# Solution to Mathematics of Graduate Entrance Examination

# 考研数学 试题解答

追求卓越排版, 巧解数学难题.

作者: 向禹老师
完成时间: 2020 年 3 月 4 日
Email: 739049687@qq.com

Version: 1.0

# 目录

# 第 1 章 2006 年考研数学一

## 一、填空题, 1 ~ 6 题, 每题 4 分, 共 24 分.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

✎ **解:** 利用等价无穷小代换得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

2. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解为________.

✎ **解:** 原方程变量分离得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x$, 解得 $\ln|y|=\ln|Cx|-\ln \mathrm{e}^x$, 即 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}\ (x\neq 0)$, $C$ 为任意常数.

3. 设 $\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧, 则 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

✎ **解:** 设曲面 $\Sigma_1: z=1\,(x^2+y^2\leqslant 1)$, 取上侧, 则原积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}6\,\mathrm{d}V+0=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z=2\pi.$$

4. 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

✎ **解:** 利用点到平面的距离公式可得所求的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\times 2+4\times 1+5\times 0+0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}.$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

✎ **解:** 由条件可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})|=|2\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2^2=4,$$

因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$, 所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

6. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布, 则 $P\left(\max\{X,Y\}\leqslant 1\right.$=________.

✎ **解:** $P\left(\max\{X,Y\}\right)\leqslant 1=P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)=P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$.

**二、选择题, 7 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量, $\Delta y$ 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 (　)

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$　C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

✎ **解:** 由拉格朗日中值定理知

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

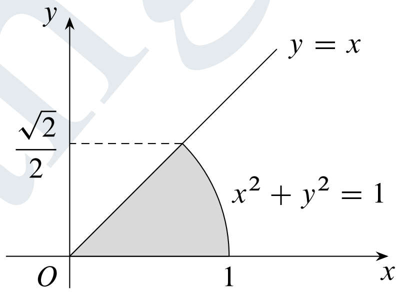
于是 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>f'(x_0)\Delta x>0, \Delta x>0$, 即 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$, 选 A.

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于 (　)

A. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$　B. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　D. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$

✎ **解:** 如图所示, 积分区域是一个 $Y$ 型区域, 则原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, 选 C.




第 8 题图

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则级数 (　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

✎ **解:** 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛, 选 D. 而 A, B, C 均可取反例 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

10.设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

✎ **解:** 令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 并记对应 $x_0,y_0$ 的参数 $\lambda$ 的值为 $\lambda_0$, 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ F'_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \end{cases},\quad \text{即}\quad \begin{cases} f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases},$$

那么当 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 必有 $\lambda_0\neq 0, \varphi'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 消去 $\lambda_0$ 得

$$f'_x(x_0,y_0)\varphi'_y(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)=0,$$

注意到 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 于是 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$, 选 D.

11.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 $n$ 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关

✎ **解:** 注意到 $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s,$$

因此 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关, 选 A.

12.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 $-1$ 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$ C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$

✎ **解:** 由初等变换与初等矩阵之间的关系可知

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{PAP}^{-1},$$

因此选 B.

13.设 $A,B$ 为随机事件, 且 $P(B)=0, P(A|B)=1$, 则必有 ( )

A. $P(A\cup B)>P(A)$ B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$ D. $P(A\cup B)=P(B)$

✎ **解:** 由 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$ 得 $P(AB)=P(B)$, 则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$, 选 C.

14.设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y$ 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 $P\left(|X-\mu_1|<1\right)>P\left(|Y-\mu_2|<1\right)$, 则必有 ( )

A. $\sigma_1<\sigma_2$ B. $\sigma_1>\sigma_2$ C. $\mu_1<\mu_2$ D. $\mu_1>\mu_2$

✎ **解:** 将 $X,Y$ 标准化, 则 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$, $\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(0,1)$, 那么

$$P\left(|X-\mu_1|<1\right)=P\left(\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right)=\varPhi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\varPhi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\varPhi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1,$$
$$P\left(|Y-\mu_2|<1\right)=2\varPhi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1.$$

因此 $P\left(|X-\mu_1|<1\right)>P\left(|Y-\mu_2|<1\right)\Rightarrow\varPhi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)>\varPhi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$, 所以 $\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1<\sigma_2$, 选 A.

## 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$, 计算二重积分 $I=\displaystyle\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称, 因此 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$, 于是

$$I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

16.(本题满分 12 分)

设数列 $x_n$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

✎ **解:** (1) 因为 $x_2=\sin x_1\in(0,1]$, 那么归纳可知当 $n\geqslant 2$ 时, 均有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在. 在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 中令 $n\to\infty$ 可得 $a=\sin a$, 此方程的唯一解为 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 令 $t=x_n\to 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\exp\left(\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\exp\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t-t}{t}+1\right)\right]\\&=\exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 $x$ 的幂级数.

✎ **解:**

$$f(x)=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{2}{3(2-x)}-\frac{1}{3(1+x)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n}+(-1)^{n+1}\right]x^n,\qquad |x|<1.$$

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足中等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(2) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

✎ **解:** (1) 令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, 由复合函数偏导数公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$
$$=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 以及 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(2) 令 $f'(u)=p$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=-\dfrac{p}{u}$, 解得 $\ln|p|=\ln\left|\dfrac{C}{u}\right|$, 所以 $f'(u)=p=\dfrac{C}{u}$. 由 $f'(1)=1$ 知 $C=1$, 于是 $f(u)=\ln u+C_2, u>0$. 再由 $f(1)=0$ 知 $C_2=0$, 于是 $f(u)=\ln u, u>0$.

19.(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内, 函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明: 对 $D$ 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 $L$, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

☛ **证明:** 等式 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 $t$ 求导得

$$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y),$$

令 $t=1$, 则

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y). \tag{$*$}$$

令 $P=yf(x,y), Q=-xf(x,y)$, 由 $(*)$ 式得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-f(x,y)-xf'_x(x,y)-[f(x,y)+yf'_y(x,y)]=0,$$

即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 因此对 $D$ 内任意分段光滑的有向简单闭曲线 $L$, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x-xf(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

20.(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ ax_1+x_2+3x_2+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 $a,b$ 的值及方程组的通解.

**解:** (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组的三个线性无关的解, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解, 因此 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$, 即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 又显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式不为 0, 又有 $r(A)\geqslant 2$, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 对增广矩阵进行初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&a+1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{array}\right).$$

由题设和第一问知, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$, 则

$$4-2a=b+4a-5=0\Rightarrow a=2, b=-3.$$

此时 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, $\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=(4,-5,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2, k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

21.(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

✎ **解:** (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 即有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 3 的特征向量. 又根据题意, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3,0,0$.

特征值 $\lambda=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}},k\neq 0$;

特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}},k_1,k_2$ 不全为零.

(2) 先对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 进行斯密特正交化,

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

22.(本题满分 9 分)

随机变量 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$, 令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数, 求:

(1) $Y$ 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

✎ **解:** (1) $Y$ 的分布函数为 $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y)$. 当 $y \leqslant 0$ 时, $F_Y(y) = 0$. 当 $0 < y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leqslant X < 0) + P(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{4}\sqrt{y} = \frac{3}{4}\sqrt{y}. \end{aligned}$$

当 $y \geqslant 4$ 时, $F_Y(y) = 1$, 因此 $Y$ 的概率密度 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leqslant y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2)

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) &= P\left(X \leqslant -\frac{1}{2}, Y \leqslant 4\right) = P\left(X \leqslant -\frac{1}{2}, X^2 \leqslant 4\right) \\ &= P\left(X \leqslant -\frac{1}{2}, -2 \leqslant X \leqslant 2\right) = P\left(-2 \leqslant X \leqslant -\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

23.(本题满分 9 分)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1-\theta, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta$ 是未知参数 $(0 < \theta < 1)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本, 记 $N$ 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中小于 1 的个数, 求 $\theta$ 的最大似然估计.

✎ **解:** 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N},$$

取对数得 $\ln L(\theta) = N \ln\theta + (n-N)\ln(1-\theta)$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0,$$

解得 $\theta = \frac{N}{n}$, 因此 $\theta$ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

# 第 2 章 2007 年考研数学一

**一、选择题, 1 ～ 10 题, 每题 4 分, 共 40 分.**

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ( )

A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

**解:** 当 $x \to 0^+$ 时,

$$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = -\sqrt{x}, \ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1+1\right) \sim \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}-1 = \frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x.$$

因此选 B.

2. 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

**解:** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x) = \infty$, 所以 $x=0$ 为垂直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+\mathrm{e}^x) = 0$, 所以 $y=0$ 为水平渐近线. 又

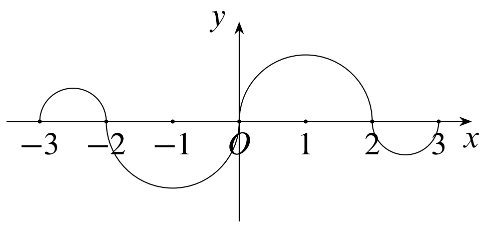
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1.$$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\mathrm{e}^x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0,\end{aligned}$$

所以有斜渐近线 $y=x$, 选 D.

3. 如图, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$, $[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0]$, $[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是 ( )

A. $F(3) = -\dfrac{3}{4}F(-2)$　　B. $F(3) = \dfrac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3) = \dfrac{3}{4}F(2)$　　D. $F(-3) = -\dfrac{5}{4}F(-2)$




第 3 题图

**解:** 根据定积分的几何意义知, $F(2)$ 是半径为 1 的半圆面积, $F(2) = \dfrac{1}{2}\pi$, $F(3)$ 是两个半圆

的面积之差, $F(3)=\frac{1}{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}F(2)$,

$$F(-3)=\int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=F(3),$$

因此选 C.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)=0$

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

✎ **解:** A, B 两项中分母的极限均为 0, 因此分子的极限也为 0, 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则

$$f(0)=0,\ f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x},$$

因此 C 正确. 可举反例 $f(x)=|x|$ 说明 D 选项错误, 选 D.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n), n=1,2,\cdots$, 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

✎ **解:** 如果 $u_2>u_1$, 即 $f(2)>f(1)$, 由于 $f''(x)>0$, 那么 $f'(x)$ 单调递增, 对任意正整数 $n$,

$$f(n+2)-f(n+1)=f'(\xi_1)>f'(\xi_2)>f(n+1)-f(n),$$

因此 $f(n)$ 单调递增, 且 $f'(x)>f(2)-f(1), x\geqslant 2$, 那么

$$f(n)-f(2)=f'(\xi)(n-2)>[f(2)-f(1)](n-2),$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=+\infty$, 即 $\{u_n\}$ 发散, 选 D. 对于 A 和 B 可分别取 $f(n)=n^2$ 和 $f(n)=\dfrac{1}{n}$ 作为反例.

6. 设曲线 $L: f(x,y)=1$ ( $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数) 过第二象限内的点 $M$ 和第四象限内的点 $N$, $\Gamma$ 为 $L$ 上从点 $M$ 到 $N$ 的一段弧, 则下列小于零的是 ( )

A. $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}x$

B. $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s$

D. $\int_\Gamma f_x'(x,y)\,\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\,\mathrm{d}y$

7. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

✎ **解:** 不难知 A 中三个向量的和为 $\mathbf{0}$, 因此选 A. B 选项中的向量是线性无关的, 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 不可逆, 因此 B 中的向量线性无关, 类似可得 C, D 也线性无关.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ ( )

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

✎ **解:** 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,3,3$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $0,1,1$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同而不相似, 选 B.

9. 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p\,(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ( )

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$　　C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

✎ **解:** "第 4 次射击恰好第 2 次命中" 表示第 4 次射击命中目标, 前 3 次中只有 1 次命中目标, 因此所求的概率为 $\mathrm{C}_3^1p^2(1-p)^2=3p^2(1-p)^2$, 选 C.

10. 设随机变量 $(X,Y)$ 服从二维正态分布, 且 $X$ 与 $Y$ 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 $X,Y$ 的概率密度, 则在 $Y=y$ 的条件下, $X$ 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ( )

A. $f_X(x)$　　B. $f_Y(y)$　　C. $f_X(x)f_Y(y)$　　D. $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

✎ **解:** 因为 $(X,Y)$ 服从二维正态分布, 且 $X$ 与 $Y$ 不相关, 故 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 于是 $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$, 因此选 A.

**二、填空题, 11 ~ 16 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

11. $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:** $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac12}^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=(t-1)\mathrm{e}^t\Big|_{\frac12}^1=\frac12\mathrm{e}^{\frac12}.$

12.设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f(x^y,y^x)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

✎ **解:** 由复合函数的偏导数公式得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot yx^{y-1}+f_2'\cdot y^x\ln y$.

13.二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

✎ **解:** 齐次方程 $y''-4y'+3y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$, 特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$, 因此齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$. 设非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为 $y^*=k\mathrm{e}^{2x}$, 代入可得 $k=-2$, 因此原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

14.设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 则 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\,\mathrm{d}S=$________.

✎ **解:** 曲面关于 $yOz$ 面对称, 因此 $\displaystyle\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0$. 曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$ 满足轮换对称性, 于是

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}(x+|y|)\,\mathrm{d}S&=\oiint_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}|z|\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}|z|\,\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

15.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

✎ **解:** 直接计算可得 $\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 故 $r(\boldsymbol{A}^3)=1$.

16.在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

✎ **解:** 这是一个几何概型, 设 $x,y$ 为所取的两个数, 则样本空间 $\Omega=\{(x,y)|0<x,y<1\}$, 记

$$A=\left\{(x,y)\in\Omega,|x-y|<\frac{1}{2}\right\}.$$

于是所求概率为 $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{3}{4}$, 其中 $S_A,S_\Omega$ 分别表示 $A$ 与 $\Omega$ 的面积.

## 三、解答题, 17 ~ 24 题, 共 86 分.

17.(本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

✎ **解:** 在区域 $D$ 内, 令 $\begin{cases} f'_x=2x-2x^2y=0 \\ f'_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$, 得开区域内的可能极值点为 $\left(\pm\sqrt{2},1\right)$, 其对应的函数值为 $f\left(\pm\sqrt{2},1\right)=2$.

由当 $y=0$ 时, $f(x,y)=x^2$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的最大值为 4, 最小值为 0.

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$ 时, 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

得可能的极值点为 $(0,2)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, 其对应函数的值为 $f(0,2)=8$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$. 比较以上各个函数值, 可知 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 上的最大值为 8, 最小值为 0.

18.(**本题满分 10 分**)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma$ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

✎ **解:** 补充曲面 $\Sigma_1: x^2+\frac{y^2}{4}=1, z=0$, 取下侧, 则

$$\begin{aligned} I&=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_1}3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint\limits_{D}3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

其中 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 所围成的空间区域, $D$ 为平面区域 $x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1$. 由于区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称, 因此 $\iint\limits_{D}3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$. 于是

$$I=3\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\int_0^1 z\cdot 2\pi(1-z)\,\mathrm{d}z=\pi.$$

其中 $D_z: x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1-z$.

19.(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内具有二阶导数存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

**证明:** 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 由题意有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x), g(x)$ 在 $(a,b)$ 内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1\leqslant x_2, x_1, x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]}, g(x_2)=M=\max_{x\in[a,b]} g(x).$$

若 $x_1=x_2$, 令 $c=x_1$, 则 $F(c)=0$.

若 $x_1<x_2$, 因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$, 从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$, 使得 $F(c)=0$.

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知, 存在 $\xi_1\in(a,c), \xi_2\in(c,b)$, 使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 有 $F''(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$$

(1) 证明: $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$;

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

**解:** (1) 记 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$
$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

代入 $y''-2xy'-4y=0$ 得

$$\begin{aligned}y''-2xy'-4y&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n]x^n=0.\end{aligned}$$

因此 $(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n=0$, 即 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$.

(2) 由初值条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 知 $a_0=0, a_1=1$, 那么由递推关系可得

$$a_{2n}=0, a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{1}{n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{1}{n!}a_1=\frac{1}{n!}.$$

因此

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=xe^{x^2}.$$

21.(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\tag{2}$$

有公共解, 求 $a$ 的值及所有公共解.

**解:** 因为方程组 (??)、(??) 有公共解, 将 (??)、(??) 联立组成方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}.\tag{3}$$

此非齐次线性方程组的解即为所求的公共解. 对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变换得

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-2)(a-1)&0\\0&0&1-a&a-1\end{pmatrix}.$$

于是当 $a=1$ 时, 有 $r(A)=r(\bar{A})=2<3$, 方程组 (??) 有解, 此时

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组是齐次的, 基础解系为 $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 所以 (??)、(??) 的公共解为 $k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}, k\in\mathbb{R}$.

当 $a=2$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组 (??) 有唯一解, 此时

$$\overline{\boldsymbol{A}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程 (??) 的解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 即 (??)、(??) 的公共解为 $(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1$ 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

**解:** (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$ 得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 故

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $-2$ 的特征向量.

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{E}$, 及 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$, 得 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个特征值为 $\mu_1=-2, \mu_2=1, \mu_3=1$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的两个线性无关的特征向量, 又 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}$ 也为对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 正交, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0, \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解:

$$(1,-1,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0.$$

其基础解系为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}, (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征向量为 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}}, k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k_1 \neq 0, k_2, k_3$ 不全为零.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 求 $P(X > 2Y)$;

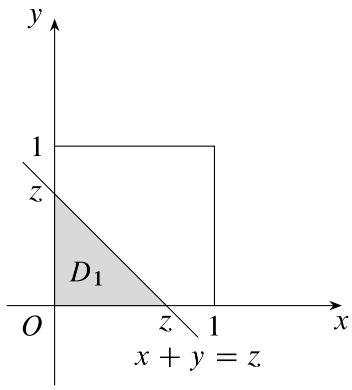
(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

✎ **解:** (1) $P(X > 2Y) = \iint\limits_{x>2y} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{2y}^{1} (2 - x - y)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{24}$.

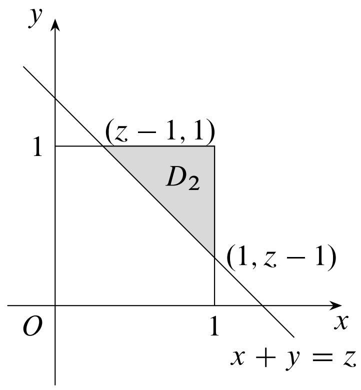
(2) 先求 $Z$ 的分布函数:

$$F_Z(z) = P(X + Y \leqslant z) = \iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;




$0 \leqslant z < 1$




$1 \leqslant z < 2$

当 $0 \leqslant z < 1$ 时, $F_Z(z) = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{z} \mathrm{d}y \int_0^{z-y} (2 - x - y)\,\mathrm{d}x = z^2 - \frac{1}{3}z^3$;

当 $1 \leqslant z < 2$ 时, $F_Z(z) = 1 - \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 - \int_{z-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{z-y}^{1} (2 - x - y)\,\mathrm{d}x =$
$1 - \frac{1}{3}(2 - z)^3$;

当 $z \geqslant 2$ 时, $F_Z(z) = 1$. 故 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ (2 - z)^2, & 1 \leqslant z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

24.(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1\,,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中参数 $\theta\,(0<\theta<1)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 $\theta^2$ 的无偏估计量, 并说明理由.

**解:** (1) 总体均值

$$E(X)=\int_0^\theta \frac{x}{2\theta}\,\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta}{4}+\frac{1}{4}(1+\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}.$$

样本均值为 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 令 $\bar{X}=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{3}$, 解得 $\theta=2\bar{X}-\dfrac{1}{2}$, 即 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\bar{X}-\dfrac{1}{2}$.

(2) $E(4\bar{X}^2)=4E(\bar{X}^2)=4\big[D(\bar{X})+(E\bar{X})^2\big]=4\left[\dfrac{D(X)}{n}+(EX)^2\right]$, 而

$$E(X^2)=\int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta}\,\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6},$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{12}\theta^2-\frac{1}{12}\theta+\frac{5}{48}.$$

故 $E(4\bar{X}^2)=4\left(\dfrac{D(X)}{n}+(EX)^2\right)=\dfrac{3n+1}{3n}\theta^2+\dfrac{3n-1}{3n}\theta+\dfrac{3n+5}{12n}\neq\theta^2$, 所以 $4\bar{X}^2$ 不是 $\theta^2$ 的无偏估计量.

# 第 3 章 2008 年考研数学一

一、选择题, 1 ∼ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\,\mathrm{d}t$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

✎ **解:** 求导可得 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)$, 则 $f'(x)$ 的零点只有一个 $x=0$, 选 B.

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于 ( )

A. $\boldsymbol{i}$　　B. $-\boldsymbol{i}$　　C. $\boldsymbol{j}$　　D. $-\boldsymbol{j}$

✎ **解:** 直接计算偏导数可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 于是 $\mathbf{grad}\, f(x,y)\big|_{(0,1)}=f_x'(0,1)\boldsymbol{i}+f_y'(0,1)\boldsymbol{j}=1\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$, 选 A.

3. 在下列微分方程中, 以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ ($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数) 为通解的是 ( )

A. $y'''+y''-4y'-4y=0$　　B. $y'''+y''+4y'+4y=0$

C. $y'''-y''-4y'+4y=0$　　D. $y'''-y''+4y'-4y=0$

✎ **解:** 从通解形式可知微分方程的特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2\mathrm{i}$. 因此对应的特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$, 故对应的微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$, 选 D.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ( )

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛　　D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

✎ **解:** 对 B 选项, 因为数列 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界, 所以数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 由单调有界准则知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛. A 选项可取反例 $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2+x^2}, & x\geqslant 0\\ -1-\dfrac{1}{2+x^2}, & x<0\end{cases}$, $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, C 和 D 选项可取反例 $f(x)=\arctan x$, $x_n=n$, 选 B.

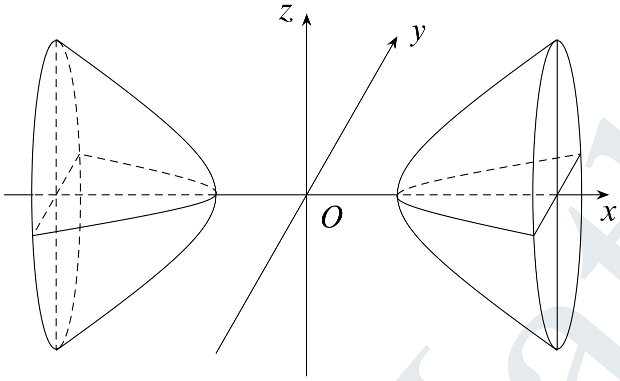
5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

✎ **解:** 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda$ 满足 $\lambda^3=0$, 即 $\lambda=0$. 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均为 1, 都可逆, 选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x, y, z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为 ( )




第 6 题图

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

✎ **解:** 所给曲面是双叶双曲面, 其标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 因此二次型的标准形中, 正的平方项有 1 个, 负的平方项有 2 个, 即正特征值只有 1 个, 选 B.

7. 设随机变量 $X, Y$ 独立同分布, 且 $X$ 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ( )

A. $F^2(x)$ B. $F(x)F(y)$

C. $1 - [1 - F(x)]^2$ D. $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

✎ **解:** 由分布函数的定义可得 $Z$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leqslant x) = P\big(\max\{X, Y\} \leqslant x\big) = P(X \leqslant x, Y \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant x)P(Y \leqslant x) = F(x)F(x) = F^2(x), \end{aligned}$$

选 A.

8. 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ( )

A. $P\{Y = -2X - 1\} = 1$ B. $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

C. $P\{Y = -2X + 1\} = 1$ D. $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

✎ **解:** 由于 $X, Y$ 都服从正态分布, 且 $\rho_{XY} = 1$, 所以一定存在常数 $a, b$ 使得 $P(Y = aX + b) = 1$, 且 $a > 0$. 那么有 $E(Y) = aE(X) + b$, 即 $1 = 0 + b, b = 1$. 再由 $4 = D(Y) = a^2 D(X) = a^2$ 可知 $a = 2$, 选 D.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

✎ **解:** 由 $xy'+y=(xy)'=0$ 知 $xy=C$, 代入 $y(1)=1$ 知 $C=1$, 所以方程的解为 $y=\dfrac{1}{x}$.

10. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

✎ **解:** 原方程两边对 $x$ 求导得 $\cos(xy)(y+xy')+\dfrac{y'-1}{y-x}=1$, 代入 $x=0, y=1$ 得 $y'(0)=1$, 因此曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

11. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

✎ **解:** 由条件知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处收敛, 在 $x=-2$ 处发散, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 2, 收敛域为 $(-2,2]$, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$.

12. 设曲面 $\Sigma$ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

✎ **解:** 补充曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4\\ z=0\end{cases}$, 取下侧, 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$, 由 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 包围的有界区域为 $\Omega$, 则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=4\pi.\end{aligned}$$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

✎ **解:** 由题意得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$. 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$ 相似, $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1.

14. 设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X=EX^2\}=$________.

✎ **解:** 因为 $X\sim P(1)$, 所以 $EX=DX=1$, 于是 $EX^2=(EX)^2+DX=2$, $P(X=EX^2)=P(X=2)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

✎ **解:** 利用等价无穷小可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\sin x}{\sin^4 x}=\frac{1}{6}.$$

16.(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$, 其中 $L$ 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

✎ **解:** 由条件可得

$$\begin{aligned}\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2\left(x^2-1\right)y\mathrm{d}y&=\int_0^\pi\left[\sin 2x+2\left(x^2-1\right)\sin x\cos x\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi x^2\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi x\cos 2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$, 求 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点.

✎ **解:** 设 $P(x,y,z)$ 为曲线 $C$ 上任意一点, 则点 $P$ 到 $xOy$ 面的距离为 $|z|$, 即原题化为求 $z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0, x+y+3z=5$ 下的最值点. 令

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$

解方程

$$\begin{cases}F'_x=2\lambda x+\mu=0\\F'_y=2\lambda y+\mu=0\\F'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0\\F_\lambda=x^2+y^2=-2z^2=0\\F'_\mu=x+y+3z-5=0\end{cases}$$

可得 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 或 $(-5,-5,5)$. 因此曲线 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点是 $(-5,-5,5)$, 最近的点是 $(1,1,1)$.

18.(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

**证明:** (1) 对任意的 $x$, 由于函数 $f(x)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}\quad(\text{积分中值定理})\\&=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).\end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$.

(2) 令 $g(x)=G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$g'(x)=2f(x+2)-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0,$$

因此 $g(x)$ 为常函数, $g(x)=g(0)=2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=0$, 即 $G(x+2)=G(x)$, 这说明 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

19.(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

**解:** 把 $f(x)$ 作偶延拓以后再作周期为 $2\pi$ 的周期延拓得到的函数是连续的偶函数, 其余弦级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$. 对 $n=1,2,\cdots$ 有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi\left(1-x^2\right)\mathrm{d}(\sin nx)\\&=\frac{2}{n\pi}\left[\left(1-x^2\right)\sin nx\Big|_0^\pi+\int_0^\pi 2x\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}(\cos nx)\\&=-\frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.\end{aligned}$$

而 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\,\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$, 所以 $f(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$. 令 $x=0$ 得 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}=1$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

20.(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) 秩 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则秩 $r(\boldsymbol{A}) < 2$.

☛ **证明:** (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均为 3 维列向量, 所以 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 都是 3 阶矩阵, 且 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1, r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1$, 因此 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 2$.

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\beta}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = r\big((1+k^2)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\big) = r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1 < 2$.

21.(**本题满分 12 分**)

设 $n$ 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$;

(2) 当 $a$ 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 $x_1$;

(3) 当 $a$ 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求其通解.

✎ **解:** (1) 从第 2 行开始, 第 $k$ 行减去上一行的 $\dfrac{k}{k+1}$ 倍, $k = 2, 3, \cdots, n$, 可得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n}{n-1}a \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)\,a^n.$$

(2) 由克拉默法则知当 $a \neq 0$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 此时方程组有唯一解, 且 $x_1 = \dfrac{D_{n-1}}{D_n} = \dfrac{n}{(n+1)a}$.

(3) 当 $a = 0$ 时, 容易得到 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n - 1$, 方程组有无穷多解, 此时的通解为 $\boldsymbol{x} = (0, 1, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}} + k(1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, k \in \mathbb{R}$.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, $X$ 的概率分布为 $P(X = i) = \dfrac{1}{3}\ (i = -1, 0, 1)$, $Y$ 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$, 记 $Z = X + Y$.

(1) 求 $P\left(Z \leqslant \frac{1}{2} \middle| X=0\right)$;

(2) 求 $Z$ 的概率密度.

✎ **解:** (1)

$$P\left(Z \leqslant \frac{1}{2} \middle| X=0\right) = P\left(X+Y \leqslant \frac{1}{2} \middle| X=0\right) = P\left(Y \leqslant \frac{1}{2} \middle| X=0\right) = P\left(Y=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) $Z$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X+Y \leqslant z)\\
&= P(X+Y \leqslant z, X=-1) + P(X+Y \leqslant z, X=0) + P(X+Y \leqslant z, X=1)\\
&= P(Y \leqslant z+1, X=-1) + P(Y \leqslant z, X=0) + P(Y \leqslant z-1, X=1)\\
&= P(Y \leqslant z+1)P(X=-1) + P(Y \leqslant z)P(X=0) + P(Y \leqslant z-1)P(X=1)\\
&= \frac{1}{3}\left[P(Y \leqslant z-1) + P(y \leqslant z) + P(Y \leqslant z-1)\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)\right],
\end{aligned}$$

于是 $Z$ 的概率密度为 $f_Z(z)=F'_Z(z)=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1 \leqslant z \leqslant 2\\ 0, & 其他\end{cases}.$

23.(**本题满分** 11 **分**)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2, T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(1) 证明 $T$ 是 $\mu^2$ 的无偏估计量;

(2) 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 求 $DT$.

✎ **解:** (1) 因为

$$\begin{aligned}
E(T) &= E\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right) = E\left(\bar{X}^2\right)-\frac{1}{n}E\left(S^2\right)\\
&= \left(E\bar{X}\right)^2 + D\left(\bar{X}\right) - \frac{1}{n}E\left(S^2\right) = \mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2,
\end{aligned}$$

所以 $T$ 是 $\mu^2$ 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 由于 $\bar{X}$ 与 $S^2$ 独立, 则有

$$\begin{aligned}
DT &= D\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right) = D\left(\bar{X}^2\right)+\frac{1}{n^2}D\left(S^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\bar{X}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

# 第 4 章  2009 年考研数学一

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 (　　)

   A. $a = 1, b = -\frac{1}{6}$　　　B. $a = 1, b = \frac{1}{6}$

   C. $a = -1, b = -\frac{1}{6}$　　　D. $a = -1, b = \frac{1}{6}$

✎ **解:** 首先当 $x \to 0$ 时, $g(x) = x^2 \ln(1-bx) \sim -bx^3$, 利用泰勒公式得

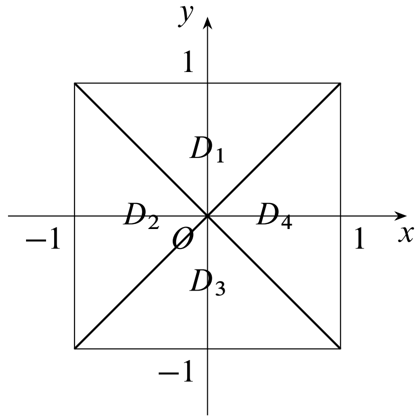
$$f(x) = x - \sin ax = x - \left(ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) = (1-a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o\left(x^3\right),$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小知 $\begin{cases} 1-a=0 \\ \frac{a^3}{6} = -b \end{cases}$, 因此 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$, 选 A.

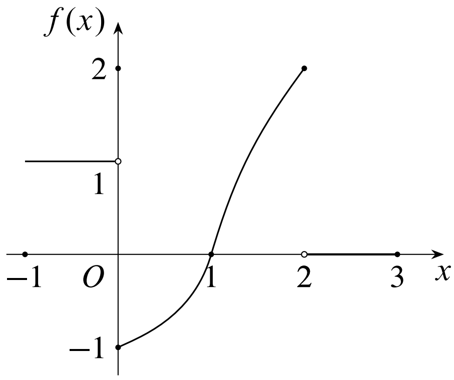
2. 如图所示, 正方形 $\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k = 1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_D y \cos x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 4} I_k =$ (　　)

   A. $I_1$　　　B. $I_2$　　　C. $I_3$　　　D. $I_4$

✎ **解:** 被积函数关于 $y$ 为奇函数, 而 $D_2, D_4$ 关于 $x$ 轴对称, 因此 $I_2 = I_4 = 0$. 当 $(x,y) \in D_1$ 时, $y\cos x > 0$, 当 $(x,y) \in D_3$ 时, $y \cos x < 0$, 因此 $I_1 > 0 > I_3$, 最大的是 $I_1$, 选 A.

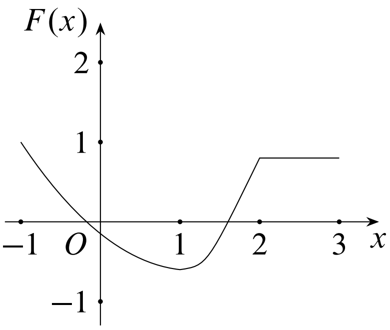


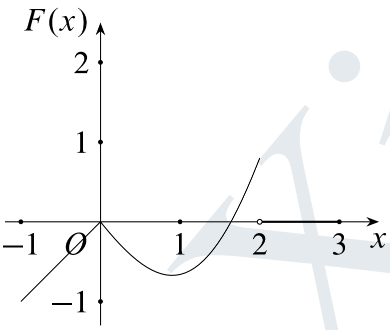

第 2 题图

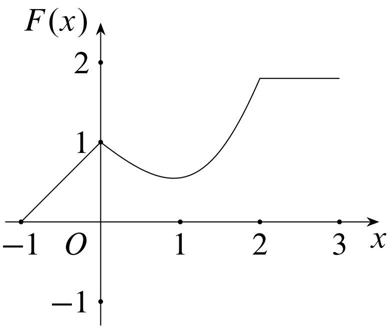


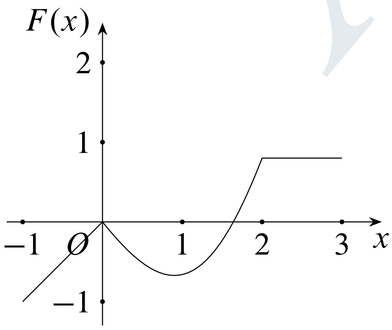

第 3 题图

3. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

✎ **解:** 首先 $F(x)$ 是连续函数, 排除 B 选项. 当 $-1 < x < 0$ 时, $F'(x) = f(x) = 1$, 且此时 $F(x) < 0$, 排除 A, C 选项, 选 D.

4. 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则 ( )

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛

D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

✎ **解:** A 选项不对, 反例可取 $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; B 选项和 D 选项不对, 反例可取 $a_n = 0, b_n = 1$; C 选项是对的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 于是当 $n$ 充分大时 $|a_n| < 1, |b_n| < 1$, 此时 $a_n^2 b_n^2 < |b_n|$, 由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛, 选 C.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

✎ **解:** 直接观察可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$, 因此选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ( )

A. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

✎ **解:** 由 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=6$ 知矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 可逆, 则

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&6\boldsymbol{B}^{-1}\\6\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

7. 设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X)=$ ( )

A. 0 B. 0.3 C. 0.7 D. 1

✎ **解:** $X$ 的概率密度为 $f(x)=F'(x)=0.3\varphi(x)+0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$, 其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 则

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\frac{0.7}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=0+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t=0.7,\end{aligned}$$

选 C.

8. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 且 $X$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$, $Y$ 的概率分布为 $P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

✎ **解:** $Z$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(Y=0)\,P(XY\leqslant z\,|Y=0)+P(Y=1)\,P(XY\leqslant z\,|Y=1)\\&=\frac{1}{2}P(0\leqslant z\,|Y=0)+\frac{1}{2}P(X\leqslant z\,|Y=1)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}P(0\leqslant z)+\frac{1}{2}P(X\leqslant z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(z), & z<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z), & z\geqslant 0\end{cases}$$

因此 $F_Z(z)$ 在 $z=0$ 处有一个跳跃间断点, 选 B.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

✎ **解:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x,xy)+yf_2'(x,xy)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf_{12}''(x,xy)+f_2'(x,xy)+xyf_{22}''(x,xy)$.

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

✎ **解:** 由齐次方程的通解形式可知 $\lambda=1$ 是特征方程的二重特征根, 因此齐次方程为 $y''-2y'+y=0$. 设非齐次方程 $y''-2y'+y=x$ 的一个特解为 $y^*=Ax+B$, 代入方程可得 $A=1, B=2$, 于是 $y^*=x+2$, 非齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2$. 由条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 得 $C_1=0, C_2=-1$, 故所求的特解为 $y=-x\mathrm{e}^x+x+2$.

11. 已知曲线 $L: y=x^2\left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\right)$, 则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$________.

✎ **解:** 利用一型曲线积分公式得

$$\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

12. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, 则 $\displaystyle\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

✎ **解:** 记 $D_z$ 表示平面 $z=z$ 与区域 $\Omega$ 相交所得平面区域, 利用切片法可得原积分

$$I=\int_{-1}^{1}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\pi z^2\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi.$$

13. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

✎ **解:** $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=2$.

**注:** 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以互乘时, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$, 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的所有非零特征值及其重数都相同.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 $S^2$ 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X}+kS^2$ 为 $np^2$ 的无偏估计量, 则 $k=$________.

✎ **解:** 由条件得 $E(\bar{X})=np, E(S^2)=np(1-p)$, 所以 $E(\bar{X}+kS^2)=np^2$ 可得 $np+knp(1-p)=np^2, k=-1$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

✎ **解:** 令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=2x(2+y^2)=0 \\ f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$, 解得唯一驻点为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 由于

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2(2+y^2)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right),$$
$$B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=0,$$
$$C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{(0,\frac{1}{\mathrm{e}})}=\mathrm{e},$$

所以 $AC-B^2=-2\mathrm{e}\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$, 且 $A>0$, 所以 $f(x,y)$ 的唯一极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

16.(本题满分 9 分)

设 $a_n$ 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 $S_1$ 与 $S_2$ 的值.

✎ **解:** 曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

于是

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2},$$
$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\ln 2.$$

17.(本题满分 11 分)

设椭球面 $S_1$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 $x$ 轴旋转而成, 圆锥面 $S_2$ 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 $x$ 轴旋转而成.

(1) 求 $S_1$ 及 $S_2$ 的方程;

(2) 求 $S_1$ 与 $S_2$ 之间立体的体积.

✎ **解:** (1) $S_1$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$. 过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线方程为 $y=\pm\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)$, 所以 $S_2$ 的方程为 $y^2+z^2=\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)^2$.

(2) 记 $y_1=\frac{1}{2}x-2$, 由 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 记 $y_2=\sqrt{3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$, 则 $S_1$ 与 $S_2$ 之间立体的体积为

$$
\begin{aligned}
V&=\int_1^4 \pi y_1^2\mathrm{d}x-\int_1^2 \pi y_2^2\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_1^4\left(\frac{1}{4}x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x-\pi\int_1^2\left(3-\frac{3}{4}x^2\right)\mathrm{d}x=\pi.
\end{aligned}
$$

18.(**本题满分 11 分**)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

☛ **证明:** (1) 令 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 则

$$
\begin{aligned}
F(b)-F(a)&=\left(f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b\right)-\left(f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a\right)\\
&=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0,
\end{aligned}
$$

因此由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 利用导数的定义与拉格朗日中值定理得

$$
f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xf'(\xi)}{x}=\lim_{\xi\to0}f'(\xi)=A.
$$

**注:** 本题第二问的结论叫做导函数极限定理, 它还可以用洛必达法则得出.

19.(**本题满分 10 分**)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 $\Sigma$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

✎ **解:** 记 $P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, 则原积分为 $I=\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, 那么利用对称性得

$$
\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{y^2+z^2-2x^2+x^2+z^2-2y^2+x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0.
$$

记曲面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=r^2, r$ 充分小使得 $\Sigma_1$ 包含在 $\Sigma$ 内, 方向取外侧. 那么由高斯公式可知

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

记 $\Sigma_1$ 包围的有界闭区域为 $\Omega$, 则

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \oiint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{r^3}\oiint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{r^3}\oiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}V=\frac{3}{r^3}\cdot\frac{4\pi r^3}{3}=4\pi.\end{aligned}$$

20.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

✎ **解:** (1) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}$, 从而 $\xi_2=(-k,k,1-2k)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数.

$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$, 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是方程组 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 的通解为 $x_1=-\frac{1}{2}-u, x_2=u, x_3=v$, 即 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-u,u,v\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 $u,v$ 为任意常数.

(2) 对任意的常数 $k, u, v$ 有

$$|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

因此对任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$, 恒有 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

21.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 $a$ 的值.

✎ **解:** (1) 二次型 $f$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$, 由于

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)\big(\lambda - (a+1)\big)\big(\lambda - (a-2)\big),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(2) 因为二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为两正一零, 显然 $a - 2 < a < a + 1$, 因此必有 $a = 2$.

22.(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 $X, Y, Z$ 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P(X = 1|Z = 0)$;

(2) 求二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率分布.

✎ **解:** (1) $P(X = 1|Z = 0) = \dfrac{P(X = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \dfrac{\mathrm{C}_2^1 \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{9}$.

(2) 由题意知 $X, Y$ 的所有可能取值均为 0, 1, 2.

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}, \quad P(X = 0, Y = 1) = 2 \times \frac{2}{6} \times 36 = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad P(X = 1, Y = 0) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 2, Y = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = 0.$$

因此 $(X, Y)$ 的概率分布为

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 |

23.(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中参数 $\lambda\,(\lambda>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求参数 $\lambda$ 的矩估计量;

(2) 求参数 $\lambda$ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 总体均值 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda}$, 令 $\overline{X}=E(X)$, 即 $\overline{X}=\frac{2}{\lambda}$, 得 $\lambda=\frac{2}{\overline{X}}$, 即 $\lambda$ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1=\frac{2}{\overline{X}}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\begin{cases}\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i}\prod\limits_{i=1}^n x_i, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, 取对数得 $\ln L=2n\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^n x_i+\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i$, 由 $\frac{\mathrm{d}\,(\ln L)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^n x_i=0$ 得 $\lambda=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{2}{\overline{x}}$, 即 $\lambda$ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\frac{2}{\overline{X}}$.

# 第 5 章 2010 年考研数学一

## 一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ ( )

A. 1　　B. e　　C. $e^{a-b}$　　D. $e^{b-a}$

✎ **解:** 先取倒数和对数得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{(x-a)(x+b)}{x^2}\right)&=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x^2+(b-a)x-ab}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{(b-a)x-ab}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}x\frac{(b-a)x-ab}{x^2}\\&=b-a,\end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{a-b}$, 选 C.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 $F$ 为可微函数, 且 $F_2'\neq0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

A. $x$　　B. $z$　　C. $-x$　　D. $-z$

✎ **解:** 方程两边分别关于 $x$ 和 $y$ 求偏导得 $\begin{cases}F_1'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\left(-\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0\\F_1'\cdot\dfrac{1}{x}+F_2'\cdot\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$, 于是解得 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yF_1'}{xF_2'}+\dfrac{z}{x}\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}\end{cases}$, 因此 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, 选 B.

3. 设 $m,n$ 是正整数, 则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性 ( )

A. 仅与 $m$ 的取值有关　　B. 仅与 $n$ 的取值有关

C. 与 $m,n$ 的取值都有关　　D. 与 $m,n$ 的取值都无关

✎ **解:** 任取 $c\in(0,1)$, 原反常积分 $I=\displaystyle\int_0^c\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_c^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

对 $I_1$ 而言, $x=0$ 是瑕点, 当 $x\to0^+$ 时, $\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 而 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$, 所以 $\displaystyle\int_0^c\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$, 由比较判别法知 $I_1$ 收敛.

对 $I_2$ 而言, $x=1$ 是瑕点, 且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$, 积分 $\displaystyle\int_c^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 于是 $I_2$ 收敛, 所以原积分 $I$ 收敛, 与 $m,n$ 的取值都无关, 选 D.

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

B. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

D. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

✎ **解:**

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}\\
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\right)\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 $m$ 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则 ( )

A. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$

B. 秩 $r(\boldsymbol{A})=m$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

C. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=m$

D. 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$, 秩 $r(\boldsymbol{B})=n$

✎ **解:** 由题意有 $m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=m\leqslant n$, 同理 $r(\boldsymbol{B})=m\leqslant n$, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 $\lambda$ 必满足 $\lambda^2+\lambda=0$, 则 $\lambda=0$ 或 $-1$. 又 $r(\boldsymbol{A})=3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-1,-1,0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则它相似于 $\mathrm{diag}\{-1,-1,-1,0\}$, 选 D.

7. 设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 则 $P(X=1)=$ ( )

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　D. $1-\mathrm{e}^{-1}$

✎ **解:** $P(X=1)=F(1)-F(1^-)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$, 选 C.

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度, 则 $a,b$ 应满足 ( )

A. $2a+3b=4$　　B. $3a+2b=4$　　C. $a+b=1$　　D. $a+b=2$

✎ **解:** $f(x)$ 需要满足 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,\mathrm{d}x+b\int_0^3 f_2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=1$, 即 $2a+3b=4$, 选 A.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\\ y=\displaystyle\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

✎ **解:** 利用参数方程求导公式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\ln\left(1+t^2\right)}{-\mathrm{e}^{-t}}=-\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\mathrm{e}^t\frac{2t}{1+t^2}+\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)\right)\mathrm{e}^t,$$

于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$.

10. $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$ ________.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x&=2\int_0^{\pi}t^2\cos t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}t^2\,\mathrm{d}(\sin t)\\&=-2\int_0^{\pi}t\sin t\,\mathrm{d}t=-\pi\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=-4\pi.\end{aligned}$$

11. 已知曲线 $L$ 的方程为 $y=1-|x|\left(x\in[-1,1]\right)$, 起点是 $(-1,0)$, 终点是 $(1,0)$, 则曲线积分 $\displaystyle\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$ ________.

✎ **解:** $L$ 可分为两段 $l_1$ 和 $l_2$, 其中 $l_1: y=1+x, x:-1\to 0, l_2: y=1-x, x:0\to 1$, 故

$$I=\left(\int_{l_1}+\int_{l_2}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{0} \left[x(1+x)+x^2\right] \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left[x(1-x)-x^2\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \left(2x^2+x\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(x-2x^2\right) \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}
$$

12.设 $\Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$, 则 $\Omega$ 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$________.

✎ **解:** 利用切片法可得

$$
\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi z \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2},
$$

$$
\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 z\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi z^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{3},
$$

所以 $\bar{z} = \dfrac{2}{3}$.

13.设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$, 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$________.

✎ **解:** 由条件知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$, 对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 作初等行变换得

$$
(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

因此 $a = 6$.

14.设随机变量 $X$ 的概率分布为 $P(X=k) = \dfrac{C}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$, 则 $E(X^2) =$________.

✎ **解:** 根据概率分布的归一性得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{C}{k!} = C\mathrm{e} = 1$, 所以 $C = \mathrm{e}^{-1}$, 则 $X \sim P(1), E(X^2) = (EX)^2 + D(X) = 2$.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.**(本题满分 10 分)**

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

✎ **解:** 齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2\lambda = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 齐次方程的通解为 $Y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$. 非齐次项 $2x\mathrm{e}^x$ 的特解形式可设为 $y^* = x(ax+b)\mathrm{e}^x$, 于是 $(y^*)' = \left[ax^2 + (2a+b)x + b\right]\mathrm{e}^x, (y^*)'' = \left[ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b)\right]\mathrm{e}^x$, 代入原方程并约去 $\mathrm{e}^x$ 可得

$$
\left[ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b)\right] - 3\left[ax^2 + (2a+b)x + b\right] + 2\left(ax^2 + bx\right) = 2x,
$$

即 $-2ax + 2a - b = 2x$, 故 $a = -1, b = -2$, 所以 $y^* = -(x^2+2x)\mathrm{e}^x$, 原方程的通解为 $y = Y + y^* = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} - (x^2+2x)\mathrm{e}^x$.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

✎ **解:** $f(x)=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, $f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. 分析 $f'(x)$ 的零点及正负可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$, 极小值为 $f(-1)=f(1)=0$, 极大值为 $f(0)=\int_1^0(0-t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

17.(本题满分 10 分)

(1) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

✎ **解:** (1) 当 $0<t<1$ 时, $0<\ln(1+t)<t$, 所以 $|\ln t|\,[\ln(1+t)]^n<t^n\,|\ln t|$, 由定积分保序性可知 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $0<t<1$ 时, $0<\int_0^1|\ln t\ln^n(1+t)|\mathrm{d}t<\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$. 由分部积分得

$$\int_0^1|\ln t|\,t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2},$$

因此 $0<u_n<\frac{1}{(n+1)^2}$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

18.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

✎ **解:** 令 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)\,x^2}{2n+1}\right|=x^2<1$ 得 $-1<x<1$, 因此幂级数收敛半径为 1. 当 $x=\pm1$ 时, 根据莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛, 因此收敛域为 $[-1,1]$. 当 $x\in(-1,1)$ 时, 和函数

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)\\&=x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,t^{2n-2}\,\mathrm{d}t=x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=x\cdot\arctan x.\end{aligned}$$

由幂级数在收敛域内的连续性知 $S(-1)=S(1)=\lim\limits_{x\to1^+}S(x)$, 因此 $S(x)=x\arctan x, x\in[-1,1]$.

19.(本题满分 10 分)

设 $P$ 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点, 若 $S$ 在点 $P$ 处的切平面与 $xOy$ 面垂直, 求点 $P$ 的轨迹 $C$, 并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma$ 是椭球面 $S$ 位于曲线 $C$ 上方的部分.

✎ **解:** $P(x,y,z)$ 是曲面 $S$ 上任一点, $S$ 在 $P$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x,2y-z,2z-y)$, 而 $xOy$ 面的法向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 由题意知 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{k}$, 于是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=2z-y=0$, 于是 $P$ 的轨迹 $C$ 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\\ y=2z\end{cases}$.

记 $xOy$ 面的平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{3}{4}y^2\leqslant 1\right\}$, 曲面 $\Sigma$ 可表示为 $z=z(x,y),(x,y)\in D$, 在方程 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两边求全微分得 $2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=0$, 因此 $\mathrm{d}z=\dfrac{2x\mathrm{d}x+(2y-z)\mathrm{d}y}{y-2z}$, 故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y-2z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-z}{y-2z}$, 那么曲面 $\Sigma$ 的面微元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S&=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

则将曲面积分化为二重积分可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(x+\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.\end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 $\lambda,a$;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

✎ **解:** (1) 因为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$, 于是

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0,$$

因此 $\lambda = \pm 1$. 当 $\lambda = 1$ 时, $\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, 显然 $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$, 方程组无解, 因此 $\lambda = 1$ 舍去. 当 $\lambda = -1$ 时, 对 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的增广矩阵进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right),$$

因为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 所以 $a = -2$.

(2) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时, $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, 因此方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}} + k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k$ 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

**解:** (1) 二次型 $f$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 1, 0$, 于是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \mathrm{diag}\{1,1,0\}$, 且矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列就是属于特征值 0 的特征向量. 设 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量, 由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量互相正交, 则 $x_1 + x_3 = 0$, 解得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的两个正交的单位特征向量, 于是可取 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 此时有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \mathrm{diag}\{1,1,0\}$, 于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 1, 0$, 所以 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $2, 2, 1$, 且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x, y) = A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 $A$ 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

✎ **解:** $X$ 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y \\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y-x)^2-x^2}\mathrm{d}y = A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y = A\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}, \end{aligned}$$

于是 $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = A\pi \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $1-\theta$ | $\theta-\theta^2$ | $\theta^2$ |

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知, 以 $N_i$ 表示来自总体 $X$ 的简单随机样本 (样本容量为 $n$) 中等于 $i$ 的个数 $(i = 1, 2, 3)$. 试求常数 $a_1, a_2, a_3$, 使 $T = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 $\theta$ 的无偏估计量, 并求 $T$ 的方差.

✎ **解:** 由题意可知 $N_1 \sim B(n, 1-\theta), N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2), N_3 \sim B(n, \theta^2)$. 因为 $T = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i N_i$ 为 $\theta$ 的无偏估计量, 所以 $E(T) = \theta$, 即

$$E(T) = a_1E(N_1) + a_2E(N_2) + a_3E(N_3) = a_1n(1-\theta) + a_2n\left(\theta-\theta^2\right) + a_3n\theta^2 = \theta,$$

解得 $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \dfrac{1}{n}$. 由于 $N_1 + N_2 + N_3 = n$, 所以 $T = \dfrac{N_2+N_1}{2} = \dfrac{n-N_1}{n}$, 则

$$D(T) = D\left(1 - \frac{N_1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(N_1) = \frac{1}{n^2}n(1-\theta)\theta = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

# 第 6 章 2011 年考研数学一

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ( )

A. $(1,0)$ B. $(2,0)$ C. $(3,0)$ D. $(4,0)$

✎ **解:** 首先可知 $1,2,3,4$ 分别是 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一、二、三、四重根, 不难得知 $y'(1)\neq 0, y'(2)=y'(3)=y'(4)=0, y''(2)\neq 0, y''(3)=y''(4)=0, y'''(3)\neq 0, y'''(4)=0, y''''(4)\neq 0$, 因此唯一的拐点是 $(3,0)$, 选 C.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n=1,2,\cdots)$ 无界, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 ( )

A. $(-1,1]$ B. $[-1,1)$ C. $[0,2)$ D. $(0,2]$

✎ **解:** 由题意知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处发散. 由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛, 即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 那么这两个点就是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间的端点, 因此它的收敛域为 $[-1,1)$, 从而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$, 选 C.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x)>0, f'(0)=0$ , 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f(0)>1, f''(0)>0$ B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$ D. $f(0)<1, f''(0)<0$

✎ **解:** 由 $z=f(x)\ln f(y)$ 可知 $z'_x=f'(x)\ln f(y), z'_y=\dfrac{f(x)}{f(y)}, z''_{xx}=f''(x)\ln f(y), z''_{xy}=\dfrac{f'(x)}{f(y)}f'(y), z''_{yy}=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-f'^2(y)}{f^2(y)}$. 在点 $(0,0)$ 处, $z''_{xx}=f''(0)\ln f(0), z''_{xy}=0, z''_{yy}=f''(0)$. 由二元函数极小值的充分条件, 需要满足 $f''(0)\ln f(0)>0, f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)>0$, 因此 $f(0)>1, f''(0)>0$, 选 C.

4. 设 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$, 则 $I,J,K$ 的大小关系是 ( )

A. $I<J<K$ B. $I<K<J$ C. $J<I<K$ D. $K<J<I$

✎ **解:** 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x < \cos x < \cot x$, 即 $\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$, 因此 $I < K < J$, 选 B.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} =$ ( )

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$ C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

✎ **解:** 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$, 选 D.

6. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

✎ **解:** 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个向量 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\boldsymbol{A}) = 3$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$, 所以 $r(\boldsymbol{A}^*) = 1$. 再由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 都是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中有三个线性无关的向量, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 都是线性无关的, 选 D.

7. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是 ( )

A. $f_1(x)f_2(x)$ B. $2f_2(x)F_1(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$ D. $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

✎ **解:** 概率密度需要满足非负性和归一性, 非负性都满足, 直接验证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]\,\mathrm{d}x = F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

因此 $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度, 其他都不满足, 选 D.

**注:** 在此题的条件下, $2f_1(x)F_1(x), 2f_2(x)F_2(x)$ 和 $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$ 都是概率密度.

8. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在. 记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$ ( )

A. $E(U) \cdot E(V)$ B. $E(X) \cdot E(Y)$ C. $E(U) \cdot E(Y)$ D. $E(X) \cdot E(V)$

✎ **解:** 由于 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 所以 $UV = XY$, 再根据独立性得 $E(UV) = E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, 选 B.

**二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)=$ ________.

✎ **解:** 根据曲线的弧长公式得

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

10.微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

✎ **解:** 由条件得 $\mathrm{e}^x(y'+y)=(y\mathrm{e}^x)'=\cos x$, 于是 $y\mathrm{e}^x=\sin x+C$. 由 $y(0)=0$ 得 $C=0$, 因此 $y\mathrm{e}^x=\sin x$, $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

11.设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________.

✎ **解:** $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\frac{y^2\cos xy\cdot(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2}$, 因此 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$.

12.设 $L$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$ ________.

✎ **解:** 曲线 $L$ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=\cos t+\sin t, t:0\to 2\pi$, 因此

$$\begin{aligned}&\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z\\=&\int_0^{2\pi}\left(\cos t(\cos t+\sin t)(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t+\frac{\sin^2 t}{2}(\cos t-\sin t)\right)\mathrm{d}t\\=&\int_0^{2\pi}\left(-\sin t\cos^2 t-\frac{\sin^2 t\cos t}{2}+\cos^2 t-\frac{\sin^3 t}{2}\right)\mathrm{d}t=\pi.\end{aligned}$$

13.若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$, 则 $a=$ ________.

✎ **解:** 由题意知二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的秩为 2, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-(a-1)^2=0, a=1$.

14.设二维随机变量 $(X,Y)$ 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则 $E(XY^2)=$ ________.

✎ **解:** 由条件知 $X,Y$ 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 于是 $E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=\mu\big((EX)^2+D(X)\big)=\mu(\mu^2+\sigma^2)=\mu^3+\mu\sigma^2$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

✎ **解:** 先取对数得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1+1\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$.

16.(本题满分 9 分)

设函数 $z=f\big(xy,yg(x)\big)$, 其中函数 $f$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

✎ **解:** 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\big(xy,yg(x)\big)\cdot y+f_2'\big(xy,yg(x)\big)\cdot g'(x)\cdot y$, 所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf_1'(y,y)$. 故

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}&=\left.\frac{d}{dy}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\right|_{y=1}=\left.\frac{d}{dy}\left[yf_1'(y,y)\right]\right|_{y=1}\\&=\left[f_1'(y,y)+y\left(f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)\right)\right]\big|_{y=1}\\&=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数, 其中 $k$ 为参数.

✎ **解:** 令 $f(x)=k\arctan x-x$, 则 $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{k}{1+x^2}-1=\dfrac{k-1-x^2}{1+x^2}$. 则

- $k\leqslant 1$ 时, $f'(x)\leqslant 0$ (且等号至多在一个点处成立), 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减, 此时 $f(x)$ 的图像与 $x$ 轴只有一个交点, 方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实根.
- $k>1$ 时, 由 $f(x)$ 为偶函数, 先考虑 $x>0$ 的情形. 此时 $f'(x)\begin{cases}>0, & 0<x<\sqrt{k-1}\\ <0, & x>\sqrt{k-1}\end{cases}$, 且 $f(0)=0$, $f\left(\sqrt{k-1}\right)>0$, $f(+\infty)=-\infty$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{k-1},+\infty\right)$ 内有一个零点 $x_0$, 于是 $f(-x_0)=-f(x_0)=0$, 故此时方程 $k\arctan x-x=0$ 有三个实根.

18.(本题满分 10 分)

(1) 证明: 对任意的正整数 $n$, 都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

☛ **证明:** (1) 由拉格朗日中值定理得 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n=\frac{1}{\xi}\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, 其中 $\xi\in(n,n+1)$, 得证.

(2) 首先有

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\
&=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,
\end{aligned}
$$

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递减. 再将不等式 $\frac{1}{k}>\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$ 对 $k$ 从 1 到 $n$ 求和得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\ln(n+1)>\ln n$, 因此 $a_n>0$. 根据单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

19.(**本题满分 11 分**)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算二重积分 $I=\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 由 $f(1,y)=f(x,1)=0$ 知 $f'_y(1,y)=f'_x(x,1)=0$, 原积分化为累次积分利用分部积分得

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xy\mathrm{d}\left(f'_y(x,y)\right)=\int_0^1\left(xyf'_y(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 yf'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(yf'_y(1,y)-\int_0^1 yf'_y(x,1)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 yf'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf'_y(x,y)\,\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}\left(f(x,y)\right)\\
&=-\int_0^1\left(yf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a.
\end{aligned}
$$

20.(**本题满分 11 分**)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 $a$ 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

✎ **解:** (1) 首先有 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能被 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3 = (3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示等价于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关, 于是 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$, 所以 $a = 5$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 作初等行变换得

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 10\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

✎ **解:** (1) 由条件知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此 $-1$ 是一个特征值, 且它对应的特征向量为 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}},k_1 \neq 0$; 1 是一个特征值, 它所对应的特征向量为 $k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}},k_2 \neq 0$. 再由 $r(\boldsymbol{A}) = 2$ 知 0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 设它的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 那么由对称矩阵不同特征值对应的特征向量的正交性得 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$, 解得特征值 0 对应的特征向量为 $k_3(0,1,0)^{\mathrm{T}},k_3 \neq 0$.

(2) 令 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

22.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 的概率分布分别为

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

| $Y$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

且 $P(X^2=Y^2)=1$.

(1) 求二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布;

(2) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(3) 求 $X$ 与 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}$.

✎ **解:** (1) 由于 $P(X^2=Y^2)=1$, 所以 $P(X^2\neq Y^2)=0$, 即 $P(X=0,Y=1)=P(X=0,Y=-1)=P(X=1,Y=0)=0$, 于是

$$P(X=1,Y=1)=P(Y=1)-P(X=0,Y=1)=P(Y=1)=\frac{1}{3},$$

$$P(X=1,Y=-1)=P(Y=-1)-P(X=0,Y=-1)=P(Y=-1)=\frac{1}{3},$$

$$P(X=0,Y=0)=P(Y=0)-P(X=1,Y=0)=P(Y=0)=\frac{1}{3}.$$

因此二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布为

| $X$ \ $Y$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |

(2) $Z=XY$ 取值只有 $-1,0,1$, 且由 $(X,Y)$ 的概率分布不难得到 $Z$ 的概率分布为

| $Z$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

(3) $E(X)=\frac{2}{3}, E(Y)=0, E(XY)=0, \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$, 因此 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为 $\rho_{XY}=0$.

23.(**本题满分 11 分**)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\mu_0$ 已知, $\sigma^2>0$ 未知. $\bar{X}$ 和 $S^2$ 分别表示样本均值和样本方差.

(1) 求参数 $\sigma^2$ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(2) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

✎ **解:** (1) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L\left(\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2},$$

取对数得 $\ln L\left(\sigma^2\right)=\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\,(\ln L)}{\mathrm{d}\left(\sigma^2\right)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$$

解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$, 故 $\sigma^2$ 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(2) 首先有 $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$, 所以 $E(\hat{\sigma}^2)=\frac{\sigma^2}{n}E\left(\frac{n\sigma^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2$, $D(\hat{\sigma}^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{n\sigma^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}$.

# 第 7 章 2012 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

✎ **解:** 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$, 所以直线 $y=1$ 是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线, 从而它没有斜渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$, 所以 $x=1$ 是一条垂直渐近线, 而 $x=-1$ 不是渐近线, 因此有两条渐近线, 选 C.

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 $n$ 为正整数, 则 $f'(0)=$ ( )

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$ B. $(-1)^{n}(n-1)!$ C. $(-1)^{n-1}n!$ D. $(-1)^{n}n!$

✎ **解:** 利用导数的定义得

$$\begin{aligned} f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\right)=(-1)^{n-1}(n-1)!, \end{aligned}$$

选 A.

3. 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 ( )

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

✎ **解:** 正确的选项是 B, 因为极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 由连续性可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)=0$, 且在 $(0,0)$ 的邻域内有 $f(x,y)=f(0,0)+0\cdot x+0\cdot y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, 因此由可微的定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. A 选项可取反例 $f(x)=|x|+|y|$, C 和 D 选项可取反例 $f(x,y)=1$, 因此选 B.

4. 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x\,(k=1,2,3)$, 则有 ( )

A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_3 < I_2 < I_1$ C. $I_2 < I_3 < I_1$ D. $I_2 < I_1 < I_3$

✎ **解:**

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx < I_1,$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx \\
&= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx = I_1 + \int_0^{\pi} e^{(2\pi-t)^2}\sin t dt + \int_0^{\pi} e^{(2\pi+t)^2}\sin t dt \\
&= I_1 + \int_0^{\pi}\left[e^{(2\pi+t)^2} - e^{(2\pi-t)^2}\right]\sin t dt > I_1.
\end{aligned}$$

选 D.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 $c_1, c_2, c_3, c_4$ 为任意常数, 则下列向量线性相关的为 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

✎ **解:** 显然可得 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 一定线性相关, 选 C.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} =$ ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✎ **解:** 由初等变换与初等矩阵的关系可知 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

选 B.

7. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P(X<Y)=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

✎ **解:** 由条件可知 $X$ 与 $Y$ 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-x-4y}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 所以

$$P(X<Y)=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-x-4y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{5},$$

选 A.

8. 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ( )

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-1$

✎ **解:** 设截成的两段长分别为 $X$ 和 $Y$, 则 $Y=1-X$, 因此 $X$ 与 $Y$ 存在线性关系, 且为负相关, 因此 $\rho_{XY}=-1$, 选 D.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$, 则 $f(x)=$ ________.

✎ **解:** 微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 特征根为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$, 故方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$, $f''(x)=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $2C_1\mathrm{e}^x+5C_2\mathrm{e}^{-2x}=2\mathrm{e}^x$, 所以 $C_1=1, C_2=0$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

10. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

11. $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

✎ **解:** 令 $f(x,y,z)=xy+\frac{z}{y}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}=y, \frac{\partial f}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2}, \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{y}$, 所以 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(2,1,1)}=1, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(2,1,1)}=1, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(2,1,1)}=1$, 因此 $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$.

12.设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=$________.

✎ **解:** 记 $D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S&=\iint\limits_{D} y^2\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}y^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12}.\end{aligned}$$

13.设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

✎ **解:** $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的实对称矩阵, 故它可以对角化, 且它的特征值为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},0,0$, 即 $1,0,0$. 则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 也可以对角化, 且它的特征值为 $0,1,1$, 因此 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2$.

14.设 $A,B,C$ 是随机事件, $A$ 与 $C$ 互不相容, $P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C})=$ ________.

✎ **解:** 由 $A$ 与 $C$ 互不相容可知 $P(AC)=P(ABC)=0$, 于是

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{1/2}{1-1/3}=\frac{3}{4}.$$

## 三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

☛ **证明:** 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只需要证明 $f'(x)\geqslant 0,x\in[0,1)$ 即可. 首先有 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,x\in(0,1)$, 且 $\ln\frac{1+x}{1-x}>0$, $\frac{2x}{1-x^2}>2x>x+\sin x$, 因此 $f'(x)>0,x\in(0,1)$. 而 $f(0)=0$, 则有 $f(x)\geqslant 0,x\in[0,1)$, 证毕.

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases}f_x'(x,y)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\f_y'(x,y)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}$ 解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$. 记

$$A=f''_{xx}(x,y)=x\left(x^2-3\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},B=f''_{xy}(x,y)=y\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$
$$C=f''_{yy}(x,y)=x\left(y^2-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在驻点 $(1,0)$ 处, 由于 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0,A=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0$, 所以 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值. 在驻点 $(-1,0)$ 处, 由于 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0,A=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$, 所以 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值.

17.(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

✎ **解:** 令 $u_n=\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=x^2<1\Rightarrow -1<x<1$, 因此原幂级数的收敛半径 $R=1$. 当 $x=\pm1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ 发散, 因此原幂级数收敛域为 $(-1,1)$. 当 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时, 和函数为

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned}$$

而 $S(0)=3$, 因此 $S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3, & x=0\end{cases}$.

18.(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0$, $f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 若曲线 $L$ 的切线与 $x$ 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 $L$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴为边界的区域的面积.

✎ **解:** 由参数方程求导公式知 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sin t}{f'(t)}$, 因此曲线 $L$ 上任一点 $(x,y)=\left(f(t),\cos t\right)$ 处的切线方程为 $Y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}(X-f(t))$. 令 $Y=0$, 得此切线与 $x$ 轴交点的横坐标为 $X=f'(t)\cot t+f(t)$, 由题意得 $\left(f'(t)\cot t\right)^2+\cos^2 t=1$. 又 $f'(t)>0$, 所以 $f'(t)=\sec t-\cot t$, 从而 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+C$. 再由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 故 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$. 以曲线 $L$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴为边界的区域的面积为

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,(\sec t-\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

19.(本题满分 10 分)

已知 $L$ 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I=\oint_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 取有向线段 $L_1$ 的方程为 $x=0$, 起点为 $(0,2)$, 终点为 $(0,0)$. 由 $L$ 与 $L_1$ 围成的平面区域记为 $D$, 则

$$I=\oint_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \oint_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3+x-2y)\mathrm{d}y - \oint_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3+x-2y)\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x-2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_2^0 (-2y)\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4 = \frac{\pi}{2} - 4.
\end{aligned}
$$

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2) 当实数 $a$ 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

✎ **解:** (1) 行列式按照第一行展开得

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4.
$$

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) &= \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

由于方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解当且仅当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) < 4$, 因此 $1 - a^4 = -a - a^2 = 0$, 解得 $a = -1$, 此时方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 且容易得到方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = (0, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}} + k(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k$ 为任意常数.

21.(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 $a$ 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f$ 化为标准形.

✎ **解:** (1) 因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $a=-1$.

(2) 由 $a=-1$ 可得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$, 故矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_3=6$ 时, 解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_3$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 原二次型化为标准形 $f=2y_2^2+6y_3^2$.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{12}$ |

(1) 求 $P(X=2Y)$

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

✎ **解:** (1) 由 $(X,Y)$ 的概率分布知 $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}$.

(2) 由 $(X,Y)$ 的概率分布知 $X,Y,XY$ 的概率分布分别为

$$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},XY\sim\begin{pmatrix}0&1&4\\ \frac{7}{12}&\frac{1}{3}&\frac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

所以 $E(X)=\frac{2}{3},E(Y)=1,E(Y^2)=\frac{5}{3},D(Y)=\frac{2}{3},E(XY)=\frac{2}{3}$, 于是 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,\mathrm{Cov}(X-Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\frac{2}{3}$.

23.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$, 其中 $\sigma$ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(1) 求 $Z$ 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

(2) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 $Z$ 的简单随机样本, 求 $\sigma^2$ 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(3) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计量.

✎ **解:** (1) 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$, 且 $X,Y$ 相互独立知 $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$, 因此 $Z$ 的概率密度 $f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},-\infty<z<+\infty$.

(2) 设样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\left(6\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2},$$

取对数得 $\ln L\left(\sigma^2\right)=-\frac{n}{2}\ln\left(6\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$, 令 $\frac{\mathrm{d}\,(\ln L)}{\mathrm{d}\left(\sigma^2\right)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2=0$ 得 $\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$, 因此 $\sigma^2$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2$.

(3) 因为 $E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}E\left(Z_i^2\right)=\frac{1}{3}E\left(Z^2\right)=\frac{1}{3}D(Z)=\sigma^2$, 所以 $\hat{\sigma}^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计量.

# 第 8 章 2013 年考研数学一

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 $k,c$ 为常数, 且 $c\neq 0$, 则 ( )

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$ B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$ C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$ D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

✎ **解:** 利用等价无穷小可知当 $x\to 0$ 时, $x-\arctan x\sim\dfrac{1}{3}x^3$, 由题意就有 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 ( )

A. $x-y+z=-2$ B. $x+y+z=0$

C. $x-2y+z=-3$ D. $x-y-z=0$

✎ **解:** 记 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$, 则

$$\frac{\partial F\left(x,y,z\right)}{\partial x}=2x-y\sin xy+1,\frac{\partial F\left(x,y,z\right)}{\partial y}=-x\sin xy+z,\frac{\partial F\left(x,y,z\right)}{\partial z}=y,$$

因为 $\dfrac{\partial F\left(0,1,-1\right)}{\partial x}=1,\dfrac{\partial F\left(0,1,-1\right)}{\partial y}=-1,\dfrac{\partial F\left(0,1,-1\right)}{\partial z}=1$, 所以曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $x-(y-1)+z=1$, 即 $x-y+z=-2$, 选 A.

3. 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|,b_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$, 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$ ( )

A. $\dfrac{3}{4}$ B. $\dfrac{1}{4}$ C. $-\dfrac{1}{4}$ D. $-\dfrac{3}{4}$

✎ **解:** 由题意可知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 作周期为 2 的奇延拓得到的函数所对应的傅里叶级数, 因此 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$, 选 C.

4. 设 $L_1:x^2+y^2=1,L_2:x^2+y^2=2,L_3:x^2+2y^2=2,L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\ (i=1,2,3,4),$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$ ( )

A. $I_1$ B. $I_2$ C. $I_3$ D. $I_4$

✎ **解:** 设 $L_i$ 所包围的有限区域为 $D_i(i=1,2,3,4)$, 首先由格林公式可得

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_i}\left[\left(2-x^2\right)-\left(1+\frac{1}{2}y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_i} \left[1 - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

被积函数取非负值得最大区域为 $x^2 + \dfrac{y^2}{2} \leqslant 1$, 刚好就是区域 $D_4$, 因此 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 $n$ 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则　　(　　)

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

✎ **解:** 对一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列的初等列变换后得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 选 B.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为　　(　　)

A. $a = 0, b = 2$　　B. $a = 0, b$ 为任意常数

C. $a = 2, b = 0$　　D. $a = 2, b$ 为任意常数

✎ **解:** 两个同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们具有相同的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $2, b, 0$, 而 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda\left((\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2\right)$, 因此当且仅当 $a = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, b, 0$, 其中 $b$ 可为任意常数, 选 B.

7. 设 $X_1, X_2, X_3$ 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2), p_i = P(-2 \leqslant X_i \leqslant 2)\,(i = 1,2,3)$, 则　　(　　)

A. $p_1 > p_2 > p_3$　　B. $p_2 > p_1 > p_3$　　C. $p_3 > p_1 > p_2$　　D. $p_1 > p_3 > p_2$

✎ **解:** 利用正态分布的性质可得

$$p_1 = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1,$$
$$p_2 = \Phi\left(\frac{2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = 2\Phi(1) - 1,$$
$$p_3 = \Phi\left(\frac{2-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-5}{3}\right) = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right).$$

利用标准正态分布的概率分布函数性质不难得到 $p_1 > p_2 > p_3$, 选 A.

8. 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $\alpha\,(0 < \alpha < 0.5)$, 常数 $c$ 满足 $P(X > c) = \alpha$, 则 $P(Y > c^2) =$　　(　　)

A. $\alpha$ B. $1-\alpha$ C. $2\alpha$ D. $1-2\alpha$

✎ **解:** 由 $X \sim t(n)$ 可知 $X^2 \sim F(1,n)$, 因此

$$P\left(Y > c^2\right) = P\left(X^2 > c^2\right) = P\left(X > c\right) + P\left(X < -c\right) = 2a,$$

选 C.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right] =$________.

✎ **解:** 由 $y - x = \mathrm{e}^{x(1-y)}$ 可知当 $x = 0$ 时 $y = 1$. 等式两边关于 $x$ 求导得 $y - 1 = \mathrm{e}^{x(1-y)}\left(1 - y - xy'\right)$, 代入 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = f'(0) = 1$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{x} = f'\left(0\right) = 1.$$

10.已知 $y_1 = \mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{2x}$, $y_3 = -x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y =$________.

✎ **解:** 因为 $y_1 - y_3 = \mathrm{e}^{3x}$, $y_2 - y_3 = \mathrm{e}^{x}$ 是该非齐次线性微分方程对应的齐次线性微分方程的两个解, 且 $\mathrm{e}^{3x}$ 与 $\mathrm{e}^{x}$ 线性无关. 又因为 $y_3 = -x\mathrm{e}^{2x}$ 是非齐次线性微分方程的特解, 所以该方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{2x}$.

11.设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$ ($t$ 为参数), 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$________.

✎ **解:** 由参数方程求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = t, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos t},$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

12.$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$________.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= -\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)\\ &= -\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x\right)}\\ &= \left.\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right|_1^{+\infty} = \ln 2.\end{aligned}$$

13.设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, $A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

✎ **解:** 由 $a_{ij}+A_{ij}=0\,(i,j=1,2,3)$ 可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^*$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2$, 因此 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $-1$. 又 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 于是 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

14.设随机变量 $Y$ 服从参数为 1 的指数分布, $a$ 为常数且大于零, 则 $P(Y\leqslant a+1|Y>a)=$________.

✎ **解:** $Y$ 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$, 由条件概率公式得

$$
\begin{aligned}
P\left(Y\leqslant a+1|Y>a\right)&=\frac{P\left(a<Y\leqslant a+1\right)}{P\left(Y>a\right)}\\
&=\frac{F\left(a+1\right)-F\left(a\right)}{1-F\left(a\right)}=\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-(a+1)}}{\mathrm{e}^{-a}}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}
$$

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(**本题满分 10 分**)

计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

✎ **解:** *方法一* 由条件有 $f(1)=0, f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 利用分部积分得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)=-2\int_0^1\sqrt{x}f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\
&=-2\int_0^1\frac{\ln\left(1+x\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4\int_0^1\ln\left(1+x\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)\\
&=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x=8\int_0^1\frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u-4\ln 2\\
&=8-2\pi-4\ln 2.
\end{aligned}
$$

*方法一* 利用二重积分交换次序得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=-\int_0^1\left(\int_x^1\frac{\ln\left(1+t\right)}{t}\mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=-\int_0^1\frac{\ln\left(1+t\right)}{t}\left(\int_0^t\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}t\\
&=-2\int_0^1\frac{\ln\left(1+t\right)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=8-2\pi-4\ln 2.
\end{aligned}
$$

16.(**本题满分 10 分**)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明: $S''(x)-S(x)=0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

✎ **解:** (1) 由 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, 结合条件 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$ 可得

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),$$

即 $S''(x)-S(x)=0$.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的通解为 $S(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$. 由初值条件 $S(0)=a_0=3, S'(0)=a_1=1$ 得 $C_1+C_2=3, C_1-C_2=1$, 所以 $C_1=2, C_2=1, S(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

17.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases} f_x'(x,y)=\left(x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=0 \\ f_y'(x,y)=\left(1+y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=0 \end{cases}$ 得驻点 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$. 进一步可得 $f_{xx}''(x,y)=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$, $f_{xy}''(x,y)=\left(1+x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$, $f_{yy}''(x,y)=\left(2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$. 在驻点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 处,

$$A=f_{xx}''\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}, B=f_{xy}''\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}, C=f_{yy}''\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}.$$

此时 $AC-B^2<0$, 因此 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点. 在驻点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处,

$$A=f_{xx}''\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}, B=f_{xy}''\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}, C=f_{yy}''\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$

此时 $A>0$ 且 $AC-B^2>0$, 因此 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 是极小值点, 且极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

18.(本题满分 10 分)

奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)=1$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

☛ **证明:** (1) 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0$, 由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$, 即 $f'(\xi)=1$.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法一　令 $G(x)=f(x)+f'(x)-x$, 则

$$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1),$$
$$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1.$$

由罗尔定理知存在 $\eta\in(-1,1)$ 使得 $G'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

方法二　令 $H(x)=\mathrm{e}^x\big(f'(x)-1\big)$, 由 (1) 可知 $f'(\xi)=f'(-\xi)=1$, 因此 $H(\xi)=H(-\xi)=0$, 由罗尔定理知存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使得 $H'(\eta)=\mathrm{e}^{\eta}\big(f''(\eta)+f'(\eta)-1\big)=0$, 即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 $L$ 过 $A(1,0,0), B(0,1,1)$ 两点, 将 $L$ 绕 $z$ 轴旋转一周得到曲面 $\Sigma$, $\Sigma$ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 $\Omega$.

(1) 求曲面 $\Sigma$ 的方程;

(2) 求 $\Omega$ 的形心坐标.

✎ **解:** (1) 直线 $L$ 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, 写成参数方程即 $x=1+t, y=-t, z=-t$. 曲面 $\Sigma$ 是 $L$ 绕 $z$ 轴旋转而成, 设 $(x,y,z)$ 为曲面 $\Sigma$ 上的任意点, 则 $x^2+y^2=(1+t)^2+t^2, z=-t$, 所以曲面 $\Sigma$ 的方程为 $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$.

(2) 设 $\Omega$ 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由对称性得 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 用平面 $z=z$ 截区域 $\Omega$ 所得的截面为 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1\}$, 由切片法可得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z\\&=\pi\left(\frac{2}{3}z^3-z^2+z\right)\Big|_0^2=\frac{10\pi}{3},\\\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z\left(2z^2-2z+1\right)\mathrm{d}z\\&=\pi\left(\frac{1}{2}z^4-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^2=\frac{14\pi}{3}.\end{aligned}$$

因此 $\bar{z}=\dfrac{\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{7}{5}$, $\Omega$ 的形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

20.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$, 当 $a,b$ 为何值时, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$, 并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

✎ **解:** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$, 代入 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}. \tag{$*$}$$

对该方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&-1&a&0&0\\ -a&1&0&a&1\\ 1&0&-1&-1&1\\ 0&1&-a&0&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&1\\ 0&1&-a&0&0\\ 0&0&0&0&a+1\\ 0&0&0&0&b\end{array}\right).$$

由此可知当 $a\neq-1$ 或 $b\neq0$ 时, 方程组 $(*)$ 无解. 当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时, 方程组 $(*)$ 有解, 且此时方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k_1(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k_1,k_2$ 为任意常数. 因此, 当且仅当 $a=-1,b=0$ 时存在矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2\in\mathbb{R})$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

21.(**本题满分** 11 **分**)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 $f$ 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

☛ **证明:** (1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

因此

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\&=2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

且 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵, 所以二次型 $f$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha},$$

$$A\beta=(2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}})\beta=2\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)+\beta(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)=\beta,$$

故 $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ 是矩阵 $A$ 的特征值. 又 $A$ 的秩 $r(A)=r(2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\alpha\alpha^{\mathrm{T}})+r(\beta\beta^{\mathrm{T}})=2$, 即 $A$ 不是满秩矩阵, 所以 $\lambda_3=0$ 也是 $A$ 的特征值, 故二次型 $f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 $X$ 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\geqslant 2\end{cases}$.

(1) 求 $Y$ 的分布函数;

(2) 求概率 $P(X\leqslant Y)$.

✎ **解:** (1) 记 $Y$ 分布函数为 $F(y)$, 则当 $y<1$ 时, $F(y)=0$; 当 $y\geqslant 2$ 时, $F(y)=1$; 当 $1\leqslant y<2$ 时,

$$\begin{aligned}F(y)&=P(Y\leqslant y)=P(Y=1)+P(1<Y\leqslant y)\\&=P(X\geqslant 2)+P(1<X\leqslant y)=\int_2^3\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\frac{y^3+18}{27}.\end{aligned}$$

所以 $Y$ 的分布函数为 $F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2\\ 1, & y\geqslant 2\end{cases}$.

(2) 由随机变量 $Y$ 的定义可知 $P(X\leqslant Y)=P(X<2)=\displaystyle\int_0^2\frac{x^2}{9}\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$.

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 $\theta$ 为未知参数且大于零, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求 $\theta$ 的矩估计量;

(2) 求 $\theta$ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 总体均值 $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta$, 令 $E(X)=\bar{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$, 因此 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\bar{X}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$, 令 $\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 0$ 得 $\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$, 所以 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$.

# 第 9 章 2014 年考研数学一



**一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 下列曲线中有渐近线的是 ( )

A. $y=x+\sin x$ B. $y=x^2+\sin x$ C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

✎ **解:** 可以用斜渐近线的定义直接判断 C 选项满足 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$, 从而直线 $y=x$ 是曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 的斜渐近线.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

A. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$ B. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$ D. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

✎ **解:** 令 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$, 则 $F(0)=F(1)=0$, 且 $F''(x)=f''(x)$. 故当 $f''(x)>0$ 时,$F(x)$ 为凹函数, 它的最大值在端点 $x=0$ 或 $x=1$ 处取到, 而 $F(0)=F(1)=0$, 所以 $F(x)=f(x)-g(x)\leqslant 0$, 选 D.

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ( )

A. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

B. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$

D. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$

✎ **解:** 画出积分区域, 如果化为极坐标, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r.$$

如果在直角坐标系下交换积分次序, 则

$$I=\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

选 D.

4. 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\,\mathrm{d}x\right\}$, 则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

A. $2\sin x$  B. $2\cos x$  C. $2\pi\sin x$  D. $2\pi\cos x$

✎ **解:** 直接计算可得

$$\begin{aligned}I(a,b)&=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x-2ax\cos x-2bx\sin x+2ab\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\pi}\left(x^2+a^2\cos^2x+b^2\sin^2x-2bx\sin x\right)\mathrm{d}x\\&=\pi a^2+\pi(b-2)^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi.\end{aligned}$$

显然当 $a=0,b=2$ 时, $I(a,b)$ 最小, 所以 $a_1=0,b_1=2$, 选 A.

5. 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$ ( )

A. $(ad-bc)^2$  B. $-(ad-bc)^2$  C. $a^2d^2-b^2c^2$  D. $b^2c^2-a^2d^2$

✎ **解:** 利用行列式的基本性质, 分别交换一二列, 二三行和二三列可得

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&0&b&0\\0&b&0&a\\c&0&d&0\\0&d&0&c\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&b&0\\c&0&d&0\\0&b&0&a\\0&d&0&c\end{pmatrix}=-\begin{vmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&b&a\\0&0&d&c\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2,$$

选 B.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量, 则对任意常数 $k,l$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 ( )

A. 必要非充分条件  B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件  D. 既非充分也非必要条件

✎ **解:** 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 令 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$, 即

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(k\lambda_1+l\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 反之, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 不一定有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 如取反例 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 因此选 A.

7. 设随机事件 $A$ 与 $B$ 相互独立, 且 $P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A)=$ ( )

A. 0.1  B. 0.2  C. 0.3  D. 0.4

✎ **解:** 由 $A, B$ 相互独立可得

$$\begin{aligned} P(A-B) &= P(A)-P(AB) = P(A)-P(A)P(B) \\ &= P(A)-0.5P(A) = 0.5P(A) = 0.3, \end{aligned}$$

所以 $P(A)=0.6$, $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.5P(A)=0.2$, 选 B.

8. 设连续型随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 相互独立且方差均存在, $X_1$ 与 $X_2$ 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 $Y_1$ 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\dfrac{1}{2}(f_1(y)+f_2(y))$, 随机变量 $Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$, 则 ( )

A. $EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$ B. $EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

C. $EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$ D. $EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$

✎ **解:** 利用期望与方差公式计算得

$$\begin{aligned} EY_1 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(EX_1+EX_2) = EY_2, \\ E\left(Y_1^2\right) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,[f_1(y)+f_2(y)]\mathrm{d}y = \frac{1}{2}E\left(X_1^2\right)+\frac{1}{2}E\left(X_2^2\right), \\ DY_1 &= E\left(Y_1^2\right)-(EY_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}E\left(X_1^2\right)+\frac{1}{2}E\left(X_2^2\right)-\frac{1}{4}(EX_1)^2-\frac{1}{4}(EX_2)^2-\frac{1}{2}EX_1EX_2 \\ &= \frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2+\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2 > \frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2 = DY_2, \end{aligned}$$

选 D.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

✎ **解:** 曲面在点 $(1,0,1)$ 处的法向量为 $\left(z_x', z_y', -1\right)\big|_{(1,0,1)} = (2,-1,-1)$, 所以切平面方程为 $2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0$, 即 $2x-y-z-1=0$.

10. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$, 则 $f(7)=$________.

✎ **解:** 当 $x\in[0,2]$ 时, $f(x)=\displaystyle\int 2(x-1)\,\mathrm{d}x = x^2-2x+C$, 由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 即 $f(x)=x^2-2x$. 又 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 故 $f(7)=f(-1)=-f(1)=1$.

11. 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为________.

✎ **解:** 原微分方程即 $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, 这是一个齐次方程, 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y'=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$, 原方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(\ln u-1)$. 解此变量分离的方程得 $u=\mathrm{e}^{Cx+1}$, 从而原方程通解为 $y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$. 代入初值条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 可得 $C=2$, 故所求特解为 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

12.设 $L$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线, 从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

✎ **解:** 曲线 $L$ 的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=-\sin\theta, \theta$ 从 0 到 $2\pi$, 则 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi$.

13.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 $a$ 的取值范围是________.

✎ **解:** 由配方法得

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1,x_2,x_3\right)&=x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2-\left(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2\right)+4x_3^2-a^2x_3^2\\
&=\left(x_1+ax_3\right)^2-\left(x_2-2x_3\right)^2+\left(4-a^2\right)x_3^2,
\end{aligned}
$$

因为负惯性指数为 1, 所以 $4-a^2\geqslant 0$, 解得 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

14.设总体 $X$ 的概率密度为

$$
f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases},
$$

其中 $\theta$ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本, 若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 $\theta^2$ 的无偏估计, 则 $c=$________.

✎ **解:** 由无偏估计的定义得

$$
\begin{aligned}
E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)&=c\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)=cnE\left(X^2\right)\\
&=cn\int_\theta^{2\theta}\frac{2x^3}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{2cn}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_\theta^{2\theta}=\frac{5cn}{2}\theta^2=\theta^2,
\end{aligned}
$$

因此 $c=\dfrac{2}{5n}$.

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

✎ **解:** 当 $t>0$ 时, $t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t>t^2\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}\right)-t=\dfrac{1}{2}$, 因此极限的分子是趋于正无穷的, 利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2}\Big/\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

**注:** 事实上, 洛必达法则适用于 $\frac{?}{\infty}$ 型的极限, 也就是只需要分母趋于无穷, 不需要验证分子是否趋于无穷, 就可以使用洛必达法则了.

16.(**本题满分 10 分**)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+2y^2+x^2y+6=0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

**解:** 方程两边关于 $x$ 求导得 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$, 令 $y'=0$ 得 $y=-2x$ 或 $y=0$ (舍去). 将 $y=-2x$ 代入原方程得 $-6x^3+6=0$, 所以 $x=1$, $f(1)=-2$. 在 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$ 两边继续对 $x$ 求导得

$$\left(3y^2+2xy+x^2\right)y''+2\left(3y+x\right)\left(y'\right)^2+4\left(y+x\right)y'+2y=0,$$

求得 $f''(1)=\frac{4}{9}>0$, 因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 且极小值 $f(1)=-2$.

17.(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{e}^{2x}$, 若 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

**解:** 利用多元复合函数偏导公式得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y+f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^x\cos y,\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=-f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^x\sin y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y-f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^x\cos y.
\end{aligned}
$$

所以等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x}$ 化为

$$f''\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x}=\left[4f\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)+\mathrm{e}^x\cos y\right]\mathrm{e}^{2x},$$

因此函数 $f(u)$ 满足微分方程 $f''(u)=4f(u)+u$, 此方程的通解为 $f(u)=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{u}{4}$. 由 $f(0)=f'(0)=0$ 得 $C_1+C_2=0, 2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0$, 解得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$, 故 $f(u)=\frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{2u}-\mathrm{e}^{-2u}-4u\right)$.

18.(**本题满分 10 分**)

设 $\Sigma$ 为曲面 $z=x^2+y^2\,(z\leqslant 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

✎ **解:** 曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面的投影区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 由 $z=x^2+y^2$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$, 利用投影法和二重积分对称性得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\\&=\iint\limits_{D}\left((x^2+y^2)-1-(x-1)^3\frac{\partial z}{\partial x}-(y-1)^3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}(-1+2x-5x^2+6x^3-2x^4+2y-5y^2+6y^3-2y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint_{D}(1+5x^2+5y^2+2x^4+2y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1+5r^2+2r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)\right)r\,\mathrm{d}r\\&=-4\pi.\end{aligned}$$

**注:** 这题还可以用补面 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=1\end{cases}$ 的方法用高斯公式来做, 但这里用投影法更直接.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(2) 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

✎ **解:** (1) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 由 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 可得 $\cos a_n-\cos b_n=a_n>0$, 因此 $0<a_n<b_n$, 由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时, $a_n\sim a_n+1-\cos a_n=1-\cos b_n\sim\dfrac{b_n^2}{2}$, 因此 $\dfrac{a_n}{b_n}\sim b_n$, 由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

**解:** (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right).$$

记 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(2,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_1\boldsymbol{\alpha},k_1\in\mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=(6,-3,-4,0)^{\mathrm{T}}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,k_2\in\mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_3$ 的通解为 $x=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3\boldsymbol{\alpha},k_3\in\mathbb{R}$. 因此所求的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},$$

其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$.

21.(本题满分 11 分)

证明 $n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

**证明:** 先证明一个基本结论:

**引理**

秩为 1 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$. 且当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形为 $\mathrm{diag}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}),0,\cdots,0\}$.

**证明:** 由于 $r(\boldsymbol{A})=1$, 所以方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有且只有 $n-1$ 个线性无关的解, 因此 0 至少是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值, 且它只有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 特征值的和等于矩阵的迹, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个特征值就是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$. 当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\neq 0$ 时, 此非零特征值有一

个线性无关特征向量, 此时 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 且其相似标准形为 $\mathrm{diag}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}), 0, \cdots, 0\}$. 若 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$, 则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 重特征值, 但只有 $n-1$ 个线性无关特征向量, 此时不可对角化, 证毕.

由 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 1, \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = n$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于对角阵 $\mathrm{diag}\{n, 0, \cdots, 0\}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

22.(**本题满分** 11 **分**)

设随机变量 $X$ 的概率分布为 $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, 在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 $Y$ 服从均匀分布 $U(0, i)(i = 1, 2)$.

(1) 求 $Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$;

(2) 求 $EY$.

✎ **解:** (1) 由分布函数定义得

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) \\
&= P(X=1)P(Y \leqslant y|X=1) + P(X=2)P(Y \leqslant y|X=2) \\
&= \frac{1}{2}P(Y \leqslant y|X=1) + \frac{1}{2}P(Y \leqslant y|X=2) \\
&= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 0 \leqslant y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y, & 1 \leqslant y < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & y \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leqslant y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leqslant y < 2 \\ 1, & y \geqslant 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

(2) $Y$ 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \leqslant y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 因此

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{3}{4}y\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \frac{1}{4}y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}.$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 $X$ 的分布函数为

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

其中 $\theta$ 是未知参数且大于零, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(2) 求 $\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(3) 是否存在实数 $a$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - a\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$?

✎ **解:** (1) 总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$, 则

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}, \\ E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\,\mathrm{d}x = \theta \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \theta. \end{aligned}$$

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \begin{cases} \dfrac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}, & x_1, x_2, \cdots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时,

$$\ln L(\theta) = n\ln 2 + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ 得 $\theta = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, 故 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.

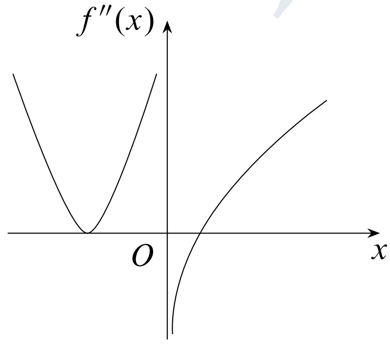
(3) 存在 $a = \theta$ 满足条件. 因为 $\{X_n^2\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_1^2) = \theta < +\infty$, 所以根据辛钦大数定律知, 当 $n \to \infty$ 时, $\hat{\theta}_N = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X_1^2) = \theta$. 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$.

# 第 10 章 2015 年考研数学一

**一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图像如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3




第 1 题图

✎ **解:** 拐点是连续曲线凹凸性发生变化的点, 这里就是二阶导数符号发生变化的点. 从图中可知 $f''(x)$ 的符号发生变化的点是原点和 $y=f''(x)$ 在 $x>0$ 时与 $x$ 轴的交点, $x<0$ 时的交点不是拐点, 因此有两个拐点, 选 C.

2. 设 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 的一个特解, 则 ( )

A. $a=-3, b=2, c=-1$　　B. $a=3, b=2, c=-1$

C. $a=-3, b=2, c=1$　　D. $a=3, b=2, c=1$

✎ **解:** 原微分方程的非齐次项为 $c\mathrm{e}^x$, 它的一个特解为 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^x$, 因此可以判断方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个特征根分别为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, 于是 $a=-3, b=2$. 于是将特解 $y=x\mathrm{e}^x$ 代入方程中可得 $(x\mathrm{e}^x)''-3(x\mathrm{e}^x)+2x\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x=c\mathrm{e}^x$, 所以 $c=-1$, 选 A.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 ( )

A. 收敛点, 收敛点　B. 收敛点, 发散点　C. 发散点, 收敛点　D. 发散点, 发散点

✎ **解:** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 因此 $x=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛区间的端点, 即收敛半径为 1. 而幂级数逐项求导后的级数收敛半径不变, 故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛半径也是 1, 从而 $x=\sqrt{3}$ 为收敛点, $x=3$ 为发散点, 选 B.

4. 设 $D$ 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上连续, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$ B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \mathrm{d}r$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \mathrm{d}r$

✎ **解:** 首先把四条曲线化为极坐标方程, 代入 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 得四条曲线分别为 $r = \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}, \theta = \dfrac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, 正确答案选 B.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$ C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$ D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

✎ **解:** 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < 3$, 利用初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

所以 $a = 1$ 或 $2$, $d = 1$ 或 $2$, 选 D.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 ( )

A. $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ B. $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ C. $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ D. $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

✎ **解:** 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由题意知 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 由初等变换与初等矩阵的关系知 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$, 于是

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 选 A.

7. 设 $A, B$ 为任意两个随机事件, 则 ( )

A. $P(AB) \leqslant P(A)P(B)$ B. $P(AB) \geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$ D. $P(AB) \geqslant \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$

✎ **解:** 注意到 $P(AB) \leqslant P(A), P(AB) \leqslant P(B)$, 因此 $P(AB) \leqslant \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$, 选 C.

8. 设随机变量 $X,Y$ 不相关, 且 $EX=2,EY=1,DX=3$, 则 $E[X(X+Y-2)]=$ (　)

A. $-3$　　B. 3　　C. $-5$　　D. 5

✎ **解:** 由条件可得

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)\\&=D(X)+(EX)^2+E(X)E(Y)-2E(X)=5,\end{aligned}$$

选 D.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

✎ **解:** 利用洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{2x\cos x}=-\dfrac{1}{2}$.

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:** 由定积分的对称性得 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$.

11. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

✎ **解:** 方程两边求全微分得 $\mathrm{e}^z\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}x=0$, 令 $x=0,y=1,z=0$ 得 $\mathrm{d}z+\mathrm{d}x=0$, 即 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x$.

12. 设 $\Omega$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的空间区域, 则 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

✎ **解:** 记 $D_z$ 为用平面 $z=z$ 截区域 $\Omega$ 所得的截面, 利用轮换对称性与切片法得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^1z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=6\int_0^1z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

13. $n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________.

✎ **解:** 将此行列式记为 $D_n$, 把 $D_n$ 按照第 $n$ 行进行展开得

$$\begin{aligned}D_n &= (-1)^{2n-1}\cdot(-1)\,D_{n-1}+2^n\\ &= D_{n-1}+2^n=\cdots=D_1+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2.\end{aligned}$$

14.设二维随机变量 $(X,Y)$ 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$, 则 $P(XY-Y<0)=$________.

✎ **解:** 由 $(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$ 知 $X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$, 且 $X,Y$ 相互独立, 所以

$$\begin{aligned}P(XY-Y<0)&=P((X-1)Y<0)=P(X-1>0,Y<0)+P(X-1<0,Y>0)\\ &=P(X>1)P(Y<0)+P(X<1)P(Y>0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.**(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 $a,b,k$ 的值.

✎ **解:** 当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right), \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$, 所以

$$\begin{aligned}f\,(x)&=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+bx^2+o\left(x^3\right)\\ &=(1+a)\,x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 与 $g(x)=kx^3$ 当 $x\to 0$ 时为等价无穷小, 所以 $1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, k=\frac{a}{3}$, 解得 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$.

**注:** 这题不建议大家用洛必达法则, 因为洛必达法则说的是求导前的极限可以继承求导以后的极限的性质, 反过来是不对的. 也就是说由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ 是无法直接得到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$ 的, 需要一些细节性的推导, 所以用泰勒公式一劳永逸.

16.**(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)$ 在定义域 $I$ 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0\in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 $x$ 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

✎ **解:** 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, 此切线与 $x$ 轴交点为 $\left(x_0-\frac{f\,(x_0)}{f'\,(x_0)},0\right)$. 根据题设条件可知 $\frac{1}{2}\frac{|f\,(x_0)|}{f'\,(x_0)}\cdot|f\,(x_0)|=4$, 即 $y=f(x)$ 满足方程 $y'=\frac{1}{8}y^2$, 解得 $y=-\frac{8}{8C+x}$. 因为 $f(0)=2$, 所以 $C=-\frac{1}{2}$, 故 $f(x)=\frac{8}{4-x}$.

17.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$, 曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$, 求 $f(x,y)$ 在曲线 $C$ 上的最大方向导数.

✎ **解:** 二元函数在每一点沿着梯度方向的方向导数最大, 且最大方向导数等于该点梯度的模. 注意到 $\mathbf{grad}\, f(x,y)=(1+y,1+x)$, $|\mathbf{grad}\, f(x,y)|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$, 因此问题转化为求 $\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$, 由

$$\begin{cases} F_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ F_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$. 而 $|\mathbf{grad}\, f(1,1)|=2\sqrt{2}$, $|\mathbf{grad}\, f(-1,1)|=0$, $|\mathbf{grad}\, f(2,-1)|=|\mathbf{grad}\, f(-1,2)|=3$, 所以 $f(x,y)$ 在曲线 $C$ 上的最大方向导数为 3.

18.(本题满分 10 分)

(1) 设函数 $u(x),v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

(2) 设 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导, $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

☛ **证明:** (1) 因为函数 $u(x),v(x)$ 可导, 记 $f(x)=u(x)v(x)$, 则在任意点 $x_0$ 处有

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_0)+u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}u(x)+v(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \\ &= u(x_0)v'(x_0)+v(x_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

由 $x_0$ 的任意性知 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

(2) $f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

19.(本题满分 10 分)

已知曲线 $L$ 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$, 起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$, 终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$,

计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)\,\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$.

✎ **解:** 由曲线 $L$ 的方程消去 $z$ 得 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$, 因此 $L$ 的参数方程可取为 $x=\cos\theta, y=\sqrt{2}\sin\theta, z=\cos\theta$. 其中 $y$ 从 $\sqrt{2}$ 变到 $-\sqrt{2}$, 因此 $\theta$ 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 变到 $-\dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L (y+z)\,\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left[-\left(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta\right)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+\left(1+\sin^2\theta\right)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \end{aligned}$$

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+1(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

(2) 当 $k$ 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

✎ **解:** (1) 首先注意到 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, 其中矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, 且 $|\boldsymbol{P}|=4\neq 0$, 所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(2) 设非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在两组基下的坐标都是 $\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},$$

由于矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, 即 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 对 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}$ 作初等行变换得

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix},$$

所以当且仅当 $k=0$ 时, 方程组 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 且所有非零解为 $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c\neq$

0. 那么在两个基下坐标相同的所有非零向量 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}c\\0\\-c\end{pmatrix}=c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3),c$ 为任意非零常数.

21.(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $a,b$ 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+a=2+b\\2a-3=b\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$.

(2) 由 (1) 知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&5&0\\0&3&1\end{pmatrix}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得线性无关特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 解方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 为对角阵.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

对 $X$ 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 $Y$ 为观测次数.

(1) 求 $Y$ 的概率分布;

(2) 求 $EY$.

✎ **解:** (1) 每次观测中, 观测值大于 3 的概率为 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$, 则 $Y$ 的概率分布为 $P(Y=k)=\mathrm{C}_{k-1}^1\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{k-2}\frac{1}{8}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2,k=2,3,\cdots$.

(2) $Y$ 的数学期望为 $E(Y)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}=16$, 其中我们用到幂级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},-1<x<1.$$

23.(**本题满分 11 分**)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 $\theta$ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(1) 求 $\theta$ 的矩估计量;

(2) 求 $\theta$ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 由于总体 $X\sim U[\theta,1]$, 故总体均值 $E(X)=\dfrac{\theta+1}{2}$, 令 $E(X)=\bar{X}$ 得 $\theta=2\bar{X}-1$, 即 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}-1$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)&=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1\,(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta\leqslant \min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.\end{aligned}$$

当 $\theta\leqslant\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时, 显然 $L(\theta)$ 关于 $\theta$ 单调递增, 则当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 最大, 即 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

# 第 11 章 2016 年考研数学一

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛, 则 ( )

A. $a<1$ 且 $b>1$ B. $a>1$ 且 $b>1$

C. $a<1$ 且 $a+b>1$ D. $a>1$ 且 $a+b>1$

✎ **解:** 首先有 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x = I_1+I_2$. 其中当 $x\to 0$ 时, $\frac{1}{x^a(1+x)^b} \sim \frac{1}{x^a}$, 因此 $a<1$ 时 $I_1$ 收敛. 当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x^a(1+x)^b} \sim \frac{1}{x^{a+b}}$, 因此当 $a+b>1$ 时 $I_2$ 收敛, 选 C.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2(x-1), & x<1 \\ \ln x, & x\geqslant 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

A. $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1 \end{cases}$ B. $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1 \end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$ D. $F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$

✎ **解:** 从四个选项中选一个函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$ 对任意 $x$ 成立即可, 其中 B 和 C 当 $x>1$ 时 $F'(x)\neq f(x)$, 而 A 不满足 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续, D 满足这个条件, 选 D.

3. 若 $y_1=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y_2=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 则 $q(x)=$ ( )

A. $3x(1+x^2)$ B. $-3x(1+x^2)$ C. $\frac{x}{(1+x)^2}$ D. $-\frac{x}{(1+x)^2}$

✎ **解:** 由于 $y_1=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y_2=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是原方程的解, 所以 $y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$ 是齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解, 代入可得 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}p(x)=0$, 因此 $p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$. 又 $\frac{y_1+y_2}{2}=2(1+x^2)^2$ 是方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解, 代入方程即可得到 $q(x)=3x(1+x^2)$, 选 A.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n} \end{cases}$, $n=1,2,\cdots$, 则 ( )

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

✎ **解:** 显然 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=1$. 当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时, 故 $1\leqslant\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{n+1}{n}$, 且 $x\to0^+$ 时 $n\to\infty$. 由夹逼准则得到 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1=f'_1(0)$, 因此 $f'(0)=1$, 选 D.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是　　(　)

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 因此

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P},$$

因此 A, B, D 都是对的, C 选项是不对的, 如可取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-8\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-6\end{pmatrix}$ 不相似.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为　　(　)

A. 单叶双曲面　　B. 双叶双曲面　　C. 椭球面　　D. 柱面

✎ **解:** 配方可得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2-4x_2x_3\\&=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3\left(x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2-\frac{5}{3}x_3^2,\end{aligned}$$

因此 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 表示的二次曲面为双叶双曲面.

7. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)\ (\sigma>0)$, 记 $p=P(X\leqslant\mu+\sigma^2)$, 则　　(　)

A. $p$ 随着 $\mu$ 的增加而增加　　B. $p$ 随着 $\sigma$ 的增加而增加

C. $p$ 随着 $\mu$ 的增加而减少　　D. $p$ 随着 $\sigma$ 的增加而减少

✎ **解:** 注意到 $P\left(X\leqslant\mu+\sigma^2\right)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\sigma\right)=\Phi(\sigma)$, 因此 $p$ 随着 $\sigma$ 的增加而增加, 选 B.

8. 随机试验 $E$ 有三种两两不相容的结果 $A_1,A_2,A_3$, 且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$, 将试验 $E$ 独立重复做两次, $X$ 表示两次试验中结果 $A_1$ 发生的次数, $Y$ 表示两次试验中结果 $A_2$ 发生的次数, 则 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为　　(　)

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

✎ **解:** 注意到 $X \sim B\left(2,\frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)$, 因此 $E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, D(X) = D(Y) = \frac{4}{9}$, 且 $E(XY) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{9}$(求 $E(XY)$ 只需要求 $X \neq 0, Y \neq 0$ 的部分, 否则 $XY = 0$). 因此, 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$.

## 二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2} =$________.

✎ **解:** 利用等价无穷小与洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

10.向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (x+y+z)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} =$________.

✎ **解:** 利用旋度公式直接计算得

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & z \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} + (y-1)\boldsymbol{k}.$$

11.设函数 $f(u,v)$ 可微, $z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} =$________.

✎ **解:** 原方程两边分别对 $x, y$ 求偏导数得

$$\begin{cases} z + (x+1)z'_x = 2xf(x-z,y) + x^2(1-z'_x)f'_1(x-z,y) \\ (x+1)z'_y - 2y = x^2\left(-z'_y f'_1(x-z,y) + f'_2(x-z,y)\right) \end{cases}.$$

代入 $x = 0, y = 1, z = 1$ 可得 $z'_x(0,1) = -1, z'_y(0,1) = 2$, 因此 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$.

12.设函数 $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a =$________.

✎ **解:** 把 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处作麦克劳林展开得

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x\left(1 - ax^2 + o(x^2)\right) = \left(a - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3),$$

因此 $a - \frac{1}{3} = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}, a = \frac{1}{2}$.

13.行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$________.

✎ **解:** 直接按照第一列展开得

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \left( \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\
&= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.
\end{aligned}
$$

14.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\overline{x} = 9.5$, 参数 $\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

✎ **解:** 注意到 $\mu$ 的双侧置信区间的上限与下限关于样本均值 $\overline{x}$ 对称, 因此置信下限为 $9.5 \times 2 - 10.8 = 8.2$, 从而置信区间为 $(8.2, 10.8)$.

## 三、解答题, 15 ∼ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \,\middle|\, 2 \leqslant r \leqslant 2(1 + \cos\theta), -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

✎ **解:** 化成极坐标计算可得

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D x \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\cos\theta \cdot r \mathrm{d}r \\
&= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos^2\theta + \cos^3\theta + \frac{1}{3}\cos^4\theta \right) \mathrm{d}\theta \\
&= 16 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} \right) = \frac{32}{3} + 5\pi.
\end{aligned}
$$

16.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) \mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) \mathrm{d}x$ 的值.

✎ **解:** (1) 利用定积分的定义可得微分方程 $y'' + 2y' + k = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$, 解得 $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$, 于是方程的通解为 $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. 因为 $0 < k < 1$, 所以 $\lambda_{1,2} < 0$, 于是反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left( C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \right) \mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)=0$. 又 $y(0)=y'(0)=1$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{k}\left(y''(x)+2y'(x)\right)\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{k}\left(y'(x)+2y(x)\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{k}.\end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$, 且 $f(0,y)=y+1$. $L_t$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

**解:** 由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$ 可知 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+C(y)$, 又 $f(0,y)=y+1$, 所以 $C(y)=y+1$, $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$. 从而

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\int_{L_t}\mathrm{d}f(x,y)=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t.\end{aligned}$$

令 $I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1=0$ 得 $t=2$. 且 $t<2$ 时 $I'(t)<0$, $t>2$ 时 $I'(t)>0$, 因此 $I(t)$ 的最小值为 $I_{\min}(t)=I(2)=3$.

18.(本题满分 10 分)

设有界区域 $\Omega$ 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成, $\Sigma$ 为 $\Omega$ 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**解:** 利用高斯公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x+1)\,\mathrm{d}V\\&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}x\mathrm{d}z+V(\Omega)\\&=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}x\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1\\&=2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

19.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty} x_n<2$.

**解:** (1) 由条件可得

$$\begin{aligned}\left|x_{n+1}-x_n\right| &= \left|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right| = \left|f'\left(\xi_n\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)\right| \\ &< \frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right| < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|,\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 绝对收敛.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 的前 $n$ 项和为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_{n+1}-x_n\right)=x_{n+1}-x_1$, 由 (1) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$, 在等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限得 $c=f(c)$, 即 $c$ 是函数 $g(x)=f(x)-x$ 的零点. 由于 $g'(x)=f'(x)-1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, 所以 $g(x)$ 严格单调递减. 再结合 $g(0)=1$ 可得 $1-x<g(x)<1-\frac{1}{2}x, x>0$. 由于 $g(1)>0, g(2)<0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一零点, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c\in(1,2)\subset(0,2)$.

20.(**本题满分** 11 **分**)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 $a$ 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

**解:** 对方程的增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right).$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+3&3&-3&a-4\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)$,

此时方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解, 且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

当 $a=1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$, 此时方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解, 且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\k_1-1&k_2-1\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}$, 其中 $k_1,k_2$ 为任意常数.

当 $a=-2$ 时, 由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$, 此时方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

✎ **解:** (1) 首先由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=-2$ 时, 解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{\Lambda}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{99}&=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^{99}=\boldsymbol{P\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$ 知 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{BA}^{99}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 即 $\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X,Y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y\\0, & X>Y\end{cases}$.

(1) 写出 $(X,Y)$ 的概率密度;

(2) 问 $U$ 与 $X$ 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

✎ **解:** (1) $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$

(2) 对 $0<t<1$, 有

$$P(U\leqslant 0,X\leqslant t)=P(X>Y,X\leqslant t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}t-t^3,$$
$$P(U\leqslant 0)=P(X>Y)=\frac{1}{2},P(X\leqslant t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\,\mathrm{d}y=2t^{\frac{3}{2}}-t^3.$$

由于 $P(U\leqslant 0,X\leqslant t)\neq P(U\leqslant 0)P(X\leqslant t)$, 所以 $U$ 与 $X$ 不独立.

(3)

$$\begin{aligned}F(z)&=P(U+X\leqslant z)=P(U+X\leqslant z,U=0)+P(U+X\leqslant z,U=1)\\&=P(X\leqslant z,X>Y)+P(1+X\leqslant z,X\leqslant Y)\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1\\ \dfrac{1}{2}, & z\geqslant 1\end{cases}+\begin{cases}0, & z<1\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2\\ \dfrac{1}{2}, & z\geqslant 2\end{cases}\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2\\ 1, & z\geqslant 2\end{cases}.\end{aligned}$$

23.(**本题满分** 11 **分**)

设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数. $X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本, 令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(1) 求 $T$ 的概率密度;

(2) 确定 $a$, 使得 $aT$ 为 $\theta$ 的无偏估计.

✎ **解:** (1) $T$ 的分布函数为

$$F(t)=P(T\leqslant t)=P\big(\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\big)=P(X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t)$$

$$=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \left(\int_0^t \dfrac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}\theta\right)^3, & 0<t<\theta\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \dfrac{t^9}{\theta^9}. & 0<t<\theta\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}.$$

因此 $T$ 的概率密度为 $f(t)=F'(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^2}{\theta^9}, & 0<t<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$

(2) 由无偏估计的定义, 令 $E(aT)=\displaystyle\int_0^\theta at\frac{9t^2}{\theta^9}\mathrm{d}\theta=\frac{9}{10}a\theta=\theta$, 解得 $a=\dfrac{10}{9}$.

# 第 12 章 2017 年考研数学一



**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ( )

A. $ab=\dfrac{1}{2}$ B. $ab=-\dfrac{1}{2}$ C. $ab=0$ D. $ab=2$

✎ **解:** 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$, 即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\frac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\frac{1}{2},$$

选 A.

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)\cdot f'(x)>0$, 则 ( )

A. $f(1)>f(-1)$ B. $f(1)<f(-1)$

C. $|f(1)|>|f(-1)|$ D. $|f(1)|<|f(-1)|$

✎ **解:** 由 $f(x)f'(x)>0$ 可知 $[f^2(x)]'=2f(x)f'(x)>0$, 因此 $f^2(x)$ 单调递增, 有 $f^2(1)>f^2(-1)$, 即 $|f(1)|>|f(-1)|$, 选 C.

3. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为 ( )

A. 12 B. 6 C. 4 D. 2

✎ **解:** 直接计算得 $f'_x=2xy$, $f'_y=2x^2$, $f'_z=2z$, 于是 $f'_x(1,2,0)=4$, $f'_y(1,2,0)=1$, $f'_z(1,2,0)=0$. 向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$, 所以

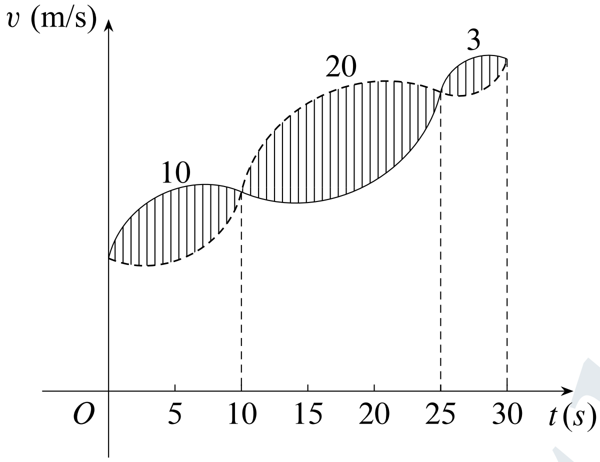
$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}(1,2,0)=4\cos\alpha+\cos\beta+0\cos\gamma=4\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=2,$$

选 D.

4. 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$ , 三块阴影部分面积是数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 $t_0$ (单位: s), 则 ( )

A. $t_0=10$ B. $15<t_0<20$ C. $t_0=25$ D. $t_0>25$

✎ **解:** 从 0 到 $t_0$ 时刻, 甲和乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}v_1(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{t_0}v_2(t)\mathrm{d}t$. 要使乙追上甲, 则有 $\int_0^{t_0}\big(v_2(t)-v_1(t)\big)\mathrm{d}t=10$, 由定积分的几何意义知 $\int_0^{25}\big(v_2(t)-v_1(t)\big)\mathrm{d}t=20-10=10$, 可知 $t_0=25$, 选 C.




第 4 题图

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $n$ 维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 则 ( )

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

✎ **解:** 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1, 它有 $n-1$ 个特征值为 0, 第 $n$ 个特征值为 $\lambda=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=1$, 因此 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 有一个特征值为 0, 不可逆, 其他矩阵都可逆, 选 $A$.

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

✎ **解:** 注意到 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都是 $2,2,1$, 要判断 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否可对角化, 充要条件是矩阵的每一个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其特征值的重数, 因此只需要看特征值 $\lambda=2$ 的情形即可. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值 2 有两个线性无关特征向量, 可对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. 对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$, 它是不可对角化的, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, 选 B.

7. 设 $A,B$ 是两个随机事件, 若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(B|A)>P(B|\bar{A})$　　B. $P(B|A)<P(B|\bar{A})$

C. $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$　　D. $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$

✎ **解:** 由条件概率的定义可知 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 即为 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$, 即 $P(AB)P(\bar{B})>P(A\bar{B})P(B)$. 于是

$$P(A\bar{B})P(B)<P(AB)\big(1-P(B)\big)=P(AB)-P(AB)P(B),$$

移项即等价于 $P(AB)>P(A\bar{B})P(B)+P(AB)P(B)=P(A)P(B)$. 根据公式的对称性可知 A 选项也等价于 $P(AB)>P(A)P(B)$, 选 A.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则下列结论中不正确的是 ( )

A. $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 $\chi^2$ 分布　　B. $2(X_n - X_1)^2$ 服从 $\chi^2$ 分布

C. $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 服从 $\chi^2$ 分布　　D. $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 $\chi^2$ 分布

✎ **解:** 对选项 B 有 $X_n - X_1 \sim N(0, 2)$, $\frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, $\frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$, B 不正确, 选项 A, C, D 都是基本结论, 都正确, 选 B.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) =$________.

✎ **解:** 由 $f(x)$ 的麦克劳林级数公式 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots (-1 < x < 1)$ 可知 $f^{(3)}(0) = 0$.

10.微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y =$________.

✎ **解:** 此二阶常系数齐次线性微分方程, 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, 特征根 $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}$, 因此方程的通解为 $y = \mathrm{e}^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right)$, 其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.

11.若曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}x - a y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$________.

✎ **解:** 令 $P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 - 1}$, $Q(x, y) = \frac{-ay}{x^2 + y^2 - 1}$, 则显然 $P, Q$ 都在区域 $D$ 内有连续的偏导数. 由于积分与路径无关, 所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 解得 $a = -1$.

12.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$________.

✎ **解:** 利用幂级数在收敛区间内的逐项积分和逐项求导得

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\right)' = -\left(\frac{-x}{1+x}\right)' = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

13.设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ________.

✎ **解:** 依题意知 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵, 所以

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_3) = r\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\big) = r(\boldsymbol{A}) = 2.$$

14.设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X)=$____.

✎ **解:** $X$ 的概率密度为 $f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}E(X)&=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x+0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x=0.25\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+4)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=2.\end{aligned}$$

**三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(**本题满分** 10 **分**)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

✎ **解:** 由复合函数的偏导数法则可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^xf_1'+f_2'(-\sin x)$, 故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(0,0)$. 进而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x\frac{\partial f_1'}{\partial x}-\cos x\cdot f_2'-\sin x\frac{\partial f_2'}{\partial x}\\&=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^xf_{11}''-\sin x\cdot f_{12}''\right)-\cos x\cdot f_2'-\sin x\left(\mathrm{e}^xf_{21}''-\sin x\cdot f_{22}''\right)\\&=\mathrm{e}^xf_1'-f_2'\cos x+\mathrm{e}^{2x}f_{11}''-2\mathrm{e}^xf_{21}''\sin x-f_{22}''\sin^2x,\end{aligned}$$

所以 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)-f_2'(1,1)+f_{11}''(1,1)$.

16.(**本题满分** 10 **分**)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

✎ **解:** 利用定积分的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\int_0^1x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{\ln2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\ln2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

17.(**本题满分** 10 **分**)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

✎ **解:** 将方程中的 $y$ 视为 $x$ 的函数, 两边求导得 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$. 令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$, 且 $x=1$ 时 $y=1$, $x=-1$ 时 $y=0$. 等式两边再对 $x$ 求导得

$$2x+2yy'^2+y^2y''+y''=0,$$

从而 $y''=-\dfrac{2(x+yy'^2)}{1+y^2}$. 于是在点 $(1,1)$ 处有 $y''=-1<0$, 从而 $y(1)=1$ 是极大值;而在点 $(-1,0)$ 处有 $y''=2>0$, 从而 $y(-1)=0$ 是极小值.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

✎ **解:** (1) 因为极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. 且由极限的保号性知存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{f(\eta)}{\eta}<0$, 即 $f(\eta)<0$. 又 $f(1)>0$, 所以由零点定理知存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$, 即 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有根.

(2) 由于 $f(0)=f(\xi)=0$, 所以根据罗尔定理知存在 $\zeta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\zeta)=0$. 令 $F(x)=f(x)f'(x)$, 则 $F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2$. 那么有 $F(0)=F(\zeta)=F(\xi)=0$, 因此再由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(0,\zeta),\xi_2\in(\zeta,\xi)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 即方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根.

19.(本题满分 10 分)

设薄片型物体 $S$ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 记圆锥面与柱面的交线为 $C$.

(1) 求 $C$ 在 $xOy$ 平面上的投影曲线的方程;

(2) 求 $S$ 的质量 $M$.

✎ **解:** (1) 联立 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 并消去 $z$ 得 $x^2+y^2=2x$, 因此曲线 $C$ 在 $xOy$ 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\ z=0\end{cases}$.

(2) 曲线 $C$ 在 $xOy$ 平面的投影曲线围成的平面区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x\}$, 则薄片的质量为

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_S u(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_D u\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{2}\iint\limits_D u\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=64.\end{aligned}$$

20.(**本题满分 11 分**)

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有三个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明: $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

✎ **解:** (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 相似, 且对角阵上至多只有一个零元, 所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 说明 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, 故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个线性无关的解向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$, 即方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解就是 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. 而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 进而方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

21.(**本题满分 11 分**)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求 $a$ 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

✎ **解:** 首先二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$. 由于二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 一定有零特征值, 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$, 解得 $a=2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

解方程组 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_1=-3$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_2=6$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得特征值 $\lambda_3=0$ 的一个单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{Q}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 即为所求正交矩阵.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 $X,Y$ 相互独立, 且 $X$ 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$, $Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 求概率 $P(Y\leqslant EY)$;

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

**解:** (1) 首先有 $EY=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$, 于是

$$P(Y\leqslant EY)=P\left(Y\leqslant\frac{2}{3}\right)=\int_0^{\frac{2}{3}} 2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(2) $Z$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)\\ &=P(Y+X\leqslant z|X=0)P(X=0)+P(Y+X\leqslant z|X=2)P(X=2)\\ &=\frac{1}{2}P(Y\leqslant z|X=0)+\frac{1}{2}P(Y+2\leqslant z)\\ &=\frac{1}{2}P(Y\leqslant z)+\frac{1}{2}P(Y\leqslant z-2)=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-2). \end{aligned}$$

因此 $Z$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2}f_Y(z)+\dfrac{1}{2}f_Y(z-2)=\begin{cases} z, & 0<z<1 \\ z-2, & 2<z<3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

23.(**本题满分 11 分**)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做了 $n$ 次测量, 该物体的质量 $\mu$ 是已知的. 设 $n$ 次测量的结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 $n$ 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$, 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计参数 $\sigma$.

(1) 求 $Z_1$ 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 $\sigma$ 的矩估计量;

(3) 求参数 $\sigma$ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 由 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. $Z_i=|X_i-\mu|\,(i=1,2,\cdots,n)$ 独立同分布, 设 $Z_1$ 的分布函数为 $F(z)$, 则

$$\begin{aligned}F(z)&=P(Z_i\leqslant z)=P(|X_i-\mu|\leqslant z)=P\left(-\frac{z}{\sigma}\leqslant\frac{X_i-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{z}{\sigma}\right)\\&=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1.\end{aligned}$$

则 $Z_1$ 的概率密度为

$$f(z)=F'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right), & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}.$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

(2) 设 $\bar{Z}$ 为样本均值, 令

$$\bar{Z}=E(Z_1)=\int_0^{+\infty}\sqrt{\pi}\sigma z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

由此可知 $\sigma$ 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\bar{Z}$.

(3) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 对应的样本值为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^n f(z_i)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n z_i^2}, & z_1,z_2,\cdots,z_n>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $z_1,z_2,\cdots,z_n>0$ 时, 取对数得 $\ln L(\sigma)=\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{2}{\pi}-n\ln\sigma-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n z_i^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n z_i^2=0,$$

解得 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n z_i^2}$, 故 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n Z_i^2}$.

# 第 13 章 2018 年考研数学一

**一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.**

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

✎ **解:** A ,B, C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0)=-\dfrac{1}{2}$, $f'_-(0)=\dfrac{1}{2}$, 选 D.

2. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为 ( )

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=0$

C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

✎ **解:** 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与已知曲面相切的平面只有两个, 显然 $z=0$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切, 故排除 C, D. 曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $(2x,2y,-1)$, 对于 A 选项, $x+y-z=1$ 的法向量为 $(1,1,-1)$, 可得 $x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}$. 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y-z=1$ 中 $z$ 不相等, 排除 A, 故选 B.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ ( )

A. $\sin 1+\cos 1$　　B. $2\sin 1+\cos 1$　　C. $2\sin 1+2\cos 1$　　D. $3\sin 1+2\cos 1$

✎ **解:** 利用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的麦克劳林级数可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}\\&=2\sin 1+\cos 1.\end{aligned}$$

因此选 B.

4. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$　　C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

✎ **解:** 利用对称性可以计算 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

✎ **解:** 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$ B. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$ D. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

✎ **解:** 对于 A, 有 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$, 即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 $X$ 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P(X<0)=$ ( )

A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

✎ **解:** 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.3,$$

于是 $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.5-0.3=0.2$, 选 A.

8. 给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2$ 已知, 给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 对总体均值 $\mu$ 进行检验, 令 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$, 则 ( )

A. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 $H_0$, 则 $\alpha=0.01$ 时必拒绝 $H_0$

B. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 $H_0$, 则 $\alpha=0.01$ 时必拒绝 $H_0$

C. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 $H_0$, 则 $\alpha=0.01$ 时必接受 $H_0$

D. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 $H_0$, 则 $\alpha=0.01$ 时必接受 $H_0$

✎ **解:** 显著性水平为 $\alpha$ 的假设检验的接受域就是置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, 当 $\alpha$ 变小时, 置信水平变大, 置信区间变大, 也就是接受域变大, 因此选 D.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin(kx)}}=\mathrm{e}$, 则 $k=$________.

✎ **解:** 原极限为 $1^{\infty}$ 型, 故恒等变形为

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1+\tan x}{-2\tan x}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{k}}.$$

所以 $-\dfrac{2}{k}=1, k=-2.$

10.设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$, 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\displaystyle\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:** 由题意知 $f(0)=0, f(1)=2, f'(1)=2^x\ln 2\big|_{x=1}=2\ln 2.$ 由分部积分公式, 原积分等于 $xf'(x)\big|_0^1-\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-2.$

11.设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$, 则 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________.

✎ **解:** 由旋度定义 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$, 可知 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.$

12.设 $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\displaystyle\oint_L xy\,\mathrm{d}s=$________.

✎ **解:** 由对称性得

$$\begin{aligned}\oint_L xy\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L(-1)\,\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

13.设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的线性无关的特征向量. 又 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}^2$ 的同一个特征值所对应的特征向量, 因此 $\boldsymbol{A}^2$ 有二重特征值 1. 又 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, 则其特征值为 $-1,1$, 故 $|\boldsymbol{A}|=-1.$

14.设随机事件 $A$ 与 $B$ 相互独立, $A$ 与 $C$ 相互独立, $BC=\varnothing$. 若

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}, P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C) =$ ________.

✎ **解:** 因为 $BC=\varnothing$, $P(BC)=0$, 故 $P(ABC)=0$.

$$\begin{aligned} P(AC|AB\cup C) &= \frac{P[(ABC)\cup(AC)]}{P(AB\cup C)} \\ &= \frac{P(AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)} \\ &= \frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

解得 $P(C)=\frac{1}{4}$.

## 三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分** 10 **分**)

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

✎ **解:** 利用分部积分法

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx &= \frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}d\left(e^{2x}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+e^x-1}\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{x}}{\sqrt{e^x-1}}d\left(e^x\right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}d\left(e^x\right) &= \int\frac{t}{\sqrt{t-1}}dt = \int\frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}dt \\ &= \int\sqrt{t-1}dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t-1}} \\ &= \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{t-1}+C \\ &= \frac{2}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}+C \end{aligned}$$

故 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C_1$.

16.(**本题满分** 10 **分**)

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

✎ **解:** 设分成的三段依次为 $x,y,z$, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi},\frac{y}{4},\frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

**方法一** 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程 $\begin{cases} f_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ f_y'=\frac{y}{8}+\lambda=0\\ f_z'=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0\\ x+y+z=2\end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$, 并且黑塞矩阵 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

**方法二** 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$ 时, $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

17.(本题满分 10 分)

设 $\Sigma$ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

✎ **解:** 取曲面 $\Sigma_1: x=0, 3y^2+3z^2\leqslant 1$, 法向量方向指向 $x$ 轴负向. 记 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 和 $\Sigma_1$ 所围成的区域, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iiint_{\Omega}\left(1+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V+3\iint_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{1-3y^2-3z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}r^2\sqrt{1-3r^2}r\,\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{45}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 所以

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{14\pi}{45}.$$

18.(本题满分 10 分)

☞已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(1) 当 $f(x)=x$ 时, 求微分方程的通解.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 $T$ 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 $T$ 为周期的解.

✎ **解:**

(1) 方程两边乘以 $\mathrm{e}^x$ 得 $\left(\mathrm{e}^x y\right)'=\mathrm{e}^x\left(y'+y\right)=x\mathrm{e}^x$, 于是 $\mathrm{e}^x y=(x-1)\mathrm{e}^x+C$, 因此通解为 $y=C\mathrm{e}^{-x}+x-1$.

(2) 等式两边乘以 $\mathrm{e}^x$ 可得 $(\mathrm{e}^x y)'=\mathrm{e}^x f(x)$, 通解可表示为 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)$. 现在 $f(x+T)=f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
y(x+T)&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_T^{T+x}f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(u+T)\,\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}u+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(u)\,\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}u+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x}\left(\left(\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-T}+\int_0^{x}f(u)\,\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

要使得这个解是周期函数, 则 $y(x+T)=y(x)$, 即满足 $\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-T}=C$, 由此解得 $C=\frac{\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}$, 因此 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\frac{\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}\right)$ 就是唯一的周期函数解.

19.(本题满分 10 分)

☞此题来自蒲和平大学生数学竞赛教程 240 页.

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1\,(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

✎ **解:** 首先由 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1\,(n = 1, 2, \cdots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $xe^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \dfrac{e^x - 1}{x} < e^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 $a$ 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

✎ **解:** (1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = c(-2, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.
如果 $a = 2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

21.(本题满分 11 分)

已知 $a$ 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $a$;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

✎ **解:** (1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\0&1&-a&-1&1-a&-1\\0&0&0&0&a-2&0\end{array}\right).$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

22.(本题满分 11 分)

已知随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, $X$ 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$, $Y$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布, 令 $Z=XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(2) 求 $Z$ 的概率分布.

✎ **解:** (1) 直接计算可知 $E(X)=0, E(X^2)=1$, 而 $Y\sim P(\lambda), E(Y)=\lambda$, 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X,Z)=\mathrm{Cov}\,(X,XY)&=E(X^2Y)-E\,(X)\,E\,(XY)\\&=E(X^2)E\,(Y)-(EX)^2E\,(Y)=\lambda.\end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(X=1)P(Z=k|X=1)+P(X=-1)P(Z=k|X=-1)\\&=P(X=1)P(Y=k)+P(X=-1)P(Y=-k)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k).$$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{2k!}$;
当 $k=0$ 时, $P(Z=0)=P(Y=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}$;
当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{\lambda^{-k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(-k)!}$.
因此综上所述可得

$$P(Z=k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm 1,\pm 2,\cdots \\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0\end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本, 记 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.

✎ **解:** (1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 $\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, 因此 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$, 所以

$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E(|X|)=\sigma,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2,$$

$$D(\hat{\sigma})=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{1}{n}\left(E(X^2)-(E|X|)^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

# 第 14 章  2019 年考研数学一



一、选择题, 1 ∼ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小, 则 $k =$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

✎ **解:** 当 $x \to 0$ 时, $x - \tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$, 因此选 C.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0 \\ x\ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ( )

A. 可导点, 极值点　　B. 不可导点, 极值点

C. 可导点, 非极值点　　D. 不可导点, 非极值点

✎ **解:** $\lim\limits_{x\to 0^-} x|x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 且当 $x \in \mathring{U}(0)$ 时, $f(x) < 0 = f(0)$, 因此 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 而极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ 不存在, 因此不可导, 选 B.

3. 设 $u_n$ 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

✎ **解:** 正确答案选 D. 因为 $u_n$ 单调递增有界, 故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 存在, D 选项级数的部分和数列收敛, 因此级数收敛. A 中只要 $a \neq 0$ 就发散, B 则一定发散. C 中可取反例 $u_n = -\dfrac{1}{n}$, 则 $1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, 调和级数发散.

4. 设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑闭曲线 $C$ 都有 $\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为 ( )

A. $y - \dfrac{x^2}{y}$　　B. $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^2}$　　C. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$　　D. $x - \dfrac{1}{y}$

✎ **解:** 由题意, 应当选择函数 $P(x, y)$ 使得在整个上半平面上均有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$ 成立, 选 D. (注意 C 选项在 $y$ 轴上偏导数不存在)

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 ( )

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$　　B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$　　C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda$ 满足 $\lambda^2+\lambda=2$, 因此 $\lambda=1$ 或 $-2$. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,-2,1$. 因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2, 选 C.

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i1}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,2,3)$$

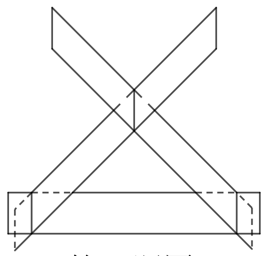
组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

B. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

C. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

D. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$



第 6 题图

✎ **解:** 令 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}=(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$, 由于三个平面无交点, 因此方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解. 即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant 3$. 再根据任意两个平面都不重合或平行, 可知 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行线性无关, 因此 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 因此只能是 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 选 A.

7. 设 $A,B$ 为随机事件, 则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 ( )

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

✎ **解:** 显然 $P(A)=P(B)$ 等价于 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$, 即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$, 选 C. 对于选项 A 和 D, 取 $A=B=\Omega$ 可排除; 对于选项 B, 取 $B=\overline{A}$ 即可排除.

8. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$ ( )

A. 与 $\mu$ 无关, 而与 $\sigma^2$ 有关　　B. 与 $\mu$ 有关, 而与 $\sigma^2$ 无关

C. 与 $\mu,\sigma^2$ 都有关　　D. 与 $\mu,\sigma^2$ 都无关

✎ **解:** 由条件可知 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$, 因此

$$\begin{aligned}P\{|X-Y|<1\}&=P\left\{\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1,\end{aligned}$$

此概率与 $\mu$ 无关, 而与 $\sigma^2$ 有关, 选 A.

**二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. 设函数 $f(u)$ 可导, $z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

✎ **解:** 首先 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos x f'(\sin y-\sin x)+y, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos y f'(\sin y-\sin x)+x$, 因此 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

10.微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$__________.

✎ **解:** 方程变量分离可得 $\dfrac{2y}{y^2+2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$, 两边积分得 $y^2+2=C\mathrm{e}^x$. 由 $y(0)=1$ 可知 $C=3$, 方程的解为 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$. (注意初值条件, 要舍去负的解)

11.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)$=________.

✎ **解:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n}=\cos\left(\sqrt{x}\right)$.

12.设 $\Sigma$ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

✎ **解:** $\Sigma$ 在 $xOy$ 面的投影区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$, 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

13.设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ________.

✎ **解:** 由条件可知 $\boldsymbol{A}$ 有且只有两个线性无关的列向量, 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbb{R}$.

14.设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $F(x)$ 为 $X$ 的分布函数, $E(X)$ 为 $X$ 的数学期望, 则 $P\big(F(X)>E(X)-1\big)=$________.

✎ **解:** 首先 $E(X)=\displaystyle\int_0^2 x\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. 再令 $Y=F(X)$, 则当 $y\leqslant 0$ 时, $P(Y\leqslant y)=0$; 当 $y\geqslant 1$ 时, $P(Y\leqslant y)=1$ (注意分布函数 $F(X)$ 的取值范围). 当 $0<y<1$ 时,

$$P(Y\leqslant y)=P\big(F(X)\leqslant y\big)=P\big(X\leqslant F^{-1}(y)\big)=F\big(F^{-1}(y)\big)=y.$$

因此 $Y=F(X)\sim U(0,1)$, $P\big(F(X)>E(X)-1\big)=P\left(Y>\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

**注:** 事实上我们在这里证明了一个很重要的结论: 如果 $X$ 是一个连续型随机变量, $F(x)$ 是它的分布函数, 则随机变量 $Y=F(X)\sim U(0,1)$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

**解:** (1) 由条件可得 $\left(y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(y' + xy\right) = 1$, 于是 $y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = x + C$. 由 $y(0) = 0$ 可知 $C = 0$, $y = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) 计算可得 $y' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(1 - x^2)$, $y'' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(x^3 - 3x)$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, \pm\sqrt{3}$. 再根据二阶导数的符号可得凹区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$. 拐点为 $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$

16.(本题满分 10 分)

设 $a, b$ 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l} = -3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 $a, b$;

(2) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geqslant 0)$ 的面积.

**解:** (1) 多元函数在一点处方向导数的最大值是沿着梯度方向的方向导数, 且最大值等于梯度的模. 由条件可得 $\mathbf{grad}\, z = (2ax, 2by)$, 于是 $\mathbf{grad}\, z\big|_{(3,4)} = (6a, 8b)$, 因此 $\dfrac{6a}{-3} = \dfrac{8b}{-4}$ 且 $a, b < 0$, 解得 $a = b$. 再由 $10 = \sqrt{(6a)^2 + (8b)^2}$ 可得 $a = b = -1$.

(2) 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 $xOy$ 面的投影区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, 则曲面的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r\, \mathrm{d}r = \frac{13}{3}\pi. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

☞求曲线 $y = \mathrm{e}^{-x} \sin x (x \geqslant 0)$ 与 $x$ 轴之间图形的面积.

**解:** 利用直角坐标系下的面积公式可得所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} |\sin x|\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x} |\sin x|\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n\pi + t)} |\sin (n\pi + t)|\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

☞此题源自2012 年第四届全国大学生数学竞赛非数类考题.

$$= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \sin t \mathrm{d}t \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}$$
$$= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)}.$$

其中利用两次分部积分可得 $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \sin t \mathrm{d}t = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$.

18.(本题满分 10 分)

☞设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

✎ **解:** (1) 当 $0 < x < 1$ 时, $x^n\sqrt{1-x^2} > x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$, 因此由 $\{a_n\}$ 的定义可知 $a_n > a_{n+1}$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}\left(x^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n\left(x^2-1\right)+x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n-1} \mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n+1} a_n - x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{n+1} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1} a_n + \frac{n-1}{n+1} a_{n-2},
\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{n+2}{n+1} a_n = \dfrac{n-1}{n+1} a_{n-2}$, 即 $a_n = \dfrac{n-1}{n+2} a_{n-2}\ (n = 2,3,\cdots)$.

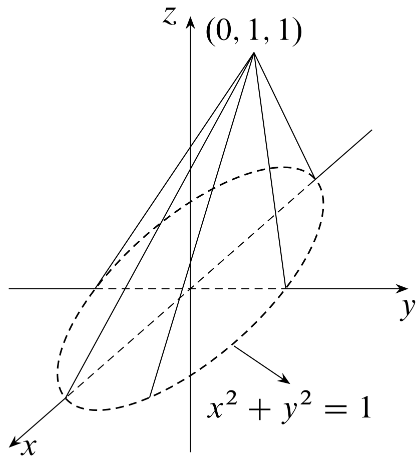
(2) 由于 $\dfrac{n-1}{n+2} = \dfrac{a_n}{a_{n-2}} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < \dfrac{a_n}{a_n} = 1$, 由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

19.(本题满分 10 分)

设 $\Omega$ 是锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 $\Omega$ 的形心坐标.

✎ **解:** 这题并不是一般的圆锥面, 为此我们给出锥面的一般定义: 过定点 $V$ 的动直线 $L$ 沿着一条确定的曲线 $\Gamma$ 移动所形成的曲面 $S$ 叫做锥面. 直线 $L$ 称为 $S$ 的母线, 曲线 $\Gamma$ 称为 $S$ 的准线, 而定点 $V$ 则是 $S$ 的顶点. 在本题中, 锥面与 $xOy$ 面的交线 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 就是母线, 顶点则是 $(0, 1, 1)$, 如图. 此锥面在 $xOy$ 面的投影区域就是 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, 因此这题我们采用切片法 (先二后一) 计算.

☞此题源自1993 年北京师范大学数学分析考研题




$x^2+(y-z)^2 \leqslant (1-z)^2, 0 \leqslant z \leqslant 1$

第 19 题图

设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由于 $\Omega$ 是关于 $yOz$ 面对称的, 由对称性可知 $\bar{x}=0$. 对固定的 $z$, 记 $D_z=\{(x,y)|x^2+(y-z)^2 \leqslant (1-z)^2\}$, 利用切片法可得

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 (1-z)^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 z(1-z)^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{12},$$

$$\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 z(1-z)^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{12}.$$

其中积分 $\iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中, 令 $y-z=u, \mathrm{d}y=\mathrm{d}u$, 则

$$\iint\limits_{D_z} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+u^2 \leqslant (1-z)^2} (u+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \pi z(1-z)^2.$$

因此利用形心坐标公式得 $\bar{y}=\bar{z}=\dfrac{\pi/12}{\pi/3}=\dfrac{1}{4}$, 形心坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 $a,b,c$;

(2) 证明: $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

✎ **解:** (1) 由题意可知 $b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{cases} b+c+1=1 \\ 2b+3c+a=1 \\ b+2c+3=1 \end{cases},$$

解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(2) 由于 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\neq 0$, 因此 $r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=3$, 这说明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 再由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21.(**本题满分 11 分**)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 $x, y$;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

✎ **解:** (1) 由相似矩阵的性质可得

$$\begin{cases} |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}| \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-8=-2y \\ -2+x-2=2-1+y \end{cases},$$

解得 $x=3, y=-2$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 是上三角矩阵, 因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $2,-1,-2$.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当 $\lambda_1=2$ 时, 由方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\lambda_1$ 的一个特征向量 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_2=-1$ 时, 由方程 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\lambda_2$ 的一个特征向量 $\xi_1=(-1,3,0)^{\mathrm{T}}$;
当 $\lambda_3=-2$ 时, 由方程 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\lambda_3$ 的一个特征向量 $\xi_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$.

同理对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 也可求出一组线性无关特征向量, 取 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=$ $\operatorname{diag}\{2,-1,-2\}$. 故

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\Rightarrow(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1})=\boldsymbol{B},$$

因此当取

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

时, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立, $X$ 服从参数为 1 的指数分布, $Y$ 的概率分布为 $P(Y=-1)=p$, $P(Y=1)=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 $Z$ 的概率密度;

(2) $p$ 为何值时, $X$ 与 $Z$ 不相关;

(3) $X$ 与 $Z$ 是否相互独立?

✎ **解:** (1) $X$ 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases}$. 由 $X,Y$ 的独立性可得 $Z$ 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(XY\leqslant z)\\&=P(XY\leqslant z\,|Y=-1)P(Y=-1)+P(XY\leqslant z\,|Y=1)P(Y=1)\\&=pP(-X\leqslant z\,|Y=-1)+(1-p)P(X\leqslant z\,|Y=1)\\&=pP(X\geqslant -z)+(1-p)P(X\leqslant z)\\&=p\big(1-F_X(-z)\big)+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\1+(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $Z$ 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z\leqslant 0\\(1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z>0\end{cases}$

(2) 由条件可得

$$\operatorname{Cov}(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=1-2p,$$

因此当 $p=\frac{1}{2}$ 时, $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$, 即 $\rho_{XZ}=0$. 因此 $p=\frac{1}{2}$ 时, $X$ 与 $Z$ 不相关.

(3) 由 (2) 可知当 $p\neq\frac{1}{2}$ 时, $X$ 和 $Z$ 是相关的, 从而不独立. 而当 $p=\frac{1}{2}$ 时, 只需要注意到事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\subset\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, 所以

$$P\left(X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)\neq P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

因此对任意 $p\in(0,1)$, $X,Z$ 不独立.

23.(本题满分 11 分)

设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases},$$

$\mu$ 是已知参数, $\sigma>0$ 是未知参数, $A$ 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(1) 求 $A$;

(2) 求 $\sigma^2$ 的最大似然估计量.

✎ **解:** (1) 由概率密度的归一性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 即

$$\begin{aligned}\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x&=\frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,\end{aligned}$$

得 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2\cdots,x_n\geqslant\mu\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu$ 时, 取对数 $\ln L\left(\sigma^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L\left(\sigma^2\right)}{\mathrm{d}\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\right]=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0,$$

解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$, 因此 $\sigma^2$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

# 2020 年考研数学一

四、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是 ( )

A. $\int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt$ B. $\int_0^x \ln\left(1 + \sqrt{t^3}\right) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt$ D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} \, dt$

✎ **解:** 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$, 那么

$$\lim_{x \to a} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当 $x \to 0^+$ 时, 我们有

$$\int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt \sim \int_0^x t^2 \, dt = \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^x \ln\left(1 + \sqrt{t^3}\right) dt \sim \int_0^x \sqrt{t^3} \, dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x} \sin t^2 \, dt \sim \int_0^{\sin x} t^2 \, dt = \frac{1}{3}\sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} \, dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5,$$

正确答案选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, 则 ( )

A. 当 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$

✎ **解:** 选项 A 和 B 不涉及到 $f(0)$ 是否有定义, 无法保证 $f(x)$ 是否在 $x = 0$ 处的连续性, 所以可导性更加得不到. 对于选项 C 和 D, 如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 那么由 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ 可知 $f(0) = 0$, 且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = A$ 存在, 那么

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = A \cdot 0 = 0,$$

正确答案选 C, 而 D 显然可取反例 $f(x) = x$.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f(0,0) = 0$, $\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)\Big|_{(0,0)}$, 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 则 ( )

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\boldsymbol{n}\cdot(x, y, f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\boldsymbol{n}\times(x, y, f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x, y, f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x, y, f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

✎ **解:** 由于函数 $f(x, y)$ 在 $(x, y) = (0,0)$ 处可微, 且 $f(0,0) = 0$ 那么有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}'(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-\boldsymbol{n}\cdot(x, y, f(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\boldsymbol{n}\cdot(x, y, f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, 选 A.

4. 设 $R$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, $r$ 是实数, 则 ( )

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geqslant R$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| < R$

C. $|r| \geqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散

D. $|r| \leqslant R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

✎ **解:** 注意到当 $|r| < R$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛, 那么此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| < +\infty,$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}|$ 收敛. 也就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 是绝对收敛的, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 自然也是收敛的, 那么选项 A 的逆否命题正确, 因此正确答案选 A. 对于选项 B 和 C, 如果取 $a_{2n-1} = 1, a_{2n} \equiv 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 对任意 $r$ 均收敛. 对于选项 D, 如取 $a_n \equiv 1$, 那么 $R = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 在 $r = R = 1$ 处发散.

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$, 则 ( )

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$

B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{A}$

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{A}$

D. 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解

✎ **解:** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$ 说明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AQ}$, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BQ}^{-1} = \boldsymbol{BP}$, 选 B, 其他选项易知都不对.

6. 已知直线 $L_1: \dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}, i=1,2,3$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

✎ **解:** $L_1$ 和 $L_2$ 的方向向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, 这两条直线交于一点, 说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 点 $P_1(a_2,b_2,c_2)\in L_1$, $P_2(a_3,b_3,c_3)\in L_2$, 由于 $L_1,L_2$ 共面, 所以

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3-a_2\\b_1&b_2&b_3-b_2\\c_1&c_2&c_3-c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 选 C. 而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可能是零向量, 因此 A 和 B 均不对.

7. 设 $A,B,C$ 为三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 $A,B,C$ 中恰有一个事件发生的概率为 ( )

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

✎ **解:** 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC)=\frac{7}{12},$$

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P(\bar{B}\bar{C})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{B\cup C})-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(B\cup C)-[1-P(A\cup B\cup C)]=P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)\\&=\frac{7}{12}-P(B)-P(C)+P(BC)=\frac{1}{6},\\P(\bar{A}B\bar{C})&=\frac{7}{12}-P(A)-P(C)+P(AC)=\frac{1}{6},\\P(\bar{A}\bar{B}C)&=\frac{7}{12}-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{12},\end{aligned}$$

因此 $A,B,C$ 中恰有一个事件发生的概率为 $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$, 选 D.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本, 其中 $P(X=0)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)$ 的近似值为 ( )

A. $1-\Phi(1)$　　B. $\Phi(1)$　　C. $1-\Phi(0.2)$　　D. $\Phi(0.2)$

**解:** 注意到 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}\sim B\left(100,\dfrac{1}{2}\right)$, 那么 $EY=50, DY=25$, 且由中心极限定理知 $\dfrac{Y-50}{5}$ 近似服从标准正态分布, 于是

$$P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right)=P(Y\leqslant 55)=P\left(\frac{Y-50}{5}\leqslant 1\right)\approx\Phi(1),$$

选 B.

**五、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.**

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)=$________.

**解:** 通分以后利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(1+x)^2}-e^x\right)=-1.\end{aligned}$$

10.设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$, 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

**解:** 由参数方程求导公式可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}\Big/\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

代入 $t=1$ 可得 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

11.若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0\,(a>0)$, 且 $f(0)=m, f'(0)=n$, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=$________.

**解:** 微分方程 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$. 如果 $a\geqslant 2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}<0$, 此时方程的通解为

$$f(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

如果 $0<a<2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4-a^2}i}{2}$, 特征根的实部分为负, 此时方程的通解为

$$f(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

总之一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. 那么

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]\,\mathrm{d}x = -\big[f'(x)+af(x)\big]\Big|_0^{+\infty} = n+am.$$

12.设函数 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

✎ **解:** 令 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{x(xy)^2}\cdot x = x\mathrm{e}^{x^2y^2}$, 于是 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\mathrm{e}^{x^3y^2}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}$, 代入 $(x,y)=(1,1)$ 得 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=4\mathrm{e}$.

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=$________.

✎ **解:** 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1\\ a & 1 & -1\\ 0 & a & a\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1\\ a & 2 & -1\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix} = a^4-4a^2.$$

14.设 $X$ 服从区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布, $Y=\sin X$, 则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

✎ **解:** $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 显然 $E(X)=0$, 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=E(X\sin X)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

**六、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.**

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

✎ **解:** 由 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}\right) = -\dfrac{1}{216}$.

16.(本题满分 10 分)

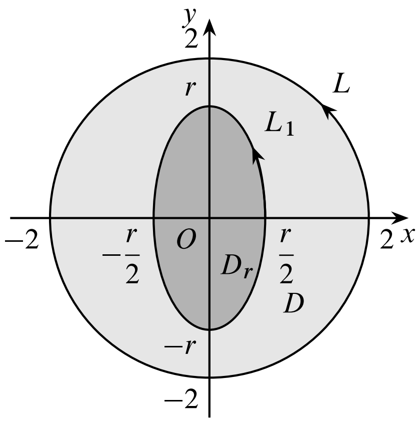
计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{4x - y}{4x^2 + y^2} \mathrm{d}x + \frac{x + y}{4x^2 + y^2} \mathrm{d}y$, 其中 $L$ 是 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

✎ **解:** 令 $P(x, y) = \dfrac{4x - y}{4x^2 + y^2}, Q(x, y) = \dfrac{x + y}{4x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} = 0.$$

如图, 取闭曲线 $L_1 : 4x^2 + y^2 = r^2$, $r$ 充分小使得 $L_1$ 在 $L$ 所包围的区域内, 方向为逆时针. 设 $L$ 与 $L_1$ 所围成的区域为 $D$, $L_1$ 所围成的椭圆区域为 $D_r$, 则利用格林公式, 可知原曲线积分

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L-L_1} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y + \int_{L_1} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \int_{L_1} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{r^2} \int_{L_1} (4x - y) \,\mathrm{d}x + (x + y) \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{r^2} \iint\limits_{D_r} [1 - (-1)] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r = \pi. \end{aligned}$$




第 16 题图

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n + 1)a_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

✎ **解:** *方法一* 首先有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n + 1}{n + \frac{1}{2}}\right| = 1$, 因此幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 即当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 现在令 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则当 $|x| < 1$ 时,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a x_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x S'(x) + \frac{1}{2} S(x).$$

因此 $S'(x) - \dfrac{1}{2(1-x)} S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, 解此一阶线性微分方程得 $S(x) = \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}} - 2$. 再由 $S(0) = C - 2 = 0$ 得 $C = 2$, 因此和函数 $S(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 2, |x| < 1$.

方法二　收敛半径同方法一, 直接求和函数. 注意到

$$a_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} a_{n-1} = \frac{2n-1}{2n} a_n = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{3}{4} a_1 = 2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

那么当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin^2 t}{1 - x \sin^2 t} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1 - x \sin^2 t} - 1 \right) \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + (1-x) \sin^2 t} - 2 \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan t)}{1 + (1-x) \tan^2 t} - 2 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctan\left(\sqrt{1-x} \tan t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2.
\end{aligned}$$

**注:** 如果熟记麦克劳林级数

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, -1 < x < 1$$

的话, 方法二的计算会更快.

18.(**本题满分 10 分**)

设 $\Sigma$ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4)$ 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [x f(xy) + 2x - y] \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + [y f(xy) + 2y + x] \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + [z f(xy) + z] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

**解:** 令 $F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$, 那么

$$F'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, F'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, F'_z = 1.$$

曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面的投影区域为圆环 $D_{xy} = \{(x, y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ 则

$$I = \iint_{\Sigma} [x f(xy) + 2x - y] \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + [y f(xy) + 2y + x] \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + [z f(xy) + z] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{\Sigma} \left\{[xf(xy)+2x-y]\frac{F'_x}{F'_z} + [yf(xy)+2y+x]\frac{F'_y}{F'_z} + zf(xy)+z\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \left\{[xf(xy)+2x-y]\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} + [yf(xy)+2y+x]\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + zf(xy)+z\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{14}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$, 证明:

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2) 若对任意 $x\in(0,2)$, $|f'(x)|\leqslant M$, 则 $M=0$.

☛ **证明:** (1) 设 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|=|f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1\in(0,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,2)$, 使得

$$
|f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(x_0)-f(0)}{x-x_0}\right| = \frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)| = \left|\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}\right| = \frac{M}{2-x_0}.
$$

注意到

$$
\left|f'(\xi_1)\right| + \left|f'(\xi_2)\right| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2-x_0} \geqslant \frac{2M}{\sqrt{x_0(2-x_0)}} \geqslant M,
$$

那么取 $|f'(\xi)|=\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 由条件有 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\geqslant 1$; $|f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-x_0}\leqslant M$, 因此 $x_0\leqslant 1$. 于是只能 $x_0=1$, 即 $|f(1)|=M$.

$$
M=|f(1)-f(0)| = \left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 M\,\mathrm{d}x = M,
$$

等号成立当且切仅当 $|f'(x)|\equiv M, x\in[0,1]$. 而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1)=0$, 因此 $M=0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 $a,b$ 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

✎ **解:** (1) 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似, 所以 $\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+4=a+b\\1\times4=ab\end{cases}$, $a\geqslant b\Rightarrow a=4,b=1$.

(2) 易知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$. 当 $\lambda_1=0$ 时, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-2)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_2=5$ 时, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2)^{\mathrm{T}}$, 方程组 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_2=(2,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$, 且

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $\boldsymbol{Q}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&4\end{pmatrix}$.

21.(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, 且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

✎ **解:** (1) 由题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 为可逆矩阵.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$ 相似. 不难知 $\boldsymbol{B}$ 有两个不同的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $2,-3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

22.(**本题满分 11 分**)

设随机变量 $X_1,X_2,X_3$ 相互独立, 其中 $X_1$ 与 $X_2$ 均服从标准正态分布, $X_3$ 的概率分布为 $P(X_3=0)=P(X_3=1)=\dfrac{1}{2}$, $Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 $(X_1,Y)$ 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明: 随机变量 $Y$ 服从标准正态分布.

✎ **解:** (1) $(X_1,Y)$ 的分布函数为

$$F(x,y)=P(X_1\leqslant x,Y\leqslant y)=P(X_1\leqslant x,Y\leqslant y)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(X_3=0, X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) + P(X_3=1, X_1 \leqslant x, Y \leqslant y) \\
&= P(X_3=0, X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant y) + P(X_3=1, X_1 \leqslant x, X_1 \leqslant y) \\
&= \frac{1}{2} P(X_1 \leqslant x) P(X_2 \leqslant y) + \frac{1}{2} P(X_1 \leqslant \min\{x, y\}) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(x), & x \leqslant y \\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y), & x > y \end{cases}.
\end{aligned}
$$

(2) $Y$ 的边缘分布函数为 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$, 因此 $Y$ 服从标准正态分布.

23.(**本题满分 11 分**)

设某种元件的使用寿命 $T$ 的分布函数为

$$
F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

其中 $\theta, m$ 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(2) 任取 $n$ 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 若 $m$ 已知, 求 $\theta$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

✎ **解:** (1) 当 $s > 0, t > 0$ 时

$$
P(T > t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m},
$$

$$
\begin{aligned}
P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} \\
&= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = \mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}.
\end{aligned}
$$

(2) 总体 $T$ 的概率密度为 $f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} \dfrac{m t^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$
L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n} t^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \cdots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.
$$

当 $t_1, t_2, \cdots, t_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n} t^m + n \ln m + (m-1)\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm \ln\theta$, 令

$$
\frac{\mathrm{d}\ln(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^{n} t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^m\right)^{\frac{1}{m}},
$$

即 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.