

导函数介值定理 (达布定理)

定理 1. 闭区间 $[a, b]$ 上的可导函数一定可以取到介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的值.

证明. 我们证明它的等价形式, 即所谓导函数零点定理: 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 对于介值定理我们只需要考虑函数 $g(x) = f(x) - \mu x$, 其中 μ 为介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值.

不妨假定 $f'_+(a) < 0 < f'_-(b)$, 由导数定义

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

由极限保号性, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 即 $f(x) - f(a) > 0$, 这说明 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 同理 $f(b)$ 也不是最大值. 因此存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 从而由费马定理可知 $f'(\xi) = 0$. ☆

这个定理阐述了导函数很重要的性质: 介值性. 对于一般的函数而言, 连续才具有介值性, 而导函数的特殊之处在于它存在就具有介值性, 并不需要导函数连续, 当然, 我们有经典的导函数不连续的例子:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

导函数极限定理

定理 2. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内连续, 在 $x = 0$ 的去心邻域内可导, 且极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且

$$f'(x_0) = A.$$

证明. 这个定理看起来高大上, 实际上一步定义加洛必达就完了:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0).$$

☆

这个定理也阐述导函数的一个特性, 对于连续函数而言, 极限存在无法保证函数的连续性, 但是导函数很特殊, 极限存在就意味着连续. 当然, 上述结论对于单侧导数也同样成立.

步入正题, 以上两个定理是考研教材未列举出来, 而实则需要大家掌握其证明和应用的定理. 在此定理的基础上, 我们推出导函数的其他结论.

推论 1. 可导函数的导函数一定没有第一类间断点.

证明. 不管是第一类的可去间断点还是跳跃间断点, 因为导函数的左右极限均存在, 那么这都将与导函数的极限定理矛盾. ☆



注: 导函数可以有间断点, 但是只能是第二类间断点.

由于积分与导数的互逆性, 我们有

推论 2. 含有第一类间断点的函数在包含此间断的区间上不存在原函数.

利用导函数介值定理, 我们可以很容易证明广义的罗尔定理:

广义罗尔定理

定理 3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导, 其中 a, b 可以是无穷大, 且满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 反证法. 假定不存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 那么根据导函数的介值定理可知 $f'(x)$ 在 (a, b) 上不变号, 即 $f'(x)$ 恒正或恒负, 因此 $f(x)$ 是严格单调的, 这与 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$ 矛盾, 因此存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. ☆

当然, 广义的罗尔定理以及广义的柯西中值定理都有其特殊的证明方法, 我们假定 $a = -\infty, b = +\infty$, 令

$$F(t) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ A, & t = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

则 $F(t)$ 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上满足普通的罗尔定理条件, 存在 $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 使得 $F'(\eta) = f'(\tan \eta) \sec^2 \eta = 0$, 取 $\xi = \tan \eta$, 则 $f'(\xi) = 0$.

除此之外, 在这里会涉及到一些让多数同学混淆的符号, 这里留一个例题给大家:

例 1. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义,

- (1) 如果 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在, 问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否连续? 是否可导?
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在且相等, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否可导?
- (3) 在 (2) 的基础上假定 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 结果又如何?

一阶线性微分方程的通解形式

在同济高数教材上给出的方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} + C \right) \\ &= C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

首先同济教材对此公式的推导采用及其复杂的方法, 齐次此通解的形式是及其不

明确的式子, 这里包含了三个不定积分符号, 所以每个不定积分都是都带有常数的, 虽然同济书上指出这里的不定积分理解为某个原函数, 但是这种写法无法让人理解, 那么它正确的写法应该怎么写呢, 我们利用积分因子给出它的推导, 和形式上的明确化:

$$y = C e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds.$$

积分因子法的推导

在同济高数教材上给出的方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解形式如下:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} + C \right) \\ &= C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

注意到 $P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, 在原方程两边乘以 $e^{P(x)}$ 得

$$e^{P(x)}(y' + p(x)y) = (ye^{P(x)})' = q(x)e^{P(x)}$$

将上式从 x_0 到 x 再积分一次得

$$ye^{P(x)} - y_0 e^{P(x_0)} = \int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt$$

我们把形式简化一点可以写为

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds$$

上述解其实是满足 $y(x_0) = y_0$ 的解, 把 y_0 写为 C , 就得到通解形式

$$y = C e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds$$

这就是非常明确的形式解, 不包含任何不定积分符号, 只有一个积分常数, 每个变限积分都是具体的一个函数.

一道级数敛散性判别

最近有读者问了我一道级数问题, 难度还不小, 之前也有读者问过类似的题, 今天一并给出解答.

例 2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0 (n > 1)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + b_n, n \geq 2$$

证明:

$$1. \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n, n \geq 2;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

证明 第一问显然, 只需要注意到

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$

然后两边除以 $\ln n$ 即可. 然后

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}} \left(1 + \frac{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} b_n}{\frac{1}{n \ln n}}\right) = \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}} (1 + c_n) \quad (*)$$

注意到

$$c_n = \frac{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}} b_n \sim b_n$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也是绝对收敛, 则存在常数 $m \in \mathbb{N}$, 当 $k \geq m$ 时 $|c_k| < \frac{1}{2}$. 而由 (*) 式可知

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}} > \frac{a_n}{\frac{1}{n \ln n} (1 + c_n)} > \cdots > \frac{a_m}{\frac{1}{m \ln m} \prod_{k=m}^n (1 + c_k)}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\prod_{k=m}^n (1 + c_k)$ 收敛到某个正的常数, 也就是

当 n 充分大时, $a_n > \frac{C}{n \ln n}$, C 为某个正的常数, 这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

同类似的一道题

如果正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + O(b_n), n \rightarrow \infty$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 这题是史济怀数学分析课后问题, 有上一题就知道这题该怎么做了, 和上面类似的推导, 记 $c_n = \frac{n}{n+1} O(b_n)$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{1+c_n},$$

于是得到

$$\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{a_m}{\frac{1}{m} \prod_{k=m}^n (1+c_k)}$$

然后 $\prod_{k=m}^n (1+c_k)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 的极限存在, 说明 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 同阶, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

解答黄之老师两道征解题

向 禹

征解题一解答

1. 设 $f(t) = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - tx) dx, t \in \mathbb{R}$. 证明: 当 t 为非负整数时, $f(t) = \frac{\pi}{t!}$; 当 t 为负整数时, $f(t) = 0$. 并证明: 若 n 为正整数, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{nx}{2}\right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx = e\pi.$$

解 利用留数定理可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - tx) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{\cos x + i \sin x - itx} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix} - itx) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{t+1} i} dz. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res} \left(\frac{e^z}{z^{t+1}i}, z=0 \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{t!}, & t \in \mathbb{N} \\ 0, & t \in \mathbb{Z}^- \end{cases}.$$

最后一步留数的计算只需要将 $\frac{e^z}{z^{t+1}i}$ 展开为 Laurent 级数, 找其负一次幂系数即可.

注意到

$$\begin{aligned} & \cos \left(\sin x - \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \\ &= \left(\cos(\sin x) \cos \frac{nx}{2} + \sin(\sin x) \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos(\sin x) \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \frac{x}{2} \right] + \frac{1}{2} \sin(\sin x) \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]. \end{aligned}$$

于是原极限可以成四部分, 其中由 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$L_4 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{\cos x} \sin(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx = 0.$$

而

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos(\sin x) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi + \pi \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{e\pi}{2}. \end{aligned}$$

上述积分利用傅里叶级数

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = \operatorname{Re}[\exp(e^{ix})] = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!}$$

即可得到.

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos(\sin x) dx = \frac{1}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}, \\ L_3 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x) \frac{\cos^2(x/2)}{\sin(x/2) \cos(x/2)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix}) \frac{1 + (e^{ix} + e^{-ix})/2}{(e^{ix} + e^{-ix})/(2i)} dx \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} e^z \frac{z+1}{z(z-1)} dz \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{Im} [2\pi i (e-1)] = \frac{(e-1)\pi}{2}.
\end{aligned}$$

注意上述积分中, 极点 $z=1$ 在围道边界上, 由小弧引理, 辐角值取 π 而不是 2π .
因此最后所求极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{nx}{2}\right) \sin \frac{(n+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx = L_1 + L_2 + L_3 - L_4 = e\pi.$$

征解题二解答

2. 当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 以下两个极限分别是什么?

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{tx}{2}\right) \sin \frac{(t+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx, \\
&\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_0^\pi e^{\cos x} \cos\left(\sin x - \frac{tx}{2}\right) \sin \frac{(t+1)x}{2} \csc \frac{x}{2} dx.
\end{aligned}$$

解 注意到在第一题中, 如果 $n \rightarrow -\infty$, 则 $L_1 = -\frac{e\pi}{2}$, $L_2 = \frac{\pi}{2}$, $L_3 = \frac{(e-1)\pi}{2}$, 则当 $n \rightarrow -\infty$ 时原极限为零, 那么根据归结原理, 这里的两个极限如果存在一定和上述 $n \rightarrow +\infty$ 和 $n \rightarrow -\infty$ 的极限分别相等. 事实上, 这里的极限利用积化和差公式也可以拆开成四部分. 其中 L_2, L_3 为常数, L_4 由 Riemann-Lebesgue 引理知为 0. 剩下 L_1 , 我们只证明

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t, x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(n, x) dx,$$

其中

$$g(t, x) = \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

对任意 $t > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n \leq t < n+1$, 且 $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty$, 则

$$\begin{aligned}
g(t, x) - g(n, x) &= \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \left[\sin\left(t + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right] \\
&= \frac{2e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{t-n}{2} x \cos\left(\frac{n+t}{2} + 1\right)x.
\end{aligned}$$

注意到

$$\left| \frac{e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{t-n}{2} x \right| < \left| \frac{\frac{x}{2} e^{\cos x} \cos(\sin x)}{\sin \frac{x}{2}} \right|$$

上式右端在 $[0, \pi]$ 绝对可积, 于是用类似 Riemann-Lebesgue 引理的证法可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [g(t, x) - g(n, x)] = 0.$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n, x) = e\pi$, 所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t, x) = e\pi$. 同理可得 $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t, x) = 0$.