

2020 年考研数学二



一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是

()

A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解: 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt &\sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt &\sim \int_0^x \sqrt{t^3} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}, \\ \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt &\sim \int_0^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt &\sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5, \end{aligned}$$

正确答案选 D.

2. 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解: 显然, 所有的间断点为 $x = -1, 0, 1, 2$, 其中 $x = -1, 1, 2$ 都是无穷间断点, 而 $x = 0$ 则是可去间断点, 选 C.

3. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx =$

()

A. $\frac{\pi^2}{4}$

B. $\frac{\pi^2}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{8}$

解: 令 $t = \arcsin \sqrt{x}$, 则 $x = \sin^2 t$,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t \cos t} 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{\pi^2}{4},$$

选 A.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 则当 $n \geq 3$ 时, $f^{(n)}(0) =$ ()
 A. $-\frac{n!}{n-2}$ B. $\frac{n!}{n-2}$ C. $-\frac{(n-2)!}{n}$ D. $\frac{(n-2)!}{n}$

 解: 方法一 由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(n-k)} [\ln(1-x)]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^2 C_n^k (x^2)^{(k)} [\ln(1-x)]^{(n-k)} \\ &= x^{2-(n-1)!} + C_n^1 x \frac{-(n-2)!}{(1-x)^{n-1}} + 2C_n^2 \frac{-(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}, \end{aligned}$$

代入 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0) = -2C_n^2(n-3)! = -n(n-1)(n-3)! = -\frac{n!}{n-2}$, 选 A.

方法二 利用函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式系数的唯一性, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \ln(1-x) = x^2 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right) \\ &= -x^3 - \frac{x^4}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n-2} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \end{aligned}$$


那么由对应项系数相等可得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n-2}$, 所以 $f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}$, 选 A.

5. 关于函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y = 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$, 给出下列结论:

- (1) $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 1$; (2) $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 1$;
 (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$; (4) $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

 解: 直接计算可得


$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

所以 (1) 正确. 当 $xy \neq 0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, 那么

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 1}{y} = \infty,$$

因此 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)}$ 不存在, (2) 错误. 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 不论取 x, y , 或者 xy , 都是无穷小量, 因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, (3) 正确. 又

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} xy = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

 注意这是个累次极限, x 和 y 都是趋于 0 而不等于 0.

因此 (4) 正确, 选 B.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ()
- A. $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ B. $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$ C. $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ D. $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解: 由 $f'(x) > f(x) > 0$ 可知 $f'(x) - f(x) > 0$, 且 $f(x)$ 单调递增. 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$, 则 $F'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x)] > 0$, 因此 $F(x)$ 单调递增且为正, 于是 $F(0) > F(-1)$, 选 B.

7. 设四阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^*x = 0$ 的通解为 ()

- A. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ B. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$
C. $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$ D. $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$

解: 因为 A 不可逆, 所以 $A^*A = |A|E = O$, 因此 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是 $A^*x = 0$ 的解, 且 $r(A^*) \leq 1$. 而 $A_{12} \neq 0$ 说明 $A^* \neq O$. 且 A 中对应的三列 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性无关的, 即 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $A^*x = 0$ 的基础解系, 因此正确答案选 C.

8. 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为 ()

- A. $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$ B. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
C. $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$ D. $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

解: 同一个特征值对应的特征向量的线性组合仍然是这个特征值对应的特征向量, 于是

$$A(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此正确答案选 D.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由参数方程求导公式可得


$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big/ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \Big/ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t = 1$ 可得 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = -\sqrt{2}$.




10. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1} dy = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{2}{9} (x^3+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$


11. 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

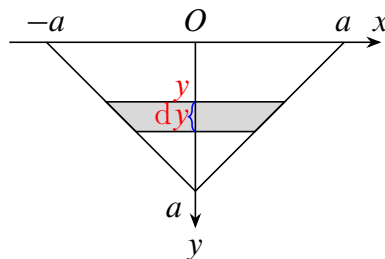
 解: 直接计算得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,\pi)} = \pi - 1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,\pi)} = -1$, 因此 $dz|_{(0,\pi)} = (\pi - 1)dx - dy$.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g , 水的密度为 ρ , 则三角形平板的一侧受到的水压力为 $\underline{\hspace{2cm}}.$


 解: 如图, 以斜边所在的直线为 x 轴, 斜边中点为原点, 垂直于 x 轴向下的方向为 y 轴, 考虑在深度为 y 处, 宽度为 dy 的窄条, 压强为 ρgy , 那么窄条一侧承受的压力为 $\rho gy \cdot 2(a-y)dy$, 因此整个平面一侧承受的压力为




第 12 题图

$$F = \int_0^a \rho gy \cdot 2(a-y) dy = \frac{1}{3} \rho g a^3.$$

13. 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 则 $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$, 再由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 可得 $C_1 = 0, C_2 = 1$, 因此 $y(x) = xe^{-x}$, $\int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1$.

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

 解: 利用行列式的行列变换得


$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线.


 **解:** 设所求斜渐近线为 $y = ax + b$, 则

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}. \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{1}{e}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[e^{-x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[e^{1-x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e} \left[1 - x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

因此所求的斜渐近线为 $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{2e}$.

16.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

 **解:** 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f(x)$ 连续, 则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{显然 } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x = 0 \end{cases}. \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du. \text{ 当}$$

$x = 0$ 时,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此 } g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}, \text{ 且}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = g'(0),$$

因此 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.



17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

解: 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 为极小值点, 且极小值 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$.

18.(本题满分 10 分)

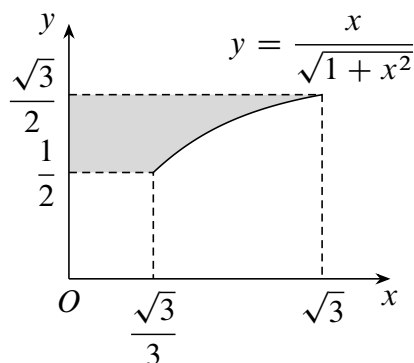
设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且满足 $2f(x) + x^2 f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$, 并求曲线 $y = f(x), y = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体

解: (1) 把已知等式中的 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得

$$2f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} f(x) = \frac{2x+1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

积. 与原式联立消去 $f(\frac{1}{x})$ 解得 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 如图, 由 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 得 $x = \frac{y}{1-y^2}$, 因此所求旋转体的体积为



第 18 题图

$$V = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \cdot \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} d\sigma$, 其中区域 D 由 $x = 1, x = 2, y = x$ 及 x 轴围成.

解: 直接化为极坐标计算得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec \theta}^{2\sec \theta} \frac{r}{r \cos \theta} r dr = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$, 证明

(1) 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$.

证明: (1) 令 $F(x) = f(x) - (2 - x)e^{x^2}$, 则

$$F(1) = f(1) - e = -e < 0, \quad F(2) = f(2) - 0 = f(2) > 0,$$

因此由零点定理知存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$.

(2) 令 $g(x) = \ln x$, 则 $f(x), g(x)$ 都在 $[1, 2]$ 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 由柯西中值定理知存在 $\eta \in (1, 2)$, 使得 $\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$, 即 $\frac{f(2)}{\ln 2} = \frac{e^{\eta^2}}{1/\eta}$, 也就是 $f(2) = \ln 2 \cdot \eta \cdot e^{\eta^2}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0 (x > 0)$. 曲线 $y = f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y = f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T , 过点 M 作 MP 垂直 x 轴于点 P , 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 $3:2$, 求曲线满足的方程.

解: 设 M 的坐标为 $(x, f(x))$, 则 M 处的切线方程为

$$Y = f'(x)(X - x) + f(x).$$

当 $Y = 0$ 时, $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 且

$$S_{\triangle MTP} = \frac{1}{2} f(x) \left[x - \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right] = \frac{f^2(x)}{2f'(x)}.$$

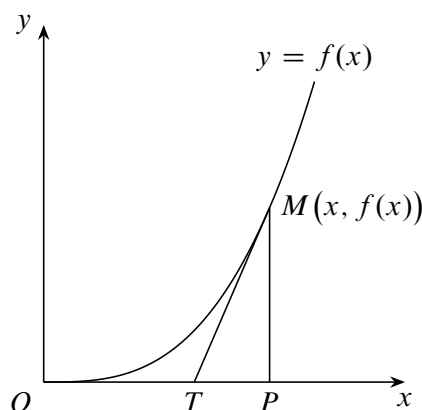
由题意有 $\int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{f^2(x)}{2f'(x)}$, $f(0) = 0$. 等式两边求导得

$$f(x) = \frac{3[2f(x)f'(x) - f^2(x)f''(x)]}{4f'^2(x)},$$

整理即得 $f(x)f''(x) - \frac{2}{3}f'^2(x) = 0$, 于是 $f'(0) = 0$. 且

$$\left(\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}} \right)' = \frac{y''y^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'^2}{y^{\frac{4}{3}}} = \frac{y''y - \frac{2}{3}y'^2}{y'y^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

因此 $y' = Cy^{\frac{2}{3}}$. 再分离变量解得 $3y^{\frac{1}{3}} = Cx + C_1$, 即 $y = (C_2x + C_3)^3$. 再由 $y(0) = y'(0) = 0$ 知 $C_3 = 0$, 因此 $y = kx^3$, k 为任意正数, 此即为所求曲线的方程.



第 21 题图


22.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变

换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.



- (1) 求 a 的值;
- (2) 求可逆矩阵 P .

 解: (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3), g(y_1, y_2, y_3)$ 的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

由于 A, B 合同, 所以 $r(A) = r(B) = 2$, 因此

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a)(1-a)^2 = 0,$$

于是 $a = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$. 当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$ 舍去, 于是 $a = -\frac{1}{2}$.

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2$, 令

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3) \\ z_3 = x_3 \end{cases}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则在可逆线性变换 $z = P_1 x$, 即 $x = P_1^{-1} z$ 下, $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为规范形 $z_1^2 + z_2^2$. 同理, $g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$, 令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 2y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则在可逆线性变换 $z = P_2 y$, 即 $y = P_2^{-1} z$ 下, $g(y_1, y_2, y_3)$ 化为标准形 $z_1^2 + z_2^2$. 因此 $P_1 x = P_2 y$, 即 $x = P_1^{-1} P_2 y$, 所以

$$P = P_1^{-1} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量, 且不是 A 的特征向量.

- (1) 证明: P 是可逆矩阵;
- (2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.



✎ 解: (1) 由题意 α 是非零向量, $A\alpha \neq k\alpha$, 所以 $A\alpha, \alpha$ 线性无关, 即 $P = (A\alpha, \alpha)$ 为可逆矩阵.

$$(2) AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 B 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 A 的特征值也是 $2, -3$, 所以 A 可以相似对角化.

