Chapter 1

2006 年国际大学生数学竞赛 Odessa,Ukraine

1.1 第一天

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个实值函数. 证明或否定下列论断:

(a) 如果 f 是连续的且 $\mathrm{range}(f)=\mathbb{R}$, 则 f 是单调的;

(b) 如果 f 是单调的且 $\mathrm{range}(f)=\mathbb{R}$, 则 f 是连续的;

(c) 如果 f 是单调的且 f 是连续的, 则 $\mathrm{range}(f)=\mathbb{R}$.

解

(a) 错误. 取反例 $f(x)=x^3-x$ 即可.

(b) 正确. 如果假定 f 是非递减的, 对任意实数 a, 极限 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 都存在, 且 $f(a-)\leqslant f(a+)$. 如果这两个极限相等, 则 f 在 a 处连续. 否则, 如果 $f(a-)=b<f(a+)=c$, 则当 $x<a$ 时有 $f(x)\leqslant b$, 当 $x>a$ 时, $f(x)\geqslant c$, 则 $\mathrm{range}(f)\subset(-\infty,b)\cup(c,+\infty)\cup\{f(a)\}$ 不可能是整个实数集.

(c) 错误, 取反例 $f(x)=\arctan x$ 即可.

$\square$

2. 求出所有满足以下两个条件的正整数 x 的个数:

- $x<10^{2006}$;
- x^2-x 被 10^{2006} 整除.

解 *方法一* 记 $S_k=\{0<x<10^k|x^2-x\text{被}10\text{整除}\}$, $s(k)=|S_k|, k\geqslant 1$. 设 $\overline{x=a_{k+1}a_k\cdots a_1}$ 表示整数 $x\in S_{k+1}, k\geqslant 1$ 的十进制写法, 则显然 $y=\overline{a_k\cdots a_1}\in S_k$. 现在取定 $y=\overline{a_k\cdots a_1}\in S_k$, 把 a_{k+1} 看成变化的数字, 我们有 $x^2-x=(a_{k+1}10^k+y)^2-(a_{k+1}10^k+y)=(y^2-y)+a_{k+1}10^k(2y-1)+a_{k+1}^2 10^{2k}$. 由于 $y^2-y=10^k z$ 对某个整数 z 成立, 于是 x^2-x 被 10^{k+1} 整除当且仅当 $z+a_{k+1}(2y-1)\equiv 0 \mod 10$.

由于 $y \equiv 3 \mod 10$ 是显然不可能的, 因此适定方程只有一个解. 于是对每个 $k \geq 1$, 我们得到了一个集合 S_{k+1} 与 S_k 之间的一一对应. 所以 $s(2006) = s(1) = 3$, 因为 $S_1 = \{1, 5, 6\}$.

方法二　由于 $x^2 - x = x(x-1)$, x 与 $x-1$ 互素, 因此其中必然有一个被 2^{2006} 整除, 一个 (可能是同一个) 要被 5^{2006} 整除. 因此 x 一定满足以下两个条件:

- $x \equiv 0$或$1 \mod 2^{2006}$;
- $x \equiv 0$或$1 \mod 5^{2006}$.

总共有四种情形. 由中国剩余定理, 每种情形在数 $0, 1, \cdots, 10^{2006} - 1$ 中都有唯一解. 这四种情形的解都是不同的, 因为任意两个解模 2^{2006} 或 5^{2006} 的余数都不同. 而且, 0 是不满足的, 因此存在 3 个解.

$\square$

3. 设 A 是一个 $n \times n$ 整数矩阵, 整数 $b_1, \cdots, b_k$ 满足 $\det(A) = b_1 \cdots b_k$. 证明: 存在 $n \times n$ 整数矩阵 $B_1, \cdots, B_k$ 使得 $A = B_1 \cdots B_k$, 且对所有的 $i = 1, \cdots, k$ 有 $\det(B_i) = b_i$.

证明　由归纳法, 只需要考虑 $m = 2$ 的情形即可. 进一步, 我们可以对 A 左乘或右乘行列式为 1 的整数矩阵, 也不改变问题. 因此我们可以假定 A 是上三角矩阵.

引理 1.1. *设 A 是一个上三角整数矩阵, b, c 是整数满足 $A = bc$, 则存在上三角整数矩阵 B, C 使得 $\det B = b, \det C = c, A = BC$.*

引理 1.1 的证明　我们对 n 归纳. $n = 1$ 是显然的, 假定结论对 $n-1$ 的情形成立. 定义 B_{nn} 是 b 和 A_{nn} 的最大公因数, 记住 $\frac{A_{nn}}{B_{nn}}$. 由于 A_{nn} 整除 bc, C_{nn} 整除 $\frac{b}{B_{nn}}c$, 进一步 C_{nn} 整除 c. 因此, $b' = \frac{b}{B_{nn}}$ 和 $c' = \frac{c}{B_{nn}}$ 都是整除. 设 A' 表示 A 的左上方 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵, 则 $detA' = b'c'$. 由归纳法, 对 A' 我们可以找到矩阵 B', C' 使得 $A' = B'C'$ 且 $\det B' = b', \det C' = c'$. 只需要定义 B_{in}, C_{in} 使得 $A = BC$ 对所有的 (i, n) 元 (i<n) 都成立.

首先我们验证对所有 $i < n$, B_{ii} 和 C_{nn} 是互素的. 由于 B_{ii} 整除 b', 只需要证明 b' 和 C_{nn} 是互素的, 即

$$\gcd\left(\frac{b}{\gcd(b, A_{nn})}, \frac{A_{nn}}{\gcd(b, A_{nn})}\right) = 1,$$

而这是显然的.

现在我们递归定义 B_{jn} 和 C_{jn}: 假定我们已经定义了 B_{in}, C_{in} 对所有的 $i = j+1, j+2, \cdots, n-1$ 成立, 则 B_{jn}, C_{jn} 必须满足

$$A_{jn} = B_{jj}C_{jn} + B_{j,j+1}C_{j+1,n} + \cdots + B_{jn}C_{nn}.$$

由于 B_{jj} 和 C_{nn} 互素, 我们可以取整数 C_{jn}, B_{jn} 使得上述方程成立. 对 $j = n-1, n-2, \cdots, 1$, 我们最后得到 B, C 使得 $A = BC$. $\square$

4. 设 f 是一个有理函数 (即两个实多项式的商), 且对无穷多个整数 n, $f(n)$ 都是整数, 证明; f 是一个多项式.

证明 设 S 是一个有无穷个整数的集合, 且对任意 $x \in S$, 有理函数 $f(x)$ 都是整数.

假定 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, 其中 p, q 分别是次数为 k, n 的多项式. 则 p, q 是齐次方程组 $p(x) = q(x)f(x), \forall x \in S, q(x) \neq 0$. 这是齐次线性方程组, 系数函数 p, q 都是有理系数. 由于它们有一个解, 它们一定有一个有理解.

因此存在有理系数多项式 p', q' 使得 $p'(x) = q'(x)f(x), \forall x \in S, q(x) \neq 0$. 如果 x 不是 p 或 q 的根, 则 $f(x) \neq 0$, 因此 $p'(x)q(x) = p(x)q'(x)$ 对 S 中有限个 p, q 的零点之外的点都成立. 因此 $p'q$ 和 pq' 在无穷多个点都相等, 意味着 $p'(x)q(x) \equiv p(x)q'(x)$. 两边除以 $q(x)q'(x)$, 我们可得 $\frac{p'(x)}{q'(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x)$. 因此 $f(x)$ 可以表示成两个有理系数多项式的商. 乘以某个整数后, 它就可以表示成两个整系数多项式的商.

假定 $f(x) = \frac{p''(x)}{q''(x)}$, 其中 p'', q'' 都是整系数的. 存在多项式 s, r, 都是有理系数, 使得 $p''(x) = q''(x)s(x) + r(x)$, 且 r 的次数小于 q'' 的次数. 两边除以 $q''(x)$, 我们得到 $f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q''(x)}$. 存在整数 N, 使得 $Ns(x)$ 是整系数, 则对任意 $x \in S$, $Nf(x) - Ns(x)$ 都是整数. 但是他等于有理函数 $\frac{Nr}{q''}$, 其分母比分子的次数更高, 因此当 $x \to \infty$ 时, 此式趋于 0. 也就是说对所有充分大的 $x \in S$, $Nf(x) - Ns(x) = 0$, 因此 $r(x) = 0$. 所有 $r(x)$ 有无穷个零点, 也就是它恒为零. 所有 $f(x) = s(x)$, f 是一个多项式. $\square$

5. 设实数 $a, b, c, d, e > 0$ 使得 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ 且 $a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4$. 比较 $a^3 + b^3 + c^3$ 和 $d^3 + e^3$.

证明 不妨假设 $x \geqslant b \geqslant c, d \geqslant e$. 设 $c^2 = e^2 + \Delta, \Delta \in \mathbb{R}$. 则 $d^2 = a^2 + b^2 + \Delta$, 且第二个方程意味着

$$a^4 + b^4 + (e^2 + \Delta)^2 = (a^2 + b^2 + \Delta)^2 + e^4, \ \ \Delta = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2 - e^2}.$$

由于 $d^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2-e^2} < a^2$ 且 $a > d \geqslant e > b \geqslant c$.

考虑函数 $f(x) = a^x + b^x + c^x - d^x - e^x, x \in \mathbb{R}$. 我们将证明 $f(x)$ 只有两个零点 $x = 2$ 和 $x = 4$, 且在每个零点处都改变符号. 假定此断言不成立, 则 Rolle 定理意味着 $f'(x)$ 至少有两个不同的零点. 不失一般性, 设 $a = 1$. 则 $f'(x) = b^x \log x + c^x \log x - d^x \log x - e^x \log e, x \in \mathbb{R}$. 如果 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0, x_1 < x_2$, 则

$$b^{x_i} \log b + c^{x_i} \log c = d^{x_i} \log d + e^{x_i} \log e, \ \ i = 1, 2.$$

但是由于 $1 > d \geqslant e > b \geqslant c$, 我们有

$$\frac{(-\log b)\, b^{x_2} + (-\log c)\, c^{x_2}}{(-\log b)\, b^{x_1} + (-\log c)\, c^{x_1}} \leqslant b^{x_2 - x_1} < e^{x_2 - x_1} \leqslant \frac{(-\log d)\, d^{x_2} + (-\log e)\, e^{x_2}}{(-\log d)\, d^{x_1} + (-\log e)\, e^{x_1}}$$

矛盾. 因此 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2), (2, 4), (4, +\infty)$ 上符号不变. 由于 $f(0) = 1$, 则

$$\begin{cases} f(x) > 0, & x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \\ f(x) < 0, & x \in (2, 4) \end{cases}.$$

特别地, $f(3) = a^3 + b^3 + c^3 - d^3 - e^3 < 0$. $\square$

6. 求出所有实数序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, n \geqslant 1, a_n \neq 0$, 使得下面论述成立:

如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 n 阶可微函数, 实数 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 满足 $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, 则存在 $h \in (x_0, x_n)$ 使得

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \cdots + a_n f^{(n)}(h) = 0.$$

解 设 $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. 我们将证明 $a_0, \cdots, a_n$ 要满足论述中的等式, 充要条件就是多项式 $A(x)$ 的根都是实的.

(a) 假定 $A(x)$ 的根都是实的. 我们用 I 表示恒等算子, D 表示微分算子. 对任意多项式 $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$, $P(D) = p_0 I + p_1 D + p_2 D^2 + \cdots + p_n D^n$. 则论述中的等式等价于 $(A(D)f)(\xi) = 0$.

首先对 $n = 1$ 证明. 考虑函数 $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}x} f(x)$, 由于 $g(x_0) = g(x_1) = 0$, 根据 Rolle 定理可知存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得

$$g'(\xi) = \frac{a_0}{a_1}\mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}\xi} f(\xi) + \mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}\xi} f'(\xi) = \mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}\xi}\left(a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi)\right) = 0.$$

现在假定 $n > 1$, 结论对 $n-1$ 已经成立. 令 $A(x) = (x-c)B(x)$, 其中 c 是多项式 A 的一个实根. 根据 $n = 1$ 的情形, 存在 $y_0 \in (x_0, x_1)$, $y_1 \in (x_1, x_2), \cdots, y_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$ 使得 $f'(y_j) - cf(y_j) = 0$ 对所有 $j = 0, 1, \cdots, n-1$ 都成立. 对多项式 $B(x)$, 函数 $g = f' - cf$ 和点 $y_0, \cdots, y_{n-1}$ 应用归纳假设, 存在 $\xi \in (y_0, y_{n-1}) \subset (x_0, x_n)$ 使得

$$(B(D)g)(\xi) = (B(D))(D - cI)f)(\xi) = (A(D)f)(\xi) = 0.$$

(b) 假定 $u + v\mathrm{i}$ 是多项式 $A(x)$ 的一个复根, $v \neq 0$. 考虑线性微分方程 $a_n g^{(n)} + \cdots + a_1 g' + g = 0$, 此方程的一个解是 $g_1(x) = \mathrm{e}^{ux}\sin vx$, 它由无穷个零点.

设 k 是使得 $a_k \neq 0$ 的最小指标, 取 $\varepsilon > 0$, 令 $f(x) = g_1(x) + \varepsilon x^k$. 如果 ε 足够小, 则 f 有所要求的根数目, 但是 $a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_n f^{(n)} = a_k \varepsilon \neq 0$ 处处成立.

□

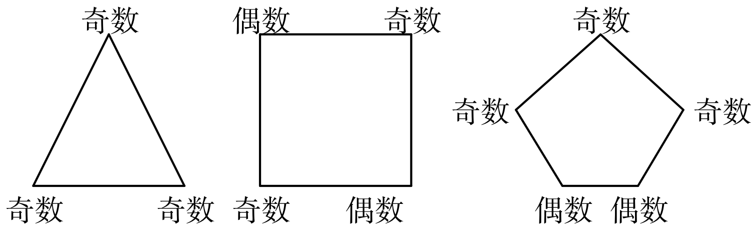
1.2 第二天

1. 设 V 是一个凸 n 边形.

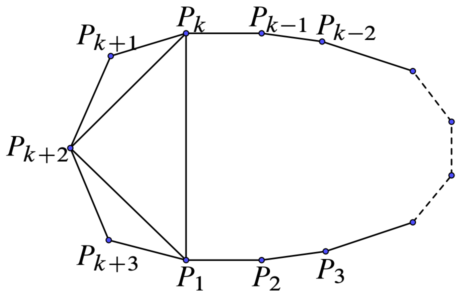
(a) 证明: 如果 n 被 3 整除, 则 V 可以被剖分成三角形, 使得 V 的每个顶点都恰好属于奇数个三角形.

(b) 证明: 如果 n 不被 3 整除, 则可以被剖分成三角形, 使得恰好有两个顶点属于偶数个三角形.

证明 对 n 用归纳法, $n=3,4,5$ 的情形如下:



现在假定上述论断对 $n=k$ 成立, 我们考虑 $n=k+3$ 的情形. 设 V 的顶点分别为 $P_1,\cdots,P_{k+3}$.



对多边形 $P_1P_2\cdots P_k$ 应用归纳假设, 如果 n 不被 3 整除, 它的三角剖分中除去两个顶点外其它顶点恰好属于奇数个三角形. 现在再加上 $\triangle P_1P_kP_{k+2}, \triangle P_kP_{k+1}P_{k+2}$ 和 $\triangle P_1P_{k+2}P_{k+3}$. 用这样的方式, 我们在点 P_1 和 P_k 处增加了两个三角形, 因此奇偶性不变. 这就完成了证明. □

2. 求出所以的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意实数 $a<b$, 像 $f([a,b])$ 都是一个长度为 $b-a$ 的闭区间.

解 对任意常数 c, 函数 $f(x)=x+c, f(x)=-x+c$ 显然满足条件, 我们下面证明只有这两组解.

设 f 是一个这样的函数. 则 f 显然满足对任意 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$, 因此 f 是连续的. 给定 $x<y$, 设 $a,b\in[x,y]$ 使得 $f(a),f(b)$ 分别是 f 在 $[x,y]$ 上的最大和最小值. 则 $f([x,y])=[f(b),f(a)]$, 于是

$$y-x=f(a)-f(b)\leqslant|a-b|\leqslant y-x.$$

这意味着 $\{a,b\}=\{x,y\}$, 因此 f 是单调函数. 假定 f 是单调递增的, 则 $f(x)-f(y)=x-y$ 意味着 $f(x)-x=f(y)-y$, 因此 $f(x)=x+c$, c 是某个常数. 类似的, 当 f 递减时, $f(x)=-x+c$. □

3. 对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 比较 $\tan(\sin x)$ 与 $\sin(\tan x)$ 的大小.

解 令 $f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$, 则

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}-\frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)}{\cos^2 x\cdot\cos^2(\tan x)}.$$

设 $0 < x < \arctan \frac{\pi}{2}$, 余弦函数在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是凹的, 因此

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)} < \frac{1}{3}(\cos(\tan x) + 2\cos(\sin x)) \leqslant \cos\left(\frac{\tan x + 2\sin x}{3}\right) < \cos x,$$

其中最后一步是因为

$$\left(\frac{\tan x + 2\sin x}{3} - x\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x\right) - 1 \geqslant 0.$$

这说明 $\cos^3 x - \cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x) > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, f 在区间 $\left(0, \arctan\frac{\pi}{2}\right]$ 单调增. 注意到 $4 + \pi^2 < 16$, 于是

$$\tan\left(\sin\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan\frac{\pi/2}{\sqrt{1+\pi^2/4}} > \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

这就意味着当 $x \in \left[\arctan\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan(\sin x) > 1$, 于是 $f(x) > 0$ 对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 都成立. □

4. 设 v_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量, $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ 使得对任意 $0 \leqslant i, j \leqslant n+1$, Euclid 范数 $|v_i - v_j|$ 都是有理数. 证明: $v_1, \cdots, v_{n+1}$ 在有理数域上是线性相关的.

证明 我们可以假定 $v_1, \cdots, v_n$ 在实数域上线性无关, 于是存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$v_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j.$$

我么来证明所有的 λ_j 都是有理数. 由

$$-2\langle v_i, v_j\rangle = \left|v_i - v_j\right|^2 - |v_i|^2 - \left|v_j\right|^2$$

可知对任意 i, j, $\langle v_i, v_j\rangle$ 都是有理数. 定义矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. 设 $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{Q}^n$, 其中 $w_i = \langle v_i, v_{n+1}\rangle$, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\langle v_i, v_{n+1}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle.$$

说明 $A\lambda = w$. 由于 $v_1, \cdots, v_n$ 是线性无关的, A 是可逆的, A^{-1} 中的所有项都是有理数, 因此 $\lambda = A^{-1}w \in \mathbb{Q}^n$, 得证. □

5. 证明: 存在无穷对互素的正整数对 (m, n) 使得方程

$$(x+m)^3 = nx$$

有三个不同的正数根.

证明 令 $y = x + m$, 方程变为

$$y^3 - ny + mn = 0.$$

设上述方程的两个根是 u, w, 则第三个根为 $w = -(u+v)$. 这些根满足

$$uv + uw + vw = -(u^2 + uv + v^2) = -n, \quad \text{即} u^2 + uv + v^2 = n,$$

且 $uvw = -uv(u+v) = mn$. 因此我们需要找到整数对 (u,v) 使得 $uv(u+v)$ 被 u^2+uv+v^2 整除. 注意到如果令 $u = kp, v = kq$, 则

$$u^2+uv+v^2 = k^2(p^2+pq+q^2)$$

且

$$uv(u+v) = k^3pq(p+q).$$

取 p,q 互素, 令 $k = p^2+pq+q^2$, 则 $\frac{uv(u+v)}{u^2+uv+v^2} = p^2+pq+q^2$.

代回最原始的等式, 我们得到

$$n = (p^2+pq+q^2)^3, \quad m = p^2q+pq^2,$$

以及三个根为 $x_1 = p^3, x_2 = q^3, x_3 = -(p+q)^3$. □

6. 设 $A_i, B_i, S_i (i = 1,2,3)$ 都是可逆的 2×2 实矩阵满足

(i) 不是所有的 A_i 都有公共实特征向量;

(ii) $A_i = S_i^{-1}B_iS_i, \forall i = 1,2,3$;

(iii) $A_1A_2A_3 = B_1B_2B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

证明: 存在一个可逆 2×2 实矩阵 S 使得 $A_i = S^{-1}B_iS, \forall i = 1,2,3$.

证明 注意到如果有某个 $A_j = \lambda I$, 则结论是平凡的, 所以假定这种情形不存在. 首先考虑某个 A_j 有两个不同的特征值, 不妨设为 A_3. 通过相似变换, 我们可以进一步假定 $A_3 = B_3 = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$. 设 $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, 则

$$a+d = \mathrm{tr}A_2 = \mathrm{tr}B_2 = a'+d'$$
$$a\lambda + d\mu = \mathrm{tr}(A_2A_3) = \mathrm{tr}A_1^{-1} = \mathrm{tr}B_1^{-1} = \mathrm{tr}(B_2B_3) = a'\lambda + d'\mu.$$

因此 $a = a', d = d'$, 还有 $bc = b'c'$. 现在我们不能有 $c = 0$ 或 $b = 0$, 因为此时 $(1,0)^{\mathrm{T}}$ 或者 $(0,1)^{\mathrm{T}}$ 将会是所以 A_j 的公共特征向量. 矩阵 $\begin{pmatrix} c' & \\ & c \end{pmatrix}$ 满足 $A_2 = S^{-1}B_2S$, 且 S 与 $A_3 = B_3$ 可交换, 于是 $A_j = S^{-1}B_jS, \forall j$.

如果 $A_3 = B_3$ 的不同特征值不是实数, 那么由上可知, $A_j = S^{-1}B_jS$ 对某个 $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$, 除非所有的 A_j 在 $\mathbb{C}$ 上有公共特征向量. 在这种情形下, 设 $A_jv = \lambda_jv$, 那么所以的 A_j 可以同时对角化. 如果 $A_2 = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, 那么同样有 $a = a'd = d', b'c' = 0$. 现在 B_2, B_3 在 $\mathbb{C}$ 上有公共特征向量, 因此 B_1 也一样, 它们可以同时对角化. 那么不论在哪种情形下, 均有 $SA_j = B_jS$ 对某个 $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ 成立. 设 $S_0 = \mathrm{Re}S, S_1 = \mathrm{Im}S$. 将实部与虚部分开, 如果 S_0 或者 S_1 可逆, 结论已经成立. 否则, S_0 可以相似于某个 $T^{-1}S_0T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$, 且 $(x,y)^{\mathrm{T}} \neq (0,0)^{\mathrm{T}}$, 且所有的 A_j 有公共特征向量 $T(0,1)^{\mathrm{T}}$, 矛盾.

剩下的情形就是所以的 A_j 都没有相异特征值, 那么这些特征值自然是实的. 借助相似变换, 我们不妨假设 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. 通过上三角矩阵的进一步相似, 我们可以假定 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & v \end{pmatrix}$, 这里 $v^2 = (\operatorname{tr} A_2)^2 = 4 \det A_2 = -4u$. 现在 $A_1 = A_3^{-1} A_2^{-1} \begin{pmatrix} -(b+v)/u & 1 \\ 1/u & \end{pmatrix}$, 因此 $\frac{(b+v)^2}{u^2} = (\operatorname{tr} A_1)^2 = 4 \det A_1 = -\frac{4}{u}$, 比较可知 $b = -2v$. 我们已经把所有的矩阵 A_j 都约化到所有元素只依赖于 u, v 的矩阵, 但是 $\det A_2$ 和 $(\operatorname{tr} A_2)^2$ 本身都具有相似不变性, 所以 B_j 也可以同时约化到同样的矩阵. $\square$