数学分析问题

向禹*

2018 年 8 月 12 日

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项的收敛级数, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 的敛散性如何?

解 显然发散 □

2. 证明: 如果正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 2\mathrm{e}a_1$.

证明 由假设有,

$$a_2 \leqslant a_1, \qquad \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k$$

因此归纳可得

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k \leqslant 2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) a_1 < \mathrm{e}a_1$$

□

3. 证明 Carleman 不等式: 如果 $\{a_n\}$ 是正数列, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} < \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

证明 令 $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, 则 $c_1\cdots c_n = (n+1)^n, c_n < n\mathrm{e}$. 利用均值不等式得

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} = \frac{1}{n+1}\sqrt[n]{a_1c_1\cdots a_nc_n} \leqslant \frac{a_1c_1+\cdots+a_nc_n}{n(n+1)}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1c_1+\cdots+a_nc_n}{n(n+1)} \\
&= a_1c_1\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} + a_2c_2\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{a_Nc_N}{N(N+1)} \\
&< a_1c_1 + \frac{a_2c_2}{2} + \frac{a_3c_3}{3} + \cdots + \frac{a_Nc_N}{N} \\
&\leqslant 2a_1 + \mathrm{e}a_2 + \cdots + \mathrm{e}a_N
\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$ 即可证得待证式. □

*解答仅供参考, 若有错漏, 欢迎批评指正. E-mail:xy123@mail.ustc.edu.cn

4. 如果 $\{a_n\}$ 是正数列, 则对每个正整数 k 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n+k}{n}\right)^n.$$

证明 令

$$c_n = \frac{(n+1)^n \cdots (n+k-1)^n (n+k)^n}{n^{n-1} \cdots (n+k-2)^{n-1} (n+k-1)^{n-1}} = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n n(n+1)\cdots(n+k-1)$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant & \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 c_1 + \cdots a_n c_n}{n(n+1)\cdots(n+k)} \\
=& a_1 c_1 \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (1+k)} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k)}\right) \\
& + a_2 c_2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (2+k)} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k)}\right) \\
& + \cdots + a_N c_N \frac{1}{N(N+1)\cdots(N+k)}
\end{aligned}$$

而 $\dfrac{1}{l(l+1)\cdots(l+k-1)} c_l = \left(\dfrac{l+k}{l}\right)^l$, 令 $N \to \infty$ 即证得待证式. □

5. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 a_n}{(a_1 + \cdots + a_n)^2}$ 也收敛. **证明** 设 $T_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,$S_n$ 表示待证级数的前 n 项和, 则

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 (T_n - T_{n-1})}{T_n^2} \leqslant \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 (T_n - T_{n-1})}{T_n T_{n-1}} \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_{n-1}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{T_n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} \\
&\leqslant \frac{5}{a_1} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{T_n} \leqslant \frac{5}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{T_n}
\end{aligned}$$

进一步由 Cauchy 不等式得

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 a_n}{T_n^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} \leqslant S_n M$$

这里 $M = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$. 因此 $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{n}{T_n} \leqslant \sqrt{M S_n}$, 于是 $S_N \leqslant \dfrac{5}{a_1} + 2\sqrt{M S_N} + M$, 解不等式得

$$S_N \leqslant \left(\sqrt{M} + \sqrt{2M + \frac{5}{a_1}}\right)^2$$

因此原级数部分和有界, 故收敛.

□

6. 设 $\{a_n\}$ 是单调递增的正项数列使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散, 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$ 也发散. **证明** 利用均值不等式得

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}\geqslant\frac{2^{k-1}}{\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}(na_n-(n-1)a_n)}$$
$$=\frac{2^{k-1}}{2^k a_{2^k}-2^{k-1}a_{2^{k-1}}}\geqslant\frac{1}{2a_{2^k}}$$

因此

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}\geqslant\frac{2^k}{4a_{2^k}}$$

于是 $S_{2^k}\geqslant\sum_{l=1}^{k}\frac{2^l}{4a_{2^l}}$, 由 Cauchy 凝聚判别法知原级数发散. □

7. 设 $\{a_n\}$ 是素数按从小到大的顺序排列的数列, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 的敛散性如何? **证明** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 收敛, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{p_m}<\frac{1}{2}$. 令 $a=p_1p_2\cdots p_n$, 则对任意 $k\in\mathbb{N}$, 数 $1+ka$ 可以写成不含任意 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的素因子的乘积, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+ka}<\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{p_m}\right)^l<\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l=1$$

矛盾, 因此原级数发散. □

8. 当 p_n 表示第 n 个素数时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np_n-(n-1)p_{n-1}}$ 敛散性如何?

解 发散. □

9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}}$.

解 我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}}+\cdots\right)}{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^n}{4^n}+\cdots\right)}$$

对括号里的式子

$$1+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}}+\cdots=1+2^{n+1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}$$

而

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}=\frac{1}{3^{n+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{n+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{3^{n+1}} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{n=1}} = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}$$

因此 $2^{n+1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}} \leqslant \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}} \to 0$, 于是原极限为 $\frac{1}{2}$. □

10. 设 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 \neq 0, 0 \leqslant a_n \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$. 令

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad T_n = S_1 + \cdots + S_n.$$

当正数 α 取何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$ 收敛?

解 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$ 显然收敛, 因此假定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 存在严格单调增的正整数序列 $\{n_m\}$ 使得 $S_{n_m-1} \leqslant m < S_{n_m}$, 则

$$T_{n_m} = S_1 + \cdots + S_{n_m} \geqslant S_{n_1} + \cdots + S_{n_m} > \frac{m(m+1)}{2}$$

于是

$$\sum_{n=n_2}^{\infty}\frac{a_n}{T_n^{\alpha}} = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=n_m}^{m_{m+1}-1}\frac{a_k}{T_k^{\alpha}} \leqslant \sum_{m=2}^{\infty}\frac{S_{n_{m+1}-1}-S_{n_m-1}}{T_{n_m}^{\alpha}} < \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{T_{n_m}^{\alpha}} < \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2+m}{2}\right)^{\alpha}}$$

因此该级数当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时收敛, 如果 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 可能会发散, 取 $a_n = 1$ 即可得. □

11. 设 k 是任意正整数. 假定 $\{a_n\}$ 是单调增的正数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明以下两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k a_n}{a_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{a_n}$$

同敛散. **证明** 显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n} = 0$. 取 $0 < K < 1$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时,$n \leqslant K a_n$ 都成立. 因此

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} \geqslant \ln^k\left(\frac{1}{K}\right)\frac{\ln^k n}{a_n}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k a_n}{a_n}$ 收敛就意味着级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{a_n}$ 也收敛. 为证明另一面, 令

$$E_1 = \left\{n \in \mathbb{N}\colon\ a_n \leqslant n^{k+2}\right\}, \quad E_2 = \mathbb{N}\backslash E_1$$

则对 $n \in E_1$ 有 $\ln a_n \leqslant (k+2)\ln n$, 因此 $\sum_{n\in E_1}\frac{\ln^k n}{a_n}$ 收敛意味着 $\sum_{n\in E_1}\frac{\ln^k a_n}{a_n}$ 收敛. 而且对充分大的 $n \in E_2$,

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} < \frac{a_n^{\frac{k}{k+1}}}{a_n} < \frac{1}{n^{\frac{k+2}{k+1}}}$$

因此 $\sum_{n\in E_2}\frac{\ln^k a_n}{a_n} < \infty$. □

12. 设 $\{\lambda_n\}$ 是单调递增的正数列,f 是单调增函数, 且满足 $\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{tf(t)} < \infty$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_n)} < \infty.$$

证明 首先有 $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\frac{1}{\lambda_{n+1}f(\lambda_{n+1})} \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\frac{\mathrm{d}t}{tf(t)}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})} \leqslant \int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{tf(t)} < \infty$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}$ 是收敛的. 设 S_n 和 T_n 分别表示题目所给级数的部分和与上述级数的部分和, 则

$$\begin{aligned} S_N - T_n &= \sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{f(\lambda_n)}-\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{f(\lambda_n)}-\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) < \frac{1}{f(\lambda_1)} \end{aligned}$$

这就意味着上述级数收敛. □

13. 设 $y=\varphi(x)$ 在 0 点可导,$\varphi(0)=0.f$ 在 $(0,0)$ 附近二阶连续可微,$\nabla f(x,\varphi(x))=\mathbf{0}$, 且 f 在 $(0,0)$ 的 **证明** f 二阶连续可微, 首先由 $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{pmatrix}$ 半正定且非零可知, 对任意点 (x,y) 均有 $f''_{xx}(x,y)\geqslant 0, f''_{yy}(x,y)\geqslant 0$. □

14. 计算下列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x^n-y^n}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2n\right)$$

解 显然

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x^n-y^n}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^\infty\int_0^x\frac{x^n-y^n}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

因此我们只需计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_0^\infty\int_0^x\frac{x^n-y^n}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-n\right)$ 即可.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^x\frac{x^n-y^n}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n-y^n}{1-\mathrm{e}^{-(x-y)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\left(x^n-y^n\right)\sum_{k=0}^\infty\mathrm{e}^{-k(x-y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=n\cdot n!+\int_0^\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\left(x^n-y^n\right)\sum_{k=1}^\infty\mathrm{e}^{ky}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这里

$$\int_0^\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\left(x^n-y^n\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n\cdot n!$$

而

$$\int_0^\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-(k+1)x}x^n\mathrm{e}^{ky}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(k+1)x}x^n\frac{\mathrm{e}^{kx}-1}{k}\mathrm{d}x=n!\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k\left(k+1\right)^{n+1}}\right)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-(k+1)x}y^n\mathrm{e}^{ky}\mathrm{d}y\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\int_y^\infty\mathrm{e}^{-(k+1)x}y^n\mathrm{e}^{ky}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{k+1}\int_0^\infty y^n\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{n!}{k+1}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_0^\infty\int_0^x\frac{x^n-y^n}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x-n&=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^\infty n!\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k\left(k+1\right)^{n+1}}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=1-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k\left(k+1\right)^{n+1}}\to1\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

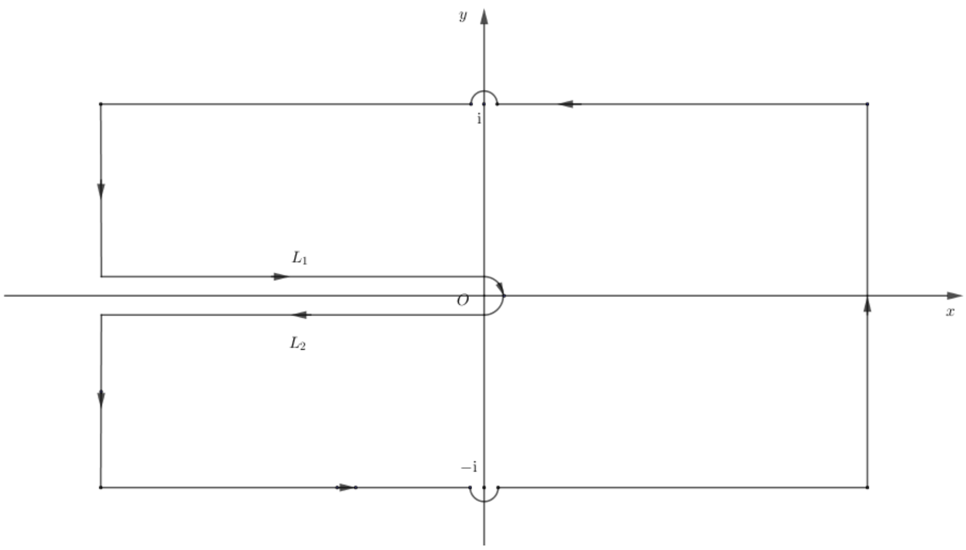
因此原极限为 2. □

1　一道积分题解答

计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\ln\left(1+x^2\right)\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\mathrm{d}x.$$

解　这个题目源自第七季高等数学吧积分竞赛, 当然方法不少了, 比如昵称 x+y=z 的老哥玩超几何, 昵称 novalight 的玩狄利克雷贝塔函数. 不过我要介绍我的两种方法, 主要是想玩玩留数, 好久不搞这玩意了, 难得碰到一个留数好题, 所以先来看看留数做法. 考虑函数 $f(z)=\dfrac{\ln z}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\sinh\left(\dfrac{\pi}{2}z\right)$, 以及如下围道积分



注意到 $f(z)=\dfrac{\ln z}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\sinh\left(\dfrac{\pi}{2}z\right)$ 在此围道边界上有两个奇点 $\pm\mathrm{i}$(边界留数对应辐角数 π). 根据留数定理可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty-\mathrm{i}}^{\infty-\mathrm{i}}f(z)\,\mathrm{d}z-\int_{-\infty+\mathrm{i}}^{\infty+\mathrm{i}}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_2}f(z)\,\mathrm{d}z\\=&\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}\left(f(z),z=\mathrm{i}\right)+\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}\left(f(z),z=-\mathrm{i}\right)=-\frac{8}{\pi}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}-\frac{8}{\pi}\mathrm{i}=&\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\mathrm{i})\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\mathrm{i})\,\mathrm{d}x+\int_{L_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_2}f(z)\,\mathrm{d}z\\=&-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(x-\mathrm{i})}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\cosh\left(\frac{\pi}{2}z\right)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(x+\mathrm{i})}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\cosh\left(\frac{\pi}{2}z\right)\mathrm{d}x\\&+\int_{-\infty}^{0}\frac{\ln z+\pi\mathrm{i}}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\sinh\left(\frac{\pi}{2}z\right)\mathrm{d}z-\int_{-\infty}^{0}\frac{\ln z-\pi\mathrm{i}}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\sinh\left(\frac{\pi}{2}z\right)\mathrm{d}z\\=&2\mathrm{i}I-4\mathrm{i}\end{aligned}$$

因此 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\ln\left(1+x^2\right)\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\mathrm{d}x=2-\frac{4}{\pi}$.

当然, 这个题除了留数之外也有实积分的方法. 利用 $\operatorname{sech}(x)$ 的有理分式展开也可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \ln\left(1+x^2\right) \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \mathrm{d}x &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2+4n^2} \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{\left(1+x^2\right)\left(x^2+4n^2\right)} \mathrm{d}x + \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{4n^2}{x^2+4n^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x + \frac{4}{\pi} \\
&= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} (2n-1) \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \\
&= 2 - \frac{4}{\pi}.
\end{aligned}
$$

□

15. 设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 内的一个连续函数, $\triangle ABC$ 是一个等边三角形. 对于 $\triangle ABC$ 内任意一点 M, 记 M 到 A, B, C 三点的距离分别为 x, y, z, 如果 $f(x)+f(y)+f(z)=0$ 恒成立, 证明 $f(x)=0$.

16. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 有连续的二阶导数, 且满足 $f(-1)=-1, f(1)=1, f'(-1)=f'(1)=0$. 对任意 $p>1$, 求证

$$
\int_{-1}^{1} \left|f''(x)\right|^p \mathrm{d}x \geqslant 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.
$$

证明 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(-1)=g(1)=0, g'(-1)=g'(1)=-1$, 且 $g''(x)=f''(x)$. 由 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-1}^{1} \left|f''(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} |x|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} &\geqslant -\int_{-1}^{1} x g''(x) \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} x \mathrm{d}\left(g'(x)\right) \\
&= 2 + \int_{-1}^{1} g'(x) \mathrm{d}x = 2.
\end{aligned}
$$

而

$$
\int_{-1}^{1} |x|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x = 2\left(\frac{p-1}{2p-1}\right),
$$

因此

$$
\int_{-1}^{1} \left|f''(x)\right|^p \mathrm{d}x \geqslant \left(2 \cdot 2^{-\frac{p-1}{p}} \left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p = 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.
$$

□

一道不等式的多种证明

设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数列, $p>1$, 证明

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \left(n^p-(n-1)^p\right).$$

这道题来自一个数学群, 群里问了两个问题, 我解决了其中一个, 这是另一个我没解决的问题. 我解决的第一个题目是典型的 Hardy 型不等式的问题, 感兴趣的人可以拜读 Hardy 编写的不等式书, 书中的大量不等式都是优秀的数学分析习题, 作为高中数学竞赛题也相当不错. 可惜是没有答案, 我能做出的寥寥无几. 而这个题和 Hardy 的不等式也比较相像. 我想了半天没有思路, 于是放到了 AOPS 上征求解答, 同时也问题一些数学高手, 最后得到了三份解答, 下面一一列出. **证明** 首先不难证明如果不等式左边收敛, 则右边一定收敛. 因此我们只需要证明一个有限形式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^p \left(n^p-(n-1)^p\right).$$

方法一 (上海万时凯老师提供) 首先我们给出几个基本引理:

引理 1. 设 $f(x)=x^p+(c-x)^p$, $0\leqslant x\leqslant \dfrac{c}{2}$, $p>1$, 则 $f(x)$ 单调递减.

这个引理比较简单, 由 $f'(x)=p[x^{p-1}-(c-x)^{p-1}]\leqslant 0$ 即证.

引理 2. 设 a,b,c,d 均为正数, $p>1$, 如果 $a+b=c+d$ 且 $\min\{a,b\}\leqslant\min\{c,d\}$, 则 $a^p+b^p\geqslant c^p+d^p$.

这由引理 **1** 直接得到.

引理 3. 在题目条件下, 对任意 $k=1,2,\cdots,n-1$ 有

$$\boxed{(ka_k+a_{k+1}+\cdots+a_n)^p+(ka_{k+1})^p\geqslant((k+1)\,a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)^p+(ka_k)^p\,.}$$

这只需要注意到不等式两边的底数之和相等, 并且

$$ka_{k+1}\leqslant ka_k\leqslant ka_k+a_{k+1}+\cdots+a_n,$$
$$ka_{k+1}\leqslant (k+1)a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n.$$

ka_{k+1} 是四个底数中最小的, 因此由引理 **2** 即证. 回到原题, 根据引理 **3** 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-1}(ka_k+a_{k+1}+\cdots+a_n)^p+\sum_{k=1}^{n-1}(ka_{k+1})^p\\ \geqslant&\sum_{k=1}^{n-1}((k+1)\,a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)^p+\sum_{k=1}^{n-1}(ka_k)^p.\end{aligned}$$

所以

$$\left(a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}\right)^{p}+\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1) a_{k}\right]^{p} \geqslant\left(n a_{n}\right)^{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k a_{k}\right)^{p},$$

即 $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k}\right)^{p} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{k}^{p}\left(k^{p}-(k-1)^{p}\right)$, 证毕.

方法二 (山西大学附中王永喜老师提供)　用调整法. 在题目条件下, 我们假定 $a_{2}, \cdots, a_{n}$ 是固定的, a_{1} 是变动的. 考虑函数

$$f_{1}\left(a_{1}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k}\right)^{p}-\sum_{k=1}^{n} a_{n}^{p}\left(k^{p}-(k-1)^{p}\right).$$

则

$$f_{1}^{\prime}\left(a_{1}\right)=p\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k}\right)^{p-1}-p a_{1}^{p-1} \geqslant 0,$$

因此 $f_{1}(a_{1})$ 是单调递增的, 故

$$f_{1}\left(a_{1}\right) \geqslant f_{2}\left(a_{2}\right)=\left(2 a_{2}+\sum_{k=3}^{n} a_{k}\right)^{p}-2^{p} a_{2}^{p}-\sum_{k=3}^{n} a_{n}^{p}\left(k^{p}-(k-1)^{p}\right).$$

如果假设已经调整至 $a_{1}=a_{2}=\cdots=a_{m}$, 考虑函数

$$f_{m}\left(a_{m}\right)=\left(m a_{m}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{k}\right)^{p}-m^{p} a_{m}^{p}-\sum_{k=m+1}^{n} a_{k}^{p}\left(k^{p}-(k-1)^{p}\right).$$

则

$$f_{m}^{\prime}\left(a_{m}\right)=p m\left(m a_{m}+\sum_{k=m+1}^{n} a_{k}\right)^{p-1}-p m^{p} a_{m}^{p-1} \geqslant 0.$$

因此 $f_{m}\left(a_{m}\right)$ 关于 a_{m} 是单调增的, 所以

$$f_{m}\left(a_{m}\right)=f_{m}\left(a_{m+1}\right) \geqslant \cdots \geqslant f_{n-1}\left(a_{n}\right)=\left(n a_{n}\right)^{p}-n^{p} a_{n}^{p}=0,$$

这就证明了原不等式.

方法三 (AOPS 论坛网友提供)　如果考虑函数 $f(x)=(x+1)^{p}-x^{p}, x \geqslant 1$, 则 $f^{\prime}(x)=p\left((x+1)^{p-1}-x^{p-1}\right)>0$, 因此 $f(x)$ 是单调增的. 则当 $x \geqslant n$ 时, $f(x) \geqslant f(n) \Leftrightarrow (x+1)^{p} \geqslant x^{p}+(n+1)^{p}-n^{p}$. 下面我们用归纳法证明

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k}\right)^{p} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{k}^{p}\left(k^{p}-(k-1)^{p}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

令 $S_{n}=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}, x_{n}=\dfrac{S_{n}}{a_{n+1}} \geqslant n$. 命题结论对 $n=1$ 显然成立, 假定命题已经对 n 成立, 则对 $n+1$ 我们有

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_{k}\right)^{p} \geqslant\left(S_{n}+a_{n+1}\right)^{p}=a_{n+1}^{p}\left(x_{n}+1\right)^{p}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant a_{n+1}^p \left(x_n^p + (n+1)^p - n^p\right) = S_n^p + a_{n+1}^p \left((n+1)^p - n^p\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \left(k^p - (k-1)^p\right)\right) + a_{n+1}^p \left((n+1)^p - n^p\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_k^p \left(k^p - (k-1)^p\right).
\end{aligned}
$$

因此由归纳法知原命题对所有 n 都成立, 证毕. $\square$

2 逆神的一道神题

近日, 中科院马明辉同学 (江湖人称逆神) 向我提出了一个这样的问题:

设 $\{a_n\}$ 是一个正数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$, 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明对 $\alpha \geqslant 0$ 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n a_n}{S_n}\right)^{\alpha} \frac{1}{a_n} < \infty.$$

惭愧, 我只见过这个 $\alpha = 1$(Hardy 不等式) 和 $\alpha = 2$ 的情形, 对于一般的 α 我也没办法. 而善于思考的逆神又根据 Hardy 不等式的结论提出了一个更妙的猜想: 对任意 $\alpha \geqslant 0$, 可能成立如下不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n a_n}{S_n}\right)^{\alpha} \frac{1}{a_n} \leqslant 2^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

不知道是否有人探索过这个问题, 我把这个题放到了 AOPS 和 MSE 上, 都没有结果. 后来也询问了万时凯老师和王永喜老师, 得到了一些帮助. 不过最后这个问题解决还是逆神本人完成的.

首先逆神通过借助 mathematica 计算发现这个不等式对 $\alpha > 2$ 是不成立的, 甚至连收敛性的结论也是不对的, 因此我们把问题限制在 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ 的情形. 我们先来证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{S_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}. \tag{1}$$

这个不等式比 $\alpha = 1$ 的情形稍微强一点. 首先由 Cauchy 不等式得

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}\right) \geqslant (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

于是可得

$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{8n+4}{n^2 (n+1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i}$$

两边对 n 从 1 到 N 求和得

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i} = 4 \sum_{i=1}^N \frac{i^2}{a_i} \sum_{n=i}^N \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 4\sum_{i=1}^{N}\frac{i^2}{a_i}\sum_{n=i}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=4\sum_{i=1}^{N}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\\
&<4\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_i}
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$ 即可证得不等式 (1). 下面我们来证明

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na_n}{S_n}\right)^2\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}. \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
T_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}&=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\\
&=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n}{S_nS_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)\\
&=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_nS_{n-1}}\left(S_n-S_{n-1}\right)-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n^2}{S_n^2S_{n-1}}\\
&=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^2}{S_n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{S_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n^2}{S_n^2S_{n-1}}\\
&=\frac{5}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{2n+1}{S_n}-\frac{(N+1)^2}{S_N}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n^2}{S_n^2S_{n-1}}\\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{S_n}+\frac{2}{a_1}-\frac{(N+1)^2}{S_N}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n^2}{S_n^2S_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

记 $R_N=\dfrac{N+1}{S_N}+\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n^2}{S_n^2S_{n-1}}$, 则

$$
\begin{aligned}
R_N-R_{N-1}=\frac{N+1}{S_N}-\frac{N}{S_{N-1}}+\frac{N^2a_N^2}{S_N^2S_{N-1}}&>0\\
\Leftrightarrow N^2a_N^2+(N+1)\,S_NS_{N-1}&>NS_N^2\\
\Leftrightarrow N^2a_N^2+S_NS_{N-1}&>NS_Na_N\\
\Leftrightarrow N^2a_N^2+S_N^2&>(N+1)\,S_Na_N
\end{aligned}
$$

这只需要证明 $N^2a_N^2+S_N^2\geqslant 2Na_NS_N\geqslant (N+1)S_Na_N$, 因此 R_N 是单调增加的. 所以

$$
R_2-\frac{2}{a_1}=\frac{4a_2^2}{(a_1+a_2)^2a_1}+\frac{3}{a_1+a_2}-\frac{2}{a_1}=\frac{a_1^2-a_1a_2+2a_2^2}{a_1(a_1+a_2)^2}>0.
$$

故

$$
\frac{(N+1)^2}{S_N}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2a_n^2}{S_n^2S_{n-1}}>R_N>\frac{2}{a_1}.
$$

这就证明了 $T_N < \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{S_n}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{S_n} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

进一步, 这里的常数 4 是最优常数. 如果当 $n \leqslant N$ 时取 $a_n = n$, 而当 $n > N$ 时, 取 $a_n = n(n+1)$. 则原不等式等价于

$$4 \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n^3 (n+1)}{\left(\frac{N^2(N+1)^2}{4} + \sum_{k=N+1}^{n} k(k+1) \right)^2} \leqslant 4 \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}$$

当 $N \to \infty$ 时, 只考虑左边第一项, 利用 Stolz 定理有

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)^2}}{\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}} = \lim_{N \to \infty} \frac{\frac{N}{(N+1)^2}}{\frac{1}{N+1}} = 1.$$

这就说明 4 是不可再改进的.

对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ 的情形, 我们首先有加权幂平均不等式: 设 $\alpha < \beta$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$, 则

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n a_n^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} p_n a_n^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

令 $b_n = \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_N}}$, 则有 $\sum_{n=1}^{N} b_n = 1$, 利用加权幂平均不等式得

$$\left[\sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{n a_n}{S_n} \right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left[\sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{n a_n}{S_n} \right)^{2} \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

因此 $\sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{n a_n}{S_n} \right)^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha}$, 即 $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n a_n}{S_n} \right)^{\alpha} \frac{1}{a_n} \leqslant 2^{\alpha} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$ 对任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ 都成立. 而且同样的方法也说明 2^{α} 是不可改进的常数.

对于 $\alpha > 2$ 的时候, 原结论是不成立的, 我们取如下反例

$$a_n = \begin{cases} n^{\frac{\alpha}{2}}, & n \neq k^2 \\ k^{1+\alpha}, & n = k^2 \end{cases}, \text{这里}k\text{是正整数}.$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} < \infty.$$

但对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n a_n}{S_n} \right)^{\alpha} \frac{1}{a_n}$, 如果令 $b_n = \left(\frac{n a_n}{S_n} \right)^{\alpha} \frac{1}{a_n}$, 则

$$S_{N^2} = \sum_{n=1}^{N^2} n^{\frac{\alpha}{2}} - \sum_{k=1}^{N} k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{N} k^{1+\alpha}$$

$$\sim \frac{2}{2+\alpha}N^{2+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}N^{1+\alpha} + \frac{1}{2+\alpha}N^{2+\alpha} \sim \frac{3}{2+\alpha}N^{2+\alpha}.$$

因此

$$b_{N^2} = \left(\frac{N^2 a_N^2}{S_{N^2}}\right)^{\alpha} \frac{1}{a_{N^2}} \sim \left(\frac{N^2 N^{1+\alpha}}{\frac{3}{3+\alpha}N^{2+\alpha}}\right)^{\alpha} \frac{1}{N^{1+\alpha}} = \left(\frac{3+\alpha}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{N}.$$

这就说明 $\sum\limits_{N=1}^{\infty} b_{N^2} = \infty$, 原级数发散, 因此结论对 $\alpha > 2$ 是不成立的.

逆神解决级数问题的同时, 还提出了类似的积分问题也一并解决了:

如果函数 $f(x)$ 非负且使得 $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} < \infty$. 记 $F(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. 则对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ 有

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{xf(x)}{F(x)}\right)^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant 2^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}. \tag{3}$$

这里我们先证明 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$ 的情形. 当 $\alpha = 1$ 时, 首先由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^{x} \frac{t^2}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^{x} t\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{x^4}{4}.$$

因此 $\frac{1}{F(x)} = \left(\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} \leqslant \frac{4}{x^4}\int_0^{x} \frac{t^2}{f(t)}\mathrm{d}t$, 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x}{F(x)}\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^{\infty} \frac{4}{x^3}\int_0^{x} \frac{t^2}{f(t)}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \frac{4}{x^3}\frac{t^2}{f(t)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{2}{f(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

而当 $\alpha = 2$ 时, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^2 f(x)}{F(x)}\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} x^2\mathrm{d}\left(-\frac{1}{F(x)}\right) \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{x} 2t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{F(x)}\right) = \int_0^{\infty}\int_t^{\infty} 2t\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{F(x)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2t}{F(t)}\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.\end{aligned}$$

这样 $\alpha = 2$ 结论也成立. 而对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ 而言, 我们首先有积分形式的加权 Jensen 不等式: 如果非负函数 $h(x)$ 满足 $\int_0^{\infty} h(x)\mathrm{d}x = 1$, $g(x)$ 是任意实值函数, 而 $\varphi(x)$ 是一个凸函数, 则

$$\varphi\left(\int_0^{\infty} g(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^{\infty} \varphi(g(x))\,h(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, 如果取 $g(x) = \left(\frac{xf(x)}{F(x)}\right)^{\alpha}$, $h(x) = \left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right)^{-1} \frac{1}{f(x)}$, 则 $\int_0^{\infty} h(x)\mathrm{d}x = 1$. 再令 $p = \frac{2}{\alpha} \geqslant 1$, 则 $\varphi(x) = x^p$ 是一个凸函数. 因此由加权 Jensen 不等式得

$$\left(\int_0^{\infty} g(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x\right)^p \leqslant \int_0^{\infty} g^p(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x.$$

即

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{\alpha}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{f\left(t\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\leqslant\int_0^{\infty}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{2}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{f\left(t\right)}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}.$$

利用 $\alpha=2$ 的情形化简即得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}&\leqslant\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{2}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(4\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}=2\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

这样我们就完成了 (3) 式的证明. 进一步如果取 $f(x)=x^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$, 然后令 $\varepsilon\to0^+$ 可知常数 2^{α} 是最优常数.

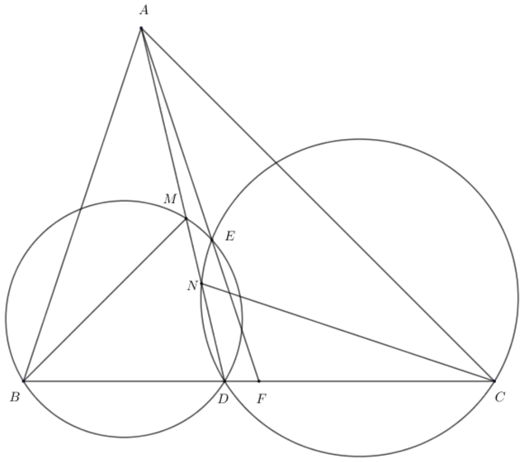
对于 $\alpha>2$, 我们可以通过递归定义的方式给出反例, 从而说明结论对 $\alpha>2$ 也是不成立的.

当 $0\leqslant x<1$ 时, 定义 $f(x)=1$. 如果假定 $x<n$ 时, $f(x)$ 已经定义. 则当 $n\leqslant x<n+1$ 时, 定义 $f(x)=M_n$, 则 $F(x)=F(n)+(x-n)M_n$, 于是

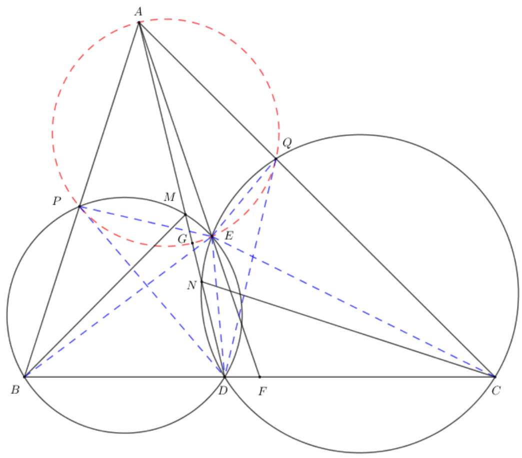
$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}&=\int_n^{n+1}\left(\frac{xM_n}{F\left(n\right)+\left(x-n\right)M_n}\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{M_n}\\&=\frac{1}{M_n}\int_n^{n+1}\frac{x^{\alpha}}{\left(x-n+\frac{F(n)}{M_n}\right)^{\alpha}}\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{n^{\alpha}}{M_n}\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-n+\frac{F(n)}{M_n}\right)^{\alpha}}\\&=\frac{n^{\alpha}}{M_n}\frac{1}{\alpha-1}\left(\left(\frac{M_n}{F\left(n\right)}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{1}{1+\frac{F(n)}{M_n}}\right)^{\alpha-1}\right)\\&=\frac{n^{\alpha}}{\alpha-1}\left(\frac{M_n^{\alpha-2}}{F^{\alpha-1}\left(n\right)}-\frac{1}{M_n}\left(\frac{1}{1+\frac{F(n)}{M_n}}\right)^{\alpha-1}\right)\end{aligned}$$

由于 $\alpha>2$, 只要取 M_n 充分大, 即可使得 $\displaystyle\int_n^{n+1}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}>1$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都成立, 那么由 Cauchy 收敛原理可知 $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{xf\left(x\right)}{F\left(x\right)}\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}=\infty$. 同时也可保证 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{M_n}<\infty$, 这样原命题对 $\alpha>2$ 就不成立了.

如图, D 在 BC 上且 $\angle BAD=\angle CAD$, $BM\perp AC$ 交 AD 于 M, $CN\perp AB$ 交 AD 于 N, $\odot(BDM)$ 交 $\odot(CDN)$ 于 $E(E\neq D)$, AE 交 BC 于 F, 求证: $BF=CF$.(姚嘉斌老师)



证明 [向禹] 连接 $DP, DQ, BE, CE, DE, QE, QE$, 显然 $\angle APE=\angle BDE=\angle CDE$, 因此 A, P, E, Q 四点共圆. 设 AD 交 $\odot(APGQ)$ 于点 G, 下面我们将证明 DP, DQ 是 $\odot(APGQ)$ 的两条切线.



首先

$$\angle BPD=\angle BMD=90^\circ-\frac{\angle A}{2}=\angle CND=\angle CQD,$$

因此 $\angle ADP=\angle ADQ$, 于是 AD 是四边形 $APDQ$ 的对称轴, $AP=AQ, DP=DQ$. 由正弦定理得

$$\frac{DP}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BPD}=\frac{BD}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{BP}{\sin\angle BDP}=\frac{BP}{\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}+B\right)},$$

故

$$DP=\frac{BD\sin B}{\cos\frac{A}{2}}, BP=\frac{BD\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}+B\right)}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{BD\cos\left(B-\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}}.$$

那么

$$
\begin{aligned}
AP &= AB - BP = \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}\sin\angle ADB - \frac{BD\cos\left(B-\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}} \\
&= \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right) - \frac{BD\cos\left(B-\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}}, \\
AG &= \frac{AP}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right) - \sin\frac{A}{2}\cos\left(B-\frac{A}{2}\right)\right), \\
&= \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}\left(\sin B\cos^2\frac{A}{2} - \sin B\sin^2\frac{A}{2}\right) \\
&= \frac{BD\sin B}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{BD\sin B\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}, \\
DG &= AD - AG = \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}\sin B = \frac{BD\sin B\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}.
\end{aligned}
$$

因此

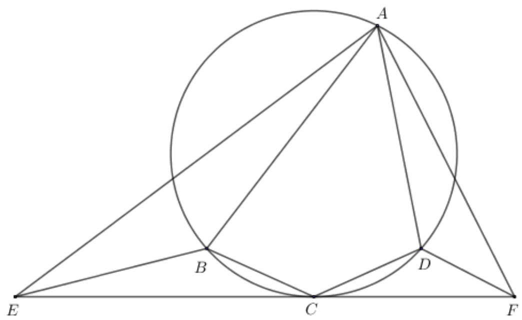
$$
DP^2 = \frac{BD^2\sin^2 B}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{BD\sin B\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}\sin B = DG\cdot DA.
$$

这就说明 DP 是 $\odot(APGQ)$ 的切线, 同理 DQ 也是 $\odot(APGQ)$ 的切线, 于是

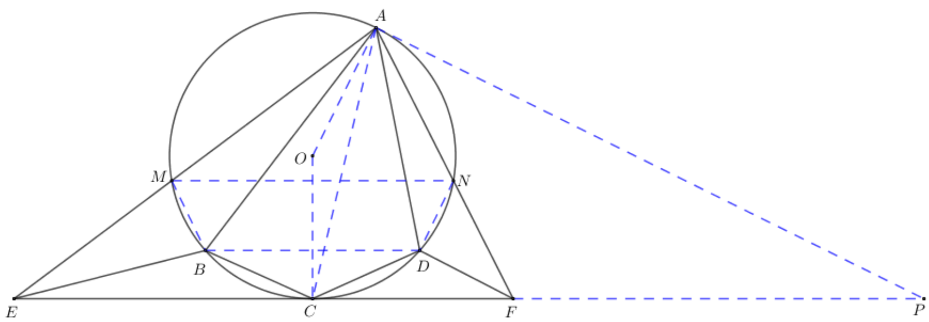
$$
\angle DBE = \angle DFE = \angle PAE, \angle DCE = \angle DQE = \angle QAE,
$$

故 $FB^2 = FE\cdot FA = FC^2$, 证毕. $\square$

如图, $\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 的外接圆且 $CB=CD$, BE 平分 $\angle ABC$ 交 $\odot O$ 在 C 处的切线于 E, DF 平分 $\angle ADC$ 交 $\odot O$ 在 C 处的切线于 F. 求证: $\angle EAB=\angle FAD$.（姚佳斌老师）



证明 如图, 连接 OA, OC, BD, 设 AE, AF 分别交 $\odot O$ 于点 M, N, 连接 MN, 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 EF 延长线于点 P. 下面我们证明 PA 也是 $\triangle AEF$ 外接圆的切线, 这等价于证明 $PA^2=PF\cdot PE=(PC-CF)(PC+CE)$.



记 $\angle OAC=\alpha, \angle BAD=\beta, \angle ABC=\theta$, 不妨设 $BC=DC=1$. 则由正弦定理有 $AC=\dfrac{BC}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\sin\frac{\beta}{2}}, PA=PC=\dfrac{AC}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sin\theta}{2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}$.

$$\angle CBE=180^\circ-\frac{\theta}{2}, \angle ADC=180^\circ-\theta, \angle CDF=90^\circ+\frac{\theta}{2}.$$

$$\angle CEB=\frac{\theta-\beta}{2}, \angle CFD=90^\circ-\frac{\theta+\beta}{2}.$$

再由正弦定理得

$$CE=\frac{BC}{\sin\angle CEB}\sin\angle CBE=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}, CF=\frac{CD}{\sin\angle CFD}\sin\angle CDF=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta+\beta}{2}}.$$

于是 $PA^2=(PC-CF)(PC+CE)$ 等价于

$$\left(\frac{\sin\theta}{2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2=\left(\frac{\sin\theta}{2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta+\beta}{2}}\right)\left(\frac{\sin\theta}{2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}\right).$$

注意到 $\alpha+\theta=90^\circ, \sin\alpha=\cos\theta$, 展开即等价于

$$\frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\theta\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\cos\theta\cos\frac{\theta+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta+\beta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}}.$$

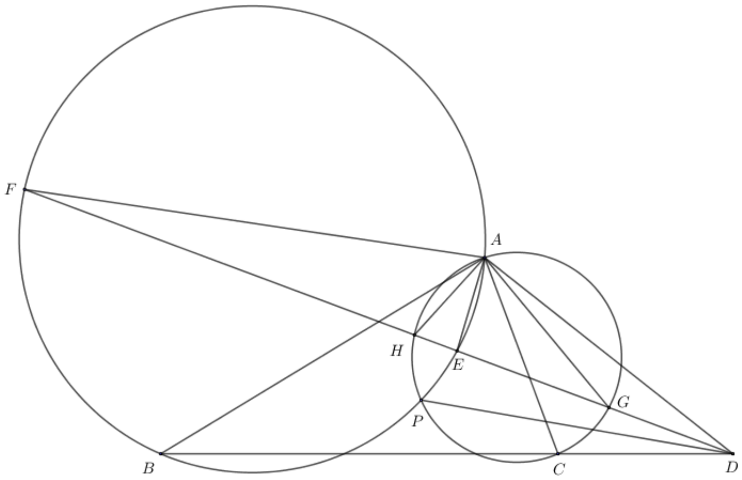
再通分化简即等价于

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}+\cos\theta\sin\frac{\beta}{2}.$$

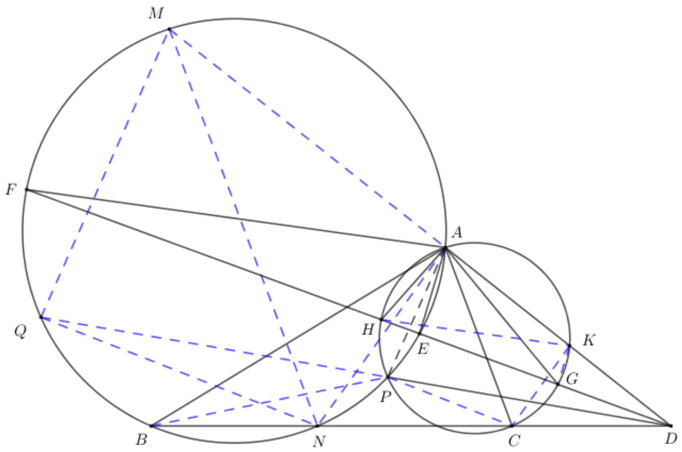
而这个式子利用和与差的三角公式展开是显然成立的,这样我们就证明了 PA 是 $\triangle AEF$ 的外接圆的切线. 因此 $\angle PAF=\angle AMN=\angle AEF$, 于是 $MN//EF//BD$, 故 $BM=DN$, 即 $\angle EAB=\angle FAD$.

□

在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 点 D 在 BC 的延长线上, $\angle CAD = \angle ABC$, 点 P 满足 $DP = DA$. 过点 D 的一条直线交 $\odot(ABP)$ 于点 $E, F(PE < PF)$, 交 $\odot(ACP)$ 于点 $G, H(PG < PH)$. 求证: $\angle EAF = \angle GAH$.(万喜人老师)



证明 [向] 连接 PA, PB, PC, 设 DC 与 $\odot(ABP)$ 的另一个交点为 N, DP 与 $\odot(ABP)$ 的另一个交点为 Q, DA 与两圆的另一个交点分别为 M, K, 连接 MQ, MN, HK, CK.



由已知可得 $DP^2 = DA^2 = DC \cdot DB$, 于是

$$\angle DAC = \angle ABC = \angle AMN, \angle DPC = \angle PBC = \angle PQN.$$

因此 $AC // MN, PC // QN$. 而 D 在 AP 中垂线上, 由对称性可知 $AP // MQ$, 因此 D 为 $\triangle APC$ 与 $\triangle MQN$ 的位似中心, 自然是 $\odot(APC)$ 与 $\odot(MQN)$ 的位似中心. 由位似的性质即得 $\angle GAH = \angle GKH = \angle EAF$.

□

几个漂亮的积分结果

今天只是列出几个漂亮的积分结果, 其实是一些搬运工作.

$$\int_0^\infty \frac{x^8-4x^6+9x^4-5x^2+1}{x^{12}-10x^{10}+37x^8-42x^6+26x^4-8x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

如果记 $f(x)=4+8x-11x^2-18x^3+13x^4+8x^5+x^6$, 则有

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6},\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{3},\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}.$$

如果记 $f(x)=4+12x-6x^2-26x^3+11x^4+8x^5+x^6$, 则

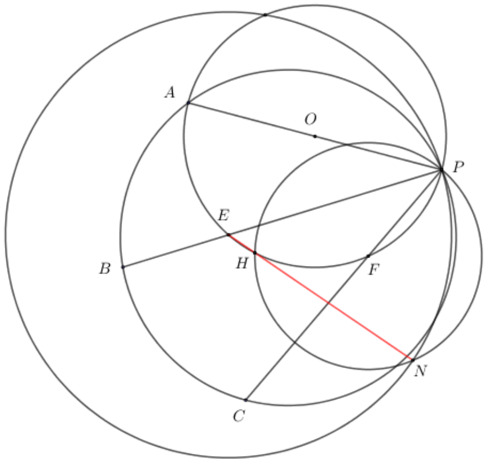
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4},\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4},\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

如果记 $f(x)=13+12x+7x^4+2x^5-3x^6+x^8$, 则

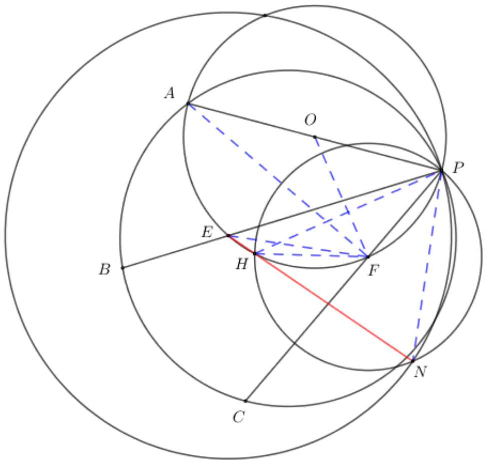
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{487\pi}{4148},\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x=-\frac{325\pi}{4148},\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{515\pi}{4148}.$$

第一个是 2005 年美国数学月刊征解题, 后面的结果都是网名为 pisco 的大神 (HKUST 数学系大三学生, 数论方向, 此人的水平远在我之上, 不论是积分功底还是专业能力) 根据自己对 2005 年征解题的解答又独立得出的结果, 实在令人叹为观止. 注意这些不是简单的有理函数积分, 因为在实数范围内分母都是不可分解的, 不仅需要用到留数定理, 还需要非常巧妙的构造, 而且这些漂亮的结果的存在性其实是依赖于伽罗瓦理论的. 尤其是最后一组式子, 计算功底可见一斑.

如图, P, A, B, C 共圆, 以 AP 为直径的 $\odot O$ 分别交 PB, PC 于 E, F, $\odot(F, FP)$ 与 $\odot O$ 交于 H, 并与 $\odot(E, EP)$ 交于 N. 求证: H, E, N 三点共线.



证明 连接 AF, EF, PH, FH.



因为 $OF \perp PH, EF \perp PN$, 所以

$$\angle PNH = \frac{1}{2}\angle PFH = \angle OFH = 90^\circ - \angle PHF$$
$$= 90^\circ - \angle PEF = \angle EPN = \angle PNH$$

这就说明 E, H, N 三点共线. $\square$

17. 数列 (u_n) 定义为: $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ 且

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-3} \quad \forall n \geqslant 3.$$

(a) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 我们有 $u_n = \operatorname{tr}(A^n)$.

(b) 对所有素数 p, 我们有 $p \mid u_p$.

证明

(a) Let $P = X^3 - X - 1$. Since A is the companion matrix of P, A is diagonalizable in $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ and P is the minimal polynomial of A. Note that P is also the characteristic polynomial of the sequence (u_n). Thus, if λ_1, λ_2 and $\overline{\lambda_2}$ are the eigenvalues of A, then there exist three constants $a, b, c \in \mathbb{C}$ such that, for all $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, we have

$$u_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n + c\overline{\lambda_2}^n.$$

The initial values of the sequence, together with the easy identities

$$\operatorname{tr}(A) = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \overline{\lambda_2} \quad \text{and} \quad \operatorname{tr}(A^2) = 2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \overline{\lambda_2}^2$$

provide the following Vandermonde system of equations

$$\begin{cases} a' + b' + c' = 0, \\ a'\lambda_1 + b'\lambda_2 + c'\overline{\lambda_2} = 0, \\ a'\lambda_1^2 + b'\lambda_2^2 + c'\overline{\lambda_2}^2 = 0 \end{cases}$$

where $a' = a - 1$, $b' = b - 1$ and $c' = c - 1$. Since the eigenvalues are distinct, this system has the unique solution $(a', b', c') = (0, 0, 0)$ and thus $a = b = c = 1$. We deduce that, for all $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$u_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \overline{\lambda_2}^n = \operatorname{tr}(A^n).$$

(b) By Fermat's little theorem for integer matrices, we get for all primes p

$$u_p = \operatorname{tr}(A^p) \equiv \operatorname{tr}(A) \equiv 0 \pmod{p}.$$

□

18. 解函数方程

$$\phi\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \phi\left(-\frac{1}{x}\right) + \phi\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sin x.$$

解 约定: $f^n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次迭代.

设 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, 则

$$f^2(x) = -\frac{1}{x}, \quad f^3(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad f^4(x) = x.$$

从而原方程可改写为

$$\phi(f(x)) + \phi(f^2(x)) + \phi(f^3(x)) = \sin x.$$

把其中的 x 换成 $f(x)$, 得

$$\phi(f^2(x)) + \phi(f^3(x)) + \phi(x) = \sin f(x).$$

再把其中的 x 换成 $f(x)$, 得

$$\phi(f^3(x)) + \phi(x) + \phi(f(x)) = \sin f^2(x),$$
$$\phi(x) + \phi(f(x)) + \phi(f^2(x)) = \sin f^3(x).$$

由上述四个式子可解出

$$3\phi(x) = \sin f(x) + \sin f^2(x) + \sin f^3(x) - 2\sin x,$$

即

$$\phi(x) = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{x-1}{x+1} - \sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1+x}{1-x} - 2\sin x\right). \qquad \square$$

注 更一般地, 对函数方程

$$\phi(f(x)) + \phi(f^2(x)) + \cdots + \phi(f^n(x)) = K(x), \tag{$*$}$$

我们可以用同样的方法给出结论: 若 $f^{n+1}(x) = x$, 则

$$\phi(x) = \frac{1}{n}\big(K(f(x)) + K(f^2(x)) + \cdots + K(f^n(x)) - (n-1)K(x)\big).$$

19. 证明: 当 $\Re s_i > 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 时, 有

$$\sum_{\substack{m_1=1 \\ (m_1,\ldots,m_r)=1}}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r} = \frac{\zeta(s_1)\cdots\zeta(s_r)}{\zeta(s_1+\cdots+s_r)}.$$

证明 For brevity denote the summation symbols by $\sum_{m_i}$ and let $g = (m_1, \ldots, m_r)$. For $\Re s_i > 1$ we have

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m_i \\ g=1}} m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r} &= \sum_{m_i} I(g) m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r} \\ &= \sum_{m_i}\sum_{d|g}\mu(d) m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}.\end{aligned}$$

Now $d \mid g$ if and only if $d \mid m_i$ for all i. Thus for a fixed divisor d of g we must sum over all m_i of the form dq_i. Hence

$$\begin{aligned}\sum_{m_i}\sum_{d|g}\mu(d) m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r} &= \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{q_i}\mu(d)(dq_1)^{-s_1}\cdots(dq_r)^{-s_r} \\ &= \zeta(s_1)\cdots\zeta(s_r)\sum_{d=1}^{\infty}\mu(d) d^{-(s_1+s_2+\cdots+s_r)} \\ &= \frac{\zeta(s_1)\cdots\zeta(s_r)}{\zeta(s_1+\cdots+s_r)}.\end{aligned}$$

$\square$

$\int$

20. 求 $\left(\sin x+\frac{5\sqrt{11}-6\sqrt{7}}{3}\right)\left(\cos x+\frac{5\sqrt{11}+6\sqrt{7}}{3}\right)$ 的最大值.

解　为了方便, 我们求一般的 $(\sin x+a)(\cos x+b), a, b>0$ 的最大值表达式即可.

$$
\begin{aligned}
(\sin x+a)(\cos x+b) &= \frac{1}{\lambda}(\sin x+a)(\lambda\cos x+\lambda b) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}(\sin x+a+\lambda\cos x+\lambda b)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{1+\lambda^2}+a+\lambda b\right)^2
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $\sin x+a=\lambda\cos x+\lambda b$ 且 $\cos x=\lambda\sin x$, 即 $\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\cos x=\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, 最后得到 λ 满足

$$
\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}+a=\frac{\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\lambda b.
$$

这个方程化简是只含有偶次方的四次方程. 如果 $a=\frac{5\sqrt{11}-6\sqrt{7}}{3}, b=\frac{5\sqrt{11}-6\sqrt{7}}{3}$, 则可以解出 $\lambda=\frac{9-\sqrt{77}}{2}$, □

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\mathrm{e}^{a_n-1}(n\in\mathbb{N}^*)$.(其中 e 是自然对数的底数, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$)

(I) 证明: $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbb{N}^*)$;

(II) 设 $b_n=1-a_n$, 是否存在实数 $M>0$, 使得 $b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant M$ 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 成立? 若存在, 求出 M 的一个值; 若不存在, 请说明理由.

解

(I) 注意到 $a_{n+1}-a_n=\mathrm{e}^{a_n-1}-a_n$. 考虑 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x$, 则 $a_{n+1}>a_n$ 等价于 $f(a_n)>0$. 而 $f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1$, 显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减, $f_{\min}(x)=f(1)=0$, 因此当 $0<x<1$ 时, $f(x)>0$. 由 $a_1=\frac{1}{2}$ 归纳可知 $a_n<a_{n+1}<1$.

(II) 由 $b_n=1-a_n$ 可知 $b_1=\frac{1}{2}, b_{n+1}=1-\mathrm{e}^{-b_n}, b_n\downarrow 0$. 由 Stolz 定理可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nb_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{b_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_nb_{n+1}}{b_n-b_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{b_n\left(1-\mathrm{e}^{-b_n}\right)}{b_n-1+\mathrm{e}^{-b_n}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{x-1+\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2.
\end{aligned}
$$

因此当 $n\to\infty$ 时, $b_n\sim\frac{2}{n}$, 由调和级数的发散性可知不存在 M 使得 $b_1+b_2+\cdots+b_n<M$ 成立.

□

22. 已知函数 $f(x)=\dfrac{4}{4x+15}$.

(I) 求方程 $f(x)-x=0$ 的实数解;

(II) 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)(n\in\mathbb{N}^*)$. 是否存在实数 c, 使得 $a_{2n}<c<a_{2n-1}$ 对所有的 $n\in\mathbb{N}^*$ 都成立? 证明你的结论;

(III) 在 (II) 的条件下, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 证明: $\dfrac{1}{4}<\dfrac{S_n}{n}\leqslant 1$.

解

(I) 显然 $f(x)-x=0$ 的解为 $x_1=\dfrac{1}{4}, x_2=-4$.

(II) 首先有

$$a_n-\frac{1}{4}=\frac{4}{4a_{n-1}+15}-\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{4}-a_{n-1}}{4a_{n-1}+15},$$
$$a_n+4=\frac{4}{4a_{n-1}+15}+4=\frac{16\left(a_{n-1}+4\right)}{4a_{n-1}+15}.$$

于是

$$\frac{a_n-\frac{1}{4}}{a_n+4}=-\frac{1}{16}\frac{a_{n-1}-\frac{1}{4}}{a_{n-1}+4}=\left(-\frac{1}{16}\right)^{n-1}\frac{a_1-\frac{1}{4}}{a_1+4}=\frac{3}{20}\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)^{n-1}.$$

解得 $a_n=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{16}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{16}\right)^{n-1}}$. 因此

$$a_{2n}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}{1+\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}\downarrow\frac{1}{4}, a_{2n-1}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-2}}{1-\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-2}}\uparrow\frac{1}{4}.$$

这就意味着存在唯一的 $c=\dfrac{1}{4}$ 使得 $a_{2n}<c<a_{2n-1}$ 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 都成立.

(III) 由于 $\{a_{2n-1}\}$ 单调减, 而 $\{a_{2n}\}$ 单调增, 且 $a_{2n}<\dfrac{1}{4}<a_{2n-1}$, 则显然 $\{a_n\}$ 中的最大项为 $a_1=1$, 于是 $\dfrac{S_n}{n}<a_1<1$, 不等式右边成立. 对于左边, 我们先证明 $\dfrac{S_{2n}}{2n}>\dfrac{1}{4}$ 成立, 只需证明 $a_{2n-1}+a_{2n}>\dfrac{1}{2}$ 即可. 而

$$\begin{aligned}
a_{2n-1}+a_{2n}&=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-2}}{1-\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-2}}+\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}{1+\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}\\
&>\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}{1-\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}+\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}{1+\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}}\\
&>\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}\right)\left(1+\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}\right)\left(1-\frac{3}{20}\left(\frac{1}{16}\right)^{2n-1}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\frac{9}{50}\left(\frac{1}{16}\right)^{4n-2}>\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

因此
$$\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{2k-1}+a_{2k}\right)>\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2}n=\frac{1}{4}.$$
而
$$\frac{S_{2n+1}}{2n+1}=\frac{S_{2n}+a_{2n+1}}{2n+1}>\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\cdot 2n+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$
这样不等式左边得证.

□

证明 连接 BC, 设 $AB=3a, AC=3b, \angle A=\theta=\angle ABC=\angle DBC$. 记 $t=\cos\theta$, 则 $a=2b\cos t, CD=x, BD=y$, 有
$$DB^2=CD\cdot DA, \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}.$$
即
$$y^2=x\left(x+3a\right), \frac{3b}{x}=\frac{3a}{y}.$$
解得 $y=\dfrac{3ab^2}{a^2-b^2}$. 只需证明 $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{DK}=0$, 而
$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{DK}&=\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AJ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BD}\right)\\&=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BD}\\&=-2a^2+abt+\frac{6a^2b^2}{a^2-b^2}\cos\left(2\theta\right)-\frac{3ab^3}{a^2-b^2}\cos\left(3\theta\right)\\&=b^2\left[-6t^2+\frac{24t^2}{4t^2-1}\left(2t^2-1\right)-\frac{6t}{4t^2-1}\left(4t^3-3t\right)\right]=0\end{aligned}$$
证毕. □

设数列 $\{x_n\}$ 定义如下:
$$x_1=2,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n+8}-\sqrt{x_n+3}\ (n\geqslant 1).$$
(1) 证明 $\{x_n\}$ 存在有限的极限并求之.

(2) 对每个 $n\geqslant 1$, 证明
$$n\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant n+1.$$

证明

(1) 首先显然对任意 $n\in\mathbb{N}, x_n>0$. 根据递推关系可得
$$\begin{aligned}\left|x_{n+1}-x_n\right|&=\left|\sqrt{x_n+8}-\sqrt{x_n+3}-\left(\sqrt{x_{n-1}+8}-\sqrt{x_{n-1}+3}\right)\right|\\&=\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n+8}+\sqrt{x_{n-1}+8}}-\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n+3}+\sqrt{x_{n-1}+3}}\right|\\&\leqslant\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left|x_n-x_{n-1}\right|.\end{aligned}$$

因此由压缩映射原理 (或者 Cauchy 收敛原理) 可知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 在原递推公式两边取极限可得

$$a = \sqrt{a+8} - \sqrt{a+3} \Rightarrow a = 1.$$

(2) 由 (1) 可知

$$\begin{aligned}&x_{2n+1} - x_{2n-1}\\ =&(x_{2n} - x_{2n-2})\left(\frac{1}{\sqrt{x_{2n}+8}+\sqrt{x_{2n-2}+8}} - \frac{1}{\sqrt{x_{2n}+3}+\sqrt{x_{2n-2}+3}}\right).\end{aligned}$$

这说明 $x_{2n+1} < x_{2n-1} \Leftrightarrow x_{2n} > x_{2n-2}$. 而 $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{10} - \sqrt{5} \approx 0.926, x_3 \approx 1.006$, 因此 $x_3 < x_1$, 于是 $x_4 > x_2$, 归纳可知 $\{x_{2n-1}\} \downarrow 1, \{x_{2n}\} \uparrow 1$. 故 $x_{2n-1} > 1 > x_{2n}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立. 由于 $x_{2n-1} > 1$, 要证左边不等式, 只需证明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} \geqslant 2n$, 这又只需要证明 $x_{2n-1} + x_{2n} \geqslant 2$ 即可. 要证

$$x_{2n-1} + x_{2n} = \sqrt{x_{2n-1}+8} - \sqrt{x_{2n-1}+3} + x_{2n-1} \geqslant 2 \qquad (1).$$

考虑函数 $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} + x$, 则 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+8}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} + 1 > 0$. 由于 $a_{2n-1} > 1$, 故 $f(a_{2n-1}) > f(1) = 2$. 因此 (1) 式成立, 这就证明了左边的不等式.

再证明右边的不等式. 注意到 $a_{2n} < 1$, 所以我们也只需要证明

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+1} \leqslant 2n + 2,$$

即

$$x_2 + x_3 \cdots + x_{2n+1} \leqslant 2n. \qquad (2)$$

这只需要证明 $x_{2n} + x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n}+8} - \sqrt{x_{2n}+3} + x_{2n} \leqslant 2$. 由上述 $f(x)$ 的单调性以及 $x_{2n} < 1$ 可知 $f(x_{2n}) < f(1) = 2$, 因此 (2) 式成立, 不等式右边得证.

□

证明 [向] 连接 $OM, ON, HM, HN, OB, OC, AH, BH, CH$, 首先显然有

$$
\begin{aligned}
\angle BHM &= \angle BOM = \angle AMO - \angle ABO = \angle OHB + \angle ACB - 90^\circ \\
\angle CHN &= \angle CON = \angle ACO - \angle ANO = \left(90^\circ - \angle ABC\right) - \left(180^\circ - \angle OHC\right) \\
&= \angle OHB + 90^\circ - \angle ABC - \angle BAC = \angle OHB + \angle ACB - 90^\circ = \angle BOM.
\end{aligned}
$$

记 $\angle BOM = \angle CON = \alpha$, 则可知 $\angle MON = \angle BOC = 2\angle BAC, \angle MHN = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$. 下面要证明 $\angle OKM = \alpha$. 这等价于证明 $\angle HMN = \angle OHB = \angle AMO$. 注意到 $\angle AMO + \angle ANO = \angle ABO + \angle ACO = 180^\circ - 2\angle BAC$ 是一个定值, 而 $\dfrac{HM}{HN} = \dfrac{\sin\angle HNM}{\sin\angle HMN}$, 因此只需证明 $\dfrac{HM}{HN} = \dfrac{\sin\angle AMO}{\sin\angle ANO}$ 即可. 在 $\odot(BMOH)$ 和 $\odot(CNOH)$ 中, 由正弦定理得

$$
\begin{aligned}
HM =& \frac{OB}{\sin\angle BMO}\sin\angle ABH = \frac{R\cos\angle BAC}{\sin\angle AMO}, \\
HN =& \frac{OC}{\sin\angle ANO}\sin\angle HCN = \frac{R\cos\angle BAC}{\sin\angle ANO}.
\end{aligned}
$$

这就证明了 $\dfrac{HM}{HN} = \dfrac{\sin\angle AMO}{\sin\angle ANO}$, 故 $\angle AMO = \angle HMN, \angle ANO = \angle HNM, \angle OKH = \alpha$. 要证 $KA = KH$, 等价于证明 $KH\cos\angle AHK = \dfrac{1}{2}AH = R\cos\angle BAC$. 由正弦定理,

$$
\begin{aligned}
\frac{KH}{\sin\angle HNM} &= \frac{NH}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\frac{CN}{\sin\alpha}\sin\angle ACH \\
&= \frac{\cos\angle BAC}{\sin^2\alpha}\frac{OC}{\sin\angle ANO}\sin\alpha = \frac{R\cos\angle BAC}{\sin\alpha\sin\angle ANO} = \frac{R\cos\angle BAC}{\sin\alpha\sin\angle HNM}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\angle AHK = \angle AHB - \angle BHO = 180^\circ - \angle ACB - (90^\circ - \angle ACB + \alpha) = 90^\circ - \alpha$, 因此 $KH\cos\angle AHK = \dfrac{R\cos\angle BAC}{\sin\alpha}\cos(90^\circ - \alpha) = R\cos\angle BAC = \dfrac{1}{2}AH$, 证毕. □

3 Problem 12045

Prove that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 1\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}
$$

证明 First, we have Abel summation formula:

Lemma (Abel summation formula)**.** *For two sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$, let $T_n = a_1 + \cdots + a_n$, then*

$$
\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = T_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} S_n\left(b_n - b_{n+1}\right).
$$

Consider the partial sum S_N. Choose $a_n = (-1)^{n-1}n, b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$. Then we have $T_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{1-(-1)^n}{4} - \frac{(-1)^n}{2}n$. And use Abel summation formula to get

$$
S_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\left(n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 1\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n}\right)=T_N b_N-\sum_{n=1}^{N}T_n\left(b_n-b_{n+1}\right)\\
&=\left(\frac{1-(-1)^N}{4}-\frac{(-1)^N}{2}N\right)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{N}\right)\\
&\quad-\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1-(-1)^n}{4}-\frac{(-1)^n}{2}n\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

Send N to ∞, using Stolz's formula, it's easy to know that

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{N}\sim\frac{1}{2N^2}.$$

So

$$\left(\frac{1-(-1)^N}{4}-\frac{(-1)^N}{2}N\right)\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{N}\right)\to 0.$$

And

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{4}-\frac{(-1)^n}{2}n\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{4n\left(n+1\right)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\left(n+1\right)}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n^2\left(2n-1\right)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
=&\frac{\pi^2}{16}-\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Well, the last result is easy to get using $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ and power series. $\square$

两个有意思的级数问题

1. 我们知道极限 (不管是数列还是函数) 都有夹逼准则, 那么级数是不是也有呢? 假定有三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 其通项满足 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是否收敛?

解 答案是肯定的, 这题我们用两种方法来证明.

方法一 (柯西收敛准则) 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 那么根据柯西收敛准则, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对任意 $n > N$ 和 $p \in \mathbb{N}$, 都有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} c_k\right| < \varepsilon$$

由 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ 则可知 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$ 也成立, 因此由柯西收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

方法二 (比较判别法) 由条件知 $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$, 再根据 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛可得 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 也收敛, 从而根据比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛则说明 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛. □

2. 如果两个通项单调递减的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 问 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ 是否可能收敛?

解 答案是肯定的, 下面给出一个例子 (感谢逆神提供)

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^{2^k}}, b_n = \frac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1, k = 2m \\ a_n = \frac{1}{2^{2^{k+1}}}, b_n = \frac{1}{2^{2^k}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1, k = 2m - 1 \end{cases}$$

那么 $n \geqslant 2$ 时上式都有意义, 且显然

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m}}} \left(2^{2^{2m}} - 2^{2^{2m-1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2^{2m-1}}}\right) = \infty.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m-1}}} \left(2^{2^{2m-1}} - 2^{2^{2m-2}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2^{2m-2}}}\right) = \infty.$$

因此 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ 都发散, 但 $\min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2^{2^{k+1}}}, 2^{2^{k-1}} \leqslant n \leqslant 2^{2^k} - 1$, 因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{k+1}}} \left(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{k+1}}} 2^{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}} < \infty.$$

□

3. 计算二重积分

$$I=\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{xy}\right)^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解

$$\begin{aligned}
I&=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 z\mathrm{e}^{-x^2-y^2-zxy-tzxy}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} z\mathrm{e}^{-\left(x+\frac{zy+tzy}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{\left(\frac{zy+tzy}{2}\right)^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&=2\sqrt{\pi}\int_0^1\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} z\mathrm{e}^{-y^2\frac{4-(z+tz)^2}{4}}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\mathrm{d}z\\
&=2\sqrt{\pi}\int_0^1\int_0^1 z\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{4-(z+tz)^2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\\
&=4\pi\int_0^1\int_0^1\frac{z}{\sqrt{4-(z+tz)^2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\\
&=4\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)\left(\sqrt{4-(1+t)^2}-2\right)\mathrm{d}t\\
&=4\pi\left(1-\sqrt{3}\right)+\frac{4\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

□

Soppose $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. For any $n\in\mathbb{N}$ and $x\in\mathbb{R}$, we have

$$|f^{(n)}(x)|\le e^x.$$

Prove that

$$f(x)=Ce^x.$$

证明. Let $g(x)=e^x-f(x)$, it is obvious that $0\le g^{(n)}(x)\le 2e^x$. By Taylor's formula, we have

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{g^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

where ξ_n between 0 and x. Since

$$\left|\frac{g^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{2e^{\xi_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{2e^{\max\{0,x\}}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0$$

as $n\to\infty$, we can get

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

The convergent radius of the series is $+\infty$ due to $0\le g^{(n)}(0)\le 2$, then $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n$ is an entire function. Since

$$|g(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(-a)}{n!}(z+a)^n\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(-a)}{n!}|z+a|^n=g(|z+a|-a)$$

and

$$|z+a|-a=\sqrt{(x+a)^2+y^2}-a=\frac{2ax+(x^2+y^2)}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}+a}\to x$$

as $a\to+\infty$, we have $|g(z)|\leq g(x)$, where $z=x+iy$. Thus, we obtain

$$|e^{-z}g(z)|\leq e^{-x}g(x)\leq 2,$$

that means $e^{-z}g(z)$ is constant function by Liouville theorem, then $e^{-x}f(x)$ is also constant.

$\square$

双曲三角函数在积分中的应用

先来解答上次遗留的不定积分问题

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x+2\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x \\
=&\frac{3}{2}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}\mathrm{d}x \\
=&\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}} \\
=&\frac{3}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}\right)+C.
\end{aligned}
$$

其中最后一步的两个积分是常见的基本积分公式.

今天来一组双曲三角函数的应用. 双曲三角函数虽然不在考纲范围内, 但是这两个函数大家一定非常熟悉：

$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

双曲三角函数这个名字, 听起来就应该和三角函数有一定关系, 回顾用欧拉公式给出的三角函数公式

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},\quad \cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}.$$

另外, 双曲三角函数也有对应的反双曲函数

$$\operatorname{arsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad \operatorname{arcosh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

这两个函数似乎看起又很熟悉, 没错, 就是常见的两个积分公式的原函数. 最后就是双曲三角函数满足的几个基本的等式

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,\quad \cosh 2x=2\cosh^2 x-1,\quad \sinh 2x=2\sinh x\cosh x.$$

$$(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x.$$

这几个公式跟三角函数公式非常相像, 但也有所区别, 大家可以直接根据双曲三角函数的定义就可以证明了, 这里不再列举更多公式, 这些公式已经足够我们用了. 先来看两个积分公式的推导

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\sinh t}\int \frac{\sinh t}{\sinh t}\mathrm{d}t=t+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$

这里最后的原函数就是 $\operatorname{arsinh}x$. 同样地,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\cosh t}\int \frac{\cosh t}{\cosh t}\mathrm{d}t=t+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

这里最后的反双曲余弦函数的对数符号里面加了绝对值, 是因为限制在高等数学范围内, 我们要求对数里面的数大于 0. 但事实上, 在复数范围内, 对数里面允许是负数, 并且 $ln(-1)=\pi\mathrm{i}$ 其实就是一个常数而已, 而常数对不定积分的结果实际是没有贡献的.

举这两个例子, 大家平时做的时候应该都是借助正切或者余割函数换元, 其计算量可想而知, 但是如果利用双曲三角函数却不含任何计算量. 最后我们再看一个例题:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x(a>0).$$

解　作双曲三角换元 $x=a\sinh t$ 可得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= a^2\int \cosh^2 t\mathrm{d}t = a^2\int \frac{\cosh(2t)+1}{2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{4}\sinh(2t)+\frac{a^2}{2}t+C=\frac{a^2}{2}\sinh t\cosh t+\frac{a^2}{2}t+C\\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.\end{aligned}$$

□

从上面的问题我们可以发现双曲三角函数在处理含有 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 这类式子的积分中往往有奇效, 比起普通的三角函数换元大大减少计算量, 那么在考研范围内, 上述公式的使用已经绰绰有余了. 而事实上双曲三角函数还有很多类似于三角函数的有趣公式 (包括和差化积与积化和差公式), 这里我们不作更多介绍, 上述方法已经够用了.

从一个极限题谈推广

最近在积分群里有群员问了一个这样的极限题:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1\left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n-\left(1-\frac{t^2}{6}\right)^n\right]\mathrm{d}t$$

当然这里不是要解决这个题目了, 而是看到这个题目时, 我总觉得在哪里见过的样子. 果不其然, 这题和 1996 年国际大学生数学竞赛第五题有所类似, 我们来看这个题目:

设 a,b 是实数, 且满足 $b\leqslant 0, 1+ax+bx^2\geqslant 0$ 对任意 $x\in[0,1]$ 成立. 证明

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{1}{a}, & a<0\\ +\infty, & a\geqslant 0\end{cases}.$$

这里先给出这个 IMC1996 的解答. **证明**　如果 $a<0$, 令 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-(1+ax+bx^2)$. 则由 $f(0)=f'(0)=0$ 以及 $f''(x)=a^2\mathrm{e}^{ax}-2b>0$ 可知对任意 $x>0$ 有

$$0<\mathrm{e}^{ax}-\left(1+ax+bx^2\right)<cx^2,$$

这里 $c=\dfrac{a^2}{2}-b$, 因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{anx}-\left(1+ax+bx^2\right)^n&=\left(\mathrm{e}^{ax}-\left(1+ax+bx^2\right)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{akx}\left(1+ax+bx^2\right)^{n-1-k}\\&<cx^2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{akx}\left(\mathrm{e}^{ax}\right)^{n-1-k}=cx^2n\mathrm{e}^{a(n-1)x}.\end{aligned}$$

于是

$$0<n\int_0^1\mathrm{e}^{anx}\mathrm{d}x-n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x<cn^2\int_0^1x^2\mathrm{e}^{a(n-1)x}\mathrm{d}x.$$

利用

$$n\int_0^1\mathrm{e}^{anx}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{na}-1}{a}\xrightarrow{n\to\infty}-\frac{1}{a}$$

以及

$$n^2\int_0^1x^2\mathrm{e}^{a(n-1)x}\mathrm{d}x<\frac{n^2}{|a|^3(n-1)^3}\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\xrightarrow{n\to\infty}0$$

可知 $a<0$ 时, 原极限为 $-\dfrac{1}{a}$.

如果 $a\geqslant 0$, 取 n 充分大, 则

$$\begin{aligned}n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x&>n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\left(1+bx^2\right)\mathrm{d}x\\&>n\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^n>\frac{n}{\sqrt{n+1}}\mathrm{e}^b\xrightarrow{n\to\infty}\infty.\end{aligned}$$

□

回过来和原来的 QQ 群问题结合, 我们实际要考察的问题是极限

$$\lim_{n\to\infty}n^\alpha\int_0^1\left(1+ax^k\right)^n\mathrm{d}x,$$

其中 $a<0,k>0$ 而 α 是一个待定的阶. 首先有对任意 $x>0$ 有

$$\mathrm{e}^{ax^k}-1-ax^k<\frac{a^2}{2}x^{2k}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{anx^k}-\left(1+ax^k\right)^n&=\left(\mathrm{e}^{ax^k}-\left(1+ax^k\right)\right)\sum_{m=0}^{n-1}\mathrm{e}^{amx^k}\left(1+ax^k\right)^{n-1-m}\\&<\frac{a^2}{2}x^{2k}\sum_{m=0}^{n-1}\mathrm{e}^{amx^k}\left(\mathrm{e}^{ax^m}\right)^{n-1-m}=\frac{a^2}{2}x^2n\mathrm{e}^{a(n-1)x^k}.\end{aligned}$$

于是

$$0<n^\alpha\int_0^1\mathrm{e}^{anx^k}\mathrm{d}x-n^\alpha\int_0^1\left(1+ax^k\right)^n\mathrm{d}x<\frac{a^2}{2}n^{\alpha+1}\int_0^1x^{2k}\mathrm{e}^{a(n-1)x^k}\mathrm{d}x.$$

利用

$$n^\alpha\int_0^1\mathrm{e}^{anx^k}\mathrm{d}x=n^{\alpha-\frac{1}{k}}\int_0^{n^{\frac{1}{k}}}\mathrm{e}^{at^k}\mathrm{d}t$$

可知这里待定的系数 $\alpha=\frac{1}{k}$, 进一步

$$\int_0^{n^{\frac{1}{k}}}\mathrm{e}^{at^k}\mathrm{d}t\to\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{at^k}\mathrm{d}t=\frac{1}{k\left(-a\right)^{\frac{1}{k}}}\int_0^\infty u^{\frac{1}{k}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{(-a)^{\frac{1}{k}}}$$

且

$$n^{\alpha+1}\int_0^1x^{2k}\mathrm{e}^{a(n-1)x^k}\mathrm{d}x=\frac{n^{1+\frac{1}{k}}}{k\left(n-1\right)^{2+\frac{1}{k}}}\int_0^{n-1}t^{1+\frac{1}{k}}\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t\to0$$

因此我们最后得到了

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{k}}\int_0^1\left(1+ax^k\right)^n\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{(-a)^{\frac{1}{k}}}.$$

那么最开始的极限就显然而易见了.

1. 已知 $\{a_n\}$ 为递减数列且

$$a_1 + \frac{a_4}{2} + \cdots + \frac{a_{n^2}}{n} \leqslant 1,$$

求证:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \leqslant 3$$

证明　显然我们只需要证明

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_{(n+1)^2-1}}{(n+1)^2-1} \leqslant 3$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立即可. 首先根据数列 $\{a_n\}$ 的递减性有

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_{(n+1)^2-1}}{(n+1)^2-1} &\leqslant a_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + a_{n^2}\left(\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k^2} \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{3a_{k^2}}{k} \leqslant 3. \end{aligned}$$

其中 $b_k = \displaystyle\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i} < \frac{2k+1}{k^2} \leqslant \frac{3}{k}$.

□

最近日经的几个积分

说到日经题这个词的时候,意味着这是几个极其坑爹的题目.很多同学喜欢做一些和自己能力不相称的题目,自己不会做又拿去坑别人,一问题目来源都说是同学问的,一问答案都说不知道.对于这种江湖上传的积分题,如果不给答案的,向老师建议大家一律不要做.或者如果熟悉 mathematica 的,自己先跑一遍,如果出来的结果是自己根本看不懂的符号,这种题就是典型的坑爹题,俗称手写题 (原题是变上限积分求导的搞成求定积分,原题是定积分的搞成求不定积分,本来正常的不定积分,结果手写就抄错了题目).不过今天要说的三个题不属于上述类型,都是可以求出来的积分,不过计算的复杂度太离谱,部分题目估计是出题人太睿智了.

第一个题

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x^2+4}}$$

解 这个题目绝对是出题人睿智,答案简直是复杂的离谱,这里我只给简单计算思路,最后的答案由 mathematica 给出

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x^2+4}} &\xlongequal{x=2\tan t} \int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t+\cos t} \\
&\xlongequal{u=\tan\frac{t}{2}} \int \frac{1}{2\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{\frac{2}{17}}\left(\sqrt{\sqrt{17}-1}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{17}+5}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{17}\right)}}u\right)-\sqrt{\sqrt{17}+1}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{17}-5}{\sqrt{2\left(\sqrt{17}-1\right)}}u\right)\right)
\end{aligned}$$

最后的结果再带会到原来的 x 即可. 其中最后一步是一个有理函数积分,分母是四次函数,因式分解出来的结果相当复杂,这里直接给出 mathematica 的计算结果即可. 这题简直是一个坑爹. □

第二个题

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^4 x}$$

解 这个题又是一个坑爹的题,当然了,既然是三角有理式嘛,自然都可以化成普通有理函数,然后部分分式计算了.这题答案坑爹指出和上题如出一辙,只不过这里不是根号太多,只是四次多项式因式分解的时候出现了虚数,这里也只给个 mathematica 的答案

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^4 x} &= \int \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x+\frac{1}{\csc^2 x}}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+\frac{1}{1+t^2}} \\
&= \frac{\arctan\frac{t}{\sqrt{1-\mathrm{i}}}}{2\sqrt{1-\mathrm{i}}}+\frac{\arctan\frac{t}{\sqrt{1+\mathrm{i}}}}{2\sqrt{1+\mathrm{i}}}+C.
\end{aligned}$$

□

最后一个日经题,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$$

原本是贴吧积分竞赛题,对于有很强积分级数功底的学生,我是非常欢迎大家去探讨这样的问题的.但是有两点,一是考研的学生,不建议大家浪费时间在这样的无聊题目上,

更加不要拿着这种无聊的题目去到处问, 不给答案的题一般都是坑爹的. 二是很多人有些不好的习惯, 喜欢把在别处看到的积分难题截图以后到各个群里发, 既不是自己出的题, 更加不是自己做的题, 这么做有什么意义呢? 典型的就是潘神发布在某次积分竞赛上非常复杂的题

$$\int_0^1 \frac{\ln^2\left(1+x^2\right)}{1+x}\mathrm{d}x$$

以及我在某一期公众号解答的积分竞赛题

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \ln\left(1+\tan^4 x\right)\mathrm{d}x$$

有些人就很无聊, 把这些题目截图以后到各个群里发, 这到底是为什么呢? 为了装逼吗? 没有任何意义, 希望大家以后杜绝这种现象. 好了, 我们来解答这个有点复杂的积分题. 这题做法很多, 其中最为巧妙和便于大家理解的方法类似于 $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的处理方法

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x &\xlongequal{\tan x\to x} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=t/\sqrt[4]{2}} 2^{-\frac{3}{4}}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{t^4+\sqrt{2}t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= 2^{-\frac{3}{4}}\int_0^{\infty} \frac{1}{t^4+\sqrt{2}t^2+1}\mathrm{d}t = 2^{-\frac{7}{4}}\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{t^4+\sqrt{2}t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= 2^{-\frac{7}{4}}\int_0^{\infty} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}+\sqrt{2}}\mathrm{d}t \\
&= 2^{-\frac{7}{4}}\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\sqrt{2}+2}\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\
&= 2^{-\frac{3}{4}}\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2+\sqrt{2}+2}\mathrm{d}u = 2^{-\frac{3}{4}}\frac{\pi}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4}\pi
\end{aligned}$$

1. (a) The slope of the cycloid is

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{a\omega\sin\omega t}{a\left(\omega-\omega\cos\omega t\right)}=\frac{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}}{2\sin^2\frac{\omega t}{2}}=\cot\frac{\omega t}{2}$$

   (b) The area under the cycloid for $0\leqslant x\leqslant 2\pi a$ is

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi a}y^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}a\left(1-\cos\omega t\right)a\omega\left(1-\cos\omega t\right)\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos u\right)^2\mathrm{d}u=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos u+\cos^2 u\right)\mathrm{d}u\\&=2\pi a^2+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u=3\pi a^2\end{aligned}$$

   (c) The length of the cycloid for $0\leqslant x\leqslant 2\pi a$ is

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{\left[x'\left(t\right)\right]^2+\left[y'\left(t\right)\right]^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}a\omega\sqrt{\left(1-\cos\omega t\right)^2+\sin^2\omega t}\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(1-\cos u\right)^2+\sin^2 u}\mathrm{d}u\\&=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{u}{2}\right|\mathrm{d}u=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{u}{2}\mathrm{d}u=8a\end{aligned}$$

2.

3. (a)

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

   (b) At $\theta=\frac{\pi}{4}$, $x_0=\sqrt{2}$, $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, so the tangent line is

$$\frac{2x_0x}{4}+y_0y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=1$$

4. (a) First we have $\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=6x\mathrm{d}x$. Integrate the both side to get $-\frac{1}{y}=3x^2+C$. So

$$y=-\frac{1}{3x^2+C}$$

   Since $y(1)=\frac{1}{25}$, we have $C=-28$,$y=\frac{1}{28-3x^2}$.

   (b) First we have $\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\left(2x-4\right)\mathrm{d}x$. Integrate the both side to get $\mathrm{e}^y=x^2-4x+C$. Since $y(5)=0$, we have

$$C=5,y=\log\left(x^2-4x+5\right)$$

   (c)

$$r=\frac{2}{1-2\ln\theta}$$

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负数, 求证：

$$\sqrt{a_1+a_2+\cdots+a_n}+\sqrt{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\sqrt{a_n}\geqslant\sqrt{a_1+4a_2+\cdots+n^2a_n}$$

证明 记 $b_k=\sqrt{\sum\limits_{i=k}^{n}a_i}$, 则 b_k 单调递减, 平方, 不等式等价于 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right)^2\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}k^2a_k$. 而

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2&=\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2\sum_{k<i}b_kb_i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}a_i+2\sum_{i=1}^{n}b_i\left(\sum_{k=1}^{i-1}b_k\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n}ka_k+2\sum_{i=1}^{n}b_i\left(i-1\right)b_i=\sum_{k=1}^{n}ka_k+2\sum_{i=1}^{n}\left(i-1\right)\sum_{k=i}^{n}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}ka_k+2\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{i=1}^{k}\left(i-1\right)=\sum_{k=1}^{n}ka_k+2\sum_{k=1}^{n}\frac{k\left(k-1\right)}{2}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2a_k\end{aligned}$$

□

整理一些大师 creasson 的杰作

这里整理的是贴吧大神 creasson 在几年前得出的结果, 大部分他没有给出证明, 我也不会证, 甚至特殊函数符号太多, 有些我连定义都不了解. creasson 的水平之高, 当年在贴吧的人都叹为观止, 只可惜后来 creasson 认为数学系没出路, 转去读计算机了, 从此就消失了, 而 creasson 的很多小弟 (比如御坂 01034, 石武侠, 以及港科大的 pisco) 则都成为国外的数学博士了. 我们来看看他的杰作:

1. 一个组合恒等式

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\frac{1}{(n-j+1)^2}=\frac{2(2n+1)}{(n+1)^3}\binom{2n}{n}^2-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. 高斯五边形问题

定理 1. *已知凸五边形 $ABCDE$ 中,*

$$S_{\triangle ABE}=a, S_{\triangle BCA}=b, S_{\triangle CDB}=c, S_{\triangle DEC}=d, S_{\triangle EAD}=e.$$

五边形 $ABCDE$ 的面积为 s, 则

$$s^2-(a+b+c+d+e)s+ab+bc+cd+de+ea=0.$$

证明 以 ABC 为基本三角, 设 $D=\alpha A+\beta B+(1-\alpha-\beta)B, E=(1-\lambda-\mu)A+\lambda B+\mu C$, 于是 $S_{\triangle BCD}=\alpha S_{\triangle ABC}, S_{\triangle EAB}=\mu S_{\triangle ABC}$.

$$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ABC}\begin{vmatrix}0&0&1\\ \alpha&\beta&1-\alpha-\beta\\ 1-\lambda-\mu&\lambda&\mu\end{vmatrix}=S_{\triangle ABC}\left[\alpha\lambda-\beta(1-\lambda-\mu)\right],$$

$$S_{\triangle DEA}=S_{\triangle ABC}\begin{vmatrix}\alpha&\beta&1-\alpha-\beta\\ 1-\lambda-\mu&\lambda&\mu\\ 1&0&0\end{vmatrix}=S_{\triangle ABC}\left[\beta\mu-\lambda(1-\alpha-\beta)\right].$$

于是

$$\begin{aligned}s=S_{ABCDE}&=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ADB}\\ &=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ABC}\begin{vmatrix}1&0&0\\ 0&0&1\\ \alpha&\beta&1-\alpha-\beta\end{vmatrix}+S_{\triangle ADE}\\ &=S_{\triangle ABE}-\beta S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}.\end{aligned}$$

前四个方程即为

$$\begin{cases}\alpha=\frac{c}{b}\\ \mu=\frac{a}{b}\\ \alpha\lambda-\beta(1-\lambda-\mu)=\frac{d}{b}\\ \beta\mu-\lambda(1-\alpha-\beta)=\frac{e}{b}.\end{cases}$$

可得 β 满足的方程为

$$-bd+cd-ce+ab\beta-b^2\beta+bc\beta-be\beta+b^2\beta^2=0.$$

将 $\beta=\dfrac{b+e-s}{b}$ 代入整理得 s 满足

$$s^2-(a+b+c+d+e)s+ab+bc+cd+de+ea=0.$$

这个证明反正我是不太明白. $\square$

3. 与 Bessel 函数有关的级数

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{\pi}{2}J_0(\pi).$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)-(-1)^n\right]=1-\frac{\pi}{2}J_1(\pi)-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$

4. 积分大典的一个积分公式

$$\int_0^{\pi}f\left(\frac{\sin^2 x}{1+2p\cos x+p^2}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{\pi}f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x, & p^2<1\\ \int_0^{\pi}f\left(\frac{\sin^2 x}{p^2}\right)\mathrm{d}x, & p^2>1\end{cases}.$$

5. 三个困难的积分

(1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{1-8t^2+16t^4}{1+7t^2-8t^4}}\exp\left(\frac{4t\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{8t^2+1}}\right)\mathrm{d}t=\mathrm{e}-1.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x+\cos^2 x}}{b^2\cos^2 x+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{b\sqrt{2(1+b)}},b>0.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(3-4x+4x^2\right)\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=2.$

两道美国数学月刊征解题

征解题 12051：证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi\ln^2 2}{4}.$$

征解题 12054：证明

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\ln\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{16}.$$

我只解决了第一题, 我把解答也提交给了 AMM 官网, 同时我们还可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(2n+1)}=\frac{\pi}{2}-1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}=2\pi\ln 2-1.$$

第二题我想了好久都没有搞出来, 感觉是自己变菜了, 好多以前自己解决的问题现在自己都不会做了, 欢迎提供解答.

一道极限题及其推广

最近在群里有群员问到一道比较常见的分段估计的极限问题, 分段估计的极限题随处可见, 掌握了其解题精髓, 大部分题目都是完全类似的方法. 我们先来看看这道题:

问题 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1).$$

□

这算是一个比较经典的分段估计问题, 我们先来解决这个问题, 再把它推广.

证明 由于 $f(x)\in \mathrm{R}[0,1]$, 则存在常数 $M>0$ 使得 $|f(x)|<M, \forall x\in[0,1]$. 再根据 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在充分小的 $\delta>0$, 当 $1-\delta<x<1$ 时, $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$.

$$n\left|\int_0^{1-\delta} x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| < nM\int_0^{1-\delta} x^n \mathrm{d}x = \frac{nM}{n+1}(1-\delta)^n \to 0$$

$$n\int_{1-\delta}^1 x^n |f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon n\int_{1-\delta}^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon n}{n+1}\left(1-(1-\delta)^n\right) < \varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\int_{1-\delta}^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} n\int_{1-\delta}^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{nf(1)}{n+1}\left(1-(1-\delta)^n\right) = f(1).\end{aligned}$$

□

把这个问题推广一下就是

问题 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 k 阶可导, $f(1)=f'(1)=\cdots=f^{(k-1)}(1)=0$, 但 $f^{(k)}(1)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

证明 和上面一样, 作分段估计

$$n^{k+1}\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)|\,\mathrm{d}x < M\frac{n^{k+1}}{n+1}(1-\delta)^n \to 0.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 k 阶可导, $f(1)=f'(1)=\cdots=f^{(k-1)}(1)=0$, 但 $f^{(k)}(1)\neq 0$. 则当 $1-\delta<x<1$ 时, 由泰勒公式可得

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j + o(x-1)^k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + o(x-1)^k.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_{1-\delta}^{1} x^n f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_{1-\delta}^{1} x^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{k!}\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_{1-\delta}^{1} x^n (1-x)^k\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{k!}\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_{0}^{1} x^n (1-x)^k\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{k!}\lim_{n\to\infty} n^{k+1} B(n+1,k+1) \\ &= \frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{k!}\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\frac{n!k!}{(n+k+1)!} = (-1)^k f^{(k)}(1).\end{aligned}$$

□