$.

(1) 证明: 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$, 且 $f(0,y)=y+1$. L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

18.(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y\\0, & X>Y\end{cases}$.

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数. X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a, 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

第 12 章 2017 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 (　　)

   A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　　C. $ab=0$　　D. $ab=2$

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)\cdot f'(x)>0$, 则 (　　)

   A. $f(1)>f(-1)$　　B. $f(1)<f(-1)$

   C. $|f(1)|>|f(-1)|$　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$

3. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为 (　　)

   A. 12　　B. 6　　C. 4　　D. 2

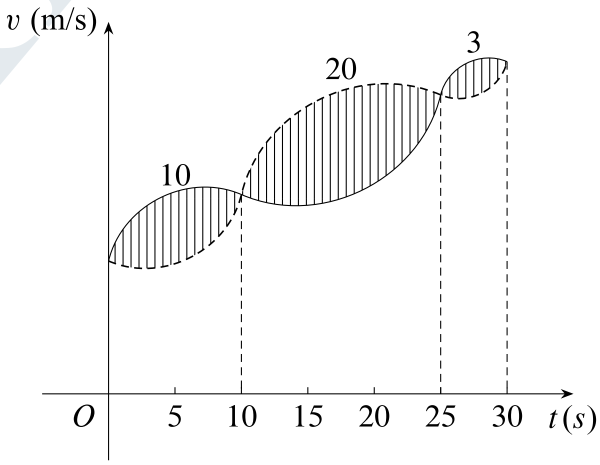
4. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$, 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则 (　　)

   A. $t_0=10$　　B. $15<t_0<20$　　C. $t_0=25$　　D. $t_0>25$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 (　　)

   A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

   C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆



第 4 题图

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

7. 设 A,B 是两个随机事件, 若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(B|A)>P(B|\bar{A})$　　B. $P(B|A)<P(B|\bar{A})$

C. $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$　　D. $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 则下列结论中不正确的是 ( )

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　B. $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　D. $n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0)=$________.

10.微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________.

11.若曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关, 则 $a=$________.

12.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$________.

13.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ________.

14.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X)=$____.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

16.(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

19.(本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(2) 求 S 的质量 M.

20.(本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

21.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y \leqslant EY)$；

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

23.(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做了 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|(i = 1, 2, \cdots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计参数 σ.

(1) 求 Z_1 的概率密度；

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(3) 求参数 σ 的最大似然估计量.

第 13 章 2018 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

   A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

   C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

2. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为 ( )

   A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=0$

   C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ ( )

   A. $\sin 1+\cos 1$　　B. $2\sin 1+\cos 1$　　C. $2\sin 1+2\cos 1$　　D. $3\sin 1+2\cos 1$

4. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

   A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$　　C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

   A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

   A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$　　B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

   C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$　　D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P(X<0)=$ ( )

   A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

8. 给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 已知, 给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 对总体均值 μ 进行检验, 令 $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$, 则 ( )

   A. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0, 则 $\alpha=0.01$ 时必拒绝 H_0

B. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0
C. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0
D. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin(kx)}} = \mathrm{e}$, 则 $k =$________.

10.设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0,0)$, 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 x f''(x)\,\mathrm{d}x =$ ________.

11.设 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, 则 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0) =$________.

12.设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xy\,\mathrm{d}s =$________.

13.设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$________.

14.设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \varnothing$. 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC|AB\cup C) = \frac{1}{4},$$

则 $P(C) =$ ________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

16.**(本题满分 10 分)**

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

17.**(本题满分 10 分)**

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

18.(本题满分 10 分)

☞已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(1) 当 $f(x) = x$ 时, 求微分方程的通解.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1\,(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

21.(本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \dfrac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\operatorname{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

☞此题来自蒲和平大学生数学竞赛教程 240 页.

(1) 求 $\hat{\sigma}$；

(2) 求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.

第 14 章 2019 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ( )

A. 可导点, 极值点　　B. 不可导点, 极值点

C. 可导点, 非极值点　　D. 不可导点, 非极值点

3. 设 u_n 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

4. 设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 ( )

A. $y - \dfrac{x^2}{y}$　　B. $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^2}$　　C. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$　　D. $x - \dfrac{1}{y}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$　　B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$　　C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i1}y + a_{i3}z = d_i \ (i = 1, 2, 3)$$

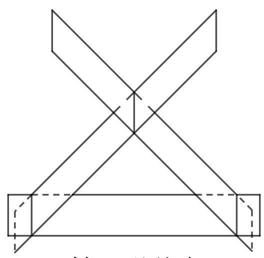
组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \bar{\boldsymbol{A}}$, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$

B. $r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2$

C. $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2$

D. $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 1$



第 6 题图

7. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$　D. $P(AB)=P(\bar{A}B)$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$ (　)

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关　B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关

C. 与 μ,σ^2 都有关　D. 与 μ,σ^2 都无关

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(u)$ 可导, $z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

10.微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$________.

11.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)$=________.

12.设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

13.设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ________.

14.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\big(F(X)>E(X)-1\big)=$________.

注: 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 X 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y=F(X)\sim U(0,1)$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

16.**(本题满分 10 分)**

设 a,b 为实数, 函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a,b;

(2) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geqslant 0)$ 的面积.

17.(本题满分 10 分)

☞求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x} \sin x (x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

18.(本题满分 10 分)

☞设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

19.(本题满分 10 分)

设 Ω 是锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 3, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, a, 3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a, b, c;

(2) 证明: $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p (0 < p < 1)$. 令 $Z = XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题.

☞此题源自1993 年北京师范大学数学分析考研题

(3) X 与 Z 是否相互独立?

23.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

μ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

第 15 章 2020 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

   A. $\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t$

   C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,\mathrm{d}t$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, 则 ( )

   A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

   B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

   C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

   D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f(0,0)=0$, $\boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$, 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 则 ( )

   A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\times\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

   C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{\alpha}\times\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ( )

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时, $|r|\geqslant R$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时, $|r|<R$

   C. $|r|\geqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散　　D. $|r|\leqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$, 则 ( )

   A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$　　B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$

   C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$　　D. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

6. 已知直线 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$

相交于一点, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示
B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示
C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示
D. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12},$$

则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leqslant 55\right)$ 的近似值为 ( )

A. $1 - \Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1 - \Phi(0.2)$ D. $\Phi(0.2)$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right) =$________.

10.设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) \end{cases}$, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} =$________.

11.若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0\,(a > 0)$, 且 $f(0) = m, f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$________.

12.设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} \mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} =$________.

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$________.

14.设 X 服从区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\operatorname{Cov}(X, Y) =$________.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

16.(**本题满分** 10 **分**)

计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是 $x^2+y^2=2$, 方向为逆时针方向.

17.(**本题满分** 10 **分**)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x|<1$ 时, 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛, 并求其和函数.

18.(**本题满分** 10 **分**)

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

19.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

20.(**本题满分** 11 **分**)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

21.(**本题满分** 11 **分**)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P(X_3 = 0) = P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{2}, Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明:随机变量 Y 服从标准正态分布.

23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.