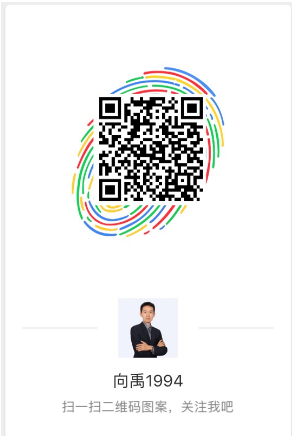
Brilliant Problems in Mathematical Analysis

数学分析 葵花宝典



不积跬步，无以至千里。

作者：向禹
博客: yuxtech.github.io
微博: 向老师玩转数学
微信公众号: 向老师讲数学

Version: 2.10

好题集锦

这一部分题目我忽略一些理论性的东西, 特别是和一致收敛和次序交换有关的问题, 很多比较显然我不加声明, 有些则比较麻烦, 我也不做证明, 而注重的各种计算技巧和方法. 这些题目都是我从各个数学论坛搜集来的, 其中声明原创的题目, 其解答都是由我本人给出的. 未声明原创的题目则是由网友以及我的一些朋友给出的解答, 感谢各位. 如果有错误的地方, 烦请大家指出, 邮箱我标在了页眉部分.

例 1: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right).$$

✎ **解** [原创] 当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$,

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x+\sin\int_0^\pi \sqrt[n]{\sin x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n^3\left(\tan\int_0^\pi (\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x-\sin\int_0^\pi (\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\int_0^\pi(\sqrt[n]{\sin x}-1)\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&\frac{\left(\int_0^\pi \ln\sin x\mathrm{d}x\right)^3}{2}\\
=&-\frac{(\pi\ln 2)^3}{2}
\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\pi\left(\sqrt[n]{\sin x}-1\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sqrt[n]{\sin x}-1}{1/n}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2$$

是一个比较常见的积分, 其中极限与积分次序的交换我没有声明, 其实可以直接用 Gamma 函数表示出那个积分再求极限, 留给读者.

例 2: 计算积分

$$I=\int_0^\infty\frac{1}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

✎ **解** 作变换 $x\to\frac{1}{x}$ 可得

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\ln^2\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\ln^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln^2(t^2+1)}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\cos^2u\mathrm{d}u=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin u\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi^3}{6}+2\pi\ln^2 2.\end{aligned}$$

其中最后一步利用 $\ln\sin x$ 的 Fourier 级数 $\ln\sin x=-\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k}$(这个公式大家除了用 Fourier 级数的方法推出, 还可以利用复数法推出), 然后根据 Fourier 级数的逐项积分性质和三角函数的正交性质得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2\sin x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k}\right)^2\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln^2 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2kx}{k^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2kx}{2k^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi}{4}\zeta(2)=\frac{\pi}{2}\ln^2 2+\frac{\pi^3}{24}\end{aligned}$$

例 3: 计算积分

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}\right)\mathrm{d}x$$

✎ **解** 因为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x^2$$

所以原积分

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{(2^2)^n(n!)^2}\mathrm{d}x^2=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n(n!)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{2^n (n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

例 4: 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x$$

✎ **解** 考虑积分

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\ln\left(tx+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x$$

那么

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^1 \frac{\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

而

$$I'(t) = \int_0^1 \frac{1}{tx+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{t\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2} + \frac{t\ln t}{1+t^2}$$

上式对 t 积分得

$$I(t) = \frac{\pi}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\ln t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\ln(1+x^2)}{x}\mathrm{d}x + C$$

其中

$$C = I(0) = -\frac{\pi^2}{24}, I = I(1) = \frac{\pi^2}{8} + 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{16}$$

例 5: 计算不定积分

$$\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$$

✎ **解**

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x \\ = &\int \frac{2u^2}{(1+u)(1+u^4)}\mathrm{d}u \quad \left(u = \sqrt{\tan x}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{-u^3+u^2+u-1}{1+u^4}\right)\mathrm{d}x\\
&=\ln(1+u)-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)+\int\frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2)}{1+(u^2)^2}\\
&=\ln(1+u)-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{2}\arctan u^2+C\\
&=\ln(1+\sqrt{\tan x})-\frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tan x-\sqrt{\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{\tan x}+1}\right)+\frac{1}{2}x+C
\end{aligned}
$$

例 6: 计算不定积分

$$
\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x.
$$

✎ **解**

$$
\begin{aligned}
\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2}{(\tan t-t)^2}\sec^2 t\,\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{t^2}{(\sin t-t\cos t)^2}\mathrm{d}t\\
&=\int\left(-\frac{t}{\sin t}\right)\left(-\frac{t\sin t}{(\sin t-t\cos t)^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{t}{\sin t}\frac{1}{\sin t-t\cos t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}\\
&=-\frac{(1+\tan^2 t)t}{\tan t(\tan t-t)^2}-\frac{1}{\tan t}+C\\
&=-\frac{(1+x^2)\arctan x}{x(x-\arctan x)}-\frac{1}{x}+C\\
&=-\frac{1+x\arctan x}{x-\arctan x}+C
\end{aligned}
$$

例 7: 计算积分

$$
I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\cosh(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t
$$

✎ **解**

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\cosh(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos\mathrm{h}\,(at)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\left(\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-t^2+at}+\mathrm{e}^{-t^2-at}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{a}{2}\right)^2}\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}
\end{aligned}
$$

例 8: 设 $a > b > 0$, 计算积分

$$\int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)\mathrm{d}x.$$

✎ **解** 记 $I(b) = \int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)\mathrm{d}x$, 那么

$$
\begin{aligned}
I'(b) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{a + b\cos x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b} - \frac{a}{b}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} \\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{2a}{b}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(a+b) + (a-b)t^2} \quad (t = \tan(x/2)) \\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)\Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{b} - \frac{\pi a}{b\sqrt{a^2-b^2}}
\end{aligned}
$$

例 9: 计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{x^m(1-x)^{n-m}}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$$

✎ **解**

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{x^m(1-x)^{n-m}}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{n-m}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} \\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}\mathrm{d}t \quad \left(t = \frac{x}{1+x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{-\frac{n+m}{n}}}{\Gamma(3)}\Gamma\left(\frac{m+n}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2n-m}{n}\right)\\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\cdot\frac{m}{n}\frac{n-m}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\\
&= 2^{-\frac{n+m}{n}}\cdot\frac{m(n-m)}{n^2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

例 10:

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right).
$$

✎ **解** 首先有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1} &= 1+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)\right)\\
&= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)+\frac{1}{3}\ln n
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n &= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1/3}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\
&= 1+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 x^{k+1/3-1}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\
&= 1+\frac{1}{3}\left(\int_0^1\frac{x^{1/3}-1}{1-x}\mathrm{d}x\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\
&= 1+\int_0^1\frac{x^{1/3}-1}{1-x}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\
&= 1-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)
\end{aligned}
$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3}\ln n\right)=\frac{1}{3}\gamma+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3.$

例 11: 把方程 $\tan x=x$ 的正根按从小到大顺序排成数列 x_n, 求极限

$$
\lim_{n\to\infty}x_n^2\sin(x_{n+1}-x_n)
$$

✎ 解 [原创] 首先容易得到 $x_n \in \left(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, 于是 $x_n - n\pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故

$$x_n = \tan x_n = \tan(x_n - n\pi)$$

所以 $\arctan x_n = x_n - n\pi$, 且 $x_n - n\pi \to \frac{\pi}{2}, n \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(x_{n+1}-x_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(\arctan x_{n+1} - \arctan x_n + \pi) \\
&= -\lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \sin\left[\arctan\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_nx_{n+1}}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty} n^2\pi^2 \frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_nx_{n+1}} = -\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) \\
&= -\lim_{n\to\infty}[x_{n+1}-(n+1)\pi-(x_n-n\pi)] - \pi \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

例 12: 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2, a_2 = 8, a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}(n = 2, 3, \cdots)$, 求和 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccot}(a_n^2)$.

✎ 解 利用递推式可得

$$\begin{aligned}
&a_n(4a_{n-1}) = a_{n-1}a_n \\
\Rightarrow\ & a_n(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1}) \\
\Rightarrow\ & a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = a_{n-1}^2 - a_na_{n-2}
\end{aligned}$$

根据上述递推关系可得, 对 $\forall n \geqslant 2$,

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = a_{n-1}^2 - a_na_{n-2} = \cdots = a_2^2 - a_1a_3 = 4.$$

根据反余切公式 $\operatorname{arccot} a - \operatorname{arccot} b = \operatorname{arccot}\left(\frac{1+ab}{b-a}\right)$ 可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) &= \operatorname{arccot}\left(\frac{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}{\frac{a_n}{a_{n-1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right) \\
&= \operatorname{arccot}\left[\frac{a_n(a_{n-1}+a_{n+1})}{a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}}\right] \\
&= \operatorname{arccot}\left[\frac{a_n(4a_n)}{4}\right]
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{arccot} a_n^2.$$

由特征根方法可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$, 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arccot}(a_n^2) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arccot}(a_n^2)\\
&= \operatorname{arccot} a_1^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left[\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)\right]\\
&= \operatorname{arccot} a_1^2 + \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{acrcot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \operatorname{acrcot}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \operatorname{arccot}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

例 13: 计算积分

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x^4}{1-x^4}\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

✎ **解** [原创]

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x^4}{1-x^4}\arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 t}{1-\tan^2 t}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 t}{1-\tan^2 t}\mathrm{d}t\\
&= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t + \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1-\tan^2 t}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2t}{2\cos 2t}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).
\end{aligned}$$

例 14: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)}.$$

✎ **解** 首先注意到

$$\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}-1\right)} - \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}+1\right)} = \frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}.$$

于是得到

$$\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}+1\right)}=\left[\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2^n]{2}-1\right)}-1\right]-\left[\frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}-1\right]$$

且当 $n=1$ 时,

$$\frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[2^{n-1}]{2}-1\right)}-1=0.$$

因此可求得部分和

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)}=\frac{1}{2^m\left(\sqrt[2^m]{2}-1\right)}-1.$$

令 $m\to\infty$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\left(1+\sqrt[2^n]{2}\right)}=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

例 15: 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

☞ **证明** 令

$$I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$$

由 Cauchy 不等式得

$$I_2\geqslant I_1^2$$

再由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1\left(r+f^2(x)\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(r+f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

展开得到

$$r^2I_1^2\leqslant r^2I_2+2rI_2^2+I_2I_4$$

也即

$$(I_1^2-I_2)r^2-2I_2^2r-I_2I_4\leqslant 0$$

于是上式左边的最大值也小于等于 0, 最大值在 $r=\frac{I_2^2}{I_1^2-I_2}$ 取到, 即满足

$$\frac{I_4^4}{I_1^2-I_2}-\frac{2I_2^4}{I_1^2-I_2}-I_2I_4\leqslant 0$$

即

$$I_4\geqslant\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

所以只要证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\geqslant\frac{27}{4}I_1^4$$

注意到

$$(I_2-I_1^2)I_1^4=\frac{1}{2}(2I_2-2I_1^2)I_1^2\cdot I_1^2\leqslant\frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\geqslant\frac{27}{4}I_1^4$$

故有

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4.$$

例 16: 设函数 $f\in C(a,b)$ 不恒为零, 满足 $0\leqslant f(x)\leqslant M$, 试证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}$$

☞ **证明** 令

$$A=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$B=\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$C=\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_D f(x)f(y)\cos x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里区域 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$.

则有

$$B+C=\iint\limits_{D} f(x)f(y)(\sin x\sin y+\cos x\cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(x)f(y)\cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
A-(B+C)&=\iint\limits_{D} f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\iint\limits_{D} f(x)f(y)\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant\frac{M^2}{2}\iint\limits_{D}(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{M^2}{2}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b(x-y)^2\mathrm{d}y\\
&=\frac{M^2(b-a)^4}{12}
\end{aligned}$$

例 17: 计算积分

$$\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$$

✎ **解**

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{16}&=\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}\\
&=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}+\frac{1}{(1+y^2)(2+x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(2+x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^1\left[\frac{\pi}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}-\frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi^2}{6}-2\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x=\frac{5}{96}\pi^2
\end{aligned}$$

例 18: 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

✎ **解** 记

$$I=\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

把 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得

$$I=\int_0^{\infty} \frac{x^{102}}{(x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1)(x^{100}-x^{98}+\cdots+1)}\mathrm{d}x$$

注意到

$$x^{100}-x^{98}+\cdots+1=\frac{1+x^{102}}{1+x^2}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{x^4+(1+2\sqrt{2})x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+1+2\sqrt{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2(1+\sqrt{2})} \end{aligned}$$

例 19: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2017}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

✎ **解** 由推广的积分第一中值定理, 对每个正整数 $n, \exists\theta_n \in (0,1)$ 使得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = ((2n+\theta_n)\pi)^{2016}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

由此得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \left((2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})\right) \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \left((2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})\right) \left(\frac{\cos 5x}{80} - \frac{\cos 3x}{48} - \frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\
&= \frac{4}{15}\left((2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})\right) \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

另外

$$
(2n+1)^{2017} - (2n-1)^{2017} = 4034(2n)^{2016} + o(n^{2016}) \quad n \to \infty
$$

于是由 Stolz 定理得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2017}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^{2016} \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x}{(2n+1)^{2017} - (2n-1)^{2017}} \\
&= \frac{2}{30510} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n\pi)^{2016} + o(n^{2016})}{(2n)^{2016} + o(n^{2016})} \\
&= \frac{2\pi^{2016}}{30510}
\end{aligned}
$$

更一般的结果是

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^{p+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^p \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{2\pi^p}{15(p+1)}.
$$

例 20: 求和

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots\right)^2
$$

✎ **解** 首先注意到

$$
\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots = \int_0^1 (x^n - x^{n+1} + x^{n+2} - \cdots)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots\right)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{y^n}{y+1}\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)(1-xy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1-xy)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left(\frac{\ln 2 - \ln(1-x)}{1+x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{(1-x)\ln(1-x)}{2(1+x)} + \frac{\ln(1+x)}{2} - \frac{\ln 2}{1+x} \right) \Big|_0^1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

例 21: 设 $f(x)$ 是连续实值函数, 且满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x = \cdots = \int_0^1 x^{n-1} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant n^2$$

✎ **解** 考虑多项式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

如果多项式 $P(x)$ 也满足上面的条件, 那么

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

为了求出系数 a_i, 再次利用条件

$$\int_0^1 x^k P(x)\mathrm{d}x = 1 \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{k+n} = 1 \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

设

$$H(x) = \frac{a_0}{x+1} + \frac{a_1}{x+2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x+n}$$

则显然有

$$H(0) = H(1) = \cdots = H(n-1) = 0$$

于是

$$H(x) = \frac{Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

对比系数可得 $A=-1$ 以及

$$a_k = (-1)^{n-k+1}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k+1)!} \quad k=0,1,\cdots,n-1$$

用数学归纳法可以证明

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = n^2$$

所以, 多项式 $P(x)$ 满足上面的性质, 则

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = n^2$$

取满足以上条件的多项式 $P(x)$, 由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = n^4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant n^2.$$

例 22: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)}.$$

✎ **解**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(2^n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{2^n} - \mathrm{e}^{-2^n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{2^n}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\cdot 2^n}\right)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\cdot 2^n\cdot k} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)\cdot 2^n} \\
&= 2\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2m} = \frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}.
\end{aligned}$$

例 23: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的 n 阶连续可微函数, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 其中 i 是不超过 n 的偶数, 证明

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

✎ **解** 如果 $g\in C^n([0,1])$, 则对任意 $a\in(0,1)$, 由分部积分可得

$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i a^{i+1}g^{(i)}(a)}{(i+1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a x^n g^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{i+1}(i+1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

以及

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x)\,\mathrm{d}x\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{i+1}(i+1)!}+\frac{1}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x$$

由于 $f^{(i)}\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 其中 i 是小于 n 的偶数, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n!}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

最后由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&\leqslant\frac{2}{(n!)^2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n f^{(n)}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right]\\&\leqslant\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{(n)}(1-x)\right)^2\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant\frac{1}{(2n+1)\,4^n\,(n!)^2}\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 24: 设 f 是 $[0,1]$ 上二阶连续可导的实值函数, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 证明

$$\int_0^1 \left(f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 320\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

☞ **证明** 利用 Taylor 公式可得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

由于 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 于是有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_{x=0}^{\frac{1}{2}}\int_{t=x}^{\frac{1}{2}} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x+\int_{x=\frac{1}{2}}^{1}\int_{t=\frac{1}{2}}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{t=0}^{\frac{1}{2}}\int_{x=0}^{t} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{t=\frac{1}{2}}^{1}\int_{x=t}^{1} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f''(t)\left[-\frac{(t-x)^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{t}\mathrm{d}t+\int_{t=\frac{1}{2}}^{1} f''(t)\left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]\Bigg|_{x=t}^{1}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{1}{2}} f''(t)\,t^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{t=\frac{1}{2}}^{1} f''(t)(1-t)^2\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f''(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

其中

$$h(t)=\begin{cases} t^2, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ (1-t)^2, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

因此由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (h(t))^2\,\mathrm{d}t\int_0^1\left(f''(t)\right)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{320}\int_0^1\left(f''(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

例 25: 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续非负函数, 证明

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 4\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

☞ 证明　这里我们证明一个更一般的结论: 设 f, g 是 $[0,1]$ 上的连续非负函数, a 和 b 是非负实数, 则

$$\int_0^1 f^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f^a(x)\,g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^b(x)\,g^a(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

设 A, B 是非负实数, 则

$$(A^a - B^a)(A^b - B^b) \geqslant 0$$

这就意味着

$$A^{a+b} + B^{a+b} \geqslant A^a B^b + A^b B^a$$

令 $A = f(x)g(y), B = f(y)g(x)$, 并在 $[0,1]\times[0,1]$ 上积分, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\int_0^1 [f(x)\,g(y)]^{a+b}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_0^1\left(\int_0^1 [f(y)\,g(x)]^{a+b}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ \geqslant &\int_0^1\left(\int_0^1 (f(x)\,g(y))^a\,(f(y)\,g(x))^b\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_0^1\left(\int_0^1 (f(x)\,g(y))^b\,(f(y)\,g(x))^a\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 f^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g^{a+b}(y)\,\mathrm{d}y\right) + \left(\int_0^1 f^{a+b}(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 g^{a+b}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ \geqslant &\left(\int_0^1 f^a(x)\,g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f^a(y)\,g^b(y)\,\mathrm{d}y\right) + \left(\int_0^1 f^a(y)\,g^b(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 f^a(x)\,g^b(x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

得证, 那么在待证式中取 $g(x) = x, a = 2, b = 1$ 即可.

例 26: 设 f 是 $[0,1]$ 上的非负函数, 证明

$$\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{16} + \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ 证明　首先注意到对 $t \geqslant 0$ 有

$$t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{6} = \frac{(4t+1)(2t-1)^2}{16} \geqslant 0$$

由于 f 是非负函数, 则

$$\int_0^1\left(f^3(x) - \frac{3}{4}f^2(x) + \frac{1}{16}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

那么由 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\geqslant\frac{3}{4}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

例 27: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}}\Gamma(nx)\,\mathrm{d}x$$

✎ **解** 我们将证明如果 f 是 (a,b) 上的实值连续函数且 $\mathrm{e}\in(a,b)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}} f(nx)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}f(\mathrm{e})$$

令 $b_n=n\,(n!)^{-1/n}$, $a_n=n\,((n+1)!)^{-1/(n+1)}$, 那么由积分平均值定理可得

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{((n+1)!)^{-1/(n+1)}}^{((n)!)^{-1/n}} f(nx)\,\mathrm{d}x=n\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,\mathrm{d}t=n\,(b_n-a_n)\,f(t_n)$$

对某个 $t_n\in(a_n,b_n)$ 成立. 再由 Stirling 公式得

$$\ln(n!)=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\ln\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此

$$b_n=n\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n!)}{n}}=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}\ln n}{2n}-\frac{\mathrm{e}\ln\sqrt{2\pi}}{n}+O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

$$b_n-a_n=b_n-\frac{nb_{n+1}}{n+1}=\frac{\mathrm{e}}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)=\mathrm{e}$$

也就意味着

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} t_n=\mathrm{e}$$

再由 f 在 e 处的连续性

$$\lim_{n\to\infty} n\,(b_n-a_n)\,f(t_n)=\mathrm{e}f(\mathrm{e})$$

而这里的话, Γ 函数是 $(0,+\infty)$ 上的实值连续函数, 因而极限是 $\mathrm{e}\Gamma(\mathrm{e})$.

例 28: 计算二重积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

✎ **解** [原创] 首先有

$$\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y}=\frac{1-\cos(x+y)}{2-2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

作二重积分换元 $x=u+v, y=u-v$, 则 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=2$, 于是积分域变为正方形 $(u,v):-\pi\leqslant u\pm v\leqslant\pi$, 由对称性

$$\begin{aligned}
I&=4\iint\limits_{0\leqslant u+v\leqslant\pi}\frac{1-\cos 2u}{1-\cos u\cos v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=4\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2u}{\cos u}\int_0^{\pi-u}\frac{\mathrm{d}v}{\sec u-\cos v}\right)\mathrm{d}u\\
&=4\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2u}{\cos u}\frac{2}{\sqrt{\sec^2 u-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\sec u+1}{\sec u-1}}\tan\frac{v}{2}\right)\Bigg|_{v=0}^{\pi-u}\right)\mathrm{d}u\\
&=16\int_0^\pi\sin u\arctan\left(\cot^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u\\
&=64\int_0^\infty\frac{w}{(1+w^2)^2}\arctan(w^2)\mathrm{d}w\quad\left(w=\cot\left(\frac{u}{2}\right)\right)\\
&=32\int_0^\infty\frac{\arctan t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\\
&=8\pi
\end{aligned}$$

例 29: 求和

$$S=\sum_{n=1}^\infty\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\left(\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

✎ **解** [原创] 首先我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\left(\frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\right)^2&=\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{2n+1}\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\\
&=\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\\
&=\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\sin^{2n-1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

利用对数函数的幂级数公式不难得到

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{2\sin^{2n-1}x\sin^{2n-1}y}{2n+1}=\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y}\left(\ln\frac{1+\sin x\sin y}{1-\sin x\sin y}-2\sin x\sin y\right)$$

考虑参变量积分

$$I\left(a\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 y}\left(\ln\frac{1+a\sin y}{1-a\sin y}-2a\sin y\right)\mathrm{d}y\quad |a|<1$$

则可得

$$\begin{aligned}
&I(0)=0\\
&I'\left(a\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin y}\left(\frac{1}{1+a\sin y}+\frac{1}{1-a\sin y}-2\right)\mathrm{d}y\\
&\quad=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1-a^2\sin^2 y}\mathrm{d}y=2a^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-a^2\left(1-t^2\right)}\quad(t=\cos y)\\
&\quad=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(1-a^2\right)/a^2}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
I\left(\sin x\right)&=\int_0^{\sin x}\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\mathrm{d}a=2\int_0^x u\sin u\mathrm{d}u\quad(a=\sin u)\\
&=2\left(\sin x-x\cos x\right)
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x\sin^2 y}\left(\ln\frac{1+\sin x\sin y}{1-\sin x\sin y}-2\sin x\sin y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{I\left(\sin x\right)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\\
&=-2\left(\sin x-x\cos\right)\cot x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left(\sin x\right)=\pi-2
\end{aligned}$$

例 30: 计算二重积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cos\left(x-y\right)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

✎ 解 [原创] 考虑参变量积分

$$I(t)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\frac{\cos(x-ty)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

则

$$\begin{aligned}
I(0)&=0\\
I'(t)&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\sin(x-ty)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{t}\cos(x-ty)\Big|_{y=0}^{y=x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\cos(1-t)x-\cos x}{tx}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\ln(1-t)}{t}
\end{aligned}$$

上面最后一步我们利用了 Frullani 积分公式, 于是

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}\frac{\cos(x-y)-\cos x}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

例 31: 设函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数, 证明不等式

$$\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 12\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ 证明 利用 Cauchy 不等式得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 24\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

再利用 Cauchy 不等式得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left[-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x \geqslant 24\left[-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right]^{2}$$

两式相加, 利用不等式 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$ 得

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x &\geqslant 24\left[\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2}\right]\\ &\geqslant 12\left(\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2}\end{aligned}$$

特别地, 当 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时, 我们有

$$\int_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x \geqslant 12\left(\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{2}.$$

例 32: 设 $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+2)}$$

✎ **解** [原创] 首先注意到

$$H_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}=\int_{0}^{1}\sum_{k=0}^{n}x^{k}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+2}}{n(n+2)} &= \int_{0}^{1}\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{n+2}}{n(n+2)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{1}\frac{1}{1-x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{4}-2\left(1-x^{2}\right)\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{1}\left(\frac{x+3}{4}+\frac{1}{2}(1+x)\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

例 33: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(\sinh n)\cdot\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right)$$

✎ 解 [原创] 注意到

$$\begin{aligned}\arctan(\sinh n) &= \arctan\left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = \arctan\left(\frac{e^n - e^{-n}}{1 + e^n \cdot e^{-n}}\right) \\ &= \arctan(e^n) - \arctan(e^{-n}) = 2\arctan(e^n) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right) &= \arctan\left(\frac{e - e^{-1}}{e^n + e^{-n}}\right) = \arctan\left(\frac{e^{n+1} - e^{n-1}}{1 + e^{n+1} \cdot e^{n-1}}\right) \\ &= \arctan(e^{n+1}) - \arctan(e^{n-1})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\sinh n) \cdot \arctan\left(\frac{\sinh 1}{\cosh n}\right) \\ =& \sum_{n=1}^{\infty}\left[2\arctan(e^n) - \frac{\pi}{2}\right]\left[\arctan(e^{n+1}) - \arctan(e^{n-1})\right] \\ =& 2\left[\lim_{n\to\infty} \arctan(e^n)\arctan(e^{n+1}) - \frac{\pi}{4}\arctan(e)\right] \\ &- \frac{\pi}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\arctan(e^n) + \arctan(e^{n+1})\right) - \frac{\pi}{4} - \arctan(e)\right] \\ =& 2\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}\arctan(e)\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}\pi - \arctan(e)\right) = \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

例 34: 设 r 是一个整数, 求和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right)$$

✎ 解 首先有

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right) &= \arctan\left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^n + e^{-n}}\right) = \arctan\left(\frac{e^{-(n-r)} - e^{-(n+r)}}{1 + e^{-2n}}\right) \\ &= \arctan\left(e^{-(n-r)}\right) - \arctan\left(e^{-(n+r)}\right)\end{aligned}$$

不失一般性, 不妨设 $r \geqslant 0$, 我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sinh r}{\cos hn}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{\sinh r}{\cosh n}\right) + \arctan(\sinh r) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\mathrm{e}^{-(n-r)}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-(n+r)}\right)\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
&= 2\sum_{m\geqslant 1-r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) - 2\sum_{m\geqslant 1+r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
&= 2\sum_{1-r\leqslant m\leqslant r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
&= 2\sum_{-r\leqslant m\leqslant r} \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
&= 2\sum_{1\leqslant m\leqslant r} \left[\arctan\left(\mathrm{e}^{m}\right) + \arctan\left(\mathrm{e}^{-m}\right)\right] + 2\arctan(1) - \arctan\left(\mathrm{e}^{r}\right) - \arctan\left(\mathrm{e}^{-r}\right) \\
&= 2\sum_{1\leqslant m\leqslant r} \frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \pi r
\end{aligned}
$$

例 35: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}\right)$$

✎ **解** 记

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}, \qquad b_n = \frac{\sqrt{2^b+1}-\sqrt{3}}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

不难得到

$$b_{n+1}\sqrt{1+b_n^2} - b_n\sqrt{1+b_{n+1}^2} = a_n$$

根据基本性质

$$\operatorname{arcsinh}\left(x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arcsinh}(x) - \operatorname{arcsinh}(y)$$

我们得到

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{arcsinh}(a_n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\operatorname{arcsinh}(b_{n+1}) - \operatorname{arcsinh}(b_n)\right) = \operatorname{arcsinh}(b_{N+1}) - \operatorname{arcsinh}(b_1)$$

现在 $b_1 = 0, b_{N+1} \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}+2}+\sqrt{2^{n+1}+2}}\right) = \lim_{N\to\infty} \operatorname{arcsinh}(b_{N+1}) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$$

例 36: 求和

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2\binom{2n}{n}^2}$$

✎ **解** [原创] 首先有

$$\begin{aligned}\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2\binom{2n}{n}^2}&=\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\\&=\frac{16^n}{(2n+1)^2n^2}\left[\frac{n!}{(2n-1)!!\cdot 2^n}\right]^2\\&=\frac{2}{n(2n+1)}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\\&=\frac{2}{n(2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\end{aligned}$$

记

$$I(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{n(2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y$$

则

$$\begin{aligned}I'(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}y\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin y}\ln\left(1-t^2\sin^2x\sin^2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

于是

$$S=-2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin y}\ln\left(1-t^2\sin^2x\sin^2y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

考虑

$$f(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin y}\ln\left(1-u\sin^2y\right)\mathrm{d}y$$

则

$$f'(u)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1-u\sin^2y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{\sqrt{u-u^2}}\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{t^2\sin^2x}\frac{\sin x}{\sqrt{u-u^2}}\arctan\sqrt{\frac{u}{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\arctan^2\left(\sqrt{\frac{u}{1-u}}\right)\Bigg|_{u=0}^{t^2\sin^2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \arctan^2\left(\frac{t\sin x}{\sqrt{1-t^2\sin^2 x}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^x z^2\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x \quad \left(t=\frac{\sin z}{\sin x}\right) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\cos x + x^2\sin x - 2\sin x\right)\mathrm{d}x \\
&= 4\pi - 12
\end{aligned}
$$

例 37: 计算积分

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+2x)}{\ln 2-\ln(1-2x)}\right)}{3+4x^2}\mathrm{d}x
$$

✎ **解** [原创] 首先有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+2x)}{\ln 2-\ln(1-2x)}\right)}{3+4x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x\ln\left(\frac{\ln 2-\ln(1+x)}{\ln 2-\ln(1-x)}\right)}{3+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^1 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\frac{\ln\frac{1+x}{2}}{\ln\frac{1-x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^1 \frac{x}{3+x^2}\ln\left(\left|\ln\frac{1+x}{2}\right|\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{2t-1}{3+(2t-1)^2}\ln(-\ln t)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(2t-1)\ln(-\ln t)}{t^2-t+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 \ln(-\ln t)\,\mathrm{d}\left(\ln\left(t^2-t+1\right)\right) \quad (x=2t-1) \\
&= -\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2-t+1\right)}{t\ln t}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{-2s}-\mathrm{e}^{-s}+1\right)}{s}\mathrm{d}s \quad \left(t=\mathrm{e}^{-s}\right) \\
&= \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-3s}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-s}\right)}{s}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

考虑参数积分 $I(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-as}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-bs}\right)}{s}\mathrm{d}s$, 则 $I(b,b)=0$,

$$
I_a'(a,b) = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{1+\mathrm{e}^{-as}}\mathrm{d}s = -\frac{1}{a}\ln 2
$$

于是

$$
I(a,b) = -\ln 2\int_b^a \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln 2\ln\frac{a}{b}
$$

原积分 $I=\dfrac{1}{8}I(3,1)=-\dfrac{1}{8}\ln 2\ln 3.$

例 38: 设 $f(x):(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, 且是连续可导的函数, 满足

$$f(x)\leqslant x^2\ln x,\quad f'(x)>0,x\in(1,+\infty).$$

证明：积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

☞ **证明** [原创] 如果 $f'(x)$ 有界, 结论显然成立, 不妨设 $f'(x)$ 无界, 这时 $f(x)$ 单调趋于 $+\infty$. 对 $\forall A>0$, 由 Cauchy 不等式得

$$\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\right)\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\right)\geqslant\left(\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2$$

由 $f(x)\leqslant x^2\ln x$ 得 $f(\mathrm{e}^x)\leqslant x\mathrm{e}^{2x}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{f'\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^t}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t=\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{\mathrm{d}\left[f\left(\mathrm{e}^t\right)\right]}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\\&=\left.\frac{f\left(\mathrm{e}^t\right)}{t^2\mathrm{e}^{2t}}\right|_{\frac{A}{2}}^{A}+\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{2t^2\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^4}f\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{f\left(\mathrm{e}^A\right)}{A^2\mathrm{e}^{2A}}+\int_{\frac{A}{2}}^{A}\frac{2t^2\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}}{t^4}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{A}+2\left(\ln 2+\frac{1}{A}\right)=2\ln 2+\frac{3}{A}.\end{aligned}$$

取 A 充分大, 则 $\int_{\mathrm{e}^{\frac{A}{2}}}^{\mathrm{e}^A}\frac{f'(x)}{x^2\ln^2 x}\mathrm{d}x\leqslant 2$, 因此

$$\int_{\mathrm{e}^{A/2}}^{\mathrm{e}^A}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}\geqslant\frac{\ln^2 2}{2}$$

对任意充分大的 A 都成立, 于是积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}x$ 发散.

例 39: 计算积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

✎ **解**

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\\&=-\ln(x)\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\Big|_0^1+\int_0^1\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}-\ln(x)\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1 \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right)\Big|_{y=1}^{y=2}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_1^{\infty}\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xy}\right)\big|_{y=1}^{y=2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&=\int_0^1\int_1^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{xy}-1}-\frac{1}{xy}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{xy}-1}\\
&=\int_1^2\frac{\mathrm{d}y}{y}\left[\ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xy}\right)\big|_{x=1}^{x=\infty}\right]\\
&=-\int_1^2\frac{\ln(y)}{y}\mathrm{d}y=-\frac{\ln^2 2}{2}
\end{aligned}
$$

例 40: 求极限

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\right)^n-\frac{1}{2}\right]
$$

✎ **解** 首先有

$$
\begin{aligned}
I_n&=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t\\
&=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}k!}\int_0^1\frac{\ln^k x}{1+x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此不难得到

$$
I(n)=1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
$$

故

$$
\begin{aligned}
I^n(n)&=\mathrm{e}^{n\ln\left[1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}=\mathrm{e}^{n\left[-\frac{\ln 2}{n}+\frac{\pi^2}{12n^2}-\frac{\ln^2 2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

于是最后得到

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[I^n(n)-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{4}\ln^2 2
$$

例 41: 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上周期为 T 的局部可积函数, 且 $\int_0^a\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 其中 $0<a<\pi$, 证明

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a\frac{f(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x
$$

☞ 证明 由于 $f(x)$ 局部可积故有界, $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|<M$, 而 $\int_0^a \frac{f(nx)}{x}=\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\ (n\in \mathbb{N}_+)$. 由于 $\int_0^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 故 $\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{f(nx)}{x}\mathrm{d}x$ 存在, 而

$$\left|\int_0^a \frac{f(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x-\int_0^a\frac{f(nx)}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^a f(nx)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_0^a\frac{x-\sin x}{x\sin x}\mathrm{d}x$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=0$, 故 $\int_0^a\frac{x-\sin x}{x\sin x}\mathrm{d}x$ 存在且为有限数, 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a\frac{f(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^a\frac{f(nx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(na)-\ln a}\int_0^{na}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 42: 证明下列两个积分等式:

$$(1)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}z;$$

$$(2)\ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}z.$$

☞ 证明 [原创] 我们只证明 (2) 式, (1) 式同理.(2) 式等价于

$$\frac{1}{2}\left(\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}x=0$$

令 $f(z)=\frac{1}{2}\left(\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}f'(z)&=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}\csc^2 x}\left(-z\csc^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}(\cot^2 x+1)}z\,\mathrm{d}(\cot x)\\&=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}u^2}z\,\mathrm{d}u=0\end{aligned}$$

因此 $f(z)=f(0)=0$.

例 43: 设 n 是一个正整数, 证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

证明 [原创] 先考虑复杂的 n 为偶数的情形, 这个时候只需要考虑 $x\to 0^+$ 即可, 以正弦为例 (余弦同理)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sin^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t$$

对 $\forall x>0,\exists k\in\mathbb{N}$, s.t.$(k-1)\pi\leqslant x<k\pi$, 则 $x\to+\infty$ 时 $k\to+\infty$, 于是

$$x\int_x^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t+x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t$$

其中

$$\left|x\int_x^{k\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|x\int_x^{k\pi}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{k\pi-x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\pi}{x}\right|\to 0, x\to+\infty$$

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t&=\sum_{i=k}^{+\infty}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin^n t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(t+i\pi)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+\frac{t}{\pi})^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

不难得到当 $k\to+\infty$ 时,

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}\sim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+\frac{t}{\pi})^2}\sim\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^2}\sim\frac{1}{k}$$

于是当 $x\to+\infty$ 时,

$$x\int_{k\pi}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{x}{\pi^2}\int_0^{\pi}\sin^n t\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+\frac{t}{\pi})^2}\mathrm{d}t\sim\frac{k\pi}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin^n t\mathrm{d}t=\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

这就是 n 是偶数的极限, 而当 n 是奇数的时候, 正项级数 $\displaystyle\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{(i+\frac{t}{\pi})^2}$ 会变成交错级数

$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(i+\frac{t}{\pi})^2}$, 这个交错级数的绝对值不会超过 $\frac{1}{(k+\frac{t}{\pi})^2}<\frac{1}{k^2}$, 因此最后的极限是 0.

例 44: 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个严格单增实数列满足 $a_n\leqslant n^2\ln n$ 对所有 $n\geqslant 1$ 都成立, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

☞ **证明** [原创] 首先如果 $\{a_n\}$ 有界的话结论就显然了, 因此假设 $\{a_n\}$ 无界, 意味着 $\{a_n\}$ 单调递增趋于 $+\infty$. 对任意 $A>0$, 由 Cauchy 不等式 (这个不等式的证明以及积分, 代数, 期望形式我们在前期的公众号内容中都介绍过了) 得

$$\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}\right)\geqslant\left(\sum_{n=\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{n\ln n}\right)^2\sim\left(\int_{e^{A/2}}^{e^A}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\right)^2=\ln^2 2.$$

这里的求和式子中的上限和下限中的符号分别表示向上取整和向下取整. 另一反面, 利用 Abel 分部求和公式 (相当于就是分部积分公式的离散形式)

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N}\frac{a_{n+1}-a_n}{n^2\ln^2 n}&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_M)\left(\frac{1}{n^2\ln^2 n}-\frac{1}{(n+1)^2\ln^2(n+1)}\right)\\&=\frac{a_{N+1}-a_M}{N^2\ln^2 N}+\sum_{n=M}^{N-1}\frac{(a_{n+1}-a_M)[(n+1)^2\ln^2(n+1)-n^2\ln^2 n]}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}\\&\leqslant\frac{a_{N+1}}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{n\ln^2 n}{n^2(n+1)^2\ln^2 n\ln^2(n+1)}a_{n+1}\\&\leqslant\frac{(N+1)^2\ln(N+1)}{N^2\ln^2 N}+C\sum_{n=M}^{N-1}\frac{1}{n\ln(n+1)}\\&=\frac{2}{\ln N}+C\int_M^N\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\frac{2}{\ln\lceil e^A\rceil}+C\ln\frac{\lceil e^A\rceil}{\lfloor e^{A/2}\rfloor}<C\ln 2+1.\end{aligned}$$

这里 $M=\lfloor e^{A/2}\rfloor, N=\lceil e^A\rceil, C$ 是某个无关的正常数, 因此我们有

$$\sum_{\lfloor e^{A/2}\rfloor}^{\lceil e^A\rceil}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\geqslant\frac{\ln^2 2}{C\ln 2+1}$$

对任意充分大的 A 都成立, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散, 证毕.

例 45: [北大 2011 数学分析考研题] 设 $a_n>0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

存在.

☞ **证明** [原创] 首先由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时, $\sum_{k=n}^{n+p} < \varepsilon$ 对任意 $p \in \mathbb{N}$ 都成立.

利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=N+1}^{n} a_k\right) \geqslant (n-N)^2$$

即 $\dfrac{(n-N)^2}{\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} a_k < \varepsilon$. 于是对固定的 N, 取 n 充分大有

$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = \frac{n^2}{(n-N)^2} \frac{(n-N)^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} < 2\varepsilon$$

这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} = 0$.

例 46: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 证明

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

同时说明右边的常数 2 不可再改进. 进一步, 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1+\cdots+a_n}$ 也收敛.

☞ **证明** 首先由 Cauchy 不等式得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{k^2}{a_k}\right) \geqslant (1+2+\cdots+k)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

于是可得

$$\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}$$

两边对 k 从 1 到 n 求和得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^{n} 2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$< 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

其中我们运用了不等式

$$\frac{1}{k\left(k+1\right)^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}\right) = \frac{2k+1}{2k\left(k+1\right)^2}$$

如果取 $a_k = k, k = 1, \cdots, n$, 原不等式即 $2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 注意到令 n 趋于无穷大时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = 1$, 因此右边的常数无法再改进了, 至于级数的敛散性问题就是显然了.

例 47:

(1) 证明拉马努金恒等式

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}}$$

(2) (原创) 设 a_n 是以公差为 $d \in \mathbb{N}$ 的正整数等差数列, 对固定的正整数 n, 求

$$\sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_n\sqrt{d^2+a_{n+1}\sqrt{d^2+\cdots}}}}$$

☞ **证明** 只做第二问, 这个问题是本人原创的拉马努金恒等式推广首先我们断言一个基本等式

$$\left(a_n+d\right)^2 = d^2+\left(a_{n-1}+d\right)\left(a_{n+1}+d\right)$$

这个只要直接利用等差数列的定义进行验证即可, 简单的计算我就不写在这里了. 由于 d 是正整数, 而且就是数列 a_n 的公差, 因此事实上我们得到了

$$a_n^2 = d^2+a_{n-1}a_{n+1}.$$

于是就可以得到

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{d^2+a_{n-1}a_{n+1}} = \sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_na_{n+2}}} \\ &= \sqrt{d^2+a_{n-1}\sqrt{d^2+a_n\sqrt{d^2+a_{n+1}a_{n+3}}}} = \cdots. \end{aligned}$$

这样也证明了拉马努金恒等式.

例 48: 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导, $n \geqslant 3$, 满足 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 且 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 根据 Lagrange 中值定理可知存在 $\delta>0$, 对 $h\in(-\delta,\delta)$ 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$$

证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

☞ **证明** [原创] 首先由条件 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$ 两边减去 $f'(a)h$ 再同时除以 h^n 得

$$\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}=\frac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^n}=\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}\theta^{n-1}$$

结合条件 $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 且 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 由 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{nh^{n-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)}{n(n-1)h^{n-2}}\\&=\cdots=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)}{n!h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{n!h}\\&=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\end{aligned}$$

其中最后一步是根据 n 阶导数的定义. 同理有

$$\begin{aligned}\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}&=\lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a)}{t^{n-1}}=\lim_{t\to 0}\frac{f''(a+t)}{(n-1)t^{n-2}}\\&=\cdots=\lim_{t\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+t)}{(n-1)!t}=\lim_{t\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+t)-f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!t}\\&=\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\theta^{n-1}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^n}}{\frac{f(a+\theta h)-f'(a)}{(\theta h)^{n-1}}}=\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}{\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}}=\frac{1}{n}$$

于是 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

例 49: 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 以及 α 都是实数, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是正实数, 设函数

$$\varphi(x)=x-\alpha-\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{x-a_k}$$

证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ **证明** 令 $I_k = (a_k, a_{k=1}), k = 0, 1, \cdots, n$, 其中 $a_0 = -\infty, a_{n+1} = +\infty$, 则简单的计算可得在 $\mathbb{R}\backslash\{a_1, \cdots, a_n\}$ 内都有 $\varphi'(x) > 0$, 进一步有

$$\varphi(x) \to +\infty,\ \ x \to a_k^-,\ \ k = 1, \cdots, n+1$$

以及

$$\varphi(x) \to -\infty,\ \ x \to a_k^+,\ \ k = 0, \cdots, n$$

因此这意味着对每个 $k = 0, \cdots, n$, φ 是从 I_k 到 $\mathbb{R}$ 的双射. 设 $\psi_k : I_k \to \mathbb{R}$ 是 φ 限制在 I_k 上的反函数, 即 $\varphi \circ \psi_k = \mathrm{id}$. 则对每个 $y \in \mathbb{R}$, 方程 $\varphi(x) = y$ 刚好有 $n+1$ 个零点 $\psi_0(y), \cdots, \psi_n(y)$. 在方程 $\varphi(x) = y$ 两边同时乘以 $(x - a_1)\cdots(x - a_n)$ 得

$$(x - \alpha - y)(x - a_1)\cdots(x - a_n) + g(x) = 0.$$

其中 $g(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 因此整个式子左边是一个 $n+1$ 次多项式, 而且它刚好等于 $(x - \psi_0(y))\cdots(x - \psi_n(y))$, 于是比较 x 的 n 次方的系数得

$$y + \alpha + a_1 + \cdots + a_n = \psi_0(y) + \cdots + \psi_n(y).$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{I_k} f(\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\psi_k'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

例 50: 给定 $0 \leqslant a \leqslant 2$, 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是由 $a_1 = a, a_{n+1} = 2^n - \sqrt{2^n(2^n - a_n)}$ 所定义的数列, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

✎ **解** 令

$$\alpha = 4\arcsin\sqrt{\frac{a}{2}} = \begin{cases} \arccos\left(2a^2 - 4a + 1\right), & a \in [0, 1] \\ 2\pi - \arccos\left(2a^2 - 4a + 1\right), & a \in [1, 2] \end{cases}$$

然后利用二倍角公式 $2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1+\cos\theta$, 不难得到

$$a_n=2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

对 $N\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}a_n^2&=\sum_{n=1}^{N}4^{n-1}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2^n}-2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}4^{n-1}\left(1+\frac{1+\cos\left(\alpha/2^{n-1}\right)}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}4^{n}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}4^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}4^{n-1}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}4^{n}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(4^N\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^N}\right)-(1-\cos\alpha)\right)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2&=\frac{1}{2}\left(\lim_{N\to\infty}4^N\left(1-\cos\frac{\alpha}{2^N}\right)-(1-\cos\alpha)\right)\\&=\frac{\alpha^2}{4}+a^2-2a=4\arcsin^2\sqrt{\frac{a}{2}}+a^2-2a.\end{aligned}$$

例 51: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(a)=f'(b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

☞ **证明** 不妨假定 $f'(a)=f'(b)=0$, 否则我们考虑函数 $f(x)-xf'(a)$ 即可. 令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b\\ 0, & x=a\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b]$ 可导, 并且对 $x\in(a,b]$

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$

如果 $g(b)=g(a)$, 由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b]$ 使得 $g'(\xi)=0$, 则结论已经得证.

现在假定 $g'(x)\neq 0$ 对任意 $x\in(a,b)$ 都成立, 且 $g(b)>g(a)$. 那么由 Darboux 定理知 $g(x)$ 必然在 $(a,b]$ 上严格单增, 但

$$g'(b)=-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}=-\frac{g(b)}{b-a}<0$$

因此由极限保号性存在 $c\in(b-\delta,b)$ 使得 $f(c)>f(b)$, 矛盾. 同理 $g(b)<g(a)$ 也矛盾, 因此必然存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

同时这题的几何意义也很明显, 如果一条曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且在两个端点处的切线平行, 则必然存在曲线上的一条切线通过其中的一个端点.

例 52: 求和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\rfloor}}{k(k+1)}$$

✎ **解** [原创] 首先我们给出一个数论结果: 对任意正整数 n, 有

$$\lfloor\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+n+1}\rfloor=2n+1$$
$$\lfloor\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+n}\rfloor=2n$$

这两个式子只需要证明 $2n+1\leqslant\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+n+1}<2n+2$ 和 $2n\leqslant\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+n}<2n+1$ 即可, 平方两次就行了. 这就意味着当 k 在 n^2+n 到 $(n+1)^2-1$ 之间的时候 $\lfloor\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\rfloor$ 为奇数; 而 k 在 n^2 到 n^2+n-1 之间的时候 $\lfloor\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\rfloor$ 为偶数, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\rfloor}}{k(k+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2+n}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k(k+1)}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n^2}^{n^2+n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+n}\right)-1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-1\\
&= \frac{\pi^2}{3}-3
\end{aligned}
$$

例 53:

(1) 设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$.

(2) 设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n \ln\ln n = 0$.

☞ **证明**

(1) 因为设数列 $\{na_n\}$ 为正的单调递减数列, 利用单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = L$ 存在, 结合 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可知必有 $L=0$, 于是

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_n^{n+1} a_n \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} na_n \mathrm{d}x \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} na_n \mathrm{d}x\\
&= na_n \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \geqslant (n+p)\,a_{n+p}\left(\ln(n+1)-\ln n\right)
\end{aligned}
$$

对任意正整数 n,p 都成立. 于是

$$
(n+p)\,a_{n+p}\left(\ln(n+p)-\ln n\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k
$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 对任意正整数 $n\geqslant N, p$ 都有 $\sum\limits_{k=n}^{n+p-1} a_k < \varepsilon$, 此时

$$
(n+p)\,a_{N+p}\ln(n+p) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k + (n+p)\,a_{n+p}\ln n < \varepsilon + (n+p)\,a_{n+p}\ln n
$$

固定 n, 令 $p\to\infty$ 得到

$$
\limsup_{p\to\infty}(n+p)a_{n+p}\ln(n+p) \leqslant \varepsilon
$$

由 ε 的任意性可知 $\limsup\limits_{p\to\infty}(n+p)a_{n+p}\ln(n+p)=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n\ln n = 0$.

(2) 同 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{\ln n} &= \int_n^{n+1} \frac{a_n}{\ln n}\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{1}{n\ln n} na_n \mathrm{d}x \\ &\geqslant na_n \int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x \geqslant (n+p)\,a_{n+p}\left(\ln\ln(n+1) - \ln\ln n\right)\end{aligned}$$

于是

$$(n+p)\,a_{n+p}\left(\ln\ln(n+p) - \ln\ln n\right) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{a_k}{\ln k}$$

对任意 $n, p \in \mathbb{N}$ 都成立, 剩下的就和 (1) 一样了.

例 54: 设 $S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$ 表示 Fresnel 正弦积分, 求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3}$.

✎ **解** [原创] 令 $\frac{\pi}{2}x^2 = nt$, 则

$$S\left(\sqrt{2n}\right) = \int_0^{\sqrt{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}\left(\sqrt{t}\right) = \sqrt{\frac{2n^3}{\pi}}\int_0^{\pi} \sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3} = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

考虑函数 $f(t) = \sqrt{|t|}, -\pi \leqslant t < \pi$, 则 $f(t)$ 的余弦级数为

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{t}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cos(nt)\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cos(nt)\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此由 Parseval 定理得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\right)^2 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi^3}{36}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^2\left(\sqrt{2n}\right)}{n^3} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\sqrt{t}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi^2}{18}$$

例 55: 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 具有连续导数且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$$

证明

$$\int_0^1 |f'(x)|^3\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

证明 由 Hölder 不等式得

$$\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x^{\frac{2}{3}}\left(\int_0^1 |f'(x)|^3\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}$$

因此

$$\int_0^1 |f'(x)|^3\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\left(\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^3}{\left(\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)^2}=\left(\frac{128}{3\pi}\right)^2$$

其中

$$\int_0^1 x(1-x)f'(x)\,\mathrm{d}x=[x(1-x)f(x)]\,|_0^1-\int_0^1 (1-2x)f(x)\,\mathrm{d}x=1$$
$$\int_0^1 (x(1-x))^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=B\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(5)}=\frac{3\pi}{128}$$

同样道理可得对 $p>1$ 有

$$\int_0^1 |f'(x)|^p\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4p-2}{p-1}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)}\right)^{p-1}$$

例 56: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}}$$

解 首先有基本不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

这就意味着

$$(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}\leqslant n^n\leqslant n!\mathrm{e}^n,\forall n\geqslant 1$$

因此

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\mathrm{e}^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}=x\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}$$

因此对 $x>0$ 有

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant x^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{\mathrm{e}}}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

由夹逼准则, 原极限就是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

例 57: 设 F_n 是第 n 个 Fibonacci 数, 求和

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cosh(F_n)\cosh(F_{n+3})}$$

✎ **解** 设 $u_n=2\cosh(F_n)$, 则

$$\begin{aligned}u_{n+1}u_{n+2}&=\left(\mathrm{e}^{F_{n+1}}+\mathrm{e}^{-F_{n+1}}\right)\left(\mathrm{e}^{F_{n+2}}+\mathrm{e}^{-F_{n+2}}\right)\\&=\mathrm{e}^{F_{n+1}+F_{n+2}}+\mathrm{e}^{F_{n+2}-F_{n+1}}+\mathrm{e}^{-F_{n+2}+F_{n+1}}+\mathrm{e}^{-F_{n+2}-F_{n+1}}\\&=\mathrm{e}^{F_{n+3}}+\mathrm{e}^{F_n}+\mathrm{e}^{-F_n}+\mathrm{e}^{-F_{n+3}}=u_n+u_{n+3}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{\cosh(F_n)\cosh(F_{n+3})}&=4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{u_nu_{n+3}}=4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(u_n+u_{n+4})}{u_nu_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}}\\&=4\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{u_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}}-\frac{(-1)^{n-1}}{u_nu_{n+1}u_{n+2}}\right)\\&=4\left(\frac{(-1)^N}{u_{N+1}u_{N+2}u_{N+3}}-\frac{-1}{u_0u_1u_2}\right)\to\frac{4}{u_0u_1u_2}=\frac{1}{2\cosh^2(1)}\end{aligned}$$

例 58: 设 $f\in C[0,1]$. 如果

$$\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n+3},\quad n=0,1,2,\cdots$$

证明: $f(x)=x^2, x\in[0,1]$

☞ **证明** 首先由 $\dfrac{1}{n+3}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+2}\mathrm{d}x$ 可知

$$\int_0^1 x^n\left[f(x)-x^2\right]\mathrm{d}x\quad ,n=0,1,2,\cdots$$

令 $F(x)=f(x)-x^2, x\in[0,1]$, 则对任意多项式 $P(x)$, 均有

$$\int_0^1 P(x)F(x)\mathrm{d}x=0$$

由 Weirstrass 逼近定理可知对任意 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $Q(x)$, 使得 $|F(x)-Q(x)|<\varepsilon, x\in[0,1]$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x &= \left|\int_0^1 F(x)\left(F(x)-Q(x)\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 F(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^1 F(x)\left(F(x)-Q(x)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |F(x)|\,|F(x)-Q(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon\int_0^1 |F(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

这说明 $\displaystyle\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x=0$, 因此 $F(x)\equiv 0, x\in[0,1]$, 即 $f(x)=x, x\in[0,1]$.

例 59: 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

✎ **解** 令 $I(n)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, 则

$$\begin{aligned}
I(n)-I(n-1) &= \int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cos(2nx)}{\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= 2\int_0^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{e}^{-2n}
\end{aligned}$$

其中最后一步积分需要借助 Fourier 变换与反变换公式. 于是可得

$$\lim_{n\to\infty}I(n)=I(0)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(I(k)-I(k-1)\right)=\frac{\pi}{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\mathrm{e}^{-2k}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{\mathrm{e}^2-1}$$

例 60: [2011 中科院考研数学分析] 设 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}, \{b_k\}_{k\geqslant 0}, \{\xi_k\}_{k\geqslant 0}$ 为非负数列, 而且对于任意 $k \geqslant 0$, 有

$$a_{k+1}^2 \leqslant (a_k + b_k)^2 - \xi_k^2$$

(1) 证明:$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \xi_k^2 \leqslant \left(a_1 + \sum_{i=0}^{k} b_i\right)^2$;

(2) 若数列 $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ 还满足 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < +\infty$, 则 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 = 0$.

☞ **证明** [原创]

(1) 由 $a_{k+1}^2 \leqslant (a_k + b_k)^2 - \xi_k^2$ 以及所有数列非负可知

$$a_{k+1} \leqslant a_k + b_k \leqslant a_{k-1} + b_{k-1} + b_k \leqslant \cdots \leqslant a_1 + b_1 + \cdots + b_k$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{k}\left[(a_i + b_i)^2 - a_{i+1}^2\right] = a_1^2 - a_{k+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 \\ &\leqslant a_1^2 + 2\sum_{i=1}^{k}(a_1 + b_1 + \cdots + b_{i-1})\, b_i + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 = \left(a_1 + \sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 有

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(a_1 + \sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 = a_1^2 + 2a_1\sum_{i=1}^{k} b_i + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2$$

而 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < +\infty$, 即 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < M$. 一方面有

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \leqslant \sqrt{k\sum_{i=1}^{k} b_i^2} < \sqrt{kM}$$

另一方面由 Cauchy 收敛准则知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\displaystyle\sum_{i=N}^{N+p} b_i^2 < \varepsilon$ 对任意 $p \in \mathbb{N}$

成立, 那么当 $k>N$ 时有

$$\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{N} b_i+\sum_{i=N}^{k} b_i\right)^2\leqslant 2\left(\left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^2+\left(\sum_{i=N+1}^{k} b_i\right)^2\right)<2NM+2(k-N)\varepsilon^2$$

由以上不等式, 利用夹逼准则可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i^2=0.$

例 61: 证明数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} n!n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 单调递减并求其极限.

✎ **解** 首先有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n+\frac{1}{2}}}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{s_1+s_2}$$

其中

$$s_1=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(n+1)^{2k}},\ s_2=\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)}\right)\frac{1}{n^{k-1}}$$

显然 s_1,s_2 分别是两个收敛的级数, 注意到 s_1 是负项级数, s_2 是递减的交错级数, 因此两个式子的和都不超过它们的首项, 于是

$$s_1+s_2<-\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{12n^2}<n,\quad n=1,2,\cdots$$

这就证明了数列 $\{a_n\}$ 的单减性, 利用 Stirling 公式可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}=\sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$$

例 62: 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 对某个 $p>0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p=1$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p+1]{(p+1)na_n}=1$$

☞ **证明** 设 $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_ns_n=1$ 意味着 $s_n\to\infty$ 而 $a_n\to 0$, 因此还有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_ns_{n-1}=1$,

于是

$$s_n^{p+1}-s_{n-1}^{p+1}=\left(s_{n-1}+a_n^p\right)^{p+1}-s_{n-1}^{p+1}=s_{n-1}^{p+1}\left[\left(1+\frac{a_n^p}{s_{n-1}}\right)^{p+1}-1\right]$$
$$\sim s_{n-1}^{p+1}\frac{(p+1)\,a_n^p}{s_{n-1}}=s_{n-1}^p\,(p+1)\,a_n^p$$

由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n^{p+1}}{(p+1)\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n^{p+1}-s_{n-1}^{p+1}}{p+1}=\lim_{n\to\infty}\left(a_n s_{n-1}\right)^p=1$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p+1]{(p+1)\,n}a_n=1$$

例 63: 设 f,g 都是 $[0,1]$ 上的实值连续函数, 且满足条件 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 4\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

以及

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 4\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ **证明** 设

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=A,\int_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=B,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a,\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=b$$

下面我们证明

$$AB\geqslant AB^2+Ba^2\geqslant 4a^2b^2$$

首先由 Cauchy 不等式可知 $B\geqslant b^2$, 等号成立当且仅当 $g(x)$ 为常数, 这时 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$ 意味着 $a=0$, 原不等式显然成立, 因此我们假设 $B>b^2$. 利用 Cauchy 不等式可知对任意实数 t 有

$$\int_0^1 (f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 (f(x)+tg(x))\,\mathrm{d}x\right)^2$$

再由 $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 可知 $A+Bt^2\geqslant a^2+2abt+b^2t^2$, 即

$$A\geqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}\{a^2+2abt-(B-b^2)t^2\}$$

由于 $B>b^2$, 右边的多项式在 $t=\dfrac{ab}{B-b^2}$ 取最大值, 于是

$$A\geqslant a^2+2ab\frac{ab}{B-b^2}-\left(B-b^2\right)\frac{a^2b^2}{\left(B-b^2\right)^2}=a^2+\frac{a^2b^2}{B-b^2}$$

这就证明了 $AB\geqslant Ab^2+Ba^2$. 最后再根据 Cauchy 不等式得

$$AB\geqslant Ab^2+Ba^2=\int_0^1(bf(x)+ag(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1(bf(x)+ag(x))\,\mathrm{d}x\right)^2=(2ab)^2=4a^2b^2$$

例 64: 设 f 是 $[a,b]$ 上三阶可导的函数, 且 $f(a)=f(b)$, 证明

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^4}{192}M$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'''(x)|$.

☞ **证明** 记 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 记 $P(x)$ 是在 $(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c))$ 处插值的二次多项式, 则利用 Lagrange 插值公式可得

$$P(x)=f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

于是存在 $\theta(x)\in[a,b]$ 使得

$$f(x)=P(x)+\frac{f'''(\theta(x))}{6}(x-a)(x-b)(x-c)\tag{$*$}$$

且

$$\int_a^c P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{24}(5f(a)+8f(c)-f(b)),\int_c^b P(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{24}(-f(a)+8f(c)+5f(b))$$

而 $f(a)=f(b)$, 因此 $\int_a^c P(x)\mathrm{d}x=\int_c^b P(x)\mathrm{d}x=0$, 因此

$$\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^c-\int_c^b \frac{f'''(\theta(x))}{6}(x-a)(x-b)(x-c)\right|$$
$$\leqslant \frac{M}{6}\int_a^b |(x-a)(x-b)(x-c)|\,\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^4}{192}M$$

$(*)$ 的证明: 如果 $x=a,b,c$ 结论显然成立, 当 $x\neq a,b,c$ 时, 令

$$g(t)=f(t)-P(t)-[f(x)-P(x)]\frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

而 $g(a)=g(b)=g(c)=g(x)=0$, 因此存在 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g'(\xi_3)=0$, 因此存在 η_1,η_2 使得 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$, 进而存在 $\theta(x)\in(a,b)$ 使得 $g'''(\theta(x))=0$, 得证.

例 65: 设 f 是 $[-1,1]$ 上二阶连续可导的实值函数, $f(0)=0$, 证明

$$\int_{-1}^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant 10\left(\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ **证明** 设 $g(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\ (x-1)^2, & x\in[0,1]\end{cases}$, 则

$$g(-1)=g(1)=g'(-1)=g'(1)=0,\ g(0)=1,\ g''(x)=2, x\in[-1,1]\backslash\{0\}$$

且

$$\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 (x+1)^4\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (x-1)^4\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$$

于是根据 $f(0)=0$ 可得

$$\int_0^1 g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x=\left[g(x)f'(x)\right]\Big|_0^1-\int_0^1 g'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=-f'(0)-\left[g'(x)f(x)\right]\Big|_0^1+\int_0^1 g''(x)f(x)\,\mathrm{d}x=-f'(0)+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

同理得

$$\int_{-1}^0 g(x)f''(x)\mathrm{d}x=f'(0)+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

因此由 Cauchy 不等式得

$$\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}g^2(x)\,\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}f''(x)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_{-1}^{1}g(x)\,f''(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\left(2\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

得证.

例 66: 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是非负实数, 证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right)^4\leqslant 2\pi^2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}\sum_{i,j}^{n}\frac{x_ix_j}{(i+j)^3}$$

☞ **证明** 设 $f(x),xf(x)\in L^2([0,+\infty))$, 先证明如下不等式

$$\left(\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^4\leqslant\pi^2\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ **证明** 设 $u=\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x,v=\int_0^{+\infty}x^2f^2(x)\mathrm{d}x$, 则利用 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&\leqslant\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{v+ux^2}}\sqrt{v+ux^2}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{v+ux^2}\mathrm{d}x\left(v\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x+u\int_0^{+\infty}x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{uv}}(uv+uv)=\pi\sqrt{uv}\end{aligned}$$

这就证明了原式.

现在令 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-ix}$, 对任意正数 a, 有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a},\quad\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{2}{a^3}$$

因此

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}x_i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-it}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}$$

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(i+j)t}\mathrm{d}t=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-(i+j)t}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{(i+j)^3}$$

然后利用上述积分不等式得证.

例 67: 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y): x>0, y>0\}$ 上连续, 证明不等式

$$\left(\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^4 \leqslant \frac{\pi^4}{16}\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中假定以上每个积分都是收敛的.

☞ **证明** 令 $\lambda>0, g(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{\lambda+(x^2+y^2)^2}$, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D [1-g(x,y)]\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D \frac{g(x,y)}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \left(\iint\limits_D [1-g(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac12} \\ &\quad \left(\iint\limits_D \frac{g^2(x,y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac12}\end{aligned}$$

计算可知

$$\iint\limits_D [1-g(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{\lambda}$$

现在取

$$\lambda = \frac{\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\iint\limits_D f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^2 f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac14}$$

原不等式得证.

例 68: 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)} = \frac{\mathrm{e}}{2}$$

☞ **证明** 首先注意到当 $n\neq 0$ 时,

$$\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}=\frac{1}{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)n!}=\frac{1}{2n\cdot n!}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot n!}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^2+1}\left(\frac{1}{(n+1)!\,(n+1)}-\frac{1}{n!n}\right)\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!n\,(n+1)}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\,(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}\right)\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]\\&=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

例 69: 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|\ln x-\ln y|\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

✎ **解** 令 $I\left(a\right)=\int_0^{a}\int_0^{a}|\ln x-\ln y|\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $I=\lim\limits_{a\to\infty}I(a)$.

$$\begin{aligned}I(a)&=2\int_0^{a}\int_0^{x}|(\ln x-\ln y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{a}\left(\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x-\mathrm{e}^{-x}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-y}\ln y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{a}\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln x\mathrm{d}x-2\int_0^{a}\mathrm{e}^{-x}\int_0^{x}\mathrm{e}^{-y}\ln y\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

第二个积分分部积分可得

$$I\left(a\right)=2\int_0^{a}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-4\int_0^{a}\mathrm{e}^{-2x}\ln x\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{-a}\int_0^{a}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$$

由于 $\lim\limits_{a\to\infty}\mathrm{e}^{-a}\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x=0$, 于是

$$I=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2x}\ln x\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x-2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln\frac{t}{2}\mathrm{d}x=2\ln 2$$

例 70: 给定 $s_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 用 $s_{n+1}=\sin s_n$ 定义数列 $\{s_n\}$, 证明 $n^2s_n^2-3n+\frac{9}{5}\ln n$ 收敛.

☞ **证明** 显然 $\{s_n\}$ 是单调递减趋于 0 的, 首先有

$$s_{n+1}=s_n\left(1-\frac{s_n^2}{6}+\frac{s_n^4}{120}+O\left(s_n^6\right)\right)$$

令 $u_n=\frac{1}{s_n^2}$, 则

$$u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{3u_n}+\frac{1}{15u_n^2}+O\left(u_n^{-3}\right)\right)\tag{*}$$

由于 $u_n\to\infty$, 由 (*) 可知对充分大的 n 由 $u_{n+1}-u_n>\frac{1}{3}$, 于是 $u_n>\frac{n}{3}-A$ 对某个常数 A 成立. 因此 $u_n=\frac{n}{3}+O(\ln n)$, 于是 $\frac{1}{u_n}=\frac{3}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$. 故

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{5n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}<\infty$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$, 因此

$$u_n=\frac{n}{3}+\frac{\ln n}{5}+K+o\left(1\right)$$

对某个常数 K 成立, 则

$$n^2s_n^2=\frac{n^2}{u_n}=3n-\frac{9\ln n}{5}-9K+o\left(1\right)$$

因此 $n^2s_n^2-3n+\frac{9}{5}\ln n\to -9K$.

例 71: 设 $b>a>0$, $f:[0,1]\to[-a,b]$ 连续, 且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$, 证明

$$0\leqslant\frac{\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^2$$

☞ **证明** [原创] 左边部分比较简单, 利用 $(f(x)+a)(b-f(x)) \geqslant 0$, 两边在 $[0,1]$ 上积分得

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^1 (f(x)+a)(b-f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= ab - \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

要证明右边部分, 首先利用 Cauchy 不等式得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x} = \sqrt{ab}$$

下面只需要证明

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{(a+b)^2}{4(b-a)}, \text{即 } (a+b)^4 - 16ab(b-a)^2 \geqslant 0$$

令 $t=\dfrac{b}{a}>1$, 则 $(t+1)^4-16t(t-1)^2=\left(t^2-6t+1\right)^2 \geqslant 0$, 证毕.

例 72: 定义数列 $a_{m,n}$

$$\frac{1}{1-u-v+2uv} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}u^m v^n$$

证明 $(-1)^j a_{2j,2j+2} = \dfrac{1}{j+1}\dbinom{2j}{j}$.

☞ **证明** 首先有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-u-v+2uv} &= \frac{1}{(1-u)(1-v)}\frac{1}{1+\frac{uv}{(1-u)(1-v)}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k u^k v^k}{(1-u)^{k+1}(1-v)^{k+2}} \\
&= \sum_{i,j,k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+i}{k}\binom{k+j}{k}u^{k+i}v^{k+j} = \sum_{m,n}^{\infty}u^m v^n\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

因此得到 $a_{m,n}=\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k\dbinom{m}{k}\dbinom{n}{k}$, 注意到这个卷积表示展开式 $(1+x)^m(1-x)^n$ 中 x^m 的系数. 现在 $m=2j, n=2j+2$, 母函数为 $(1-x^2)^{2j}(1-x)^2$, 因此 x^{2j} 的系数为

$$a_{2j,2j+2} = (-1)^j\binom{2j}{j} + (-1)^{j-2}\binom{2j}{j-1} = \frac{(-1)^j}{j+1}\binom{2j}{j}$$

例 73: 设 $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 表示正弦积分函数, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}$$

✎ **解** [原创] 首先利用分部积分得

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}\,(n\pi)&=\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\,(\ln x)=-n\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\\&=-n\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\,(x\ln x-x)=n\left[(-1)^{n-1}(\pi\ln\pi-\pi)-n\int_0^{\pi}\sin nx\,(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

于是我们可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}(n\pi)}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(\pi\ln\pi-\pi)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, 把后一部分式子再分部积分得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,(x\ln x-x)\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\cos nx\mathrm{d}x\end{aligned}$$

现在考虑函数 $f\,(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x, & x\in(0,\pi]\\ 0, & x=0\end{cases}$, 作偶对称以后再作 2π 周期延拓, 则 $f(x)$ 的 Fourier 余弦级数为

$$\widetilde{f}\,(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\,(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\ln x\right)\cos nx\mathrm{d}x$, 根据 Fourier 级数收敛定理可知

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=f(0)=0$$

而 $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x = \frac{11}{18}\pi^2 - \frac{1}{3}\pi^2\ln\pi$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n = -\frac{\pi}{4}a_0 = \frac{\pi^3}{12}\ln\pi - \frac{11}{72}\pi^3$$

于是最后得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n^3} = \frac{\pi^2}{12}(\pi\ln\pi - \pi) - \left(\frac{\pi^3}{12}\ln\pi - \frac{11}{72}\pi^3\right) = \frac{5\pi^3}{72}$$

同样道理我们还能得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n^3} = -\frac{\pi^2}{6}(\pi\ln\pi - \pi) - \left(\frac{2\pi^3}{9} - \frac{\pi^3}{6}\ln\pi\right) = -\frac{\pi^3}{18}$$

只不过这时需要利用 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 和 $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = f(\pi)$ 即可.

例 74: 设 $\mathrm{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 表示正弦积分函数, 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n}\right)^2$$

✎ **解** 同上, 先分部积分得

$$\mathrm{Si}\,(n\pi) = -n\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\right)^2$$

考虑函数 $f(x) = \ln x, x \in (0,\pi)$, 作偶函数延拓和 π 周期延拓得到的余弦级数为

$$\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

其中 $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x, a_0 = 2\ln\pi - 2$, 由 Parseval 定理得

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln^2 x\mathrm{d}x = 4 - 4\ln\pi + 2\ln^2\pi$$

因此我们最后得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\ln x\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^2}{2}$$

✂ **注:** 利用上述方法我们还可以得到一些副产品

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n}=\frac{\pi}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n^5}=\frac{269}{43200}\pi^5,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,\mathrm{Si}\,(n\pi)}{n^5}=\frac{4}{675}\pi^5$$

例 75: 定义数列 $\{X_n\}$:$X_0=0, X_1=1, X_2=0, X_3=1$, 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$X_{n+3}=\frac{\left(n^2+n+1\right)(n+1)}{n}X_{n+2}+\left(n^2+n+1\right)X_{n+1}-\frac{n+1}{n}X_n$$

证明对任意 $n\geqslant 0$, X_n 是完全平方数.

☞ **证明** 定义数列 $\{c_n\}$:$c_0=0, c_1=1, c_{n+2}=nc_{n+1}+c_n, n\geqslant 0$, 则 $c_{n+3}=(n+1)c_{n+2}+c_{n+1}$, 且 $c_n=c_{n+2}-nc_{n+1}$, 平方得到

$$c_{n+3}^2=(n+1)^2c_{n+2}^2+c_{n+1}^2+2(n+1)c_{n+2}c_{n+1}$$

$$c_n^2=c_{n+2}^2+n^2c_{n+1}^2-2nc_{n+2}c_{n+1}$$

消去因子 $c_{n+2}c_{n+1}$ 得到

$$c_{n+3}^2=\frac{\left(n^2+n+1\right)(n+1)}{n}c_{n+2}^2+\left(n^2+n+1\right)c_{n+1}^2-\frac{n+1}{n}c_n^2$$

而 $c_2=0, c_3=1$, 因此 c_n^2 和 X_n 满足相同的递推关系和初值条件, 于是 $X_n=c_n^2$.

例 76: 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 并且在 a 点 n 阶可导. 对任意 $x\in(a,b)$, 由积分中值定理, 存在 $c_x\in(a,x)$ 使得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(c_x)(x-a)$$

如果 $f^{(k)}(a)=0, k=1,\cdots,n-1$, 但 $f^{(n)}(a)\neq 0$, 证明

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

证明 这个题目解答见 48 题.

例 77: 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调下降, 求证

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$$

解 显然 $xf(x)\downarrow 0$, 否则原积分一定发散. 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 当 A 充分大时,

$$\varepsilon>\int_{\sqrt{A}}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{A}}^{A} xf(x)\frac{\mathrm{d}x}{x}\geqslant Af(A)\int_{\sqrt{A}}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}Af(A)\ln A$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0$.

例 78: 将方程 $u^2-\dfrac{u^3}{3}=k\left(0<k<\dfrac{4}{3}\right)$ 的两个正根记为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$. 求

$$\lim_{k\to\frac{4}{3}}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{u^2-\frac{u^3}{3}-k}\,\mathrm{d}u}{4-3k}$$

解 [原创] 记原方程的三个根为 α,β,γ, 注意到方程 $u^2-\dfrac{u^3}{3}=\dfrac{4}{3}$ 的三个根分别为 $-1,2,2$, 因此当 $k\to\dfrac{4}{3}$ 时等价于 $\alpha,\beta\to 2,\gamma\to -1$. 利用三次方程 Vieta 定理得

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0,\alpha\beta\gamma=-3k$$

于是可得

$$\alpha+\beta=3-\gamma,\alpha\beta=\frac{-3k}{\gamma}=\gamma^2-3\gamma$$

故 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=(3-\gamma)^2-4\left(\gamma^2-3\gamma\right)=9+6\gamma-3\gamma^2=3(\gamma+1)(3-\gamma)$. 因

此

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\frac{4}{3}}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{u^2-\frac{u^3}{3}-k}\mathrm{d}u}{4-3k}&=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{(u-\gamma)(u-\alpha)(\beta-u)}\mathrm{d}u}{4-3\gamma^2+\gamma^3}\\
&=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\int_\alpha^\beta\sqrt{3(u-\alpha)(\beta-u)}\mathrm{d}u}{4-3\gamma^2+\gamma^3}=\lim_{\gamma\to-1}\frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{8}(\beta-\alpha)^2}{(\gamma+1)(\gamma-2)^2}\\
&=\frac{\sqrt{3}\pi}{8}\lim_{\gamma\to-1}\frac{3(\gamma+1)(3-\gamma)}{(\gamma+1)(\gamma-2)^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi
\end{aligned}
$$

例 79: 设函数 $f:[1,+\infty)\to(\mathrm{e},+\infty)$ 是单调增函数, 且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=+\infty$.

(1) 证明 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)}=\infty$.

(2) 给出一个满足上述条件的函数 f, 但是积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))}$ 收敛.

☞ **证明**

(1) 反证法, 假定 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)}<+\infty$, 利用变量代换 $x=\mathrm{e}^t$ 可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\ln f(\mathrm{e}^t)}<+\infty$, 根据函数 f 的单调性可知 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln f(\mathrm{e}^x)}=0$. 那么当 x 充分大时有 $\dfrac{x}{\ln f(\mathrm{e}^x)}<\dfrac{1}{2}$, 因此 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(\mathrm{e}^x)}<\mathrm{e}^{-x}$, 从而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{f(\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t<+\infty,$$

矛盾.

(2) 设 $a_n=\exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\right), n=0,1,\cdots$, 当 $a_{n-1}\leqslant x<a_n$ 时, 令 $f(x)=a_n$, 则

$$\int_{\mathrm{e}^\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n}=+\infty$$

而另一方面,

$$\int_{\mathrm{e}^\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln f(x)\ln(\ln f(x))}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n}\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\mathrm{e}^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{n-1}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\mathrm{e}^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^n}<+\infty.$$

例 80: 设函数 f 是 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x=0$$

☞ 证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 单增, 分部积分得

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^n x\mathrm{d}F(x)=F(n)-\frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$, 其次利用 F 的单调性可得

$$\frac{F(0)+\cdots+F(n-1)}{n}\leqslant\frac{1}{n}\int_0^n F(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{F(1)+\cdots+F(n)}{n}.$$

而根据 Stolz 定理可知, 上式左右两边均等于 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)$, 因此原极限为零.

例 81: 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续且积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 一致有界. 即存在 $M>0$ 使得

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant M,\quad \forall x\in[a,+\infty)$$

证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

☞ 证明 由于 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 故存在 $\delta>0$, 如果 $|t-s|<\delta$, 则 $|f(s)-f(t)|<1$. 现在假定 f 无界, 则存在数列 $\{a_n\}$ 使得 $a_{n+1}>a_n+\delta$ 且 $|f(a_n)|\geqslant n$. 根据假设有

$$\left|\int_a^{a_n}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n}f(t)\,\mathrm{d}t\right|-\left|\int_a^{a_n-\frac{\delta}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n}f(t)\,\mathrm{d}t\right|-M$$

进一步有 $|f(t)-f(a_n)|<1$ 对 $t\in\left[a_n-\frac{\delta}{2},a_n\right]$ 都成立. 因此

$$\left|\int_{a_n-\frac{\delta}{2}}^{a_n}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant(|f(a_n)|-1)\frac{\delta}{2}\geqslant(n-1)\frac{\delta}{2},\quad\left|\int_a^{a_n}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\geqslant(n-1)\frac{\delta}{2}-M$$

矛盾.

例 82: 如果 $\int_a^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$ 也收敛.

☞ 证明 首先由分部积分得

$$\int_a^x f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\,f'(x)-f(a)\,f'(a)-\int_a^x\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t$$

根据不等式 $(f(x))^2+\left(f''(x)\right)^2\geqslant 2\left|f(x)\,f''(x)\right|$ 可知积分 $\int_a^x f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛. 如果当

$x \to +\infty$ 时积分 $\int_a^x \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t \to +\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) f'(x) = +\infty$, 而

$$f^2(x) - f^2(a) = \frac{1}{2}\int_a^x f(t) f'(t) \mathrm{d}t$$

这样就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$, 矛盾, 因此 $\int_a^{+\infty} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$ 收敛.

例 83: 设 f, g 都是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数, 且 $m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1, m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2$, $x \in [a,b]$, 证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \int_a^b g(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(M_1-m_1)(M_2-m_2)}{4}$$

☞ **证明** 利用变量替换 $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ 知只需要考虑 $a=0, b=1$ 的情形即可. 令 $F = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$, $G = \int_0^1 g(x) \mathrm{d}x$, 以及

$$D(f,g) = \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x - FG$$

由 Cauchy 不等式得

$$D(f,f) = \int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 0.$$

另一方面,

$$D(f,f) = (M_1 - F)(F - m_1) - \int_0^1 (M_1 - f(x))(f(x) - m_1) \mathrm{d}x,$$

这就意味着 $D(f,f) \leqslant (M_1 - F)(F - m_1)$. 显然 $D(f,g) = \int_0^1 (f(x) - F)(g(x) - G) \mathrm{d}x$, 由 Cauchy 不等式得

$$[D(f,g)]^2 \leqslant \int_0^1 (f(x) - F)^2 \mathrm{d}x \int_0^1 (g(x) - G)^2 \mathrm{d}x = D(f,f) D(g,g).$$

因此

$$[D(f,g)]^2 \leqslant (M_1 - F)(F - m_1)(M_2 - G)(G - m_2) \leqslant \frac{(M_1-m_1)^2}{4} \cdot \frac{(M_2-m_2)^2}{4}.$$

例 84: 设

$$\mathcal{A}=\left\{f\in\mathcal{R}([0,1]):\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=2\right\}.$$

求 $\min\limits_{f\in\mathcal{A}}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✎ **解** 如果 $f\in\mathcal{A}$, 则对任意实数 t 由 Cauchy 不等式得

$$(2+3t)^2=\left(\int_0^1 f(x)(x+t)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1(x+t)^2\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}$ 对任意实数 t 均成立, 注意到 $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}=12$, $t=0$ 时取等, 此时 $f(x)=6x$.

例 85: 设 f 在 $[0,1]$ 上非负递减, 证明对任意非负实数 a,b 有

$$\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 x^{2b}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

☞ **证明** 借用 Lebesgue-Stieltjes 积分, 首先分部积分得

$$\begin{aligned}&\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\=&\left(f(1)-\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)\right)^2\\=&f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)+\left(\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)\right)^2\\\leqslant&f^2(1)-2f(1)\int_0^1 x^{a+b+1}\mathrm{d}f(x)+\int_0^1 x^{2a+1}\mathrm{d}f(x)\int_0^1 x^{2b+1}\mathrm{d}f(x)\end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 x^k\mathrm{d}f(x)=f(1)-k\int_0^1 x^{k-1}f(x)\,\mathrm{d}x$, 可得

$$\begin{aligned}&\left((a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\\leqslant&(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x\,(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,\mathrm{d}x\\&+f(1)\left(2(a+b+1)\int_0^1 x^{a+b}f(x)\,\mathrm{d}x-(2a+1)\int_0^1 x^{2a}f(x)\,\mathrm{d}x-(2b+1)\int_0^1 x^{2b}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

要证明 $\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)\mathrm{d}x \leqslant 0$, 分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(x)\left(2(a+b+1)x^{a+b}-(2a+1)x^{2a}-(2b+1)x^{2b}\right)\mathrm{d}x\\=&-\int_0^1\left(2x^{a+b+1}-x^{2a+1}-x^{2b+1}\right)\mathrm{d}f(x)\\=&\int_0^1\left(x^a-x^b\right)^2 x\mathrm{d}f(x)\leqslant 0\end{aligned}$$

这里因为 f 是递减的.

例 86: 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是三个非负数列满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

☞ **证明** [向禹] 首先由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+c_n)<\infty$. 再由 $a_{n+1}\leqslant(1+c_n)a_n-b_n\Phi(a_n)$ 可得

$$\frac{a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}(1+c_k)}\leqslant\frac{a_n}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+c_k)}-\frac{b_n\Phi(a_n)}{\prod_{k=1}^{n}(1+c_k)}$$

这说明数列 $\left\{a_n/\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+c_k)\right\}$ 单调递减并且有下界 0, 因此数列 $\left\{a_n/\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+c_k)\right\}$ 收敛, 也就是数列 $\{a_n\}$ 收敛, 自然有界. 设 $a_n<K$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

如果 $a>0$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $a_n>\frac{a}{2}>0$. 再根据 $a_{n+1}\leqslant(1+c_n)a_n-b_n\Phi(a_n)$ 可得 $b_n\leqslant\frac{(1+c_n)a_n-a_{n+1}}{\Phi(a_n)}$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$ 意味着 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+c_n)a_n-a_{n+1}}{\Phi(a_n)}=\infty$. 由 Cauchy 收敛原理知对任意实数 $M>0$ 以及正整数 $k>N$, 存在 $p\in\mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n=k}^{k+p}\frac{(1+c_n)a_n-a_{n+1}}{\Phi(a_n)}>M.$$

而此时 $\Phi(a_n)>\Phi\left(\frac{a}{2}\right)=A>0$, 因此

$$M<\sum_{n=k}^{k+p}\frac{(1+c_n)a_n-a_{n+1}}{\Phi(a_n)}<\frac{1}{A}\sum_{n=k}^{k+p}\left[(1+c_n)a_n-a_{n+1}\right]<\frac{1}{A}\left(a_k-a_{k+p}\right)+K\sum_{n=k}^{k+p}c_n$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ 矛盾, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

例 87: 求数列

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,\mathrm{d}x,\ b_{n+1} = \int_0^1 \mathrm{mid}(x, a_n, c_n)\,\mathrm{d}x,\ c_{n+1} = \int_0^1 \max(x, a_n, b_n)\,\mathrm{d}x$$

的极限.

✎ **解** 显然 $\min(x, b_n, c_n) \leqslant x \leqslant \max(x, a_n, b_n)$, 所以如果 $\min(x, a_n, c_n) = x$, 我们有

$$\min(x, b_n, c_n) \leqslant \mathrm{mid}(x, a_n, c_n) \leqslant (x, a_n, b_n) \tag{$*$}$$

如果 $\mathrm{mid}(x, a_n, c_n)$, 则要么 $x \leqslant a_n$ 要么 $c_n \leqslant a_n$, 所以 $a_n \leqslant \max(x, a_n, c_n) = c_n$. 则 (*) 式恒成立, 积分可知 $a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant c_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$. 现在有

$$a_{n+1} = \int_0^1 \min(x, b_n, c_n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

类似地可得 $c_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= \int_0^1 \mathrm{mid}(x, a_{n+1}, c_{n+1})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \max(x, a_{n+1})\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \min(x, c_{n+1})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\mathrm{d}x = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

同理还有 $b_{n=2} \geqslant \dfrac{3}{8}$. 由于 $\dfrac{3}{8} \leqslant b_{n+2} \leqslant c_{n+2}, a_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 \min(x, b_{n+2}, c_{n+2})\,\mathrm{d}x > 0$, 类似有 $c_{n+2} < 1$.

现在假定 n 充分大使得 $0 < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < 1$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_0^{b_n} x\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 b_n\mathrm{d}x = \frac{2b_n - b_n^2}{2} \\
b_{n+1} &= \int_0^{a_n} a_n\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{c_n} x\mathrm{d}x + \int_{c_n}^1 c_n\mathrm{d}x = \frac{a_n^2 - c_n^2 - 2c_n}{2} \\
c_{n+1} &= \int_0^{b_n} b_n\mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 x\mathrm{d}x = \frac{b_n^2 + 1}{2}
\end{aligned}$$

因此

$$b_{n+2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2b_n-b_n^2}{2}\right)^2-\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2+2\left(\frac{b_n+1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{(2b_n-1)\left(-2b_n^2+2b_n+1\right)}{8}=b_n-\frac{(2b_n-1)^2+5(2b_n-1)}{16}$$

由于 $0<2b_n^2+2b_n+1, 0<b_n<1$, 这要么 $\frac{1}{2}\leqslant b_{n+2}\leqslant b_n$ 要么 $\frac{1}{2}>b_{n+2}>b_n$. 因此可得

$$\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\lim_{n\to\infty}b_{2n+1}=\frac{1}{2}$$

同时

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-b_n^2}{2}=\frac{3}{8}, \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}c_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2+1}{2}=\frac{5}{8}$$

例 88: 证明：对任意 $\alpha,\beta,0<\alpha<\beta<\pi$,

$$\int_0^\alpha\sqrt{\frac{\cos\theta-\cos\beta}{\cos\theta-\cos\alpha}}\mathrm{d}\theta+\int_\beta^\pi\sqrt{\frac{\cos\beta-\cos\theta}{\cos\alpha-\cos\theta}}\mathrm{d}\theta=\pi$$

☞ **证明** 令 $x=\cos\theta, a=\cos\alpha, b=\cos\beta, -1<b<a<1$, 待证式等价于

$$\int_{-1}^b\sqrt{\frac{b-x}{a-x}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\int_a^1\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

注意到如果 $b=a$ 的话上式显然成立, 下面证明上式左边是关于 b 的导数为零即可, 即

$$\int_{-1}^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)\left(1-x^2\right)}}-\int_a^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x-b)\left(1-x^2\right)}}=0 \qquad (*)$$

利用变换 $y=\frac{\lambda x+1}{x+\lambda}$, 取 λ 使得 $(a+b)\lambda^2+2(ab+1)\lambda+(a+b)=0, |\lambda|>1$. 由于此二次式的判别式为 $(1-a^2)(1-b^2)>0$, λ 为实数. 取 $k=\frac{\lambda a+1}{a+\lambda}=-\frac{\lambda b+1}{b+\lambda}$, 则 $0<k<1$ 且区间 $[-1,b],[a,1]$ 分别包含在 $[-1,k],[k,1]$ 内.$(*)$ 式的第一个积分变成

$$\left(\frac{\lambda^2-1}{(\lambda+a)(\lambda+b)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{-k}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(y^2-k^2\right)\left(1-y^2\right)}}$$

第二个积分变换后形式也一样, 只是积分区间是 $[k,1]$, 二者的差为零, 这就说明左边与 b 无关, 等式得证.

例 89: 求和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}.$$

✎ **解** 考虑三重对数函数

$$\mathrm{Li}_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3},\quad |x|\leqslant 1.$$

则三重对数满足 Spence 公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_3\left(\frac{x}{x-1}\right)+\mathrm{Li}_3(x)+\mathrm{Li}_3(1-x)-\mathrm{Li}_3(1)\\=&\frac{\pi^2}{6}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln^2(1-x)(\ln(1-x)-3\ln x).\end{aligned}$$

注意到

$$\mathrm{Li}_3(x)=\frac{x}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(1-u)}{1-x+xu}\mathrm{d}u.$$

把 Spence 公式中左边的四个式子都用上述积分代替.

令 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, 我们注意到此时有 $(x-1)^2=x$ 以及 $\dfrac{x}{x-1}=x-1$, 再令 $v=1-x$, 由 Spence 公式得到

$$\mathrm{Li}_3(x)+\mathrm{Li}_3(v)+\mathrm{Li}_3(-v)=\mathrm{Li}_3(1)+\frac{\pi^2}{6}\ln v-\frac{5}{6}\ln^3 v.$$

由三重对数的定义, 我们得到

$$\mathrm{Li}_3(v)+\mathrm{Li}_3(-v)=\frac{2}{2^3}\mathrm{Li}_3\left(v^2\right)=\frac{1}{4}\mathrm{Li}_3(x).$$

注意到 $v=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\mathrm{Li}_3(1)=\zeta(3)$, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}=\frac{2}{15}\left\{6\zeta(3)+\pi^2\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}-5\ln^3\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}.$$

例 90:

(1) 设 $\{x_n\}$ 是严格递减的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}(x_n - x_{n+1})$$

发散.

(2) 设 $\{y_n\}$ 是单调递增的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_{n+1}}(y_{n+1} - y_n)$$

发散

☞ **证明** 首先我们假定 $x_{n+1}/x_n \leqslant 1/2$ 对无穷多个 n 成立, 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n}(x_n - x_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2x_{n+1}}(x_n - x_{n+1})$$

这显然发散.

否则假定 $x_{n+1}/x_n > 1/2$ 对充分大的 n 成立, 则

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x_n}(x_n - x_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2x_{n+1}}(x_n - x_{n+1})$$

注意到 $1/x$ 是单调递减函数, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_{n+1}}(x_n - x_{n+1}) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \geqslant \int_0^{x_1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = +\infty$$

第二个问题证明同理, 或者令 $y_n = 1/x_n$ 即可.

例 91: 计算积分

$$\int_0^3 \frac{\arctan(x)}{(x+1)(x+2)} \mathrm{d}x$$

✎ **解** 这题非常有意思, 作一种技巧换元 $x = \dfrac{3-t}{1+3t}$, 则

$$\int_0^3 \frac{\arctan(x)}{(x+1)(x+2)} \mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{\arctan\left(\frac{3-t}{1+3t}\right)}{\left(\frac{3-t}{1+3t}+1\right)\left(\frac{3-t}{1+3t}+2\right)} \frac{10}{(1+3t)^2} \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^3 \frac{\arctan(3) - \arctan(t)}{(t+1)(t+2)} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\arctan(3)}{2} \int_0^3 \frac{1}{(t+1)(t+2)} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\arctan(3)}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right)
\end{aligned}$$

例 92: 证明

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{16}$$

☞ **证明** 记 $H_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}, k \geqslant 1$. 对任意 $x \in (0,1)$ 有

$$\begin{aligned}
\arctan(x) \ln\left(1+x^2\right) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\ln(1-\mathrm{i}x) - \ln(1+\mathrm{i}x)\right)\left(\ln(1-\mathrm{i}x) + \ln(1+\mathrm{i}x)\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\ln^2(1-\mathrm{i}x) - \ln^2(1+\mathrm{i}x)\right) \\
&= -\mathrm{Im}\left(\ln^2(1-\mathrm{i}x)\right) = -2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k(\mathrm{i}x)^{k+1}}{k+1}\right).
\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\begin{aligned}
-\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} \Rightarrow -\frac{\ln(1-t)}{1-t} &= \sum_{k=1}^{\infty} H_k t^k \\
\Rightarrow \ln^2(1-t) &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k t^{k+1}}{k+1}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arctan(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x} \mathrm{d}x &= -2\mathrm{Im}\left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k \mathrm{i}^{k+1} x^k}{k+1} \mathrm{d}x\right) \\
&= -2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k \mathrm{i}^{k+1}}{k+1} \int_0^1 x^k \mathrm{d}x\right) \\
&= -2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k \mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right).
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \ln(1-x)}{2k+1} \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_0^1 x^{2k}\ln(1-x)\,\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}\left(x^{2k+1}-1\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\int_0^1 \frac{x^{2k+1}-1}{x-1}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k H_{2k+1}}{(2k+1)^2}=-\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{k+1}\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\arctan(x)}{x}\ln\left(\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\right)\mathrm{d}x&=-2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right)+2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{k+1}\mathrm{i}^k}{(k+1)^2}\right)\\
&=2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^k}{(k+1)^3}\right)=2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{k-1}}{k^3}\right)\\
&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{16}.
\end{aligned}
$$

例 93: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证明: 存在数列 a_n, b_n, 使得 $u_n=a_nb_n$, 且

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列有界;

(b) 当 $n\to\infty$ 时, b_n 单调递减趋于零.

☞ **证明** 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则可知存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $m>n>N_1$, 有 $\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<1$.

那么归纳可知对 $p\geqslant 2$ 都存在 $N_p\geqslant N_{p-1}+1$, 使得对任意 $m>n\geqslant N_p$, 有 $\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\frac{1}{p^3}$. 那么这样就定义了一个单调递增趋于无穷大的数列 $\{p_n\}$. 令

$$
b_k=\begin{cases}1, & 1\leqslant k\leqslant N_1\\ \frac{1}{n}, & p_n<k\leqslant p_{n+1}\end{cases}\tag{1}
$$

以及

$$
a_n=\frac{u_n}{b_n}, n\geqslant 1\tag{2}
$$

显然 $u_n = a_n b_n$, 且 b_n 是满足条件 (1) 的, 下面只需证明 a_n 满足条件 (2), 也就是证明对任意 $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ 有界. 当 $1 \leqslant N \leqslant N_1$ 时, $a_n = u_n$, 于是存在常数 $L > 0$, 使得对这样的 N 有

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} u_n < L.$$

如果 $N > N_1$, 存在 n 使得 $p_n < N < P_{n+1}$, 由定义 (1) 和 (2) 可得 (其中 $N_0 = 1$)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{N} a_i\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=N_k}^{N_{k+1}} a_i + \sum_{i=N_n}^{N} a_i\right| \\
&< \left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=N_k}^{N_{k+1}} a_i\right| + \left|\sum_{i=N_n}^{N} a_i\right| < L + \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{1}{k^3} + n\frac{1}{n^3} \\
&= L + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < L + 2.
\end{aligned}$$

证毕.

例 94: 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是单增无穷正数列, 且存在常数 K, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^2 < K a_n^2 (n \geqslant 1)$. 求证: 存在常数 K', 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k < K' a_n$.

☞ **证明** [原创] 首先由条件得

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=1}^{m-1} a_k^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n} a_k^2 &= \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, a_k^2} \\
&< \boxed{\sum_{m=2}^{n} K a_m^2} = K\left(\sum_{m=2}^{n-1} a_m^2 + a_n^2\right) \\
&< K\left(K a_n^2 + a_n^2\right) = \left(K^2 + K\right) a_n^2 = K_1 a_n^2 \ \ (K_1 = K^2 + K).
\end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=1}^{m-1} (m-k)\, a_k^2} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n} (m-k)\, a_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} a_k^2 < \boxed{\sum_{k=2}^{n} K_1 a_k^2}
\end{aligned}$$

$$= K_1\left(\sum_{m=2}^{n-1} a_k^2 + a_n^2\right) < K_2 a_n^2 \ \ (K_2 = K_1^2 + K_1)$$

由 Cauchy 不等式又有

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(n-k)(n-k+1)}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} a_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2.$$

而

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(n-k)(n-k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2\left(1-\frac{1}{n}\right) < 2.$$

那么取 $K' = \sqrt{2K_2}$ 就有

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 < \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1)\, a_k^2 < 2K_2 a_n^2 = \left(K' a_n\right)^2$$

例 95: 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{\sqrt{e}+1}{e-1}\right).$$

✎ **解** 对固定的 k, 我们有

$$\begin{aligned}
\cos^n \sqrt{\frac{k}{n}} &= \left(1 - \frac{k}{2n} + \frac{k^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \\
&= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{2n} + \frac{k^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(-\frac{k}{2n} - \frac{k^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= e^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{k^2}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-\frac{k}{2}}\left(1 - \frac{k^2}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}-1} = \frac{\sqrt{e}+1}{e-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\frac{k}{2}} = \frac{e+\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}-1\right)^3}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{\sqrt{e}+1}{e-1} - \frac{1}{12n} \frac{e+\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}-1\right)^3} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{\sqrt{e}+1}{e-1}\right) = -\frac{e+\sqrt{e}}{12\left(\sqrt{e}-1\right)^3}$$

例 96: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x,$$

并且当且仅当 $f(x)=cx$ 时等号成立, 其中 c 是常数.

☞ 证明

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x \mathrm{d}t \int_0^x \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^x \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\left(1-x^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

从柯西不等式的取等条件来看, 等号成立当且仅当 $f'(x)\equiv c$ 恒成立, 又 $f(0)=0$, 所以 $f(x)=cx$.

例 97: 求和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!}$.

✎ 解

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\left((n-1)!\right)^2}{(2n)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2n}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2n} B(n,n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2n}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-4x(1-x))}{x(1-x)}\mathrm{d}x = -2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= -2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{x}\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{1-x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = -\mathrm{Li}_2(1) = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{1-x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{2-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi^2}{12}$$

于是最后得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n ((n-1)!)^2}{(2n)!} = \frac{\pi^2}{2}$.

例 98: 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0) = f(1) = 0$ 的连续可微函数, 求证不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x,$$

并且等号成立当且仅当 $f(x) = Ax(1-x)$, 这里 A 是常数.

☞ **证明**

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(1-2x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((1-2x)\,f(x)\,|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 (1-2x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (1-2x)^2\,\mathrm{d}x \int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $f'(x) = A(1-2x)$, 即 $f(x) = Ax(1-x)$.

例 99: 设 f 是一个 n 次多项式, 且满足条件 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0, k = 1, 2, \cdots, n$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

☞ **证明** 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0$. 对任意 $t > -1$, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^t f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(a_0 x^t + a_1 x^{t+1} + \cdots + a_n x^{t+n}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a_0}{t+1} + \frac{a_1}{t+2} + \cdots + \frac{a_n}{t+n+1} = \frac{p(t)}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n+1)},
\end{aligned}$$

其中 $p(t)$ 是 t 的 n 次多项式. 根据题意有 $p(1) = p(2) = \cdots = p(n) = 0$, 因此 $p(t) =$

$A(t-1)(t-2)\cdots(t-n)$. 而

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{p(0)}{(n+1)!}=\frac{A(-1)^n n!}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n A}{n+1},$$

所以 $A=(-1)^n(n+1)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 另一方面, 在等式

$$\frac{a_0}{t+1}+\frac{a_1}{t+2}+\cdots+\frac{a_n}{t+n+1}=\frac{p(t)}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n+1)}$$

两边乘以 $t+1$, 再令 $t=-1$ 可得

$$a_0=\frac{p(-1)}{n!}=\frac{(-1)^n(n+1)!A}{n!}=(-1)^n(n+1)A=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\right)f(x)\,\mathrm{d}x=a_0\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

例 100: Pell-Lucas 数 Q_n 满足 $Q_0=2, Q_1=2$, 且 $Q_n=2Q_{n-1}+Q_{n-2}, n\geqslant 2$. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{Q_n}\right)\arctan\left(\frac{2}{Q_{n+1}}\right)=\frac{\pi^2}{32}.$$

☞ **证明** 利用特征根方法, 我们很容易得到 $Q_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n$, 因此有

$$\begin{aligned}
\arctan\frac{2}{Q_{2n}}&=\arctan\frac{2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}}\\
&=\arctan\frac{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}}\\
&=\frac{\pi}{2}-\left(\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n-1}+\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right)\\
&=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n-1}-\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\\
\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n+1}}\right)&=\arctan\frac{2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \arctan \frac{1+\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}} \\
&= \frac{\pi}{2}-\left(\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n+1}-\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right) \\
&= \arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}+\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1} \\
&= 2\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}
\end{aligned}
$$

记 $a=\sqrt{2}-1$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{Q_n}\right)\arctan\left(\frac{2}{Q_{n+1}}\right) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n}}\right)\left[\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n-1}}\right)+\arctan\left(\frac{2}{Q_{2n+1}}\right)\right] \\
=&2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan a^{2n-1}-\arctan a^{2n+1}\right)\left(\arctan a^{2n-1}+\arctan a^{2n+1}\right) \\
=&2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan^2 a^{2n-1}-\arctan^2 a^{2n+1}\right) \\
=&2\arctan^2\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\pi^2}{32}
\end{aligned}
$$

例 101: 对一切单调递增的正实数序列 $x_1,x_2,\cdots$,, 求出下式的最小上界:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{\sqrt{(1+x_{n+1})(1+x_n)}}.
$$

☞ **证明** 设 $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\cdots<\frac{\pi}{2}$, 令 $x_n=\tan^2\theta_n, n\geqslant 1$. 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{\sqrt{(1+x_{n+1})(1+x_n)}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\theta_{n+1}-\tan\theta_n}{\sec\theta_{n+1}\sec\theta_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\theta_{n+1}\cos\theta_n-\sin\theta_n\cos\theta_{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)
\end{aligned}
$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\pi/2]$ 上是凹函数, 利用 Jensen 不等式, 可得部分和满足

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\leqslant N\sin\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\right)=N\sin\frac{\theta_{n+1}-\theta_1}{2N}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

等号成立当且仅当 $\theta_{N+1}-\theta_N=\theta_N-\theta_{N-1}=\cdots=\theta_2-\theta_1$ 且 $N\to\infty$. 因此级数的最小上界即为 $\dfrac{\pi}{2}$.

例 102: 计算积分

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1+y^2\right)}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5\pi^2}{24}-\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2.$$

✎ **解** 记 $I(a)=\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{\ln\left(1+ax^2\right)-\ln\left(1+ay^2\right)}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $I(0)=0$, 且

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{\left(1+ax^2\right)\left(1+ay^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{(1+ax^2)(1+ay^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\frac{x}{1+ax^2}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+ay^2}\\&=\frac{\arctan\left(\sqrt{a}\right)\ln(1+a)}{a\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I&=I(1)=\int_0^1\frac{\arctan\left(\sqrt{a}\right)\ln(1+a)}{a\sqrt{a}}\mathrm{d}a\\&=2\int_0^1\frac{\arctan t\ln\left(1+t^2\right)}{t^2}\mathrm{d}t=-2\int_0^1\arctan t\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)\\&=-\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^1\left(\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{t\left(1+t^2\right)}+\frac{\arctan t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{5\pi^2}{24}-\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2\end{aligned}$$

其中最后分部积分之后得到的积分属于基本积分了.

例 103: 计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x\ln x}\int_0^x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v}{u-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

✎ 解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\ln x}\int_0^x\int_0^x\frac{e^u-e^v}{u-v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\ln x}\int_0^x\int_0^v\frac{e^v-e^u}{v-u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)}\int_0^x\frac{e^x-e^u}{x-u}\mathrm{d}u\\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{1-e^{u-x}}{x-u}\mathrm{d}u\\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{1-e^{-x\left(1-\frac{u}{x}\right)}}{1-\frac{u}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{u}{x}\right)\\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{1-e^{-x(1-t)}}{1-t}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^1\frac{1-e^{-xt}}{t}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{x\to\infty}x\frac{1-e^{-x}}{x}=2.
\end{aligned}$$

例 104: 设 f 是 $[1,\infty)$ 上凸的连续可微函数, 满足 $f'(x)>0, \forall x\geqslant 1$. 证明: 反常积分 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}$ 收敛当且仅当级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n\right)$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立.

☞ **证明** 由题意知 f' 单调增, 且 $f(x)\geqslant f'(1)(x-1)+f(1)$, 这意味着 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 因此 $f\left([1,+\infty)\right)=[f(1),+\infty)$, 且反函数 f^{-1} 是连续可微的, 且在 $[f(1),+\infty)$ 上严格单调递增.

给定 $\varepsilon>0$, 对任意正整数 n, 我们定义 $x_n=f^{-1}(f(n)+\varepsilon)>n$. 利用拉格朗日中值定理, 存在 $s_n\in\left(f(n),f(x_n)\right)$ 使得

$$f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n=f^{-1}(f(x_n))-f^{-1}(n)=D\left(f^{-1}\right)(x_n)(f(x_n)-f(n))=\frac{\varepsilon}{f'(t_n)},$$

其中 $t_n=f^{-1}(s_n)\in(n,x_n)$.

因此对任意 $x\in[1,n]$ 有 $f'(t_n)\geqslant f'(n)\geqslant f'(x)$, 如果反常积分收敛, 则

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n\right)=\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{f'(t_n)}\leqslant\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)}=\varepsilon\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{f'(x)},$$

因此级数收敛.

另一方面, 如果级数收敛, 通项 $f^{-1}(f(n)+\varepsilon)-n=x_n-n\to 0$ 且 $x_{n+1}-x_n=\left(x_{n+1}-(n+1)\right)-(x_n-n)+1\to 1$. 那么对任意整数 n, 存在 $M\geqslant 1$ 使得 $0<x_{n+1}-x_n\leqslant M$.

而且对 $x\in[x_n,+\infty)$ 有 $f'(t_n)\leqslant f'(x_n)\leqslant f'(x)$, 这意味着

$$\frac{M}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left(f^{-1}\left(f\left(n\right)+\varepsilon\right)-n\right)=M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'\left(t_n\right)}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{f'\left(x\right)}=\int_{x_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f'\left(x\right)},$$

于是反常积分收敛.

例 105: 设非零实数 x,y,z 满足 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z=2+\mathrm{e}^{x+y+z}$, 求极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{x+y+z}{12}\right).$$

✎ **解** 由条件得

$$\left(\mathrm{e}^x-1\right)+\left(\mathrm{e}^y-1\right)+\left(\mathrm{e}^z-1\right)=\mathrm{e}^{x+y+z}-1,$$

令 $a=\mathrm{e}^x-1,b=\mathrm{e}^y-1,c=\mathrm{e}^z-1$, 则 $a+b+c=(a+1)(b+1)(c+1)-1$, 化简即得 $abc+ab+bc+ca=0$, 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$. 因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{x+y+z}{12}\right)\\
=&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}+\frac{1}{y}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}+\frac{1}{z}-\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
=&\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}+\frac{\mathrm{e}^y-1-y}{y\left(\mathrm{e}^y-z\right)}+\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z\left(\mathrm{e}^z-1\right)}\right)-1\\
=&\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

例 106: 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n+\mathrm{e}^{-x_n},x_1=1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{x_n-\ln n}{\ln n}$.

✎ **解** 首先借助数学归纳法与函数 $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$ 的单调性容易证明 $x_n>\ln(n+1)$, 因此

$$\begin{aligned}
x_{n+1}=x_n+\mathrm{e}^{-x_n}&<x_n+\mathrm{e}^{-\ln(n+1)}=x_n+\frac{1}{n+1}\\
&<x_1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k},
\end{aligned}$$

即 $\ln(n+1)<x_n<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. 设 $y_n=x_n-\ln n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 代入递推式得

$$y_{n+1}=y_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\mathrm{e}^{-y_n}}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= y_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} y_n + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{n-1}{n} y_n + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}
$$

于是 $n y_{n+1} = (n-1) y_n + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, 对 n 叠加可知 $n y_{n+1} \sim \dfrac{1}{2} \ln n$, 因此

$$
\lim_{n\to\infty} n \frac{x_n - \ln n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n y_n}{\ln n} = \frac{1}{2}.
$$

例 107: 证明 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = 4\mathrm{G} - \pi \ln 2$, 其中 $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

✎ **解**

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2n+1} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} \mathrm{d}x \int_0^1 y^{2n} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} (y^{2n} - x^n y^{2n}) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-xy^2}}}{1-x} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1-x} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\pi t - 2\arcsin t}{1-t^2} \mathrm{d}t = 4\mathrm{G} - \pi \ln 2.
\end{aligned}
$$

例 108: 对每个正整数 n, 设 $\displaystyle s_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, 记 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 即 Ioachimescu 常数. 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (s_n - s) \sqrt[2n]{n!}$.

✎ **解** 由于 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2$, 我们有

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{k}{n}} - \sqrt{\frac{k-1}{n}}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k-1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

于是

$$\begin{aligned}\left|s_n - s - \int_n^{\infty} \frac{1}{4x^{3/2}}\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{4x^{3/2}}\mathrm{d}x\right| \\ &=\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} + \frac{2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)\right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{2\sqrt{k}\sqrt{k-1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{16}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^{5/2}} \leqslant \frac{1}{16}\int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{24\,(n-1)^{3/2}}.\end{aligned}$$

因此 $s_n - s = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + O(1/n^{3/2})$. 而由 Stirling 公式有

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n! \leqslant \mathrm{e}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

这意味着

$$(2\pi n)^{\frac{1}{4n}}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}} \leqslant (n!)^{\frac{1}{2n}} \leqslant \left(\mathrm{e}\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{2n}}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - n)\,(n!)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

例 109: 对任意 $k = 1, 2, \cdots, n$, 证明 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cos^{2k}\frac{j\pi}{2n+2} = \frac{1}{2}$.

☞ **证明**

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cos^{2k}\frac{j\pi}{2n+2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{j\pi}{2n+2}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\frac{j\pi}{2n+2}\mathrm{i}}\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{2n+2}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\frac{(2k-p)j\pi}{2n+2}\mathrm{i}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\mathrm{e}^{\frac{(p-k)j\pi}{n+1}\mathrm{i}} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{(p-k)\pi}{n+1}\mathrm{i}}\right)^j\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\left[\frac{1-\left(-e^{\frac{(p-k)\pi}{n+1}i}\right)^{n+1}}{1-\left(-e^{\frac{(p-k)\pi}{n+1}i}\right)}-1\right]\\
&=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}\left[\frac{1+(-1)^{n+p-k}}{1+\cos\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)+i\,\sin\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)}-1\right]
\end{aligned}
$$

由于所求的和为实的, 最后的求和的虚部必然为零, 而

$$
\Re\left[\frac{1+(-1)^{n+p-k}}{1+\cos\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)+i\,\sin\left(\frac{(p-k)\pi}{n+1}\right)}-1\right]=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n+p-k}.
$$

因此所求的和为

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}+\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-k}\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}(-1)^p\right]\\
=&-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{2k}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-k}\cdot 0=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

例 110: 证明:

$$
\frac{1}{\binom{2n}{1}}-\frac{1}{\binom{2n}{2}}+\frac{1}{\binom{2n}{3}}-\cdots+\frac{1}{\binom{2n}{2n-1}}-\frac{1}{\binom{2n}{2n}}=-\frac{n}{n+1}.
$$

☞ **证明**

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n}{k}}&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\,k!\,(2n-k)!}{(2n)!}\\
&=(2n+1)\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(2n-k+1)}{\Gamma(2n+2)}\\
&=(2n+1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}B(k+1,2n-k+1)\\
&=(2n+1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^k(1-x)^{2n-k}\,dx\\
&=(2n+1)\int_0^1\left[x(1-x)^{2n}-x^{2n+1}\right]dx\\
&=(2n+1)\left(\int_0^1 y^{2n}(1-y)\,dy-\int_0^1 x^{2n+1}dx\right)\\
&=(2n+1)\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{2n+2}\right)=-\frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

例 111: 设

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$.

✎ **解** 首先我们有三角恒等式

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha-\cos^2\beta&=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\\&=\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)-\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)}\right)\\&=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi}-1\right)=\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{n-1}{2n}\pi}\\&=\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin^3\frac{\pi}{2n}}.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{n-1}{2n}\pi}{n^3\sin^3\frac{\pi}{2n}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^3=\frac{8}{\pi^3}.$$