

2020 届考研数学全真模拟卷(数学一)

命题人 向禹

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分 姓名: _____

题号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总分
满分	32	24	94	150
得分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 已知常数 $a > 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = a^x + a^{-x} - 2$ 是 x 的 ()
 (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

2. 设在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 令

$$M = \int_a^b f(x) dx, \quad N = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a), \quad P = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

则 ()

- (A) $M < N < P$ (B) $P < M < N$ (C) $P < N < M$ (D) $M < P < N$
3. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 2$, $f'_y(0, 0) = 1$, 则 ()
 (A) $dz|_{(0,0)} = 2dx + dy$
 (B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(2, 1, 0)$
 (C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个切向量为 $(2, 0, 1)$
 (D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的一个切向量为 $(0, 1, 1)$

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数中一定收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3)$

5. 设 A 为 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为 n 维列向量, 满足 $A\alpha_1 = \beta_1$, $A\alpha_2 = \beta_2$, 则 ()
 (A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 一定线性无关

- (B) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 一定线性相关
 (C) 如果向量组 α_1, α_2 线性无关, 则向量组 β_1, β_2 线性无关
 (D) 如果向量组 β_1, β_2 线性无关, 则向量组 α_1, α_2 线性无关
6. 设 α, β 是 n 维正交的单位列向量, 矩阵 $A = E + \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$, 则下列说法错误的是 ()
 (A) 1 必为 A 的特征值 (B) 2 必为 A 的特征值
 (C) $E + A$ 为正定矩阵 (D) 方程组 $Ax = b$ 有唯一解
7. 已知随机事件 A, B 满足 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(B|A) = 2$, 则 ()
 (A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $P(A|\bar{B}) = 0$ (D) $P(B|\bar{A}) = 1$
8. 已知随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha \in (0.5, 1)$ 时, $P(X < x_\alpha) = \alpha$, 则 $P(Y < x_\alpha^2) =$ ()
 (A) $2\alpha - 1$ (B) $\alpha - \frac{1}{2}$ (C) α (D) $1 - \alpha$

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt =$ _____.
10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 则 $a_2 =$ _____.
11. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\int_0^\pi dx \int_0^{-\sin x} f(x) dy$ 的积分顺序的结果为 _____.
12. 已知向量场 $A = (2x - 3y, 3x - z, y - 2x)$, 则 $\text{rot } A =$ _____.
13. 设 A 为三阶矩阵, $|\lambda E - A| = \lambda^3 + 2\lambda + 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 A 的特征值, 则 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 \end{vmatrix} =$ _____.
14. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, \bar{X} 为样本均值, $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $E(\bar{X}^2 T) =$ _____.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15. (本题满分 10 分)
 设函数 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f'(0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{e^x-1} f(t) dt}{x^3}$.
16. (本题满分 10 分)
 设函数 $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, 且 $f(0) = f'(0) = 0$, 求 $f(v)$ 的表达式.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) 连续可导, 且 $f(0) = 1$. 现已知曲线 $y = f(x)$ 、 x 轴、 y 轴及过点 x 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, x]$ 上的一段弧长值相等, 求 $f(x)$.

18. (本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (y^2 - 2y) dz dx + (z + 1)^2 dx dy,$$

其中, Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 与 $z = 2$ 截下的那部分的外侧.

19. (本题满分 10 分)

设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0) = 1$, $F(x)f(x) = \cos 2x$, $a_n = \int_0^{n\pi} |f(x)| dx$ ($n = 1, 2, \dots$).

(1) 求出 a_n 的表达式;

(2) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 - 1} x^n$ 的收敛域与和函数.

20. (本题满分 11 分)

设 A 为三阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个不同特征值, 对应的特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明: $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;

(2) 若 $A^3\beta = A\beta$, 求秩 $r(A - E)$ 及行列式 $|A + 2E|$.

21. (本题满分 11 分)

已知三元二次型 $x^T A x$ 经过正交变换化为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, 又知矩阵 B 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2} A \right)^* \right]^{-1} B A^{-1} = 2AB + 4E,$$

且 $A^* \alpha = \alpha$, 其中 $\alpha = (1, 1, -1)^T$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 求二次型 $x^T B x$ 的表达式.

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 与 $y = -x^2 + 2x + 3$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 (X, Y) 的联合密度 $f(x, y)$;

(2) 求 X, Y 的边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(3) 求条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 计算 $\text{Cov}(X, Y)$.

23. 设总体 X 服从双参数指数分布, 其密度为

$$f(x; \mu, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x > \mu \\ 0, & x \leq \mu \end{cases}.$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty, 0 < \theta < +\infty$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本.

- (1) 求参数 μ, θ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1, \hat{\theta}_1$;
- (2) 求参数 μ, θ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2, \hat{\theta}_2$.