2020 年考研数学二

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right) dt$　　B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\, dt$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx =$ ( )

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$　　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

4. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 则当 $n \geqslant 3$ 时, $f^{(n)}(0)=$ ( )

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$　　B. $\dfrac{n!}{n-2}$　　C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

5. 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0 \\ x, & y=0 \\ y, & x=0 \end{cases}$, 给出下列结论:

(1) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$;　　(2) $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$;　　(4) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

其中正确的个数为 ( )

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 则 ( )

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$　　C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$　　D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

7. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0, \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ( )

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 (　)

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$　　B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

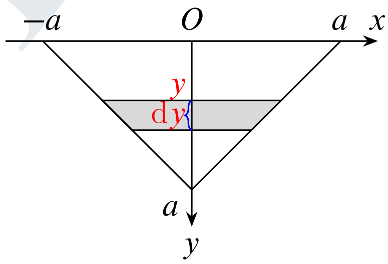
二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

10. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x=$________.

11. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐, 记重力加速度为 g, 水的密度为 ρ, 则三角形平板的一侧受到的水压力为________.



第 12 题图

13. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$, 且 $y(0)=0, y'(0)=1$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x=$________.

14. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线.

16.(本题满分 10 分)

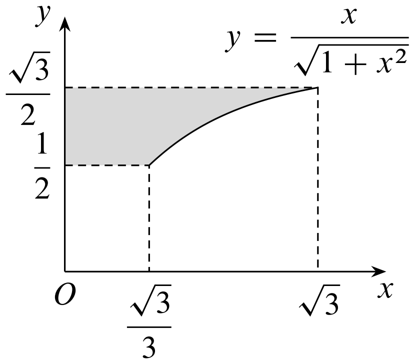
已知函数 $f(x)$ 连续且 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$ 且证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$, 并求曲线 $y=f(x), y=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.



第 18 题图

19.(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中区域 D 由 $x=1, x=2, y=x$ 及 x 轴围成.

20.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 证明

(1) 存在 $\xi\in(1,2)$, 使得 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$;

(2) 存在 $\eta\in(1,2)$, 使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta\cdot\mathrm{e}^{\eta^2}$.

21.(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)>0\,(x>0)$. 曲线 $y=f(x)$ 过原点, 点 M 为曲线 $y=f(x)$ 上任意一点, 过点 M 的切线与 x 轴相交于点 T, 过点 M 作 MP 垂直 x 轴于点 P, 且曲线 $y=f(x)$ 与直线 MP 以及 x 轴所围成图形的面积与三角形 MTP 的面积比恒为 3 : 2, 求曲线满足的方程.

22.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为 $g(y_1,y_2.y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

23.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.