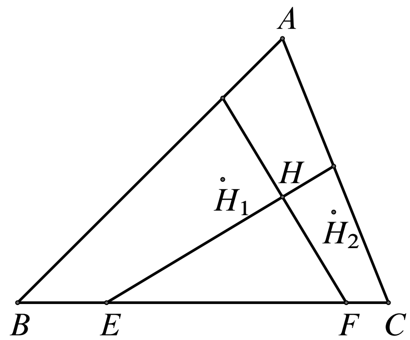
2019 年上海新星夏季数学奥林匹克试题

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2019}$ 是实数, 且满足 $x_1 + \cdots + x_{2019} \in \mathbb{Z}$. 求

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2019} \{x_i + x_j\}$$

的最大值. (山西大学附属中学 王永喜 供题)

2. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, E, F 在 BC 上, $EH \perp HF$, 延长 EH 与 AC 交于 M, 延长 FH 与 AB 交于 N. H_1, H_2 为 $\triangle BNF, \triangle CME$ 的垂心. 证明: H_1, H, H_2 共线. (广西钦州 卢圣 供题)



3. 设 n, r 为正整数, $n > r$. 将圆周上给定的 $2n$ 个点染 n 种颜色, 每色染 2 个点, 且任何两个同色点之间恰有 r 个点.

(1) 试问: n, r 能否同为奇数?

(2) 如果 $r + 1$ 为质数, 求 n 的所有可能值. (深圳高级中学 冯跃峰 供题)

4. 证明: 存在全体正整数的一个排列 $a_1, a_2, \cdots$, 使得对任意自然数 i, 均有

$$(a_i, a_{i+1}) \geqslant \frac{i}{2}.$$

(哥伦比亚大学 饶家鼎 供题)

5. 设 n 是正整数, $2n$ 个实数 x_i, y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1.$$

已知 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n, 1 \in [\lambda_1, \lambda_n]$. 证明:

$$\lambda_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \leqslant \lambda_n.$$

(北京大学 王逸轩 供题)

6. 对边不平行的四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$. 设对角线 AC, BD 交于点 P, 直线 AD, BC 交于点 E, M 是 OP 的中点. 已知 $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle APB, \triangle CPD$ 的外心共圆, 证明: 该圆圆心是 $\triangle OME$ 的垂心. (中国人民大学附属中学 张端阳 供题)