2020 年考研数学三模拟卷二

命题人:向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

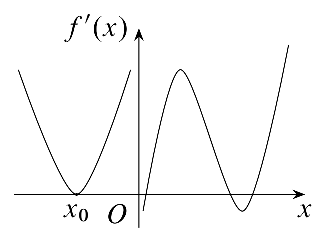
题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如图所示, 其中 x_0 处曲线与 x 轴相切, 则函数 $f(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 分别有 ( )

(A) 4 个极值点和 2 个拐点 (B) 3 个极值点和 2 个拐点

(C) 4 个极值点和 3 个拐点 (D) 5 个极值点和 3 个拐点



第 1 题图

2. 设函数 $f(x)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\ (\alpha>1)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )

(A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续

3. 设平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$, 记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D \left[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1\right]\mathrm{d}\sigma,$$

则有 ( )

(A) $I_2>I_1>I_3$ (B) $I_1>I_2>I_3$ (C) $I_1>I_3>I_2$ (D) $I_2>I_3>I_1$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n+1}|$ 收敛的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 ( )

(A) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$ (B) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\neq 0$ (D) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量, 则下列说法错误的是 ( )
(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 一定有解
(B) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 不可能有无穷多解
(C) 如果 $m=n$, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解
(D) 如果方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 也有非零解

7. 设随机事件 A,B 满足 $P(A|B)>P(\bar{A}|B)$, 则下列说法正确的是 ( )
(A) $2P(A)>P(B)$ (B) $2P(\bar{A})>P(B)$ (C) $2P(B)>P(A)$ (D) $2P(\bar{B})>P(A)$

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=\dfrac{1}{3}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则向量组 $X\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-X\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关的概率为 ( )
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) 1

答案 CCADBDAB

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right)=$________.

答案 $\dfrac{1}{2}$.

10. 设在一定范围内, 某商品的需求函数为 $Q=100-2p$, 其中 p 为商品的价格, 则该商品的边际收益为________.

答案 $50-Q$.

11. 差分方程 $y_{x+1}-2y_x=\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y_x=$________.

答案 $C\cdot 2^x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-2}$.

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+2}{(2n+1)!}=$________.

答案 $\dfrac{3}{2}\cos 1+\dfrac{1}{2}\sin 1$.

13. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________.

答案 $(0,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,3,2,1)^{\mathrm{T}}$.

14. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的独立的简单随机样本, 如果 $k\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)^2}{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从 F 分布, 则 $k=$________.

答案 1.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}$, 确定常数 a,b, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求其导数.

解 直接计算可知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-(x+b)}, & x>0\end{cases}.$$

首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\mathrm{e}^{-b}=f(0)=\dfrac{1}{2}, b=\ln 2$. 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导得

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2}=f'_+(0)=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=-1,$$

因此 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定 a 的值.

解 由复合函数偏导法则可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{a}{2\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{a}{\sqrt{y}}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

代入方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2-a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$$

于是有 $1-\dfrac{a^2}{4}=0, 2-a\neq 0$, 所以 $a=-2$.

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(x)>1$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

解 利用导数的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} &= \exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+h\cos^2 x)-\ln f(x)}{h\cos^2 x}\cos^2 x\right)\\ &= \exp\left([\ln f(x)]'\cos^2 x\right) = \mathrm{e}^{\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x}.\end{aligned}$$

由条件得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cos^2 x = x\cos^2 x+\tan x,\ \frac{f'(x)}{f(x)} = x+\tan x\sec^2 x.$$

积分可得 $\ln|f(x)| = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|C|$, 即 $f(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 由 $f(0)=1$ 得 $C=1$, 故 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$. 又 $f'(x)=(x+\tan x\sec^2 x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 x}$, 令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$. 不难得知 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1$.

18.（本题满分 10 分）

求二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

解 利用极坐标可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r\\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\left(\frac{4a^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}-\sqrt{4a^2-r^2}\right)\mathrm{d}r\\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left[4a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\left(\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}+2a^2\arcsin\frac{r}{2a}\right)\right]\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(2a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}\right)\Bigg|_0^{-2a\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

19.（本题满分 10 分）

设定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)>0$ 且 $f(a)>0, f(b)<0$.

(1) 证明: 存在唯一的 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$;

(2) 设 $x_0\in(a,b), f(x_0)>0$, 定义数列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,(n=0,1,2,\cdots)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证明 (1) 首先由 $f(a)>0, f(b)<0$, 根据零点定理可知存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$. 如果还存在点 $c'\in(a,b)$ 使得 $f(c')=0$. 不妨设 $c'>c$, 那么存在 $\xi_1\in(c,c'),\xi_2\in(c',b)$, 使得

$$f'(\xi_1)=0,\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c')}{b-c'}=\frac{f(b)}{b-c'}<0,$$

这与 $f''(x)>0$ 矛盾, 因此必存在唯一的 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$.

(2) 由 (1) 可知, 当 $a<x<c$ 时, $f(x)>0$, 当 $c<x<b$ 时, $f(x)<0$. 由于 $f(x_0)>0$, 所以 $x_0\in(a,c)$. 存在 $\xi\in(c,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$, 又 $f''(x)>0$, 说明 $f'(x)$ 单调递增, 因此当 $x\in(a,c)$ 时, $f'(x)<f'(\xi)<0$. 下面归纳证明 $x_n<x_{n+1}<c$.

- $n=0$ 时, $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}>x_0$ 成立, 而由拉格朗日中值定理可得

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{f(x_0)-f(c)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{(x_0-c)f'(\eta)}{f'(x_0)}<x_0-(x_0-c)=c,$$

  其中 $\eta\in(x_0,c), f'(x_0)<f'(\eta)<0$.

- 假定 $n=k-1$ 时, $x_{k-1}<x_k<c$ 成立, 那么 $n=k$ 时, $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}>x_k$, 与 $n=0$ 的情况类似, 由拉格朗日中值定理可知

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-c)f'(\eta_k)}{f'(x_k)}<x_k-(x_k-c)=c.$$

因此由数学归纳法知 $x_n<x_{n+1}<c$ 对所有 n 都成立, 即 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 从而 $\{x_n\}$ 的极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 在 $x_{n+1}==x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 中令 $n\to\infty$ 可得 $a=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$, 因此 $f(a)=0$, 即 $a=c$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

20.（本题满分 11 分）

已知三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix},$$

且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 等价.

(1) 求参数 a,b,c 的值;

(2) 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 由题意首先有 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$, 且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩为 2, 于是

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&2&c\end{vmatrix}=3c=0,c=0.$$

同理, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=3a+3=0$ 得 $a=-1$, 由 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2|=3b-3=0$ 得 $b=1$.

(2) 对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\-1&1&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此所求的矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$.

21.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换化二次型为标准形;

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解 (1) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-8a=0,a=0$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$. 对特征值 $\lambda_1=0$, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$; 对特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$, 解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下, 二次型化为标准形 $2y_2^2+2y_3^2$.

(3) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$ 即为方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases},$$

此方程组的通解为 $(x_1,x_2,x_3)=(k,-k,0),k\in\mathbb{R}$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 记 $Y=\min\{X_2,X_3\}$, 求 Y 的概率密度;

(2) 求 $P\big(X_1=\min\{X_1,X_2,X_3\}\big)$.

解 (1) 参数为 1 的指数分布的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$, Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P\big(\min\{X_2,X_3\}\leqslant y\big)=1-P\big(\min\{X_2,X_3\}\geqslant y\big)\\&=1-P(X_2\geqslant y,X_3\geqslant y)=1-P(X_2\geqslant y)P(X_3\geqslant y)\\&=1-[1-F(y)]^2=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}.\end{aligned}$$

因此 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$.

(2) $\min\{X_1,X_2,X_3\}=\min\{X_1,Y\}$, X_1 与 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-x-2y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

那么

$$\begin{aligned}P\big(X_1=\min\{X_1,Y\}\big)=P(X_1\leqslant Y)&=\iint\limits_{x\leqslant y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

23. 设总体 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},$$

其中参数 $\sigma>0$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本.

(1) 求 σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2$;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2^2$, 并计算 $E(\hat{\sigma}_2^2)$.

解 (1) 样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 总体均值为

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma.$$

令 $\overline{X}=E(X)$, 解得 $\sigma^2=\dfrac{2}{\pi}\overline{X}^2$, 即 σ^2 的矩估计量为 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{2}{\pi}\overline{X}^2$.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所对应的样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{\sigma^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时, $\ln L(\sigma^2)=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-n\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, 令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,$$

解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$, 即 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$, 且

$$E(\hat{\sigma}_2^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2}E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma^2.$$