2020 年考研数学二模拟卷二

命题人:向禹

考试形式:闭卷 考试时间:180 分钟 满分:150 分 姓名:________

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

一、选择题, 1 ~ 8 题, 每题 4 分, 共 32 分.

1. 曲线 $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{1+x^2}{x}$ ( )
   (A) 有一条垂直渐近线和一条斜渐近线 (B) 有一条水平渐近线和一条垂直渐近线
   (C) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线 (D) 只有一条斜渐近线

2. 下列广义积分收敛的是 ( )
   (A) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (B) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ (C) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$ (D) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

3. 设 $u = x^{y^z}$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,2,2)} =$ ( )
   (A) $4\ln 3$ (B) $8\ln 3$ (C) $324\ln 3$ (D) $324\ln 2\ln 3$

4. 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 则 ( )
   (A) 当 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界时, $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内也无界
   (B) 当 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内也无界
   (C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$
   (D) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

5. 设函数 $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(\alpha > 1)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 ( )
   (A) 连续, 但不可偏导 (B) 可偏导, 但不连续 (C) 偏导函数均连续 (D) 偏导函数均不连续

6. 设平面区域 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$, 记

$$I_1 = \iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2 = \iint\limits_D \cos x^2 \sin y^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3 = \iint\limits_D \left[\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} - 1\right]\mathrm{d}\sigma,$$

   则有 ( )
   (A) $I_2 > I_1 > I_3$ (B) $I_1 > I_2 > I_3$ (C) $I_1 > I_3 > I_2$ (D) $I_2 > I_3 > I_1$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则 ( )

(A) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$ (B) 当 $m>n$ 时, $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$ (D) 当 $n>m$ 时, $|\boldsymbol{AB}|=0$

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则下列说法错误的是 ( )

(A) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$, 对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) 如果对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 可推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=n$

(C) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解

(D) 如果 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解

二、填空题, 9 ~ 14 题, 每题 4 分, 共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\ln(1+n)-\ln n}-n\right)=$________.

10. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

11. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上曲率最大点处的曲率半径为________.

12. 已知动点 $M(x,y)$ 在 xOy 面上运动方程为 $\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=t-\sin t\end{cases}$, 则在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 动点 M 的运动速率为________.

13. 设函数 $f(x)$ 连续, 则交换累次积分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 的积分次序的结果为________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 其特征值为 $1,2,0$, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行加到第一行得到 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第一列的 -1 倍加到第二列得到 $\boldsymbol{C}$, 则 $|\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}|=$________.

三、解答题, 15 ~ 23 题, 共 94 分.

15.（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(ax+1), & x\leqslant 0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+n(x+b)}{n^2}\right)^{-n}, & x>0\end{cases}$, 确定常数 a,b, 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求其导数.

16.（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

17.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $f(x)>0$, 且满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\cos^2 x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{x\cos^2 x+\tan x}.$$

试求 $f(x)$ 以及 $f(x)$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

求曲线 $y = \sin x$ 与 $y = \sin 2x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V.

19.（本题满分 10 分）

求二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2-x^2}\ (a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

20.（本题满分 11 分）

证明: 对每个 $x > 0$, 存在唯一的 $\xi = \xi(x) \in (0,1)$ 使得 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\xi x^2}$, 并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi$.

21.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, 且

$$f(0)f(1) > 0,\ f''(x) > 0,\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明:

(1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恰有两个零点;

(2) 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$.

22.（本题满分 11 分）

已知三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\b\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix},$$

且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 等价.

(1) 求参数 a, b, c 的值;

(2) 记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

23.（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 用正交变换化二次型为标准形;

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解.