

2020 年考研数学一

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是


()

A. $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$

B. $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

 **解:** 首先我们有基本结论: 如果 $f(x), g(x)$ 均为连续函数, 且 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\int_a^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

于是当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt &\sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt &\sim \int_0^x \sqrt{t^3} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}, \\ \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt &\sim \int_0^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3} \sin^3 x \sim \frac{1}{3}x^3, \\ \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt &\sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}(1 - \cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5,\end{aligned}$$

正确答案选 D.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则


()

A. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

B. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$


 **解:** 选项 A 和 B 不涉及到 $f(0)$ 是否有定义, 无法保证 $f(x)$ 是否在 $x = 0$ 处的连续性, 所以可导性更加得不到. 对于选项 C 和 D, 如果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 那么由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 可知 $f(0) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 存在, 那么

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{|x|}} = A \cdot 0 = 0,$$

正确答案选 C, 而 D 显然可取反例 $f(x) = x$.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0$, $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$, 非零向量 α 与 \mathbf{n} 垂直, 则 ()

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在 B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在
C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\alpha \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在 D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\alpha \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在


 解: 由于函数 $f(x, y)$ 在 $(x, y) = (0, 0)$ 处可微, 且 $f(0, 0) = 0$ 那么有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 选 A.

4. 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则 ()


- A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| < R$
C. $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散 D. $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

 解: 注意到当 $|r| < R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛, 那么此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n| < +\infty,$$

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n} r^{2n}|$ 收敛. 也就是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 是绝对收敛的, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 自然也是收敛的, 那么选项 A 的逆否命题正确, 因此正确答案选 A. 对于选项 B 和 C, 如果取 $a_{2n-1} = 1, a_{2n} \equiv 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 对任意 r 均收敛. 对于选项 D, 如取 $a_n \equiv 1$, 那么 $R = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 在 $r = R = 1$ 处发散.

5. 若矩阵 A 经初等列变换化成 B , 则 ()
- A. 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$ B. 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$
C. 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$ D. 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

 解: 矩阵 A 经初等列变换化成 B 说明存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$, 即 $A = BQ^{-1} = BP$, 选 B, 其他选项易知都不对.



6. 已知直线 $L_1: \frac{x-a_1}{a_1} = \frac{y-b_1}{b_1} = \frac{z-c_1}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_2}{a_2} = \frac{y-b_2}{b_2} = \frac{z-c_2}{c_2}$ 相交于一点, 记向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$, 则 ()

- A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示
B. α_2 可由 α_1, α_3 线性表示
C. α_3 可由 α_1, α_2 线性表示
D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

解: L_1 和 L_2 的方向向量分别为 α_1, α_2 , 这两条直线交于一点, 说明 α_1, α_2 线性无关. 点 $P_1(a_1, b_1, c_1) \in L_1, P_2(a_2, b_2, c_2) \in L_2$, 由于 L_1, L_2 共面, 所以

$$|\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{P_1P_2}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 - b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而 α_1, α_2 线性无关, 因此 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 选 C. 而 α_3 可能是零向量, 因此 A 和 B 均不对.

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12},$$

则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

解: 首先所求的概率为 $P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$, 其中

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC) = \frac{7}{12},$$

$$P(A\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{B}\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{B \cup C}) - P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(B \cup C) - [1 - P(A \cup B \cup C)] = P(A \cup B \cup C) - P(B \cup C)$$

$$= \frac{7}{12} - P(B) - P(C) + P(BC) = \frac{1}{6},$$

$$P(\bar{A}B\bar{C}) = \frac{7}{12} - P(A) - P(C) + P(AC) = \frac{1}{6},$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C) = \frac{7}{12} - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{1}{12},$$

因此 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$, 选 D.

8. 设 X_1, X_2, \dots, X_{100} 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right)$ 的近似值为 ()

- A. $1 - \Phi(1)$ B. $\Phi(1)$ C. $1 - \Phi(0.2)$ D. $\Phi(0.2)$



解: 注意到 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right)$, 那么 $EY = 50, DY = 25$, 且由中心极限定理知 $\frac{Y-50}{5}$ 近似服从标准正态分布, 于是

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right) = P(Y \leq 55) = P\left(\frac{Y-50}{5} \leq 1\right) \approx \Phi(1),$$

选 B.

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 通分以后利用等价无穷小与洛必达法则可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (e^x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(1+x)^2} - e^x \right) = -1. \end{aligned}$$

10. 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 由参数方程求导公式可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \bigg/ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}. \end{aligned}$$

代入 $t = 1$ 可得 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}.$

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0$ ($a > 0$), 且 $f(0) = m, f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解: 微分方程 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$. 如果 $a \geq 2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 0$, 此时方程的通解为

$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

如果 $0 < a < 2$, 那么特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{4 - a^2}i}{2}$, 特征根的实部分为负, 此时方程的通解为


$$f(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$


总之一定有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 那么

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = - \int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)] dx = -[f'(x) + af(x)] \Big|_0^{+\infty} = n + am.$$

12. 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{xt^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} =$ _____.


 解: 令 $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x(xy)^2} \cdot x = xe^{x^2y^2}$, 于是 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = e^{x^3y^2} + 3x^3y^2e^{x^3y^2}$, 代入 $(x, y) = (1, 1)$ 得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 4e$.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ _____.

 解: 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14. 设 X 服从区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

 解: X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 显然 $E(X) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) = E(X \sin X) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.



解: 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (0, 0)$ 或 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$. 进一步有

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

于是当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, $A = 0, B = -1, C = 0$, 那么 $AC - B^2 = -1 < 0$, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点; 当 $(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ 时, $A = 1, B = -1, C = 4$, 则 $AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A > 0$, 所以 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ 为极小值点, 且极小值 $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{216}$.

16.(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

解: 令 $P(x, y) = \frac{4x-y}{4x^2+y^2}, Q(x, y) = \frac{x+y}{4x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2} = 0.$$

取闭曲线 $L_1: 4x^2 + y^2 + r^2, r$ 充分小使得 L_1 在 L 所包围的区域内, 方向为逆时针. 设 L 与 L_1 所围成的区域为 D, L_1 所围成的椭圆区域为 D_r , 则利用格林公式, 可知原曲线积分

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L-L_1} P dx + Q dy = \int_{L-L_1} P dx + Q dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \frac{1}{r^2} \int_{L_1} (4x-y) dx + (x+y) dy \\ &= \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} [1 - (-1)] dx dy = \frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r = \pi. \end{aligned}$$

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$, 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

解: 方法一 首先有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \right| = 1$, 因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

1. 即当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 现在令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + x S'(x) + \frac{1}{2} S(x). \end{aligned}$$



因此 $S'(x) - \frac{1}{2(1-x)}S(x) = \frac{1}{1-x}$, 解此一阶线性微分方程得 $S(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} - 2$. 再由 $S(0) = C - 2 = 0$ 得 $C = 2$, 因此和函数 $S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 2, |x| < 1$.

方法二 收敛半径同方法一, 直接求和函数. 注意到

$$a_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} a_{n-1} = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} a_1 = 2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$


那么当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^{2n} t \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin^2 t}{1 - x \sin^2 t} \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1 - x \sin^2 t} - 1 \right) \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + (1-x) \sin^2 t} - 2 \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan t)}{1 + (1-x) \tan^2 t} - 2 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \arctan(\sqrt{1-x} \tan t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2. \end{aligned}$$

18.(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$) 的下侧, $f(x)$ 为连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] \, dy \, dz + [yf(xy) + 2y + x] \, dz \, dx + [zf(xy) + z] \, dx \, dy.$$

 解: 令 $F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$, 那么

$$F'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, F'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, F'_z = 1.$$

曲面 Σ 在 xOy 面的投影区域为圆环 $D_{xy} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] \, dy \, dz + [yf(xy) + 2y + x] \, dz \, dx + [zf(xy) + z] \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ [xf(xy) + 2x - y] \frac{F'_x}{F'_z} + [yf(xy) + 2y + x] \frac{F'_y}{F'_z} + zf(xy) + z \right\} \, dx \, dy \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ [xf(xy) + 2x - y] \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + [yf(xy) + 2y + x] \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + zf(xy) + z \right\} \, dx \, dy \\ &= - \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \, dr = \frac{14}{3} \pi. \end{aligned}$$



19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;
- (2) 若对任意 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

证明: (1) 设 $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)| = |f(x_0)|$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 2)$, 使得

$$|f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \right| = \frac{M}{x_0}, |f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} \right| = \frac{M}{2 - x_0}.$$

注意到

$$|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)| = \frac{M}{x_0} + \frac{M}{2 - x_0} \geq \frac{2M}{\sqrt{x_0(2 - x_0)}} \geq M,$$

那么取 $|f'(\xi)| = \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\}$ 时, 必有 $|f'(\xi)| \geq M$.

(2) 由条件有 $|f'(\xi_1)| = \frac{M}{x_0} \leq M$, 因此 $x_0 \geq 1$; $|f'(\xi_2)| = \frac{M}{2 - x_0} \leq M$, 因此 $x_0 \leq 1$. 于是只能 $x_0 = 1$, 即 $|f(1)| = M$.

$$M = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq \int_0^1 M dx = M,$$

等号成立当且仅当 $|f'(x)| \equiv M, x \in [0, 1]$. 而 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 由费马定理可知 $f'(1) = 0$, 因此 $M = 0$.

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 求正交矩阵 Q .

解: (1) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, 则 $Q^T A Q = B$, Q 为正交矩阵. 因为 A, B 相似,

$$\text{所以 } \begin{cases} \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4 = a + b \\ 1 \times 4 = ab \end{cases}, a \geq b \Rightarrow a = 4, b = 1.$$

(2) 易知 A, B 的特征值均为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$. 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 方程组 $(0E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (2, 1)^T$, 方程组 $(0E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_1 = (1, -2)^T$; 当 $\lambda_2 = 5$ 时, 方程组 $(5E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = (1, -2)^T$, 方程组 $(5E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_2 = (2, 1)^T$. 令 $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} B P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}.$$

所以 $B = P_2 P_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = (P_1 P_2^{-1})^{-1} A P_1 P_2^{-1}$, 且

$$P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

是正交矩阵, 因此 $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

21.(本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量, 且不是 A 的特征向量.

(1) 证明: P 是可逆矩阵;

(2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

 解: (1) 由题意 α 是非零向量, $A\alpha \neq k\alpha$, 所以 $A\alpha, \alpha$ 线性无关, 即 $P = (A\alpha, \alpha)$ 为可逆矩阵.

$$(2) AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$


所以 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 即 A 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似. 不难知 B 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 因此 A 的特征值也是 $2, -3$, 所以 A 可以相似对角化.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P(X_3 = 0) = P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$, $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明: 随机变量 Y 服从标准正态分布.

 解: (1) (X_1, Y) 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X_1 \leq x, Y \leq y) = P(X_1 \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X_3 = 0, X_1 \leq x, Y \leq y) + P(X_3 = 1, X_1 \leq x, Y \leq y) \\ &= P(X_3 = 0, X_1 \leq x, X_2 \leq y) + P(X_3 = 1, X_1 \leq x, X_1 \leq y) \\ &= \frac{1}{2} P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq y) + \frac{1}{2} P(X_1 \leq \min\{x, y\}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(x), & x \leq y \\ \frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(y), & x > y \end{cases}. \end{aligned}$$

(2) Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{2} \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(y) = \Phi(y)$, 因此 Y 服从标准正态分布.




23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

- (1) 求概率 $P(T > t)$ 与 $P(T > s + t | T > s)$, 其中 $s > 0, t > 0$;
- (2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得他们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

 解: (1) 当 $s > 0, t > 0$ 时

$$\begin{aligned} P(T > t) &= 1 - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, \\ P(T > s + t | T > s) &= \frac{P(T > s + t, T > s)}{P(T > s)} \\ &= \frac{P(T > s + t)}{P(T > s)} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}} = e^{-\frac{(s+t)^m - s^m}{\theta^m}}. \end{aligned}$$

- (2) 总体 T 的概率密度为 $f(t) = \begin{cases} e^{-(\frac{t}{\theta})^m} \frac{m t^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则样本的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m} m^n (t_1 t_2 \cdots t_n)^{m-1} \theta^{-nm}, & t_1, t_2, \dots, t_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当 $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m + n \ln m + (m-1) \ln(t_1 t_2 \cdots t_n) - nm \ln \theta$, 令

$$\frac{d \ln(\theta)}{d \theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

即 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{\frac{1}{m}}.$

