中科院数学与系统科学学院研究院分析与代数测试试题解答

向　禹

最近网上传的比较火的就是这套试卷了, 难度比起我当年考试的时候似乎大了不少. 在通过和群友的讨论以后, 总算解决了这套试卷的解答. 其中有的解答属于我, 有的属于群友, 还有一些参考书, 这里尤其感谢群友给出的第六题的解答. 现给出完整解答, 如有错漏, 请邮件戳我 ☞ .

第一题

证明或反证: 存在一个 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2+2A+5I=O$ 的充要条件是 n 为偶数.

解　首先如果矩阵 A 满足 $A^2+2A+5I=O$, 则 A 的特征值只能是 $-1\pm 2\mathrm{i}$, 那么根据虚根成对原理可知此矩阵只能是偶数阶. 且当 $n=2k$ 时, 我们令

$$A_1=A_2=\cdots=A_k=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix},$$

则显然有 $A_i^2+2A_i+5I=O, i=1,2,\cdots,k$. 令 $A=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 即满足题意. 也就是存在一个 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2+2A+5I=O$ 的充要条件是 n 为偶数.

第二题

设 f 为定义在 $[0,1]$ 上的实值连续函数, 求证:

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明　本题证明方法颇多, 这里采用蒲和平大学生数学竞赛教程上的解答 (377 页第 10 题).

令 $I_1=\{x\in[0,1]|f(x)\geqslant 0\}$, 以及 $I_2=\{x\in[0,1]|f(x)<0\}$. 记 $P=m(I_1), N=m(I_2)$ 分别表示 I_1 和 I_2 对应的区间长度✍, 则 $P+N=1$. 若 $P=0$ 或 $N=0$, 则不等式是显然的. 这里不妨设 $P>0$, 且 $N>0$. 考虑 $|f|$ 在 I_1 和 I_2 上的均值

$$\mu_p=\frac{1}{P}\int_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \mu_n=-\frac{1}{N}\int_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果必要, 以 $-f(x)$ 代替 $f(x)$, 我们不妨假设 $\mu_p\geqslant\mu_n$. 显然

$$\iint_{I_1\times I_1}|f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2P^2\mu_p,\quad \iint_{I_2\times I_2}|f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2N^2\mu_n.$$

此外,

$$\begin{aligned}\iint_{I_1\times I_2}|f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\geqslant \left|\iint_{I_1\times I_2}[f(x)+f(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\\ &=|NP\mu_p-NP\mu_n|=NP(\mu_p-\mu_n).\end{aligned}$$

并且在 $I_2 \times I_1$ 上同样的积分不等式成立. 于是结合 $P+N=1$ 可得,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\geqslant 2P^2\mu_p + 2NP(\mu_p-\mu_n) + 2N^2\mu_n \\ &= P(\mu_p-\mu_n) + (2N-1)^2\mu_n + P\mu_p + N\mu_n \\ &\geqslant P\mu_p + N\mu_n = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

本题出自 2003 年普特南数学竞赛 . 我本人也给出一种基于概率论的的方法 (虽然有些复杂): 设 X, Y 独立同分布于 $U[0,1]$, 令 $T=f(X), W=f(Y)$, 则 T, W 也独立同分布, 且

$$\mathbb{E}|T+W| = \int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \mathbb{E}|T| = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

只需要证明 $\mathbb{E}|T+W| \geqslant \mathbb{E}|T|$ 即可. 根据我曾经发布的微信公众推文 数学期望不等式 , 我们有 $\mathbb{E}|T+W| \geqslant E|T-W|$, 而 $\mathbb{E}|T+W| + \mathbb{E}|T-W| \geqslant 2\mathbb{E}|T+W+T-W| = 2\mathbb{E}|T|$, 得证.

✍确切地说, 应该是测度.

第三题

设 A 和 B 分别为 2×2 矩阵, 其元为整数, 且 $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵的元也为整数. 证明 $A+5B$ 为可逆矩阵, 其逆矩阵的元也为整数.

证明 本题源自 第十届大学生数学竞赛 . 首先有如下引理:

引理 1. 如果矩阵 A 和 A^{-1} 的都是整数矩阵, 则 A 的行列式的绝对值为 1.

证明. 这只需要由 $AA^{-1}=I$ 得 $|A|\,|A^{-1}|=1$. 注意到 $|A|$ 和 $|A^{-1}|$ 均为整数, 故 A 的行列式的绝对值为 1. ☆

再考虑多项式 $p(x)=|A+xB|^2$, 根据题意知 $p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)$ 的值均为 1. 因此不超过四次的多项式 $q(x)=p(x)-1$ 有五个零点, 这说明 $q(x)\equiv 0$, 即 $p(x)\equiv 1$. 特别地, $p(5)=|A+5B|^2=1$, 于是 $|A+5B|=1$ 或 -1, 则 $A+5B$ 可逆, 且 $(A+5B)^{-1}=(A+5B)^*/|A+5B|$ 的元均为整数.

第四题

设 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2+z^2)}$, 求 f 的 Fourier 变换, 其定义为:

$$\hat{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x\xi_1+y\xi_2+z\xi_3)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\pi[x^2+y^2+z^2+2\mathrm{i}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\pi[(x+\mathrm{i}\xi_1)^2+(y+\mathrm{i}\xi_2)^2+(z+\mathrm{i}\xi_3)^2]-\pi(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{-\pi(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi_1)^2}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(y+\mathrm{i}\xi_2)^2}\,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(z+\mathrm{i}\xi_3)^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{-\pi(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{-\pi(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}.
\end{aligned}
$$

其中, 通过考虑由 $x=\pm R, y=0, y=\xi_1$ 所构成的矩形围道, 令 $R\to\infty$, 由留数定理可得

$$
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi_1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x,
$$

剩下的同理成立. 从这里我们还发现 f 其实是 Fourier 变换的不动点.

第五题

对任何方阵 A 可定义 $\sin A$ 如下:

$$
\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.
$$

证明或反证: 存在一个 2 阶方阵 A 使得 $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 首先注意到如果 $A\alpha=\lambda\alpha$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $A^n\alpha=\lambda^n\alpha$, 于是

$$
(\sin A)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \lambda^{2n+1}\alpha = (\sin\lambda)\alpha,
$$

即如果 λ 是 A 的特征值, 对应的 $\sin\lambda$ 就是 $\sin A$ 的特征值. 现在假设存在矩阵 A 使得

$$
\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

则 $\sin A$ 的特征值均为 1, 那么 A 的任意特征值 λ 满足 $\sin\lambda=1$. 设 A 的 Jordan 标准形为

$$
J = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

则 $\sin a=\sin b=1, c=1$ 或 0. 于是存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{-1}JP$. 如果 $c=0$, 则显然

$$
\begin{aligned}
\sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = P^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} J^{2n+1}\right)P \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} \sin a & 0 \\ 0 & \sin b \end{pmatrix} P = P^{-1}IP = I \neq \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

如果 $c=1$, 此时必有 $a=b$, 于是我们有

$$
J^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin A &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1} = P^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}J^{2n+1}\right)P \\
&= P^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[\begin{pmatrix} a^{(2n+1)} & 0 \\ 0 & a^{(2n+1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (2n+1)a^{2n} \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]P \\
&= P^{-1}\left[\begin{pmatrix} \sin a & 0 \\ 0 & \sin a\end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\begin{pmatrix} 0 & (2n+1)a^{2n} \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]P \\
&= I + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \cos a \\ 0 & 0\end{pmatrix}P = I \neq \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

因此不存在矩阵 A, 使得 $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

第六题

设 $x_0 = 1$, 当 $n \geqslant 0, x_{n+1} = 3x_n + \left[\sqrt{5}x_n\right]$, 其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, 求 x_n 的通项表达式.

解 *方法一* 首先给出两个引理:

引理 2. *若 $x \in \mathbb{N}_+$, 则 $\left[(3+\sqrt{5})x\right] + \left[(3-\sqrt{5})x\right] = 6x - 1$.*

证明. LHS $= 6x + \left[\sqrt{5}x\right] + \left[-\sqrt{5}x\right] = 6x + \left[\sqrt{5}x\right] - \left[\sqrt{5}x\right] - 1 = 6x - 1 =$ RHS. ☆

引理 3. *若 $x \in \mathbb{N}_+$, 则 $\left[(3-\sqrt{5})\left[(3+\sqrt{5})x\right]\right] = 4x - 1$.*

证明. 用 $\{x\}$ 表示 $x - [x]$, 则

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \left[(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})x - (3-\sqrt{5})\{(3+\sqrt{5})x\}\right] \\
&= 4x + \left[-(3-\sqrt{5})\{(3+\sqrt{5})x\}\right] = 4x - 1 = \text{RHS}.
\end{aligned}
$$
☆

于是

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 3x_n + \left[\sqrt{5}x_n\right] = \left[(3+\sqrt{5})x_n\right] \\
&= 6x_n - \left[(3-\sqrt{5})x_n\right] - 1 \\
&= 6x_n + \left[(3-\sqrt{5})\left[(3+\sqrt{5})x_{n-1}\right]\right] - 1 \\
&= (6x_n - 1) - (4x_{n-1} - 1) = 6x_n - 4x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

结合 $x_0 = 1, x_1 = 5$, 由特征根方法可知

$$
x_n = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10}(3-\sqrt{5})^n.
$$

方法二 注意到

$$3a_n+\sqrt{5}a_n-1<a_{n+1}<3a_n+\sqrt{5}a_n,$$

两边同乘 $\sqrt{5}-3$ 得

$$\begin{gathered}-4a_n+\left(3-\sqrt{5}\right)>\left(\sqrt{5}-3\right)a_{n+1}>-4a_n,\\3a_{n+1}-4a_n+\left(3-\sqrt{5}\right)>\sqrt{5}a_{n+1}>3a_{n+1}-4a_n,\end{gathered}$$

得出 $\left[\sqrt{5}a_{n+1}\right]=3a_{n+1}-4a_n$. 因此

$$a_{n+1}=3a_n+\left(3a_n-4a_{n-1}\right)=6a_n-4a_{n-1},$$

同样得到了线性递推方程, 剩下用特征根方法即可.