目录

第 1 章 2018 年考研数学一

一、选择题, $1 \sim 8$ 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

✎ **解:** A,B,C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0)=-\dfrac{1}{2}, f'_-(0)=\dfrac{1}{2}$.

2. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为 ( )

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=0$

C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

✎ **解:** 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与已知曲面相切的平面只有两个, 显然 $z=0$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切, 故排除 C,D. 曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $(2x,2y,-1)$, 对于 A 选项, $x+y-z=1$ 的法向量为 $(1,1,-1)$, 可得 $x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2}$. 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y-z=1$ 中 z 不相等, 排除 A, 故选 B.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ ( )

A. $\sin 1+\cos 1$　　B. $2\sin 1+\cos 1$　　C. $2\sin 1+2\cos 1$　　D. $3\sin 1+2\cos 1$

✎ **解:** 利用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的麦克劳林级数可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}\\&=2\sin 1+\cos 1.\end{aligned}$$

因此选 B.

4. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$　　C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

✎ **解:** 利用对称性可以计算 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✎ **解:** 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$ B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$ D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

✎ **解:** 对于 A, 有 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B}))$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$, 即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) \geqslant \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.6$, 则 $P(X < 0) =$ ( )

A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

✎ **解:** 由 $f(1+x) = f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.3,$$

于是 $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.5 - 0.3 = 0.2$, 选 A.

8. 给定总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,σ^2 已知, 给定样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 对总体均值 μ 进行检验, 令 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$, 则 ( )

A. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0

B. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必拒绝 H_0

C. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0

D. 若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0, 则 $\alpha = 0.01$ 时必接受 H_0

✎ **解:** 显著性水平为 α 的假设检验的接受域就是置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间, 当 α 变小时, 置信区间会变大, 也就是接受域变大, 因此选 D.

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin(kx)}}=\mathrm{e}$, 则 $k=$________.

✎ **解:** 原极限为 1^{∞} 型, 故恒等变形为

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1+\tan x}{-2\tan x}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin(kx)}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{k}}.$$

所以 $-\dfrac{2}{k}=1, k=-2$.

10. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 若曲线 $y=f(x)$ 的过点 $(0,0)$, 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切, 则 $\displaystyle\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:** 由题意知 $f(0)=0, f(1)=2, f'(1)=2^x\ln 2\big|_{x=1}=2\ln 2$. 由分部积分公式, 原积分等于 $xf'(x)\,|_0^1-\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$
$=2\ln 2-2$.

11. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$, 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________.

✎ **解:** 由旋度定义 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & xz\end{vmatrix}=y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$, 可知 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

12. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\displaystyle\oint_L xy\,\mathrm{d}s=$________.

✎ **解:** 由对称性得

$$\begin{aligned}\oint_L xy\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L(-1)\,\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

13. 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

✎ **解:** 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 A 的线性无关的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的线性无关的特征向量. 又 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}^2$ 有二重特征值 1. 又 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值, 则其特征值为 $-1,1$, 故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

14. 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC=\varnothing$. 若

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$________.

✎ **解:** 因为 $BC=\varnothing$, $P(BC)=0$, 故 $P(ABC)=0$.

$$
\begin{aligned}
P\left(AC|AB\cup C\right) &= \frac{P\left[(ABC)\cup(AC)\right]}{P\left(AB\cup C\right)}\\
&= \frac{P\left(AC\right)}{P\left(AB\right)+P\left(C\right)-P\left(ABC\right)}\\
&= \frac{P\left(A\right)P\left(C\right)}{P\left(A\right)P\left(B\right)+P\left(C\right)}=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

解得 $P(C)=\frac{1}{4}$.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.(**本题满分 10 分**)

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

✎ **解:** 利用分部积分法

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx &= \frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}d\left(e^{2x}\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+e^x-1}\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx\\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx\\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{x}}{\sqrt{e^x-1}}d\left(e^x\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}d\left(e^x\right) &= \int\frac{t}{\sqrt{t-1}}dt=\int\frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}dt\\
&= \int\sqrt{t-1}dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t-1}}\\
&= \frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{t-1}+C\\
&= \frac{2}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}+C
\end{aligned}
$$

故 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C_1$.

16.(**本题满分 10 分**)

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在, 求出最小值.

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

✎ **解:** 设分成的三段依次为 x, y, z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程 $\begin{cases} f_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ f_y'=\frac{y}{8}+\lambda=0 \\ f_z'=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$, 并且 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 时, $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

17.**(本题满分 10 分)**

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

✎ **解:** 取曲面 $\Sigma_1: x=0, 3y^2+3z^2\leqslant 1$, 法向量方向指向 x 轴负向. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iiint_{\Omega}\left(1+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V+3\iint_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{1-3y^2-3z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}r^2\sqrt{1-3r^2}r\mathrm{d}r=\frac{14\pi}{45}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 所以 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\frac{14\pi}{45}$.

18.**(本题满分 10 分)**

☞已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(1) 当 $f(x)=x$ 时, 求微分方程的通解.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期解.

✎ **解:**

(1) 方程两边乘以 e^x 得 $\left(\mathrm{e}^x y\right)'=\mathrm{e}^x\left(y'+y\right)=x\mathrm{e}^x$, 于是 $\mathrm{e}^x y=(x-1)\mathrm{e}^x+C$, 因此通解为 $y=C\mathrm{e}^{-x}+x-1$.

(2) 等式两边乘以 e^x 可得 $(\mathrm{e}^x y)'=\mathrm{e}^x f(x)$, 通解可表示为 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)$. 现在 $f(x+T)=f(x)$, 则

$$\begin{aligned}
y(x+T)&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_T^{T+x}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(u+T)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}u+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(u)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}u+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x}\left(\left(\int_0^{T}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-T}+\int_0^{x}f(u)\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

要使得这个解是周期函数, 则 $y(x+T)=y(x)$, 即满足 $\left(\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-T}=C$, 由此解得 $C=\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}$, 因此 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}\right)$ 就是唯一的周期函数解.

19.**(本题满分 10 分)**

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

☞此题来自蒲和平大学生数学竞赛教程 240 页.

✎ **解:** 首先由 $x_1>0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$ 归纳可知所有 $x_n>0$. 考虑函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}=\frac{f\left(x_n\right)-f(0)}{x_n-0}=\mathrm{e}^{\xi_n}<\mathrm{e}^{x_n}, \quad \xi_n\in\left(0, x_n\right).$$

这就说明 $x_n>x_{n+1}>0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\geqslant 0$, 在等式 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 两边取极限得 $x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x-1$. 如果 $x>0$, 则 $\mathrm{e}^x=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}<\mathrm{e}^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x=0$.

20.**(本题满分 11 分)**

设实二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=\left(x_1-x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2+\left(x_1+a x_3\right)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=0$ 的解;

(2) 求 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ 的规范形.

✎ **解:**

(1) 由 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=0$ 可得方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_1+a x_3=0\end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$

如果 $a=2$, 则方程组的通解为 $\left(x_1, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}}=c(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a\neq 2$, 则方程组只有零解 $\left(x_1, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a\neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

如果 $a=2$, 配方得

$$\begin{aligned}f\left(x_1, x_2, x_3\right)&=\left(x_1-x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2+\left(x_1+2 x_3\right)^2\\&=2 x_1^2+2 x_2^2+6 x_3^2-2 x_1 x_2+6 x_1 x_3\\&=2\left(x_1-\frac{1}{2} x_2+\frac{3}{2} x_3\right)^2+\frac{3}{2}\left(x_2+x_3\right)^2.\end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3)=y_1^2+y_2^2$.

21.**(本题满分 11 分)**

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

✎ **解:**

(1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\0&1&-a&-1&1-a&-1\\0&0&0&0&a-2&0\end{array}\right).$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

22.**(本题满分 11 分)**

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z=XY$.

(1) 求 $\operatorname{Cov}(X,Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

✎ **解:**

(1) 直接计算可知 $E(X)=0$, $E(X^2)=1$, 而 $Y\sim P(\lambda)$, $E(Y)=\lambda$, 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Z)&=\operatorname{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)\\&=E(X^2)E(Y)-(EX)^2E(Y)=\lambda.\end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(X=1)P(Z=k|X=1)+P(X=-1)P(Z=k|X=-1)\\&=P(X=1)P(Y=k)+P(X=-1)P(Y=-k)\\&=\frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k).\end{aligned}$$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{2k!}$;

当 $k=0$ 时, $P(Z=0)=P(Y=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}$;

当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{\lambda^{-k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(-k)!}$.

因此综上所述可得

$$P(Z=k)=\begin{cases}\frac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2,\cdots\\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0\end{cases}.$$

23.**(本题满分 11 分)**

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.

✎ **解:**

(1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. 令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 $\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$, 所以

$$\begin{aligned}E(\hat{\sigma})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E(|X|)=\sigma,\\E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2,\\D(\hat{\sigma})&=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{1}{n}\left(E(X^2)-(E|X|)^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

第 2 章 2018 年考研数学二

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 则 ( )

A. $a=\dfrac{1}{2}, b=-1$　　B. $a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$

C. $a=\dfrac{1}{2}, b=1$　　D. $a=-\dfrac{1}{2}, b=1$

✎ **解:** 由条件得

$$
\begin{aligned}
0&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x-1+ax^2+bx\right)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1+ax^2+bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+ax^2+bx}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)\,x+\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2+o(x^2)}{x^2},
\end{aligned}
$$

因此 $b=-1, a=-\dfrac{1}{2}$.

2. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

✎ **解:** A,B,C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_{+}(0)=-\dfrac{1}{2}, f'_{-}(0)=\dfrac{1}{2}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geqslant 0\end{cases}$, 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 ( )

A. $a=3, b=1$　　B. $a=3, b=2$　　C. $a=-3, b=1$　　D. $a=-3, b=2$

✎ **解:** 即 $f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, & x\leqslant -1\\ x-1, & -1<x<0\\ x-b+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 连续, 可得 $a=-3, b=2$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 ( )

A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

✎ **解:** 考虑 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当 $f''(x)>0$ 时, $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 不等式两边在 $[0,1]$ 上进行积分可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则　(　)

A. $M>N>K$　B. $M>K>N$　C. $K>M>N$　D. $N>M>K$

✎ **解:** 利用对称性可以计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

6. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y=$　(　)

A. $\frac{5}{3}$　B. $\frac{5}{6}$　C. $\frac{7}{3}$　D. $\frac{7}{6}$

✎ **解:** 交换积分次序利用对称性进行计算

$$I=\iint_D(1-xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1\left(2-x^2-x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{3}.$$

7. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为　(　)

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

✎ **解:** 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则　(　)

A. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$　B. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$　D. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

✎ **解:** 对于 A, 有 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B}))$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$, 即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

二、填空题, 9 ∼ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan(x)\right]=$________.

✎ **解:** 由拉格朗日中值定理知 $\arctan(x+1)-\arctan(x)=\dfrac{1}{1+\xi^2}, x<\xi<x+1$, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

10.曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ________.

✎ **解:** 计算可得 $y'=2x+\dfrac{2}{x}, y''=2-\dfrac{2}{x^2}$, 由此得函数的拐点坐标 $(1,1)$. 曲线在拐点处的斜率为 $y'|_{x=1}=4$, 故切线方程为 $y=4x-3$.

11.$\displaystyle\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$________.

✎ **解:**

$$\begin{aligned}I&=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)-\ln(x-3)\right]\Big|_5^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

12.曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为 ________.

✎ **解:** 直接由参数方程曲率计算公式得 $K=\dfrac{|x''(t)y'(t)-x'(t)y''(t)|}{\left([x'(t)]^2+[y'(t)]^2\right)^{3/2}}=\dfrac{2}{3}$.

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________.

✎ **解:** 原方程两边对 x 求偏导数得 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{e}^{z-1}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$, 于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{z-1}}$, 当 $x=2, y=\dfrac{1}{2}$ 时, $z=1$, 于是 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{4}$.

14.设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 A 的实特征值为 ________.

✎ **解:** 由题意得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 它们有相同的特征值, 易求得 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值为 2, 即 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 2.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$.

✎ **解:** 利用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x-1}\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t&=\int\frac{t-1+1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t\\&=\int\sqrt{t-1}\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}\\&=\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{t-1}+C\\&=\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C\end{aligned}$$

故 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C_1$.

16.**(本题满分 10 分)**

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=ax^2$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值.

✎ **解:**

(1) 首先 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$, 因此在方程 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$
$-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u=ax^2$ 两边求导得

$$f(x)+xf(x)+\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-xf(x)=f(x)+\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=2ax$$

可知 $f(0)=0$. 注意到等式两边是可导的, 继续求导得 $f'(x)+f(x)=2a$, 等式两边乘以 e^x 可得 $\left(\mathrm{e}^x f(x)\right)'=2a\mathrm{e}^x$, 因此 $\mathrm{e}^x f(x)=2a\mathrm{e}^x+C$. 由 $f(0)=0$ 知 $C=-2a$, 因此 $f(x)=2a-2a\mathrm{e}^{-x}$.

(2) 根据条件可得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2a\int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=2a\mathrm{e}^{-1}=1, a=\frac{\mathrm{e}}{2}$.

17.**(本题满分 10 分)**

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分

$$\iint\limits_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

✎ **解:** 积分区域看成为 X 型区域: $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant\varphi(x)\\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$, 化成累次积分得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\varphi(x)}(x+2y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left(x\varphi(x)+2\varphi^2(x)\right)\mathrm{d}x\\&==\int_0^{2\pi}\left((t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2\right)\mathrm{d}(t-\sin t)\\&=\int_0^{2\pi}\left((t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2\right)(1-\cos t)\,\mathrm{d}t\\&=5\pi+3\pi^2.\end{aligned}$$

18.**(本题满分 10 分)**

已知常数 $k\geqslant 2\ln 2-1$, 证明: $(x-1)\left(x-\ln^2 x+2k\ln x-1\right)\geqslant 0$.

✎ **解:** 原不等式等价于 $\begin{cases}x-\ln^2 x+2k\ln x-1\geqslant 0, & x\geqslant 1\\ x-\ln^2 x+2k\ln x-1\leqslant 0, & x<1\end{cases}$.

令 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$, 则 $f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$.

令 $g(x)=x-2\ln x+2k$, 则 $g'(x)=1-\frac{2}{x}\begin{cases}>0, & x>2\\ =0, & x=2\\ <0, & 0<x<2\end{cases}$, 因此 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递减, 在 $(2,+\infty)$ 内单调递增, $g_{\min}(x)=g(2)\geqslant 2\ln 2>0$. 这就说明 $f'(x)=\frac{g(x)}{x}>0$,

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 且 $f(1)=0$, 所以

$$\begin{cases} x-\ln^2 x+2k\ln x-1\geqslant 0, & x\geqslant 1 \\ x-\ln^2 x+2k\ln x-1\leqslant 0, & x<1 \end{cases}.$$

成立, 原不等式得证.

19.(**本题满分 10 分**)

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在, 求出最小值.

✎ **解:** 设分成的三段依次为 x,y,z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi},\frac{y}{4},\frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程 $\begin{cases} f_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ f_y'=\frac{y}{8}+\lambda=0 \\ f_z'=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$, 并且 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

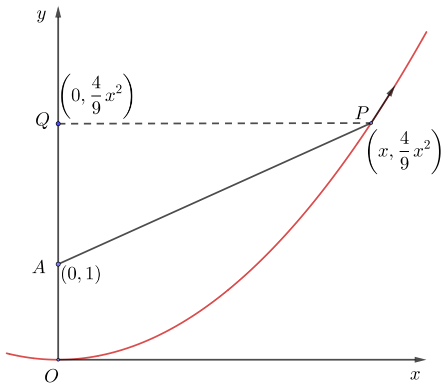
方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$ 时, $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

20.(**本题满分 11 分**)

已知曲线 $L: y=\frac{4}{9}x^2(x\geqslant 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点,S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成的图形的面积. 若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 求此时 S 关于时间 t 的变化率.

✎ **解:** 如下图所示

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.



第 20 题图

其中 $PQ \perp y$ 轴. 在时刻 t 时, P 运动到 $\left(x, \dfrac{4}{9}x^2\right)$ 处的速度 v_t 沿着曲线 L 在这一点的切线方向. 此时由直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 围成的图形的面积为

$$
\begin{aligned}
S &= S_{曲边\triangle POQ} - S_{\triangle PAQ} = \int_0^{\frac{4}{9}x^2} \frac{3}{2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}AQ \cdot QP \\
&= y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{4}{9}x^2} - \frac{1}{2}x\left(\frac{4}{9}x^2 - 1\right) = \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{2}x.
\end{aligned}
$$

P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4, 所以此时 S 关于时间 t 的变化率为

$$
\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{x=3} = \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{x=3} = 4\left.\left(\frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{2}\right)\right|_{x=3} = 10.
$$

21.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 > 0, x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

✎ **解:** 首先由 $x_1 > 0, x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$
\mathrm{e}^{x_{n+1}} = \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \mathrm{e}^{\xi_n} < \mathrm{e}^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).
$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $\mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < \mathrm{e}^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

22.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

✎ **解:**

(1) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 可得方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

如果 $a=2$, 则方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=c(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a\neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a\neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

如果 $a=2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2$.

23.**(本题满分 11 分)**

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

✎ **解:**

(1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right).$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

第 3 章 2018 年考研数学三

一、选择题, 1 ～ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ( )

A. $f(x)=|x|\sin|x|$

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

✎ **解:** A,B,C 可直接验证可导, D 根据导数的定义可得 $f'_+(0)=-\frac{1}{2}, f'_-(0)=\frac{1}{2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 ( )

A. 当 $f'(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

B. 当 $f''(x)<0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

D. 当 $f''(x)>0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

✎ **解:** 考虑 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

因此当 $f''(x)>0$ 时, $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 不等式两边在 $[0,1]$ 上进行积分可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

3. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 则 ( )

A. $M>N>K$ B. $M>K>N$ C. $K>M>N$ D. $N>M>K$

✎ **解:** 利用对称性可以计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi$, 另外比较被积函数与 1 的大小关系易见 $K>\pi=M>N$.

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量, 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 ( )

A. $C'(Q_0)=0$

B. $C'(Q_0)=C(Q_0)$

C. $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$

D. $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

✎ **解:** 平均成本 $\overline{C}=\frac{C(Q)}{Q}, \overline{C}'=\frac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}$. 产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 $\overline{C}'(Q_0)=0$, 可得 $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$, 选 D.

5. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✎ **解:** 易知题中矩阵均有 3 重特征值 1. 若矩阵相似, 则不同特征值对应矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩相等, 选 A.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵, 则 ( )

A. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$ B. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$

C. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$ D. $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

✎ **解:** 对于 A, 有 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B}))$, 且 $(\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{B})$ 为行满秩的矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$, 即选 A. B 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C 错误, $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\geqslant\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D 错误, 反例取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P(X<0)=$ ( )

A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.6

✎ **解:** 由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.3,$$

于是 $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.5-0.3=0.2$, 选 A.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n\geqslant 2)$ 为来自总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的简单随机样本, 令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,\ S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\overline{X}\right)^2},\ S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2},$$

则 ( )

A. $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n)$ B. $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$

C. $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S^*}\sim t(n)$ D. $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S^*}\sim t(n-1)$

✎ **解:** 首先由 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 可知 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\Rightarrow\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma}\sim N(0,1)$. 而样本方

差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 满足的分布为 $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$, 根据 t 分布的定义知 $\dfrac{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2}{n-1}}}=\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$, 选 B.

二、填空题, 9 ～ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 ________.

✎ **解:** 计算可得 $y'=2x+\dfrac{2}{x}, y''=2-\dfrac{2}{x^2}$, 由此得函数的拐点坐标 $(1,1)$. 曲线在拐点处的斜率为 $y'\big|_{x=1}=4$, 故切线方程为 $y=4x-3$.

10. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=$ ________.

✎ **解:** 令 $\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}=t$, 则 $\mathrm{e}^x=\cos t$,$\mathrm{d}x=-\dfrac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}u$, 原积分化为

$$-\int t\cos t\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t=-\int t\sin t\mathrm{d}t=t\cos t-\int\cos t\mathrm{d}t=t\cos t-\sin t+C,$$

带回原变量的原不定积分为 $\mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C$.

11. 差分方程 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 的通解是 ________.

✎ **解:** 根据二阶差分的定义可得 $\Delta^2y_x=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$, 由 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 得 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$. 先求齐次方程的通解, 由差分方程的特征方程 $\lambda-2=0$, 齐次方程通解为 $Y=C\cdot2^x$. 由于 1 不是特征根, 于是假设原差分方程的特解为 $y_x^*=A$, 带入非齐次方程知特解为 $y_x^*=-5$, 于是原方程的通解为 $y_x=C\cdot2^x-5$.

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to0)$, 且 $f(0)=2$, 则 $f(1)=$________.

✎ **解:** 在等式 $f(x+\delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$ 两边除以 Δx, 并令 $\Delta x\to0$ 得 $f'(x)=2xf(x)$, 解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{x^2}$. 由 $f(0)=2$ 得 $C=2$, 于是 $f(1)=2\mathrm{e}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 A 的实特征值为 ________.

✎ **解:** 由题意得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$. 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似, 它们有相同的特征值, 易求得 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值为 2, 即 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为 2.

14.随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$, 则 $P(AC|A\cup B)=$____.

✎ **解:** 直接计算得 $P\left(AC|A\cup B\right)=\dfrac{P\left[(AC)\cup(ABC)\right]}{P\left(A\cup B\right)}=\dfrac{P\left(AC\right)}{P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)}=\dfrac{1}{3}$.

三、解答题, 15 ～ 23 题, 共 94 分.

15.**(本题满分 10 分)**

已知实数 a, b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$, 求 a, b.

✎ **解:** 直接利用泰勒公式得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]&=\lim_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[(a-1)\,x+a+b+\frac{b}{x}+(ax+b)\,o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\&=2\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)\,o\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, 所以 $\begin{cases}a-1=0\\ a+b=2\end{cases}$, 解得 $a=b=1$.

16.**(本题满分 10 分)**

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3\left(1-x^2\right)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

✎ **解:** 直接化成累次积分计算可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^{\partial})}}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\left(\sqrt{3\left(1-x^2\right)}-\sqrt{3}x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3\left(1-x^2\right)}\mathrm{d}x-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{3}}{32}\pi-\frac{\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

17.**(本题满分 10 分)**

☞将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在, 求出最小值.

☞此题来自裴礼文数学分析中的典型例题与方法 697 页.

✎ **解:** 设分成的三段依次为 x,y,z, 则 $x+y+z=2$, 依次围成的圆的半径、正方形的边长与正三角形边长分别为 $\frac{x}{2\pi},\frac{y}{4},\frac{z}{3}$, 因此三个面积的和为

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2.$$

方法一 令 $f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$, 首先求驻点. 由方程

$$\begin{cases} f_x'=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ f_y'=\dfrac{y}{8}+\lambda=0\\ f_z'=\dfrac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0\\ x+y+z=2\end{cases}$$ 可得 $$\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$$, 并且 $Hf=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2\pi},\frac{1}{8},\frac{\sqrt{3}}{18}\right\}$ 正定, 这就是面积和的最小值点, 此时最小面积为 $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

方法二 由柯西不等式 $\left(\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2\right)\left(4\pi+16+\frac{36}{\sqrt{3}}\right)\geqslant(x+y+z)^2=4$, 因此当 $\frac{x}{2\pi}=\frac{y}{16}=\frac{z}{12\sqrt{3}}$ 即 $$\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$$ 时, $S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\mathrm{m}^2$.

18.(本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$, 求 a_n.

✎ **解:** 首先 $\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{1+x}\right)'=\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}$, 而当 $-1<x<1$ 时,

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1},\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

. 求导得

$$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n.$$

比较系数可得 $a_n=\begin{cases}2k+2, & n=2k+1\\ \dfrac{(-4)^k}{(2k)!}-(2k+1), & n=2k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{N}).$

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

✎ **解:** 首先由 $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$ 归纳可知所有 $x_n > 0$. 考虑函数 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理有

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \quad \xi_n \in (0, x_n).$$

这就说明 $x_n > x_{n+1} > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant 0$, 在等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两边取极限得 $xe^x = e^x - 1$. 如果 $x > 0$, 则 $e^x = \dfrac{e^x - 1}{x} < e^x$, 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = 0$.

20.**(本题满分 11 分)**

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

✎ **解:**

(1) 由 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 可得方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$. 对其系数矩阵进行初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

如果 $a = 2$, 则方程组的通解为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = c(-2, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 如果 $a \neq 2$, 则方程组只有零解 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) 如果 $a \neq 2$, 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Qx}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 所以此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.
如果 $a = 2$, 配方得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2. \end{aligned}$$

此时的规范形为 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$.

21.**(本题满分 11 分)**

已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

✎ **解:**

(1) 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价. 则对增广矩阵做初等行变换得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&a&1&a&2\\0&1&-a&-1&1-a&-1\\0&0&0&0&a-2&0\end{array}\right).$$

因此 $a=2$.

(2) 问题等价于解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 也就是解三个非齐次线性方程组. 由 (1) 可得

$$(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

解得 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数. 注意到 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 因此 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$, 这要求 $k_2\neq k_3$.

22.**(本题满分 11 分)**

已知随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z=XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

✎ **解:**

(1) 直接计算可知 $E(X)=0$, $E(X^2)=1$, 而 $Y\sim P(\lambda)$, $E(Y)=\lambda$, 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X,Z)&=\mathrm{Cov}\,(X,XY)=E(X^2Y)-E\,(X)\,E\,(XY)\\&=E(X^2)E\,(Y)-(EX)^2E\,(Y)=\lambda.\end{aligned}$$

(2) 首先有

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(X=1)P(Z=k|X=1)+P(X=-1)P(Z=k|X=-1) \\ &= P(X=1)P(Y=k)+P(X=-1)P(Y=-k) \\ &= \frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k). \end{aligned}$$

当 $k=1,2,3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{2k!}$;

当 $k=0$ 时, $P(Z=0)=P(Y=0)=e^{-\lambda}$;

当 $k=-1,-2,-3,\cdots$ 时, $P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{\lambda^{-k}e^{-\lambda}}{2(-k)!}$.

因此综上所述可得

$$P(Z=k)=\begin{cases} \frac{\lambda^{|k|}e^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2,\cdots \\ e^{-\lambda}, & k=0 \end{cases}.$$

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$;

(2) 求 $E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.

✎ **解:**

(1) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=2^{-n}\sigma^{-n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. 令 $\frac{d\ln L}{d\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$, 解得 $\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, 因此 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) 因为 $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,dx=\sigma$, 所以

$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E(|X|)=\sigma,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,dx=2\sigma^2,$$

$$D(\hat{\sigma})=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{1}{n}\left(E(X^2)-(E|X|)^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}.$$