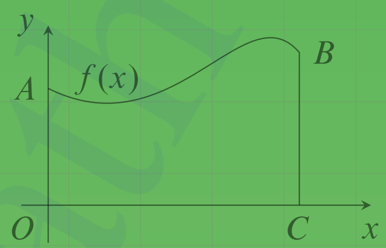
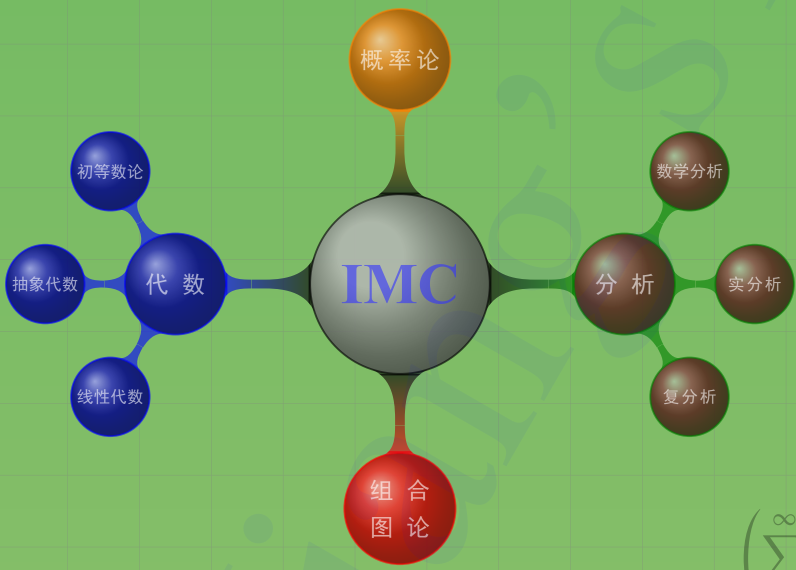
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

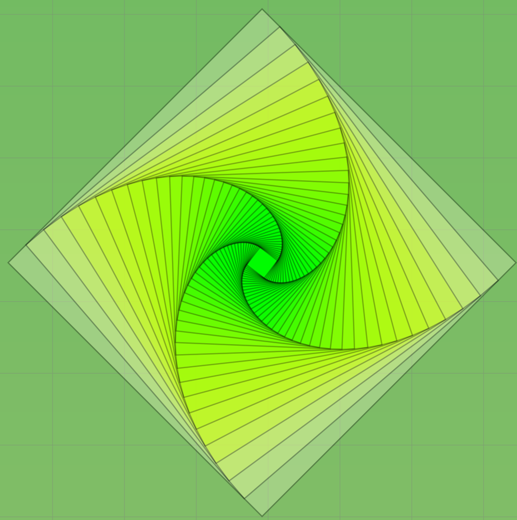


1994-2018 年国际大学生数学竞赛

International Mathematics Competition for University Students (1994-2018)

向禹 ◎ 译





$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) \geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right)^2$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$$

无名出版社
PUBLISHING HOUSE OF NONAME
yuxtech.github.io

1994-2018 年国际大学生数学竞赛

向　禹 译*

2019 年 5 月 9 日

*翻译若有错漏, 请邮件戳我. ☞

目 录

1. 1994 年国际大学生数学竞赛 Plovdiv, Bulgaria

§ 1.1 第一天

1. (a) 设 A 为 $n\times n(n\geqslant 2)$ 对称可逆的正实矩阵. 证明：$z_n\leqslant n^2-2n$, 这里 z_n 表示 A^{-1} 中的零元个数.

(b) 下面的 $n\times n$ 可逆矩阵 A 的逆矩阵中有多少个零元?

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdots&1\\1&2&2&2&\cdots&2\\1&2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&1&2&\cdots&\cdots\end{pmatrix}.$$

证明 分别设 $A=(a_{ij}),A^{-1}=(b_{ij})$. 则当 $k\neq m$ 时, 一定有 $\sum\limits_{i=0}^{n}a_{ki}b_{im}=0$. 由于 a_{ij} 都是正的, 因此 $b_{im}:i=1,2,\cdots,n$ 至少有一个正数, 也至少有一个负数, 因此在 A^{-1} 中每一列至少有两个非零元, 这就证明了 (a). 对于 (b), 除了 $b_{11}=2,b_{nn}=(-1)^n,b_{i,i+1}=b_{i+1,i}=(-1)^i,i=1,2,\cdots,n-1$ 之外, 其余的均为零.

2. 设 $f\in C^1(a,b)$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$, 且 $f'(x)+f^2(x)\geqslant -1$ 对 $x\in(a,b)$ 成立. 证明：$b-a\geqslant\pi$ 并给出一个 $b-a=\pi$ 的例子.

解 由题目所给不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\arctan f(x)+x\big)=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}+1\geqslant 0$$

对 $x\in(a,b)$ 成立, 因此 $\arctan f(x)+x$ 为 (a,b) 上的单调增函数. 再由题目所给不等式可得 $\frac{\pi}{2}+a\leqslant-\frac{\pi}{2}+b$, 即 $b-a\geqslant\pi$. 当 $f(x)=\cot x,a=0,b=\pi$ 时 $b-a=\pi$ 成立.

3. 给定一个有 $2n-1$ 个无理数的集合 $S,n\in\mathbb{N}$. 证明存在 n 个不同的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in S$ 使得对所有满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$ 的非负有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都有 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 是无理数.

证明 设 $\mathbb{I}$ 表示无理数集合, $\mathbb{Q}$ 表示有理数集合, $\mathbb{Q}^+=\mathbb{Q}\cap[0,+\infty)$, 下面用归纳法证明结论.

当 $n=1$ 时结论是显然的, 假定结论当 $n-1$ 时成立, 下面证明结论对 n 也成立. 由归纳假设可知存在 $n-1$ 个不同元素 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in S$ 使得对任意满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}>0$ 的非负有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 均有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_{n-1}x_{n-1}\in\mathbb{I}. \tag{1.1}$$

把 S 中剩下的元素用 $x_n,x_{n+1},\cdots,x_{2n-1}$ 表示, 假定原结论对 n 不成立, 则对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 存在 $r_k\in\mathbb{Q}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n-1}b_{ik}x_i+c_kx_{n+k}=r_k, \tag{1.2}$$

这里 $b_{ik},c_k\in\mathbb{Q}^+,\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_{ik}+c_k>0$, 以及

$$\sum_{i=1}^{n-1}d_kx_{n+k}=R, \tag{1.3}$$

这里 $d_k\in\mathbb{Q}^+,\sum\limits_{i=1}^{n-1}d_k>0,R\in\mathbb{Q}$. 如果 $c_k=0$, 则 (1.2) 与 (1.1) 矛盾, 因此 $c_k\neq 0$, 不失一般性取 $c_k=1$. 考虑到 $x_{n+k}\in\mathbb{I}$, 在 (1.2) 中也有 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_{ik}>0$, 把 (1.2) 代入 (1.3) 得

$$\sum_{i=1}^{n-1}d_k\left(-\sum_{i=1}^{n-1}b_{ik}x_i+r_k\right)=R\quad\text{或者}\quad\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}d_kb_{ik}\right)x_i\in\mathbb{Q}$$

由 b 与 d 的限制条件可知这与 (1.1) 式矛盾, 因此原命题得证.

4. 设 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 并且假定 F 和 G 都是 $\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ 的线性算子, 满足 $F\circ G-G\circ F=\alpha F$.

(a) 证明对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均有 $F^k\circ G-G\circ F^k=\alpha kF^k$.

(b) 证明存在 $k\geqslant 1$ 使得 $F^k=0$.

证明

(a) 由假设可得

$$\begin{aligned}F^k\circ G-G\circ F^k&=\sum_{i=1}^{k}\left(F^{k-i+1}\circ G\circ F^{i-1}-F^{k-i}\circ G\circ F^i\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}F^{k-i}\circ(F\circ G-G\circ F)\circ F^{i-1}\\&=\sum_{i=1}^{k}F^{k-i}\circ\alpha F\alpha F^{i-1}=\alpha kF^k.\end{aligned}$$

(b) 考虑线性算子 $L(F)=F\circ G-G\circ F$, F 是 $n\times n$ 矩阵. L 最多有 n^2 个不同的特征值, 假定 $F^k\neq 0$ 对每个 k 都成立, 则由 (a) 可知 L 有无穷个不同的特征值 αk, 矛盾.

5. (a) 设 $f \in C[0,b], g \in C(\mathbb{R})$, g 是周期为 b 的函数. 证明当 $n \to \infty$ 时, $\int_0^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\,\mathrm{d}x.$$

解

(a) 设 $\|g\|_1 = \int_0^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$, 且

$$\omega(f,t) = \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in[0,b], |x-y| \leqslant t\}.$$

考虑到 f 的一致连续性可知当 $t\to 0$ 时, $\omega(f,t)\to 0$. 利用 g 的周期性可得

$$\begin{aligned}
\int_0^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}\left[f(x)-f\left(\frac{bk}{n}\right)\right]g(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{bk}{n}\right)\int_{b(k-1)/n}^{bk/n} g(nx)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{k=1}^n\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}\left[f(x)-f\left(\frac{bk}{n}\right)\right]g(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{bk}{n}\right)\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x + O\left(\omega\left(f,\frac{b}{n}\right)\|g\|_1\right) \\
&= \frac{1}{b}\sum_{k=1}^n\int_{b(k-1)/n}^{bk/m} f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{b}\sum_{k=1}^n\left(\frac{b}{n}f\left(\frac{bk}{n}\right)-\int_{b(k-1)/n}^{bk/n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + O\left(\omega\left(f,\frac{b}{n}\right)\|g\|_1\right) \\
&= \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x + O\left(\omega\left(f,\frac{b}{n}\right)\|g\|_1\right).
\end{aligned}$$

这就证明了原极限.

(b) 令 $b=\pi$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=(1+3\cos^2 x)^{-1}$, 由 (a) 以及

$$\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{\pi}\frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\,\mathrm{d}x = 1.$$

6. 设 $f\in C^2[0,N]$ 且 $|f''(x)|<1$, $f''(x)>0$ 对任意 $x\in[0,N]$ 成立. 再假定 $0\leqslant m_0<m_1<\cdots<m_k\leqslant N$ 均为整数, 且对 $i=1,2,\cdots,k$, $n_i f(m_i)$ 也都是整数. 令 $b_i = n_i - n_{i-1}$, $a_i = m_i - m_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,k$.

(a) 证明

$$-1<\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_2}{a_2}<\cdots<\frac{b_k}{a_k}<1.$$

(b) 证明对任意 $A>1$, 满足 $a_j>A$ 的指标 j 的个数不超过 $\frac{N}{A}$.

(c) 证明 $k\leqslant 3N^{\frac{2}{3}}$, 即在曲线 $y=f(x), x\in[0,N]$ 上整数点的个数不超过 $k\leqslant 3N^{\frac{2}{3}}$.

证明

(a) 对 $i=1,2,\cdots,k$, 我们有

$$b_i=f(m_i)-f(m_{i-1})=(m_i-m_{i-1})f'(x_i)$$

对某个 $x_i\in(m_{i-1},m_i)$ 成立. 因此 $\frac{b_i}{a_i}=f'(x_i)$, 故 $-1<\frac{b_i}{a_i}<1$. 由函数 f 的凸性可知 f' 为增函数, 因此 $\frac{b_i}{a_i}=f'(x_i)<f'(x_{i+1})=\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}$.

(b) 令 $S_A=\{j\in\{0,1,\cdots,k\}:a_j>A\}$. 则

$$N\geqslant m_k-m_0=\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant\sum_{j\in S_A}a_j>A\left|S_A\right|,$$

因此 $|S_A|<\frac{N}{A}$.

(c) 在 $(-1,1)$ 之间所有分母不超过 A 的分数的个数不超过 $2A^2$, 由 (b) 可知 $k<\frac{N}{A}+2A^2$. 令 $A=N^{\frac{1}{3}}$, 可知 $k\leqslant 3N^{\frac{2}{3}}$.

§ 1.2 第二天

1. 设 $f\in C^1[a,b]$, $f(a)=0$, 且假定 $\lambda>0$ 使得

$$|f'(x)|\leqslant\lambda|f(x)|$$

对任意 $x\in[a,b]$ 成立. 问 $f(x)=0$ 是否对任意 $x\in[0,1]$?

解 *方法一* 假定存在 $y\in[a,b]$ 使得 $f(y)\neq0$, 不妨设 $f(y)>0$. 考虑到 f 的连续性可知存在 $c\in[a,y)$ 使得 $f(c)=0$ 而 $f(x)>0$ 对 $x\in(a,y]$ 都成立.

由题目中的不等式考虑 $g(x)=\log f(x)-\lambda x$ 是 $(c,y]$, 则 $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\lambda\leqslant0$. 因此对任意 $x\in(c,y]$ 均有 $\log f(x)-\lambda x\geqslant\log f(y)-\lambda y$, 即 $f(x)\geqslant\mathrm{e}^{\lambda x-\lambda y}f(y)$, 故

$$0=f(c)=f(c+)\geqslant\mathrm{e}^{\lambda c-\lambda y}f(y)>0.$$

矛盾, 这就意味着 $f(x)\equiv0, x\in[a,b]$.

方法二 设 $K\in\mathbb{N}_+$ 充分大使得 $\delta=\frac{b-a}{K}<\frac{1}{2\lambda}$, 则我们只需证明 $f(x)=0$ 在 $[a,a+\delta]$ 上成立即可.

设 $|f(x)|$ 在 $[a, a+\delta]$ 上的最大值为 M. 对任意 $x \in (a, a+\delta]$, 由条件及 Lagrange 中值定理可得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a)| = \left|f'(x_1)(x-a)\right| < \delta \left|f'(x_1)\right| < \delta\lambda |f(x_1)| \\ &< \frac{1}{2}|f(x_1)| < \frac{1}{2}\delta \left|f'(x_2)\right| < \frac{1}{2^2}|f(x_2)| < \cdots \frac{1}{2^n}|f(x_n)| \leqslant \frac{M}{2^n}, \end{aligned}$$

其中 $a < x_n < x_1 < \cdots < x_1 < x$. 注意到上面的不等式对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都成立, 因此令 $n \to \infty$ 可知 $f(x) = 0$, 证毕.

2. 设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 - y^2) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

(a) 证明 f 客气取到它的最大值和最小值.

(b) 求出所有满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ 的点 (x, y), 并判断哪些点取到局部或全局极值.

解

(a) 首先有 $f(1, 0) = \mathrm{e}^{-1}$, $f(0, 1) = -\mathrm{e}^{-1}$, 且当 $t \geqslant 2$ 时, $t\mathrm{e}^{-t} \leqslant 2\mathrm{e}^{-2}$. 因此

$$\left\{ f(x, y) \leqslant \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-2x} < \mathrm{e}^{-1}, \forall (x, y) \notin M \right\},$$

这里 $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, 故 f 不可能在 M 之外取到它的最值. 再由 f 的连续性和 M 的紧性可知 f 在 M 内取到其最大最小值.

(b) 先求驻点得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\left(1 - x^2 + y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\left(1 + x^2 - y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}.$$

上述方程的所有解为 $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$. $f(1, 0) = f(-1, 0) = \mathrm{e}^{-1}$ 是 f 的全局极大值. $f(0, 1) = f(0, -1) = -\mathrm{e}^{-1}$ 是 f 的全局极小值. $(0, 0)$ 不是极值点, 因为 $x \neq 0$ 时 $f(x, 0) = x^2\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, 而 $y \neq 0$ 时 $f(0, y) = -y^2\mathrm{e}^{-y^2} < 0$.

3. 设 f 是实值函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上有 $n+1$ 阶导数. 证明对每个满足

$$\log\left(\frac{f(b) + f'(b) + \cdots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \cdots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a$$

的实数对 a, b $(a < b)$, 都存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$f^{(n+1)}(c) = f(c).$$

证明 令

$$g(x) = \left(f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

由条件可知 $g(a) = g(b)$. 因此由 Rolle 定理知存在 $c \in (a, b)$ 使得 $g'(c) = 0$. 注意到 $g'(x) = \left(f^{(n+1)}(x) - f(x)\right)\mathrm{e}^{-x}$, 得证.

4. 设 A 为 $n\times n$ 对角矩阵, 且特征多项式为

$$(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}\cdots(x-c_k)^{d_k},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 互不相同且 $d_1+d_2+\cdots+d_k=n$. 设 V 是所有满足 $AB=BA$ 的 $n\times n$ 矩阵 B 构成的空间. 证明 V 的维数为

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_k^2.$$

证明 设

$$A=(a_{ij})_{i,j=1}^n,\ B=(b_{ij})_{i,j=1}^n,\ AB=(x_{ij})_{i,j=1}^n,\ BA=(y_{ij})_{i,j=1}^n.$$

则 $x_{ij}=a_{ii}b_{ij}, y_{ij}=a_{jj}b_{ij}$. 因此 $AB=BA$ 等价于 $(a_{ii}-a_{jj})b_{ij}=0$ 对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$ 成立. 因此当 $a_{ii}\neq a_{jj}$ 时 $b_{ij}=0$, 当 $a_{ii}=a_{jj}$ 时 b_{ij} 可以任意. 而满足 $a_{ii}=a_{jj}=c_m$ 的数对 (i,j) 的数目为 $d_m^2, m=1,2,\cdots,k$. 因此这就证得所要结果.

5. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 都是 m 维 Euclid 空间中的向量, 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k=0$. 证明存在一个 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的置换使得

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_{\pi(\mathrm{i})}\right\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^k\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对每个 $n=1,2,\cdots,k$ 都成立. 这里 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数.

证明 我们通过递归方法定义 π. 令 $\pi(1)=1$, 假定对 $i=1,2,\cdots,n$, π 已经定义, 并且

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_{\pi(\mathrm{i})}\right\|^2\leqslant\sum_{i=1}^k\|x_i\|. \tag{1.4}$$

注意到 (1.4) 式 $n=1$ 是成立的, 我们选择 $\pi(n+1)$ 使得 (1.4) 对 $n+1$ 也成立. 令 $y=\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)}$,$A=\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{\pi(i):i=1,2,\cdots,n\}$. 假定 $(y,x_r)>0$ 对所有 $r\in A$ 成立, 则 $\left(y,\sum_{r\in A}x_r\right)>0$. 而考虑到 $y+\sum_{r\in A}x_r=0$, 我们得到 $-(y,y)>0$, 而这是不可能的, 因此必存在 $r\in A$ 使得

$$(t,x_r)\leqslant 0. \tag{1.5}$$

令 $\pi(n+1)=r$. 则由 (1.5) 和 (1.4) 我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n+1} x_{\pi(i)}\right\|^2&=\|y+x_r\|^2=\|y\|^2+2(y,x_r)+\|x_r\|^2\\&\leqslant\|y\|^2+\|x_r\|^2\leqslant\sum_{i=1}^n\|x_{\pi(i)}\|^2+\|x_r\|^2=\sum_{i=1}^{n+1}\|x_{\pi(i)}\|^2.\end{aligned}$$

这就说明 (1.4) 对 $n+1$ 也成立. 因此我们可以对 $n=1,2,\cdots,k$ 都定义 π, 最后我们可从 (1.4) 得到

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)}\right\|^2\leqslant\sum_{i=1}^n\|x_{\pi(i)}\|^2\leqslant\sum_{i=1}^k\|x_i\|^2.$$

6. 求极限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}.$$

解　显然

$$A_N=\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}\geqslant\frac{\log^2 N}{N}\cdot\frac{N-3}{\log^2 N}=1-\frac{3}{N}.\tag{1.6}$$

取 M 满足 $2\leqslant M<\frac{N}{2}$, 则由 $\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}$ 在 $\left(2,\frac{N}{2}\right)$ 单调递减, 以及表达式关于 $\frac{N}{2}$ 的对称性可得

$$\begin{aligned}A_N&=\frac{\log^2 N}{N}\left\{\sum_{k=2}^{M}+\sum_{k=M+1}^{N-M-1}+\sum_{k=N-M}^{N-2}1\right\}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}\\&\leqslant\frac{\log^2 N}{N}\left\{2\frac{M-1}{\log 2\cdot\log(N-2)}+\frac{N-2M-1}{\log M\cdot\log(N-M)}\right\}\\&\leqslant\frac{2}{\log 2}\cdot\frac{M\log N}{N}+\left(1-\frac{2M}{N}\right)\frac{\log N}{\log M}+O\left(\frac{1}{\log N}\right).\end{aligned}$$

取 $M=\left[\frac{N}{\log^2 N}\right]+1$ 得到

$$\begin{aligned}A_N&\leqslant\left(1-\frac{2}{N\log^2 N}\right)\frac{\log N}{\log N-2\log(\log N)}+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\\&\leqslant 1+O\left(\frac{\log(\log N)}{\log N}\right)\end{aligned}\tag{1.7}$$

由 (1.6) 和 (1.7) 得到

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log^2 N}{N}\sum_{k=2}^{N-2}\frac{1}{\log k\cdot\log(N-k)}=1.$$

2. 1995 年国际大学生数学竞赛 Plovdiv, Bulgaria

§ 2.1 第一天

1. 设 X 是一个非奇异矩阵, 其各列为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 设 Y 表示由 $X_2, X_3, \cdots, X_n, 0$ 为列组成的矩阵. 证明矩阵 $A = YX^{-1}$ 和 $B = X^{-1}Y$ 的秩均为 1, 且只有零特征值.

证明 设 $J = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵, 当 $i = j + 1$ 时 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 则 $\operatorname{rank} J = n - 1$, 且 J 只有零特征值. 而且 $Y = XJ, A = YX^{-1} = XJX^{-1}, B = X^{-1}Y = J$, 原命题得证.

2. 设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数使得对每个 $x \in [0, 1]$ 都有 $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1 - x^2}{2}$, 证明 $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}$.

证明 由题目中的不等式得

$$0 \leqslant \int_0^1 (f(x) - x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

由假设我们有

$$\int_0^1 \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \frac{1 - x^2}{2}\mathrm{d}x.$$

即 $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{3}$, 故原不等式成立.

3. 设 f 是 $(0, +\infty)$ 内的二阶连续可微函数, 满足 $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} f''(x) = +\infty$. 证明

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

证明 由于当 $x \to 0^+$ 时, $f'(x) \to -\infty. f''(x) \to +\infty$, 因此存在区间 $(0, r)$ 使得 $f'(x) < 0$ 和 $f''(x) > 0$ 对所有 $x \in (0, r)$ 都成立. 因此 f 在 $(0, r)$ 内单调递减而 f' 在 $(0, r)$ 内单调递增. 由 Lagrange 中值定理可知对每个 $0 < x < x_0 < r$ 有

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

其中 $\xi \in (x, x_0)$. 考虑到 f' 的递增性, $f'(x) < f'(\xi) < 0$, 我们得到

$$x - x_0 = \frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x - x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x)} \leqslant 0.$$

令 $x \to 0^+$ 得

$$-x_0 \leqslant \liminf_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant \limsup_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant 0$$

对任意 $x_0 \in (0, r)$ 都成立, 因此利用夹逼准则得

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

4. 设函数 $F : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.$$

证明 F 是一对一的, 并求出 F 值域.

证明 由定义有

$$F'(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad x > 1$$

因此 $F'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内都成立, 故 F 是严格单调增加的, 自然是一对一的.

由于

$$F(x) \geqslant \left(x^2 - x\right) \min\left\{\frac{1}{\log t} : x \leqslant t \leqslant x^2\right\} = \frac{x^2 - x}{\log\left(x^2\right)},$$

可知当 $x \to +\infty$ 时, $F(x) \to +\infty$, 因此 F 的值域为 $(F(1+), +\infty)$. 为了计算 $F(1+)$, 在 F 的定义中令 $t = \mathrm{e}^v$, 则 $F(x) = \displaystyle\int_{\log x}^{2\log x} \frac{\mathrm{e}^v}{v}\mathrm{d}v$. 因此

$$F(x) < \mathrm{e}^{2\log x} \int_{\log x}^{2\log x} \frac{1}{v}\mathrm{d}x = x^2 \log 2, \quad F(x) > \mathrm{e}^{\log x} \int_{\log x}^{2\log x} \frac{1}{v}\mathrm{d}x = x \log 2.$$

这就说明 $F(1+) = \log 2$.

5. 设 A 和 B 均为 $n \times n$ 实矩阵. 假定存在 $n+1$ 个不同实数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$ 使得矩阵

$$C_i = A + t_i B, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1$$

都是幂零矩阵 (即 $C_i^n = O$). 证明 A 和 B 都是幂零的.

证明 首先有

$$(A + tB)^n = A^n + tP_1 + t^2 P_2 + \cdots + t^{n-1} P_{n-1} + t^n B^n.$$

这里 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 是不依赖于 t 的矩阵.

假定 $a, p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, b$ 分别表示 $A^n, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, B^n$ 对应的 (i, j) 元. 则多项式

$$bt^n + p_{n-1}t^{n-1} + \cdots + p_1 t + a$$

至少有 $n+1$ 个根 $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}$, 故此多项式的系数均为零, 于是 $A^n = O, B^n = O, P_1 = O$, 即 A 与 B 都是幂零的.

6. 设 $p>1$. 证明存在常数 $K_p>0$ 使得对每个 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足 $|x|^p+|y|^p=2$ 时, 我们有

$$(x-y)^2\leqslant K_p\left(4-(x+y)^2\right).$$

证明 设 $0<\delta<1$. 首先我们证明存在 $K_{p,\delta}>0$ 使得

$$f(x,y)=\frac{(x-y)^2}{4-(x+y)^2}\leqslant K_{p,\delta}$$

对每个 $(x,y)\in D_\delta=\left\{(x,y):|x-y|\geqslant\delta,|x|^p+|y|^p=2\right\}$.

由于 D_δ 是紧的, 我们只需要证明 f 在 D_δ 内连续即可, 这只要证明 f 的分母非零即可. 反证法, 则 $|x+y|=2$, 且 $\left|\frac{x+y}{2}\right|^p=1$. 由于 $p>1$, 函数 $g(t)=|t|^p$ 是严格凸函数, 即 $x\neq y$ 时 $\left|\frac{x+y}{2}\right|^p<\frac{|x|^p+|y|^p}{2}$. 因此存在某个 $(x,y)\in D_\delta$ 使得

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p<\frac{|x|^p+|y|^p}{2}=1=\left|\frac{x+y}{2}\right|^p,$$

矛盾.

如果 x 与 y 异号, 则 $(x,y)\in D_\delta$ 对所有 $0<\delta<1$ 都成立, 因为 $|x-y|\geqslant\max\{|x|,|y|\geqslant 1>\delta\}$. 因此不妨设 $x>0,y>0$ 且 $x^p+y^p=2$. 令 $x=1+t$, 则

$$\begin{aligned}
y&=\left(2-x^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(2-(1+t)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(2-\left(1+pt+\frac{p(p-1)}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(1-pt-\frac{p(p-1)}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=1-t-\frac{p-1}{2}t^2+o\left(t^2\right)-\frac{p-1}{2}t^2+o\left(t^2\right)\\
&=1-t-(p-1)t^2+o\left(t^2\right).
\end{aligned}$$

于是有

$$(x-y)^2=(2t+o(t))^2=4t^2+o\left(t^2\right)$$

以及

$$\begin{aligned}
4-(x+y)^2&=4-\left(2-(p-1)t^2+o\left(t^2\right)\right)^2=4-4+4(p-1)t^2+o\left(t^2\right)\\
&=4(p-1)t^2+o\left(t^2\right).
\end{aligned}$$

所有存在 $\delta_p>0$ 使得当 $|t|<\delta_p$ 时有 $(x-y)^2<5t^2, 4-(+y)^2>3(p-1)t^2$, 则

$$(x-y)^2<5t^2=\frac{5}{3(p-1)}\cdot 3(p-1)t^2<\frac{5}{3(p-1)}\left(4-(x+y)^2\right) \tag{2.1}$$

如果 $|x-1|<\delta_p$, 由对称性知 (2.1) 式对 $|y-1|<\delta_p$ 仍然成立.

要证明结论只需要说明当 $|x-1|\geqslant\delta_p,|y-1|\geqslant\delta_p$ 以及 $x^p+y^p=2$ 时 $|x-y|\geqslant 2\delta_p$ 成立即可. 显然由 $x^p+y^p=2$ 可知 $\max\{x,y\}\geqslant 1$, 于是可令 $x-1\geqslant\delta_p$. 由于 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^p\leqslant\frac{x^p+y^p}{2}=1$, 故 $x+y\leqslant 2$, 则 $x-y\geqslant 2(x-1)\geqslant 2\delta_p$.

§ 2.2 第二天

1. 设 A 是 3×3 实矩阵, 满足对任意列向量 $u\in\mathbb{R}^3$, 向量 Au 和 u 正交. 证明:

(a) $A^{\mathrm{T}}=-A$, 这里 A^{T} 表示 A 的转置.

(b) 存在一个先看过了 $v\in\mathbb{R}^3$ 使得 $Au=v\times u$ 对任意 $u\in\mathbb{R}^3$ 都成立. 这里 $v\times u$ 表示 u 与 v 的向量积.

证明

(a) 设 $A+(a_{ij}), u=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$. 根据正交性条件 $(Au,u)=0$, 对 $k=1,2,3$, 分别取 $u_i=\delta_{ik}$ 可得到 $a_{kk}=0$. 如果对 $k,m=1,2,3$, 分别取 $u_i=\delta_{ik}+\delta_{im}$ 可得

$$a_{kk}+a_{km}+a_{mk}+a_{mm}=0.$$

因此 $a_{km}=-a_{mk}$, 即证得 $A^{\mathrm{T}}=-A$.

(b) 令 $v_1=-a_{23}, v_2=a_{13}, v_3=-a_{12}$. 则

$$Au=(v_2u_3-v_3u_2,v_3u_1-v_1u_3,v_1u_2-v_2u_1)^{\mathrm{T}}=v\times v.$$

2. 设 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是正实数列, 满足 $b_0=1, b_n=2+\sqrt{b_{n-1}}-2\sqrt{1+\sqrt{b_{n-1}}}$. 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n2^n.$$

解　令 $a_n=1+\sqrt{b_n}, n\geqslant 0$, 则 $a_0=2, a_n>1$, 且

$$a_n=1+\sqrt{1+a_{n-1}-2\sqrt{a_{n-1}}}=\sqrt{a_{n-1}}.$$

所以 $a_n=2^{2^{-n}}$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}b_n2^n&=\sum_{n=1}^{N}(a_n-1)^2\,2^n=\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 2^n-a_n2^{n+1}+2^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\left[(a_{n-1}-1)\,2^n-(a_n-1)\,2^{n+1}\right]\\&=2\,(a_0-1)-(a_N-1)\,2^{N+1}=2-2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}.\end{aligned}$$

令 $x=2^{-N}$, 则当 $N\to\infty$ 时, $x\to 0$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n2^n=\lim_{N\to\infty}\left(2-2\frac{2^{2^{-N}}-1}{2^{-N}}\right)=2-2\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=2-\log 2.$$

3. 设 n 次复系数多项式 $P(z)$ 的所有根都在复平面的单位圆上. 证明多项式

$$2zP'(z)-nP(z)$$

的所有根也在同样的圆上.

证明 不妨假定 $P(z)$ 的最高次项系数为 1, 故可设

$$P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n),$$

这里 $|\alpha_i|=1, i=1,2,\cdots,n$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以相同.

我们有

$$\begin{aligned}Q(z)&=2zP(z)-nP(z)\\&=(z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)+(z-\alpha_1)(z+\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)\\&\quad+\cdots+(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z+\alpha_n).\end{aligned}$$

因此, $\dfrac{Q(z)}{P(z)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k}$. 由于 $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z+a}{z-a}\right)=\dfrac{|z|^2-|\alpha|^2}{|z-\alpha|^2}$ 对所有的复数 $z,\alpha,z\neq\alpha$ 都成立, 那么在这里有

$$\operatorname{Re}\frac{Q(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^2-1}{|z-\alpha_k|^2}.$$

于是当 $|z|\neq 1$ 时, $\operatorname{Re}\dfrac{Q(z)}{P(z)}\neq 0$. 因此当 $Q(z)=0$ 时, 必有 $|z|=1$.

4. (a) 证明对任意 $\varepsilon>0$ 都存在正整数 n 和实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 使得

$$\max_{x\in[-1,,1]}\left|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{2k+1}\right|<\varepsilon.$$

(b) 证明对每个 $[-1,1]$ 上的奇函数和任意 $\varepsilon>0$ 都存在正整数 n 和实数 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 使得

$$\max_{x\in[-1,,1]}\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\mu_k x^{2k+1}\right|<\varepsilon.$$

证明

(a) 取 n 使得 $\left(1-\varepsilon^2\right)^n\leqslant\varepsilon$, 则 $\left|x\left(1-x^2\right)^n\right|<\varepsilon$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 都成立. 取 $\lambda_k=(-1)^{k+1}\dbinom{n}{k}$ 即可满足条件, 因为

$$x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k+1}=x\left(1-x^2\right)^n.$$

(b) 利用 Weirstrass 逼近定理可知存在多项式 $p(x)$ 使得

$$\max_{x\in[-1,1]}|f(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $q(x)=\dfrac{1}{2}[p(x)-p(-x)]$, 则

$$f(x)-q(x)=\frac{1}{2}[f(x)-p(x)]-\frac{1}{2}[f(-x)-p(-x)].$$

并且

$$\max_{|x|\leqslant 1}|f(x)-g(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max_{|x|\leqslant 1}|f(x)-p(x)|+\frac{1}{2}\max_{|x|\leqslant 1}|f(-x)-p(-x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

但是 q 为奇多项式, 因此它可以写成

$$q(x)=\sum_{k=0}^{m}b_kx^{2k+1}=b_0x+\sum_{k=1}^{m}b_kx^{2k+1}.$$

如果 $b_0=0$, 则 (2.2) 式即证明了结论. 如果 $b_0\neq 0$, 则在第一问中用 $\dfrac{\varepsilon}{2|b_0|}$ 代替 ε 可得到

$$\max_{|x|\leqslant 1}\left|b_0x-\sum_{k=1}^{n}b_0\lambda_kx^{2k+1}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

对某个合适的正整数 n 以及实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则由 (2.2) 式与 (2.3) 式可知原命题对 $\max\{n,m\}$ 成立, 而不是 n.

5. (a) 对任意具有形式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\cos x+\sum_{n=2}^{N}a_n\cos(nx)$$

的函数 f, 且 $|a_0|<1$, 必在一个周期 $[0,2\pi)$ 内既取正值也有负值.

(b) 证明函数

$$F(x)=\sum_{n=1}^{100}\cos\left(n^{\frac{3}{2}}x\right)$$

在 $(0,1000)$ 内至少有 40 个零点.

证明

(a) 考虑积分

$$\int_0^{2\pi}f(x)(1\pm\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi(a_0\pm 1).$$

如果 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立, 则 $a_0\geqslant 1$. 如果 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立, 则 $a_0\leqslant -1$. 这都与题目假设矛盾, 因此 $f(x)$ 必在 $[0,2\pi)$ 内既取正值, 又取负值.

(b) 我们将证明对每个正整数 N 和每个实数 $h\geqslant 24$, 每个实数 y, 函数

$$F_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\cos\left(n^{\frac{3}{2}}x\right)$$

都在区间 $(y,y+h)$ 内改变符号.

考虑积分

$$I_1=\int_y^{y+h}F_N(x)\,\mathrm{d}x,\qquad I_2=\int_y^{y+h}F_N\cos x\,\mathrm{d}x.$$

如果 $F_N(x)$ 在 $(y,y+h)$ 内不改变符号, 则

$$|I_2| \leqslant \int_y^{y+h} |F_N(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_y^{y+h} F_N(x)\,\mathrm{d}x\right| = |I_1|.$$

因此, 只需要证明 $|I_2| > |I_1|$ 即可.

显然, 对每个 $\alpha \neq 0$, 我们有

$$\left|\int_y^{y+h} \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}.$$

因此

$$|I_1| = \left|\sum_{n=1}^{N}\int_y^{y+h} \cos\left(n^{\frac{3}{2}}x\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < 2\left(1+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}\right) = 6. \tag{2.4}$$

而另一方面又有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{n=1}^{N}\int_y^{y+h} \cos x\cos\left(n^{\frac{3}{2}}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_y^{y+h}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\int_y^{y+h}\left(\cos\left(n^{\frac{3}{2}}-1\right)x + \cos\left(n^{\frac{3}{2}}+1\right)x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}+\Delta,
\end{aligned}$$

其中

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\left(1+2\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-1}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}+1}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-1}.$$

当 $n \geqslant 3$ 时, $n^{\frac{3}{2}}-1 \geqslant \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$, 于是

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}+\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}+1}+3\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}-1}+3\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} < 6.$$

因此

$$|I_2| > \frac{1}{2}h - 6. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 式, 以及 $h \geqslant 24$, 我们得到 $|I_2| > |I_1|$, 这就完成了证明.

6. 假定 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数列, 满足

$$\int_0^1 f_m(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}$$

且

$$\sup\{|f_n(x)| : x\in[0,1], n=1,2,\cdots\} < +\infty.$$

证明不存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ 对任意 $x\in[0,1]$ 都存在.

证明 显然我们可以加一些满足题目假设的函数 $\{g_m\}$, 使得 $\{f_n\}\cap\{g_m\}$ 的有限线性组合为 $L^2[0,1]$, 因此不妨假设 $\{f_n\}$ 生成了 $L^2[0,1]$.

假定有子列 $\{n_k\}$ 和函数 f 使得对任意 $x \in [0,1]$ 都有

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x).$$

固定 $m \in \mathbb{N}$, 由 Lebesgue 定理可知

$$0 = \int_0^1 f_m(x) f_{n_k}(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_0^1 f_m(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_0^1 f_m(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$ 对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都成立, 这意味着 $f(x) = 0$ 几乎处处成立, 再次利用 Lebesgue 定理我们得到

$$1 = \int_0^1 f_k^2(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

矛盾, 这就证明原命题.

3. 1996 年国际大学生数学竞赛 Plovdiv, Bulgaria

§ 3.1 第一天

1. 假定对 $j=0,1,\cdots,n$, $a_j=a_0+jd$, 这里 a_0,d 都是固定的实数. 令

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

计算 $\det(A)$, 这里 $\det(A)$ 表示 A 的行列式.

解 为简便起见, 我们用 $|A|$ 代替 $\det(A)$. 将 A 的第一列加到 A 的最后一列得到

$$|A|=(a_0+a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

从最后一行开始每一行减去上一行得到

$$|A|=(a_0+a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\ d & -d & -d & \cdots & 0 \\ d & d & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \cdots & d \end{vmatrix}.$$

因此

$$|A| = (-1)^n (a_0 + a_n) \begin{vmatrix} d & -d & -d & \cdots & -d \\ d & -d & -d & \cdots & -d \\ d & d & -d & \cdots & -d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

把最后一行再加到其他个行可得

$$|A| = (-1)^n (a_0 + a_n) \begin{vmatrix} 2d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2d & 2d & 0 & \cdots & 0 \\ 2d & 2d & 2d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \cdots & d \end{vmatrix} = (-1)^n (a_0 + a_n) 2^{n-1} d^n.$$

2. 设 $n \in \mathbb{N}$, 计算下面的积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x} \mathrm{d}x.$$

解 首先利用对称区间的积分公式

$$\int_{-a}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} (f(x) + f(-x)) \, \mathrm{d}x$$

可得

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x} \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} \left(\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} \left(\frac{1}{1+2^x} + \frac{x}{1+2^x} \right) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

当 $n \geqslant 2$ 时, 我们有

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx) - \sin(n-2)x}{\sin x} \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} \cos(n-1) x \mathrm{d}x = 0.$$

因此由 $I_0 = 0, I_1 = \pi$ 可知

$$I_n = \begin{cases} 0, & n \text{为偶数} \\ \pi, & n \text{为奇数} \end{cases}$$

3. 向量空间 V 上的线性算子 A 称为对合的是指 $A^2 = E$, 这里 E 是 V 上的单位算子. 设 $\dim V = n < \infty$.

(a) 证明对 V 上的每个对合算子 A, 都 A 一组的特征向量构成的 V 的一组基.

(b) 求出 V 上两两可交换的对合算子的最大数目.

解

(a) 由于 $A^2 = E$, 因此 A 的特征值为 ± 1, 且显然 A 最小多项式没有重根, 因此 A 可对角化, 即存在 A 的一组特征向量构成 V 的一组基.

(b) 设 $\{A_i : i \in I\}$ 是 V 上的一组两两可交换, 且可对角化的算子, 并且假定 A_1 是其中一个算子. 选择 A_1 的一个特征值 λ, 令 $V_\lambda = \{v \in V : A_1 v = \lambda v\}$, 则 V_λ 是 V 的一个子空间, 并且 $A_1 A_i = A_i A_1$ 对每个 $i \in I$ 都成立, 因此 V_λ 是每个 A_i 的不变子空间.

如果 $V_\lambda = V$, 则 A_1 要么是 E 要么是 $-E$, 并且我们可以着手下一个算子 A_i. 如果 $V_\lambda \neq V$, 则我们对 $\dim V = n$ 进行递归定义, 使得可以找到所有 A_i 的一组公共特征向量, 使得 $\{A_i : i \in I\}$ 可以同时对角化 (矩阵可交换的充要条件为它们可以同时对角化).

如果它们都是对合的, 则 $|I| \leqslant 2^n$, 因为对角元的选择只有 ± 1, 而且这是可以刚好取等的, 因此两两可交换的对合算子的最大数目为 2^n.

4. 设 $a_1 = 1, a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\ (n \geqslant 2)$, 证明

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \dfrac{2}{3}$.

证明

(a) 我们用归纳法证明

$$a_n \leqslant q^n, \quad n \geqslant 3 \tag{3.1}$$

其中 $q = 0.7 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

首先有 $a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}, a_3 = \dfrac{1}{3}, a_4 = \dfrac{11}{48}$. 因此 (3.1) 式对 $n = 3, 4$ 都成立, 现在假定 (3.1) 式对 $n \geqslant N-1 (N \geqslant 1)$ 成立, 则

$$a_N = \frac{2}{N}a_{N-1} + \frac{1}{N}a_{N-2} + \frac{1}{N}\sum_{k=3}^{N-3} a_k a_{N-k} \leqslant \frac{2}{N}q^{N-2} + \frac{N-5}{N}q^N \leqslant q^N,$$

这里是因为 $\dfrac{2}{q} + \dfrac{1}{q^2} \leqslant 5$.

(b) 这里也用归纳法证明

$$a_n \geqslant p^n, \quad n \geqslant 2$$

其中 $p = \dfrac{2}{3}$. 首先有 $a_2 = \dfrac{1}{2} > \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = p^2$, 同样我们假定不等式对 $n \geqslant N-1 (N \geqslant 3)$ 成立, 则

$$a_N = \frac{2}{N}a_{N-1} + \frac{1}{N}a_{N-2} + \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{N-2} a_k a_{N-k} \geqslant \frac{2}{N}p^{N-1} + \frac{N-3}{N}p^N = p^N,$$

这里是因为 $2q = 3$.

5. (a) 设 a, b 是实数, 且满足 $b \leqslant 0, 1 + ax + bx^2 \geqslant 0$ 对任意 $x \in [0,1]$ 成立. 证明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \left(1 + ax + bx^2\right)^n \mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}, & a < 0 \\ +\infty, & a \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) 设 $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ 是二阶连续可导的函数, 并且假定 $f''(x)\leqslant 0$ 对 $x\in[0,1]$ 都成立. 假定极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 且 $0<L<+\infty$. 证明 $f'(x)$ 的符号不变, 且

$$\min_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|=\frac{1}{L}.$$

证明

(a) 如果 $a<0$, 令 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-(1+ax+bx^2)$. 则由 $f(0)=f'(0)=0$ 以及 $f''(x)=a^2\mathrm{e}^{ax}-2b>0$ 可知对任意 $x>0$ 有

$$0<\mathrm{e}^{ax}-\left(1+ax+bx^2\right)<cx^2,$$

这里 $c=\dfrac{a^2}{2}-b$, 因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{anx}-\left(1+ax+bx^2\right)^n&=\left(\mathrm{e}^{ax}-\left(1+ax+bx^2\right)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{akx}\left(1+ax+bx^2\right)^{n-1-k}\\&<cx^2\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{akx}\left(\mathrm{e}^{ax}\right)^{n-1-k}=cx^2n\mathrm{e}^{a(n-1)x}.\end{aligned}$$

于是

$$0<n\int_0^1\mathrm{e}^{anx}\mathrm{d}x-n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x<cn^2\int_0^1x^2\mathrm{e}^{a(n-1)x}\mathrm{d}x.$$

利用

$$n\int_0^1\mathrm{e}^{anx}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{na}-1}{a}\xrightarrow{n\to\infty}-\frac{1}{a}$$

以及

$$\int_0^1x^2\mathrm{e}^{a(n-1)x}\mathrm{d}x<\frac{1}{|a|^3(n-1)^3}\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\xrightarrow{n\to\infty}0$$

可知 $a<0$ 时, 原极限为 $-\dfrac{1}{a}$.

如果 $a\geqslant 0$, 取 n 充分大, 则

$$\begin{aligned}n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x&>n\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\left(1+bx^2\right)\mathrm{d}x\\&>n\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{b}{n+1}\right)^n>\frac{n}{\sqrt{n+1}}\mathrm{e}^b\xrightarrow{n\to\infty}\infty.\end{aligned}$$

因此当 $a\geqslant 0$ 时极限为 $+\infty$.

(b) 记 $I_n=n\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x,\ M=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$.

如果 $M<1$, 则 $I_n\leqslant nM^n\xrightarrow{n\to\infty}0$, 矛盾.

如果 $M>1$, 由 f 的连续性可知存在区间 $I\subset[0,1],|I|>0$ 使得 $f(x)>1$ 对任意 $x\in I$ 成立. 则 $I_n\geqslant n|I|\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$, 也矛盾, 因此 $M=1$.

现在我们就来证明 $f'(x)$ 符号不变, 否则的话设 $f'(x_0)=0$ 对某个 $x_0\in(0,1)$ 成立, 则由 $f''(x)\leqslant 0$ 可知 $f(x_0)=M=1$. 取 h 使得 $x_0+h\in[0,1]$, $f(x_0+h)=1+\dfrac{h^2}{2}f''(\xi)$, $\xi\in(x_0,x_0+h)$. 令 $m=\min\limits_{x\in[0,1]}f''(x)$, 则 $f(x_0)\geqslant 1+\dfrac{h^2}{2}m$.

取 $\delta>0$ 使得 $1+\dfrac{\delta^2}{2}m>0$ 且 $x_0+\delta<1$, 则由 (a) 可知

$$I_n\geqslant n\int_{x_0}^{x_0+\delta}f^n(x)\,\mathrm{d}x\geqslant n\int_0^{\delta}\left(1+\frac{m}{2}h^2\right)^n\mathrm{d}h\xrightarrow{n\to\infty}+\infty,$$

矛盾, 因此 f 必为单调函数, 故 $M=f(0)$ 或 $M=f(1)$.

如果 $M=f(0)=1$, 取 $h\in[0,1]$, 有

$$1+hf'(0)\geqslant f(h)\geqslant 1+hf'(0)+\frac{m}{2}h^2,$$

其中 $f'(0)\neq 0$. 由于 $f(0)=M$, 则 $f(x)$ 单调递减, 因此 $f'(0)<0$. 设 $0<A<1$ 使得 $1+Af'(0)+\dfrac{m}{2}A^2>0$, 则

$$n\int_0^A(1+hf'(0))^n\,\mathrm{d}h\geqslant n\int_0^A f^n(x)\,\mathrm{d}h\geqslant n\int_0^A\left(1+hf'(0)+\frac{m}{2}h^2\right)\mathrm{d}h.$$

由 (a) 可知上述不等式的左边和右边当 $n\to\infty$ 时极限均为 $-\dfrac{1}{f'(0)}$, 因此中间的式子极限也是 $-\dfrac{1}{f'(0)}$.

而且

$$n\int_A^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant nf^n(A)\xrightarrow{n\to\infty}0\,(f(A)<1),$$

因此 $L=-\dfrac{1}{f'(0)}$, 如果 $M=f(1)$, 则是同理有 $L=-\dfrac{1}{f'(0)}$.

6. $\mathbb{R}^2$ 的一个子集 E 的上容量 (upper content) 定义为

$$\mathcal{C}(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\mathrm{diam}(E_i)\right\},$$

其中 inf 是对 $\mathbb{R}^2$ 中的所有满足 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^n E_i$ 的有限集族 $E_1,\cdots,E_n$ 取下确界.

E 的下容量 (lower content) 定义为

$$\mathcal{K}(E)=\sup\left\{|L|:L\text{是一条闭线段使得映射}E\mapsto L\text{是可收缩的}\right\}.$$

证明

(a) 如果 L 是一条闭线段, 则 $\mathcal{C}(L)=|L|$.

(b) $\mathcal{C}(E)\geqslant\mathcal{K}(E)$.

(c) (b) 中的等号即便对 E 是紧集也不一定成立.

提示：如果 $E = T \cup T'$, 其中 T 是以 $(-2,2),(2,2)$ 和 $(0,4)$ 为顶点的三角形, 而 T' 关于 x 轴对称, 则 $\mathcal{C}(E) = 8 > \mathcal{K}(E)$.

注 本题中所有的距离均为 Euclid 距离. 集合 E 的直径为

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}.$$

从集合 E 到集合 F 的收缩是一个映射 $f : E \mapsto F$ 使得 $d(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y)$ 对任意 $x, y \in E$ 都成立. 人如果存在一个从 E 到 F 的收缩 f, 即 $f(E) = F$, 就称 E 可收缩到 F. 三角形指的是三条边加上它的顶点, 但不包括其内部.

证明

(a) 如果取 $E_1 = L$, 则 $E \subset E_1$, 于是有 $\mathcal{C}(L) \leqslant |L|$. 如果 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, 我们用归纳法证明 $\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(E_i) \geqslant |L|$.

$n = 1$ 显然, 假定不等式对 n 成立. 设 E_{n+1} 包含 L 的端点 a, 定义线段

$$L_\varepsilon = \{x \in L : d(x,a) \geqslant \operatorname{diam}(E_{n+1}) + \varepsilon\}.$$

由归纳假设可得

$$\sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{diam}(E_i) \geqslant |L_\varepsilon| + \operatorname{diam}(E_{n+1}) \geqslant |L| - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知结论得证.

(b) 如果 f 是从 E 到 L 的收缩且 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, 则 $L \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f(E_i)$, 且

$$|L| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(f(E_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(E_i).$$

(c) 设 $E = T \cup T'$, 其中 T 是以 $(-2,2),(2,2)$ 和 $(0,4)$ 为顶点的三角形, 而 T' 关于 x 轴对称. 假定 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, 如果任何 E_i 都不同时与 T 和 T' 相交, 则 E_i 可以分成线段 $\{(-2,2),(2,2)\}$ 和 $\{(-2,-2),(2,-2)\}$ 的覆盖, 这两个线段长度均为 4, 因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(E_i) \geqslant 8$. 如果至少有一个 E_i 与 T 和 T' 同时相交, 不妨记为 E_k, 取 $a \in E_k \cap T$ 和 $b \in E_k \in E_k \cap T'$, 并对 $i \neq k$ 记 $E_i' = E_i, E_k' = E_k \cup [a,b]$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i'$ 是 $T \cap T \cap [a,b]$ 的一个上容量, 且它到 y 轴的正交投影是长为 8 的线段, 故此上容量不小于 8. 由于 $\operatorname{diam}\left(E_j\right) = \operatorname{diam}(E_j^{'})$, 我们得到 $\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{diam}(E_i) \geqslant 8$.

设 f 是从 E 到 $L = [a', b']$ 的收缩. 取 $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in E$ 使得 $f(a) = a', f(b) = b'$. 由于 $|L| = d(a', b') =\leqslant d(a,b)$, 且此三角形的直径为 4, 我们可以假定 $a \in T$ 且 $b \in T'$. 注意到如果 $a_2 \leqslant 3$, 则 a 落在连接 $(-2,2),(2,2),(-1,3),(1,3)$ 的某些点的线段上. 由于所有这些点到顶点的距离不超过 $\sqrt{50}$, 进而到 T 的距离不超过 $\sqrt{50}$, 因此 $|L| \leqslant d(a,b) \leqslant \sqrt{50}$. 类似地, 如果 $b_2 \geqslant -3$ 也一样.

最后, 如果 $a_2 > 3$ 且 $b_2 < -3$, 注意到 T 上的每个点到 a 的距离不超过 $\sqrt{10}$, T' 的每个点到 b 的距离也不超过 $\sqrt{10}$. 而 f 是一个收缩, 则 T 的像在一条包含 a' 的长度不超过 $\sqrt{10}$ 的线段上, T' 的像在一条包含 b' 的长度不超过 $\sqrt{10}$ 的线段上. 而这两个像集的并就是 L, 我们得到 $|L| \leqslant 2\sqrt{10} < \sqrt{50}$, 因此 $\mathcal{K}(E) < \sqrt{50} < 8$.

§ 3.2 第二天

1. 证明如果 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是一个连续函数, 则递推数列 $x_{n+1}=f(x_n)$ 收敛当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

证明 必要性是显然的, 我们证明充分性即可. 假定 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 而数列 x_n 不收敛, 则 $\{x_n\}$ 至少有两个极限点 $K<L$, 区间 (K,L) 内一定存在序列 $\{x_n\}$ 中的点. 存在 $x\in(K,L)$ 使得 $f(x)\neq x$, 取 $\varepsilon=\dfrac{|f(x)-x|}{2}>0$. 由函数 f 的连续性可知存在 $\delta>0$, 对任意 $x\in(x-\delta,x+\delta)$, 均有 $|f(y)-y|>\varepsilon$.

另一方面当 n 充分大时, $|x_{n+1}-x_n|<2\delta$ 且 $|f(x_n)-x_n|=|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, 所以序列不可能都落在区间 $(x-\delta,x+\delta)$, 但是可以在此区间内跳跃. 则所有的极限点最大为 $x-\delta$, 这与 L 是极限点矛盾. 或者最小为 $x+\delta$, 这又与 K 为极限点矛盾.

2. 设 θ 是一个正实数, 且 $\cosh t=\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}$ 表示双曲余弦函数. 证明: 如果 $k\in\mathbb{N}$, 且 $\cosh(k\theta)$ 和 $\cosh(k+1)\theta$ 是有理数, 则 $\cosh\theta$ 也是有理数.

证明 首先我们证明如果 $\cosh t$ 是有理数且 $m\in\mathbb{N}$, 则 $\cosh(mt)$ 也是有理数.
由于 $\cosh 0=1\in\mathbb{Q}$ 且 $\cosh t\in\mathbb{Q}$, 根据递推

$$\cosh(m+1)t=2\cosh(t)\cosh(mt)-\cosh(m-1)t$$

可知 $\cosh(mt)$ 都是有理数. 原命题对 $k=1$ 显然成立, 因此我们考虑 $k\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\cosh\theta&=\cosh\left((k+1)\theta-k\theta\right)\\&=\cosh(k+1)\theta\cosh(k\theta)-\sinh(k+1)\theta\sinh(k\theta)\\&=\cosh(k+1)\theta\cosh(k\theta)-\sqrt{\cosh^2(k+1)\theta-1}\sqrt{\cosh^2(k\theta)-1}\end{aligned}\tag{3.2}$$

令 $\cosh(k\theta)=a,\cosh(k+1)\theta=b,a,b\in\mathbb{Q}$. 则

$$\cosh\theta=ab-\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}.$$

于是

$$\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)=(ab-\cosh\theta)^2=a^2b^2-2ab\cosh\theta+\cosh^2\theta.\tag{3.3}$$

令 $\cosh(k^2-1)\theta=A,\cosh(k^2\theta)=B$. 则由我们最开始证明的结论可知 $A=\cosh(k^2-1)\theta$ 与 $B=\cosh(k^2\theta)$ 都是有理数. 而且 $k^2-1>k$ 意味着 $A>a,B>b$, 因此 $AB>ab$. 由 (3.2) 式可得

$$\left(A^2-1\right)\left(B^2-1\right)=(AB-\cosh\theta)^2=A^2B^2-2AB+\cosh^2\theta.\tag{3.4}$$

由 (3.3) 式和 (3.4) 式消掉 $\cosh^2\theta$ 得到

$$2(AB-ab)\cosh\theta=A^2B^2-a^2b^2.$$

这是一个关于 $\cosh\theta$ 的有理系数方程, 且 $AB-ab>0$, 这就证明了 $\cosh\theta$ 是有理数.

3. 设 G 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的子群, G 由 A 与 B 生成, 其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

设 H 是由 G 中所有满足 $a_{11}=a_{22}=1$ 的矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 组成.

(a) 证明 H 是 G 的 Abel 子群.

(b) 证明 H 不是有限生成的.

注 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 表示所有 2×2 可逆实矩阵在乘法意义下的群. Abel 群是指乘法具有可交换性. 一个群称为有限生成的是指存在此群的有限个元素使得群里的其它元素都可以通过这些元素的群运算得到.

证明

(a) G 中的所有矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\star&\star\\0&\star\end{pmatrix}.$$

所以 H 中的所有矩阵形式为

$$M(x)=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix},$$

所以 H 中的元素是可交换的. 由于 $M^{-1}(x)=M(-x)$, H 为 G 的子群.

(b) 反证法, 则 H 中的生成元只能是 $M(x)$ 的形式, 且 $x=\dfrac{p}{2^n}$, 这里 p 是整数, n 是一个正整数. 在 H 中有

$$M(x)M(y)=M(x+y)$$
$$M(x)M^{-1}(y)=M(x-y).$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$, 具有 $M\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ 的矩阵都在 M 中, 如果仅仅有限个生成元这是不可能的.

4. 设 B 是 $\mathbb{R}^2$ 中关于原点对称的有界区域, 其边界为曲线 Γ, 包含在 B 内的具有最大面积的椭圆是中心在原点, 半径为 1, 边界曲线为 C 的圆盘 D. 证明对任意 C 的弧 A 满足弧长 $l(A)\geqslant\dfrac{A}{2}$ 时, 都有 $A\cap\Gamma\neq\varnothing$.

证明 反证法, 那么我们可以假定存在弧 $A\subset C$ 是弧长 $l(A)=\dfrac{\pi}{2}$ 使得 $A\subset B\backslash\Gamma$. 不失一般性, 我们可以假设 A 的端点是 $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A 是紧集, 而 Γ 是闭集. 由 $A\cap\Gamma\neq\varnothing$ 可知存在 $\delta>0$ 使得 $d(x,y)>\delta$ 对任意 $x\in A, y\in\Gamma$ 成立.

给定 $\varepsilon>0$, E_ε 表示边界为 $\dfrac{x^2}{(1+\varepsilon)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的椭圆, 使得 $M,N\in E_\varepsilon$. 由于 $M\in E_\varepsilon$, 我们有

$$b^2=\frac{(1+\varepsilon)^2}{2(1+\varepsilon)^2-1}.$$

则

$$S_{E_\varepsilon} = \pi \frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{2(1+\varepsilon)^2 - 1}} > \pi = S_D.$$

由假设 $E_\varepsilon \backslash B \neq \varnothing$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立. 令 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$. 由 $E_\varepsilon \backslash S \subset D \subset B$, 取 $\varepsilon < \delta$ 得到

$$\varnothing \neq E_\varepsilon \backslash B \subset E_\varepsilon \cap S \subset D_{1+\varepsilon} \cap S \subset B,$$

这与条件矛盾, 其中我们记 $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant t^2\}$.

注 题目中具有最大面积的椭圆称为 John 椭圆.

5. (a) 证明

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \frac{1}{2}.$$

(b) 证明存在一个正的常数 c 使得对每个 $x \in [1, +\infty)$ 有

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} \right| \leqslant \frac{c}{x}.$$

证明

(a) 令

$$f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}, h = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

显然 f 在 $(0, +\infty)$ 可积, 且当 $t \to +\infty$ 时 $f(t) \downarrow 0$. 因此

$$h \sum_{n=N}^{\infty} f(nh) \geqslant \int_N^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant h \sum_{n=N+1}^{\infty} f(nh).$$

因此 $h \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh)$ 就是积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ 的 Riemann 和, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \xrightarrow{h \to 0} \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

(b) 首先我们有

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{b-a}{0.01} \right] + 1, \\ S &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{0j} - \lambda_j). \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(hf(nh) - \int_{nh-\frac{h}{2}}^{nh+\frac{h}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t \right) - \int_0^{\frac{h}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(hf(nh) - \int_{nh-\frac{h}{2}}^{nh+\frac{h}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t \right) \right| + \int_0^{\frac{h}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.6}$$

利用两次分部积分不难得到

$$2bg(a)-\int_{a-b}^{a+b}g(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^b(b-t)^2\left(g''(a+t)-g''(a-t)\right)\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

对每个 $g\in C^2[a-b,a+b]$, 利用 $f(0)=0, f\in C^2\left[0,\frac{h}{2}\right]$ 可得

$$\int_0^{\frac{h}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t=O\left(h^2\right). \tag{3.8}$$

那么由 (3.6) (3.7) (3.8) 式有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(n^2+x)^2}-\frac{1}{2}\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}h^2\int_{nh-\frac{h}{2}}^{nh+\frac{h}{2}}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t+O\left(h^2\right)\\ &=h^2\int_{\frac{h}{2}}^{+\infty}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t+O\left(h^2\right)=O\left(h^2\right)=O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

6. Carleman 不等式

(a) 证明对每个数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足 $a_n>0, n=1,2,\cdots$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}<\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

(b) 证明对每个 $\varepsilon>0$, 都存在序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $a_n>0, n=1,2,\cdots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}>(\mathrm{e}-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

证明

(a) 对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$c_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}. \tag{3.9}$$

注意到 $c_1c_2\cdots c_n=(n+1)^n$, 因此对 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}(a_1c_1a_2c_2\cdots a_nc_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1c_1+\cdots+a_nc_n}{n(n+1)}. \tag{3.10}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nc_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\end{aligned}$$

(b) 对 $n=1,2,\cdots,N$, 令 $a_n=\dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^n}$, 而当 $n>N$ 时, 令 $a_n=2^{-n}$, 这里的 N 我们等下选定. 则当 $n\leqslant N$ 时,

$$(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}. \tag{3.11}$$

取 $K=K(\varepsilon)$ 使得当 $n>K$ 时有

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>\mathrm{e}-\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.12}$$

现在选定 N 使得

$$\sum_{n=1}^{K}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\leqslant\frac{\varepsilon}{(2\mathrm{e}-\varepsilon)(\mathrm{e}-\varepsilon)}\sum_{n=K+1}^{N}\frac{1}{n}. \tag{3.13}$$

这是一定可以做到的, 因为调和级数是发散的. 由 (3.11) , (3.12) 和 (3.13) 式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{K}a_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}+\sum_{n=K+1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\&<\frac{\varepsilon}{(2\mathrm{e}-\varepsilon)(\mathrm{e}-\varepsilon)}\sum_{n=K+1}^{N}\frac{1}{n}+\left(\mathrm{e}-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}\sum_{n=K+1}^{N}\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}-\varepsilon}\sum_{n=K+1}^{N}\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

4. 1997 年国际大学生数学竞赛 Plovdiv, Bulgaria

§ 4.1 第一天

1. 设 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正数列, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right).$$

解 首先由定积分的定义有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log x\,\mathrm{d}x=-1.$$

因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}-1.$$

另一方面, 对任意给定 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $0<\varepsilon_n<\varepsilon$ 都成立. 注意到对任意 $1\leqslant k\leqslant N$ 时都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right)=0$, 这就意味着

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)\\&=\int_0^1\log(x+\varepsilon)\,\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^{1+\varepsilon}\log x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 利用夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right) = \int_0^1 \log x\mathrm{d}x = -1.$$

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 问下面的两个级数是否也收敛?

(a) $a_1+a_2+a_4+a_3+a_8+a_7+a_6+a_5+a_{15}+\cdots+a_9+a_{32}+\cdots$.

(b) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_7+a_6+a_8+a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{17}+a_{19}+\cdots$.

并证明你的结论.

解

(a) 收敛. 令 $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. 对任意给定 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, $|S_n-S|<\varepsilon$ 都成立. 置换后的级数形式为 $L_{2^{n-1}+k}=S_{2^{n-1}}+S_{2^n}-S_{2^n-k}, 0\leqslant k<2^{n-1}$. 当 $2^{n-1}>N$ 时, 我们有 $|L_{2^{n-1}+k}-S|<3\varepsilon$. 因此置换之后的级数收敛.

(b) 不一定收敛, 如取 $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. 则置换后的级数满足

$$L_{3\cdot 2^{n-2}}=S_{2^{n-1}}+\sum_{k=2^{n-2}}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

因此

$$L_{3\cdot 2^{n-2}}-S_{2^{n-1}}\geqslant 2^{n-2}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

因此 $L_{3\cdot 2^{n-2}}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$, 即置换后的级数发散.

3. 设 A,B 为 $n\times n$ 实矩阵, 满足 $A^2+B^2=AB$. 证明如果 $BA-AB$ 是可逆矩阵, 则 n 一定被 3 整除.

证明 令 $S=A+\omega B$, 这里 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 我们有

$$\begin{aligned} S\overline{S} &= (A+\omega B)(A+\overline{\omega}B)=A^2+\omega BA+\overline{\omega}AB+B^2 \\ &= AB+\omega BA+\overline{\omega}AB=\omega(BA-AB). \end{aligned}$$

这里是因为 $\overline{\omega}=-1-\omega$. 由于 $\det(S\overline{S})=\det(S)\det(\overline{S})$ 是一个实数, 且 $\det(\omega(BA-AB))=\omega^n\det(BA-AB)\neq 0$, 因此 ω^n 是一个实数, 所以 n 一定被 3 整除.

4. 设 α 是一个实数且 $1<\alpha<2$.

(a) 证明 α 有唯一的无穷乘积形式

$$\alpha=\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\cdots,$$

其中每个 n_i 都是正整数且满足 $n_i^2\leqslant n_{i+1}$.

(b) 证明如果 α 是一个有理数, 当且仅当它的无穷乘积满足: 存在某个 m, 对所有 $k \geqslant m$, 都有 $n_{k+1} = n_k^2$.

证明

(a) 我们归纳定义序列 $\{n_i\}$ 和比值

$$\theta_k = \frac{\alpha}{\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{n_i}\right)},$$

使得 $\theta_k > 1$ 对所有 k 都成立. 取 n_k 是满足 $1+\dfrac{1}{n} < \theta_{k-1}(\theta_0 = \alpha)$ 最小的 n, 使得对每个 k

$$1+\frac{1}{n_k} < \theta_{k-1} \leqslant 1+\frac{1}{n_k-1}. \tag{4.1}$$

由于 $\theta_{k-1} \leqslant 1+\dfrac{1}{n_k-1}$, 我们有

$$1+\frac{1}{n_{k+1}} < \theta_k = \frac{\theta_{k-1}}{1+\frac{1}{n_k}} \leqslant \frac{1+\frac{1}{n_k-1}}{1+\frac{1}{n_k}} = 1+\frac{1}{n_k^2-1}.$$

因此对每个 k, 都有 $n_{k+1} \geqslant n_k^2$.

由于 $n_1 \geqslant 2, n_k \to \infty$, 因此 $\theta_k \to 1$. 于是

$$\alpha = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right).$$

由于每一步的 n_k 的确定都是由 (4.1) 式决定的. 如果对某个 k 使得 $1+\dfrac{1}{n_k} \geqslant \theta_{k-1}$, 则 $\theta_k \leqslant 1, \theta_{k+1} < 1$, 则 $\{\theta_k\}$ 就不收敛于 1 了.

注意到对每个 $M > 1$ 有

$$\left(1+\frac{1}{M}\right)\left(1+\frac{1}{M^2}\right)\left(1+\frac{1}{M^4}\right)\cdots = 1+\frac{1}{M}+\frac{1}{M^2}+\cdots = 1+\frac{1}{M-1}. \tag{4.2}$$

假定对某个 k 使得 $1+\dfrac{1}{n_k-1} < \theta_{k-1}$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{1}{n_2}\right)\cdots} &= \frac{\theta_{k-1}}{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)\cdots} \\
&\geqslant \frac{\theta_{k-1}}{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\left(1+\frac{1}{n_k^2}\right)\cdots} = \frac{\theta_{k-1}}{1+\frac{1}{n_k-1}} > 1,
\end{aligned}$$

矛盾, 唯一性得证.

(b) 由 (4.2) 式可知充分性是显然的, 反之, 假定 α 是一个有理数 $\dfrac{p}{q}$. 我们的目的是要证明存在某个 m 使得 $\theta_{m-1} = \dfrac{n_m}{n_m-1}$.

假定上述结论不对, 则对任意 m 都有

$$\theta_{m-1} < \frac{n_m}{n_m-1}. \tag{4.3}$$

对每个 k, 记 $\theta_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ 是一个分数. 其中 $p_0 = p, q_0 = q$,

$$p_k = p_{k-1} n_k, \quad q_k = q_{k-1}(n_k + 1).$$

$p_k - q_k$ 都是正整数. 要得出矛盾, 只需要证明 $p_k - q_k$ 单调递减即可. 现在

$$\begin{aligned} p_k - q_k - (p_{k-1} - q_{k-1}) &= n_k p_{k-1} - (n_k + 1) q_{k-1} - p_{k-1} + q_{k-1} \\ &= (n_k - 1) p_{k-1} - n_k q_{k-1}. \end{aligned}$$

而由 (4.3) 式知, $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \theta_{k-1} < \dfrac{n_k}{n_k - 1}$, 因此 $(n_k - 1) p_{k-1} - n_k q_{k-1} < 0$, 这就得出了矛盾, 必要性也成立.

5. 对自然数 n, 考虑超平面

$$\mathbb{R}_0^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

和格子 $\mathbb{Z}_0^n = \{ y \in \mathbb{R}_0^n : 所以 y_i 均为整数 \}$. 定义 $\mathbb{R}^n$ 中的拟范数: 如果 $0 < p < \infty$, 则 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, 而 $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

(a) 设 $x \in \mathbb{R}_0^n$ 使得

$$\max_i x_i - \min_i x_i \leqslant 1.$$

对每个 $p \in [1, +\infty)$ 和任意 $y \in \mathbb{Z}_0^n$, 证明

$$\|x\|_p \leqslant \|x + y\|_p.$$

(b) 对每个 $p \in (0, 1)$, 证明存在正整数 n 和 $x \in \mathbb{R}_0^n$ 满足 $\max\limits_i x_i - \min\limits_i x_i \leqslant 1$, 以及 $y \in \mathbb{Z}_0^n$ 使得

$$\|x\|_p > \|x + y\|_p.$$

证明

(a) 如果 $x = 0$, 结论显然成立. 假定 $x \neq 0$, 则 $\max\limits_i x_i > 0$ 且 $\min\limits_i x_i < 0$. 因此 $\|x\|_\infty < 1$. 由 x 的假设可知

(a) 如果 $x_j \leqslant 0$, 则 $\max\limits_i \leqslant x_j + 1$.

(b) 如果 $x_j \geqslant 0$, 则 $\min\limits_i \geqslant x_j - 1$.

考虑 $y \in \mathbb{Z}_0^n$, $y \neq 0$. 把指标集分成五部分:

$$\begin{aligned} &I(0) = \{ i : y_i = 0 \}, \\ &I(+,+) = \{ i : y_i > 0, x_i \geqslant 0 \}, I(+,-) = \{ i : y_i > 0, x_i < 0 \}, \\ &I(-,+) = \{ i : y_i < 0, x_i > 0 \}, I(-,-) = \{ i : y_i < 0, x_i \leqslant 0 \}. \end{aligned}$$

后面四个集合中至少有一个非空. 如果 $I(+,+)\neq\varnothing$ 或者 $I(-,-)\neq\varnothing$, 则 $\|x+y\|_\infty\geqslant 1>\|x\|_\infty$. 如果 $I(+,+)=I(-,-)=\varnothing$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=0$ 意味着 $I(+,-)\neq\varnothing$ 且 $I(-,+)\neq\varnothing$. 因此 (a) 与 (b) 说明 $\|x+y\|_\infty\geqslant\|x\|_\infty$, 这证明了 $p=\infty$ 的情形.

现在假定 $1\leqslant p<\infty$, 则由 (a) 可知对每个 $j\in I(+,-)$ 我们有 $|x_j+y_j|=y_j-1+x_j+1\geqslant|y_j|-1+\max\limits_i x_i$. 因此

$$\left|x_j+y_j\right|^p\geqslant\left|y_j\right|-1+|x_k|^p,\forall k\in I(-,+)\,\forall j\in I(+,-).$$

类似地,

$$\left|x_j+y_j\right|^p\geqslant\left|y_j\right|-1+|x_k|^p,\forall k\in I(+,-)\,\forall j\in I(-,+).$$

$$\left|x_j+y_j\right|^p\geqslant\left|y_j\right|+|x_k|^p,\forall j\in I(-,-).$$

假定 $\sum\limits_{j\in I(+,-)}1\geqslant\sum\limits_{j\in I(-,+)}1$, 则

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|_p^p-\|x\|_p^p\\
=&\sum_{j\in I(+,+)\cup I(-,-)}\left(\left|x_j+y_j\right|^p-\left|x_j\right|^p\right)+\left(\sum_{j\in I(+,-)}\left|x_j+y_j\right|^p-\sum_{k\in I(-,+)}|x_k|^p\right)\\
&+\left(\sum_{j\in I(-,+)}\left|x_j+y_j\right|^p-\sum_{k\in I(+,-)}|x_k|^p\right)\\
\geqslant&\sum_{j\in I(+,+)\cup I(-,-)}\left|y_j\right|+\sum_{j\in I(+,-)}\left(\left|y_j\right|-1\right)\\
&+\left(\sum_{j\in I(-,+)}\left(\left|y_j\right|-1\right)-\sum_{j\in I(+,-)}1+\sum_{j\in I(-,+)}1\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n}|y_i|-2\sum_{j\in I(+,-)}1=2\sum_{j\in I(+,-)}\left(y_j-1\right)+2\sum_{j\in I(+,+)}y_j\geqslant 0.
\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{j\in I(+,-)}1\leqslant\sum\limits_{j\in I(-,+)}1$ 也是类似, 这就完成了证明.

(b) 固定 $p\in(0,1)$ 以及有理数 $t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$. 取一对正整数 m 和 l 使得 $mt=l(1-t)$, 并且令 $n=m+l$. 设

$$x_i=t,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad x_i=t-1,\quad i=m+1,m+2,\cdots,n;$$

$$y_i=-1,\quad i=1,2,\cdots,m;\,y_{m+1}=m;\,y_i=0,i=m+2,\cdots,n.$$

则对 $x\in\mathbb{R}_0^n,\max\limits_i x_i-\min\limits_i x_i=1,y\in\mathbb{Z}_0^n$. 并且

$$\|x\|_p^p-\|x+y\|_p^p=m(t^p-(1-t)^p)+(1-t)^p-(m-1+t)^p,$$

这对充分大的 m 是可以成立的.

6. 假定 F 是一个由正整数 $\mathbb{N}^*$ 的有限子集构成的集族, 且对任意 $A,B\in F$ 都有 $A\cap B\neq\varnothing$.

(a) 问是否存在 $\mathbb{N}^*$ 的有限子集 Y, 使得对任意 $A, B \in F$ 都有 $A \cap B \cap Y \neq \varnothing$?

(b) 如果我们再假定 F 中的所有集合的元素个数相同, 问 (a) 中的论断是否成立?

证明你的结论.

解

(a) 不正确. 考虑 $F = \{A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n, \cdots\}$, 其中 $A_n = \{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, 2n\}$, $B_n = \{2, 4, 6, \cdots, 2n, 2n+1\}$. 则 $A_n \cap B_n = \{2n\}$, 如果存在 $Y \in \mathbb{N}$ 满足条件, 则 $A_n \cap B_n \cap Y \neq \varnothing$ 都任意 n 都成立, 因此 $2n \in Y$ 对任意 n 都成立, 因此 Y 一定是无限集, 矛盾, 因此原命题错误.

(b) 正确. 我们将证明一个更强的结论: 假定 F, G 是 $\mathbb{N}$ 的两个有限子集族使得

(a) 对任意 $A \in F$ 和 $B \in G$ 都有 $A \cap B \neq \varnothing$;

(b) F 中的所有集合所包含的元素个数都是 r, G 中的所有集合所包含的元素个数都是 s(我们记 $\#(F) = r, \#(G) = s$).

则我们断言: 存在 $\mathbb{N}$ 的一个有限子集 Y 使得 $A \cap B \cap Y \neq \varnothing$ 对任意 $A \in F$ 和 $B \in G$ 都成立, 原命题当我们取 $F = G$ 即证.

上述断言对 $r = s = 1$ 显然成立. 现在固定 r, s, 并假定上述断言对所有满足 $\#(F') < r, \#(G) < s$ 的集族 F', G' 都已经成立. 取 $A_0 \in F, B_0 \in G$, 对任意 $C \subset A_0 \cup B_0$, 记

$$F(C) = \{A \in F : A \cap (A_0 \cup B_0) = C\}.$$

则 $F = \bigcup\limits_{\varnothing \neq C \subset A_0 \cup B_0} F(C)$. 只需要证明对任意 $C, D \subset A_0 \cap B_0$, 集族 $F(C)$ 与 $F(D)$ 满足上述断言即可.

如果用 $Y_{C,D}$ 表示相应的有限集合, 则对集族 F, G, 有限集 $\bigcup\limits_{C,D \subset A_0 \cup B_0} Y_{C,D}$ 就满足断言. 下面我们证明 $F(C)$ 和 $G(D)$ 满足题中的断言.

如果 $C \cap D \neq \varnothing$, 结论显然成立.

如果 $C \cap D = \varnothing$, 则对任意 $A \in F(C), B \in G(D)$, $A \cap B$ 必然包含 $A_0 \cup B_0$ 之外的元素. 如果我们记

$$\widetilde{F}(C) = \{A \backslash C : A \in F(C)\}, \widetilde{G}(D) = \{B \backslash D : B \in G(D)\},$$

则 $\widetilde{F}(C)$ 和 $\widetilde{G}(D)$ 满足条件 (a) 和 (b), 且 $\#(\widetilde{F}(C)) = \#(F) - \#(C) < r, \#(\widetilde{G}(D)) = \#(G) - \#(D) < s$, 因此由归纳假设即证.

§ 4.2 第二天

1. 设 f 是 $C^3(\mathbb{R})$ 中的一个非负函数, $f(0) = f'(0) = 0, 0 < f''(0)$. $x \neq 0$ 时, 令

$$g(x) = \left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right)'.$$

而 $g(0) = 0$. 证明 g 在 0 的某个邻域内有界. 此结论是否对 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 成立?

证明 令 $c = \frac{1}{2} f''(0)$, 我们有

$$g = \frac{(f')^2 - 2ff''}{2(f')^2 \sqrt{f}},$$

其中

$$f(x) = cx^2 + O\left(x^3\right), \quad f'(x) = 2cx + O\left(x^2\right), \quad f'' = 2x + O(x).$$

因此 $(f'(x))^2 = 4c^2x^2 + O(x^3), 2f(x)f''(x) = 4c^2x^2 + O(x^3)$, 并且

$$2\left(f'(x)\right)^2 \sqrt{f(x)} = 2\left(4c^2x^2 + O\left(x^3\right)\right)\sqrt{c + O(x)}.$$

g 是有界的, 因为

$$\frac{2(f'(x))^2 \sqrt{f(x)}}{|x|^3} \xrightarrow{x\to 0} 8c^{\frac{5}{2}} \neq 0,$$

且 $(f'(x))^2 - 2f(x)f''(x) = O(x^3)$.
此结论对 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 不成立. 取

$$f(x) = \left(x + |x|^{\frac{3}{2}}\right)^2 = x^2 + 2x^2\sqrt{|x|} + |x|^3,$$

则 $f \in C^2(\mathbb{R})$. 对 $x > 0$ 有

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to 0} -\infty.$$

2. 设 M 是一个 $2n \times 2n$ 可逆矩阵, 写成分块矩阵形式为

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

证明 $\det(M)\det(H) = \det(A)$.

证明 记 I 表示 $n \times n$ 单位矩阵, 由条件可知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

则 $AF + BH = O, CF + DH = I$, 因此

$$\det(M)\det(H) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I & F \\ O & H \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & O \\ C & I \end{pmatrix} = \det(A).$$

3. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(\log n)}{n^\alpha}$ 收敛当且仅当 $\alpha > 0$.

证明 令 $f(t) = \dfrac{\sin(\log t)}{t^\alpha}$, 则

$$f'(t) = \frac{-\alpha}{t^\alpha}\sin(\log t) + \frac{\cos(\log t)}{t^{\alpha+1}}.$$

所以当 $\alpha>0$ 时, $|f'(t)|\leqslant\frac{1+\alpha}{t^{\alpha+1}}$. 故 $|f(n+1)-f(n)|=|f'(n+\theta)|\leqslant\frac{1+\alpha}{n^{\alpha+1}}$, 其中 $\theta\in(0,1)$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\alpha}{n^{\alpha+1}}<+\infty$, 且 $f(n)\xrightarrow{n\to\infty}0$, 我们得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(2n-1)-f(2n))$ 收敛.

下面我们证明 $\alpha\leqslant 0$ 时级数发散, 只需要证明 $\alpha=0$ 的情形, 我们证明 $a_n=\sin(\log n)$ 不趋于 0. 反证法, 则对 $n>\mathrm{e}^2$, 存在 $k_n\in\mathbb{N}$ 和 $\lambda_n\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 使得 $\frac{\log n}{\pi}=k_n+\lambda_n$, 则 $|a_n|=\sin(\pi|\lambda_n|)$. 由于 $a_n\to 0$, 则 $\lambda_n\to 0$. 因此

$$k_{n+1}-k_n=\frac{\log(n+1)-\log n}{\pi}-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=\frac{1}{\pi}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-(\lambda_{n+1}-\lambda_n).$$

故当 n 充分大时, $|k_{n+1}-k_n|<1$. 所以存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, $k_n=k_N$ 都成立, 所以 $\frac{\log n}{\pi}=k_N+\lambda_n$. 由于 $\lambda_n\to 0$, 这和 $\log n\to\infty$ 矛盾.

4. (a) 设 M_n 是 $n\times n$ 实矩阵空间, $f:M_n\to\mathbb{R}$ 为线性映射, 即对任意 $A,B\in M_n, c\in\mathbb{R}$,

$$f(A+B)=f(A)+f(B),\quad f(cA)=cf(A). \tag{4.4}$$

证明存在唯一的矩阵 $C\in M_n$ 使得对任意 $A\in M_n$, $f(A)=\mathrm{tr}(AC)$

(b) 假定在 (4.4) 之外还满足对任意 $A,B\in M_n$

$$f(AB)=f(BA). \tag{4.5}$$

证明存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $f(A)=\mathrm{tr}(A)$.

注 如果 $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, 则 $\mathrm{tr}(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

证明

(a) 设 E_{ij} 表示 (i,j) 元为 1, 而其他元素为零的矩阵, 即 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 是 M_n 的标准基, 则矩阵 C 的元素 c_{ij} 可表示为 $c_{ij}=f(E_{ij})$.

(b) 记 L 表示 M_n 的所有迹为零的矩阵构成的 n^2-1 维空间. 则所有的矩阵 $E_{ij}i\neq j$ 和 $E_{ii}-E_{nn}, i=1,2,\cdots,n-1$ 构成 L 的一组基. 由于

$$E_{ij}=E_{ij}E_{jj}-E_{jj}E_{ij}, i\neq j.$$
$$E_{ii}-E_{nn}=E_{in}E_{ni}-E_{ni}E_{in}, i=1,\cdots,n-1.$$

则条件 (4.5) 意味着对任意 $B\in L$ 有 $f(B)=0$. 现在对任意 $A\in M_n$, 我们有 $A-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)E\in L$, 其中 E 为单位矩阵, 所有 $f(A)=\frac{1}{n}f(E)\,\mathrm{tr}(A)$.

5. 设 X 是任意集合, f 是一个 X 到 X 的双射. 证明存在映射 $g_1,g_2:X\to X$ 使得 $f=g_1\circ g_2$, 且 $g_1\circ g_1=\mathrm{id}=g_2\circ g_2$, 这里 id 表示 X 上的恒等映射.

证明 记 $f^n=f\circ f\circ\cdots\circ f$, $f^0=\mathrm{id}$, $f^{-n}=(f^{-1})^n, n\in\mathbb{N}$. 对任意 $x\in X$, 设 $T(x)=\{f^n(x):n\in\mathbb{Z}\}$, 则对不同的 x, $T(x)$ 要么相同, 要么不交, 且 f 把每个 $T(x)$ 映为自己, 只需要证明对每一个这样的 $T(x)$ 使得命题成立即可.

令 $A = T(x)$, 如果 A 是有限集, 我们可以把 A 看成一个正 n 边形的 n 个顶点, 把 f 看成一个角度为 $\frac{2\pi}{n}$ 的旋转. 这样的旋转可以用两个正 n 边形到自己对称映射得到: 如果 n 是偶数, 则可以取角度为 $\frac{\pi}{n}$ 的对称映射; 如果 $n = 2k + 1$, 则可以取角度为 $\frac{2k\pi}{n}$ 的对称映射.

如果 A 是无限集, 则我们可以考虑 $A = \mathbb{Z}$, 对任意 $m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = m + 1$. 在这种情形下, 定义 g_1 是关于 $\frac{1}{2}$ 的对称映射, 而 g_2 是关于 0 的对称映射.

6. 设 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 我们说 f 在 x 处穿轴是指 $f(x) = 0$, 且在 x 的任意邻域内都存在 y, z 使得 $f(y) < 0$ 且 $f(z) > 0$..

(a) 给出一个无穷次穿轴的连续函数的例子.

(b) 是否存在一个连续函数所有穿轴点的集合是不可数的? 并证明你的结论.

解

(a) 取 $f(x)\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 即可.

(b) 存在, Cantor 集定义为

$$C = \left\{x \in (0,1) : x = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 3^{-j}, b_j \in \{0,2\}\right\}.$$

存在双射 $\varphi : [0, 1) \to C$. 这只要对任意 $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j}, a_j \in \{0, 1\}$, 我们令 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (2a_j) 3^{-j}$, 所以 C 是不可数的.

对 $k = 1, 2, \cdots$ 以及 $i = 0, 1, 2, \cdots, 2^{k-1} - 1$, 取

$$a_{k,i} = 3^{-k}\left(6\sum_{j=0}^{k-2} a_j 3^j + 1\right), \quad b_{k,i} = 3^{-k}\left(6\sum_{j=0}^{k-2} a_j 3^j + 2\right),$$

其中 $i = \sum_{j=0}^{k-2} a_j 2^j, a_j \in \{0,1\}$. 则

$$[0,1) \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}-1} (a_{k,i}, b_{k,i}).$$

即 Cantor 集是由 $[0, 1)$ 中所有三进制数中只含有数字 0 和 2 的数组成, 而它的补集中的点在三进制表示中会包含一些数字 1. 因此, $\bigcup_{i=1}^{2^{k-1}-1} (a_{k,i}, b_{k,i})$ 中的点除去 $a_{k,i}$ 之外, 其它点都是三进制表示中第 k 个位置的数码为 1, 而在第 $j(j < k)$ 个位置的数码为 0 或 2.

注意到三进制表示中至少含有一个数码 1 的点在 $[0, 1]$ 内是稠密的, 我们取

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x).$$

其中 g_k 是一个分段线性的连续函数, 且在节点处的取值

$$g_k\left(\frac{a_{k,i}+b_{k,i}}{2}\right)=2^{-k}, g_k(0)=g_k(1)=g_k\left(a_{k,i}\right)=g_k\left(b_{k,i}\right)=0,$$

$i=0,1,\cdots,2^{k-1}-1$. 则 f 连续, 且 f 在 Cantor 集中的每个点处都穿轴.

5. 1998 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 5.1 第一天

1. 设 V 是一个 10 维向量空间, U_1, U_2 是两个线性子空间使得 $U_1 \subset U_2$, $\dim_{\mathbb{R}} U_1 = 3$ 且 $\dim_{\mathbb{R}} U_2 = 6$. 设 $\mathcal{E}$ 是所有以 U_1 和 U_2 为不变子空间 (即 $T(U_1) \subset U_1$ 且 $T(U_2) \subset U_2$) 的线性映射 $T : V \to V$ 所构成的集合, 求 $\mathcal{E}$ 作为一个实向量空间的维数.

解 首先取 U_1 的基 $\{v_1, v_2, v_3\}$, 可以结合向量 v_4, v_5, v_6 把 U_1 的基扩充为 U_2 的基, 同样的可以结合向量 $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ 把 U_2 的基扩充为 V 的基.

设 $T \in \mathcal{E}$ 是一个自同构, 且以 U_1 和 U_2 为不变子空间. 则它在基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{10}\}$ 下的矩阵具有形式

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = 9 + 18 + 40 = 67$.

2. 证明下面的命题对 $n = 3$ 和 $n = 5$ 成立, 但对 $n = 4$ 不成立:

对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意非恒等置换 π_1, 都存在置换 π_2 使得任意置换 π 都可以由 π_1 和 π_2 仅仅通过复合运算得到 (如 $\pi = \pi_1 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$).

证明 记 S_n 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的置换群.

(a) 当 $n = 3$ 时, 命题是显然的: 如果 $x = (12)$, 我们取 $y = (123)$; 如果 $x = (123)$, 我们取 $y = (12)$ 即可.

(b) 当 $n=4$ 时, 设 $x=(12)(34)$. 假定存在 $y\in S_n$, 使得 $S_4=\langle x,y\rangle$($\langle x,y\rangle$ 表示由 x,y 生成的子群). 用 K 表示不变子群

$$K=\{\mathrm{id},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$

由于 x 和 y 生成了整个群 S_4, 则商群 $S_4\backslash K$ 只包含 $\overline{y}=yK$ 的幂, 即 $S_4\backslash K$ 是循环群, 而显然此商群是不可交换的, 矛盾.

(c) 当 $n=5$ 时.

(i) 如果 $x=(12)$, 则对 y 我们可以取 $y=(12345)$.

(ii) 如果 $x=(123)$, 我们取 $y=(124)(35)$. 则 $y^3xy^3=(125)$ 且 $y^4=(124)$. 因此 $(123),(124),(125)\in\langle x,y\rangle$. 而 $(123),(124),(125)$ 生成了子群 S_5, 因此 $S_5\subset\langle x,y\rangle$. 进一步由于 y 是奇置换, 则 $\langle x,y\rangle=S_5$.

(iii) 如果 $x=(123)(45)$, 则由 (b) 的情形可知取 $y=(124)$ 即可.

(iv) 如果 $x=(1234)$, 我们取 $y=(12345)$. 则 $(yx)^3=(24)\in\langle x,y\rangle, x^2(24)=(13)\in\langle x,y\rangle$ 且 $y^2=(13524)\in\langle x,y\rangle$. 由于 $(13)\in\langle x,y\rangle$ 且 $(13524)\in\langle x,y\rangle$, 我们得到 $\langle x,y\rangle=S_5$.

(v) 如果 $x=(12)(34)$, 我们取 $y=(1354)$. 则 $y^2x=(123)(53)$, 于是根据 (c) 可知 $S_5=\langle x,y\rangle$.

(vi) 如果 $x=(12345)$, 显然我们取 $y=(12)$ 即可.

3. 设 $f(x)=2x(1-x), x\in\mathbb{R}$. 定义

$$f_n=\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n}.$$

(a) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) 对 $n=1,2,\cdots$, 计算 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

解

(a) 固定 $x_0\in(0,1)$, 设 $x_n=f_n(x), n=1,2,\cdots$. 显然 $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right], x_1\leqslant f(x_1)\leqslant\frac{1}{2}$, 且由归纳法有 $x_n\leqslant f(x_n)\leqslant\frac{1}{2}$. 且 $x_{n+1}-x_n=2x_n(1-x_n)-x_n=x_n(1-x_n)>0$, 则 $\{x_n\}$ 是一个单调不减的有界数列, 因此由单调有界准则知极限 $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且满足方程 $\ell=2\ell(1-\ell)$, 因此 $\ell=\frac{1}{2}$. 现在由单调收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(b) 我们将用归纳法证明

$$f_n(x)=\frac{1}{2}-2^{2^n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^n} \tag{1}$$

对 $n=1,2,\cdots$ 都成立. 当 $n=1$ 时, $f(x)=2x(1-x)=\frac{1}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 成立, 假定上述结论对 $n=k$ 成立, 则

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(x)=f_k(f(x)) &= \frac{1}{2}-2^{2^k-1}\left(\left(\frac{1}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2}\right)^{2^k} \\
&= \frac{1}{2}-2^{2^k-1}\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{2^k}=\frac{1}{2}-2^{2^{k+1}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

这说明结论对 $n=k+1$ 也成立, 因此 (1) 式得证. 因此

$$
\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x-\frac{2^{2^n}-1}{2^n+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^n+1}\right]\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^n+1)}.
$$

4. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是二阶可微的, 且满足 $f(0)=2, f'(0)=-2$ 以及 $f(1)=1$. 证明存在实数 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$
f(\xi)\cdot f'(\xi)+f''(\xi)=0.
$$

证明 定义函数

$$
g(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x).
$$

由于 $g(0)=0$ 以及 $f(x)\cdot f'(x)+f''(x)=g'(x)$, 只需要证明存在 $\eta\in(0,1]$ 使得 $g(\eta)=0$ 即可.

(a) 如果 f 不是恒不为 0, 令

$$
h(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{f(x)}.
$$

因为 $h(0)=h(1)=-\frac{1}{2}$, 故存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $h'(\eta)=0$. 而 $g(x)=f^2(x)h'(x)$, 因此结论成立.

(b) 如果 f 至少有一个零点, 由 $f(0)=2>0, f(1)=1>0$, 可设 x_1 是第一个零点二 x_2 是最后一个零点 ($f(x)$ 的零点是闭集). 则 $0<x_1\leqslant z-2<1$, 函数 f 在 $[0,x_1)$ 和 $(x-2,1]$ 内都是正的, 这意味着 $f'(x_1)\leqslant 0$ 且 $f'(x_2)\geqslant 0$. 于是 $g(x_1)=f'(x_2)\leqslant 0, g(x_2)=f'(x_2)\geqslant 0$, 因此存在 $\eta, x_1\leqslant\eta\leqslant x_2$, 使得 $g(\eta)=0$.

注 函数 $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ 满足条件, 且 $f'+f''$ 恒为常数.

5. 设 P 是一个实系数的 n 次多项式, 且零点均为实数.

(a) 证明对任意实数 x, 下面的不等式都成立:

$$
(n-1)\big(P'(x)\big)^2\geqslant nP(x)P''(x). \tag{5.1}
$$

(b) 求出不等式的取等条件.

证明

(a) 注意到当 $n=1$ 时, (5.1) 式两边都为令, 假定 $n>1$, 并设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 P 的所有零点. 则 (5.1) 式当 $x=x_i, i\in\{1,\cdots,n\}$ 时显然成立, 取等的话当且仅当 $P'(x_i)=0$, 即 x_i 是 P 的二重零点. 现在假定 x 不是 P 的零点, 由

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i},\quad \frac{P''(x)}{P(x)}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{2}{(x-x_i)\left(x-x_j\right)}$$

我们可得

$$\begin{aligned}(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2-n\frac{P''(x)}{P(x)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{(x-x_i)^2}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{2}{(x-x_i)\left(x-x_j\right)}\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{1}{x-x_i}-\frac{1}{x-x_j}\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

不等式得证.

(b) 要想等号成立, 需要 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 而简单的计算可知 $P(x)=c(x-x_1)^n$ 就可以使 (1) 式等号成立.

6. 设 $f;[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 满足对任意 $x,y\in[0,1]$ 都有

$$xf(y)+yf(x)\leqslant 1.$$

(a) 证明 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

(b) 找出一个满足条件且使得等号成立的函数.

解

(a) 利用积分换元可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin\theta)\cos\theta+f(\cos\theta)\sin\theta]\,\mathrm{d}\theta\right)\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(b) 取 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. 如果 $x=\sin\theta$ 且 $y=\sin\varphi$, 则

$$xf(y)+yf(x)=\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi\cos\theta=\sin(\theta+\varphi)\leqslant 1.$$

且此时 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

§ 5.2 第二天

1. 设 V 是一个实的向量空间, $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是从 V 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射. 假定只要 $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_k(x)=0$ 就有 $f(x)=0$ 成立, 证明 f 是 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 的一个线性组合.

证明　我们对 k 进行归纳. 不妨假定 $f_1, \cdots, f_k$ 是线性无关的, 否则考虑其极大无关组即可. 由于 f_k 与 $f_1, \cdots, f_{k-1}$ 无关, 由归纳假设, 存在向量 $a_k \in V$ 使得 $f_1(a_k) = \cdots = f_{k-1}(a_k) = 0$ 且 $f(a_k) \neq 0$. 规范化之后, 我们不妨假定 $f_k(a_k) = 1$. 向量 $a_1, \cdots, a_{k-1}$ 也可类似定义为

$$f_i\left(a_j\right)=\begin{cases}1, & x=j \\ 0, & i \neq j\end{cases}.$$

对任意 $x \in V$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k$,

$$\begin{aligned} f_i\left(x-f_1(x) a_1-f_2(x) a_2-\cdots-f_k(x) a_k\right) &= f_i(x)-\sum_{j=1}^k f_j(x) f_i\left(a_j\right) \\ &= f_i(x)-f_i(x) f_i\left(a_i\right)=0. \end{aligned}$$

因此 $f(x-f_1(x)a_1-\cdots-f_k(x)a_k)=0$. 由 f 的线性性可知 $f(x)=f_1(x)f(a_1)+\cdots+f_k(x)a_k$, 这就说明 $f(x)$ 是 $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ 的线性组合.

2. 设

$$\mathcal{P}=\left\{f: f(x)=\sum_{k-0}^3 a_k x^k, a_k \in \mathbb{R},|f(\pm 1)| \leqslant 1,\left|f\left(\pm \frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 1\right\}.$$

求

$$\sup_{f \in \mathcal{P}} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1}\left|f''(x)\right|$$

以及使得取到上确界的多项式 $f \in \mathcal{P}$.

证明　令 $x_0=1, x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=1$,

$$\begin{aligned} w(x) &= \prod_{i=0}^3\left(x-x_i\right), \\ w_k(x) &= \frac{w(x)}{x-x_k}, k=0,1,2,3, \\ l_k(x) &= \frac{w_k(x)}{w_k\left(x_k\right)}. \end{aligned}$$

则对任意 $f \in \mathcal{P}$ 有

$$f''(x)=\sum_{k=0}^3 l_k''(x) f\left(x_k\right), \quad\left|f''(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^3\left|l_k''(x)\right|.$$

由于 f'' 是一个线性函数, $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1}|f''(x)|$ 在 $x=-1$ 或 $x=1$ 处取到. 不妨假设就在 $x=1$ 处取到最大值, 则

$$\sup_{f \in \mathcal{P}} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1}|f''(x)|=\sum_{k=0}^3|l_k''(1)|.$$

要想 $f_\star$ 取到上述最值, 必有

$$f_\star(x_k)=\operatorname{sign}(l_k''(1)), k=0,1,2,3.$$

显然 $\{l_k''(1)\}_{k=0}^3$ 符号交替, 所以 $f_\star(x_k) = (-1)^{k-1}, k = 0,1,2,3$. 因此 $f_\star(x) = T_3(x) = 4x^3 - 3x$, 即第一类的 Chebyshev 多项式, 且 $f_\star''(1) = 24$. 如果 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f''(x)|$ 在 $x = -1$ 处取到, 则对应的多项式为 $-T_3(x)$.

3. 设 $0 < c < 1$, 令

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{c}, & x \in [0,c], \\ \dfrac{1-x}{1-c}, & x \in [c,1]. \end{cases}$$

我们说 p 是 n 周期点是指

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(p))) = p,$$

并且 n 是满足上述性质的最小数. 证明对每个 $n \geqslant 1$, 所有 n 周期点构成的集合都是非空且有限的.

证明 设 $f_n(x) = \overbrace{f(f(\cdots f}^{n}(x)))$. 不难得知 $f_n(x)$ 是分段单调的函数, 且它的图像包含 2^n 个线段. 每个线段的一个端点在 $\{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}$ 上, 另一个端点在 $\{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1\}$ 上. 因此函数 $f(x) = x$ 的图像与每一个线段都恰好相交一次, 所以满足 $f_n(x) = x$ 的点的数目为 2^n.

由于对每个 n 周期点我们有 $f_n(x) = x$, 因此所以的 n 周期点数是有限的.

x 是 n 周期点当且仅当 $f_n(x) = x$ 而 $f_k(x) \neq x, k = 1,\cdots,n-1$. 但 $f_k(x) = x$ 仅在 2^k 个点处成立, 所以存在至多 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 2$ 个点 x 使得对某个 $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$ 有 $f_k(x) = x$ 成立. 因此在满足 $f_n(x) = x$ 的 2^n 个点中至少存在两个 n 周期点.

4. 设 $A_n = \{1,2,\cdots,n\}$, 其中 $n \geqslant 3$. 记 $\mathcal{F}$ 为所有非常数且满足下述条件的函数 $f: A_n \to A_n$ 构成的集合:

(1) $f(k) \leqslant f(k+1), k = 1,2,\cdots,n-1$,

(2) $f(k) = f\big(f(k+1)\big), k = 1,2,\cdots,n-1$.

求出 $\mathcal{F}$ 中函数的数目.

解 显然恒等映射 $\mathrm{id}: A_n \to A_n, \mathrm{id}(x) = x$ 不满足条件 (2). 由于 id 是 A_n 上唯一单增的单射, 故 $\mathcal{F}$ 不含有任何单射. 任取 $f \in \mathcal{F}$, 并假定 $\#(f^{-1}(k) \geqslant 2$. 由于 f 是单调增的, 存在 $i \in A_n$ 使得 $f(a) = f(i+1) = k$. 考虑到 (2) 式, $f(k) = f(f(i+1)) = f(a) = k$.

如果 $\{i < k : f(a) < k\} = \varnothing$, 则取 $j = \max\{i < k : f(a) < k\}$, 我们得到 $f(j) < f(j+1) = k = f\big(f(j+1)\big)$, 矛盾, 因此 $f(a) = k$ 对 $i \leqslant k$ 都成立.

如果 $\#\big(f^{-1}(l)\big) \geqslant 2$ 对某个 $l \geqslant k$ 成立, 则同理可证 $f(a) = l = k$ 对所有 $i \leqslant k$ 成立. 因此必然对任意 $i > k$ 有 $\#\big(f^{-1}(a)\big) = 0$ 或 1, 于是当 $i > k$ 时 $f(a) < i$.

如果 $f(l) = l$, 取 $j = \max\{i < l : f(a) < l\}$, 我们有 $f(j) < f(j+1) = l = f\big(f(j+1)\big)$, 矛盾. 因此对 $i > k$ 都有 $f(a) < i - 1$. 令 $m = \max\{i : f(a) = k\}$. 由于 f 不是常数, 故 $m \leqslant n-1$. 再由 $k = f(m) = f\big(f(m+1)\big), f(m+1) \in [k+1, m]$, 如果 $f(l) > l - 1$ 对某个 $l > m+1$ 成立, 则 $l - 1$ 和 $f(l)$ 都在 $f^{-1}\big(f(l)\big)$ 内, 这又和上面的结论矛盾. 因此 $f(a) = i - 1$

对 $i > m+1$ 都成立, 这样我们就证明了 $\mathcal{F}$ 中的每个函数 f 都由自然数 k, l, m 定义, 其中 $1 \leqslant k < l = f(m+1) \leqslant m \leqslant n-1$.

$$f(i) = \begin{cases} k, & i \leqslant m \\ l, & i = m \\ i-1, & i > m+1 \end{cases}.$$

因此

$$\#(\mathcal{F}) = \binom{n}{3}.$$

5. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的球面 (即具有正的半径的球的表面) 的集合, 使得任意两个球面的交至多只有一个点. 证明所有由 S 中至少两个不同球面产生的交点的集合 M 是可数的.

证明 对任意 $x \in M$, 取球面 $S, T \in \mathcal{S}$ 使得 $S \neq T$ 且 $x \in S \cap T$. 分别用 U, V, W 表示 $\mathbb{R}^n \backslash (S \cup T)$ 的三部分, 其中 $\partial U = S, \partial V = T$, x 是 $\overline{U} \cap \underline{V}$ 的唯一点. 然后取有理点 $u \in U, v \in V, w \in W$. 我们断言 x 由三元数组 $< u, v, w >$ 唯一决定. 由于这样的三元数组是可数的, 这样完成了证明.

要证明上述断言, 假定对某个 $x' \in M$, 我们利用球面 $S', T' \in \mathcal{S}$ 和 $\mathbb{R}^n \backslash (S' \cup T')$ 的三部分 U', V', W' 得到了同样的数组 $< u, v, w >$. 由于 $S \cap S'$ 只包含至多一个点且 $U \cap U' \neq \varnothing$, 我们有 $U \subset U'$ 或者 $U' \subset U$, 类似地对 V 和 W 也有相同结论. 交换 x 和 x' 的位置或者 U 和 V, 我们只需要考虑两种情形: (1) $U \supset U'$ 且 $V \supset V'$; (2) $U \subset U', V \supset V'$ 且 $W \subset W'$. 在情形 (1) 中, 注意到 $\overline{U} \cap \overline{V}$ 只包含点 x, 而 $x' \in \overline{U} \cap \overline{V}$, 因此 $x = x'$. 在情形 (2) 中, 我们由 $W \subset W'$ 可得 $U' \subset \overline{U \cup V}$. 由于 U' 是连通的开集, 而 $\overline{U} \cap \overline{V}$ 只有一个点, 由此推出 $U' = U$, 这就回到了情形 (1) 已经证明的结论.

6. 设 $f : (0,1) \to [0, +\infty)$ 在除掉 $a_1, a_2, \cdots$(这些点互不相同) 之外都为零. 令 $b_n = f(a_n)$.

(a) 证明: 如果 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, 则 f 至少在某一点 $x \in (0,1)$ 可微.

(b) 证明: 对任意非负实数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, 都存在数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得上述定义的函数 f 是处处不可微的.

证明

(a) 我们首先构造正数列 $\{c_n\}$ 使得 $c_n \to +\infty$ 且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n < \frac{1}{2}$. 令 $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 且对每个 $k = 0, 1, \cdots$, 用 N_k 表示第一个正整数使得

$$\sum_{n=N_k}^{\infty} b_n \leqslant \frac{B}{4^k}.$$

当 $N_k \leqslant n < N_{k+1}$ 时, 令 $c_n = \dfrac{2^k}{5B}$, 则 $c_n \to +\infty$. 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_k \leqslant n < N_{k+1}} c_n b_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5B} \sum_{n=N_k}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5B} \cdot \frac{B}{4^k} = \frac{2}{5}.$$

考虑区间 $I_n = (a_n - c_n b_n, a_n + c_n b_n)$. 区间的总长度为 $2\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n < 1$, 因此存在点 $x_0 \in (0,1)$ 不包含在任何区间 I_n 中. 下面我们证明 f 在 x_0 处可微, 且 $f'(x_0) = 0$. 由于 x_0 不在任何区间 I_n 内, 因此 $x_0 \neq a_n$ 对任意 n 成立, 且 $f(x_0) = 0$. 对任意 $x \in (0,1)\backslash\{x_0\}$, 如果 $x = a_n$ 对某个 n 成立, 则

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{f(a_n) - 0}{|a_n - x_0|} \leqslant \frac{b_n}{c_n b_n} = \frac{1}{c_n},$$

否则就有 $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. 由于 $c_n \to +\infty$, 这就意味着对任意 $\varepsilon > 0$, 只有有限个 $x \in \{(0,1)\backslash\{x_0\}\}$ 使得

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \geqslant \varepsilon.$$

这样我们就证明了 $f'(x_0) = 0$.

注 f 的变差是有限的, 意味着 f 是几乎处处可微的.

(b) 把 b_n 中的 0 移除. 由于除开 $(0,1)$ 的一个可数子集外 $f(x) = 0$, 如果 f 在某点 x_0 处可微, 则 $f(x_0) = f(0) = 0$.

不难构造数列 β_n 满足 $0 < \beta_n \leqslant b_n, b_n \to 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$. 取数列 $\{a_n\}$ 使得区间 $I_n = (a_n - \beta_n, a_n + \beta_n)(n = 1, 2, \cdots)$ 把区间 $(0,1)$ 内的每个点都覆盖无穷次 (这是可以做到的, 因为区间长度 $2\sum b_n = +\infty$). 则对任意 $x_0 \in (0,1)$, $f(x_0) = 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\beta_n < \varepsilon$, 且 $x_0 \in I_n$, 这意味着

$$\left|\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}\right| > \frac{b_n}{\beta_n} \geqslant 1.$$

矛盾于 $f'(x_0) = 0$, 因此 f 在任意点 x_0 都不可微.

6. 1999 年国际大学生数学竞赛 Keszthely, Hungary

§ 6.1 第一天

1. (a) 证明对任意 $m \in \mathbb{N}$, 都存在一个 $m \times m$ 矩阵 A 使得 $A^3 = A + I$, 其中 I 是 $m \times m$ 单位矩阵.

(b) 证明对任意满足 $A^3 = A + I$ 的 $m \times m$ 矩阵 A, 都有 $\det(A) > 0$.

证明

(a) 当且仅当实数 λ 满足 $\lambda^3 = \lambda + 1$ 时, 矩阵

$$A = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

就是矩阵方程 $A^3 = A + I$ 的解, 因为 $A^3 - A - I = (\lambda^3 - \lambda - 1)I$, 而此三次方程一定有实根.

(b) 显然多项式 $p(x) = x^3 - x - 1$ 有一个正实根 λ_1 和两个共轭复根 λ_2, λ_3. 如果矩阵 A 满足方程 $A^3 = A + I$, 则它的特征值只能是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 显然 λ_2 与 λ_3 的重数是一样的. 记 λ_1 的重数为 α, λ_2 与 λ_3 的重数为 β, 则

$$\det(A) = \lambda_1^{\alpha} \lambda_2^{\beta} \lambda_3^{\beta} = \lambda_1^{\alpha} (\lambda_2 \lambda_3)^{\beta}.$$

由于 $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 \lambda_3 = |\lambda_2|^2 > 0$, 因此 $\det(A) > 0$.

2. 是否存在双射 $\pi: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < +\infty?$$

解 答案是否定的. *方法一* 设 π 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个置换, 对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 下面我们将证明

$$\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{9}.$$

事实上, 在 $2N$ 个数 $\pi(N+1), \cdots, \pi(3N)$ 中, 最多只有 N 个数不超过 N, 因此其中至少有 N 个数大于 N. 因此

$$\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} \geqslant \frac{1}{(3N)^2} \sum_{n=N+1}^{3N} \pi(n) > \frac{1}{9N^2} \cdot N \cdot N = \frac{1}{9}.$$

方法二 设 π 是 $\mathbb{N}^*$ 的一个置换. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\pi(1), \cdots, \pi(n)$ 是不同的整数, 因此 $\pi(1)+\cdots+\pi(n) \geqslant 1+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 由此不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\pi(1)+\cdots+\pi(n)) \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} = +\infty.\end{aligned}$$

3. 设函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} 3^k (f(x+ky)-f(x-ky))\right| \leqslant 1 \tag{6.1}$$

对任意正整数 n 和 $x, y \in \mathbb{R}$ 都成立. 证明 f 为常函数.

证明 把 (6.1) 式中的 n 换成 $n-1$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} 3^k (f(x+ky)-f(x-ky))\right| \leqslant 1. \tag{6.2}$$

(6.1) 式与 (6.2) 式作差可知

$$|3^n (f(x+ny)-f(x-ny))| \leqslant 2.$$

这意味着

$$|f(x+ny)-f(x-ny)| \leqslant \frac{2}{3^n}. \tag{6.3}$$

对任意 $u, v \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 我们可以取 x, y 使得 $x-ny=u$ 和 $x+ny=v$, 即 $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{v-u}{2n}$, (6.3) 式即

$$|f(u)-f(v)| \leqslant \frac{2}{3^n}.$$

对任意正整数 n 都成立, 这说明 $f(u)=f(v)$, 因此 f 是常函数.

4. 求出所有满足 $f\left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right) \equiv x$ 的严格单调函数 $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$.

解 记 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 我们有 $g\left(\dfrac{x}{g(x)}\right)=g(x)$. 归纳可知 $g\left(\dfrac{x}{g^n(x)}\right)=g(x)$, 即

$$f\left(\frac{x}{g^n(x)}\right)=\frac{x}{g^{n-1}(x)}, n \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

另一方面, 把 $f\left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right)=x$ 中的 x 替换成 $f(x)$, 根据 f 的双射性可知 $\dfrac{f^2(x)}{f(f(x))}=x$, 即 $g(xg(x))=g(x)$. 再由归纳法可得 $g(xg^n(x))=g(x)$, 即

$$f(xg^n(x))=xg^{n-1}(x), n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

记 $f^{(m)}=\underbrace{f\circ f\cdots\circ f}_{m个}$. 由 (6.4) 和 (6.5) 得

$$f^{(m)}\left(xg^{(n)}(x)\right)=xg^{n-m}(x),m,n\in\mathbb{N}. \tag{6.6}$$

现在我们将证明 g 是常函数. 假定 $g(x_1)<g(x_2)$. 则我们可以找到 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x_1g^n(x_1)\leqslant x_2g^n(x_2)$. 另一方面, 如果 m 是偶数, 则由 (6.6) 可知 $f^{(m)}$ 是严格单调增的. 于是有 $x_1^mg^{n-m}(x_1)\leqslant x_2^mg^{n-m}(x_2)$. 但是当 n 固定时, 对于充分大的 m, 不等号会反向. 这个矛盾说明 g 是常数, 即 $f(x)=Cx,C>0$, 而且显然这是满足原方程的解.

5. 假定一个 $n\times n$ 的方格中的 $2n$ 个点已经被标记. 证明对某个 $k>1$, 我们可以选出 $2k$ 个不同的标记点, 设为 $a_1,\cdots,a_{2k}$, 使得 a_1 和 a_2 在同一行, a_2 和 a_3 在同一列,$\cdots$,a_{2k-1} 和 a_{2k} 在同一行, 且 a_{2k} 和 a_1 在同一列.

证明 定义图 G: G 的顶点是方格的行和列, 如果某一行 r 和某一列 c 的交点是被标记的点, 则在 r 与 c 之间连一条边. 于是图 G 有 $2n$ 个顶点和 $2n$ 条边, 而我们知道如果一个图有 N 个顶点且不含圈的话, 则此图至多有 $N-1$ 条边, 因此图 G 含有圈. 一个圈就是一个行与列的交替序列, 而每个行与列的交点就是一个被标记的点, 这就证明了原命题.

6. (a) 对每个 $1<p<\infty$, 求出常数 $c_p<\infty$ 使得: 如果 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 是一个连续可微函数满足 $f(1)>f(-1)$ 且 $|f'(y)|\leqslant 1$ 对任意 $y\in[-1,1]$ 都成立, 则存在 $x\in[-1,1]$ 使得 $f'(x)>0$ 且 $|f(y)-f(x)|\leqslant c_p\left(f'(x)\right)^{1/p}|y-x|$ 对任意 $y\in[-1,1]$ 都成立.

(b) 这样的常数是否对 $p=1$ 也存在?

解

(a) 设 $g(x)=\max\{0,f'(x)\}$. 则 $0<\int_{-1}^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\left(f'(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$, 于是有

$$\int_{-1}^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\left(g(x)-f'(x)\right)\mathrm{d}x<2\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

固定 p 和 c(待定), 给定任意 $t>0$, 对每个满足 $g(x)>t$ 的 x, 取区间 $I_x=[x,y]$ 使得

$$|f(y)-f(x)|>cg^{1/p}(x)\,|y-x|>ct^{1/p}\,|I_x|.$$

选择不相交的区间 I_{x_t} 且至少覆盖集合 $\{g>t\}$ 测度的 $\frac{1}{3}$. 对 $I=\bigcup\limits_i I_i$, 我们有

$$ct^{1/p}\,|I|\leqslant\int_I f'(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x<2\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$|\{g>t\}|\leqslant 3\,|I|<\frac{6}{ct^{1/p}}\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

不等式两边积分得

$$\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1|\{g>t\}|\,\mathrm{d}t<\frac{6p}{c(p-1)}\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

这是一个矛盾, 即 $c_p=\dfrac{6p}{p-1}$.

(b) 结论是否定的. 给定 $c>1$, 记 $\alpha=\frac{1}{c}$, 取 $0<\varepsilon<1$ 使得 $\left(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{-\alpha}<\frac{1}{4}$. 设 $g:[-1,1]\to[-1,1]$ 是连续的偶函数. 当 $|x|\leqslant\varepsilon$ 时, $g(x)=-1$; 当 $\varepsilon<|x|\leqslant 1$ 时取定 $0\leqslant g(x)<\alpha\left(\frac{|x|+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{-\alpha-1}$ 使得

$$\int_{\varepsilon}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t>-\frac{\varepsilon}{2}+\int_{\varepsilon}^{1}\alpha\left(\frac{|t|+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{-\alpha-1}\mathrm{d}t=-\frac{\varepsilon}{2}+2\varepsilon\left(1-\left(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{-\alpha}\right)>\varepsilon.$$

取 $f(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$f(1)-f(-1)>-2\varepsilon+\int_{\varepsilon}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t>0.$$

如果 $\varepsilon<x<1$ 且 $y=-\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\geqslant 2\varepsilon-\int_{\varepsilon}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 2\varepsilon-\int_{\varepsilon}^{x}\alpha\left(\frac{t+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{-\alpha-1}\mathrm{d}t\\&=2\varepsilon\left(\frac{x+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^{-\alpha}>g(x)\frac{|x-y|}{\alpha}=f'(x)\frac{|x-y|}{\alpha};\end{aligned}$$

对 $-1<x<-\varepsilon$ 和 $y=\varepsilon$ 则是对称的.

§ 6.2 第二天

1. 设在非交换环 R 中, 任意元素的平方都是 0. 证明对任意元素 a,b,c 都有 $abc+abc=0$.

证明 由 $0=(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ba=ab+ba$, 我们可得 $ab=-(ba)$ 对任意 a,b 都成立. 这意味着

$$abc=a(bc)=-\big((bc)\big)a=-(b(ca))=(ca)b=c(ab)=-\big((ab)c\big)=-abc.$$

2. 掷一枚骰子 n 次, 所有点数和被 5 整除的概率为多少?

解 *方法一* 对所有非负整数 n 和模 5 的余数 r, 用 $p_n^{(r)}$ 表示 n 次投掷以后所有点数总和模 5 余 r 的概率. 显然 $p_0^{(0)}=1$ 且 $p_0^{(1)}=p_0^{(2)}=p_0^{(3)}=p_0^{(4)}=0$.

进一步, 对任意 $n>0$, 我们有

$$p_n^{(r)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}p_{n-1}^{(r-i)}. \tag{6.7}$$

由此递推公式以及通过计算较小的 n 的概率值, 我们可以猜测

$$p_n^{(r)}=\begin{cases}\frac{1}{5}+\frac{4}{5\cdot 6^n}, & n\equiv r \pmod 5\\ \frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 6^n}, & \text{其他}\end{cases}.$$

这可以根据 (6.7) 式归纳得出.

方法二 对任意正整数 k, 用 p_k 表示所有点数和为 k 的概率. 定义母函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_kx^k=\left(\frac{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6}{6}\right)^n.$$

我们的目的是求出 $\sum_{k=1}^{\infty} p_{5k}$. 令 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{2\pi}{5}$ 表示 1 的第一个五次单位根, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{5k}=\frac{f(1)+f(\varepsilon)+f\left(\varepsilon^2\right)+f\left(\varepsilon^3\right)+f\left(\varepsilon^4\right)}{5}.$$

显然 $f(1)=1$, 且 $f(\varepsilon^j)=\frac{\varepsilon^{jn}}{6^n}$, $j=1,2,3,4$, 于是

$$f(\varepsilon)+f\left(\varepsilon^2\right)+f\left(\varepsilon^3\right)+f\left(\varepsilon^4\right)=\begin{cases}\frac{4}{6^n}, & n\equiv 0 \pmod 5\\ -\frac{1}{6^n}, & \text{其他}\end{cases}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{5k}=\begin{cases}\frac{1}{5}+\frac{4}{5\cdot 6^n}, & n\equiv 0 \pmod 5\\ \frac{1}{5}-\frac{1}{5\cdot 6^n}, & \text{其他}\end{cases}.$$

3. 设 $x_1,\cdots,x_n\geqslant -1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} x_i^3=0$. 证明: $\sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant\frac{n}{3}$.

证明　首先对 $x\geqslant -1$ 有不等式

$$0\leqslant x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

由此我们得到

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3-\frac{3}{4}x_i+\frac{1}{4}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^3-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i+\frac{n}{4}=0-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i+\frac{n}{4}.$$

因此 $\sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant\frac{n}{3}$.

注　等号成立当且仅当 $n=9k$, 且 $x_1,\cdots,x_n$ 中的 k 个是 -1, 另外 $8k$ 个是 $\frac{1}{2}$.

4. 证明不存在函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 使得 $f^2(x)\geqslant f(x+y)\big(f(x)+y\big)$ 对任意 $x,y>0$ 都成立.

证明　假定存在这样的函数. 则原不等式可写为

$$f(x+y)\geqslant f(x)-\frac{f^2(x)}{f(x)+y}=\frac{f(x)\,y}{f(x)+y}.$$

显然 f 是单调递减的函数. 固定 $x>0$, 取定 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $nf(n+1)\geqslant 1$. 对 $k=0,1,\cdots,n-1$, 我们有

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\geqslant\frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{nf\left(x+\frac{k}{n}\right)+1}\geqslant\frac{1}{2n}.$$

把这些不等式加起来可得 $f(x+1)\leqslant f(x)-\frac{1}{2}$. 由此可知 $f(x+2m)\leqslant f(x)-m$ 对所有 $m\in\mathbb{N}$ 都成立. 取 $m>f(x)$, 则矛盾于条件 $f(x)>0$.

5. 设 S 表示所有包含字母 x,y,z 的单词的集合, S 上的一个等价关系 $\sim$ 满足条件: 对任意 $u,v,w\in S$,

(a) $uu\sim u$;

(b) 如果 $v\sim w$ 则 $uv\sim uw$ 且 $vu\sim wu$.

证明 S 中的每个单词都等价于一个长度不超过 8 的单词.

证明 我们首先证明一个引理:

> **引理 6.1.** 如果单词 $u\in S$ 包含所有的字母, 而 $v\in S$ 是任意一个单词, 则存在单词 $w\in S$ 使得 $uvw\sim u$.
>
> 证明. 如果 v 知包含一个字母, 不妨设为 x, 把 u 写成 $u=u_1xu_2$ 的形式, 取 $w=u_2$. 则 $uvw=(u_1xu_2)xu_2=u_1\big((xu_2)(xu_2)\big)\sim u_1(xu_2)=u$. ☆

在一般情形下, 设 v 中的字母为 $a_1,\cdots,a_k$. 则我们可以取单词 $w_1,\cdots,w_k$ 使得 $(ua_1)w_1\sim u,(ua_1a_2)w_2\sim ua_1,\cdots,(ua_1\cdots a_k)\sim ua_1\cdots a_{k-1}$. 则 $u\sim ua_1w_1\sim ua_1a_2w_2w_1\sim\cdots\sim ua_1\cdots a_kw_k\cdots w_1=uv(w_k\cdots w_1)$, 所以 $w=w_k\cdots w_1$ 是一个可行的选择.

现在考虑任意单词 a, 且至少包含 8 个字母, 我们将证明存在一个较短的单词与 a 等价. 如果 a 可以写成 $uvvw$ 的形式. 则它的长度可以减少为 $uvvw\sim uvw$, 所以我们假定 a 不具有这种形式.

把 a 写成形式 $a=bcd$, 这里 b,d 分别是 a 的第一个和最后一个字母, 我们将证明 $a\sim bd$.

很容易验证 b,d 包含所有的字母 x,y,z, 否则它的长度就会被减少. 由引理知存在单词 e 使得 $b(cd)e\sim b$, 且存在单词 $def\sim d$. 我们可以写成

$$a=bcd\sim bc\,(def)\sim bc\,(dedef)=(bcde)\,(def)\sim bd.$$

6. 设 A 是 $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的一个子集, 且元素个数不超过 $\dfrac{1}{100}\log n$. 对 $r\in\mathbb{Z}_n$, 定义 A 的第 r 个 Fourier 系数

$$f(r)=\sum_{s\in A}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}sr\right)$$

证明存在 $r\neq 0$, 使得 $|f(r)|\geqslant\dfrac{|A|}{2}$.

证明 记 $A=\{a_1,\cdots,a_k\}$. 考虑 k 元组

$$\left(\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}a_1t}{n}\right),\cdots,\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}a_kt}{n}\right)\right)\in\mathbb{C}^k,\quad t=0,1,\cdots,n-1.$$

把单位圆分成 6 段相等的弧, 这把 k 元组分成 6^k 个不同的类别. 由条件 $\dfrac{1}{100}\log n$ 我们可得 $n>6^k$, 所以存在两个 k 元组在同一个类里, 不妨设 $t_1<t_2$ 所对应的两个 k 元组在同一个类里. 令 $r=t_2-t_1$, 则

$$\Re\left(\exp\left(\frac{2\pi i a_jr}{n}\right)\right)=\cos\left(\frac{2\pi a_jt_2}{n}-\frac{2\pi a_jt_1}{n}\right)\geqslant\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

对所有 j 成立, 所以

$$|f(r)|\geqslant\mathrm{Re}f(r)\geqslant\frac{k}{2}.$$

7. 2000 年国际大学生数学竞赛 London, Britain

§ 7.1 第一天

1. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$, 在下面两种情形中, 是否存在 $x\in[0,1]$, 使得 $f(x)=x$?

(a) $f(x)$ 单调递增;

(b) $f(x)$ 单调递减.

解

(a) 存在. 记 $A=\{x\in[0,1]: f(x)>x\}$. 如果 $f(0)=0$, 结论已经成立. 否则, 集合 A 就是非空且有界的, 因此 A 存在上确界, 及此上确界为 a, $b=f(a)$.

(i) 如果 $a<b$, 则由于 f 是单调的, a 是 A 的上确界, 则 $b=f(a)\leqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{a+b}{2}$, 这与 $a<b$ 矛盾.

(ii) 如果 $a>b$, 则 $b=f(a)\geqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>\dfrac{a+b}{2}$, 矛盾, 因此 $a=b$.

(b) 不一定, 比如取

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}, & x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

这就是一个单调递减的函数, 且不存在 $x\in[0,1]$ 使得 $f(x)=x$.

2. 设 $p(x)=x^5+x, q(x)=x^5+x^2$. 求出所有满足 $p(w)=p(z), q(w)=q(z)$ 的复数对 $(w,z)w\neq z$.

解 令

$$\begin{cases}P(x,y)=\dfrac{p(x)-p(y)}{x-y}=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+1,\\ Q(x,y)=\dfrac{q(x)-q(y)}{x-y}=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+x+y.\end{cases}$$

我们需要求的是满足 $P(w,z)=Q(w,z)=0$ 的数对 (w,z).

由 $P-Q=0$ 可得 $w+z=1$. 令 $c=wz$, 计算可得 $c^2-3c+2=0$, 此方程的解为 $c=1, c=2$. 由 $w+z=1$ 和 $wz=c$ 可得满足条件的数对 (w,z) 为

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\frac{1\mp\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right),\left(\frac{1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2},\frac{1\mp\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}\right).$$

3. A 与 B 是阶数相同的复矩阵, 且

$$\operatorname{rank}(AB-BA)=1.$$

证明 $(AB-BA)^2=\boldsymbol{O}$.

证明 令 $C=AB-BA$. 由于 $\operatorname{rank}C=1$, C 至多只有一个非零特征值. 且 $\operatorname{tr}C=0$, 所以 C 的所有特征值都是零. 那么根据 C 的约旦标准形可知 $C^2=\boldsymbol{O}$.

4. (a) 证明: 如果 $\{x_i\}$ 是一个单调递减的正数列, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

(b) 证明: 如果 $\{x_i\}$ 是一个单调递减的正数列, 则存在常数 C 使得

$$\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^\infty x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\sum_{i=1}^\infty x_i.$$

证明

(a)

$$\left(\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2=\sum_{i,j}^n\frac{x_ix_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\geqslant\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{i}}\sum_{j=1}^i\frac{x_i}{\sqrt{j}}\geqslant\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\sqrt{i}}i\frac{x_i}{\sqrt{i}}=\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

(b) 利用 (a) 中不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{i=m}^\infty x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}&\leqslant\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=m}^\infty\frac{x_i}{\sqrt{i-m+1}}\\&=\sum_{i=1}^\infty x_i\sum_{m=1}^i\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^i\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}}&=2\sum_{m=1}^{i/2}\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}}\\&\leqslant 2\frac{1}{\sqrt{i/2}}\sum_{m=1}^{i/2}\frac{1}{\sqrt{m}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{i/2}}\cdot 2\sqrt{i/2}=4.\end{aligned}$$

事实上,

$$\sum_{m=1}^i\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}}=\frac{1}{i}\sum_{m=1}^i\frac{1}{\sqrt{\frac{m}{i}}\sqrt{1-\frac{m-1}{i}}}\leqslant\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\pi.$$

5. 设 R 是一个特征零的非交换环, e,f,g 是 R 中的幂等元且满足 $e+f+g=0$. 证明: $e=f=g=0$.

注 R 是一个特征零的环是指如果 $a\in R$, n 是一个正整数, 则当 $a\neq 0$ 时, $na\neq 0$. x 是幂等元是指 $x^2=x$.

证明 假定 $e,f,g\in R$ 满足 $e+f+g=0$, 则

$$g=g^2=(-(e+f))^2=e+(ef+fe)+f+(ef+fe)-g,$$

即 $ef+fe=2g$. 由此得

$$[e,f]=ef-fe=[e,ef+fe]=2[e,g]=[e,-e-f]=-2[e,f],$$

即 $ef=fe$(这里是因为 R 为特征零环). 因此 $ef+fe=2g$ 变为 $ef=g$, 所以 $e+f+ef=0$. 两边左乘 e 得到 $e+2ef=0$, 类似地有 $2+2ef=0$, 所以 $f=-2ef=e$, 那么由对称性得 $e=f=g$. 再由 $e+f+g=0$ 可得 $e=f=g=0$.

6. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个单调递增的可微函数, 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 且 $f'(x)$ 有界. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 递归定义数列 $\{a_n\}$:

$$a_0=1,\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{f(a_n)},$$

而数列 $\{b_n\}$ 定义为 $b_n=F^{-1}(n)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

证明 由条件可知 F 是单调增的且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$. 对任意 $k\in\mathbb{N}$, 由递推式以及 Lagrange 中值定理可知存在 $\xi\in(a_k,a_{k+1})$ 使得

$$F(a_{k+1})-F(a_k)=f(\xi)(a_{k+1}-a_k)=\frac{f(\xi)}{f(a_k)}.$$

由单调性有 $f(a_k)\leqslant f(\xi)\leqslant f(a_{k+1})$, 因此

$$1\leqslant F(a_{k+1})-F(a-k)\leqslant\frac{f(a_{k+1})}{f(a_k)}=1+\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{f(a_k)}.$$

将上式两边对 k 从 0 到 $n-1$ 求和, 且根据 $F(b_n)=n$ 得

$$F(b_n)<n+F(a_0)\leqslant F(a_n)\leqslant F(b_n)+F(a_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{f(a_k)}.$$

由 F 的单调递增性可得 $a_n>b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

对任意 $\varepsilon>0$, 取整数 K_ε 使得 $f\left(a_{K_\varepsilon}\right)>\dfrac{2}{\varepsilon}$. 当 n 足够大时,

$$\begin{aligned}&F(a_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{f(a_k)}\\=&\left(F(a_0)+\sum_{k=0}^{K_\varepsilon-1}\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{f(a_k)}\right)+\sum_{k=K_\varepsilon}^{n-1}\frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{f(a_k)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< O_\varepsilon(1) + \frac{1}{f\left(a_{K_\varepsilon}\right)} \sum_{k=K_\varepsilon}^{n-1} \left(f\left(a_{k+1}\right) - f\left(a_k\right)\right) \\
&< O_\varepsilon(1) + \frac{\varepsilon}{2}\left(f\left(a_n\right) - f\left(a_{k_\varepsilon}\right)\right) < \varepsilon f\left(a_n\right).
\end{aligned}
$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 均有

$$
F\left(a_n\right) - F\left(b_n\right) < \varepsilon f\left(a_n\right).
$$

再有 Lagrange 中值定理, 存在实数 $\zeta \in (b_n, a_n)$ 使得

$$
F\left(a_n\right) - F\left(b_n\right) = f(\xi)\left(a_n - b_n\right) > f\left(b_n\right)\left(a_n - b_n\right),
$$

于是

$$
f\left(b_n\right)\left(a_n - b_n\right) < \varepsilon f\left(a_n\right).
$$

假定 B 是 f' 的一个上界, 因此 $f(a_n) < f(b_n) + B(a_n - b_n)$, 进一步有

$$
f\left(b_n\right)\left(a_n - b_n\right) < \varepsilon f\left(a_n\right) < \varepsilon\left(f\left(b_n\right) + B\left(a_n\right)\right),
$$

$$
\left(f\left(b_n\right) - \varepsilon B\right)\left(a_n - b_n\right) < \varepsilon f\left(b_n\right).
$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 于是我们得到

$$
a_n - b_n < \varepsilon \frac{f\left(b_n\right)}{f\left(b_n\right) - \varepsilon B} < 2\varepsilon
$$

对充分大的 n 成立, 因此就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

§ 7.2 第二天

1. (a) 证明: 只要 n 足够大, 单位正方形就可以瓜分成 n 个小的正方形.

(b) 设 $d \geqslant 2$, 证明: 存在常数 $N(d)$, 只要 $n \geqslant N(d)$, 一个 d 维的单位方体就可以瓜分为 n 个小的方体.

证明 首先证明一个引理:

引理 7.1. 如果 a 和 b 是互素的正整数, 则当正整数 m 充分大时, m 都可以表示为 $ax + by$ 的形式, 其中 x, y 均为非负整数.

证明. 数组 $0, a, 2a, \cdots, (b-1)a$ 给出了模 b 的完系, 因此对任意 m, 存在 $0 \leqslant x \leqslant b-1$ 使得 $ax \equiv m \pmod b$. 如果 $m \geqslant (b-1)a$, 则 $y = \dfrac{m - ax}{b}$ 也是一个非负整数, 于是就有 $ax + by = m$, 这就证明了引理. ☆

注意到任意把一个正方形分成 n 个小方体的瓜分可以进一步分成 $n + (a^d - 1)$ 个方体, 其中 $a \geqslant 1$, 这只需要任意选取一个小的方体在瓜分成 a^d 个更小的方体. 要证明待证结论, 只需要给出具有形式 $a^d - 1$ 的互素的正整数即可. 在二维情形下取 $a_1 = 2, a_2 = 3$ 就有 $2^2 - 1 = 3$ 和 $3^2 - 1 = 8$ 互素. 在一般的情形下, $2^d - 1$ 和 $(2^d - 1)^d - 1$ 就是两个满足就条件的数.

2. 设 f 是 $[0,1]$ 上处处不单调的连续函数. 证明: f 的局部极值点的集合在 $[0,1]$ 中稠密.

注 函数 f 处处不单调是指不存在区间使得 f 是单调的. 一个集合是稠密的是指任意非空的开集都至少包含这个集合中的一个元素.

证明 设 $(x-\alpha, x+\alpha) \subset [0,1]$ 是任一非空开集. 则函数 f 在区间 $[x-\alpha, x]$ 和 $[x, x+\alpha]$ 都不是单调的, 因此存在实数 $p, q, r, s, x-\alpha \leqslant p < q \leqslant x, x \leqslant r < s \leqslant x+\alpha$ 使得 $f(p) > f(q)$ 且 $f(r) < f(s)$.

由 Weirstrass 定理, f 在区间 $[p,s]$ 内存在局部极值. $f(p)$ 与 $f(s)$ 都不是极小值点, 因为它们分别大于 $f(q)$ 和 $f(r)$, 因此极小值在开区间的内部, 也就是说任意开区间 $(x-\alpha, x+\alpha) \subset [0,1]$ 都包含一个局部极值点.

3. 设 $p(z)$ 是一个 n 次复系数多项式. 证明: 至少存在 $n+1$ 个复数 z 使得 $p(z)=0$ 或 1.

注 此结论对 p 是常数不成立, 我们只证明 n 是正整数的情形.

证明 对任意多项式 $q(z)$ 和复数 c, 用 $\mu(q,c)$ 表示满足 $(z-c)^\alpha$ 被 $q(z)$ 整除的最大指数 α.(换句话说, 如果 c 是 $q(z)$ 的根, 则 $\mu(q,c)$ 就表示根的重数, 否则就是 0.)

用 S_0 和 S_1 分别表示使得 $p(z)=0$ 和 $p(z)=1$ 的复数 z 的集合. 这两个集合包含了多项式 $p(z)$ 和 $p(z)-1$ 所有的根, 因此

$$\sum_{c\in S_0}\mu(p,c)=\sum_{c\in S_1}\mu(p-1,c)=n. \tag{7.1}$$

多项式 $p'(z)$ 至少有 $n-1$ 个根 (这里就需要 $n>0$). 这就意味着

$$\sum_{c\in S_0\cup S_1}\mu\left(p',c\right)\leqslant n-1. \tag{7.2}$$

如果 $p(c)=0$ 或者 $p(c)-1=0$, 则

$$\mu(p,c)-\mu\left(p',c\right)=1 \text{ 或 } \mu(p-1,c)-\mu\left(p',c\right)=1. \tag{7.3}$$

由 (7.1) (7.2) (7.3) 可得

$$\begin{aligned}
|S_0|+|S_1| &= \sum_{c\in S_0}\left(\mu(p,c)-\mu\left(p',c\right)\right)+\sum_{c\in S_1}\left(\mu(p-1,c)-\mu\left(p',c\right)\right)\\
&=\sum_{c\in S_0}\mu(p,c)+\sum_{c\in S_1}\mu(p-1,c)-\sum_{c\in S_0\cup S_1}\mu\left(p',c\right)\\
&\geqslant n+n-(n-1)=n+1.
\end{aligned}$$

4. 设一个 6 次多项式的图像与一条直线相切于 3 个点 A_1, A_2, A_3, 其中 A_2 在 A_1 与 A_3 之间.

(a) 证明: 如果线段 A_1A_2 和 A_2A_3 长度相等, 则由这两段线段与多项式的图像围成的部分的面积也相等.

(b) 令 $k=\dfrac{A_2A_3}{A_1A_2}$, 设 K 表示上述两部分围成面积的比值, 证明

$$\frac{2}{7}k^5 < K < \frac{7}{2}k^5.$$

证明

(a) 不失一般性, 不妨假定 A_2 是坐标原点, 则多项式可以表示成

$$y=\left(a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4\right)x^2+a_5x,$$

其中直线 A_1A_3 的方程就是 $y=a_5x$. 点 A_1 和 A_3 的横坐标分别为 $-a,a,a>0$. 由于 $-a$ 和 a 是切点, 则 $-a$ 和 a 一定是多项式 $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ 的二重根. 因此原来的多项式具有形式

$$y=a_0(x^2-a^2)^2x^2+a_5x.$$

由于 $y-ax=a_0(x^2-a^2)^2x^2$ 是偶函数, 于是

$$\int_{-a}^{0}a_0\left(x^2-a^2\right)^2x^2\mathrm{d}x=\int_0^a a_0\left(x^2-a^2\right)^2x^2\mathrm{d}x.$$

这就证明了由线段 A_1A_2,A_2A_3 与原多项式的图像围成的部分的面积相等.

(b) 同样不失一般性, 假定 $a_0=1$. 则多项式具有形式

$$y=(x+a)^2(x-b)^2x^2+a_5x,$$

其中 a, 均为正实数, 且 $b=ka,0<k<+\infty$. 由 A_1A_2,A_2A_3 与多项式的图像围成的两部分区域面积分别为

$$\int_{-a}^{0}(x+a)^2(x-b)^2x^2\mathrm{d}x=\frac{a^7}{210}\left(7k^2+2k+2\right),$$
$$\int_0^b(x+a)^2(x-b)^2x^2\mathrm{d}x=\frac{a^7}{210}\left(2k^2+7k+7\right).$$

因此

$$K=k^5\frac{2k^2+2k+7}{7k^2+2k+2}.$$

求导可知当 $k>0$ 时, $f(k)=\dfrac{2k^2+2k+7}{7k^2+2k+2}$ 的导数是恒为正的, 即 $f(k)$ 严格单调递增, 于是

$$\frac{2}{7}<\frac{2k^2+2k+7}{7k^2+2k+2}<\frac{7}{2},$$

这就证明了原结论.

5. 设 $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集. 求出所有的函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}^+$, 有

$$f(x)f\left(yf(x)\right)=f(x+y).$$

解 *方法一* 首先如果存在某个 $x\in\mathbb{R}^+$ 有 $f(x)>1$, 取 $y=\dfrac{x}{f(x)-1}$ 得到

$$f(x)f\left(\frac{xf(x)}{f(x)-1}\right)=f\left(x+\frac{x}{f(x)-1}\right)=f\left(\frac{xf(x)}{f(x)-1}\right),$$

这与 $f(x)>1$ 矛盾, 因此对任意 $x\in\mathbb{R}^+$ 均有 $f(x)\leqslant 1$, 结合原方程可知函数 f 是单调递减的.

如果 $f(x)=1$ 对某个 $x \in \mathbb{R}^+$ 成立, 则 $f(x+y)=f(y)$ 对任意 $y \in \mathbb{R}^+$ 都成立, 再由 f 的单调性可知 $f \equiv 1$.

现在假定 $f(x)<1$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^+$ 成立, 则 f 是严格单调递减的函数. 根据等式

$$\begin{aligned} f(x) f\big(y f(x)\big) &= f(x+y) = f\big(y f(x)+x+y\big(1-f(x)\big)\big) \\ &= f\big(y f(x)\big) f\Big(\big(x+y\big(1-f(x)\big)\big) f\big(y f(x)\big)\Big) \end{aligned}$$

可得 $x=\dfrac{x+y\big(1-f(x)\big)}{f\big(y f(x)\big)}$. 令 $x=q, z=x f(1)$ 以及 $a=\dfrac{1-f(1)}{f(1)}$, 我们得到 $f(z)=\dfrac{1}{1+a z}$.

综上所述可得 $f(x)=\dfrac{1}{1+a x}, x \in \mathbb{R}^+$, 其中 $a \geqslant 0$. 而且直接计算可以验证此形式的函数确实满足原方程.

方法二 在方法一中我们证明了 f 为单调递减的函数, 因此是几乎处处可导的. 把原方程写为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=f^2(x) \frac{f\big(y f(x)\big)-1}{y f(x)}.$$

如果 f 在点 $x \in \mathbb{R}^+$ 处可导, 则存在极限 $\lim\limits_{z \rightarrow 0^+} \dfrac{f(z)-1}{z}=-a$. 因此 $f'(x)=-a f^2(x)$ 对 $x \in \mathbb{R}^+$ 都成立, 即 $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=a$, 这就意味着 $f(x)=\dfrac{1}{a x+b}$, 待会最初的方程可得 $b=1$ 且 $a \geqslant 0$.

6. 对一个 $m \times m$ 实矩阵 A, e^A 定义为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} A^n$(这个级数对任意矩阵都是收敛的). 证明或否定: 对所有的实多项式 p 和 $m \times m$ 实矩阵 A 与 B, $p\big(\mathrm{e}^{AB}\big)$ 是幂零的当且仅当 $p\big(\mathrm{e}^{BA}\big)$ 是幂零的 (矩阵 A 是幂零的是指 $A^k=\boldsymbol{O}$ 对某个整数 k 成立).

解 首先我们证明, 对任意多项式 q 和 $m \times m$ 矩阵 A 与 B, $q(AB)$ 与 $q(BA)$ 的特征多项式相同. 不难得到对任意矩阵 X, $q\big(\mathrm{e}^X\big)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, 这里 c_n 是与 q 有关的系数.

$$C=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(BA)^{n-1} B=\sum_{n=1}^{\infty} c_n B(AB)^{n-1}.$$

因此 $q\big(\mathrm{e}^{AB}\big)=c_0 J+AC, q\big(\mathrm{e}^{BA}\big)=c_0 J+CA$. 而 AC 与 CA 的特征多项式是相同的, 把这个多项式记为 $f(x)$. 则矩阵 $q\big(\mathrm{e}^{AB}\big)$ 与 $q\big(\mathrm{e}^{BA}\big)$ 的特征多项式都是 $f(x-c_0)$.

现在假定矩阵 $p\big(\mathrm{e}^{AB}\big)$ 是幂零的, 即 $\Big(p\big(\mathrm{e}^{AB}\big)\Big)^2=\boldsymbol{O}$ 对某个整数 k 成立. 取 $q=p^k$, 则矩阵 $q\big(\mathrm{e}^{AB}\big)$ 的特征多项式为 x^m, 同理这也是矩阵 $q\big(\mathrm{e}^{BA}\big)$ 的特征多项式. 由 Cayley-Hamilton 定理,

$$\Big(q\big(\mathrm{e}^{BA}\big)\Big)^m=\Big(p\big(\mathrm{e}^{BA}\big)\Big)^{km}=\boldsymbol{O},$$

这就说明矩阵 $q\big(\mathrm{e}^{BA}\big)$ 也是幂零的.

8. 2001 年国际大学生数学竞赛 Prague, Czech Republic

§ 8.1 第一天

1. 设 n 是一个正整数, 考虑一个 $n \times n$ 矩阵, 矩阵元为 $1, 2, \cdots, n^2$ 从左上方按照行从左到右排列. 从不同行不同列中选取 n 个元素, 所选取的这些元素的和可能为多少?

解 由于有 n 行 n 列, 则所有的选择形式为

$$\left\{\left(i, \sigma\left(j\right)\right) : j = 1,2, \cdots, n\right\},$$

其中 $\sigma \in S_n$ 是一个置换. 因此相应的和为

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} n\left(j-1\right)+\sigma\left(j\right) &= \sum_{j=1}^{n} nj - \sum_{j=1}^{n} n + \sum_{j=1}^{n} \sigma\left(j\right) \\ &= n\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} n + \sum_{j=1}^{n} j \\ &= \left(n+1\right)\frac{n\left(n+1\right)}{2} - n^2 = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2},\end{aligned}$$

这说明最后的和与 σ 无关.

2. 设 r, s, t 是两两互素的正整数. 如果 a 和 b 是一个乘法单位元为 e 的交换群的元素, 且 $a^r = b^s = (ab)^t = e$, 证明: $a = b = e$.

此结论对任意的非交换群是否成立?

解 存在正数 u, v 使得 $us + vt = 1$. 由于 $ab = ba$, 我们有

$$\begin{aligned}ab &= (ab)^{us+vt} = (ab)^{us}\left((ab)^t\right)^v = (ab)^{us} e \\ &= (ab)^{us} = a^{us}\left(b^s\right)^u = a^{us} e = a^{us}.\end{aligned}$$

因此, $b^r = eb^r = a^r b^r = (ab)^r = a^{usr} = (a^r)^{us} = e$. 存在整数 x, y 使得 $xr + ys = 1$, 于是

$$b = b^{xr+ys} = \left(b^r\right)^x \left(b^s\right)^y = e.$$

那么同理也有 $a = e$.

对于一般的非交换群, 此结论不成立. 比如 $a=(123), b=(34567)$ 是 7 阶置换群 S_7 的两个置换, 则 $ab=(1234567)$ 且 $a^3=b^5=(ab)^7=e$.

3. 求极限

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}.$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}&=\lim_{t\to 1^-}\frac{1-t}{-\log t}(-\log t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}\\&=\lim_{t\to 1^-}(-\log t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n\log t}}=\lim_{h\to 0+}h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nh}}\\&=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\log 2.\end{aligned}$$

4. 设 k 是一个正整数, $p(x)$ 是一个系数均为 $-1,1,0$ 的 n 次多项式, 且可被 $(x-1)^k$ 整除. 设 q 是一个素数满足 $\dfrac{q}{\log q}<\dfrac{k}{\log(n+1)}$. 证明所有复的 q 次单位根都是多项式 $p(x)$ 的根.

证明　设 $p(x)=(x-1)^k\cdot r(x), \varepsilon_j=\mathrm{e}^{\frac{2j\pi}{q}\mathrm{i}}(j=1,2,\cdots,q-1)$. 那么显然有

$$x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)\cdots\left(x-\varepsilon_{q-1}\right)$$

是不可约的, 因此要么所有 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{q-1}$ 都是 $r(x)$ 的根, 要么都不是.

假定 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{q-1}$ 都不是 $r(x)$ 的根, 则 $\prod\limits_{j=1}^{q-1}r\left(\varepsilon_j\right)$ 是一个非零的整数, 且

$$\begin{aligned}(n+1)^{q-1}\geqslant\prod_{j=1}^{q-1}\left|p\left(\varepsilon_j\right)\right|&=\left|\prod_{j=1}^{q-1}\left(1-\varepsilon_j\right)^k\right|\left|\prod_{j=1}^{q-1}r\left(\varepsilon_j\right)\right|\\&=\left|\prod_{j=1}^{q-1}\left(1-\varepsilon_j\right)\right|^k=\left(1^{q-1}+1^{q-2}+\cdots+1^1+1\right)=q^k,\end{aligned}$$

这与条件 $\dfrac{q}{\log q}<\dfrac{k}{\log(n+1)}$ 矛盾, 因此所有复的 q 次单位根都是 $p(x)$ 的根.

5. 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵使得对任意 $\lambda\in\mathbb{C}, A\neq\lambda I$. 证明: A 相似于一个对角元上至多只有一个非零元的矩阵.

证明　对 n 用归纳法证明, $n=1$ 显然, $n=2$ 时, 记 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. 如果 $b\neq 0$ 或 $c\neq 0$, 则 A 分别相似于

$$\begin{pmatrix}1&0\\\frac{a}{b}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{a}{b}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\c-\frac{ad}{b}&a+d\end{pmatrix}$$

或者

$$\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{c}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{a}{c}\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b-\frac{ad}{c}\\c&a+d\end{pmatrix}.$$

如果 $b=c=0$ 且 $a\neq d$, 则 A 相似于

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&d-a\\0&d\end{pmatrix},$$

于是这就化归到 $b\neq 0$ 的情形.

现在假定 $n>3$ 且结论对 $n'<n$ 都成立, 令 $A=\begin{pmatrix}A'&*\\ *&\beta\end{pmatrix}_n$, 其中 A' 是 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵. 显然我们可以假定 $A'\neq\lambda' I$, 由归纳假设知存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}A'P=\begin{pmatrix}0&*\\ *&\alpha\end{pmatrix}_{n-1}$. 那么这个时候矩阵

$$B=\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A'&*\\ *&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{-1}A'P&*\\ *&\beta\end{pmatrix}$$

相似于 A, 且 A 的对角元是 $(0,0,\cdots,0,\alpha,\beta)$. 另一方面我们可以把 B 看成是 $\begin{pmatrix}0&*\\ *&\gamma\end{pmatrix}_n$, 其中 C 是 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵, 且其对角元为 $(0,0,\cdots,0,\alpha,\beta)$. 由归纳假设可知存在可逆矩阵 Q, 对矩阵 C 有 $Q^{-1}CQ=D$, 其中 $D=\begin{pmatrix}0&*\\ *&\gamma\end{pmatrix}$. 因此最后的矩阵

$$\begin{aligned}E&=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&*\\ *&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&*\\ *&D\end{pmatrix}\end{aligned}$$

相似于 A, 且其对角元为 $(0,0,\cdots,0,\gamma)$, 得证.

6. 设可导函数 $a,b,f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$f(x)\geqslant 0,\ f'(x)\geqslant 0,\ g(x)>0,\ g'(x)>0.$$

且

$$\lim_{x\to\infty}a(x)=A>0,\ \lim_{x\to\infty}b(x)=B>0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty,$$

以及

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}+a(x)\frac{f(x)}{g(x)}=b(x).$$

证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{B}{A+1}.$$

证明 设 $0<\varepsilon<A$ 是任意一个实数. 如果 x 充分大, 则 $f(x)>0,g(x)>0,|a(x)-A|<\varepsilon,|b(x)-B|<\varepsilon$, 且

$$\begin{aligned}B-\varepsilon<b(x)&=\frac{f'(x)}{g'(x)}+a(x)\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f'(x)}{g'(x)}+(A+\varepsilon)\frac{f(x)}{g(x)}\\&<\frac{(A+\varepsilon)(A+1)}{A}\cdot\frac{f'(x)(g(x))^A+Af(x)(g(x))^{A-1}g'(x)}{(A+1)(g(x))^Ag'(x)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(A+\varepsilon)(A+1)}{A} \cdot \frac{\left[f(x)(g(x))^{A}\right]'}{\left[(g(x))^{A+1}\right]'}.$$

因此

$$\frac{\left[f(x)(g(x))^{A}\right]'}{\left[(g(x))^{A+1}\right]'} > \frac{A(B-\varepsilon)}{(A+\varepsilon)(A+1)}.$$

同样也可得对充分大的 x 有

$$\frac{\left[f(x)(g(x))^{A}\right]'}{\left[(g(x))^{A+1}\right]'} < \frac{A(B+\varepsilon)}{(A-\varepsilon)(A+1)}.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 我们得到

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[f(x)(g(x))^{A}\right]'}{\left[(g(x))^{A+1}\right]'} = \frac{B}{A+1}.$$

再由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)(g(x))^{A}}{(g(x))^{A+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left[f(x)(g(x))^{A}\right]'}{\left[(g(x))^{A+1}\right]'} = \frac{B}{A+1}.$$

§ 8.2 第二天

1. 设 $r, s \geqslant 1$ 是两个整数, $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{s-1}$ 是非负实数且满足

$$\begin{aligned}&\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + x^r\right)\left(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{s-1}x^{s-1} + x^s\right)\\ =&1 + x + x^2 + \cdots + x^{r+s-1} + x^{r+s}.\end{aligned}$$

证明: 每个 a_i 和 b_j 都是 0 或 1.

证明 把上述等式左边乘开, 由多项式对应项系数相等可得

$$a_0 b_0 = 1,\ \ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1,\ \ \cdots.$$

从这些等式中可得

$$a_0 + a_1 b_{s-1} + a_2 b_{s-2} + \cdots = 1$$

以及

$$b_0 + b_1 a_{r-1} + b_2 a_{r-2} + \cdots = 1.$$

由此可知 $a_0, b_0 \leqslant 1$. 考虑到 $a_0 b_0 = 1$ 即得 $a_0 = b_0 = 1$.

再来考虑下面的方程, 必然所有的 a_i 都不超过 1, 同样所有的 b_j 不超过 1. 由 $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1$ 可知 a_1, b_1 中一个是 0 另一个是 1. 由归纳法即可证得结论.

2. 设 $a_0=\sqrt{2},b_0=2,a_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}},b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{2+\sqrt{4+b_n^2}}$.

(a) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都单调递减趋于 0.

(b) 证明: 数列 $\{2^n a_n\}$ 单调递增, 数列 $\{2^n b_n\}$ 单调递减, 且这两个数列收敛到同一个极限.

(c) 证明: 存在常数 C 使得对所有 n 都成立不等式

$$0<b_n-a_n<\frac{C}{8^n}.$$

证明

(a) 显然 $a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}<\sqrt{2}$. 由于函数 $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增, 则 $a_1>a_2$ 意味着 $a_2>a_3$, 归纳即知 $\{a_n\}$ 单调递减. 同样的方法也可以证明 $\{b_n\}$ 单调递减, 这只需要注意到

$$g(x)=\frac{2x}{2+\sqrt{4+x^2}}=\frac{2}{\frac{2}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}.$$

(b) 只需要证明 $2f(x)>x$ 对任意 $x\in(0,2)$ 成立即说明 $\{2^n a_n\}$ 是严格单调增的. 而不等式 $2g(x)<x$ 对任意 $x\in(0,2)$ 成立则说明 $\{2^n b_n\}$ 是严格单调递减的, 这都是显然的. 简单归纳可知 $a_n^2=\dfrac{4b_n^2}{4+b_n^2}$ 对任意正整数 n 都成立. 由于单调递减的正数列 $\{2^n b_n\}$ 存在有限的极限, 所以

$$\lim_{n\to\infty}4^n a_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^n b_n^2}{4+b_n^2}=\lim_{n\to\infty}4^n b_n^2.$$

这里我们得到 $\{2^n a_n\}$ 和 $\{2^n b_n\}$ 的极限相等, 由于 $\{2^n a_n\}$ 是单调递增的, 此极限 A 为正.

(c) 由不等式

$$2^n b_n-2^n a_n=\frac{4^n b_n^2-\frac{4^{n+1}b_n^2}{4+b_n^2}}{2^n b_n+2^n a_n}=\frac{(2^n b_n)^4}{4+b_n^2}\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{2^n\left(b_n+a_n\right)}$$

以及极限 $A>0$ 可知存在常数 C 使得对任意正整数 n 有

$$0<b_n-a_n<\frac{C}{8^n}.$$

注 最后一问可以采用更简单的方法证明, 只需要归纳证明

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}},\quad b_n=2\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

即可, 而且可以求出数列 $\{2^n a_n\}$ 与 $\{2^n b_n\}$ 的公共极限.

3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中求出单位球面上满足任意两点距离都严格大于 $\sqrt{2}$ 的点的最大个数.

注 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面定义为

$$S_{n-1}=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\,\sum_{k=1}^n x_k^2=1\right\}.$$

而点 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 与点 $Y=(y-1,\cdots,y_n)$ 的距离定义为

$$d\left(X,Y\right)=\left(\sum_{k=1}^n\left(x_k-y_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

解 记在 $\mathbb{R}^n$ 中所取的满足条件的最大点集为 M_n. 首先有

$$\begin{aligned} d(X,Y) > \sqrt{2} &\Leftrightarrow d^2(X,Y) > 2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k > 2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k y_k < 0 \end{aligned}$$

考虑到球面的对称性, 我们不妨假定 $A_1 = (-1, 0, \cdots, 0)$.

对 $X = A_1, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k < 0$ 意味着 $y_1 > 0, \forall Y \in M_n$.

令 $X = (x_1, \overline{X}), Y = (y_1, \overline{Y}) \in S_{n-1} \backslash \{A_1\}, \overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{R}^{n-1}$. 于是我们有

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k < 0 \Rightarrow x_1 y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{x}_k \bar{y}_k < 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x_k' y_k' < 0,$$

其中

$$x_k' = \frac{\bar{x}_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \bar{x}_k^2}}, \quad y_k' = \frac{\bar{y}_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \bar{y}_k^2}}.$$

因此

$$(x_1', \cdots, x_{n-1}'), (y_1', \cdots, y_{n-1}') \in S_{n-2}.$$

如果用 a_n 表示在 $\mathbb{R}^n$ 中取到的满足条件的最大点数, 则 $a_n \leqslant 1 + a_{n-1}$ 且 $a_1 = 2$ 就意味着 $a_n \leqslant n + 1$.

下面我们证明 $a_n = n + 1$, 这只需要给出一个满足条件的具有 $n + 1$ 个点的集合 M_n 即可.

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0) \\ A_2 &= \left(\frac{1}{n}, -c_1, 0,0, \cdots, 0,0\right) \\ A_3 &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}c_1, \frac{1}{n-1}, c_2, -c_3, \cdots, 0,0\right) \\ A_{n-1} &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}c_1, \frac{1}{n-2}c_2, \frac{1}{n-3}c_3, \cdots, c_{n-2}, 0\right) \\ A_n &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}c_1, \frac{1}{n-2}c_2, \frac{1}{n-3}c_3, \cdots, \frac{1}{2}c_{n-2}, -c_{n-1}\right) \\ A_{n+1} &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}c_1, \frac{1}{n-2}c_2, \frac{1}{n-3}c_3, \cdots, \frac{1}{2}c_{n-2}, c_{n-1}\right) \end{aligned}$$

其中

$$c_k = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n-k+1}\right)}, \quad k = 1,2, \cdots, n-1.$$

此时有 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = -\frac{1}{n} < 0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \forall X, Y \in (A_1, \cdots, A_{n+1})$. 这些点都在 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面上, 且任意两点间的距离为

$$d = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} > \sqrt{2}$$

注 $n = 2$ 时的三个点构成了单位圆内的正三角形, $n = 3$ 时四个点构成了一个正四面体, 而在 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个点则构成了 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维正则单形.

4. 设 $A = (a_{k,l})_{k,l=1,\cdots,n}$ 是一个 $n \times n$ 复矩阵, 使得对每个 $m \in \{1, \cdots, n\}$ 和 $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_m \leqslant n$, 矩阵 $(a_{j_k,j_l})_{k,l=1,\cdots,m}$ 的行列式为零. 证明: $A^n = \boldsymbol{O}$, 且存在一个置换 $\sigma \in S_n$, 使得矩阵

$$\left(a_{\sigma(k)}, a_{\sigma(l)}\right)_{k,l=1,\cdots,n}$$

的所有非零元都在对角线的上方.

证明 我们只需要证明第二部分即可, 因为第二部分蕴含了第一部分. 考虑一个有 n 个顶点 $V_1, \cdots, V_n$ 的有向图 G, 当 $a_{k,l} \neq 0$ 时, V_k 到 V_l 之间有一条有向边, 我们要证明它是无环图.

假定图 G 存在环, 取其中长度为最小值 m 的环, 设 $j_1 < \cdots < j_m$ 是此环按顺序的一个遍历. 设 $\sigma_0 \in S_n$ 是一个置换使得对 $k = 1, \cdots, m$ 均有 $a_{j_k, j_{\sigma_0(k)} \neq 0}$. 注意到对任意 $\sigma \in S_n$, 我们有 $a_{j_k, j_{\sigma(k)}=0}$ 对某个 $k \in \{1, \cdots, m\}$ 成立, 否则我们就得到了一个长度更小的圈. 因此最后有

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(a_{j_k,j_l}\right)_{k,l=1,\cdots,m} \\ &= (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma_0)} \prod_{k=1}^{m} a_{j_k, j_{\sigma_0(k)}} + \sum_{\sigma \neq \sigma_0} (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} \prod_{k=1}^{m} a_{j_k, j_{\sigma(k)}} \neq 0, \end{aligned}$$

矛盾.

由于 G 是无环图, 因此存在一个置换 $\sigma \in S_n$ 使得矩阵

$$\left(a_{\sigma(k)}, a_{\sigma(l)}\right)_{k,l=1,\cdots,n}$$

的所有非零元都在对角线的上方.

5. 设 $\mathbb{R}$ 表示实数集. 证明: 不存在函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(0) > 0$, 且

$$f(x+y) \geqslant f(x) + yf\left(f(x)\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明 假定存在一个函数满足上述不等式. 如果 $f(f(x)) \leqslant 0$ 对任意 x 都成立, 则由不等式

$$f(x+y) \geqslant f(x) + yf\left(f(x)\right) \geqslant f(x), \quad \forall y \leqslant 0$$

可知 f 是严格单调递减的. 由于 $f(0) > 0 \geqslant f\left(f(x)\right)$, 这意味着 $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 矛盾. 因此存在 z 使得 $f\left(f(z)\right) > 0$, 则不等式

$$f(z+x) \geqslant f(z) + xf\left(f(z)\right)$$

说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 进一步有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=+\infty$. 特别地, 存在 $x,y>0$ 使得 $f(x)\geqslant 0$, $f\big(f(x)\big)>1$, $y\geqslant \dfrac{x+1}{f\big(f(x)\big)-1}$ 且 $f\big(f(x+y+1)\big)\geqslant 0$, 则

$$f(x+y)\geqslant f(x)+yf\big(f(x)\big)\geqslant x+y+1.$$

因此

$$\begin{aligned}f\big(f(x+y)\big)&\geqslant f(x+y+1)+\big(f(x+y)-(x+y+1)\big)f\big(f(x+y+1)\big)\\&\geqslant f(x+y+1)\geqslant f(x+y)+f\big(f(x+y)\big)\\&\geqslant f(x)+yf\big(f(x)\big)+f\big(f(x+y)\big)>f\big(f(x+y)\big).\end{aligned}$$

这个矛盾就说明满足条件的函数 f 是不存在的.

6. 对每个正整数 n, 令 $f_n(\theta)=\sin\theta\cdot\sin(2\theta)\cdot\sin(4\theta)\cdots\sin\left(2^n\theta\right)$. 对任意实数 θ 与所有的 n, 证明

$$|f_n(\theta)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left|f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|.$$

证明　我们将证明 $g(\theta)=|\sin\theta|\,|\sin(2\theta)|^{1/2}$ 在点 $2^k\pi/3$ 处取到它的最大值 $\left(\sqrt{3}/2\right)^{3/2}$, 这里的 k 是一个正整数. 可以通过求导或者直接均值不等式

$$\begin{aligned}|\sin\theta|\,|\sin(2\theta)|^{1/2}&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\left(\sqrt[4]{|\sin\theta|\,|\sin\theta|\,|\sin\theta|\left|\sqrt{3}\cos\theta\right|}\right)^2\\&\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\frac{3\sin^2\theta+3\cos^2\theta}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(\theta)}{f_n(\pi/3)}\right|&=\left|\frac{g(\theta)\,[g(2\theta)]^{1/2}\,[g(4\theta)]^{3/4}\cdot\left[g\left(2^{n-1}\theta\right)\right]^E}{g(\pi/3)\,[g(2\pi/3)]^{1/2}\,[g(4\pi/3)]^{3/4}\cdots\left[g\left(2^{n-1}\pi/3\right)\right]^E}\right|\left|\frac{\sin(2^n\theta)}{\sin(2^n\pi/3)}\right|^{1-\frac{E}{2}}\\&\leqslant\left|\frac{\sin(2^n\theta)}{\sin(2^n\pi/3)}\right|^{1-\frac{E}{2}}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{3}/2}\right)^{1-\frac{E}{2}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

其中 $E=\dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$. 证毕.

9. 2002 年国际大学生数学竞赛 Warsaw, Poland

§ 9.1 第一天

1. 一个标准的抛物线值得是一个首一二次多项式 $y = x^2 + ax + b$ 的图像. 三个标准抛物线的顶点分别为 V_1, V_2, V_3, 且两两分别交于点 A_1, A_2, A_3. 设 $A \mapsto s(A)$ 表示关于 x 轴的反射. 证明: 以 $s(A_1), s(A_2), s(A_3)$ 为顶点的标准抛物线两两分别交于点 $s(V_1), s(V_2), s(V_3)$.

证明 首先我们证明: 以 V 为顶点的标准抛物线过点 A 当且仅当以 $s(A)$ 为顶点的抛物线过点 $s(V)$.

设 $A = (a, b), V = (v, w)$. 以 $V = (v, w)$ 为顶点的标准抛物线为 $y = (x-v)^2 + w$, 所以它过点 A 当且仅当 $b = (a-v)^2 + w$. 同理, 以 $(A) = (a, -b)$ 为顶点的标准抛物线为 $y = (a-a)^2 - b$, 它过点 $s(V) = (v, -w)$ 当且仅当 $-w = (v-a)^2 - b$. 这两者是等价的.

现在假定以 V_i 和 V_j 为顶点的标准抛物线交于点 A_k,, i, j, k 互不相等. 则由上述论断可知, 以 $s(A_i), s(A_j)$ 为顶点的标准抛物线交于点 V_k, 证毕.

2. 是否存在一个连续可微函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) > 0$ 且 $f'(x) = f\big(f(x)\big)$?

解 假定存在满足条件的函数 f. 由于 $f'(x) = f\big(f(x)\big) > 0$, f 是严格单调递增的.

由单调性可知 $f(x) > 0$ 意味着 $f(f(x)) > f(0)$ 对任意 x 都成立, 因此 $f(0)$ 是 $f'(x)$ 的一个下界. 对任意 $x < 0$ 则有 $f(x) < f(0) + xf(0) = (1+x)f(0)$. 则当 $x \leqslant -1$ 时, $f(x) \leqslant 0$, 矛盾, 即满足条件的函数 f 不存在.

3. 设 n 是一个正整数, 令

$$a_k = \frac{1}{\binom{n}{k}}, \quad b_k = 2^{k-n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

证明:

$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \cdots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0. \tag{9.1}$$

证明 由于 $k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, (9.1) 式等价于

$$\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}} + \frac{1}{\binom{n-1}{1}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right] = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n}. \tag{9.2}$$

我们归纳证明 (9.2) 式. 对 $n=1$, 两边都等于 2.

假定 (9.2) 式已经对某个 n 成立, 令

$$x_n=\frac{2^n}{n}\left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}}+\frac{1}{\binom{n-1}{1}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}\right],$$

则

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\frac{2^{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}}+\frac{1}{\binom{n}{k+1}}\right)+1\right)\\&=\frac{2^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{n-k}{n}+\frac{k+1}{n}}{\binom{n-1}{k}}+\frac{2^{n+1}}{n+1}=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\\&=x_n+\frac{2^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

这就完成了归纳证明.

4. 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是一个连续函数, $p\in[a,b]$. 定义 $p_0=p, p_{n+1}=f(p_n), n=0,1,2,\cdots$. 假定集合 $T_p=\{p_n:n=0,1,2,\cdots\}$ 是闭的, 即如果 $x\notin T_p$, 则存在 $\delta>0$ 使得当 $|x'-x|\geqslant\delta$ 时, 都有 $x'\notin T_p$. 证明: T_p 只有有限个元素.

证明 如果对某个 $n>m$ 有 $p_m=p_n$ 成立, 则 T_p 显然是有限的. 因此我们假定所有的 $p_0,p_1,\cdots$ 都不相同. 存在一个收敛的子列 $\{p_{n_k}\}$, 且它的极限 $q\in T_p$. 由于 f 是连续的, 则 $p_{n_k+1}=f(p_{n_k})\to f(q)$, 因此除去有限个点, 其他的点 p_n 都是 T_p 的聚点, 因此我们不妨假定所有的点都是 T_p 的聚点. 令 $d=\sup\{|p_m-p_n|: m,n\geqslant 0\}$. 设 δ_n 都是正实数且满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}<\frac{d}{2}$, I_n 表示一个以 p_n 为中点且长度小于 δ_n 的区间, 且使得存在无穷多个 k 使得 $p_k\notin\bigcup\limits_{j=0}^{n}I_j$, 这可以用归纳法做到. 设 $n_0=0$, 用 n_{m+1} 表示最小的整数 $k>n_m$ 使得 $p_k\notin\bigcup\limits_{j=0}^{n_m}I_j$. 由于 T_p 是闭集, 则子列 $\{p_{n_m}\}$ 的的极限必然在 T_p 中, 但由 I_n 的定义可知这是不可能的. 当然了, 如果 $\{p_{n_m}\}$ 不收敛, 我们可以取它的收敛子列即可, 证毕.

注 如果 $T_p=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 且每个 p_n 都是 T_p 的聚点, 则 T_p 是一些单个孤立点的并集. 如果 T_p 是闭的, 这将和 Baire 纲定理矛盾.

5. 证明或否定一下论断:

(a) 存在一个单调函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 使得对每个 $y\in[0,1]$, 方程 $f(x)=y$ 都有不可数个解 x.

(b) 存在一个连续可微函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 使得对每个 $y\in[0,1]$, 方程 $f(x)=y$ 都有不可数个解 x.

解

(a) 不存在. 对每个 $y\in[0,1]$, 集合 $\{x:y=f(x)\}$ 要么为空, 要么包含一个点, 要么是一个区间. 这些集合是两两不交的, 那么第三种情形最多只有可数个.

(b) 不存在. 假定 f 是满足条件的一个映射. 则对每个 y, 必存在一个 x_0 使得 $y = f(x_0)$ 且 $f'(x_0) = 0$, 因为一个不可数的集合 $\{x : y = f(x)\}$ 包含一个聚点 x_0 且 $f'(x_0) = 0$. 那么存在开集 I_{x_0} 使得当 $x \in I_{x_0}$ 时就有 $|f'(x)| < \varepsilon$. 所有这些区间 I_{x_0} 的并可以写成两两不交开集 J_n 的并. 由 Lagrange 中值定理可知每个 J_n 的像是一个长度小于 $\varepsilon|J_n|$ 的区间 (或者是一个点), 因此区间 $[0, 1]$ 可以被中长度不超过 ε 的区间的并所覆盖, 这对 $\varepsilon < 1$ 是不成立的.

6. 对一个 $n \times n$ 实矩阵 M, 令

$$\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2},$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧氏范数. 假定一个 $n \times n$ 实矩阵 A 满足

$$\|A^k - A^{k-1}\| \leqslant \frac{1}{2002k}$$

对任意正整数 k 都成立. 证明对任意正整数 k 有 $\|A^k\| \leqslant 2002$.

证明 我们通过证明两条引理来证明原命题.

引理 9.1. 设 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个非负数列, 满足对任意 $k \geqslant 0$ 有, 且 $\limsup\limits_{n\to\infty} na_n < \frac{1}{4}$. 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

证明. 对 $l \geqslant 0$, 记 $c_l = \sup\limits_{n\geqslant 2}(n+1)a_n$. 我们将证明 $c_{l+1} \leqslant 4c_l^2$. 自然, 对任意整数 $n \geqslant 2^{l+1}$, 存在整数 $k \geqslant 2^l$ 使得 $n = 2k$ 或 $n = 2k + 1$. 在第一种情形下有

$$a_{2k} - a_{2k+1} \leqslant a_k^2 \leqslant \frac{c_l^2}{(k+1)^2} \leqslant \frac{4c_l^2}{2k+1} - \frac{4c_l^2}{2k+2}.$$

而在第二种情形下有

$$a_{2k+1} - a_{2k+2} \leqslant a_k a_{k+1} \leqslant \frac{c_l^2}{(k+1)(k+2)} \leqslant \frac{4c_l^2}{2k+2} - \frac{4c_l^2}{2k+3}.$$

因此数列 $\left\{a_n - \frac{4c_l^2}{n+1}\right\}_{n\geqslant 2}$ 是非递减的, 且由于它收敛到 0, 故通项非正. $a_n \leqslant \frac{4c_l^2}{n+1}$ 对 $n \geqslant 2^{l+1}$ 都成立, 意味着 $c_{l+1}^2 \leqslant 4c_l^2$. 这也就意味着数列 $\left\{(4c_l)^{2^{-l}}\right\}_{l\geqslant 0}$ 是非递减的, 且除去有限项之外, 此数列的每一项都小于 1, 因此它可以被某个 $q \in (0, 1)$ 所控制, 则 $c_l \leqslant q^{2^l}$ 对充分大的 l 成立. 对任意介于 2^l 与 2^{l+1} 之间的 n, 有

$$a_n \leqslant \frac{c_l}{n+1} \leqslant q^{2^l} \leqslant \left(\sqrt{q}\right)^n,$$

这就导致 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt{q} < 1$, 这就完成了证明. ☆

引理 9.2. 设 T 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的线性映射. 假定 $\limsup\limits_{n\to\infty} n\|T^{n+1} - T^n\| < \frac{1}{4}$, 则

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^{n+1} - T^n\|^{1/n} < 1.$$

特别地, T^n 依算子范数收敛, T 是幂有界的.

证明. 取 $a_n = \|T^{n+1} - T^n\|$, 注意到

$$T^{k+m-1} - T^{k+m} = \left(T^{k+m+2} - T^{k+m+1}\right) - \left(T^{k+1} - T^k\right)\left(T^{m+1} - T^m\right)$$

意味着 $a_{k+m} \leqslant a_{k+m+1} + a_k a_m$. 因此数列 $\{a_m\}_{m\geqslant 0}$ 满足引理 9.1 的条件, 因此引理 9.2 成立, 原命题结论就自然成立了. ☆

注

(1) 只要一个算子 T 把一个范数空间 X 映射到自己, 不管 X 是不是有限维的, 上述定理都成立.

(2) 引理 9.1 中的常数 $\frac{1}{4}$ 是最优的, 因为数列 $a_n = \frac{1}{4n}$ 满足不等式 $a_{k+m} - a_{k+m+1} \leqslant a_k a_m$ 对任意正整数 k 和 m 都成立, 但它不具有指数衰减.

(3) 引理 9.2 中的常数 $\frac{1}{4}$ 不能被任何大于 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 的常数代替. 考虑 $L^2([0,1])$ 中的算子 $(Tf)(x) = xf(x)$, 看可以加直接验证 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T^{n+1} - T^n\| = \frac{1}{\mathrm{e}}$, 而 T^n 并不依算子范数收敛. 是否在一般情形下都有 $\limsup\limits_{n\to\infty} n\|T^{n+1} - T^n\| < \infty$ 意味着 T 是幂有界的, 仍然是一个开放的问题.

§ 9.2 第二天

1. 计算 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_i j)$ 的行列式, 其中

$$a_i j = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j \\ 2, & i = f \end{cases}.$$

解 从第二行开始, 依次把每一行加到上一行, 然后从第二列开始每一列减去前一列

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 1 & -1 & 2 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2}2 & \cdots & -(n-1) & n+1 \end{vmatrix} = n+1.$$

2. 200 个学生参加一次数学竞赛, 他们要解决 6 个问题, 已知每个问题都至少被 120 个学生解出. 证明: 一定存在两个学生使得每个问题至少被这两个学生其中的一个学生解出.

证明 对每一对学生, 考虑那些不被他们解出的问题, 总共有 $\binom{200}{2} = 19900$ 个集合, 我们要证明其中至少有一个集合为空集.

对每一个问题, 至多只有 80 个学生没有解出, 从这些学生中可以选出 $\binom{80}{2} = 3160$ 对, 因此这个问题最多只属于上述集合中的 3160 个, 这 6 个问题加起来最多也只属于 $6 \cdots 3160 = 18960$ 个集合, 因此至少有 $18900 - 18960 = 940$ 个集合是空集.

3. 对每个 $n \geqslant 1$, 令

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^n}{k!}.$$

证明: $a_n \cdot b_n$ 是一个整数.

证明 我们对 $n \in \mathbb{N}$ 用数学归纳法证明 $a_n \mathrm{e}^{-1}$ 与 $b_n \mathrm{e}$ 都是整数. 首先 $n = 0$ 时, 结论显然成立. 假定对某个 $n \geqslant 0$, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 分别是 e 和 e^{-1} 的倍数. 那么由二项式定理可得

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^n}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{k^m}{k!} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^n}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k+1)^n}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{k^m}{k!} \\ &= -\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^m}{k!} = -\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} b_m. \end{aligned}$$

这就用归纳法证明了 a_n 和 b_n 分别是 e 和 e^{-1} 的倍数, 这就证明了 $a_n \cdot b_n$ 是一个整数.

4. 在四边形 $OABC$ 中, 设 $\angle BOC = \alpha, \angle COA = \beta$ 以及 $\angle AOB = \gamma$. 令 σ 表示面 OAB 与 OAC 之间的夹角, τ 表示面 OBA 与 OBC 之间的夹角. 证明:

$$\gamma > \beta \cos\sigma + \alpha \cos\tau.$$

证明 假定 $OA = OB = OC = 1$, 与圆心在 O, 1 为半径的圆上的扇形 AOB, BOC 和 COA 的面积分别为 $\frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta$.

现在把扇形 AOC, COB 投影到平面 OAB 上, C' 表示顶点 C 的投影, A' 和 B' 分别表示点 A 和 B 关于圆心 O 的对称点, 自然有 $OC' < 1$.

$\widehat{AC}$ 与 $\widehat{BC}$ 的投影是长轴分别为 AA' 和 BB' 的椭圆的弧 (如果 σ 或者 τ 为直角, 则此椭圆会退化). 这两个椭圆交于 4 个点, 两个连接 A, A' 的半椭圆分别与连接 B, B' 的两个半椭圆相交. 除此之外不可能有更多交点, 因为两个圆锥曲线不可能有超过 4 个交点.

扇形 AOC, COB 的投影的有向面积分别为 $\frac{1}{2}\alpha\cos\tau, \frac{1}{2}\beta\cos\sigma$, 要证明的结论是这些投影的有向面积不超过扇形 BOA 的面积.

如果 $\cos\sigma > 0, \cos\tau > 0$, 则扇形 OAC 和 OBC 的投影区域是扇形 OBC 的两个不相交的子区域, 且它们没有覆盖整个扇形 OBC, 这就说明结论正确; 如果 $\cos\sigma$ 与 $\cos\tau$ 至少有一个是负的, 而其中符号为正的部分是扇形 OBC 的子区域, 此时就显然成立了.

5. 设 A 是一个 $n \times n$ 复矩阵, 且假定 $n > 1$. 证明

$$A\overline{A} = I_n \Leftrightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \text{ s.t. } A = S\overline{S}^{-1}.$$

注 如果 $A = (a_{ij})$, 则 $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$, 其中 $\overline{a}_{ij}$ 是 a_{ij} 的转置共轭; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 表示所有 $n \times n$ 可逆复矩阵组成的集合, I_n 表示 n 阶单位矩阵.

证明 充分性时候显然的, 因为如果 $A = S\overline{S}^{-1}$, 则 $A\overline{A} = S\overline{S}^{-1} \cdot \overline{S}S^{-1} = I_n$.

必要性: 我们需要证明存在可逆矩阵 S 使得 $A\overline{S} = S$.

设 w 表示任意非零复数. 取 $S = wA + \overline{w}I_n$, 则 $A\overline{S} = A(\overline{w}\overline{A} + wI_n) = \overline{w}I_n + wA = S$. 如果 S 是奇异的, 则 $\frac{1}{w}S = A - \frac{\overline{w}}{w}I_n$, 也是奇异的, 因此 $\frac{\overline{w}}{w}$ 是 A 的一个特征值. 由于 A 只有有限个特征值, 而 $\frac{\overline{w}}{w}$ 可以是单位圆上的任意复数, 因此存在 w 使得 S 是可逆的.

6. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个凸函数, 且梯度 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中任一点都存在, 且满足条件

$$\exists L > 0, \text{ s.t. } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \ \|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|.$$

证明

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \ \|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\|^2 \leqslant L\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_2), x_1 - x_2\rangle. \tag{9.3}$$

这里 $\langle a, b\rangle$ 表示向量 a, b 的内积.

证明 令 $g(x) = f(x) - f(x_1) - \langle \nabla f(x_1), x - x_1\rangle$, 则显然 g 和 f 具有相同的性质. 进一步, $g(x_1) = \nabla g(x_1) = 0$, 且由凸性可知 g 在 x_1 处取极小值 0. 下面我们将证明

$$g(x_2) \geqslant \frac{1}{2L}\|\nabla g(x_2)\|^2. \tag{9.4}$$

令 $y_0 - x_2 - \frac{1}{L}\|\nabla g(x_2)\|, y(t) = y_0 + t(x_2 - y_0)$, 则

$$g(x_2) = g(y_0) + \int_0^1 \langle \nabla g(y(t)), x_2 - y_0\rangle \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= g\left(y_0\right) + \left\langle \nabla g\left(x_2\right), x_2 - y_0 \right\rangle - \int_0^1 \left\langle \nabla g\left(x_2\right) - \nabla g\left(y\left(t\right)\right), x_2 - y_0 \right\rangle \mathrm{d}t \\
&\geqslant 0 + \frac{1}{L}\left\|\nabla g\left(x_2\right)\right\|^2 - \int_0^1 \left\|\nabla g\left(x_2\right) - \nabla g\left(y\left(t\right)\right)\right\| \left\|x_2 - y_0\right\| \mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{1}{L}\left\|\nabla g\left(x_2\right)\right\|^2 - \left\|x_2 - y_0\right\| \int_0^1 L\left\|x_2 - g\left(y\right)\right\| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{L}\left\|\nabla g\left(x_2\right)\right\|^2 - L\left\|x_2 - y_0\right\|^2 \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2L}\left\|\nabla g\left(x_2\right)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

将 (9.4) 中的 g 用 f 代入得

$$
f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) - \left\langle \nabla f\left(x_1\right), x_2 - x_1 \right\rangle \geqslant \frac{1}{2L}\left\|\nabla f\left(x_2\right) - \nabla f\left(x_1\right)\right\|^2.
$$

即

$$
\left\|\nabla f\left(x_2\right) - \nabla f\left(x_1\right)\right\|^2 \leqslant 2L\left\langle \nabla f\left(x_1\right), x_2 - x_1 \right\rangle + 2L\left(f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)\right). \tag{9.5}
$$

交换 x_1 和 x_2 又有

$$
\left\|\nabla f\left(x_2\right) - \nabla f\left(x_1\right)\right\|^2 \leqslant 2L\left\langle \nabla f\left(x_1\right), x_1 - x_2 \right\rangle + 2L\left(f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right). \tag{9.6}
$$

(9.5) 与 (9.6) 合起来即证明了 (9.3) .

10. 2003 年国际大学生数学竞赛 Cluj, Napoca

§ 10.1 第一天

1. (a) 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个实数列满足 $a_1 = 1, a_{n+1} > \dfrac{3}{2}a_n, \forall n$. 证明数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}\right\}$ 有有限的极限或者趋于正无穷.

(b) 证明: 对任意 $\alpha > 1$, 存在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 满足上述同样的性质, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha.$$

证明

(a) 令 $b_n = \dfrac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$, 则 $a_{n+1} > \dfrac{3}{2}a_n$ 等价于 $b_{n+1} > b_n$, 因此 $\{b_n\}$ 是严格单调递增的, 故它有界时有有限的极限, 无界时趋于正无穷.

(b) 对 $\alpha > 1$, 存在数列 $1 = b_1 < b_2 < \cdots$ 收敛于 α, 再取 $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} b_n$ 即可.

2. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{51}$ 是一个域中的非零元, 把每个元素用剩下的 50 个元素的和代替, 这样我们得到一个新的数列 $b_1, \cdots, b_{51}$. 如果新的数列是原来数列的一个置换, 则此域的特征值可能是多少?

注 一个域 $\mathbb{F}$ 的特征值是 p 指的是使得 $\overbrace{x + x + \cdots + x}^{p} = 0$ 对任意元素 $x \in \mathbb{F}$ 都成立的最小正整数 p, 如果不存在这样的 p, 则其特征为 0. 如果域的特征大于 $p > 0$, 则 p 一定是素数.

解 令 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{51} = 50S$. 由于 $b_1, b_2, \cdots, b_{51}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_{51}$ 的一个置换, 因此 $50S = S$, 即 $49S = 0$. 如果域的特征不是 7, 则 $S = 0$. 于是 $b_i = -a_i$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots, 51$ 都成立. 另一方面, $b_i = a_{\varphi(i)}, \varphi \in S_{51}$. 因此, 如果特征不是 2, 则序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{51}$ 按照加法逆分组 $\{a_i, a_{\varphi(i)}\}$, 但由于 51 是奇数, 这是不可能的. 所以此域的特征只能是 7 或 2.

比如取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{51} = 1$, 域的特征可以是 7. 取 $b_i = -a_i = a_i$, 则域的特征就是 2.

3. 设 A 是一个 $n \times n$ 实矩阵使得 $3A^3 = A^2 + A + I$(I 是单位矩阵). 证明: 序列 A^k 收敛到一个幂等阵.

注 一个矩阵 B 称作是幂等的是指 $B^2 = B$.

证明 由条件知 A 的极小多项式是 $3x^3 - x^2 - x - 1$ 的因式. 由于此多项式有三个不同的根, A 一定可以对角化. 设 $A = C^{-1}DC$, 其中 D 是一个对角阵. 矩阵 A 和 D 的特征值都是多项式 $3x^2 - x^2 - x - 1$ 的根, 其中一个根是 1, 剩下两个根的绝对值小于 1. 因此 D^k 的对角元是对应特征值的 k 次幂, 要么趋于 0 要么趋于 1, 于是极限 $M = \lim\limits_{k\to\infty} D^k$ 就是幂等阵, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \lim\limits_{k\to\infty} C^{-1}D^kC = C^{-1}MC$ 也是幂等的.

4. 求出所有的正整数对 (a,b) 使得正整数集可以分成两个集合 A 和 B, 且 $a\cdot A = b\cdot B$.

解 由于 $A\cap B = \varnothing$, 故 $a \neq b$.

设 $\{a,b\}$ 是满足条件一个解, $a\cdot A = b\cdot B$. 记 $d = (a,b)$ 表示 a,b 的最大公因数, 则 $a = da_1, b = db_1, (a_1,b_1) = 1$, 且仍有 $a_1\cdot A = b_1\cdot B$. 这就说明 $\{a_1,b_1\}$ 也是满足条件的一组解, 因此我们只需要求出满足 $(a,b) = 1$ 的解 (a,b) 即可.

如果 $1\in A$ 则 $a\in a\cdot A = b\in b\cdot B$, 因此 a 一定被 b 整除. 同样的, 如果 $1\in B$, 则 b 被 a 整除. 那么在所以的解中, a 和 b 中一定有一个被另一个整除.

现在我们证明: 如果 $n\geqslant 2$, 则 $(1,n)$ 是一个解. 对每个正整数 k, 设 $f(k)$ 表示最大的非负整数使得 $n^{f(k)}|k$. 取

$$A = \left\{k : f(k)\text{ 为奇数}\right\},\quad B = \left\{k : f(k)\text{ 为偶数}\right\}.$$

那么这就是正整数的一个分割且满足 $A = n\cdot B$.

5. 设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个连续性函数, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一列函数列, 且 $f_0(x) = g(x)$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1],\quad n = 0,1,2,\cdots$$

对每个 $x\in[0,1]$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

解 我们将用两种方法证明对任意 $x\in[0,1]$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)g(0)$, 其中第二种方法会麻烦一点, 但它告诉我们如何直接由 g 来计算 f_n. *方法一* 首先我们对非递减的 g 来证明我们的论断. 在这种情形下, 由归纳法, 我们可以直接得到

(1) 每一个 f_n 都是非递减的;

(2) $g(x) = f_0(x)\geqslant f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\cdots\geqslant g(0), x\in(0,1)$.

那么 (2) 就意味着极限

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\quad x\in(0,1)$$

是存在的. 显然 h 是非递减的, 且 $g(0)\leqslant h(x)\leqslant f_n(x), \forall x\in(0,1], n = 0,1,2,\cdots$. 因此要证明 $h(x) = g(0)$ 对任意 $x\in(0,1]$ 成立, 只需要证明 $h(1)\leqslant g(0)$ 即可.

假定 $h(1) > g(0)$, 则存在 $\delta\in(0,1)$ 使得 $h(1) > g(\delta)$. 有定义, (2) 和 (1) 我们得到

$$f_{n+1}(1) = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\delta g(t)\,\mathrm{d}t + \int_\delta^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \delta g(\delta) + (1-\delta) f_n(1).$$

因此

$$f_n(1) - f_{n+1}(1) \geqslant \delta\left(f_n(1) - g(\delta)\right) \geqslant \delta\left(h(1) - g(\delta)\right) > 0.$$

所以 $f_n(1) \to -\infty$, 矛盾.

类似地, 此结论对非递增的连续函数也成立.

现在假定 g 是 $[0,1]$ 上的任意一个连续函数, 令

$$M(x) = \sup_{x\in[0,x]} g(t)\ , m(x) = \inf_{t\in[0,x]} g(t),\quad x \in [0,1].$$

则在 $[0,1]$ 上, m 是非递增的, M 是费递减的, 二者都是连续的, $m(x) \leqslant g(x) \leqslant M(x)$, 且 $M(0) = m(0) = g(0)$. 用定义 $f_n(x)$ 的方式定义函数列 $M_n(x)$ 和 $m_n(x)$, 但是初始条件为 $M_0 = M, m_0 = m$. 那么有 $\lim\limits_{n\to\infty} m_n(x) = m(0) = g(0) = M(0) = \lim\limits_{n\to\infty} M_n(x)$, $\forall x \in (0,1]$, 因此得到 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(0)$.

为了使得记号更明确, 我们把函数 f_j 对应的变量用 x_j 表示. 由定义及 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x_{n+1}) &= \frac{1}{x_{n+1}}\int_0^{x_{n+1}} \frac{1}{x_n}\int_0^{x_n} \frac{1}{x_{n-1}}\int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_2}\frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} g(x_0)\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \frac{1}{x_{n+1}}\int\cdots\int_{x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}} g(x_0)\,\frac{\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n} \\
&= \frac{1}{x_{n+1}}\int_0^{x_{n+1}} g(x_0)\left(\int\cdots\int_{x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}} \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n}\right)\mathrm{d}x_0.
\end{aligned}$$

记

$$h_n(a,b) = \int\cdots\int_{a\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b} \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n},$$

以及 $x = x_{n+1}, t = x_0$, 我们有

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,h_n(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

$h_n(a,b)$ 对 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意一个置换都是一样的, 且上述积分在任意超平面 $x_i = x_j$ 上都是 0, 我们有

$$\begin{aligned}
n!h_n(a,b) &= n!\int\cdots\int_{a\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b} \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n} \\
&= \int_a^b\cdots\int_a^b \frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n} = \left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)^n = \log^n\left(\frac{b}{a}\right).
\end{aligned}$$

因此

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\frac{\log^n(x/t)}{n!}\mathrm{d}t.$$

注意到如果 g 为常数, 则由定义可得 $f_n = g$. 这意味着一方面我们一定有

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\log^n(x/t)}{n!}\mathrm{d}t = 1.$$

另一方面, 由于可以把 $g(t)$ 用 $g(t) - g(0)$ 代替, 我们可以假定 $g(0) = 0$.

取定 $x \in (0,1]$ 和 $\varepsilon > 0$, 由连续性可知存在 $\delta \in (0,x)$ 以及 $M > 0$ 使得 $|g(t)| < \varepsilon, x \in [0,\delta]$ 以及 $|g(t)| \leqslant M, x \in [0,1]$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^n (x/\delta)}{n!} = 0,$$

故存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, $\dfrac{\log^n (x/\delta)}{n!} < \varepsilon$. 那么对任意 $n \geqslant n_0$ 有

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x)| &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |g(t)| \frac{\log^n (x/t)}{n!}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^\delta \varepsilon\frac{\log^n (x/t)}{n!}\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_\delta^x |g(t)| \frac{\log^n (x/\delta)}{n!}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^\delta \varepsilon\frac{\log^n (x/t)}{n!}\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_\delta^x M\varepsilon\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon + M\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0 = g(0)$.

6. 设 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 是一个实系数多项式, 证明: 如果 f 的所有根都在左半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z < 0\}$, 则

$$a_k a_{k+3} < a_{k+1}a_{k+2}$$

对任意 $k = 0,1,\cdots,n-3$ 都成立.

证明 多项式 f 可以分解成一次因式与二次因式的乘积,

$$f(z) = \prod_i (k_i z + l_i)\prod_j \left(p_j z^2 + q_j z + r_j\right),$$

其中 $k_i, l_i, p_j.q_j.r_j \in \mathbb{R}$. 由于所有的根都在左半平面, 则对每个 i, k_i 和 l_i 符号相同, 对每个 j, p_j, q_j, r_j 符号也相同. 因此我们可以不妨假定所有的系数都是正的, 否则将 f 乘以 -1 即可.

为简便起见, 我们把系数数列扩充, $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$ 以及 $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$, 然后用桂南法证明结论对 $-1 \leqslant k \leqslant n-2$ 成立.

对 $n \leqslant 2$ 结论显然成立: a_{k+1} 与 a_{k+2} 均为正, 且 a_{k-1} 与 a_{k+1} 至少有一个是 0, 因此 $a_{k+1}a_{k+2} > a_k a_{k+3} = 0$.

现在假定 $n \geqslant 3$ 时结论对任意小于 n 的情形都成立, 取 $f(z)$ 的一个具有形式 $z^2 + pz + q, p, q > 0$ 的因子, 这样的因子可以用两个共轭复根或两个实根得到. 那么我们可将 $f(z)$ 写为

$$f(z) = \left(z^2 + pz + q\right)\left(b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0\right) = \left(z^2 + pz + q\right) g(z).$$

多项式 $g(z)$ 的根都在左半平面, 所以 $b_{k+1}b_{k+2} < b_k b_{k+3}$ 对任意 $-1 \leqslant k \leqslant n-4$ 成立. 定义 $b_{n-1} = b_n = \cdots = 0$ 以及 $b_{-1} = b_{-2} = \cdots = 0$, 同样有 $b_{k+1}b_{k+2} \leqslant b_k b_{k+3}$ 对所有整数 k 都成立.

现在我们假定 $a_{k+1}a_{k+2} > a_k a_{k+3}$. 如果 $k = -1$ 或者 $k = n-2$, 则结论显然成立, 因为 $a_{k+1}a_{k+2} > 0$ 且 $a_k a_{k+3} = 0$. 因此假定 $0 \leqslant k \leqslant n-3$, 计算可得

$$a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3}$$

$$
\begin{aligned}
&= (qb_{k+1} + pb_k + b_{k-1})(qb_{k+2} + pb_{k+1} + b_k) \\
&\quad - (qb_k + pb_{k-1} + b_{k-2})(qb_{k+3} + pb_{k+2} + b_{k+1}) \\
&= (b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+2}) + p\left(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}\right) + q\left(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}\right) \\
&\quad + p^2\left(b_kb_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}\right) + q^2\left(b_{k+1}b_{k+2} - b_kb_{k+3}\right) + pq\left(b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3}\right).
\end{aligned}
$$

我们将证明上述六个式子都是非负的, 且至少有一个是非负的. 由于 $0 \leqslant k \leqslant n-3$, 其中 $p^2\left(b_kb_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}\right)$ 是正的, 而由归纳假设可知 $b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}$ 和 $q^2(b_{k+1}b_{k+2} - b_kb_{k+3})$ 都是非负的.

要验证 $p(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2})$ 的符号, 考虑

$$
b_{k-1}\left(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}\right) = b_{k-2}\left(b_kb_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}\right) + b_k\left(b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}\right) \geqslant 0.
$$

如果 $b_{k-1} > 0$, 那么两边除以它, 有 $b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2} \geqslant 0$. 否则, 如果 $b_{k-1} = 0$, 则 $b_{k-2} = 0$ 或者 $b_{k+2} = 0$, 因此 $b_k^2 - bk - 2b_{k+2} \geqslant 0$. 因此, $p(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}) \geqslant 0$ 对所有 k 都成立. 同样地, $pq(b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3}) \geqslant 0$.

$q(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3})$ 的符号也能用类似的方法验证. 考虑

$$
b_{k+1}\left(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}\right) = b_{k-1}\left(b_{k+1}b_{k+2} - b_kb_{k+3}\right) + b_{k+3}\left(b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}\right) \geqslant 0.
$$

如果 $b_{k+1} > 0$, 则两边可以除以它, 否则 $b_{k-2} = 2$ 或 $b_{k+3} = 0$, 这几种情形下都有 $b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3} \geqslant 0$.

现在所有的项的符号都验证了, 也就完成了证明.

§ 10.2 第二天

1. 设 A 和 B 都是 $n \times n$ 实矩阵使得 $AB + A + B = \boldsymbol{O}$, 证明 $AB = BA$.

证明 由于 $(A+I)(B+I) = AB + A + B + I$, I 表示单位矩阵. 因此 $A+I$ 与 $B+I$ 互为逆矩阵, 于是 $(A+I)(B+I) = (B+I)(A+I)$, 因此 $AB = BA$.

2. 求极限

$$
\lim_{x\to 0+} \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n} \mathrm{d}t \quad (m, n \in \mathbb{N}).
$$

解 首先 $\dfrac{\sin t}{t}$ 在 $(0, \pi)$ 内递减且 $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. 对任意 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 以及 $t \in [x, 2x]$, 我们有 $\dfrac{\sin 2x}{2x} < \dfrac{\sin t}{t} < 1$, 因此

$$
\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^m \int_x^{2x} \frac{t^m}{t^n} \mathrm{d}t < \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n} \mathrm{d}t < \int_x^{2x} \frac{t^m}{t^n} \mathrm{d}t.
$$

而 $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^m}{t^n} \mathrm{d}t = x^{m-n+1} \int_1^2 u^{m-n} \mathrm{d}u$, 且 $x \to^+$ 时, $\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^m \to 1$. 如果 $m - n + 1 < 0$, 则 $x^{m-n+1} \to +\infty$; 如果 $m - n + 1 > 0$, 则 $x^m - n + 1 \to 0$. 如果 $m - n + 1 = 0$, 则

$x^{m-n+1}\int_1^2 u^{m-n}\mathrm{d}u = \log 2$. 因此

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin^m t}{t^n}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & m > n \\ \log 2, & n-m=1 \\ +\infty, & n-m>1 \end{cases}.$$

3. 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭子集, B 由所有这样的 $b\in\mathbb{R}$ 组成: 有且只有一个 $a_0\in A$ 使得

$$|a_0-b| = \inf_{a\in A}|a-b|.$$

证明: B 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密, 即 B 的闭包是 $\mathbb{R}^n$.

证明 取 $b_0\notin A$(否则 $b_0\in A\subset B$), $\rho=\inf\limits_{a\in A}|a-b_0|$. 所有以 b_0 为圆心, $\rho+1$ 为半径的圆与 A 的交集都是紧集, 且存在 $a_0\in A: |a_0-b_0|=\rho$.

记 $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-a|\leqslant r\}$ 与 $\partial B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-a|=r\}$ 分别表示以 a 为圆心, r 为半径的球和球面.

如果 a_0 不是唯一的最近点, 则对线段 (a_0,b_0) 上的任一点 a, 我们有 $B_{|a-a_0|}(a)\subset B_\rho(b_0)$, 且 $\partial B_{|a-a_0|}(a)\cap B_\rho(b_0)=\{a_0\}$. 因此 $(a_0,b_0)\subset B$ 且 b_0 是 B 的一个聚点, 证毕.

4. 求出所有的正整数 n, 使得存在一个由 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的三元子集构成的集族 $\mathcal{F}$ 满足以下两个条件:

(i) 对任意两个不同的元素 $a,b\in S$, 恰好存在一个 $A\in\mathcal{F}$, A 包含 a,b;

(ii) 如果 a,b,c,x,y,z 是 S 中的元素, 使得如果 $\{a,b,x\},\{a,c,y\},\{b,c,z\}\in\mathcal{F}$, 则 $\{x,y,z\}\in\mathcal{F}$.

解 由条件 (i), 我们可以在集合 S 上定义一种运算 $*$, 当 $a\neq b$ 时,

$$a*b=c \text{当且仅当} \{a,b,c\}\in\mathcal{F}.$$

这个定义并没有完整, 我们还需要定义 $a*a$. 由 (i) 可知当 $a\neq b$ 时, 它显然满足以下三条性质:

(1) $a\neq a*b\neq b$;

(2) $a*b=b*a$;

(3) $a*(a*b)=b$.

条件 (ii) 则说明

(4') $x*(a*c)=x*y=z=b*c=(x*a)*c$.

对任意不同的 x,a,c 成立, 即 $*$ 对不同的元素满足结合律. 现在我们可以完善 $*$ 的定义. 为了对不互异的元素保持结合律, 使得 $b=a*(a*b)=(a*a)*b$ 成立, 我们要给 S 增加额外的元素, 记为 0, 且定义

(4) $a*a=0$, 且$a*0=0*a=0$.

容易验证对任意 $a,b,c\in S\cup\{0\}$, (1)(2)(3)(4) 都成立, 且

$$a*b*c := (a*b)*c = a*(b*c).$$

因此我们得出 $(S\cup\{0\},*)$ 具有优先 Abel 群的结构, 所以元素的阶都是 2. 由于每个这样的群的阶都是 2 的幂, 我们可得 $|S\cup\{0\}| = n+1 = 2^m$, 即 $n = 2^m - 1$ 对某个正整数 m 成立.

对给定的 $n = 2^m - 1$, 根据我们已经证明的结论, 我们来构造 S 的一族三元子集使得其满足条件 (i) 和 (ii). 我们用下面的方式定义 $*$:

如果 $a = a_0 + 2a_1 + \cdots + 2^{m-1}a_{m-1}$ 且 $b = b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^{m-1}b_{m-1}$, 其中 a_i, b_i 是 0 或 1, 定义

$$a*b = |a_0 - b_0| + 2|a_1 - b_1| + \cdots + 2^{m-1}|a_{m-1} - b_{m-1}|.$$

容易验证 $*$ 满足 (1)(2)(3) 和 (4'). 因此, 如果我们把 $\mathcal{F}$ 中的所有三元组 $a, b, a*b$ 都包括进来, 由 (1)(2)(3) 可知条件 (i) 成立, 由 (4') 可知条件 (ii) 成立.

因此最后的答案是 $n = 2^m - 1$, m 为正整数.

5. (a) 证明: 对每个函数 $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, 都存在一个函数 $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, 使得 $f(x,y)\leqslant g(x)+g(y)$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立.

(b) 求出一个函数 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得不存在函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x,y)\leqslant g(x)+g(y)$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立.

解

(a) 设 $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ 是一个双射. 定义

$$g(x) = \max\{|f(s,t)| : s,t\in\mathbb{Q}, \varphi(s)\leqslant\varphi(x), \varphi(t)\leqslant\varphi(x)\},$$

则有 $f(x,y)\leqslant\max\{g(x),g(y)\}\leqslant g(x)+g(y)$.

(b) *方法一* 定义函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|}, & x\neq y \\ 0, & x=y \end{cases},$$

我们要证明 $f(x,y)$ 满足条件. 否则, 假定存在一个函数 g 满足上述条件, 则对任意 $x,y\in\mathbb{R}, x\neq y$, 有 $g(y)\geqslant\dfrac{1}{|x-y|}-f(x)$. 则可得对任意 $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to x}g(y)=\infty$. 下面我们证明不存在这样的函数 g 在一个有界闭区间 $[a,b]$ 上任一点的极限都是无穷.

对每个 $k\in\mathbb{N}^*$, 记 $A_k=\{x\in[a,b]:|g(x)|\leqslant k\}$, 显然 $[a,b]=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 集合 $[a,b]$ 不可数, 则至少有一个集合 A_k 是无穷集, 于是 A_k 中存在一个元素相异的无穷数列, 它包含一个收敛子列 $\{x_n\}$ 收敛到点 $x\in[a,b]$. 但是 $\lim\limits_{y\to x}g(y)=\infty$ 意味着 $g(x_n)\to\infty$, 矛盾, 因为 $|g(x_n)|\leqslant k$.

方法二 记 S 表示所有实数列的集合, S 的基数为 $|S|=|\mathbb{R}|^{\aleph_0}=2^{\aleph_0^2}=2^{\aleph_0}=|\mathbb{R}|$. 因此存在一个双射 $H:\mathbb{R}\to S$. 现在定义函数 f: 对任意实数 x 和正整数 n, 令 $f(x,n)$ 表示序列 $h(x)$ 的第 n 个元素. 如果 y 不是正整数, 令 $f(x,y)=0$. 我们来证明此函数满足题意.

设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一个函数, 我们证明存在实数 x,y 使得 $f(x,y)>g(x)+g(y)$. 考虑序列 $\{n+g(n)\}_{n=1}^{\infty}$, 这个数列是 S 中的一个元素, 因此 $\{n+g(n)\}_{n=1}^{\infty}=h(x)$ 对某个实数 x 成立. 那么对任意正整数 n, $f(x,n)$ 是第 n 个元素, $f(x,n)=n+g(n)$. 取 n 使得 $n>g(x)$, 我们得到 $f(x,n)=n+g(n)>g(x)+g(n)$.

6. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列定义为:

$$a_0=1,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}.$$

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{2^k}.$$

解 考虑母函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 归纳可知 $0<a_n\leqslant 1$, 因此级数对 $|x|<1$ 是绝对收敛的. $f(0)=1$ 且 $f(x)$ 在区间 $[0,1)$ 内为正, 我们的目标是计算 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

由递推公式可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}x^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{x^{n-k}}{n-k+2}=f(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m+2}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\log f(x)=\log f(x)-\log f(0)&=\int_0^x\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{(m+1)(m+2)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{x^{m+1}}{m+2}\right)\\&=1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m+1}=1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

因此 $\log f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\log 2$, 于是 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

11. 2004 年国际大学生数学竞赛 Skopje, Macedonia

§ 11.1 第一天

1. 设 S 是一个元素均为实数的无穷集合, 且满足对任意有限子集 $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \subset S$ 都有 $|s_1 + s_2 + \cdots + s_k| < 1$, 证明 S 是可数的.

证明 对任意正整数 n, 令 $S_n = S \cap \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$, 则 $|S_n| < n$. 同样的, 定义 $S_{-n} = S \cap \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right)$, 则 $|S_{-n}| < n$. 任意非零元 $x \in S$ 都是某个 S_n 或 S_{-n} 的元素, 因为存在 n 使得 $x > \frac{1}{n}$ 或 $x < -\frac{1}{n}$, 则

$$S \subset \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (S_n \cup S_{-n}).$$

即 S 是有限集的可数并, 因此 S 是可数的.

2. 设 $P(x) = x^2 - 1$. 方程

$$\underbrace{P(P(\cdots(P}_{2004}(x))\cdots)) = 0$$

有多少个实数解?

解 记 $P_n(x) = \overbrace{P(P(\cdots(P}^{n}(x))\cdots))$. 由于对任意 $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) \geqslant -1$, 则 $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)) \geqslant -1$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 都成立. 因此当 $a < -1$ 时, 方程 $P_n(x) = a$ 无实数解. 我们先对 n 用数学归纳法证明当 $a > 0$ 时, 方程 $P_n(x) = a$ 恰有两个不同的实数解.

如果 $n = 1$, 结论显然成立. 假定此结论对某个 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 我们证明结论对 $n + 1$ 也成立. 由于 $P_{n+1}(x) = a$ 等价于 $P_1(P_n(x)) = a$, 我么可得 $P_n(x) = \sqrt{a+1}$ 或 $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$. 由归纳假设, 因为 $\sqrt{a+1} > 1$, 方程 $P_n(x) = \sqrt{a+1}$ 恰有两个不同的实数解. 而 $-\sqrt{a+1} < -1$, 方程 $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$ 没有实数解. 因此方程 $P_{n+1}(x) = a$ 恰有两个不同的实数解.

现在再来用归纳法证明方程 $P_n(x) = 0$ 恰有 $n + 1$ 个不同的实数解. 如果 $n = 1$, 解为 $x = \pm 1$; 如果 $n = 2$, 解为 $x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{2}$, 这两种情形都满足. 假定结论对某个 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立. 注意到 $P_{n+2}(x) = P_2(P_n(x)) = P_n^2(x)(P_n^2(x) - 2)$, 所以方程 $P_{n+2}(x) = 0$ 的所有解恰好是方程 $P_n(x) = 0$, $P_n(x) = \sqrt{2}$, $P_n(x) = -\sqrt{2}$ 的解集合的并集. 由归纳假设, 方程 $P_n(x) = 0$ 有 $n + 1$

个不同的实数解, 而方程 $P_n(x)=\sqrt{2}$ 和 $P_n(x)=-\sqrt{2}$ 分别有两个相同的实数解. 因此上述集合是两两不交的, 方程 $P_{n+2}(x)=0$ 恰有 $n+3$ 个不同实数解. 于是原题的答案为 2005.

3. 设 S_n 表示所有的和 $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, 其中 $n\geqslant 2, 0\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant \frac{\pi}{2}$ 且

$$\sum_{k=1}^{n}\sin x_k=1.$$

(a) 证明 S_n 是一个区间;

(b) 设 l_n 表示区间 S_n 的长度, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$.

解

(a) 我们可以等价地考虑集合

$$Y=\{y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}|0\leqslant y_1,y_2,\cdots,y_n\leqslant 1, y_1+y_2+\cdots+y_n=1\}\subset\mathbb{R}^n$$

以及在映射 $f(y)=\arcsin y_1+\arcsin y_2+\cdots+\arcsin y_n$ 下 Y 的像 $f(Y)$. 注意到 $f(Y)=S_n$, 有 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个连通子空间且 f 是一个连续函数, 像空间 $f(Y)$ 也是连通的, 而我们知道 $\mathbb{R}$ 的连通子空间只能是区间, 因此 S_n 是一个区间.

(b) 我们将证明

$$n\arcsin\frac{1}{n}\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由于 $\sin x$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是凹函数, 连接点 $(0,0)$ 与 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的弦在其图像的下方, 因此

$$\frac{2x}{\pi}\leqslant\sin x,\quad\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

于是可得不等式右半部分

$$\frac{2}{\pi}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\leqslant\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=1.$$

且取 $x_1=\frac{\pi}{2}, x_2=\cdots=x_n=0$ 时等号成立.

而左半边不等式可以利用 Jensen 不等式:

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n}{n}\leqslant\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

当 $x_1=\cdots=x_n=\arcsin\frac{1}{n}$ 时等号成立.

我们已经求出了区间 S_n 的最小值和最大值, 因此 $S_n=\left[n\arcsin\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}\right]$, 于是 $l_n=\frac{\pi}{2}-n\arcsin\frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\frac{\pi}{2}-\lim_{n\to\infty}n\arcsin\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}-1.$$

4. 设正整数 $n \geqslant 4$, M 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 n 元子集, 且任意四点不在一个平面. 假定这些点可以着色成黑色或白色, 使得任意与 M 相交不小于四个点的球面, 都恰好使得其中一半的交点是白色. 证明: M 中的所有点都在一个球面上.

证明 定义 $F: M \to \{-1, 1\}$, $f(X) = \begin{cases} -1, & X\text{是白色} \\ 1,, & X\text{是黑色} \end{cases}$, 则题目条件变为对任意至少与 M 交于四个点的球面 S 有 $\sum\limits_{X \in S} f(X) = 0$. 对任意给定的三个点 $A, B, C \in M$, 用 $S(A, B, C)$ 表示所有经过 A, B, C 以及至少一个 M 中的其他点的球面组合的集合, 用 $|S(A, B, C)|$ 表示这些球面的数量, 记 $\sum = \sum\limits_{X \in M} f(X)$, 那么有

$$0 = \sum_{S \in S(A,B,C)} \sum_{X \in S} (|S(A, B, C)| - 1)(f(A) + f(B) + f(C)) + \sum. \tag{11.1}$$

这是因为 A, B, C 的值各出现了 $|S(A, B, C)|$ 次, 而其他点的值都只出现了一次.

如果存在三个点 $A < B, C$ 使得 $|S(A, B, C)| = 1$, 结论已经成立.

如果 $|S(A, B, C)| > 1$ 对任意 M 中不同的点 A, B, C 都成立, 我们来证明 $\sum = 0$.

假定 $\sum > 0$, 由 $(*)$ 式可知 $f(A) + f(B) + f(C) < 0$, 那么对所有 A, B, C 的 $\binom{n}{3}$ 个选择进行求和, 我们有 $\binom{n}{3}\sum < 0$, 这就意味着 $\sum < 0$, 这与最初的假设矛盾. 同理假设 $\sum < 0$ 也矛盾.

那么现在由 $\sum = 0$ 和 (11.1) 式可知 $f(A) + f(B) + f(C) = 0$ 对任意不同的点 $A, B, C \in M$ 都成立. 另取一点 $D \in M$ 可使得

$$\begin{cases} f(A) + f(B) + f(C) = 0 \\ f(A) + f(B) + f(D) = 0 \\ f(A) + f(C) + f(D) = 0 \\ f(B) + f(C) + f(D) = 0 \end{cases}$$

成立, 因此导致 $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 0$, 这与 f 的定义矛盾.

5. 设正整数 $k \geqslant 2$, X 是一个有 $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ 个实数的集合. 证明: 存在一个单调序列 $\{x_i\}_{i=1}^k \subset X$ 使得

$$|x_{i+1} - x_1| \geqslant 2|x_i - x_1|$$

对所有的 $i = 1, 2, \cdots, k-1$ 都成立.

证明 我们来证明一个更一般的结论:

引理 11.1. 设 $k, l \geqslant 2$, X 是一个有 $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ 个实数的集合. 则或者 X 包含一个长

度为 k 的单调递增序列 $\{x_i\}_{i=1}^{k} \subset X$ 使得

$$|x_{i+1} - x_1| \geqslant 2|x_i - x_1|, \quad \forall i = 2, \cdots, k-1.$$

或者 X 包含一个长度为 l 的单调递减序列 $\{x_i\}_{i=1}^{l} \subset X$ 使得

$$|x_{i+1} - x_1| \geqslant 2|x_i - x_1|, \quad \forall i = 2, \cdots, l-1.$$

证明. 我们对 $k+l$ 进行归纳. 如果 $k=2$ 或 $l=2$, 引理显然成立.

现在假定 m 和 M 分别是 X 中的最小数和最大数, 令

$$X_m = \left\{x \in X : x \leqslant \frac{m+M}{2}\right\}, \quad X_M = \left\{x \in X : x > \frac{m+M}{2}\right\}.$$

由于 $\binom{k+l-4}{k-2} = \binom{(k-1)+l-4}{k-2} + \binom{(k-1)+l-4}{(k-1)-2}$, 我们有

$$|X_m| \geqslant \binom{(k-1)+l-4}{(k-1)-2} + 1 \text{或} |X_M| \geqslant \binom{k+(l-1)-4}{k-2} + 1.$$

在第一种情形下, 我们对 X_m 应用归纳假设, 则或者得到一个长度为 l 的满足条件的单调递减序列, 或者得到一个长度为 $k-1$ 的单调递增序列 $\{x_i\}_{i=1}^{k-1} \subset X_m$. 这个时候序列

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, M \subset X\}$$

长度为 k 且满足所要求的性质.

而当 $|X_M| \geqslant \binom{k+(l-1)-4}{k-2} + 1$ 时, 归纳步骤也一样, 引理得证. ☆

注 读者可以验证引理中的 $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ 不能再小了.

6. 对每个复数 $z \notin \{0,1\}$, 定义

$$f(z) = \sum (\log z)^{-4},$$

其中求和是对复对数的所有分支求和.

(a) 证明: 存在两个多项式 P 和 Q 使得 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 对任意 $z \in \mathbb{C} \backslash \{0,1\}$ 成立.

(b) 证明: 对任意 $z \in \mathbb{C} \backslash \{0,1\}$ 有

$$f(z) = z \frac{z^2 + 4z + 1}{6(z-1)^4}.$$

证明 我们直接解决第二问即可. 利用余切函数的有理分式展开式

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{w + 2k\pi \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2} \cot \frac{\mathrm{i}w}{2},$$

我们有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{\log z+2k\pi\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2}\cot\frac{\mathrm{i}\log z}{2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\log z}{2}}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\log z}{2}}-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z-1}.$$

上式两边求导即可得

$$\sum\frac{1}{\log^2 z}=-z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{z-1}\right)'=\frac{z}{(z-1)^2},$$

$$\sum\frac{1}{\log^3 z}=-\frac{z}{2}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)'=\frac{z(z+1)}{2(z-1)^3},$$

$$\sum\frac{1}{\log^4 z}=-\frac{z}{3}\left(\frac{z(z+1)}{2(z-1)^3}\right)'=\frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{2(z-1)^4}.$$

§ 11.2 第二天

1. 设 A 是一个 4×2 实矩阵, B 是一个 2×4 实矩阵, 满足

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

求 BA.

解 记 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}$, 其中 A_1,A_2,B_1,B_2 都是 2×2 矩阵. 则

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2\\A_2B_1&A_2B_2\end{pmatrix}.$$

因此 $A_1B_1=A_2B_2=I_2, A_1B_2=A_2B_1=-I_2$, 于是 $B_1=A_1^{-1}, B_2=-A_1^{-1}, A_2=B_2^{-1}=-A_1$. 最后我们得到

$$BA=\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=B_1A_1+B_2A_2=2I_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

2. 设 $f,g:[a,b]\to[0,+\infty)$ 都是连续且非递减的函数, 求对每个 $x\in[a,b]$ 我们有

$$\int_a^x\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t,$$

且 $\int_a^b\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^b\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t$. 证明:

$$\int_a^b\sqrt{1+f(t)}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_a^b\sqrt{1+g(t)}\,\mathrm{d}t$$

证明 令 $F(x)=\int_a^x\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t, G(x)=\int_a^x\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t$. 则函数 F,G 都是凸的, 且 $F(a)=0=G(a), F(b)=G(b)$. 我们要证明的是

$$\int_a^x\sqrt{1+(F'(t))^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x\sqrt{1+(G'(t))^2}\mathrm{d}t,$$

即证明曲线 $y=F(x)$ 的的长度不小于曲线 $y=G(x)$ 的长度. 由于两个函数都是凸的, 且它们有相同的端点, 而 $F(x)$ 的图像在 $G(x)$ 图像的下方, 这是显然成立的.

3. 设 D 是平面上的闭单位圆盘, $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 D 中的固定点. 证明: 存在一个 D 中的点使得 p 到点 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的距离之和不小于 1.

证明 把各个点看成向量, 设 p 是指向向量 $\sum\limits_{i=1}^n p_i$ 反方向的单位向量, 则由三角形不等式得

$$\sum_{i=1}^n|p-p_i|\geqslant\left|np-\sum_{i=1}^n p_i\right|=n+\left|\sum_{i=1}^n p_i\right|\geqslant n.$$

4. 设正整数 $n\geqslant 1, M$ 是一个 $n\times n$ 复矩阵, 有 k 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$, 重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$. 线性算子 L_m 定义为 $L_M(X)=MX+XM^{\mathrm{T}}$, 其中 X 是任意 $n\times n$ 复矩阵. 求出 L_M 的特征值及其重数.

解 我们首先解决当 M 的所有特征值互异且所有的和 $\lambda_r+\lambda_s$ 都不同的情形. 设 λ_r 和 λ_s 是 M 的两个不同特征值, v_r,v_s 分别是对应的特征向量, 即 $Mv_j=\lambda_r v_j, j=r,s$. 于是我们有

$$Mv_rv_s^{\mathrm{T}}+v_rv_s^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}=(Mv_r)\,v_s^{\mathrm{T}}+v_r\,(Mv_r)^{\mathrm{T}}=\lambda_rv_rv_s^{\mathrm{T}}+\lambda_sv_rv_s^{\mathrm{T}}.$$

因此 $v_rv_s^{\mathrm{T}}$ 的 L_M 的特征值为 $\lambda_r+\lambda_s$ 的特征矩阵.

注意到如果 $\lambda_r\neq\lambda_s$, 则向量 v_r,v_s 线性无关, 矩阵 $v_sv_r^{\mathrm{T}}$ 和 $v_rv_s^{\mathrm{T}}$ 也是线性无关的. 这就意味着当 $r\neq s$ 时, $\lambda_r+\lambda_s$ 是二重特征值.

L_M 把 n^2 维线性空间映射到自身, 所以它至多有 n^2 个特征值. 我们已经找到了 n^2 个特征值, 所以没有更多特征值了, 这种特殊情形已经解决了.

在一般的情形下, 矩阵 M 是一列矩阵 $M_1,M_2,\cdots$ 的极限, 其中每个 M_i 都是上述一种特殊情形, 由特征值的连续性, 我们得到 L_M 的特征值为:

- $2\lambda_r$ 的重数为 $m_r^2(r=1,\cdots,k)$;
- $\lambda_r+\lambda_s$ 的重数为 $2m_rm_s(1\leqslant r<s\leqslant k)$.

5. 证明:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{-1}+|\log y|-1}\leqslant 1.$$

证明 方法一 令 $f(x)=x^{-1}-1-|\log x|, x\in(0,1]$, 则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\leqslant 0$, 因此 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$, 即 $x^{-1}-1\geqslant|\log x|$. 因此

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{-1}+|\log y|-1}\leqslant\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\log x|+|\log y|}=\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\log(xy)|}.$$

换元 $y=\dfrac{u}{x}$ 可得

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\log(xy)|}=\int_0^1\left(\int_u^1\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{|\log u|}=\int_0^1|\log u|\frac{\mathrm{d}u}{|\log u|}=1.$$

方法二　作换元 $s=x^{-1}-1, u=s-\log y$ 得

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{-1}+|\log y|-1}=\int_0^\infty\int_s^\infty\frac{\mathrm{e}^{s-u}}{(s+1)^2u}\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\int_0^\infty\left(\int_0^u\frac{\mathrm{e}^s}{(s+1)^2}\mathrm{d}s\right)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u.$$

由于函数 $\dfrac{\mathrm{e}^s}{(s+1)^2}$ 是凸的, 于是

$$\int_0^u\frac{\mathrm{e}^s}{(s+1)^2}\mathrm{d}s\leqslant\frac{u}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^u}{(u+1)^2}+1\right).$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^{-1}+|\log y|-1}&\leqslant\int_0^\infty\frac{u}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^u}{(u+1)^2}+1\right)\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}+\int_0^\infty\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right)=1.\end{aligned}$$

6. 设 $n\geqslant 0$, 定义矩阵列 A_n, B_n: $A_0=A_0=(1)$. 对每个 $n>0$,

$$A_n=\begin{pmatrix}A_{n-1}&A_{n-1}\\A_{n-1}&B_{n-1}\end{pmatrix},\quad B_n=\begin{pmatrix}A_{n-1}&A_{n-1}\\A_{n-1}&0\end{pmatrix}.$$

用 $S(M)$ 表示矩阵 M 的所有元素的和. 证明: $S(A_n^{k-1})=S_k^{n-1}$ 对任意 $n,k\geqslant 1$ 都成立.

证明　数字 $S(A_n^{k-1})$ 有一个非常好的组合意义. 考虑一个 $n\times k$ 的表格, 用 1 和 0 来填充, 使得不存在 2×2 的子矩阵只包含 1, 用 F_{nk} 来表示这样的填充方法数. 填充的每一行数, 都对应一个二进制下在 0 到 2^n-1 之间的整数. F_{nk} 表示这样的 k 元二进制数组的个数: 任意相应于填充一个 $n\times 2$ 表格的相邻二进制数组成的表格里面不含有 $n\times n$ 的表格都是 1.

考虑整数 i,j 的二进制表示 $\overline{i_ni_{n-1}\cdots i_1}$ 和 $\overline{j_nj_{n-1}\cdots j_1}$, 有两种情形:

- 如果 $i_nj_n=0$, 则 i 和 j 可以相邻的当且仅当 $\overline{i_{n-1}\cdots i_1}$ 和 $\overline{j_{n-1}\cdots j_1}$ 可以相邻;
- 如果 $i_n=j_n=1$, 那么 i 和 j 可以相邻的当且仅当 $i_{n-1}j_{n-1}=0$ 且 $\overline{i_{n-2}\cdots i_1}$ 和 $\overline{j_{n-2}\cdots j_1}$ 可以相邻.

因此, i 和 j 相邻当且仅当 A_n 的 $(i+1,j+1)$ 元是 1. 把这一项记为 $a_{i,j}$, 则

$$S\left(A_n^{k-1}\right)=\sum_{i_1=0}^{2^{n-}-1}\cdots\sum_{i_k=0}^{2^n-1}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{k-1}}a_{i_k}$$

恰好就是计数所有可能的填充方式, 于是 $F_{nk}=S(A_n^{k-1})$, 而显然有 $F_{nk}=F_{kn}$.

12. 2005 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 12.1 第一天

1. 设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵, 其 (i, j) 元是 $i + j, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 矩阵 A 的秩为多少?

解 $n = 1$ 时, $\operatorname{rank} A = 1$, 现在假定 $n \geqslant 2$. 由于 $A + (i)_{i,j=1}^{n} + (j)_{i,j=1}^{n}$, 矩阵 A 是两个秩为 1 的矩阵的和, 因此 A 的秩最多为 2. 显然 A 的第一个顺序主子式为 -1, 因此 $\operatorname{rank} A = 2$.

2. 对正整数 $n \geqslant 3$, 考虑集合

$$S_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \forall i, x_i \in \{0, 1, 2\}\},$$

$$A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S_n : \forall i \leqslant n - 2, |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}| \neq 1\},$$

以及

$$B_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S_n : \forall i \leqslant n - 1, x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_i \neq 0\}.$$

证明 $|A_{n+1}| = 3|B_n|$.

注 $|A|$ 表示集合 A 中的元素个数, 重复元素按一个算.

证明 *方法一* 把上述定义扩充到 $n = 1, 2$. 考虑下面的集合

$$A'_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A_n : x_{n-1} = x_n\}, \quad A''_n = A_n \backslash A'_n,$$

$$B'_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B_n : x_n = 0\}, \quad B''_n = B_n \backslash B'_n.$$

记 $a_n = |A_n|, a'_n = |A'_n|, a''_n = |A''_n|, b_n = |B_n|, b'_n = |B'_n|, b''_n = |B''_n|$.

不难得到

$$\begin{cases} a_n = a'_n + a''_n \\ a'_{n+1} = a''_n \\ a''_{n+1} = 2a'_n + 2a''_n \end{cases},$$

因此我们得到 $a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$. 同样有

$$\begin{cases} b_n = b'_n + b''_n \\ b'_{n+1} = b''_n \\ b''_{n+1} = 2b'_n + 2b''_n \end{cases},$$

因此 $b_{n+1}=2b_n+2b_{n-1}$. 直接计算可得

$$\begin{cases} a_1=3, a_2=9, a-3=24 \\ b_1=3, b_2=8 \end{cases},$$

因此得到 $a_2=3b_1, a_3=3b_2$, 归纳即知 $a_{n+1}=3b_n$ 对每个 $n\geqslant 1$ 都成立.

方法二 视 x_i 为 $\mathbb{Z}_3$ 中的元素, 我们有

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A_n \Rightarrow \begin{cases} (x_1+1,x_2+1,\cdots,x_n+1)\in A_n \\ (x_1+2,x_2+2,\cdots,x_n+2)\in A_n \end{cases}.$$

这就意味着 A_n 中有三分之一的向量首位是 0. 我们在由属于 A_{n+1} 的首位是 0 的向量构成的子集和 B_n 之间构造一个双射:

$$(0,x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A_{n+1}\mapsto (y_1,y_2,\cdots,y_n)\in B_n,$$

$$y_1=x_1, y_2=x_2-x_1, y_3=x_3-x_2,\cdots, y_n=x_n-x_{n-1}.$$

如果 $y_k=y_{k+1}=0$, 则 $x_k-x_{k-1}=x_{k+1}-x_k=0(x_0=0)$, 此时 $x_{k-1}=x_k=x_{k+1}$, 而由集合 A_p 的定义知这是不可能的. 因此上述映射的逆映射为

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in B_n\mapsto (0,x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A_{n+1},$$

$$x_1=y_1, x_2=y_1+y_2,\cdots, x_n=y_1+y_2+\cdots+y_n.$$

这就证明了结论.

3. 设 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 是一个连续可微的函数. 证明:

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x - f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|f'(x)\right|\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明 *方法一* 设 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$. 由不等式 $-M\leqslant f'(x)\leqslant M, x\in[0,1]$ 可得

$$-Mf(x)\leqslant f(x)f'(x)\leqslant Mf(x),\ \ x\in[0,1].$$

积分即得

$$-M\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f^2(0)\leqslant M\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ x\in[0,1].$$

两边再乘以 $f(x)$ 得

$$-Mf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \frac{1}{2}f^3(x)-\frac{1}{2}f^2(0)f(x)\leqslant Mf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ x\in[0,1].$$

再次积分得到

$$\begin{aligned} &-M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant \int_0^1 f^3(x)-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ \Leftrightarrow &\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M\left|f'(x)\right|\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2. \end{aligned}$$

方法二　设 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$, 记 $F(x)=-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=f(x), F(1)=0, F(0)=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}F(x)\\&=f^2(1)F(1)-f^2(0)F(0)-\int_0^1 2F(x)f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 2F(x)f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^1 2F(x)f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^1 2F(x)f(x)\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_0^1 2F(x)f(x)\mathrm{d}x=M\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

4. 求出所有满足下面两个条件的多项式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$:

- $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 是 $(0,1,\cdots,n)$ 的一个置换;
- $P(x)$ 的所有根都是有理数.

方法一　由于 $P(x)>0$ 对任意 $x>0$ 成立, 因此 $P(x)$ 没有正实根, 那么我们可以把这些根表示成形式 $-\alpha_i, i=1,2,\cdots,n$, 其中 $\alpha_i\geqslant 0$. 如果 $a_0\neq 0$, 则存在一个 $k\in\mathbb{N}^*, 1\leqslant k\leqslant n-1$, 使得 $a_k=0$, 那么由 Vieta 定理可得

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-k-1}\alpha_{n-k}+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-k-1}\alpha_{n-k+1}+\cdots+\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{\alpha_k}{\alpha_n}=0,$$

而这是不可能的, 因为等式左边为正. 则 $a_0=0$, 那么此多项式必然有一根, 不妨设为 $\alpha_n=0$. 考虑多项式 $Q(x)=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$. 再由 Vieta 定理, 对 $n\geqslant 3$ 有

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}=\frac{a_1}{a_n}, \tag{12.1}$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}=\frac{a_2}{a_n}, \tag{12.2}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{12.3}$$

把 (12.2) 式除以 (12.1) 式得到

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n-1}}=\frac{a_2}{a_1}. \tag{12.4}$$

由 (12.3) 和 (12.4) , 利用均值不等式得

$$\frac{a_{n-1}}{(n-1)\,a_n}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}\geqslant\frac{n-1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n-1}}}=\frac{(n-1)\,a_1}{a_2},$$

因此 $\frac{a_2a_{n-1}}{a_1a_n}\geqslant(n-1)^2$. 于是 $\frac{n^2}{2}\geqslant\frac{a_2a_{n-1}}{a_1a_n}\geqslant(n-1)^2$, 这意味着 $n\leqslant 3$, 也就是满足条件的多项式的次数不能超过 3. 这时很容易得到 $P(x)=x, P(x)=x^2+2x, P(x)=2x^2+x, P(x)=x^3+3x^2+2x$ 以及 $P(x)=2x^3+3x^2+x$.

*方法二*考虑 P 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素因子. 由于 P 的所有根都是有理数, P 可以写成 n 个有理系数的线性函数的乘积. 因此 P 的所有素因子都是线性函数, 且 P 可以写为

$$P\,(x)=\prod_{k=1}^{n}(b_kx+c_k),$$

其中系数 b_k,c_k 都是整数. 由于 P 的首项系数为正, 我们可以假定所有的 $b_k>0$. 由于 P 的系数都是正的, P 不可能有正根, 这意味着 $c_k\geqslant 0$. 不可能存在两个不同的 k 使得 $c_k=0$, 否则这就意味着 $a_0=a_1=0$. 因此这意味着至少有 $n-1$ 个 $c_k>0$.

现在取 $x=1$ 得

$$P\,(1)=a_n+\cdots+a_0=0+1+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}=\prod_{k=1}^{n}(b_k+c_k)\geqslant 2^{n-1},$$

这个条件说明 $n\leqslant 4$. 进一步, $\frac{n(n+1)}{2}$ 可以写成 $n-1$ 个大于 1 的数的乘积.

如果 $n=1$, 唯一的解是 $P(x)=1x+0$.

如果 $n=2$, 我们有 $P(1)=3=1\cdot 3$, 所有有一个因子必然是 x, 另外一个是 $x+2$ 或 $2x+1$. $x(x+2)=1x^2+2x+0$ 和 $x(2x+1)=2x^2+1x+0$ 都是解.

如果 $n=3$, 则 $P(1)=1\cdot 2\cdot 3$, 所以其中一个因子必然是 x, 另一个是 $x+1$, 第三个是 $x+2$ 或 $2x+1$. 这两个多项式分别为 $x(x+1)(x+2)=1x^3+3x^2+2x+0$ 和 $x(x+1)(2x+1)=2x^3+3x^2+1x+0$, 都满足条件.

而当 $n=4$ 时无解, 因为 $\frac{n(n+1)}{2}=10$ 不能被写成大于 1 的三个整数的乘积.

5. 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是二阶连续可微函数, 且对任意 x 有

$$\left|f''(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f(x)\right|\leqslant 1.$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明　*方法一*　设 $g(x)=f'(x)+xf(x)$, 则 $f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)=g'(x)+xg(x)$.

我们来证明如果 h 是一个连续可微函数使得 $h'(x)+xh(x)$ 是有界的, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$. 把这个结论中取 $h=g$, 然后取 $h=f$, 则结论可证.

设 M 是 $|h'(x)+xh(x)|$ 的一个上界, 令 $p(x)=h(x)\mathrm{e}^{x^2/2}$($\mathrm{e}^{x^2/2}$ 是一阶线性微分方程 $u'(x)+xu(x)=0$ 的积分因子), 则有

$$\left|p'(x)\right|=\left|h'(x)+xh(x)\right|\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\leqslant M\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

以及

$$|h(x)|=\left|\frac{p(x)}{e^{x^2/2}}\right|=e^{-\frac{x^2}{2}}\left|p(0)+\int_0^x p'(t)\,dt\right|\leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}\left(|p(0)|+M\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2/2}=+\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt=0$ (L'Hospital 法则), 这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.

运用一般的 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{x^2/2}}{e^{x^2/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f'(x)+xf(x))e^{x^2/2}}{xe^{x^2/2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f''(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f(x)\right)e^{x^2/2}}{\left(x^2+1\right)e^{x^2/2}}\\&\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f(x)}{x^2+1}=0.\end{aligned}$$

注意到 L'Hospital 法则适用于未定型比无穷型.

6. 给定一个群 G, 用 $G(m)$ 表示由 G 中元素的 m 次幂生成的子群. 如果 $G(m)$ 和 $G(n)$ 是交换群, 证明: $G\big(\gcd(m,n)\big)$ 也是交换群.

注 $\gcd(m,n)$ 表示 m 和 n 的最大公因数.

证明 记 $d=\gcd(m,n)$, 则易知 $\langle G(m),G(n)\rangle=G(d)$, 因此只需要证明对 $G(m)\cup G(n)$ 中任意两个元素成立, 等价地, 就是对任意两个生成元 a^m 和 b^n 成立. 考虑交换子 $z=a^{-m}b^{-n}a^mb^n$, 则

$$z=(a^{-m}ba^m)^{-n}b^n=a^{-m}(b^{-n}ab^n)^m$$

说明 $z\in G(m)\cap G(n)$. 但是 z 是 $G(d)$ 的中心. 再由关系 $a^mb^n=b^na^mz$, 很容易归纳可得

$$a^{ml}b^{nl}=b^{nl}a^{ml}z^{l^2}.$$

分别取 $l=m/d$ 和 $l=n/d$ 可得 $z^{(m/d)^2}=z^{(n/d)^2}=e$, 但这就意味着 $z=e$.

§ 12.2 第二天

1. 设 $f(x)=x^2+bx+c$, 其中 $b,c\in\mathbb{R}$. 令

$$M=\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|<1\}.$$

则显然集合 M 要么是空集, 要么是不相交开区间的并. 把这些区间长度的和记为 $|M|$. 证明

$$|M|\leqslant 2\sqrt{2}.$$

证明 记 $f(x)=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+d$, 其中 $d=c-\dfrac{b^2}{4}$. f 的最小值为 d.

如果 $d\geqslant 1$, 则对任意 x, $f(x)\geqslant 1$, 于是 $M=\varnothing$, $|M|=0$.

如果 $-1 < d < 1$, 则对任意 x, $f(x) > -1$,

$$-1 < \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + d < 1 \Leftrightarrow \left|x + \frac{b}{2}\right| < \sqrt{1-d}.$$

所以 $M = \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{1-d}, -\frac{b}{2} + \sqrt{1-d}\right)$, $|M| = 2\sqrt{1-d} < 2\sqrt{2}$.

如果 $d \leqslant -1$, 则

$$-1 < \left(x + \frac{b}{2}\right) + d < 1 \Leftrightarrow \sqrt{|d|-1} < \left|x + \frac{b}{2}\right| < \sqrt{|d|+1}.$$

所以

$$M = \left(-\sqrt{|d|+1}, -\sqrt{|d|-1}\right) \cup \left(\sqrt{|d|-1}, \sqrt{|d|+1}\right).$$

于是

$$\begin{aligned} |M| &= 2\left(\sqrt{|d|+1} - \sqrt{|d|-1}\right) = 2\frac{(|d|+1)-(|d|-1)}{\sqrt{|d|+1}+\sqrt{|d|-1}} \\ &\leqslant 2\frac{2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{1-1}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对任意 $n = 2, 3, \cdots$, $(f(x))^n$ 都是一个多项式, 问 f 是否一定是一个多项式?

解 *方法一* 答案是肯定的, 甚至只需要假定 f^2 和 f^3 是多项式即可.

设 $p = f^2, q = f^3$. 把这些多项式写成

$$p = a \cdot p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}, \ \ q = b \cdot q_1^{b_1} \cdots q_l^{b_l},$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}, a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_l$ 都是正整数, 且 $p_1, \cdots, p_k, q_1, \cdots, q_k$ 都是首一的不可约多项式. 对 $p^3 = q^2$, 由因式分解的唯一性可得 $a^3 = b^2, k = l$. 且对 $(1, \cdots, k)$ 的某个置换 $(i_1, \cdots, i_k)$, 我们有 $p_1 = q_{i_1}, \cdots, p_k = q_{i_k}$, 且 $3a_1 = 2b_{i_1}, \cdots, 3a_k = 2b_{i_k}$. 因此 $b_1, \cdots, b_l$ 都可被 3 整除. 令 $r = b^{1/3} q_1^{b_1/3} \cdots q_l^{b_l/3}$ 是一个多项式, 由于 $r^3 = q = f^3$, 所以 $f = r$.

方法二 设 $\frac{p}{q}$ 是有理函数 $\frac{f^3}{f^2}$ 的最简形式, 则它的平方的最简形式为 $\frac{p^2}{q^2}$. 另一方面, $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{f^3}{f^2}\right)^2 = f^2$ 是一个多项式, 所以 q 一定是一个常数, 于是 $f = \frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$ 是一个多项式.

3. 在所有实的 $n \times n$ 矩阵构成的线性空间中, 求出线性空间 V 的最大维数, 使得

$$\forall X, Y \in V, \quad \operatorname{tr}(XY) = 0.$$

解 如果 A 是一个非零的对称矩阵, 则 $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} A > 0)$ 是 A 中所有元素的平方和, 因此 A 中不包含任意非零的对称矩阵.

用 S 表示所有 $n \times n$ 实对称矩阵空间, 则易得 $\dim V = \frac{n(n+1)}{2}$. 由于 $V \cap S = \{0\}$, 我们有 $\dim V + \dim S \leqslant n^2$, 因此 $\dim V \leqslant n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

而对角元全为零的上三角矩阵空间的维数刚好是 $\frac{n(n-1)}{2}$, 因此所求的最大维数就是 $\frac{n(n-1)}{2}$

4. 证明: 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个三阶可微函数, 则存在实数 $\xi\in(-1,1)$ 使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

证明 设

$$g(x)=-\frac{f(-1)}{2}x^2(x-1)-f(0)\left(x^2-1\right)+\frac{f(1)}{2}x^2(x-1)-f'(0)x(x-1)(x+1).$$

易得有 $g(\pm1)=f(\pm1), g(0)=g(0)$ 以及 $g'(0)=f'(0)$.

对函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 及其导数应用 Rolle 定理. 由于 $h(-1)=f(0)=f(1)=0$, 因此存在 $\eta\in(-1,0)$ 以及 $\theta\in(0,1)$ 使得 $h'(\eta)=h'(\theta)=0$. 还有 $h'(0)=0$, 所以存在 $\xi_1\in(\eta,0), \xi_2\in(0,\theta)$ 使得 $h''(\xi_1)=h''(\xi_2)=0$. 最后, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使得 $h'''(\xi)=0$, 即

$$f'''(\xi)=g'''(\xi)=-\frac{f(-1)}{2}\cdot6-f(0)\cdot0+\frac{f(1)}{2}\cdot6-f'(0)\cdot6=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

5. 求出所有的 $r>0$, 使得只要函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可微, 且满足 $|\operatorname{grad}f(0,0)|=1$ 以及 $\operatorname{grad}f(u)-\operatorname{grad}f(v)|\leqslant|u-v|$ 对所有 $u,v\in\mathbb{R}^2$, 则 f 在圆盘 $\{u\in\mathbb{R}^2:|u|\leqslant r\}$ 的最大值恰好只在一个点取到.

解 要得到 r 的一个上界, 取 $f(x,y)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$, 则此函数满足 $\operatorname{grad}f(x,y)=(1-x,y)$, $\operatorname{grad}f(0,0)=(1,0)$ 且 $|\operatorname{grad}f(x,_1,y_1)-\operatorname{grad}f(x_2,y_2)|=|(x_2-x_1,y_2-y_1)|=|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|$.

在圆盘 $D_r=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant r^2\}$ 上,

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{r^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

如果 $r>\dfrac{1}{4}$, 则 f 的最大值为 $\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{1}{4}$, 在两个点 $\left(\dfrac{1}{2},\pm\sqrt{r^2-\dfrac{1}{4}}\right)$ 取到, 因此必要条件是 $r\leqslant\dfrac{1}{2}$.

假定 $r\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, f 在圆盘 D_r 上的两点 $u,v,u\neq v$ 处都取到最大值. 由于对任意 $z\in D_r$ 有 $|\operatorname{grad}f(z)-\operatorname{grad}f(0)|\leqslant r$, $|\operatorname{grad}f(z)|\geqslant1-r>0$. 因此 f 只能在 $D-r$ 的边界上取到其最大值, 因此 $|u|=|v|=r$ 且 $\operatorname{grad}f(u)=au, \operatorname{grad}f(v)=bv$, 其中 $a,b\geqslant0$. 由于 $au=\operatorname{grad}f(u)$ 和 $bv=\operatorname{grad}f(v)$ 都在以 $\operatorname{grad}f(0)$ 为圆心, r 为半径的圆盘内, 它们也不在圆盘 D_r 的内部. 因此 $|\operatorname{grad}f(u)-\operatorname{grad}f(v)|=|au-bv|\geqslant|u-v|$, 且这个不等式是严格的, 因为 $D\cap D_r$ 不超过一个点. 但是这就和假设 $\operatorname{grad}f(u)-\operatorname{grad}f(v)|\leqslant|u-v|$. 所以 $r\leqslant\dfrac{1}{2}$ 满足条件.

6. 证明: 如果 p,q 都是有理数, 且 $r=p+q\sqrt{7}$, 则存在一个矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\neq\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 其元素都是整数且 $ad-bc=1$, 使得

$$\frac{ar+b}{cr+d}=r.$$

证明 首先考虑 $q=0$ 的情形, 此时 r 是一个有理数. 取定正整数 t 使得 r^2t 是一个整数, 令

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+rt&-r^2t\\t&1-rt\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1, \quad \frac{ar+b}{cr+d} = \frac{(1+rt)\,r - r^2 t}{tr + (1-rt)} = r.$$

现在假定 $q \neq 0$. 设 r 在 $\mathrm{Z}[x]$ 中的极小多项式为 $ux^2 + vx + w$, 那么此多项式的另一个根为 $\bar{r} = p - q\sqrt{7}$, 所以 $v = -u(r+\bar{r}) = -2up$, $w = ur\bar{r} = u(p^2 - 7q^2)$, 判别式 $v^2 - 4uw = 7\cdot(2uq)^2$. 左边是一个整数, 意味着 $\Delta = 2uq$ 也是一个整数.

方程 $\dfrac{ar+b}{cr+d} = r$ 等价于 $cr^2 + (d-a)r - b = 0$, 这样必然是 r 的一个极小多项式, 所以

$$c = ut, \quad d - a = vt, \quad -b = wt$$

对某个 $t \neq 0$ 成立. 再结合 $ad - bc = 1$ 可得

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + 4ad = 4 + \left(v^2 - 4uw\right) t^2 = 4 + 7\Delta^2 t^2.$$

因此 $4 + 7\Delta^2 t^2$ 一定是一个完全平方数. 记 $s = a + d$, 我们需要 Diophantine(丢番图) 方程

$$s^2 - 7\Delta^2 t^2 = 4$$

的一组整数解 (s,t) 且 $t \neq 0$.

首先 s 和 t 都是偶数, 则 $a + d = s$ 与 $d - a = vt$ 也都是偶数, 则 a, d 都是整数.

对每个整数 n, 令 $(8 \pm 3\sqrt{7})^n = k_n \pm l_n\sqrt{7}$. 则 $k_n^2 - 7l_n^2 = (k_n + l_n\sqrt{7})(k_n - l_n\sqrt{7}) = (8+3\sqrt{7})^n(8-3\sqrt{7})^n = 1$, 且数列 $\{l_n\}$ 满足递推关系 $l_{n+1} = 16l_n - l_{n-1}$. 考虑 l_n 模 Δ 的余数, 共有 Δ^2 个可能的余数对 l_n, l_{n+1}, 其中有些是相同的. 从这两个角度出发, 递推关系说明余数列是周期数列. 存在无穷多个指标使得 $l_n \equiv l_0 = 0 \pmod{\Delta}$.

取一个这样的指标 n, 令 $s = 2k_n, t = \dfrac{2l_n}{\Delta}$ 即可.

13. 2006 年国际大学生数学竞赛 Odessa, Ukraine

§ 13.1 第一天

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个实值函数. 证明或否定下列论断:

(a) 如果 f 是连续的且 $\mathrm{range}(f)=\mathbb{R}$, 则 f 是单调的;

(b) 如果 f 是单调的且 $\mathrm{range}(f)=\mathbb{R}$, 则 f 是连续的;

(c) 如果 f 是单调的且 f 是连续的, 则 $\mathrm{range}(f)=\mathbb{R}$.

解

(a) 错误. 取反例 $f(x)=x^3-x$ 即可.

(b) 正确. 如果假定 f 是非递减的, 对任意实数 a, 极限 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 都存在, 且 $f(a-)\leqslant f(a+)$. 如果这两个极限相等, 则 f 在 a 处连续. 否则, 如果 $f(a-)=b<f(a+)=c$, 则当 $x<a$ 时有 $f(x)\leqslant b$, 当 $x>a$ 时, $f(x)\geqslant c$, 则 $\mathrm{range}(f)\subset(-\infty,b)\cup(c,+\infty)\cup\{f(a)\}$ 不可能是整个实数集.

(c) 错误, 取反例 $f(x)=\arctan x$ 即可.

2. 求出所有满足以下两个条件的正整数 x 的个数:

- $x<10^{2006}$;
- x^2-x 被 10^{2006} 整除.

解 *方法一* 记 $S_k=\{0<x<10^k|x^2-x\text{被}10\text{整除}\}, s(k)=|S_k|, k\geqslant 1$. 设 $\overline{x=a_{k+1}a_k\cdots a_1}$ 表示整数 $x\in S_{k+1}, k\geqslant 1$ 的十进制写法, 则显然 $y=\overline{a_k\cdots a_1}\in S_k$. 现在取定 $y=\overline{a_k\cdots a_1}\in S_k$, 把 a_{k+1} 看成变化的数字, 我们有 $x^2-x=(a_{k+1}10^k+y)^2-(a_{k+1}10^k+y)=(y^2-y)+a_{k+1}10^k(2y-1)+a_{k+1}^2 10^{2k}$. 由于 $y^2-y=10^k z$ 对某个整数 z 成立, 于是 x^2-x 被 10^{k+1} 整除当且仅当 $z+a_{k+1}(2y-1)\equiv 0 \pmod{10}$. 由于 $y\equiv 3 \pmod{10}$ 是显然不可能的, 因此适定方程只有一个解. 于是对每个 $k\geqslant 1$, 我们得到了一个集合 S_{k+1} 与 S_k 之间的一一对应. 所以 $s(2006)=s(1)=3$, 因为 $S_1=\{1,5,6\}$.

方法二 由于 $x^2-x=x(x-1)$, x 与 $x-1$ 互素, 因此其中必然有一个被 2^{2006} 整除, 一个 (可能是同一个) 要被 5^{2006} 整除. 因此 x 一定满足以下两个条件:

- $x \equiv 0$ 或 $1 \pmod{2^{2006}}$;
- $x \equiv 0$ 或 $1 \pmod{5^{2006}}$.

总共有四种情形. 由中国剩余定理, 每种情形在数 $0, 1, \cdots, 10^{2006} - 1$ 中都有唯一解. 这四种情形的解都是不同的, 因为任意两个解模 2^{2006} 或 5^{2006} 的余数都不同. 而且, 0 是不满足的, 因此存在 3 个解.

3. 设 A 是一个 $n \times n$ 整数矩阵, 整数 $b_1, \cdots, b_k$ 满足 $\det(A) = b_1 \cdots b_k$. 证明: 存在 $n \times n$ 整数矩阵 $B_1, \cdots, B_k$ 使得 $A = B_1 \cdots B_k$, 且对所有的 $i = 1, \cdots, k$ 有 $\det(B_i) = b_i$.

证明　由归纳法, 只需要考虑 $m = 2$ 的情形即可. 进一步, 我们可以对 A 左乘或右乘行列式为 1 的整数矩阵, 也不改变问题. 因此我们可以假定 A 是上三角矩阵.

引理 13.1. 设 A 是一个上三角整数矩阵, b, c 是整数满足 $A = bc$, 则存在上三角整数矩阵 B, C 使得 $\det B = b, \det C = c, A = BC$.

证明. 我们对 n 归纳. $n = 1$ 是显然的, 假定结论对 $n - 1$ 的情形成立. 定义 B_{nn} 是 b 和 A_{nn} 的最大公因数, 记住 $\dfrac{A_{nn}}{B_{nn}}$. 由于 A_{nn} 整除 bc, C_{nn} 整除 $\dfrac{b}{B_{nn}}c$, 进一步 C_{nn} 整除 c. 因此, $b' = \dfrac{b}{B_{nn}}$ 和 $c' = \dfrac{c}{B_{nn}}$ 都是整除. 设 A' 表示 A 的左上方 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵, 则 $\det A' = b'c'$. 由归纳法, 对 A' 我们可以找到矩阵 B', C' 使得 $A' = B'C'$ 且 $\det B' = b', \det C' = c'$. 只需要定义 B_{in}, C_{in} 使得 $A = BC$ 对所有的 (i, n) 元 (i<n) 都成立.

首先我们验证对所有 $i < n$, B_{ii} 和 C_{nn} 是互素的. 由于 B_{ii} 整除 b', 只需要证明 b' 和 C_{nn} 是互素的, 即

$$\gcd\left(\frac{b}{\gcd(b, A_{nn})}, \frac{A_{nn}}{\gcd(b, A_{nn})}\right) = 1,$$

而这是显然的. ☆

现在我们递归定义 B_{jn} 和 C_{jn}: 假定我们已经定义了 B_{in}, C_{in} 对所有的 $i = j+1, j+2, \cdots, n-1$ 成立, 则 B_{jn}, C_{jn} 必须满足

$$A_{jn} = B_{jj}C_{jn} + B_{j,j+1}C_{j+1,n} + \cdots + B_{jn}C_{nn}.$$

由于 B_{jj} 和 C_{nn} 互素, 我们可以取整数 C_{jn}, B_{jn} 使得上述方程成立. 对 $j = n-1, n-2, \cdots, 1$, 我们最后得到 B, C 使得 $A = BC$.

4. 设 f 是一个有理函数 (即两个实多项式的商), 且对无穷多个整数 n, $f(n)$ 都是整数, 证明; f 是一个多项式.

证明　设 S 是一个有无穷个整数的集合, 且对任意 $x \in S$, 有理函数 $f(x)$ 都是整数.

假定 $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中 p, q 分别是次数为 k, n 的多项式. 则 p, q 是齐次方程组 $p(x) = q(x)f(x), \forall x \in S, q(x) \neq 0$. 这是齐次线性方程组, 系数函数 p, q 都是有理系数. 由于它们有一个解, 它们一定有一个有理解.

因此存在有理系数多项式 p', q' 使得 $p'(x) = q'(x)f(x), \forall x \in S, q(x) \neq 0$. 如果 x 不是 p 或 q 的根, 则 $f(x) \neq 0$, 因此 $p'(x)q(x) = p(x)q'(x)$ 对 S 中有限个 p, q 的零点之外的点都成立. 因此 $p'q$ 和 pq' 在无穷多个点都相等, 意味着 $p'(x)q(x) \equiv p(x)q'(x)$. 两边除以 $q(x)q'(x)$, 我们可得 $\dfrac{p'(x)}{q'(x)} = \dfrac{p(x)}{q(x)} = f(x)$. 因此 $f(x)$ 可以表示成两个有理系数多项式的商. 乘以某个整数后, 它就可以表示成两个整系数多项式的商.

假定 $f(x) = \dfrac{p''(x)}{q''(x)}$, 其中 p'', q'' 都是整系数的. 存在多项式 s, r, 都是有理系数, 使得 $p''(x) = q''(x)s(x) + r(x)$, 且 r 的次数小于 q'' 的次数. 两边除以 $q''(x)$, 我们得到 $f(x) = s(x) + \dfrac{r(x)}{q''(x)}$. 存在整数 N, 使得 $Ns(x)$ 是整系数, 则对任意 $x \in S$, $Nf(x) - Ns(x)$ 都是整数. 但是他等于有理函数 $\dfrac{Nr}{q''}$, 其分母比分子的次数更高, 因此当 $x \to \infty$ 时, 此式趋于 0. 也就是说对所有充分大的 $x \in S$, $Nf(x) - Ns(x) = 0$, 因此 $r(x) = 0$. 所有 $r(x)$ 有无穷个零点, 也就是它恒为零. 所有 $f(x) = s(x)$, f 是一个多项式.

5. 设实数 $a, b, c, d, e > 0$ 使得 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ 且 $a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4$. 比较 $a^3 + b^3 + c^3$ 和 $d^3 + e^3$.

证明 不妨假设 $x \geqslant b \geqslant c, d \geqslant e$. 设 $c^2 = e^2 + \Delta, \Delta \in \mathbb{R}$. 则 $d^2 = a^2 + b^2 + \Delta$, 且第二个方程意味着

$$a^4 + b^4 + (e^2 + \Delta)^2 = (a^2 + b^2 + \Delta)^2 + e^4, \quad \Delta = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2 - e^2}.$$

由于 $d^2 = a^2 + b^2 - \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2 - e^2} < a^2$ 且 $a > d \geqslant e > b \geqslant c$.

考虑函数 $f(x) = a^x + b^x + c^x - d^x - e^x, x \in \mathbb{R}$. 我们将证明 $f(x)$ 只有两个零点 $x = 2$ 和 $x = 4$, 且在每个零点处都改变符号. 假定此断言不成立, 则 Rolle 定理意味着 $f'(x)$ 至少有两个不同的零点. 不失一般性, 设 $a = 1$. 则 $f'(x) = b^x \log x + c^x \log x - d^x \log x - e^x \log e, x \in \mathbb{R}$. 如果 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0, x_1 < x_2$, 则

$$b^{x_i} \log b + c^{x_i} \log c = d^{x_i} \log d + e^{x_i} \log e, \quad i = 1, 2.$$

但是由于 $1 > d \geqslant e > b \geqslant c$, 我们有

$$\frac{(-\log b)\, b^{x_2} + (-\log c)\, c^{x_2}}{(-\log b)\, b^{x_1} + (-\log c)\, c^{x_1}} \leqslant b^{x_2 - x_1} < e^{x_2 - x_1} \leqslant \frac{(-\log d)\, d^{x_2} + (-\log e)\, e^{x_2}}{(-\log d)\, d^{x_1} + (-\log e)\, e^{x_1}}$$

矛盾. 因此 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2), (2, 4), (4, +\infty)$ 上符号不变. 由于 $f(0) = 1$, 则

$$\begin{cases} f(x) > 0, & x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \\ f(x) < 0, & x \in (2, 4) \end{cases}.$$

特别地, $f(3) = a^3 + b^3 + c^3 - d^3 - e^3 < 0$.

6. 求出所有实数序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, n \geqslant 1, a_n \neq 0$, 使得下面论述成立:

如果 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 n 阶可微函数, 实数 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 满足 $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$, 则存在 $h \in (x_0, x_n)$ 使得

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \cdots + a_n f^{(n)}(h) = 0.$$

解 设 $A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. 我们将证明 $a_0,\cdots,a_n$ 要满足论述中的等式, 充要条件就是多项式 $A(x)$ 的根都是实的.

(a) 假定 $A(x)$ 的根都是实的. 我们用 I 表示恒等算子, D 表示微分算子. 对任意多项式 $P(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_nx^n$, $P(D)=p_0I+p_1D+p_2D^2+\cdots+p_nD^n$. 则论述中的等式等价于 $(A(D)f)(\xi)=0$.

首先对 $n=1$ 证明. 考虑函数 $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}x}f(x)$, 由于 $g(x_0)=g(x_1)=0$, 根据 Rolle 定理可知存在 $\xi\in(x_0,x_1)$ 使得

$$g'(\xi)=\frac{a_0}{a_1}\mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}\xi}f(\xi)+\mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}\xi}f'(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{a_0}{a_1}\xi}\left(a_0f(\xi)+a_1f'(\xi)\right)=0.$$

现在假定 $n>1$, 结论对 $n-1$ 已经成立. 令 $A(x)=(x-c)B(x)$, 其中 c 是多项式 A 的一个实根. 根据 $n=1$ 的情形, 存在 $y_0\in(x_0,x_1), y_1\in(x_1,x_2),\cdots,y_{n-1}\in(x_{n-1},x_n)$ 使得 $f'(y_j)-cf(y_j)=0$ 对所有 $j=0,1,\cdots,n-1$ 都成立. 对多项式 $B(x)$, 函数 $g=f'-cf$ 和点 $y_0,\cdots,y_{n-1}$ 应用归纳假设, 存在 $\xi\in(y_0,y_{n-1})\subset(x_0,x_n)$ 使得

$$(B(D)g)(\xi)=(B(D))(D-cI)f)(\xi)=(A(D)f)(\xi)=0.$$

(b) 假定 $u+v\mathrm{i}$ 是多项式 $A(x)$ 的一个复根, $v\neq0$. 考虑线性微分方程 $a_ng^{(n)}+\cdots+a_1g'+g=0$, 此方程的一个解是 $g_1(x)=\mathrm{e}^{ux}\sin vx$, 它由无穷个零点.

设 k 是使得 $a_k\neq0$ 的最小指标, 取 $\varepsilon>0$, 令 $f(x)=g_1(x)+\varepsilon x^k$. 如果 ε 足够小, 则 f 有所要求的根数目, 但是 $a_0f+a_1f'+\cdots+a_nf^{(n)}=a_k\varepsilon\neq0$ 处处成立.

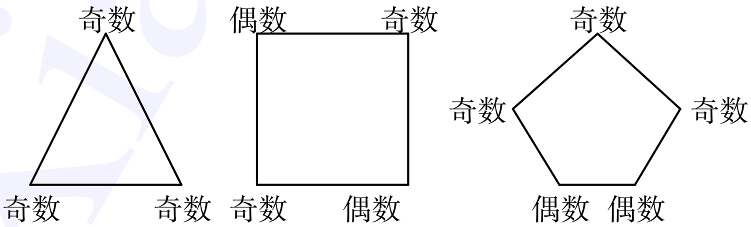
§ 13.2 第二天

1. 设 V 是一个凸 n 边形.

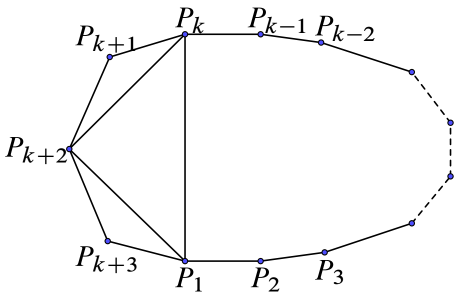
(a) 证明: 如果 n 被 3 整除, 则 V 可以被剖分成三角形, 使得 V 的每个顶点都恰好属于奇数个三角形.

(b) 证明: 如果 n 不被 3 整除, 则可以被剖分成三角形, 使得恰好有两个顶点属于偶数个三角形.

证明 对 n 用归纳法, $n=3,4,5$ 的情形如下:



现在假定上述论断对 $n=k$ 成立, 我们考虑 $n=k+3$ 的情形. 设 V 的顶点分别为 $P_1,\cdots,P_{k+3}$.



对多边形 $P_1P_2\cdots P_k$ 应用归纳假设, 如果 n 不被 3 整除, 它的三角剖分中除去两个顶点外其它顶点恰好属于奇数个三角形. 现在再加上 $\triangle P_1P_kP_{k+2}, \triangle P_kP_{k+1}P_{k+2}$ 和 $\triangle P_1P_{k+2}P_{k+3}$. 用这样的方式, 我们在点 P_1 和 P_k 处增加了两个三角形, 因此奇偶性不变. 这就完成了证明.

2. 求出所以的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意实数 $a<b$, 像 $f([a,b])$ 都是一个长度为 $b-a$ 的闭区间.

解 对任意常数 c, 函数 $f(x)=x+c$, $f(x)=-x+c$ 显然满足条件, 我们下面证明只有这两组解.

设 f 是一个这样的函数. 则 f 显然满足对任意 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$, 因此 f 是连续的. 给定 $x<y$, 设 $a,b\in[x,y]$ 使得 $f(a),f(b)$ 分别是 f 在 $[x,y]$ 上的最大和最小值. 则 $f([x,y])=[f(b),f(a)]$, 于是

$$y-x=f(a)-f(b)\leqslant|a-b|\leqslant y-x.$$

这意味着 $\{a,b\}=\{x,y\}$, 因此 f 是单调函数. 假定 f 是单调递增的, 则 $f(x)-f(y)=x-y$ 意味着 $f(x)-x=f(y)-y$, 因此 $f(x)=x+c$, c 是某个常数. 类似的, 当 f 递减时, $f(x)=-x+c$.

3. 对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 比较 $\tan(\sin x)$ 与 $\sin(\tan x)$ 的大小.

解 令 $f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$, 则

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}-\frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)}{\cos^2 x\cdot\cos^2(\tan x)}.$$

设 $0<x<\arctan\dfrac{\pi}{2}$, 余弦函数在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是凹的, 因此

$$\sqrt[3]{\cos(\tan x)\cos^2(\sin x)}<\frac{1}{3}(\cos(\tan x)+2\cos(\sin x))\leqslant\cos\left(\frac{\tan x+2\sin x}{3}\right)<\cos x,$$

其中最后一步是因为

$$\left(\frac{\tan x+2\sin x}{3}-x\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x\right)-1\geqslant 0.$$

这说明 $\cos^3 x-\cos(\tan x)\cdot\cos^2(\sin x)>0$, 所以 $f'(x)>0$, f 在区间 $\left(0,\arctan\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调增. 注意到 $4+\pi^2<16$, 于是

$$\tan\left(\sin\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)\right)=\tan\frac{\pi/2}{\sqrt{1+\pi^2/4}}>\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

这就意味着当 $x\in\left[\arctan\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan(\sin x)>1$, 于是 $f(x)>0$ 对 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 都成立.

4. 设 v_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量, $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ 使得对任意 $0 \leqslant i, j \leqslant n+1$, Euclid 范数 $|v_i - v_j|$ 都是有理数. 证明: $v_1, \cdots, v_{n+1}$ 在有理数域上是线性相关的.

证明 我们可以假定 $v_1, \cdots, v_n$ 在实数域上线性无关, 于是存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$v_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j.$$

我么来证明所有的 λ_j 都是有理数. 由

$$-2\langle v_i, v_j \rangle = \left|v_i - v_j\right|^2 - |v_i|^2 - \left|v_j\right|^2$$

可知对任意 i, j, $\langle v_i, v_j \rangle$ 都是有理数. 定义矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. 设 $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{Q}^n$, 其中 $w_i = \langle v_i, v_{n+1} \rangle$, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\langle v_i, v_{n+1} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle.$$

说明 $A\lambda = w$. 由于 $v_1, \cdots, v_n$ 是线性无关的, A 是可逆的, A^{-1} 中的所有项都是有理数, 因此 $\lambda = A^{-1} w \in \mathbb{Q}^n$, 得证.

5. 证明: 存在无穷对互素的正整数对 (m, n) 使得方程

$$(x+m)^3 = nx$$

有三个不同的正数根.

证明 令 $y = x + m$, 方程变为

$$y^3 - ny + mn = 0.$$

设上述方程的两个根是 u, w, 则第三个根为 $w = -(u+v)$. 这些根满足

$$uv + uw + vw = -(u^2 + uv + v^2) = -n, \quad 即u^2 + uv + v^2 = n,$$

且 $uvw = -uv(u+v) = mn$. 因此我们需要找到整数对 (u, v) 使得 $uv(u+v)$ 被 $u^2 + uv + v^2$ 整除. 注意到如果令 $u = kp, v = kq$, 则

$$u^2 + uv + v^2 = k^2(p^2 + pq + q^2)$$

且

$$uv(u+v) = k^3 pq(p+q).$$

取 p, q 互素, 令 $k = p^2 + pq + q^2$, 则 $\dfrac{uv(u+v)}{u^2 + uv + v^2} = p^2 + pq + q^2$.

代回最原始的等式, 我们得到

$$n = (p^2 + pq + q^2)^3, \ \ m = p^2 q + pq^2,$$

以及三个根为 $x_1 = p^3, x_2 = q^3, x_3 = -(p+q)^3$.

6. 设 $A_i, B_i, S_i (i = 1, 2, 3)$ 都是可逆的 2×2 实矩阵满足

(i) 不是所有的 A_i 都有公共实特征向量;

(ii) $A_i = S_i^{-1} B_i S_i, \forall i = 1, 2, 3$;

(iii) $A_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

证明: 存在一个可逆 2×2 实矩阵 S 使得 $A_i = S^{-1} B_i S, \forall i = 1, 2, 3$.

证明 注意到如果有某个 $A_j = \lambda I$, 则结论是平凡的, 所以假定这种情形不存在. 首先考虑某个 A_j 有两个不同的特征值, 不妨设为 A_3. 通过相似变换, 我们可以进一步假定 $A_3 = B_3 = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$. 设 $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, 则

$$a + d = \operatorname{tr} A_2 = \operatorname{tr} B_2 = a' + d'$$
$$a\lambda + d\mu = \operatorname{tr}(A_2 A_3) = \operatorname{tr} A_1^{-1} = \operatorname{tr} B_1^{-1} = \operatorname{tr}(B_2 B_3) = a'\lambda + d'\mu.$$

因此 $a = a', d = d'$, 还有 $bc = b'c'$. 现在我们不能有 $c = 0$ 或 $b = 0$, 因为此时 $(1, 0)^{\mathrm{T}}$ 或者 $(0, 1)^{\mathrm{T}}$ 将会是所以 A_j 的公共特征向量. 矩阵 $\begin{pmatrix} c' & \\ & c \end{pmatrix}$ 满足 $A_2 = S^{-1} B_2 S$, 且 S 与 $A_3 = B_3$ 可交换, 于是 $A_j = S^{-1} B_j S, \forall j$.

如果 $A_3 = B_3$ 的不同特征值不是实数, 那么由上可知, $A_j = S^{-1} B_j S$ 对某个 $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$, 除非所有的 A_j 在 $\mathbb{C}$ 上有公共特征向量. 在这种情形下, 设 $A_j v = \lambda_j v$, 那么所以的 A_j 可以同时对角化. 如果 $A_2 = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, 那么同样有 $a = a'd = d', b'c' = 0$. 现在 B_2, B_3 在 $\mathbb{C}$ 上有公共特征向量, 因此 B_1 也一样, 它们可以同时对角化. 那么不论在哪种情形下, 均有 $SA_j = B_j S$ 对某个 $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ 成立. 设 $S_0 = \mathrm{Re} S, S_1 = \mathrm{Im} S$. 将实部与虚部分开, 如果 S_0 或者 S_1 可逆, 结论已经成立. 否则, S_0 可以相似于某个 $T^{-1} S_0 T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$, 且 $(x, y)^{\mathrm{T}} \neq (0, 0)^{\mathrm{T}}$, 且所有的 A_j 有公共特征向量 $T(0, 1)^{\mathrm{T}}$, 矛盾.

剩下的情形就是所以的 A_j 都没有相异特征值, 那么这些特征值自然是实的. 借助相似变换, 我们不妨假设 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. 通过上三角矩阵的进一步相似, 我们可以假定 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & v \end{pmatrix}$, 这里 $v^2 = (\operatorname{tr} A_2)^2 = 4 \det A_2 = -4u$. 现在 $A_1 = A_3^{-1} A_2^{-1} \begin{pmatrix} -(b+v)/u & 1 \\ 1/u & \end{pmatrix}$, 因此 $\dfrac{(b+v)^2}{u^2} = (\operatorname{tr} A_1)^2 = 4 \det A_1 = -\dfrac{4}{u}$, 比较可知 $b = -2v$. 我们已经把所有的矩阵 A_j 都约化到所有元素只依赖于 u, v 的矩阵, 但是 $\det A_2$ 和 $(\operatorname{tr} A_2)^2$ 本身都具有相似不变性, 所以 B_j 也可以同时约化到同样的矩阵.

14. 2007 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 14.1 第一天

1. 设 f 是一个整系数二次多项式, 假定对任意整数 k, 证明 f 的所有系数都被 5 整除.

证明 *方法一* 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 分别代入 $x=0, x=1, x=-1$, 我么可得 $5|f(0)=c$, $5|f(1)=a+b+c$, 且 $5|f(-1)=a-b-c$. 于是 $5|f(1)+f(-1)-2f(0)=2a$, $5|f(1)-f(-1)=2b$. 因此 5 整除 $2a, 2b, c$, 结论得证.

把 $f(x)$ 看成模 5 的五元域上的多项式, 它有 5 个根, 但它的次数最多为 2, 因此 $f\equiv 0 \pmod 5$, 它的所有系数都被 5 整除.

2. 设整数 $n\geqslant 2$, 矩阵元为 $1,2,\cdots,n^2$ 的 $n\times n$ 矩阵的秩的最小和最大可能值分别为多少?

解 最小秩为 2. 考虑任意由 $1,2,\cdots,n^2$ 按某种顺序排成的矩阵 $A=(a_{ij})$. 由于交换行与列不改变矩阵的秩, 因此我们不妨假定 $1=a_{11}<a_{21}<\cdots<a_{n1}$ 且 $a_{11}<a_{12}<\cdots<a_{1n}$, 因此 $a_{n1}\geqslant n, a_{1n}\geqslant n$, 且至少有一个是严格不等式, 于是 $\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ a_{n1} & a_{nn}\end{pmatrix}<1\cdot n^2-n\cdot n=0$, 因此 $\operatorname{rank}A\geqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ a_{n1} & a_{nn}\end{pmatrix}\geqslant 2$. 令

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2\end{pmatrix},$$

则 T 的第 i 行是 $(1,2,\cdots,n)+n(i-1)\cdot(1,1,\cdots,1)$, 因此 $\operatorname{rank}T=2$, 这就证明了最下的秩为 2.

最大秩为 n, 即矩阵可以是可以满秩的. 把奇数都放在对角线上, 对角线上方只有偶数, 对角线下方随意放置数, 则行列式一定是奇数, 得证.

3. 称一个多项式 $P(x_1,\cdots,x_k)$ 是好的, 如果存在 2×2 实矩阵 $A_1,\cdots,A_k$ 使得

$$P(x_1,\cdots,x_k)=\det\left(\sum_{i=1}^{k}x_iA_i\right).$$

求出所有的 k, 使得所有的次数为 2 的 k 元齐次多项式都是好的.

解 k 的可能值为 1 和 2.

如果 $k=1$, 则 $P(x)=\alpha x^2$, 取 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$.

如果 $k=2$, 则 $P(x,y)=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy$, 取 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ -1 & \gamma\end{pmatrix}$.

现在假定 $k\geqslant 3$, 我们证明多项式 $P(x_1,\cdots,x_k)=\sum\limits_{i=0}^{k}x_i^2$ 不是好的. 假定

$$P(x_1,\cdots,x_k)=\det\left(\sum_{i=1}^{k}x_iA_i\right).$$

由于 $A_1,\cdots,A_k$ 的第一列是线性相关的, 存在第一列的一个非平凡的线性组合 $y_1A_1+\cdots+y_kA_k$ 为零. 则 $\det(y_1A_1+\cdots+y_kA_k)=0$, 但 $P(y_1,\cdots,y_k)\neq 0$, 矛盾.

4. 设 G 是一个有限群, 对任意集合 $U,V,W\subset G$, 用 N_{UVW} 表示满足 $xyz=e$ 的三元组 $(x,y,z)\in U\times V\times W$ 的个数.

假定 G 被划分为三个集合 A,B,C(即 A,B,C 是两两不交的, 且 $G=A\cup B\cup C$). 证明 $N_{ABC}=N_{CBA}$.

证明 我们从三个基本的结论着手.

设 U,V 是 G 的任意两个子集. 对每个 $x\in U,y\in V$, 存在唯一的 $z\in G$ 使得 $xyz=e$. 因此

$$N_{UVG}=|U\times V|=|U|\cdot|V|. \tag{14.1}$$

其次, 方程 $xyz=e$ 等价于 $yzx=e$ 以及 $zxy=e$. 对任意集合 $U,V,W\subset G$, 这意味着

$$\begin{aligned}\{(x,y,z)\in U\times V\times W: xyz=e\}&=\{(x,y,z)\in U\times V\times W: yzx=e\}\\&=\{(x,y,z)\in U\times V\times W: zxy=e\}\end{aligned}$$

进一步有

$$N_{UVW}=N_{VWU}=N_{WUV}. \tag{14.2}$$

再有, 如果 $U,V\subset G$ 且 W_1,W_2,W_3 是不相交的, $W=W_1\cup W_2\cup W_3$, 则对任意 $U,V\subset G$,

$$\begin{aligned}\{(x,y,z)\in U\times V\times W: xyz=e\}&=\{(x,y,z)\in U\times V\times V\times W_1: xyz=e\}\\ \cup\{(x,y,z)\in U\times V\times V\times W_2: xyz=e\}&\cup\{(x,y,z)\in U\times V\times V\times W_3: xyz=e\}\end{aligned}$$

所以

$$N_{UVW}=N_{UVW_1}+N_{UVW_2}+N_{UVW_3}. \tag{14.3}$$

根据上述结论我们可得

$$\begin{aligned}N_{ABC}&=N_{ABG}-N_{ABA}-N_{ABB}=|A|\cdot|B|-N_{BAA}-N_{BAB}\\&=N_{BAG}-N_{BAA}-N_{BAB}=N_{BAC}=N_{CBA}.\end{aligned}$$

5. 设 n 是一个正整数, $a_1, \cdots, a_n$ 是任意整数. 假定函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 满足对正整数 $k, \ell, \ell \neq 0$ 有 $\sum_{i=1}^{n} f(k + a_i \ell) = 0$. 证明 $f = 0$.

证明 定义多项式环 $\mathbb{R}[X]$ 的子集

$$\mathcal{I} = \left\{ P(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j : \sum_{j=0}^{m} b_j f(k + j\ell) = 0, \forall k, \ell \in \mathbb{Z}, \ell \neq 0 \right\}.$$

$\mathcal{I}$ 是实向量空间 $\mathbb{R}[X]$ 的子空间. 进一步, $P(X) \in \mathcal{I}$ 意味着 $X \cdot P(X) \in \mathcal{I}$. 因此 $\mathcal{I}$ 是理想, 且时非零的, 因为多项式 $R(X) = \sum_{i=1}^{n} X^{a_i} \in \mathcal{I}$. 于是 $\mathcal{I}$ 是由某个非零多项式 Q 生成的理想.

如果 Q 是常数, 则 $\mathcal{I}$ 的定义意味着 $f = 0$, 因此我们可以假定 Q 有复根 C. 再由 $\mathcal{I}$ 的定义, 多项式 $Q(X^m) \in \mathcal{I}$ 对任意正整数 m 成立. 因此 $Q(X)$ 整除 $Q(X^m)$. 这说明所有的复数 c, c^2, c^3, c^4 都是 Q 的根. 由于 Q 只有有限个根, 必存在某个 $N \geqslant 1$ 使得 $c^N = 1, Q(1) = 0$, 意味着 $P(1) = 0, \forall P \in \mathcal{I}$. 这和 $R(X) = \sum_{i=1}^{n} X * a_i \in \mathcal{I}$ 矛盾, 得证.

6. 如果多项式 $P(z)$ 的系数均为整数, 对任意单位模长的复数 z 有 $|P(z)| \leqslant 2$, 则 $P(z)$ 的非零系数可以有多少个?

解 我们证明非零系数的个数可以有 $0, 1, 2$ 个, 如多项式 $P_0(z) = 0, P_1(z) = 1, P_2(z) = 1 + z$ 分别满足条件.

现在考虑任意一个满足条件的多项式 $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 且假定它至少有两个非零系数. 通过除以 z 的幂意义合适地选择 $p(z)$ 或者 $-p(z)$, 我们不妨假定 $a_0 > 0$.

设 $Q(z) = a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$. 我们的目的是证明 $Q(z) = 0$.

考虑在单位圆盘上的复数 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ 使得 $a_n w_k^n = |a_n|$, 即

$$w_k = \begin{cases} \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}/n}, & a_n < 0 \\ \mathrm{e}^{(2k+1)\pi \mathrm{i}/n}, & a_n > 0 \end{cases} \quad (k = 0, 1, \cdots, n).$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q(w_k) = \sum_{k=0}^{n-1} Q\left(w_0 \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}/n}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j w_0^j \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2j\pi \mathrm{i}/n}\right)^k = 0.$$

取 $P(z)$ 在点 w_k 处的平均, 我们有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(w_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_0 + Q(w_k) + a_n w_k^n\right) = a_0 + |a_n|.$$

且

$$2 \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |P(w_k)| \geqslant \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} P(w_k) \right| = a_0 + |a_n| \geqslant 2,$$

这就意味着 $a_0 = |a_n| = 1$ 且 $P(w_k) = |2 + Q(w_k)|, \forall k = 2$. 因此 $Q(w_k)$ 的所有取值都在圆 $|2 + z| = 2$ 上, 而它们的和加起来为零. 这当且仅当 $Q(w_k) = 0, \forall k$ 才有可能. 则 $Q(z)$ 至少有 n 个根, 但它的次数最多为 $n - 1$, 所有 $Q(z) = 0$ 且 $P(z) = a_0 + a_n z^n$ 只有两个非零系数.

注 对 $|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)}$ 在单位圆上积分, 由 Parseval 定理得

$$|a_0|^2 + \cdots + |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 4\,\mathrm{d}t = 4. \tag{14.4}$$

因此, 非零系数不可能超过 4 个. 且如果有超过一个非零项, 则它们的系数为 ± 1.

§ 14.2 第二天

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数. 假定对任意 $c>0$, f 的图像可以通过一次平移或一次旋转得到 cf 的图像, 这时候意味着 $f(x)=ax+b$ 对某个实数 a,b 成立?

解 否, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 也满足 $c\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\log c}$.

2. 设整数 x,y,z 使得 $S=x^4+y^4+z^4$ 被 29 整除, 证明 S 被 29^4 整除.

证明 反证法, 则 x,y,z 不全被 29 整除, 不妨设 $29\nmid x$. 由于模 29 的余数构成一个域, 存在某个 $w\in\mathbb{Z}$ 使得 $xw\equiv\pmod{29}$. 则 $(xw)^4+(yw)^4+(zw)^4$ 也被 29 整除, 所以我们可以假定 $x\equiv 1\pmod{29}$.

因此, 我们需要证明 $y^4+z^4\equiv -1\mod 29$, 即 $y^4\equiv -1-z^4\mod 29$, 这是不可能的. 四次幂模 29 只有 8 种情形,

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 0^4 \mod 29,\\
1 &\equiv 1^4\equiv 12^4\equiv 17^4\equiv 28^4 \pmod{29},\\
7 &\equiv 8^4\equiv 9^4\equiv 20^4\equiv 21^4 \pmod{29},\\
16 &\equiv 2^4\equiv 5^4\equiv 24^4\equiv 27^4 \pmod{29},\\
20 &\equiv 6^4\equiv 14^4\equiv 15^4\equiv 23^4 \pmod{29},\\
23 &\equiv 3^4\equiv 7^4\equiv 22^4\equiv 26^4 \pmod{29},\\
24 &\equiv 4^4\equiv 10^4\equiv 19^4\equiv 25^4 \pmod{29},\\
25 &\equiv 11^4\equiv 13^4\equiv 16^4\equiv 18^4 \pmod{29}.
\end{aligned}$$

而 $-1-z^4$ 模 29 的余数只能是 $28,27,21,12,8,5,4$, 这些数都没有出现在上述四次幂中, 矛盾.

3. 设 C 是实数集上的一个非空有界闭子集, 且 $f:C\to C$ 是一个非递减的连续函数. 证明: 存在一点 $p\in C$ 使得 $f(p)=p$.

注 一个集合是闭是指它的补集是一列开区间的并, 一个函数是非递减的是指对任意 $x\leqslant y$, $g(x)\leqslant g(y)$.

证明 假定对任意 $x\in C$, $f(x)\neq x$. 设 $[a,b]$ 表示包含 C 的最小闭区间. 由于 C 是闭的, 则 $a,b\in C$. 根据我们的假设可知 $f(a)>a$ 且 $f(b)<b$. 令 $p=\sup\{x\in C: f(x)>x\}$. 由 C 的闭性与 f 的连续性, $f(p)\geqslant p$, 所以 $f(p)>p$. 对任意 $x>p, x\in C$, 我们有 $f(x)<x$, 因此 $f(f(p))<f(p)$, 与 f 的非递减性矛盾.

4. 设 $n > 1$ 为一个奇数, 且 $A + (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, 且

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 1, & i - j = \pm 2 \pmod n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

求 $\det A$.

解 注意到 $A = B^2$, $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i - j \equiv \pm 1 \pmod n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. 所以只需要求 $\det B$ 即可.

要求 $\det B$, 把行列式按第一行展开, 然后在分别按第一列展开.

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -(0 - 1) + (1 - 0) = 2.$$

所有 $\det A = (\det B)^2 = 4$.

5. 对每个正整数 k, 求出最小的 n_k 使得存在 $n_k \times n_k$ 矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_k$, 使得下面的条件成立.

(i) $A_1^2 = A_2^2 = \cdots = A_k^2 = O$;

(ii) 对任意 $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $A_i A_j = A_j A_I$;

(iii) $A_1 A_2 \cdots A_k \neq O$.

解 答案是 $n_k = 2^k$. 在这种情形下, 我们可以这样构造矩阵: 设 S 是由 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的所有 2^k

个子集构成的集合, V 是以 $[S]$ 为基的实向量空间, 定义 A_i 是 V 的自同构:

$$A_i[S]=\begin{cases}0, & i\in S\\ [S\cup\{i\}], & i\notin S\end{cases},\quad i=1,2\cdots,k,\quad S\subset\{1,2,\cdots,k\}.$$

则 $A_i^2=O$ 且 $A_iA_j=A_jA_i$. 进一步有

$$A_1A_2\cdots A_k[\varnothing]=[\{1,2,\cdots,k\}],$$

因此 $A_1A_2\cdots A_k\neq O$.

现在设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $n\times n$ 就满足条件的矩阵. 我们证明 $n\geqslant 2^k$. 设 v 是一个实向量满足 $A_1A_2\cdots A_kv\neq\mathbf{0}$. 用 $\mathcal{P}$ 表示 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的所有子集. 在 $\mathcal{P}$ 上定义完序 $\prec$:

$$X\prec Y\quad\Rightarrow\quad |X|\leqslant|Y|,\quad\forall X,Y\in\mathcal{P}.$$

对每个元素 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}\in\mathcal{P}$, 定义 $A_X=A_{x_1}A_{x_2}\cdots A_{x_r}$ 且 $v_X=A_Xv$, 记 $\overline{X}=\{1,2,\cdots,k\}\backslash X$ 表示 X 的补集.

现在取 $X,Y\in\mathcal{P}$ 使得 $X\precneqq Y$, 则存在 $y\in Y\backslash X=Y\cap\overline{X}$, 且

$$A_{\overline{X}}v_Y=A_{\overline{X}\backslash\{y\}}A_yA_yv_{Y\backslash\{y\}}=\mathbf{0},$$

这是因为 $A_y^2=\mathbf{0}$. 这意味着 v_X 不在 v_Y 张成的线性空间中, 因为 $A_{\overline{X}}v_X=v_{\{1,2,\cdots,k\}}\neq\mathbf{0}$. 因此, 向量组 $v_X(X\in\mathcal{P})$ 是线性无关的, 所有 $n\geqslant|\mathcal{P}|=2^k$.

6. 设 $f\neq 0$ 是一个实系数多项式. 定义多项式是序列 $f_0,f_1,f_2,\cdots$, $f_0=f$, $f_{n+1}=f_n+f_n'$, $n\geqslant 0$. 证明: 存在正整数 N, 使得对每个 $n\geqslant N$, f_n 的根都是实数.

证明 这里我们需要两个引理.

引理 14.1. 对任意多项式 g, 用 $d(g)$ 表示 g 的任意两个实数零点之间的距离 (如果 g 最多只有一个实根, 则 $d(g)=\infty$). 假定 g 和 $g+g'$ 都是次数 $k\geqslant 2$ 的多项式, 且有 k 个不同的实零点, 则 $d(g+g')\geqslant d(g)$.

证明. 设 $x_1<x_2<\cdots<x_k$ 是 g 的所有实根. 假定 a,b 是 $g+g'$ 的实根且满足 $0<b-a<d(g)$, 则 a,b 不可能是 g 的根, 且

$$\frac{g'(a)}{g(a)}=\frac{g'(b)}{g(b)}=-1.\tag{14.5}$$

由于 $\dfrac{g'}{g}$ 在 g 的连续两个零点之间是单调递减的, 因此必然对某个 j 有 $a<x_j<b$.

对所有的 $i=1,2,\cdots,k-1$, 我们有 $x_{i+1}-x_i>b-a$, 因此 $a-x_i>b-x_{i+1}$. 如果 $i<j$, 则不等式两边都是负的; 如果 $i\geqslant j$, 两边都是正的. 在任何情形都有 $\dfrac{1}{a-x_i}<$

$\dfrac{1}{b-x_{i+1}}$, 因此

$$\frac{g'(a)}{g(a)}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{a-x_i}+\underbrace{\frac{1}{a-x_k}}_{<0}<\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{b-x_{i+1}}+\underbrace{\frac{1}{b-x_1}}_{>0}=\frac{g'(b)}{g(b)},$$

这和 (14.5) 式矛盾.

现在证明原来引理. 设 f 的次数为 m, 我们对 m 用归纳法证明当 n 足够大时, f_n 有 m 个不同的实根. $m=0,1$ 是显然的, 所有假定 $m\geqslant 2$. 不失一般性我们假定 f 是首一的, 有归纳法知上述结论对 f' 成立, 忽略 f_n 的前几项, 我们可以假定对所有 n, f_n' 有 $m-1$ 个不同实零点, 记这些零点为 $x_1^{(n)}>x_2^{(n)}>\cdots>x_{m-1}^{(n)}$, 则 f_n 在 $x_1^{(n)},x_3^{(n)},x_5^{(n)},\cdots$ 处取极小值, 在 $x_2^{(n)},x_4^{(n)},x_6^{(n)},\cdots$ 处取极大值. 注意到在区间 $\left(x_{i+1}^{(n)},x_i^{(n)}\right)$ 中, 函数 $f_{n+1}'=f_n'+f_n''$ 一定有一个零点 (对函数 $\mathrm{e}^x f_n'(x)$ 用 Rolle 定理即可), 这对区间 $\left(-\infty,x_{m-1}^{(n)}\right)$ 也成立. 因此在上述 $m-1$ 个区间中, f_{n+1}' 恰好只有一个零点. 这说明

$$x_1^{(n)}>x_1^{(n+1)}>x_2^{(n)}>x_2^{(n+1)}>x_3^{(n)}>x_3^{(n+1)}>\cdots. \tag{14.6}$$

☆

引理 14.2.

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x_j^{(n)}\right)=\begin{cases}-\infty, & j\text{ 为奇数}\\ +\infty, & j\text{ 为偶数}\end{cases}.$$

证明. 设 $d=\min\{d(f'),1\}$, 由引理 1, $d(f_n')\geqslant d$ 对所有 n 成立. 取 $\varepsilon=\dfrac{(m-1)d^{m-1}}{m^{m-1}}$, 我们将证明当 j 为偶数时,

$$f_{n+1}\left(x_j^{(n+1)}\right)\geqslant f_n\left(x_j^{(n)}\right)+\varepsilon. \tag{14.7}$$

(相应的对 j 是奇数的结论也是类似证明). 要证明这个结论, 记 $f=f_n, b=x_j^{(n)}$, 且取 a 使得 $d\leqslant b-a\leqslant 1$ 使得 f' 在 (a,b) 内无零点. 定义 ξ 满足 $b-\xi=\dfrac{1}{m}(b-a)$, 则 $\xi\in(a,b)$. 下面要证明 $f(\xi)+f'(\xi)\geqslant f(b)+\varepsilon$.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}&=\sum_{i=1}^{m-1}\underbrace{\frac{1}{\xi-x_i^{(n)}}}_{<\frac{1}{\xi-a}}=\sum_{i<j}\frac{1}{\xi-x_i^{(n)}}+\frac{1}{\xi-b}+\sum_{i>j}\underbrace{\frac{1}{\xi-x_i^{(n)}}}_{<0}\\&=(m-1)\frac{1}{\xi-a}+\frac{1}{\xi-b}=0.\end{aligned}$$

不等式最后一步根据 ξ 的定义得来. 由于 $f'>0$ 且 $\dfrac{f''}{f'}$ 在区间 (a,b) 递减, 则 $f''<0, x\in(\xi,b)$. 于是

$$f(b)-f(\xi)=\int_\xi^b f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_\xi^b f'(\xi)\,\mathrm{d}t=(b-\xi)f'(\xi).$$

因此

$$\begin{aligned} f(\xi)+f'(\xi) &\geqslant f(b)-(b-\xi)f'(\xi)+f'(\xi)=f(b)+(1-(\xi-b))f'(\xi) \\ &=f(b)+\left(1-\frac{1}{m}(b-a)\right)f'(\xi)\geqslant f(b)+\left(1-\frac{1}{m}\right)f'(\xi). \end{aligned}$$

以及

$$f'(\xi)=\left|f'(\xi)\right|=m\prod_{i=1}^{m-1}\underbrace{\left|\xi-x_i^{(n)}\right|}_{\geqslant|\xi-b|}\geqslant m\left|\xi-b\right|^{m-1}\geqslant\frac{d^{m-1}}{m^{m-2}}.$$

我们得到

$$f(\xi)+f'(\xi)\geqslant f(b)+\varepsilon.$$

再结合 (14.6) 式即可证明 (14.7) , 这就证明了引理 14.2. ☆

15. 2008 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 15.1 第一天

1. 求出所有的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 当 $x-y$ 为有理数时 $f(x)-f(y)$, $f(x)-f(y)$ 也是有理数.

解 我们证明 $f(x)=ax+b, a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{R}$. 显然这样的函数满足条件.

假定函数 $f(x)$ 满足题意. 对任意 $q\in\mathbb{Q}$, 考虑函数 $g_q(x)=f(x+q)-f(x)$, 这是一个一个只取有理数的连续函数, 因此 g_q 为常数.

令 $a=f(1)-f(0), b=f(0)$, n 是任意一个正整数, 取 $r=f(1/n)-f(0)$. 由于对任意 $x\in\mathbb{R}$, $f(x+1/n)-f(x)=f(1/n)-f(0)=r$, 那么对任意 $k\geqslant 1$, 我们有

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f(0)=\sum_{i=1}^{k}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]=kr.$$

且

$$f\left(-\frac{k}{n}\right)-f(0)=-\sum_{i=1}^{k}\left[f\left(-\frac{i-1}{n}\right)-f\left(-\frac{i}{n}\right)\right]=-kr.$$

当 $k=n$ 时, $a=f(1)-f(0)=-nr$, 因此 $r=a/n$. 也就是对任意整数 k 以及正整数 n, $f(k/n)-f(0)=kr=ak/n$, 即 $f(k/n)=a\cdot k/n+b$.

因此对任意 $x\in\mathbb{Q}$, 我们都有 $f(x)=ax+b$. 由于 $f(x)$ 是连续函数, 而 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的稠密子集, 所以对任意 $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$.

2. 用 V 表示所有单变量实系数多项式构成的向量空间, 设 $P:V\to\mathbb{R}$ 是一个线性映射. 假定对任意 $f,g\in V$ 满足 $P(fg)=0$, 我们有 $P(f)=0$ 或者 $P(g)=0$. 证明存在实数 x_0, c 使得 $P(f)=cf(x_0), \forall f\in V$.

证明 我们可以假定 $P\neq 0$. 设 $f\in V$ 使得 $P(f)\neq 0$, 则 $P(f^2)\neq 0$, 于是 $P(f^2)=aP(f)$, a 为某个非零实数. 因此 $0=P(f^2-af)=P(f(f-a))$ 意味着 $P(f-a)=0$, 于是我们有 $P(a)\neq 0$. 通过尺度变换, 不妨假定 $P(1)=1$. 现在 $P(X+b)=0, b=-P(X)$. 如果将 P 用 $\hat{P}$ 代替:

$$\hat{P}(f(X))=P(f(X+b)),$$

我们可以假定 $P(X)=0$.

现在来证明 $P(X^k)=0$ 对任意 $k\geqslant 1$ 都成立. 假定此结论对 $k<n$ 成立, 我们有 $P(X^n+e)=0, e=-P(X^n)$. 由归纳假设可得

$$P((X+e)(X+1)^{n-1})=P(X^n+e)=0,$$

因此 $P(X+e)=0$(因为 $P(X+1)\neq 0$), $e=0, P(X^n)=0$, 这就完成了归纳证明. 由 $P(1)=1, P(X^k)=0, k\geqslant 1$, 我们立刻得到 $P(f)=f(0)$ 对任意 $f\in V$ 成立.

3. 设 p 是一个整系数多项式, $a_1<a_2<\cdots<a_k$ 都是整数.

(a) 证明: 存在 $a\in\mathbb{Z}$ 使得 $p(a_i)|p(a), \forall i=1,2,\cdots,k$.

(b) 是否存在 $a\in\mathbb{Z}$ 使得乘积 $p(a_1)p(a_2)\cdots p(a_k)|p(a)$?

证明 如果存在某个 i 使得 $p(a_i)=0$, 则结论显然成立, 因此假定所有的 $p(a_i)$ 非零且两两不同.

存在整数 s,t 使得 $s|p(a_1), t|p(a_2), st=[p(a_1),p(a_2)]$, 且 $(s,t)=1$.

由于 s,t 互素, 存在 $m,n\in\mathbb{Z}$ 使得 $a_1+sn=a_2+tm:=b_2$. 显然 $s|p(a_1+sn)-p(a_1)$ 且 $t|p(a_2+tm)-p(a_2)$, 所以 $st|p(b_2)$.

类似的, 我们也可以取 b_3 使得 $p(a_3)|p(b_3)$ 且 $p(b_2)|p(b_3)$, 因此也有 $p(a_1)|p(b_3)$, $p(a_2)|p(b_3)$, 归纳可知存在 $a=b_k$ 满足条件.

多项式 $p(x)=2x^2+2$ 说明问题的第二部分是不对的, 因为 $p(0)=2, p(1)=4$, 但是没有 $p(a)$ 的值被 8 整除.

4. 说一个三元非负实数组 (a_1,a_2,a_3) 优于另一个数组 (b_1,b_2,b_3) 是指三个不等式 $a_1>b_1, a_2>b_2. a_3>b_3$ 中至少成立两个. 一个数组 (x,y,z) 被称为特殊的是指 $x+y+z=1$. 求出所有的自然数 n 使得存在一个由 n 个特殊数组构成的集合 S 使得对任意给定的特殊数组, 我们都可以在 S 中找到一个更优的数组.

解 答案是 $n\geqslant 4$. 考虑一下四个特殊数组

$$\left(0,\frac{8}{15},\frac{7}{15}\right),\quad\left(\frac{2}{5},0,\frac{3}{5}\right),\quad\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right),\quad\left(\frac{2}{15},\frac{11}{15},\frac{2}{15}\right).$$

我们将证明任意特殊数组 (x,y,z) 都至少劣于其中一个数组 (a 劣于 b 是指 b 优于 a). 如果极爱的那个数组 (x,y,z) 不劣于前三个数组, 下面证明 (x,y,z) 它劣于第四个数组.

数组 (x,y,z) 不劣于 $\left(0,\frac{8}{15},\frac{7}{15}\right)$ 意味着 $y\geqslant\frac{8}{15}$ 或 $z\geqslant\frac{7}{15}$. 数组不劣于 $\left(\frac{3}{5},0,\frac{3}{5}\right)$, 则 $x\geqslant\frac{2}{5}$ 或 $z\geqslant 35$. 数组 (x,y,z) 不劣于 $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},0\right)$, 则 $x\geqslant\frac{3}{5}$ 或 $y\geqslant 25$. 由于 $x+y+z=1$, 则 $x\geqslant\frac{2}{5}, y\geqslant\frac{2}{5}$ 和 $z\geqslant\frac{7}{15}$ 不可能同时成立.

设 $x<\frac{2}{5}$, 则 $y\geqslant\frac{2}{5}, z\geqslant\frac{3}{5}$. 利用 $x+y+z=1$ 以及 $x\geqslant 0$ 我们得到 $x=0, y=\frac{2}{5}, z=\frac{3}{5}$. 数组 $\left(0,\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ 劣于 $\left(\frac{2}{15},\frac{11}{15},\frac{2}{15}\right)$.

设 $y < \dfrac{2}{5}$, 则 $x \geqslant \dfrac{2}{5}, z \geqslant \dfrac{7}{15}, x+y+z>1$, 矛盾.

设 $z < \dfrac{7}{15}$, 则 $x \geqslant \dfrac{2}{5}, y \geqslant \dfrac{8}{15}$, 再根据 $x+y+z=1$ 可知 $z \leqslant \dfrac{1}{15}$ 且 $y \leqslant \dfrac{3}{5}$. 这也说明数组 $\left(\dfrac{2}{15}, \dfrac{11}{15}, \dfrac{2}{15}\right)$ 优于 (x, y, z).

下面在证明对任意给定的三个特殊数组, 我们可以知道一个特殊数组使得它不劣于其中任何一个数组. 设集合 S 有是哪个特殊数组

$$(x_1, y_1, z_1),\ \ (x_2, y_2, z_2),\ \ (x_3, y_3, z_3).$$

记 $a(S)=\min\{x_1, x_2, x_3\}, b(S)=\min\{y_1, y_2, y_3\}, c(S)=\min\{z_1, z_2, z_3\}$. 不难验证 S_1 :

$$\begin{gathered}\left(\frac{x_1-a}{1-a-b-c}, \frac{y_1-b}{1-a-b-c}, \frac{z_1-c}{1-a-b-c}\right)\\ \left(\frac{x_2-a}{1-a-b-c}, \frac{y_2-b}{1-a-b-c}, \frac{z_2-c}{1-a-b-c}\right)\\ \left(\frac{x_3-a}{1-a-b-c}, \frac{y_3-b}{1-a-b-c}, \frac{z_3-c}{1-a-b-c}\right)\end{gathered}$$

也是一个三元特殊数组 (我们可以假定 $a+b+c<1$, 否则所有的三元数组都是相同的, 结论自明).

如果存在一个三元数组 (x, y, z) 不劣于 S_1 中的任何一个数组, 则三元数组

$$((1-a-b-c)x+a, (1-a-b-c)y+b, (1-a-b-c)z+c)$$

是特殊的, 且不劣于 S 中的任何一个数组, 且有 $a(S_1)=b(S_1)=c(S_1)=0$, 所以我们也可以假定此式对最开始的 S 也成立.

假定 S 中的某个数组有两个分量为零.

注意到 S 中剩下的两个数组有一个不劣于另一个, 这个数组也不劣于 S 中的任何数组, 因为任何特殊数组不劣于自己, 也不劣于有两个零分量的数组.

所以我们有 $a=b=c=0$, 但是我们可以假定 S 中的所有数组至多有一个零分量. 通过改变三元数组的顺序以及三元数组内元素的顺序 (三元组的元素必须要被同时移位), 我们可以使得 $x_1=y_2=z_3=0$ 且 $x_2 \geqslant x_3$. 如果 $z_2 \geqslant z_1$, 则第二个数组 $(x_2, 0, z_1)$ 不劣于 S 中的其他两个数组. 所以我们可以假定 $z_1 \geqslant z_2$. 如果 $y_1 \geqslant y_3$, 则第一个数组不劣于第二个和第三个, 所以也假定 $y_3 \geqslant y_1$. 考虑三对数组 $x_2, y_1; z_1, x_3; y_3, z_2$, 所有这些数的和为 3, 因此至少有一对数组的和不小于 1. 如果是第一对数组, 则数组 $(x_2, 1-x_2, 0)$ 不劣于 S 中的所有数组; 如果是第二个数组, 则取数组 $(1-z_1, 0, z_1)$, 而第三个数组则取数组 $(0, y_3, 1-y_3)$ 即可.

5. 是否存在有限群 G 有一个正规子群 H 使得 $|\mathrm{Aut}\, H| > |\mathrm{Aut}\, G|$?

解 答案是肯定的, H 可以是交换群 $H=\mathbb{F}_2^3$, 其中 $\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是一个二元域. H 的自同构群是一般线性群 $\mathrm{GL}_3\mathbb{F}_2$, 其元素个数为

$$(8-1)\cdot(8-2)\cdot(8-4)=7\cdot 6\cdot 4=168.$$

其中一个是置换算子 $\varphi:(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_2,x_3,x_1)$.

现在设 $T=\{a^0,a^1,a^2\}$ 是一个阶为 3 的群, 它在 H 上的表示为 $\tau(a)=\varphi$. 设 G 是半直积 $G=H\rtimes_\tau T$. 换句话说, G 是一个 24 阶群

$$G=\{ba^i:b\in H,i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ ab=\varphi(b)a\}.$$

G 有一个阶为 1 的元素 e, 7 个阶为 2 的元素 $b,b\in H,b\neq e$.

如果 $g=ba$, 我们发现 $g^2=baba=b\varphi(b)a^2\neq e$, 且

$$g^3=b\varphi(b)a^2ba=b\varphi(b)a\varphi(b)a^2=b\varphi(b)\varphi^2(b)a^3=\phi(b),$$

其中同构 $\psi:H\to H$ 定义为 $\psi:(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1+x_2+x_3)(1,1,1)$. 显然有 4 个 $b\in H$ 满足 $g^3=\varphi(b)=e$, 所有 $b\in H$ 满足 $g^6=\psi^2(b)=e$.

注意到 G 有 8 个阶为 3 的元素, 即 $ba,ba^2,b\in\operatorname{Ker}\psi$, 8 个阶为 6 的元素, 即 $ba,ba^2mb\notin\operatorname{Ker}\psi$.

取 $b_0\in H\backslash\operatorname{Ker}$, 容易看出 G 由 b_0 与 a 生成. 由于 G 的每个自同构完全由它在 b_0 和 a 上的表现所决定, 因此 G 的自同构个数不超过 $7\cdot8=56$.

6. 对 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换 $\sigma=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$, 定义 $D(\sigma)=\sum\limits_{k=1}^{n}|i_k-k|$. 设 $d=D(\sigma)$, $Q(n,d)$ 表示 $(1,2,\cdots,n)$ 的最小置换的数目, 证明当 $d\geqslant 2n$ 时, $Q(n,d)$ 是偶数.

证明 考虑 n 阶行列式

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}1&x&\cdots&x^{n-1}\\x&1&\cdots&x^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x^{n-1}&x^{n-2}&\cdots&1\end{vmatrix},$$

其中的 (i,j) 元是 $x^{|i-j|}$. 根据行列式的定义可知

$$\Delta(x)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau i_1\cdots i_n)}x^{D(i_1,\cdots,i_n)}$$

其中 S_n 是由 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有置换构成的集合, $\tau(i_1\cdots i_n)$ 表示序列 $(i_1\cdots i_n)$ 的逆序数. 所以 $Q(n,d)$ 和 $\Delta(x)$ 中 x^d 的系数相等.

下面就只需要计算 $\Delta(x)$. 从最后一行开始依次减去上一行的 x 倍可得

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}1&x&\cdots&x^{n-2}&x^{n-1}\\x&1&\cdots&x^{n-3}&x^{n-2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x^{n-2}&x^{n-3}&\cdots&1&x\\x^{n-1}&x^{n-2}&\cdots&x&1\end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 1-x^2 & \cdots & x^{n-3}-x^{n-1} & x^{n-2}-x^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-x^2 & x-x^3 \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1-x^2 \end{vmatrix} = (1-x^2)^{n-1}.$$

对 $d \geqslant 2n$, x^d 的系数是 0, 所以 $Q(n,d)$ 是偶数.

§ 15.2 第二天

1. 设 n, k 是正整数, 假定多项式 $x^{2k}-x^k+1$ 整除 $x^{2n}+x^n+1$, 证明: $x^{2k}+x^k+1$ 整除 $x^{2n}+x^n+1$.

证明　令 $f(x)=x^{2n}+x^n+1, g(x)=x^{2k}-x^k+1, h(x)=x^{2k}+x^k+1$, 复数 $x_1=\cos\left(\frac{\pi}{3k}\right)$ 不是 $g(x)$ 的根.

记 $\alpha=\frac{\pi n}{3k}$. 由于 $g(x)$ 整除 $f(x)$, $f(x_1)=g(x_1)=0$, 所以

$$0=x_1^{2n}+x_1^n+1=(\cos 2\alpha+\mathrm{i}\ \sin 2\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\ \sin\alpha)+1=0,$$

且 $(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha+\mathrm{i}\ \sin\alpha)=0$, 因此 $2\cos\alpha+1=0$, 即 $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi c, c\in\mathbb{Z}$.

设 x_2 是多项式 $h(x)$ 的根. 由于 $h(x)=\frac{x^{3k}-1}{x^k-1}$, 它的所有根都是不同的, 且其根为

$$x_2=\cos\frac{2\pi s}{3k}+\mathrm{i}\ \sin\frac{2\pi s}{3k},$$

这里 $s=3a\pm1, a\in\mathbb{Z}$, 只需要证明 $f(x_2)=0$. 我们有

$$\begin{aligned} f(x_2)=x_2^{2n}+x_2^n+1 &= (\cos(4s\alpha)+\sin(4s\alpha))+(\cos(2s\alpha)+\sin(2s\alpha))+1 \\ &= (2\cos(2s\alpha)+1)(\cos(2s\alpha)+\mathrm{i}\ \sin(2s\alpha))=0, \end{aligned}$$

这里是因为

$$\begin{aligned} 2\cos(2s\alpha)+1 &= 2\cos\left(2s\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi c\right)\right)+1 \\ &= 2\cos\frac{4\pi s}{3}+1=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}(3a\pm1)\right)+1=0. \end{aligned}$$

2. 给定两个不同的椭圆, 两个椭圆有一个共同的焦点, 证明这两个椭圆至多有两个交点.

证明　椭圆是到定点与定直线距离之比为常数 $e<1$ 的点的集合. 设两椭圆公共焦点为 F, 对应的准线分别为 l_1, l_2, X 为两椭圆的交点, 则 $e_1\cdot l_1X=FX=e_2\cdot l_2X$(这里 l_1X, l_2X 分别表示点到对应直线的距离). 方程 $e_1\cdot l_1X=FX=e_2\cdot l_2X$ 定义了两条直线, 直线方程的系数是 $e_1, \pm e_2$ 的线性组合, 由于 X 和 F 必定在准线的同一侧, 两个方程中只有一个是有用的. 所以所有可能的交点都在同一条直线上, 而直线与椭圆至多有两个交点.

3. 设 n 是一个正整数, 证明 2^{n-1} 整除

$$\sum_{0\leqslant k<n/2}\binom{n}{2k+1}5^k.$$

证明 Fibonacci 数列 F_n 通项为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

展开可得

$$F_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{3}5+\cdots+\binom{n}{l}5^{\frac{l-1}{2}}\right),$$

其中 l 是使得 $l\leqslant n$ 且 $s=\dfrac{l-1}{2}\leqslant\dfrac{n}{2}$ 的最大奇数, 因此 $F_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{s}\dbinom{n}{2k+1}5^k$, 这就证明了结论的正确性.

4. 设 $\mathbb{Z}[x]$ 表示整系数多项式环, $f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 是非常数的多项式且 $g(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中整除 $f(x)$. 证明: 如果多项式 $f(x)-2008$ 至少有 81 个不同的整数根, 则 $g(x)$ 的次数不小于 5.

证明 令 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $h(x)$ 是一个整系数多项式.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{81}$ 是多项式 $f(x)-2008$ 的不同整数根, 则 $f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=2008, i=1,2,\cdots,81$. 因此 $g(a_1),\cdots,g(a_{81})$ 是 2008 的整数因子.

因为 $2008=2^3\cdot 251(2,251$ 都是素数), 则 2008 恰有 16 个不同的整数因子 (包括负整数). 由抽屉原理可知在 $g(a_1),\cdots,g(a_{81})$ 中至少有 6 个数是相等的. 不妨设 $g(a_1)=g(a_2)=\cdots=g(a_6)=c$, 则 $g(x)-c$ 是一个非常数的多项式且至少有 6 个根, 因此 $g(x)-c$ 的次数至少是 6.

5. 设 n 是一个正整数, 考虑矩阵 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, 其中

$$\begin{cases}1, & i+1\text{为素数}\\ 0,\text{其他} & \end{cases}.$$

证明对某个整数 k 有 $|\det A|=k^2$.

证明 称一个矩阵是 B 型的, 如果它具有形式

$$\begin{pmatrix}0 & b_{12} & 0 & \cdots & b_{1,2k-2} & 0\\ b_{21} & 0 & b_{23} & \cdots & 0 & b_{2,2k-1}\\ 0 & b_{32} & 0 & \cdots & b_{3,3k-2} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ b_{2k-2,1} & 0 & b_{2k-2,3} & \cdots & 0 & b_{2k-2,2k-1}\\ 0 & b_{2k-1,2} & 0 & \cdots & b_{2k-1,2k-2} & 0\end{pmatrix}.$$

注意到每个这样的矩阵行列式都是 0, 因为它有 k 列张成的向量空间维数至多只有 $k-1$.

称一个矩阵是 C 型的, 如果它具有形式

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & c_{11} & 0 & c_{12} & \cdots & 0 & c_{1k} \\ c_{11} & 0 & c_{12} & 0 & \cdots & c_{1k} & 0 \\ 0 & c_{21} & 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2k} \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 & \cdots & c_{2k} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{k1} & 0 & c_{k2} & \cdots & 0 & c_{kk} \\ c_{k1} & 0 & c_{k2} & 0 & \cdots & c_{kk} & 0 \end{pmatrix}.$$

通过交换行与列, 我们有

$$\left|\det C'\right| = \left|\det \begin{pmatrix} C & O \\ O & C \end{pmatrix}\right| = |\det C|^2,$$

其中 C 表示以 c_{ij} 为元的矩阵. 因此任意 C 型矩阵的行列式都是一个完全平方数.

现在设 X' 表示把 A 的第一行用 $(1, 0 \cdots, 0)$ 替换以后的矩阵, 而 Y 表示把 A 的 a_{11} 元用 0 替换以后得到的矩阵, 则 $\det A = \det X' + \det Y$. 而 X' 可以表示为

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ v & X \end{pmatrix},$$

其中 X 是某个 $n-1$ 阶矩阵, v 为列向量, 则 $\det A = \det X = \det Y$. 考虑两种情形, 如果 n 是奇数, 则 X 是 C 型的, 且 Y 是 B 型的. 因此 $|\det A| = |\det X|$ 是一个完全平方数. 如果 n 是偶数, 则 X 是 B 型的, 且 Y 是 C 型的, 因此 $|\det A| = |\det Y|$ 是一个完全平方数.

6. 设 $\mathcal{H}$ 是一个无穷维 Hilbert 空间, $d > 0$. 假定 S 是 $\mathcal{H}$ 中的一个点集 (不需要可数), 满足 S 中任意两个不同点之间的距离都等于 d. 证明: 存在点 $y \in \mathcal{H}$ 使得

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{d}(x-y) : x \in S \right\}$$

是 $\mathcal{H}$ 中的正交向量组.

证明 显然, 如果 $\mathcal{B}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个正交系, 则 $\{(d/\sqrt{2})e : e \in \mathcal{B}\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个点集, 且任意两点之间的距离都是 d. 我们需要证明 S 中的每个等距点集都是一个这样的集合的平移.

首先, 如果 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S$ 是四个不同的点, 则

$$\begin{aligned} &\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle = d^2, \\ &\langle x_2 - x_1, x_3 - x_1 \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x_2 - x_1\|^2 + \|x_3 - x_1\|^2 - \|x_2 - x_3\|^2\right) = \frac{1}{2}d^2, \\ &\langle x_2 - x_1, x_4 - x_3 \rangle = \langle x_2 - x_1, x_4 - x_1 \rangle - \langle x_2 - x_1, x_3 - x_1 \rangle = \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}d^2 = 0. \end{aligned}$$

这说明对任意不同的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in S$ 以及满足整数 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$ 的整数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 具有形式 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ 的向量的数积取遍所有 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的所有这样的集合 S. 特别地, 我们可以利用我们选择的例子, 例如上面在 $\mathbb{R}^n$ 中的典型例子, 方

便地计算它们. 事实上, 该性质对有理系数 λ_i 也显然成立, 由此根据连续性, 可推出对实数系数, 当和为 0 时, 性质同样成立.

设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为有限集, 令

$$x=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

取非零向量 $z\in[\operatorname{span}(x_1-x,x_2-x,\cdots,x_n-x)]^{\perp}$, 要寻求 y, 形如 $y=x+\lambda z$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$ 为待定的数. 我们有

$$\langle x_1-y,x_2-y>=\langle x_1-x-\lambda z,x_2-x-\lambda z\rangle=\langle x_1-x,x_2-x\rangle+\lambda^2\|z\|^2.$$

$\langle x_1-x,x_2-x\rangle$ 可以如上述计算:

$$\begin{aligned}\langle x_1-x,x_2-x\rangle&=\frac{d^2}{2}\left\langle\left(\frac{1}{n}-1,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^{\top},\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}-1,\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^{\top}\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\\&=\frac{d^2}{2}\left(\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}-1\right)+\frac{n-2}{n^2}\right)=-\frac{d^2}{2n}.\end{aligned}$$

如果取 $\lambda=\dfrac{d}{\sqrt{2n}\|z\|}$, 则所有形如 $\dfrac{\sqrt{2}}{d}(x_i-y)$ 的向量互相正交; 如上, 容易验证它们的长度均为 1.

现在设 S 为无限集, 取 S 中不同点的无限序列 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, 我们断言序列

$$y_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

是 $\mathcal{H}$ 中的 Cauchy 列. 事实上, 对 $m>n$, 范数 $\|y_m-y_n\|$ 可以如上计算:

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\frac{d^2}{2}\left\|\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{m}-\frac{1}{n},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right)^{\top}\right\|\\&=\frac{d^2}{2}\left(\frac{n(m-n)^2}{m^2n^2}+\frac{m-n}{m^2}\right)\\&=\frac{d^2}{2}\frac{(m-n)(m-n+n)}{m^2n}\\&=\frac{d^2}{2}\frac{m-n}{mn}=\frac{d^2}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\to 0,\quad m,n\to\infty.\end{aligned}$$

由 $\mathcal{H}$ 的完备性, 存在极限

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n\in\mathcal{H}.$$

我们断言 y 满足题中的所有条件. 对 $m>n>p$, 其中 n,p 固定, 我们有

$$\begin{aligned}\|x_n-y_m\|&=\frac{d^2}{2}\|\left(-\frac{1}{m},\cdots,-\frac{1}{m},1-\frac{1}{m},-\frac{1}{m},\cdots,-\frac{1}{m}\right)^{\top}\|^2_{\mathbb{R}^m}\\&=\frac{d^2}{2}\left(\frac{m-1}{m^2}+\frac{(m-1)^2}{m^2}\right)\\&=\frac{d^2}{2}\frac{m-1}{m}\to\frac{d^2}{2},\quad m\to\infty,\end{aligned}$$

这表明 $\|x_n - y\| = d/\sqrt{2}$, 同样,

$$\begin{aligned}
&\langle x_n - y_m, x_p - y_m\rangle \\
=&\frac{d^2}{2}\left\langle\left(-\frac{1}{m},\cdots,-\frac{1}{m},\cdots,1-\frac{1}{m},\cdots,-\frac{1}{m}\right)^\top,\left(-\frac{1}{m},\cdots,1-\frac{1}{m},-\frac{1}{m},\cdots,-\frac{1}{m}\right)^\top\right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\
=&\frac{d^2}{2}\left[\frac{m-2}{m^2}-\frac{2}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]=-\frac{d^2}{2m}\to 0,\ \ m\to\infty
\end{aligned}$$

表明 $\langle x_n - y, x_p - y\rangle = 0$, 因此

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{d}(x_n - y) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

为向量的正交系.

这就完成了 $T = S$ 情形的证明, 即 S 可数的情形. 若 S 不可数, 令 x', x'' 为 $S\backslash T$ 中任意不同的两点, 则对集合

$$T' = \{x', x'', x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

应用上述过程, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x' + x'' + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = y.$$

满足

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{d}\left(x' - y\right), \frac{\sqrt{2}}{d}\left(x'' - y\right) : n \in \mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{\frac{\sqrt{2}}{d}(x_n - y) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

仍然是一个正交系.

这对于任意不同的 $x', x'' \in S\backslash T$ 都成立, 因此, 整个

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{d}(x - y) : x \in S\right\}$$

为 $\mathcal{H}$ 中向量的正交系, 证毕.

16. 2009 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 16.1 第一天

1. 假设 f 和 g 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 对每个有理数 r 均有 $f(r) \leqslant g(r)$. 考虑下列两种情形:

(a) f 和 g 都单调不减;

(b) f 和 g 都连续.

是否对任意实数 x 都有 $f(x) \leqslant g(x)$?

解

(a) 否, 可取反例 f 和 g 分别为 $[\sqrt{3}, +\infty)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 上的特征函数.

(b) 是, 根据假设可知 $g - f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且在 $\mathbb{Q}$ 上非负, 而有理数在实数上是稠密的, 所以 $g - f$ 在 $\mathbb{R}$ 上非负.

2. 设 A, B, C 为同阶的实方阵, A 可逆. 证明: 若 $(A - B)C = BA^{-1}$, 则 $C(A - B) = A^{-1}B$.

证明 直接计算可知 $(A - B)C = BA^{-1}$ 等价于 $AC - BC - BA^{-1} + AA^{-1} = I$, 进一步等价于 $(A - B)(C + A^{-1}) = I$. 所以 $(A - B)^{-1} = C + A^{-1}$, 这表明 $(C + A^{-1})(A - B) = I$ 同样成立, 展开即证.

3. 在一个小镇上, 没两个不是朋友的人都有一个共同的朋友, 没有一个是其他所有人的朋友. 我们用 1 到 n 为每个人编号, 设 α_i 为第 i 个人的朋友个数. 假定 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n$, 设 $k(\geqslant 3)$ 是最少的人数, 使得可以安排 k 个人围着一个圆桌坐, 任意两个相邻的人都是朋友. 试确定可能的 k 值.

解 首先定义简单无向图 G, 使得 G 的顶点对应小镇上的人, G 的边表示人之间的朋友关系. 令 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 表示 G 的顶点集合, a_i 表示 v_i 的度数, $E(G)$ 表示 G 的边集合. 基于这些符号, 这里需要找到 G 中最短圈的长度 k.

我们来计算 G 中长度为 2 的道路 (即顶点的有向三元组 (v_i, v_j, v_l), 其中 $v_i v_j, v_j v_l \in E(G)$, 允许 $i = l$) 的个数. 对每个给定的 j, 这个数字显然为 a_j^2, 因此, 总数为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n$.

现在我们证明: 存在从互异顶点的有序对到这些道路的单射 f. 对 $v_iv_j \notin E(G)$, 令 $f(v_i, v_j) = (v_i, v_l, v_j)$, 其中 l 满足 $v_iv_l, v_lv_j \in E(G)$; 对 $v_iv_j \in E(G)$, 令 $f(v_i, v_j) = (v_i, v_j, v_i)$. f 是单射, 这是因为对 $i \neq l$, (v_i, v_j, v_l) 只能是 (v_i, v_l) 的像, 而对 $i = l$, 它只能是 (v_i, v_j) 的像.

因为互异点的有序对的个数为 $n^2 - n$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant n^2 - n$, 等号成立当且仅当 f 是满射的, 即当且仅当对 $v_iv_j \notin E(G)$ 的 i, j, 恰有一个 l 使得 $v_iv_l, v_lv_j \in E(G)$; 二队 $v_iv_j \in E(G)$ 的 i, j, 则不存在这样的 l. 换句话说, 当且仅当 G 既不含 C_3 也不含 C_4(长度为 3 或 4 的圈), 即 G 为树 (无圈图), 或其最短的圈的长度至少为 5.

容易验证, 若树种任意两个顶点由长度至多为 2 的道路向量, 则这棵树是一个星 (存在一个顶点, 这个顶点与其余的每个顶点都有一条边相连). 但是 G 有 n 个顶点, 且不存在度数为 $n-1$ 的顶点, 因此, G 不是树, 所以它有圈. 另一方面, 若 G 的一个圈的长度至少为 6, 则存在两个顶点, C 中连接它们的两顿弧的长度都长于 2. 因此, 存在短于这两段弧的道路连接它们. 用这条道路替换弧, 我们得到比 C 更短的闭路. 因此, 最短的圈的长度为 5.

最后我们必须注意到至少存在一个 G 具有所描述的性质. 例如, 圈 C_5 就满足这些条件. 因此, 5 是 k 的唯一可能值.

4. 设 $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ 是复多项式, $1 = c_0 \geqslant c_1 \geqslant \cdots \geqslant c_n \geqslant 0$ 是凸的实数序列 (即对每个 $k = 1, 2, \cdots, n-1$, 有 $2c_k \leqslant c_{k-1} + c_{k+1}$), 定义多项式

$$q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + c_2 a_2 z^2 + \cdots + c_n a_n z^n.$$

证明:

$$\max_{|z| \leqslant 1} |q(z)| = \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

证明 多项式 p 和 q 在复平面是正则的, 因此由最大模原理,

$$\max_{|z| \leqslant 1} |q(z)| = \max_{|z|=1} |q(z)|.$$

p 也有同样的性质. 对任意正则函数 f, 记 $M_f = \max\limits_{|z|=1} |f(z)|$, 只需证明 $M_q \leqslant M_p$.

首先, 我们可以假设 $c_n = 0$. 事实上, 若 $c_n = 1$, 可推出 $p = q$, 结论是平凡的; 若 $c_n \neq 1$, 则 $q(z) = c_n p(z) + (1 - c_n) r(z)$, 其中 $r(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{c_j - c_n}{1 - c_n} a_j z^j$. 序列 $c_j' = \dfrac{c_j - c_n}{1 - c_n}$ 同样满足给定的条件 (它是序列 c_n 的正线性变换, 其中 $c_0' = 1$), 但 $c_n' = 0$, 因此得到 $M_r \leqslant M_p$. 从而

$$M_q = |q(z_0)| \leqslant c_n |p(z_0)| + (1 - c_n) |r(z_0)| \leqslant c_n M_p + (1 - c_n) M_r \leqslant M_p.$$

由 Cauchy 积分公式, 我们可以利用 p 在正向圆周 $S = \{|z| = 1\}$ 上的值来表达系数 a_j:

$$a_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_S \frac{p(z)}{z^{j+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{p(z)}{z^j} |\mathrm{d}z|,$$

其中 $0 \leqslant n$; 对于其他的 j, 有

$$\int_S \frac{p(z)}{z^j} |\mathrm{d}z| = 0.$$

现在利用这些等式来得到 q 的新的表达式, 其中只用到 p 在 S 上的值:

$$2\pi q(w)=\sum_{j=0}^{n}c_j\left(\int_S\frac{p(z)}{z^j}|\mathrm{d}z|\right)w^j=\int_S\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\left(\frac{w}{z}\right)^j\right)p(z)|\mathrm{d}z|.$$

对 $-n\leqslant j\leqslant -1$, 我们可以加入共轭表达式, 因为根据上面的说明, 它们为零:

$$2\pi q(w)=\sum_{j=0}^{n}c_j\left(\int_S p(z)z^{-j}|\mathrm{d}z|\right)w^j=\sum_{j=-n}^{n}c_{|j|}\left(\int_S p(z)z^{-j}|\mathrm{d}z|\right)w^j,$$

$$2\pi q(w)=\int_S\left(\sum_{j=-n}^{n}c_{|j|}\left(\frac{w}{z}\right)^j\right)p(z)|\mathrm{d}z|=\int_S K\left(\frac{w}{z}\right)p(z)|\mathrm{d}z|.$$

其中

$$K(u)=\sum_{j=-n}^{n}c_{|j|}u^j=c_0+2\sum_{j=1}^{n}c_j\mathrm{Re}(u^j),\quad u\in S.$$

现在我们来研究 $K(u)$, 这是一个实值函数, 再次利用 Cauchy 公式得

$$\int_S K(u)|\mathrm{d}u|=2\pi c_0=2\pi.$$

若

$$\int_S|K(u)||\mathrm{d}u|=2\pi$$

也成立, 则对每一个 w, 有

$$\begin{aligned}2\pi|q(w)|&=\left|\int_S K\left(\frac{w}{z}\right)p(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_S\left|K\left(\frac{w}{z}\right)\right||p(z)||\mathrm{d}z|\\&=M_p\int_S|K(u)||\mathrm{d}u|=2\pi M_p,\end{aligned}$$

结论得证. 因此, 只需证明

$$\int_S|K(u)||\mathrm{d}u|=\int_S K(u)|\mathrm{d}u|,$$

即证明 K 非负.

我们利用给定的关于 c_j 的条件 (包括 $c_n=0$), 将 K 分解成和的形式. 令 $d_k=c_{k-1}-2c_k+c_{k+1},k=1,\cdots,n$(设 $c_{n+1}=0$), 可知 $d_k\geqslant 0$. 令 $F_k(u)=\sum_{j=-k+1}^{k-1}(k-|j|)u^j$, 则简单归纳得 $K(u)=\sum_{k=1}^{n}d_kF_k(u)$. 只需证明 $F_K(u)$ 是实的, 且对于 $u\in S$, $F_k(u)\geqslant 0$. F_k/k 为 Fejér 核, 可得

$$\begin{aligned}F_k(u)&=\left(1+u+u^2+\cdots+u^{k-1}\right)\left(1+u^{-1}+u^{-2}+\cdots+u^{-(k-1)}\right)\\&=\left(1+u+u^2+\cdots+u^{k-1}\right)\overline{\left(1+u+u^2+\cdots+u^{k-1}\right)}\\&=\left|1+u+u^2+\cdots+u^{k-1}\right|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

证毕.

5. 设 n 是正整数, $\mathbb{R}^n$ 中的一个 n-单形由 $n+1$ 个不在同一个超平面上的点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$(称为顶点) 给定. 对每一个 n-单形 S, 我们用 $v(S)$ 表示 S 的体积, $C(S)$ 表示包含 S 的所有顶点的唯一球面的中心.

设 P 为 n-单形 S 内的点, S_i 为用 P 的第 i 个顶点得到的 n-单形. 证明:

$$v\left(S_0\right) C\left(S_0\right)+v\left(S_1\right) C\left(S_1\right)+\cdots+v\left(S_n\right) C\left(S_n\right)=v(S) C(S) .$$

证明 对 n 用数学归纳法. $n=1$ 时, 给定区间 $[a, b]$ 和一点 $p \in(a, b)$, 我们要验证

$$(b-p) \frac{b+p}{2}+(p-a) \frac{p+a}{2}=(b-a) \frac{b+a}{2},$$

而这显然是正确的. 现在假设结论对 $n-1$ 成立, 要证明结论对 n 也成立, 我们要证明点

$$X=\sum_{j=0}^n \frac{v\left(S_j\right)}{v(S)} O\left(S_j\right)$$

到点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 的距离相等. 设 $i \in\{0,1,2, \cdots, n\}$, 定义

$$M_i=\left\{P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_n\right\} .$$

到 M_i 所以点距离相等的点集为垂直于 M_i 中的点确定的超平面 E_i 的一条直线 h_i. 我们将证明 X 在所有的 h_i 上. 为此, 固定某一指标 i, 注意到

$$X=\frac{v\left(S_i\right)}{v(S)} O\left(S_i\right)+\frac{v(S)-v\left(S_i\right)}{v(S)} \sum_{j \neq i} \frac{v\left(S_j\right)}{v(S)-v\left(S_i\right)} O\left(S_j\right),$$

$O(S_i)$ 在 h_i 上, 因此只需证明 Y 在 h_i 上.

映射 $f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为仿射的, 如果存在点 $A, B \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(\lambda)=\lambda A+(1-\lambda) B$. 考虑从 P_i 出发通过 P 点的射线 g. 对 $\lambda>0$, 令 $P_\lambda=(1-\lambda) P+\lambda P_i$, 则 P_λ 为仿射函数, 表示射线 g 上的点. 对每个这样的 λ, 用 S_j^λ 表示把 P_λ 代替 S 的第 j 个顶点得到的 n- 单形. 点 $O(S_j^\lambda)$ 为定直线 h_j 与过由仿射函数给出的线段 $\overline{P_i P_\lambda}$ 的点且垂直于 g 的超平面的交点. 故 $O(S_j^\lambda)$ 也是仿射函数. 令 $\varphi_j=\dfrac{v(S_j)}{v(S)-v(S_i)}$, 则

$$Y_\lambda=\sum_{j \neq i} \varphi_j O\left(S_j^\lambda\right)$$

是仿射函数. 我们要证明对于所有的 λ(特别地, 取 $\lambda=1$ 即得所需的结论), $Y_\lambda \in h_i$. 只需对 λ 的两个不同值证明即可.

设 g 与包含 S 的顶点的球面相交于点 Z, 则存在 $\lambda>0$, 使得 $Z=P_\lambda$, 且对所有的 j, 有 $O(S_j^\lambda)=O(S)$, 因此 $Y_\lambda=O(S)$. 令 T 为以 M_i 为顶点集的 $(n-1)$- 单形, T_j 为用 Q 代替 T 的顶点 P_j 得到的 $(n-1)$-单形. 如果我们记 v' 为超平面 E_i 中 $(n-1)$-单形的体积, 则

$$\frac{v'\left(T_j\right)}{v'(T)}=\frac{v\left(S_j^\lambda\right)}{v(S)}=\frac{v\left(S_j^\lambda\right)}{\sum_{k \neq i} v\left(S_k^\lambda\right)}=\frac{\lambda v\left(S_j\right)}{\sum_{k \neq j} \lambda v\left(S_k\right)}=\frac{v\left(S_j\right)}{v(S)-v\left(S_i\right)}=\varphi_j . .$$

如果 p 表示到 E_i 的正交投影, 则 $P(O(S_j^\lambda))=O(T_j)$, 于是由归纳假设有 $p(Y_\lambda)=\sum\limits_{j \neq i} \varphi_j O(T_j)$ 与 $O(T)$ 相等, 所有 $Y_\lambda \in p^{-1}(O(T))=h_i$, 证毕.

§ 16.2 第二天

1. 设 l 是直线, P 是 $\mathbb{R}^3$ 中一点, S 为满足到 l 的距离不小于到 P 的距离的两倍的点 X 的集合. 如果 P 到 l 的距离 $d>0$, 求 S 的体积.

解 取适当的坐标系, 使得 l 为 z 轴, 点 P 的坐标为 $(d,0,0)$. 点 $X(x,y,z)$ 到 l 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$, 点 P 到 X 的距离为 $|PX|=\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}$. 对所有式子进行平方可以去掉平方根. 所有条件可以改为: 从 l 到 X 的距离的平方至少为 $4|PX|^2$,

$$x^2+y^2\geqslant 4\left((x-d)^2+y^2+z^2\right),$$

$$0\geqslant 3x^2-8dx+4d^2+3y^2+4z^2,$$

$$\left(\frac{16}{3}-4\right)d^2\geqslant 3\left(x-\frac{4}{3}d\right)^2+3y^2+4z^2.$$

沿 x 方向平移 $\frac{4}{3}d$ 不改变体积, 因此有

$$\frac{4}{3}d^2\geqslant 3x_1^2+3y^2+4z^2,$$

$$1\geqslant\left(\frac{3x_1}{2d}\right)^2+\left(\frac{3y}{2d}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}z}{d}\right)^2,$$

其中 $x_1=x-\frac{4}{3}d$. 这个方程定义了一个标准形式的椭球, 体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{2d}{3}\cdot\frac{2d}{3}\cdot\frac{d}{\sqrt{3}}=\frac{16\pi d^3}{27\sqrt{3}}.$$

2. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是二阶可微函数, 满足 $f(0)=1$, $f'(0)=0$, 且对于所有的 $x\in[0,+\infty)$,

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0.$$

证明: 对所有的 $x\in[0,+\infty)$,

$$f(x)\geqslant 3\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{3x}.$$

证明 我们有 $f''(x)-2f'(x)-3(f'(x)-2f(x))\geqslant 0, x\geqslant 0$. 令 $g(x)=f'(x)-2f(x)$, 则

$$g'(x)-3g(x)\geqslant 0,\quad x\geqslant 0.$$

于是 $(g(x)\mathrm{e}^{-3x})'\geqslant 0, x\geqslant 0$, 所有 $g(x)\mathrm{e}^{-3x}\geqslant g(0)=-2, x\geqslant 0$. 等价地,

$$f'(x\_2f(x)\geqslant -2\mathrm{e}^{3x}, x\geqslant 0.$$

那么同理有 $(f(x)\mathrm{e}^{-2x})'\geqslant -2\mathrm{e}^{x}$, 即 $(f(x)\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x})'\geqslant 0$, 因此 $f(x)\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}\geqslant f(0)+2=3$, 等价地,

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0,\quad x\in[0,+\infty).$$

3. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 是两个 $n \times n$ 矩阵, 满足 $A^2B + BA^2 = 2ABA$. 证明: 存在正整数 k, 使得 $(AB - BA)^k = \boldsymbol{O}$.

证明 *方法一* 取定 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 对每一个矩阵 $X \in M_n(\mathbb{C})$, 令 $\Delta X = AX - X$, 我们要证明 ΔB 是幂零的.

注意到 $A^2B + BA^2 = 2ABA$ 等价于

$$\Delta^2 B = \Delta(\Delta B) = \boldsymbol{O}. \tag{16.1}$$

Δ 是线性算子, 也是差分算子, 因此满足 Leibniz 公式:

$$\Delta(XY) = (\Delta X)Y + X(\Delta Y), \quad \forall X, Y \in M_n(\mathbb{C}).$$

归纳容易得到

$$\begin{aligned}\Delta(X_1 \cdots X_k) = (\Delta X_1) X_2 \cdots X_k \\ + \cdots + X_1 \cdots X_{j-1}(\Delta X_j) X_{j+1} \cdots X_k + X_1 \cdots X_{k-1} \Delta X_k.\end{aligned} \tag{16.2}$$

对任意矩阵 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in M_n(\mathbb{C})$. 利用等式 (16.1) 和 (16.2) 我们可得 $\Delta^k(B^k)$ 满足

$$\Delta^k(B^k) = k!(\Delta B)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{16.3}$$

那么由上式, 我们只需证明 $\Delta^n(B^n) = \boldsymbol{O}$.

首先由 (16.3) 集合条件 $\Delta^2 B = \boldsymbol{O}$ 可知对任意 $k \in \mathbb{N}$, 有 $\Delta^{k+1} B^k = \boldsymbol{O}$. 因此

$$\Delta^k(B^j) = \boldsymbol{O}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}, j < k. \tag{16.4}$$

由 Cayley-Hamilton 定理可知存在 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, 使得

$$B^n = a_0 I + a_1 B + \cdots + a_{n-1} B^{n-1},$$

再结合 (16.4) 得到 $\Delta^n B^n = \boldsymbol{O}$.

方法二 设 $X = AB - BA$. 则

$$AX - XA = \left(A^2B - ABA\right) - \left(ABA - BA^2\right) = A^2B + BA^2 - 2ABA = \boldsymbol{O},$$

即 X 与 A 可交换. 因此, 对任意 $m \geqslant 0$, 我们有

$$X^{m+1} = X^m(AB - BA) = AX^mB - X^mBA.$$

在上述等会死两边取迹可得

$$\operatorname{tr}\left(X^{m+1}\right) = \operatorname{tr}\left(A\left(X^mB\right)\right) - \operatorname{tr}\left(\left(X^mB\right)A\right) = 0.$$

而 $\operatorname{tr}(X^{m+1})$ 是 X 的特征值的 $m+1$ 次幂的和, 这就说明 X 的所有特征值均为零, 从而 X 幂零.

4. 设 p 是素数, $\mathbb{F}_p$ 是模 p 的剩余域, W 是以 $\mathbb{F}_p$ 中的元素为系数且满足下列条件的最小多项式集合:

- 多项式 $x+1$ 与 $x^{p-2}+x^{p-3}+\cdots+x^2+2x+1$ 都在 W 中,
- 对 W 中的任意多项式 $h_1(x), h_2(x)$, 多项式 $h_1(h_2(x))$ 模 x^p-x 的余式 $r(x)$ 也在 W 中.

问 W 中有多少个多项式?

解 注意到给定的两个多项式均为 $\mathbb{F}_p$ 上的双射: $f_1(x)=x+1$ 是循环 $0\to1\to2\to\cdots\to(p-1)\to0$, $f_2(x)=x^{p-2}+x^{p-3}+\cdots+x^2+2x+1$ 为对换 $0\to1$(这可以由 $f_2(x)=\dfrac{x^{p-2}-1}{x-1}+x$ 及 Fermat 小定理得到). 因此由它们复合得到的函数也是双射, 且约化模 x^p-x 不改变在 $\mathbb{F}_p$ 中的值的计算. 注意到对换和循环生成的对称群 ($f_1^k\circ f_2\circ f_2\circ f_1^{p-k}$ 为对换 $k\leftrightarrow(k+1)$, 由相邻元素的对换显然生成群 S_p), 因此得到 $\mathbb{F}_p$ 中元素的所有的 $p!$ 置换.

集合 W 中的多项式的次数至多为 $p-1$, 这表明 W 中的不同多项式不能表示同一置换. 因此, W 必包含那些次数至多为 $p-1$ 的多项式, 置换 $\mathbb{F}_p$ 中的元素. 由最小性, W 恰有 $p!$ 个元素.

5. 设 $\mathbb{M}$ 是 $m\times p$ 实矩阵向量空间. 对于向量子空间 $S\subset\mathbb{M}$, 用 $\delta(S)$ 表示由 S 中所有矩阵的所有列生成的向量空间的维数.

称向量子空间 $T\subset M$ 是一个*覆盖矩阵空间*, 若

$$\bigcup_{A\in T, A\neq \boldsymbol{O}} \operatorname{Ker} A=\mathbb{R}^p.$$

若所有包含于 T 的向量真子空间都不是覆盖矩阵空间, 则称 T 为*最小的*.

(a) 设 T 为最小覆盖矩阵空间, $n=\dim T$. 证明:

$$\delta(T)\leqslant\binom{n}{2}.$$

(b) 证明: 对于任意的正整数 n, 可以找到 m, p, 和如上的最小覆盖矩阵空间 T, 使得 $\dim T=n$, 且 $\delta(T)=\dbinom{n}{2}$.

证明

(a) 令 $X=\mathbb{R}^p, Y=\mathbb{R}^m$. 对每一个 $X\in X$, 用 $\mu_x: T\to Y$ 表示赋值映射 $\tau\to\tau(x)$. 因为 T 是一个覆盖矩阵空间, 所以对每一个 $X\in X$, 有 $\ker\mu_x>0$. 令 $U=\{x\in X:\dim\ker\mu_x=1\}$.

令 T_1 为子空间 $\{\ker\mu_x: x\in U\}$ 的族张成的空间. 我们断言 $T_1=T$, 否则令 $T'\subset T$ 为 T 的一个 $n-1$ 维子空间, 使得 $T_1\subseteq T'$, 这说明 T' 是一个覆盖矩阵空间. 事实上, 对 $x\in U$, $(\ker\mu_x)\cap T'=\ker\mu_x\neq0$. 而对 $x\notin U$, 我们有 $\dim\mu_x\geqslant2$, 因此通过计算维数, 我们得 $(\ker\mu_x)\cap T'\neq0$, 这与 T 的最小性矛盾.

现在我们可以取 $x_1, x_2,\cdots,x_n\in U$ 和 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\in T$, 使得 $\ker\mu_x=\mathbb{R}\tau_i$ 且 τ_i 形成 T 的一组基, 将 $x_1,\cdots,x_n$ 扩充到序列 $x_1,\cdots,x_d$ 以张成 X. 令 $y_{ij}=\tau_i(x_j)$, 显然 y_{ij} 张成由 T 中所有矩阵的列生成的向量空间. 我们断言 $\{y_{ij}: i>j\}$ 足以张成这个空间, 这显然表明 $\delta(T)\leqslant\dbinom{n}{2}$.

我们有 $y_{ii}=0$, 因此, 只需证明每个 $y_{ij}(i<j)$ 可以用 $y_{ki}(k=1,\cdots,n)$ 的线性组合, 这可由下面的引理推出.

引理 16.1. 对每一个 $x_0 \in U, 0 \neq \tau_0 \in \ker \mu_{x_0}, x \in X$, 存在 $\tau \in T$, 使得 $\tau_0(x) = \tau(x_0)$.

证明. 算子 μ_{x_0} 的秩为 $n-1$, 这表明对于小的 ε, 算子 $\mu_{x_0+\varepsilon x}$ 的秩也为 $n-1$. 因此, 我们可以构造一个值在 T 中的有理函数 $\tau(\varepsilon)$, 使得 $m_{x_0+\varepsilon x}(\tau(\varepsilon)) = 0$. 在 $\varepsilon = 0$ 处取导数, 得 $\mu_{x_0}(\tau_0) + \mu_x(\tau'(0)) = 0$. 因此, $\tau = -\tau'(0)$ 满足所需的性质.

我们考虑 $\binom{n}{2} \times n$ 个矩阵, 其列由 $\binom{n}{2}$ 对指标 $(i,j), 1 \leqslant i < j \leqslant n$ 所标识. 对每个 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, 考虑矩阵 $A(u)$, 其矩阵元 $A(u)_{(i,j),k}, 1 \leqslant i < j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n$ 为

$$(A(u))_{(i,j),k} = \begin{pmatrix} u_i, & k = j \\ -u_j, & k = i \\ 0, & \text{其它} \end{pmatrix}.$$

对每个 $u \neq \mathbf{0}$ 有 $\ker A(u) = \mathbb{R} \cdot u$, 所以 $S = \{A(u) : u \in \mathbb{R}^n\}$ 为一个覆盖矩阵空间, 事实上它是最小的.

另一方面, 对每个 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 我们有 $A(e_i)_{(i,j),k}$ 是 $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ 的标准正交基的第 (i,j) 个向量, 这里 e_i 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基的第 i 个向量, 这意味着 $\delta(S) = \binom{n}{2}$, 满足条件. ☆

17. 2010 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 17.1 第一天

1. 设 $0 < a < b$, 证明:

$$\int_a^b \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \geqslant \mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}.$$

证明 *方法一* 令

$$f(t) = \int_a^t \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-a^2} + \mathrm{e}^{-t^2}, \quad t > a > 0.$$

则

$$f'(t) = \left(t^2+1\right) \mathrm{e}^{-t^2} - 2t\mathrm{e}^{-t^2} = \left(t^2+1-2t\right) \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0.$$

因此 $f(t)$ 是单调递增的, 于是 $f(b) \geqslant f(a) = 0$.

方法二

$$\int_a^b \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b 2x\mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}.$$

2. 求下列级数的和:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots.$$

解 令

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+4}}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}, \quad |x| \leqslant 1.$$

我们需要求的是 $F(1)$. 显然上述级数在 $x \leqslant 1$ 时是绝对收敛的, 且

$$F^{(4)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k} = \frac{1}{1-x^4}.$$

因为 $F(0) = F'(0) = F''(0) = F'''(0) = 0$, 于是

$$F(1) = \int_{t=0}^{1} \int_{z=0}^{t} \int_{y=0}^{x} \int_{x=0}^{y} \frac{1}{1-x^4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{x=0}^{1}\frac{1}{1-x^4}\int_{y=x}^{1}\int_{z=y}^{1}\int_{t=x}^{1}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{1}{1-x^4}\frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x=\frac{\log 2}{4}-\frac{\pi}{24}.
\end{aligned}
$$

3. 已知 $x_1=\sqrt{5}, x_{n+1}=x_n^2-2, n\geqslant 1$. 计算:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

解 令 $y_n=x_n^2$, 则 $y_{n+1}=(y_n-2)^2$, 于是 $y_{n+1}-4=y_n(y_n)-4$. 归纳可知当 $n\geqslant 2$ 时, $y_n>5$, 于是 $y_{n+1}-y_n=y_n^2-5y_n+4>5$, 意味着 $y_n\to\infty$.

由 $y_{n+1}-4=y_n(y_n-4)$ 得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}{x_{n+1}}\right)^2&=\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdots y_n}{y_{n+1}}=\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdots y_n}{y_{n+1}-4}\\
&=\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdots y_{n-1}}{y_n-4}=\cdots\\
&=\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\frac{1}{y_1-4}=\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\to 1.
\end{aligned}
$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}{x_{n+1}}=1.$$

4. 设 a,b 是两个整数, n 为使得

$$\mathbb{Z}\backslash\{ax^n+by^n|x,y\in\mathbb{Z}\}$$

是有限集的正整数, 证明: $n=1$.

证明 假设 $n>1$, 注意到 n 可以用 n 的任意素数因子 p 代替. 另外, a,b 应该互素, 否则那些不能被 a,b 的最大公因数整除的数不能表示成 ax^n+by^n.

若 $p=2$, 则形如 ax^2+by^2 的数不能包含模 8 的所有可能剩余类. 若 b 为偶数, 则 ax^2 至多含 8 的是哪个剩余类, by^2 至多包含两个, 因此 ax^2+by^2 至多包含 $3\times 2=6$ 个不同的剩余类. 若 a,b 都是奇数, 则 $ax^2+by^2\equiv x^2\pm y^2 \pmod 4$, x^2+y^2 不能取模 4 的剩余类 3, 而 x^2-y^2 不能取模 4 的剩余类 2.

考虑 $p\geqslant 3$ 的情形, p 次方恰能取模 p^2 的 p 个不同的剩余类. 事实上, $(x+kp)^p$ 和 x^p 模 p^2 有相同的剩余类, 我们得到无限多个不能表示的数. 如果恰取 p^2 个剩余类, 则只有在 x 和 y 都可被 p 整除时, ax^p+by^p 可被 p^2 整除, 我们再次得到无限多个不能表示的数. 例如, 模 p^3 等于模 p^2 的数就不可表示.

5. 假设 a,b,c 是区间 $[-1,1]$ 中的实数, 满足

$$1+2abc\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

证明: 对应所有的正整数 n, 有

$$1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}.$$

证明 方法一 考虑对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&a&b\\a&1&c\\b&c&1\end{pmatrix}.$$

由条件有

$$\det(A)\geqslant 0,\quad \det\begin{pmatrix}1&a\\a&1\end{pmatrix}\geqslant 0,\quad \det\begin{pmatrix}1&b\\b&1\end{pmatrix}\geqslant 0,\quad \det\begin{pmatrix}1&c\\c&1\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

因此 A 是半正定矩阵, 所以存在一个实对称矩阵 B 使得 $A=B^2$.

设 B 的行向量为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},z,a=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y},b=\boldsymbol{y}\cdot z,c=z\cdot x$, 其中 $|\boldsymbol{x}|$ 和 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 分别表示 Euclid 范数和数量积. 用 $\boldsymbol{X}=\otimes^n x,\boldsymbol{Y}=\otimes^n x,\boldsymbol{Z}=\otimes^n z$ 表示 n 次张量幂, 均属于 $\mathbb{R}^{3^n}$, 则 $|\boldsymbol{X}|=|\boldsymbol{Y}|=|\boldsymbol{Z}|=1,\boldsymbol{X}\cdot=a^n,\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{Z}=b^n,\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{X}=c^n$. 因此矩阵

$$\begin{pmatrix}1&a^n&b^n\\a^n&1&c^n\\b^n&c^n&1\end{pmatrix}$$

作为 $\mathbb{R}^{3^n}$ 中三个向量的 Gram 矩阵是半正定的, 因此行列式 $1+2(abc)-a^{2n}-b^{2n}-c^{2n}\geqslant 0$.

方法二 将条件改写为

$$(a-bc)^2\leqslant(1-b^2)(1-c^2),$$

那么由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}&\left(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1}\right)^2\\ \leqslant&\left(|a|^{n-1}+|a|^{n-2}|bc|+\cdots+|bc|^{n-1}\right)^2\\ \leqslant&\left(1+|bc|+\cdots+|bc|^{n-1}\right)^2\\ \leqslant&\left(1+|b|^2+\cdots+|b|^{2(n-1)}\right)\left(1+|c|^2+\cdots+|c|^{2(n-1)}\right).\end{aligned}$$

结合条件得到

$$\begin{aligned}&(a-bc)^2\left(a^{n-1}+a^{n-2}bc+\cdots+b^{n-1}c^{n-1}\right)^2\\ \leqslant&\left(1-b^2\right)\left(1+b^2+\cdots+b^{2(n-1)}\right)\left(1-c^2\right)\left(1+c^2+\cdots+c^{2(n-1)}\right).\end{aligned}$$

即 $(a^n-b^nc^n)^2\leqslant(1-b^n)(1-c^n),1+2(abc)^n\geqslant a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$.

§ 17.2 第二天

1. (a) 实数序列 $x_1,x_2,\cdots$ 满足

$$x_{n+1}=x_n\cos x_n,\quad n\geqslant 1.$$

是否对应任意的初值 x_1, 序列都收敛?

(b) 实数序列 $y_1, y_2, \cdots$ 满足

$$y_{n+1} = y_n \sin y_n, \quad n \geqslant 1.$$

是否对应任意的初值 y_1, 序列都收敛?

解

(a) 否. 如取 $x_1 = \pi$, 则 $x_n = (-1)^{n-1}\pi$, 序列发散.

(b) 是. 注意到 $|y_n|$ 非递增, 因此必然收敛到某个 $a \geqslant 0$.

如果 $a = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 结论自明. 若 $a > 0$, 则 $a = \lim\limits_{n\to\infty} |y_{n=1}| = \lim\limits_{n\to\infty} |y_n \sin y_n| = a|\sin a|$, 因此 $\sin a = \pm 1$, $a = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, k 为某个非负整数. 于是 $y_{n+1} = y_n \sin y_n = |y_n||\sin y_n| \to |a|\sin|a| = a$.

2. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是正实数, 对于 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 有 $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$. 证明:

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

证明 对 n 用数学归纳法. 设零个数的乘积是 1, 则 $n = 0$ 时等式成立. 现在假设结论对 n 成立, 即

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

那么对于 $n+1$, 只要证明

$$\frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right)\frac{1}{a_{n+1} - a_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{a_{n+1}}.$$

要证明此式, 再次利用归纳法. $n = 0$ 时, 要证

$$\frac{1}{a_0}\frac{1}{a_1 - a_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\frac{1}{a_1}.$$

乘以 $a_0 a_1 (a_1 - a_0)$, 上式等价于

$$a_1 \leqslant (a_0 + 1)(a_1 - a_0) \Leftrightarrow a_0 \leqslant a_0 a_1 - a_0^2 \Leftrightarrow 1 \leqslant a_1 - a_0.$$

要完成归纳证明, 只需证明

$$\left(1 + \frac{1}{a_{n+1} - a_0}\right)\frac{a_{n+1} - a_0}{a_{n+2} - a_0} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}.$$

乘以 $(a_{n+2} - a_0)a_{n+2}$, 等价于

$$\begin{aligned}&(a_{n+1} - a_0 + 1)\, a_{n+2} \leqslant (a_{n+1} + 1)\,(a_{n+2} - a_0)\\ \Leftrightarrow\, & a_0 \leqslant a_0 a_{n+2} - a_0 a_{n+1} \Leftrightarrow 1 \leqslant a_{n+2} - a_{n+2}.\end{aligned}$$

注 1 由证明过程易证, 等号成立当且仅当对所有的 k, $a_{k+1} - a_k = 1$.

注 2 题中的结论是等式

$$1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k}\prod_{i\neq k}\left(1 + \frac{1}{x_i - x_k}\right)\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)$$

的直接推论.

3. 用 S_n 表示序列 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的置换群. 设 G 是 S_n 的子群, 满足对于每一个 $\pi\in G\backslash\{e\}$, 存在唯一的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $\pi(k)=k$(e 是群 S_n 的单位元). 证明: 这个 k 对于所有的 $\pi\backslash\{e\}$ 都是一样的.

证明 考虑 G 在集合 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的作用. 令

$$G_x=\{g\in G:g(x)=x\},\ \ Gx=\{g(x):g\in G\}$$

分别是该作用下 $x\in X$ 的稳定子和轨道. 题中的条件表明

$$G=\bigcup_{x\in X}G_x \tag{17.1}$$

和

$$G_x\cap G_y=\{c\},\ \ \forall x\neq y. \tag{17.2}$$

我们需要证明对于某个 $x\in X, G_x=G$.

设 $Gx_1,\cdots,Gx_k$ 为 G 作用下的不同的轨道, 则我们可以将 (17.1) 写成

$$G=\bigcap_{i=1}^{k}\bigcap_{g\in Gx_i}G_y. \tag{17.3}$$

熟知

$$|Gx|=\frac{|G|}{|G_x|}. \tag{17.4}$$

又注意到若 $y\in Gx$, 则 $Gy=Gx$, 所以 $|Gy|=|Gx|$. 因此

$$|G_x|=\frac{|G|}{|Gx|}=\frac{|G|}{|Gy|}=|G_y|,\ \ y\in Gx. \tag{17.5}$$

结合 (17.3) , (17.2) , (17.4) 和 (17.5) , 我们得

$$|G|-1=|G\backslash\{e\}|=\left|\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{y\in Gx_i}G_y\backslash\{e\}\right|=\sum_{i=1}^{k}\frac{|G|}{|G_{x_i}|}\left(|G_{x_i}|-1\right).$$

所以

$$1-\frac{1}{|G|}=\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{|G_{x_i}|}\right). \tag{17.6}$$

若存在 $i,j\in\{1,\cdots,k\}$, 使得 $|G_{x_i}|,|G_{x_j}|\geqslant 2$, 则有

$$\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{|G_{x_i}|}\right)\geqslant\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)=1>1-\frac{1}{|G|},$$

与 (17.6) 矛盾, 因此, 我们可以假设

$$|G_{x_1}|=\cdots=\left|G_{x_{k-1}}\right|=1,$$

则由 (17.6) , 我们得到 $|G_{x_k}|=|G|$, 所以 $G_{x_k}=G$.

4. 设 A 是二元域上的 $m \times m$ 对称矩阵, 其对角元素全为零. 证明: 对于每一个正整数 n, 矩阵 A^n 的每一列都有零元素.

证明　用 $e_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 表示 $\mathbb{F}_2$ 上的 m 维标准单位向量组, 再设 u 是元素全为 1 的向量. A^n 的第 k 列为 $A^n e_k$. 因此命题可改成: 对于所有的 $1 \leqslant k \leqslant m$ 和 $n \geqslant 1$, $A^n e_k \neq u$.

对于每一对向量 $x = (x_1, \cdots, x_m)$ 和 $y = (y_1, \cdots, y_m)$, 定义双线性型 $(x, y) = x^{\mathrm{T}} y = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m$. (x, y) 具有数量积的所有基本性质 (除了 $(x, x) = 0$ 意味着 $x = 0$). 另外, 对每一个向量 $x \in \mathbb{F}_2^m$, 我们有 $(x, x) = (x, u)$.

容易验证对所有的向量 w, 有 $(w, Aw) = w^{\mathrm{T}} A w = 0$, 这是因为 A 是对称的且对角元素全为零.

引理 17.1. 设向量 $v \in \mathbb{F}_2^m$, 对某个 $n \geqslant 1$ 满足 $A^n v = u$, 则 $(v, v) = 0$.

证明. 对 n 用数学归纳法. 对奇数 n, 可直接证明引理. 设 $n = 2k + 1$, $w = A^k v$, 则

$$(v, v) = (v, u) = \left(v, A^n v\right) = v^{\mathrm{T}} A^n v = v^{\mathrm{T}} A^{2k+1} v = \left(A^k v, A^{k+1} v\right) = (w, Aw) = 0.$$

下面设 n 为偶数, $n = 2k$, 且对于所有小的 n 结论成立. 令 $w = A^k v$, 则 $A^k w = A^n v = u$, 因此由归纳假设有 $(w, w) = 0$. 所以

$$(v, v) = (v, u) = v^{\mathrm{T}} A^n v = v^{\mathrm{T}} A^{2k} v = \left(A^k v\right)^{\mathrm{T}} \left(A^k v\right) = (w, w) = 0.$$

引理得证. ☆

现在假设对某个 $k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 和正整数 n, 有 $A^n e_k = u$. 根据引理, 我们应该能得到 $(e_k, e_k) = 0$, 但这是不可能的, 因此 $(e_k, e_k) = 1 \neq 0$.

5. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和实数 $a < b$ 满足对于所有的 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) = 0$. 证明: 若对于每一个素数 p 和每一个实数 y, 有

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(y + \frac{k}{p}\right) = 0,$$

则对于所有的 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

证明　设 $N > 1$ 为待定的正数, 考虑实多项式集合

$$\mathcal{P}_N = \left\{ c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \in \mathbb{R}[x] \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} c_k f\left(x + \frac{k}{N}\right) = 0 \right\}.$$

注意到 $0 \in \mathcal{P}_N$, $\mathcal{P}_N$ 中任意元素的线性组合也在 $\mathcal{P}_N$, 我们有 $xP(x) \in \mathcal{P}_N$. 因此, $\mathcal{P}_N$ 为环 $\mathbb{R}[x]$ 的一个理想.

根据题中条件, 对于 N 的每一个素因子, 我们有

$$\frac{x^N - 1}{x^{N/p} - 1} \in \mathcal{P}_N.$$

因为 $\mathcal{R}[x]$ 是一个主理想环 (根据 Euclid 算法), 这些多项式的最大公因式为 $\mathcal{P}_N$ 中的元素. 多项式

$$\frac{x^N-1}{x^{N/p}-1}$$

的复根是那些次数不能整除 N/P 的 N 次单位根. 最大公因子的根是这些集合的交, 可以看出这个交由 N 次单位原根组成. 因此

$$\gcd\left\{\left.\frac{x^N-1}{x^{N/p}-1}\right| p\,|N\right\}=\Phi_N(x)$$

是 N 次分圆多项式. 因此, $\Phi_N\in\mathcal{P}_N$, 这个多项式的次数为 $\varphi(N)$.

现在选取 N 使得 $\varphi(N)/N<b-a$, 而我们知道 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\varphi(N)}{N}=0$, 所以存在这样的 N 值. 令 $\Phi_N(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{\varphi(N)(x)}x^{\varphi(N)}$, 其中 $a_{\varphi(N)}=1, |a_0|=1$. 根据 $\mathcal{P}_N$ 的定义, 我们有

$$\sum_{k=0}^{\varphi(N)}a_kf\left(x+\frac{k}{N}\right)=0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

若 $x\in\left[b,b+\dfrac{1}{N}\right)$, 则

$$f(x)=-\sum_{k=0}^{\varphi(N)-1}a_kf\left(x+\frac{\varphi(N)-k}{N}\right)=0.$$

等式右边所有的 $x-\dfrac{\varphi(N)-k}{N}$ 在 (a,b) 中, 因此, 等式右边为 0, 所以对于所有的 $x\in\left[b,b+\dfrac{1}{N}\right)$ 有 $f(x)=0$. 同理可得, 对于所有的 $x\in\left(a-\dfrac{1}{N},a\right]$, $f(x)=0$. 因此在区间 $\left(a-\dfrac{1}{N},b+\dfrac{1}{N}\right)$ 中, $f=0$. 继续采用这种方式, 可得 f 在实数域上恒为零.

18. 2011 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 18.1 第一天

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数. 点 x 称为一个阴影点是指如果存在点 $y>x$ 使得 $f(y)>f(x)$. 设 $a<b$ 是实数且假定

- 开区间 $I=(a,b)$ 内的所有点都是阴影点;
- a,b 不是阴影点.

证明:

(a) 对所有 $a<x<b$ 都有 $f(x)\leqslant f(b)$;

(b) $f(a)=f(b)$.

证明

(a) 反证法, 假定存在点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>f(b)$. 首先 f 在 $[c,b]$ 内有最大值 m, 这个最大值在某个点 $d\in[c,b]$. 由于 $f(d)=\max\limits_{f}(x)\geqslant f(c)>f(b)$, 我们有 $d\neq b$, 所有 $d\in[c,b)\subset(a,b)$. 区间 (a,b) 内的点都是阴影点, 因此存在某个 $y>d$ 使得 $f(y)>f(d)=m$, 因此得到不等式 $f(y)>f(d)>f(b)$.

- 如果 $y>d$, 则 $f(y)>f(b)$, 这与 b 不是阴影点矛盾;
- 如果 $y\leqslant b$, 则 $y\in(d,b]\subset[c,b]$, 这和 $f(d)=m$ 是最大值矛盾.

(b) 由于 $a<b$ 且 a 不是阴影点, 我们有 $f(a)\geqslant f(b)$. 那么由 (a), 我们已经得到 $f(x)\leqslant f(b)$ 对所有 $x\in(a,b)$ 都成立, 那么由连续性可知

$$f(a)=\lim_{x\to a^+}f(x)\leqslant f(b).$$

因此 $f(a)=f(b)$.

2. 是否存在一个 3×3 实矩阵 A 使得 $\operatorname{tr}(A)=0$ 且 $A^2+A^{\mathrm{T}}=I$?

解 答案是否定的. 假定 $\operatorname{tr}(A)=0$ 且 $A^2+A^{\mathrm{T}}=I$. 取转置, 我们有

$$A=I-\left(A^2\right)^{\mathrm{T}}=I-\left(A^{\mathrm{T}}\right)^2=I-\left(I-A^2\right)^2=2A^2-A^4,$$

$$A^4-2A^2+A=\boldsymbol{O}.$$

多项式 $x^4-2x^2+x=x(x-1)(x^2+x-1)$ 的根为 $0,1,\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, A 的特征值只可能是这些数, A^2 的特征值只可能是 $0,1,\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

由 $\operatorname{tr}(A)=0$, 所有特征值的和为零, 而 $\operatorname{tr}(A^2)=\operatorname{tr}(I-A^{\mathbb{T}})=1$, 容易验证这两种情形不可能同时出现.

3. 设 p 是一个素数. 称一个整数 n 是有趣的是指

$$x^n-1=(x^p-x+1)f(x)+pg(x)$$

对某整系数多项式 f 和 g 成立.

(a) 证明数 p^p-1 是有趣的;

(b) 对怎样的 p, p^p-1 是最小的有趣数?

解

(a) n 是有趣的, 当且仅当 x^n-1 在多项式环 $\mathbb{F}_p$ 上被 x^p-x+1 整除. 我们有 $x^p\equiv x-1$, 则

$$x^{p^2}\equiv\left(x^p\right)^p\equiv(x-1)^p\equiv x^p-1\equiv x-2,$$

$$x^{p^3}\equiv\left(x^{p^2}\right)^p\equiv(x-2)^p\equiv x^p-2^p\equiv x-2^p-1\equiv x-3.$$

因此由 Fermat 小定理, 最后得到 $x^{p^p}\equiv x-p\equiv x$,

$$x\left(x^{p^p-1}-1\right)\equiv 0.$$

由于多项式 x^p-x+1 与 x 互素, 这就意味着 $x^{p^p-1}-1\equiv 0$.

(b) 注意到

$$x^{1+p+p^2+\cdots+p^{p-1}}=x\cdot x^p\cdot x^{p^2}\cdots x^{p^{p-1}}\equiv x\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-(p-1))=x^p-x\equiv -1,$$

因此 $x^{2\left(1+p+p^2+\cdots+p^{p-1}\right)}\equiv 1$, $a=x^{2\left(1+p+p^2+\cdots+p^{p-1}\right)}$ 是一个有趣数.

如果 $p>3$, 则 $a=\dfrac{2}{p-1}p^p-1$, 所以我们有一个有趣数小于 p^p-1. 另一方面, 我们证明 $p=2$ 和 $p=3$ 确实满足要求. 首先注意到 $\gcd(x^m-1,x^k-1)=x^{\gcd(m,k)}-1$, 即对每一个固定的 p, 两个有趣数的最大公因数也是有趣数, 因此最小的有趣数整除所有的有趣数. 特别地, 最小的有趣数是 p^p-1 的一个因子.

对 $p=2$, 我么有 $p^p-1=3$, 所以最小的有趣数是 1 或 3. 但是 x^2-x+1 并不整除 $x-1$, 所以 1 不是有趣数, 则最小的有趣数是 3.

对 $p=3$, 我们有 $p^p-1=26$, 它的因子是 $1,2,13,26$. 数 1 和 2 太小, 以至于 $x^13\equiv -1\not\equiv +1$. 所以 $1,2,13$ 都不是有趣数, 于是 26 是最小的有趣数.

因此, p^p-1 是最小的有趣数当且仅当 $p=2$ 或 $p=3$.

4. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是非空有限集. 定义函数

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^{k-1}t^{\left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}\right|}.$$

证明: f 在 $[0,1]$ 上是非递减的.

证明　令 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 考虑 Ω 的任意随机子集: 对每个 $x\in\Omega$, X 以概率 t 取元素 x, 且各个元素的选取相互独立.

则对每个集合 $C\subset\Omega$, 我们有

$$\mathbb{P}(C\subset X)=t^{|C|}.$$

由容斥原理,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((A_1\subset X)\cup(A_2\subset X)\cup\cdots\cup(A_n\subset X))=t^{|C|}\\=&\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^{k-1}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}\subset X\right)\\=&\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^{k-1}t^{\left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}\right|}.\end{aligned}$$

概率 $\mathbb{P}((A_1\subset X)\cup(A_2\subset X)\cup\cdots\cup(A_n\subset X))=t^{|C|}$ 是关于 t 的非递减函数.

5. 设 n 是一个正整数, V 是二元域上的一个 $(2n-1)$ 维向量空间. 证明: 对任意向量 $v_1,\cdots,v_{4n-1}\in V$, 存在一列子标集 $1\leqslant i_1<\cdots<i_{2n}\leqslant 4n-1$ 使得 $v_{i_1}+\cdots+v_{i_{2n}}=0$.

证明　令 $V=\operatorname{aff}\{v_1,\cdots,v_{4n-1}\}$, 结论 $v_{i_1}+\cdots+v_{i_{2n}}=0$ 具有具有平移不变性, 可以用 $v_1-a,\cdots,v_{4n-1}-a$ 代替各个向量, 我们可以不妨假定 $0\in V$. 记 $d=\dim V$.

引理 18.1. 通过置换向量可以使得 $v_1+v_2, v_3+v_4,\cdots,v_{2d-1}+v_{2d}$ 构成 V 的一组基.

证明. 我们对 d 进行归纳. 如果 $d=0$ 或 $d=1$, 则结论显然.

首先取向量 v_1 使得 $\operatorname{aff}\{v_2,v_3,\cdots,v_{4n-1}\}=V$. 这是可能的, 因为 V 由某 $d+1$ 个向量生成, 而 $d+1\leqslant 2n<4n-1$. 接着再选取向量 v_2 使得 $v_2\neq v_1$(由于 $d>0$, 并不是所有向量相同).

现在令 $\ell=\{0,v_1+v_2\}$, $V'=V/\ell$. 对任意 $w\in V$, 记 $\tilde{w}=\ell+w=\{w,w+v_1+v_2\}$ 表示包含 w 的商空间类. 对向量 $\tilde{v}_3,\tilde{v}_4,\cdots,\tilde{v}_{4n-1}$. 由于 $\dim V'=d-1$, 可以通过置换向量以后使得 $\tilde{v}_3+\tilde{v}_4,\cdots,\tilde{v}_{2d-1}+\tilde{v}_{2d}$ 构成 V' 的一组基. 则 $v_1+v_2,v_3+v_4,\cdots,v_{2d-1}+v_{2d}$ 构成 V 的一组基. ☆

现在我们可以假定 $v_1+v_2,v_3+v_4,\cdots,v_{2d-1}+v_{2d}$ 是 V 的一组基, 因此 $w+\varepsilon_1(v_1+v_2)+\cdots+\varepsilon_d(v_{2d-1}+v_{2d})=0$ 对某组 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d\in\mathbb{F}_2$, 因此

$$\sum_{i=1}^{d}((1-\varepsilon_i)v_{2i-1}+\varepsilon_i v_{2i})+\sum_{i=2d+1}^{2n+d}v_i=0.$$

左边刚好就是 $2n$ 个向量的和.

§ 18.2 第二天

1. 设数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足对所有 $n \geqslant 0$ 有 $\frac{1}{2} < a_n < 1$. 定义数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_0 = a_0,\quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} \quad (n \geqslant 0).$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的可能值是多少? $\{x_n\}$ 有没有可能发散?

解 方法一 我们归纳证明

$$0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

那么就有 $1 - x_n \to 0$, 即 $x_n \to 1$.

$n = 0$ 显然成立, 因为 $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$.

假定结论对 n 成立, 由递推式可得

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n}(1 - x_n).$$

由

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{1}{2}$$

我们得到

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}.$$

因此, 在任何情形下 $\{x_n\}$ 都收敛到 1.

方法二 首先有

$$\tanh(u + v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v}$$

对任意实数 u, v 都成立.

令 $u_n = \operatorname{arctanh} a_n$, 则 $x_n = \tanh(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$. 且 $u_0 + u_1 + \cdots + u_n > (n+1)\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{u\to\infty} \tanh u = 1.$$

注 如果条件 $a_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 改为 $a_n \in (0, 1)$, 则 $\{x_n\}$ 单调递增且有界, 但是其极限值可能小于 1.

2. 一个外星人种有三种性别: 男性, 女性和中性 *. 一个婚姻三人组包含三种性别的每一个人, 每个人都喜欢另外两个人. 任何一个人至多只能属于一个婚姻三人组, 这个种族的一个特点是这种喜欢的感觉总是相互的-如果 x 喜欢 y, 则 y 喜欢 x.

此种族要远征去殖民一个星球, 远征部队有 n 个男人, n 个女人和 n 个中性人. 已知每个远征成员至少喜欢 k 个其他两种性别的人. 目的是要创建尽可能多的婚姻三人组来产生健康的后代, 使得殖民人群能够茁壮成长.

*原题所给单词为 emale, 笔者发现根本没有这个单词, 故翻译为中性.

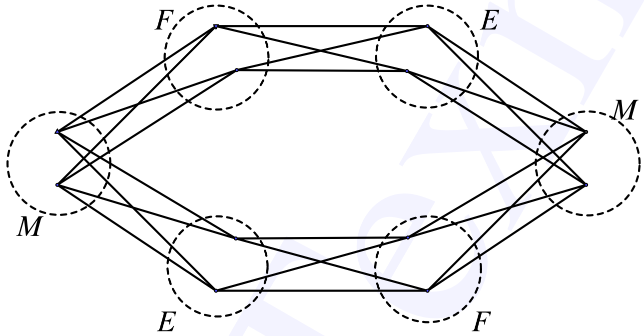
(a) 证明: 如果 n 是偶数且 $k=\dfrac{n}{2}$, 那么有可能无法创建任何一个婚姻三人组.

(b) 证明: 如果 $k \geqslant \dfrac{3n}{4}$, 则总是可以创建 n 个不相交的婚姻三元组, 从而使得远征成员都结婚.

证明

(a) 设 M 表示男性的集合, F 表示女性的集合, E 表示中性的集合. 考虑由三分图 G, 其顶点为 $M \cup F \cup E$, 边表示互相喜欢. 一个三元环就是一个可能的家庭. 我们把这样的图 G 称作喜欢图.

首先设 $k=\dfrac{n}{2}$. 则 n 必须是偶数, 我们需要构造一个喜欢图, 但是不包含任何三元环. 我们把集合 M, F, E 都分成两个相等的部分, 画出分开的两部分之间的所有边:



显然, 这是没有三元环的图.

(b) 假定 $k \geqslant \dfrac{3n}{4}$, 我们来说明使得所有殖民者结婚是可能的. 首先, 我们将证明在 M 和 F 之间存在一个完备匹配, 这里需要验证 Hall 婚姻定理. 换句话说, 对 $A \subset M$, 令 $B \subset F$ 表示 F 中至少有与 A 中的一个顶点相连的顶点的集合. 则我们需要证明 $|A| \leqslant |B|$. 反证法, 假定 $|A|>|B|$, 显然当 A 非空时, $|B| \geqslant k$. 考虑任意 $f \in F \backslash B$. 则 f 与 A 中的每个点都不相连. 因此 f 在 M 中的度不超过 $n-|A|<n-|B| \leqslant n-k \leqslant \dfrac{n}{4}$, 矛盾.

我们现在构造一个二部图, 记为 H. 它的顶点集合是 $P \cup E$, 其中 P 是我们已经找到的完备匹配中男女配对的集合. 对图 G 中的每个三元环 (m, f, e), 我们都有一条从点 $(m, f)=p \in P$ 到点 $e \in E$ 的边. 注意到 P 中的每个点在 H 中的度至少为 $2k-n$.

剩下的要证明 H 满足 Hall 婚姻定理, 因此就存在一个完备匹配. 反证法, 假定存在 $A \subset P, B \subset E$ 使得 $|A|=l,|B|<l$, 而 B 是 E 中与 A 中至少一个顶点相连的点的集合. P 中每个点的度至少为 $2k-n$, 我们有 $2k-n \leqslant|B|<l$. 另一方面, 取 $e \in E \backslash B$. 那么对每一个 $(m, f)=p \in P$, (e, m) 和 (e, f) 中至多有一对是有边相连的, 因此 e 在 G 中的度至多为 $|M \backslash A|+|F \backslash A|+|A|=2(n-l)+l=2n-l$. 但是 G 中所有顶点的度都是 $2k$, 因此我们得到 $2k \leqslant 2n-l$, 则 $l \leqslant 2n-2k$.

最后, $2k-n<l \leqslant 2n-2k$ 意味着 $k<\dfrac{3n}{4}$, 矛盾.

3. 求值

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ln \left(1+\frac{1}{2n}\right) \cdot \ln \left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$

解 注意到当 $x+y+z=0$ 时, $x^3+y^3+z^3=3xyz$. 这里

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{2n}{2n+1}+\ln\frac{2n+1}{2n+2}=0$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\\
=&\frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\
=&\frac{1}{3}\left[\ln^3 2+\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right]\\
=&\frac{1}{3}\left[\ln^3 2+\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\
=&\frac{1}{3}\ln^3 2.
\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)$ 是一个 n 次实系数多项式. 假定对所有整数 $0\leqslant k<m\leqslant n$, $\dfrac{k(k)-f(m)}{k-m}$ 都是一个整数. 证明: 对所有不同的整数对 a,b 都有 $a-b$ 整除 $f(a)-f(b)$.

证明 我们需要下面的引理:

引理 18.2. 记 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数为 $L(k)$, 定义

$$h_k(x)=L(k)\binom{x}{k},\quad k=1,2,\cdots.$$

则多项式 $h_k(x)$ 满足已知条件, 即对所有不同的整数对 a,b, 有 $a-b$ 整除 $h_k(a)-h_k(b)$

证明. 熟知

$$\binom{a}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{a-b}{j}\binom{b}{k-j}.$$

这个公式可以通过考虑在 $a-b$ 个白球和 b 个黑球中取 k 个球来证明. 由此我们得到

$$\begin{aligned}
h_k(a)-h_k(b)&=L(k)\left(\binom{a}{k}-\binom{b}{k}\right)=L(k)\sum_{j=1}^{k}\binom{a-b}{j}\binom{b}{k-j}\\
&=(a-b)\sum_{j=1}^{k}\frac{L(k)}{j}\binom{a-b-1}{j-1}\binom{b}{k-j}.
\end{aligned}$$

另一方面, 所有的 $\dfrac{L(k)}{j}$ 都是整数, 所以右边是 (a,b) 的倍数. 引理得证. ☆

把多项式 f 在基 $1,\binom{x}{1},\binom{x}{2},\cdots$ 下展开得到

$$f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}. \tag{18.1}$$

我们对 j 归纳证明对所有 $1 \leqslant j \leqslant n$, A_j 是 $L(j)$ 的倍数. 假定 $L(j)$ 整除 A_j 对 $1 \leqslant j \leqslant m-1$ 都成立. 在式 (18.1) 中把 m 用某个 $k \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ 替换得到

$$\frac{f(m) - f(k)}{m-k} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{A_j}{L(j)} \cdot \frac{h_j(m) - h_j(k)}{m-k} + \frac{A_m}{m-k}.$$

由于其他项都是整数, 所以最后一项 $\dfrac{A_m}{m-k}$ 也是整数. 这对所有的 $0 \leqslant k < m$ 都成立, 所以 A_m 是一个被 A_m 整除的整数.

因此, 对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$, A_j 都是 $L(j)$ 的倍数, 由引理可知结论得证.

5. 设 $F = A_0A_1 \cdots A_n$ 是一个平面凸多边形. 对所有的 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, 定义算子 f_k, 表示把 F 用新的多边形替代

$$f_k(F) = A_0 \cdots A_{k-1}A'_kA_{k+1} \cdots A_n,$$

其中 A'_k 是 A_k 关于 $A_{k-1}A_{k+1}$ 的垂直平分线的对称点. 证明: $(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n-1})^n(F) = F$. 我们假定所有的算子在应用时都是良定义的, 即每次操作得到的多边形仍然是凸的. ($A_0, A_1, \cdots, A_n$ 是 F 按顺序的顶点.)

证明 算子 f_i 是在以顶点 $A_1, \cdots, A_{n-1}$ 的坐标所在的 $2(n-1)$ 维相位空间上的有理映射. 要证明 $(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n-1})^n$ 是恒等映射, 只需要在某个开集上证明此结论即可. 比如我们可以取一个正多边形的邻域, 那么在这个证明过程中的所有中间的多边形都是图的.

考虑算子 f_i. 注意到 (i) $f_i \circ f_i = \text{i.d.}$ 以及 (ii) 当 $|i-j| \geqslant 2$ 时, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$. 我们也要证明 (iii) $(f_i \circ f_{i+1})^3 = \text{i.d.}$ 对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 成立.

考虑算子 f_i 和 f_{i+1}, 通过插入两条连续的边改变了边长的顺序. 通过算子 $(f_i \circ f_{i+1})^3$ 的作用之后, 边长就回到了原来的顺序. 进一步, 在所有的算子作用下, 四边形 $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 的对角和保持不变. 这些量唯一决定了这个四边形, 因为对于固定的边而言, $\angle A_1A_2A_3$ 和 $\angle A_1A_4A_3$ 都会随着 A_1A_3 的减小而减小. 因此性质 (iii) 得证.

在对称群 S_n 中, 对换 $\sigma_i = (i, i+1)$ 满足性质 (i-iii). 熟知 S_n 是有 $n-1$ 个生成元的极大群, 满足 (i-iii). 在 S_n 中我们有 $(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_{n-1})^n = (1, 2, 3, \cdots, n)^n = \text{i.d.}$, 所以 $(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{n-1})^n = \text{i.d.}$.

19. 2012 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 19.1 第一天

1. 对每个正整数 n, 用 $p(n)$ 表示把 n 分成正整数和的方法数. 例如, $p(4)=5$, 因为

$$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1.$$

且定义 $p(0)=1$.

证明: $p(n)-p(n-1)$ 表示把 n 分成正整数的和且每个数都严格大于 1 的方法数.

证明 $n=1$ 时结论显然成立, 因为 $p(0)=p(1)=1$, 而 1 的唯一拆分知含有一项 1. 在下面的证明中我们假定 $n \geqslant 2$.

记 $\mathcal{P}_n=\{(a_1,\cdots,a_n): k\in\mathbb{N}, a_1 \geqslant\geqslant \cdots \geqslant a_k, a_1+\cdots+a_n=n\}$ 表示 n 的拆分集合, 再记 $\mathcal{Q}_n=\{(a,\cdots,a_k)\in\mathcal{P}_n: a_k=1\}$ 表示 n 的拆分中含有 1, 那么不包含 1 的拆分就是 $\mathcal{P}_n\backslash\mathcal{Q}_n$, 我们要证明的就是 $|\mathcal{P}_n\backslash\mathcal{Q}_n|=|\mathcal{P}_n|-|P_{n-1}|$.

定义映射 $\varphi:\mathcal{P}_{n-1}\to\mathcal{Q}_n$:

$$\varphi(a_1,\cdots,a_k)=(a_1,\cdots,a_k,1).$$

这是一个 n 的含有 1 的拆分 (自然 $\varphi(a_1,\cdots,a_k)\in\mathcal{Q}_n$). 而且每个拆分 $(a_1,\cdots,a_k,1)\in\mathcal{Q}_n$ 都唯一决定了 $(a_1,\cdots,a_k)$. 因此映射 φ 是集合 $\mathcal{P}_{n-1}$ 和 $\mathcal{Q}_n$ 之间的双射, 于是 $|\mathcal{P}_{n-1}|=|\mathcal{Q}_n|$. 由于 $\mathcal{Q}_n\subset\mathcal{P}_n$,

$$|\mathcal{P}_n\backslash\mathcal{Q}_n|=|\mathcal{P}_n|-|\mathcal{Q}_n|=|\mathcal{P}_n|-|\mathcal{P}_{n-1}|=p(n)-p(n-1).$$

2. 设 n 是一个固定的正整数. 求出对角元全为 0 而非对角元都是正数的 $n\times n$ 矩阵秩的最小可能值.

解 $n=1$ 时秩只能是 0. 对 $n=2$, 这样一个矩阵的行列式是负的, 因此秩为 2. 我们来证明对 $n\geqslant 3$, 秩的最小可能值为 3.

注意到前三行是线性无关的. 因为如果假定存在前三行的某个线性组合为零, 系数为 c_1,c_2,c_2. 那么从第一列来看, c_2,c_3 要么异号要么都为零. 此性质同样对 (c_1,c_2) 和 (c_1,c_3) 成立, 因此它们都是零.

下面只需给出一个秩为 3 的矩阵的例子即可. 比如矩阵

$$\begin{aligned}\left((i-j)^2\right)_{i,j=1}^{n} &= \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ (-1)^2 & 0^2 & 1^2 & \cdots & (n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-n+1)^2 & (-n+2)^2 & (-n+3)^2 & \cdots & 0^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix} (1,1,\cdots,1) - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} (1,2,\cdots,n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left(1^2,2^2,\cdots,n^2\right)\end{aligned}$$

是三个秩为 1 的矩阵的和, 因此它的秩不可能超过 3.

3. 给定整数 $n>1$, 设 S_n 表示数 $1,2,\cdots,n$ 的置换群. 两名选手 A 和 B 玩如下游戏: 他们轮流从 S_n 中选元素, 每次选一个, 且已经被选的元素不允许再选. 当被选的元素生成整个群 S_n 时, 游戏结束, 最后一次操作的人将输掉游戏. 已知第一次由 A 选取, 哪一位选手有必胜策略?

解 　当 $n=2$ 时, A 可以选取单位元获胜; 当 $n=3$ 时, A 可以选一个三元循环获胜.

我们证明当 $n\geqslant 4$ 时, B 有必胜策略. 考虑某个时刻, 所有允许的操作都将结束游戏, 令 H 表示此时选手已经选出的元素生成的子群. 再从 H 中选另一个元素, 游戏不会立即结束, 因此 H 中的所有元素都被选了. 由于 H 和其它任意元素都将生成 S_n, H 必定是 S_n 的极大子群.

如果 $|H|$ 是偶数, 则下一名选手是 A, 那么 B 获胜. 用 n_i 表示前面被选出来的 i 个元素生成的子群的阶, 则 $n_1|n_2|n_3\cdots$. 我们证明 B 可以保证 n_2 是偶数且 $n_2<n!$, 则 $|H|$ 将是偶数, B 一定获胜.

设 A 第一次选取的元素是 g, 如果 g 的阶 n_1 是偶数, 则 B 可以选取恒等置换使得 $n_2=n_1$ 为偶数且 $n_2<n!$.

如果 n_1 是奇数, 则 g 是不相交的奇循环的乘积, 因此它是偶置换. 于是 B 可以选取置换 $h=(12)(34)$, 这是另一个偶置换. 由于 g 和 h 都是交错群 A_n 的元素, 它们不可能生成整个 S_n. 由于 h 的阶是 2, B 可以获胜.

注 　如果 $n\geqslant 4$, 所有的奇数阶子群都是偶数阶交错群 A_n 的子群. 因此所有的极大子群都是偶数阶的, B 永远都不会输.

4. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续可微函数, 满足 $f'(t)>f(f(t))$ 对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 都成立. 证明: $f(f(f(t)))\leqslant 0, \forall t\geqslant 0$.

证明 　先证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ 不存在或者 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\neq+\infty$.

假定极限是 $+\infty$, 则存在 $T_1>0$ 使得对所有的 $t>T_1$, 我们有 $f(t)>2$. 存在 $T_2>0$ 使得对所有 $t>T_2$ 有 $f(t)>T_1$. 因此当 $t>T_2$ 时, $f'(t)>f(f(t))>2$. 于是存在 T_3 使得当 $t>T_3$ 时, $f(t)>t$. 故 $f'(t)>f(f(t))>f(t)$, $f'(t)/f(t)>1$, 积分即可得 $\ln f(t)-\ln T_3>t-T_3$, 即当 $t>T_3$ 时, $f(t)>\mathrm{e}^{t-T_3}$. 则 $f'(t)<f(f(t))>T_3\mathrm{e}^{f(t)-T_3}$, 且 $f'(t)\mathrm{e}^{-f(t)}>T_3\mathrm{e}^{-T_3}$. 从 T_3 到 t 积分得 $\mathrm{e}^{-f(T_3)}-\mathrm{e}^{-f(t)}>(t-T_3)T_3\mathrm{e}^{-T_3}$. 右边是趋于无穷的, 但左边是有界的, 矛盾.

再证明对所有 $t>0$ 有 $f(t)<t$.

由上面已证结论, 存在正实数 t 使得 $f(t)<t$. 假定结论不正确, 那么存在 t_0 使得 $f(t_0)=t_0$.

I. 如果存在 $t\geqslant t_0$ 使得 $f(t)<t_0$. 令 $T=\inf\{t\geqslant t_0: f(t)<t_0\}$, 由 f 的连续性可知 $f(T)=t_0$. 于是 $f'(T)>f(f(T))=f(t_0)=t_0>0$, 这就意味着在 T 的右邻域内都有 $f>f(T)=t_0$, 这与 T 的定义矛盾.

II. 如果对所有 $t\geqslant t_0$ 有 $f(t)\geqslant t_0$. 现在我们有 $f'(t)>f(f(t))\geqslant t_0>0$, 那么 f' 在 $(t_0,+\infty)$ 有正的下界, 这和上面已证的结论矛盾.

再证明

(a) 如果 $f(s_1)>0$ 且 $f(s_2)\geqslant s_1$, 则对所有 $s>s_2$ 都有 $f(s)>s_1$.

(b) 特别地, 如果 $s_1\leqslant 0$ 且 $f(s_1)>0$, 则对所有 $s>s_1$ 都有 $f(s)>s_1$.

假定存在 $s>s_2$ 使得 $f(s)\leqslant s_1$, 令 $S=\inf\{s>s_2: f(s)\leqslant s_1\}$. 由连续性我们有 $f(S)=s_1$. 与第二条结论类似, 我们有 $f'(S)>f(f(S))=f(s_1)>0$. 如果 $S>s_2$, 则在 S 的左邻域内有 $f<s_1$, 这与 S 的定义矛盾. 否则, 如果 $S=s_2$, 则在 s_2 的右邻域内有 $f>s_1$, 也是矛盾. (b) 中的结论只需要取 $s_2=s_1$ 即可.

现在我们来证明原题. 用反证法, 假定存在某个 $t_0>0$ 使得 $f(f(f(t_0)))>0$. 令 $t_1=f(t_0), t_2=f(t_1)$ 以及 $t_3=f(t_2)>0$, 我们来证明 $0<t_3<t_2<t_1<t_0$. 由第二条结论, 我们只需要证明 t_1 和 t_2 是正的. 如果 $t_1<0$, 则 $f(t_1)\leqslant 0$(如果 $f(t_1)>0$, 则在第三条结论中取 $s_1=t_1$ 即可得到 $f(t_0)>t_1$, 矛盾). 如果 $t_1=0$, 则由第二条结论以及 f 的连续性得到 $f(t_1)\leqslant 0$. 因此, 如果 $t_1\leqslant 0$, 则也有 $t_2\leqslant 0$. 如果 $t_2=0$, 则由第二条结论以及 f 的连续性也矛盾, 因为 $f(t_2)=t_3>0$. 如果 $t_2<0$, 则由第三条结论 (b) 有 $f(t_2)>t_2$, 所以 $t_1>t_2$. 再由第三条结论 (a) 我们得到 $f(t_1)>t_2$, 矛盾. 这样就证明了 $0<t_3<t_2<t_1<t_0$.

由第三条结论 (a)($f(t_1)>0, f(t_0)\geqslant t_1$), 我们得到对任意 $t>t_0$ 都有 $f(t)>t_0$, 类似的还有 $f(t)>t_2, \forall t>t_1$. 因此对 $t>t_0$ 我们有 $f'(t)>f(f(t))>t_2>0$. 于是 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$, 矛盾. 这个矛盾就证明 $f(f(f(t)))\leqslant 0, \forall t>0$, 至于 $t=0$, 则由函数的连续性即得.

5. 设 a 是一个有理数, n 是一个正整数. 证明: 多项式 $X^{2^n}(X+a)^{2^n}+1$ 在有理系数多项式环 $\mathbb{Q}[X]$ 上不可约.

证明 首先我们考虑 $a=0$ 的情形. $X^{2^{n+1}}+1$ 的根刚好就是 1 的 2^{n+2} 次单位根, 即

$$\exp\left(2\pi \mathrm{i}\frac{k}{2^{n+2}}\right), k=1,3,5,\cdots,2^{n+2}-1.$$

这是一个分圆多项式, 因此在 $\mathbb{Q}[X]$ 中不可约.

现在设 $a\neq 0$, 且假定题中的多项式是可约的. 令 $X=Y-\dfrac{a}{2}$, 我们得到多项式

$$\left(Y-\frac{a}{2}\right)^{2^n}\left(Y+\frac{a}{2}\right)^{2^n}+1=\left(Y^2-\frac{a^2}{4}\right)^{2^n}+1.$$

这仍然是关于变量 $Z=Y^2-\dfrac{a^2}{4}$ 的一个分圆多项式, 因此它不可能被任何关于 Y^2 的有理系数多项式整除. 将此多项式写成关于 Y 的不可约首一多项式的乘积

$$\left(Y^2-\frac{a}{2}\right)^{2^n}+1=\prod_{i=1}^{r}\left[f_i\left(Y\right)\right]^{m_i},\ \text{所有}f_i\text{都是首一不可约的, 且互不相同.}$$

由于左边是关于 Y^2 的多项式, 因此必有 $\prod\limits_i[f_i(Y)]^{m_i}=\prod\limits_i[f_i(-Y)]^{m_i}$. 由上述讨论可知 f_i 都不是关于 Y^2 的多项式, 即 $f_i(-Y)\neq f(Y)$. 因此对每个 i 都存在 $i'\neq i$ 使得 $f_i(-Y)=\pm f_{i'}(Y)$. 特别地, r 是偶数且不可约因子 f_i 是成对的, 给它们重新编号使得 $f_1,\cdots,f_{\frac{r}{2}}$ 属于不同的对, 且有 $f_{i+\frac{r}{2}}=\pm f_i(Y)$. 考虑多项式 $f(Y)=\prod\limits_{i=1}^{\frac{r}{2}}[f_i(Y)]^m$, 这是一个次数为 2^n 的首一多项式, 且 $\left(Y^2-\dfrac{a^2}{4}\right)^{2^n}+1=f\left(Y\right)f\left(-Y\right)$. 现在把 $f(Y)$ 写为 $f(Y)=Y^{2^n}+\cdots+b$, 其中 $b\in\mathbb{Q}$ 是常数项, 即 $b=f(0)$. 比较常数项可得 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{2^{n+1}}+1=b^2$. 记 $c=\left(\dfrac{a}{2}\right)^{2^{n-1}}$, 这是一个非零有理数且 $c^4+1=b^2$.

现在只需要证明不存在有理数 $c,b\in\mathbb{Q},c\neq 0$ 使得方程 $c^4+1=b^2$ 成立, 这就和我们假设的多项式可约是矛盾的. 假定此方程有解, 不妨设 $c,b>0$. 设 $c=\dfrac{u}{v}$, u,v 是互素的正整数, 则 $u^4+v^4=(bv^2)^2$. 再记 $w=bv^2$, 这是一个正整数. 下面证明集合 $\mathcal{T}=\{(u,v,w)\in\mathbb{N}^3|u^4+v^4=w^2,u,v,w\geqslant 1\}$ 是空集. 反证法, 考虑某个三元组 $(u,v,w)\in\mathcal{T}$ 使得 w 最小. 不失一般性, 我们可以假定 u 是奇数, (u^2,v^2,w) 是本原勾股数组, 因此存在互素的整数 $d>e\geqslant 1$ 使得 $u^2=d^2-e^2,v^2=2de,w=d^2+e^2$. 特别地, 在 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 中考虑方程 $u^2=d^2-e^2$, 说明 d 是奇数而 e 是偶数. 因此, 我们可以写成 $d=f^2,e=2g^2$. 而且由于 $u^2+e^2=d^2$, (u,e,d) 也是本原勾股数, 又存在互素的正整数 $h>i\geqslant 1$ 使得 $u=h^2-i^2,e=2hi=2g^2,d=h^2+i^2$. 再一次, 我们可以写成 $h=k^2,i=l^2$, 所以我们得到关系 $f^2=d=h^2+i^2=k^4+l^4$ 且 $(k,l,f)\in\mathcal{T}$. 则不等式 $w>d^2=f^4\geqslant f$ 与 w 的最小性矛盾.

§ 19.2 第二天

1. 考虑多项式

$$f\left(x\right)=x^{2012}+a_{2011}x^{2011}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Albert Einstein 和 Homer Simpson 在玩一个游戏. 他们轮流选择系数 $a_0,\cdots,a_{2011}$ 中的一个, 并赋值一个实数. Albert 先开始, 一旦一个系数被赋值了, 它就不能再改变了. 游戏直到所以的系数被赋值才结束.

Homer 的目的是使得 $f(x)$ 被一个固定的多项式 $m(x)$ 整除, 而 Albert 的目的就是阻止这件事发生.

(a) 如果 $m(x)=x-2012$, 谁有必胜策略?

(b) 如果 $m(x)=x^2+1$, 谁有必胜策略?

解 我们证明在 (a) 和 (b) 中, Homer 都有必胜策略.

(a) 注意到最后的操作由 Homer 完成, 而只有最后的操作最重要. 要想 Homer 赢, 当且仅当 $f(2012)=0$, 即

$$2012^{2012}+a_{2011}2012^{2011}+\cdots+a_k 2012^k+\cdots+a_1 2012+a_0=0. \tag{19.1}$$

假定除了 a_k 之外的所有系数都已经确定. Homer 的目的是要使得 (19.1) 式成立, 这是一个关于 a_k 的线性方程. 显然次方程有解, 因此 Homer 获胜.

(b) 定义多项式

$$g(y)=a_0+a_2y+a_4y^2+\cdots+a_{2010}y^{1005}, h(y)=a_1+a_3y+a_5y^2+\cdots+a_{2011}y^{1005},$$

则 $f(x)=g(x^2+xh(x^2))$. 如果 Homer 能使得 $g(y)$ 和 $h(y)$ 被 $y+1$ 整除, 即 $g(-1)=h(-1)=0$, 则他可以获胜.

注意到游戏最开始时, $g(y)$ 和 $h(y)$ 都有偶数个不确定的系数. 能让 Homer 获胜的一种方法就是紧跟 Albert: 不论什么是偶 Albert 给 g 或 h 中某个系数赋一个值, 那么 Homer 也跟着在同一个多项式中赋值一个系数, 这样的话可以让 Homer 同时决定 g 和 h 的最后一个系数, 这就可以同时保证 $g(-1)=0, h(-1)=0$, 因此 Homer 获胜.

2. 递归定义序列 $a_0,a_1,\cdots$: $a_0=1, a_1=\dfrac{1}{2}$,

$$a_{n+1}=\frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n},\quad n\geqslant 1.$$

证明级数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛并求值.

证明 注意到

$$ka_k=\frac{(1+(k+1)a_k)a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{k+1}}{a_k}+(k+1)a_{k+1},\quad \forall k\geqslant 1,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}&=\frac{a_1}{a_0}+\sum_{k=1}^{n}(ka_k-(k+1)a_{k+1})\\&=\frac{1}{2}+1\cdot a_1-(n+1)a_{n+1}=1-(n+1)a_{n+1}\end{aligned} \tag{1}$$

由 (1) 式我们有 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$, 而所有项都是都是正的, 所以级数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛. 于是级数的通项 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ 收敛于 0. 特别地, 存在指标 n_0 使得对所有 $n\geqslant n_0$ 都有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{1}{2}$, 那么对 n 归纳有 $a_n<\dfrac{C}{2^n}$ 对某个常数 C 成立. 由 $na_n<\dfrac{Cn}{2^n}\to 0$ 我们得到 $na_n\to 0$, 因此

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}(1-(n+1)a_{n+1})=1.$$

3. 使得 $n!+1$ 整除 $(2012n)!$ 的正整数 n 构成的集合是有限的还是无限的?

解 方法一 考虑满足 $n!+1\big|(2012n)!$ 的正整数 n. 对任意非负整数 $a_1,\cdots,a_k$, $(a_1+\cdots+a_k)!$ 被 $a_1!\cdots a_k!$ 整除 (由数字 $a_1,1,\cdots,a_k,k$ 组成的数的个数为 $\dfrac{(a_1+\cdots+a_k)!}{a_1!\cdots a_k!}$). 特别地, $(n!)^{2012}$ 整除 $(2012n)!$.

由于 $n!+1$ 与 $(n!)^{2012}$ 互素, 它们的乘积 $(n!+1)(n!)^{2012}$ 也整除 $(2012n)!$, 因此

$$(n!+1)\cdot(n!)^{2012}\leqslant(2012n)!$$

由已知的不等式 $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!\leqslant(2012n)!$, 我们得到

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2013n}<(n!)^{2013}<(n!+1)\cdot(n!)^{2012}\leqslant(2012n)!<(2012n)^{2012n},$$

$$n<2012^{2012}\mathrm{e}^{2013}.$$

因此, 只有有限个这样的正整数 n.

注 除了不等式 $\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$, 我们还可以利用多项式定理

$$(x_1+\cdots+x_\ell)^N=\sum_{k_1+\cdots+k_\ell=N}\frac{N!}{k_1!\cdots k_\ell!}x^{k_1}\cdots x_\ell^{k_\ell}.$$

取 $N=2012n,\ell=2012,x_1=\cdots=x_\ell=1$, 则

$$\frac{(2012n)!}{(n!)^{2012}}<(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2012})^{2012n}=2012^{2012n},$$

$$n!<n!+1\leqslant\frac{(2012n)!}{(n!)^{2012}}<2012^{2012n}.$$

不等式右边是几何增长, 左边是阶乘增长, 这只可能对有限个正整数 n 成立.

方法二 假定正整数 $n>2012$ 满足 $n!+1\big|(2012n)!$. 注意到 $n!+1$ 的所有素因子都大于 n, 而 $(2012n)!$ 的所有素因子都小于 $2012n$.

考虑满足 $n<p<2012n$ 的素数 p. 在 $1,2,\cdots,2012n$ 中, 被 p 整除的数的个数 $\left[\dfrac{2012n}{p}\right]<2012$. 由于 $p^2>n^2.2012n$, 这些数都不被 p^2 整除. 因此, 在 $(2012n)!$ 的素因子分解中, p 的指数至多只有 2011. 所以

$$n!+1=\gcd(n!+1,(2012n)!)<\prod_{n<p<2012n}p^{2011}.$$

利用不等式 $\prod\limits_{p\leqslant X}p<4^X$ 得

$$n!<\prod_{n<p<2012n}p^{2011}<\left(\prod_{p<2012n}p\right)^{2011}<\left(4^{2012n}\right)^{2011}=\left(4^{2012\cdot2011}\right)^n. \tag{19.2}$$

同样的, 我们又得到了阶乘增长小于指数增长, 这只对有限个 n 成立.

4. 设正整数 $n \geqslant 2$. 求出所有的实数 a 使得存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$x_1(1-x_2) = x_2(1-x_3) = \cdots = x_{n-1}(1-x_n) = x_n(1-x_1) = a. \tag{19.3}$$

解 记 $x_{n+1} = x_1$, 我们证明所有可能的 a 的集合为

$$\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \bigcup \left\{ \frac{1}{4\cos^2 \frac{k\pi}{n}} : k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k < \frac{n}{2} \right\}.$$

当 $a \leqslant \frac{1}{4}$ 时, 我们可以取 x_1 使得 $x_1(1-x_1) = a$, 然后令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 即可. 因此我们现在假定 $a > \frac{1}{4}$.

式 (19.3) 给出了递推公式

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) = 1 - \frac{a}{x_i} = \frac{x_i - a}{x_i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

分式线性变换 φ 可以理解为实轴 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上的投影变换, 映射 φ 是群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ 中的元素, 线性变换的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$(注意到 $a \neq 0$, 所以 $\det M \neq 0$). 变换 φ^n 可以表示为 M^n, 点 $(u,v)^{\mathrm{T}}$ 是 φ^n 的不动点当且仅当 $(u,v)^{\mathrm{T}}$ 是 M^n 的特征向量. 由于 M^n 中的元素以及坐标 u, v 都是实数, 相应的特征值也是实数.

M 的特征多项式为 $x^2 - x + a$, 对 $a > \frac{1}{4}$ 没有实数根. 所以 M 有两个共轭复根 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4a-1}\mathrm{i}\right)$, M^n 的特征值为 $\lambda_{1,2}^n$, 它们是实的当且仅当 $\arg \lambda_{1,2} = \pm \frac{k\pi}{n}$ 对某个整数 k 成立, 这等价于

$$\pm\sqrt{4a-1} = \tan \frac{k\pi}{n}, \quad a = \frac{1}{4}\left(1 + \tan^2 \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{4\cos^2 \frac{k\pi}{n}}.$$

如果 $\arg \lambda_1 = \frac{k\pi}{n}$ 则 $\lambda_1^n = \lambda_2^n$, 则 M^n 的特征值是相等的. M 的特征值是不同的, 所以 M 和 M^n 有两个线性无关的特征向量, 因此 M^n 是一个数量矩阵, 这就意味着投影变换 φ^n 是恒等变换. 从任意点 $x_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 开始, 循环 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在点 $x_{n+1} = x_1$ 结束. 只有有限个循环 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 包含 ∞, 剩下其他所有的循环都是式 (1) 的解.

注 如果我们记 $x_j = P + Q\tan t_j$, 这里 P, Q 和 $t_1, \cdots, t_n$ 都是实数, 那么递推关系可以写为

$$(P + Q\tan t_j)(1 - P - Q\tan t_{j+1}) = a,$$

$$(1-P)\,Q\tan t_j - PQ\tan t_{j+1} = a + P\,(P-1) + Q^2 \tan t_j \tan t_{j+1}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

考虑到恒等式 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$, 取 $P = \frac{1}{2}$ 以及 $Q = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$ 是合理的. 则递推式得出

$$t_j - t_{j+1} \equiv \arctan\sqrt{4a-1} \pmod{\pi}.$$

5. 设实数 $c \geqslant 1$. G 是一个 Abel 群, $A \subset G$ 是一个有限子集, 满足 $A + A| \leqslant c|A|$, 这里 $X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$, 而 $|Z|$ 表示 Z 的基数. 证明:

$$|\underbrace{A + A + \cdots + A}_{k\text{个}}| \leqslant c^k |A|$$

对每个正整数 k 都成立.

证明 设 B 是 A 的非空子集使得表达式 $c_1 = \dfrac{|A+B|}{|B|}$ 是最小的. 注意到 A 也是 B 的一个可能的选择, 故 $c_1 \leqslant c_2$.

引理 19.1. 对任意有限集 $D \subset G$, 我们有 $|A + B + D| \leqslant c_1|B + D|$.

证明. 对 D 的基数归纳. 当 $|D| = 1$ 时, 由 c_1 的定义知引理自明. 假定引理对某个 D 成立, 且设 $x \notin D$. 令 $B_1 = \{y \in B | x + y \in B + D\}$, 则 $B + (D \cup \{x\})$ 可以分解为不交并

$$B + (D \cup \{x\}) = (B + D) \cup ((B \backslash B_1) + \{x\}),$$

因此 $|B + (D \cup \{x\})| = |B + D| + |B| - |B_1|$. 现在我们需要处理集合 $A + B + (D \cup \{x\})$ 的基数, 记 $A + B + (D \cup \{x\}) = (A + B + D) \cup (A + B + \{x\})$. 我们把其中某些元素计数两次: 如 $y \in B_1$, 则 $A + \{y\} + \{x\} \subset (A + B + D) \cap (A + B + \{x\})$, 因此集合 $A + B_1 + \{x\}$ 的所有元素被数了两次, 于是

$$\begin{aligned}
|A + B + (D \cup \{x\})| &\leqslant |A + B + D| + |A + B + \{x\}| - |A + B_1 + \{x\}| \\
&= |A + B + D| + |A + B| - |A + B_1| \\
&\leqslant c_1 \left(|B + D| - |B| - |B_1|\right) \\
&= c_1 \left|B + (D \cup \{x\})\right|,
\end{aligned}$$

其中最后的不等式由归纳假设以及 $\dfrac{|A+B|}{|B|} = c_1 \leqslant \dfrac{|A+B_1|}{|B_1|}$ 得到 ☆

引理 19.2. 对每个 $k \geqslant 1$, 我们有 $|\underbrace{A + \cdots + A}_{k\text{个}} + B| \leqslant c_1^k |B|$.

证明. 对 k 归纳. 当 $k = 1$ 时, 由 c_1 的定义可知结论自明. 对较大一点的 k, 在引理 19.1 中, 令集合 $D = \underbrace{A + \cdots + A}_{k-1\text{个}}$, 则 $|\underbrace{A + \cdots + A}_{k\text{个}} + B| \leqslant c_1 |\underbrace{A + \cdots + A}_{k-1\text{个}} + B| \leqslant c_1^k |B|$.

注意到

$$\underbrace{A + \cdots + A}_{k\text{个}} \leqslant |\underbrace{A + \cdots + A}_{k\text{个}} + B| \leqslant c_1^k |B| + c^k |A|.$$

☆

20. 2013 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 20.1 第一天

1. 设 A 和 B 是特征值都严格大于 1 的实对称矩阵. 设 λ 是矩阵 AB 的一个实特征值, 证明: $|\lambda| > 1$.

证明 通过矩阵的对角化, 不难知由 A 和 B 所确定的变换会严格增加非零向量的长度. 因此它们的乘积 AB 也会严格增加任意非零向量的长度, 因此它的严格实特征值大于 1 或者小于 -1.

2. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是二阶可微函数. 假定 $f(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ 使得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2 \xi).$$

证明 令 $g(x) = f(x)\cos x$. 由于 $g(-\pi/2) = g(0) = g(\pi/2) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi_1 \in (-\pi/2, 0), \xi_2 \in (0, \pi/2)$ 使得

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

现在考虑函数

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x - f(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

我们有 $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, 再由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得

$$\begin{aligned}
0 = h'(\xi) &= \frac{g''(\xi)\cos^2\xi + 2\cos\xi g'(\xi)}{\cos^4\xi} \\
&= \frac{(f''(\xi)\cos\xi - 2f'(\xi)\sin\xi - f(\xi)\cos\xi)\cos\xi + 2\sin\xi\,(f'(\xi)\cos\xi - f(\xi)\sin\xi)}{\cos^3\xi} \\
&= \frac{f''(\xi)\cos^2\xi - f(\xi)\left(\cos^2\xi + 2\sin^2\xi\right)}{\cos^3\xi} \\
&= \frac{1}{\cos\xi}\left(f''(\xi) - f(\xi)\left(1 + 2\tan^2\xi\right)\right).
\end{aligned}$$

3. 一所学校中有 $2n$ 个学生 ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$), 每周有 n 个学生出游. 经过多次旅行走之后出现如下情形: 任意两个同学至少在一起旅游过一次. 使得这种情形出现的的最少的旅行次数为多少?

解 我们证明对任意 $n \geqslant 2$, 答案都是 6.

首先我们证明小于 6 是不够的. 在这种情形下, 所有旅行的学生总数不超过 $5n$. 每个学生在一次旅行中遇到其他 $n-1$ 个学生, 所以这个学生至少要参加 3 次旅行才能遇到其他的 $2n-1$ 个同学. 因此, 整个旅游过程中的学生总数不少于 $6n$, 这是不可能的.

现在我们构造一个 6 次旅行的例子.

如果 n 是偶数, 我们把 $2n$ 个学生等分成四组 A, B, C, D, 那么我们分别安排 6 次旅行

$$(A, B), (C, D), (A, C), (A, D), (B, D), (B, C)$$

即可.

如果 n 是奇数且被 3 整除, 我们把所有学生等分成 6 组 E, F, G, H, I, J. 那么

$$(E, F, G), (E, F, H), (G, H, I), (G, H, J), (E, I, J), (F, I, J)$$

就是可行的旅行组合.

剩下的情形我们令 $n = 2x + 3y$, x, y 都是自然数. 这时只需要让 A, B, C, D 每一组有 x 个人, 而 E, F, G, H, I, J 每一组有 y 个人, 那么 $(A, B, E, F, G), (C, D, E, F, H), (A, C, G, H, I), (B, D, G, H, J), (A, D, E, I, J), (B, C, F, I, J)$ 就是可行的旅游组合.

4. 设 $n \geqslant 3$, $x_1, \cdots, x_n$ 是非负实数. 令

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ B = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ C = \sum_{i=1}^{n} x_i^3.$$

证明:

$$(n+1)\, A^2 B + (n-2)\, B^2 \geqslant A^4 + (2n-2)\, AC.$$

证明 令

$$p(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = X^n - AX^{n-1} + \frac{A^2 - B^2}{2} X^{n-2} - \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6} X^{n-3} + \cdots$$

那么 p 的 $n-3$ 阶导数有三个非负实根 $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant w$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{6}{n!} p^{(n-3)}(X) &= X^3 - \frac{3A}{n} X^2 + \frac{3\left(A^2 - B\right)}{n(n-1)X} - \frac{A^3 - 3AB + 2C}{n(n-1)(n-2)} \\ &= (X-u)(X-v)(X-w), \end{aligned}$$

所以

$$u + v + w = \frac{3A}{n},\ uv + vw + wu = \frac{3\left(A^2 - B\right)}{n(n-1)},\ uvw = \frac{A^3 - 3AB + 2C}{n(n-1)(n-2)}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} &\frac{n^2(n-1)^2(n-2)}{9}\left((n+1)\, A^2 B + (n-2)\, B^2 - A^4 - (2n-2)\, AC\right) \\ =& \cdots = u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 - uvw(u+v+w) \\ =& uv(u-w)(v-w) + vw(v-u)(w-u) + wu(w-v)(u-v) \\ \geqslant& 0 + uw(v-u)(w-v) + wu(w-v)(u-v) = 0. \end{aligned}$$

5. 是否存在复数序列 $\{a_n\}$, 使得对每个正整数 p, 我们有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛当且仅当 p 是素数?

解 答案是肯定的, 我们来证明更一般的结论: 假定 $\mathbb{N} = C \cup D$ 是 $\mathbb{N}$ 的任意一个划分, 那么存在序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 对 $p \in C$ 收敛而对 $p \in D$ 发散.

令 $C_k = C \cap [1,k]$, $D_k = D \cap [1,k]$.

引理 20.1. *对每个正整数 k, 存在正整数 N_k 和一个复数序列 $X_k = (x_{k,1}, \cdots, x_{k,N_k})$ 满足如下性质:*

(a) 对 $p \in D_k$, 我们有 $\left|\sum\limits_{j=1}^{N_k} x_{k,j}^p\right| \geqslant 1$.

(b) 对 $p \in C_k$, 我们有 $\sum\limits_{j=1}^{N_k} x_{k,j}^p = 0$; 进一步, $\left|\sum\limits_{j=1}^{m} x_{k,j}^p\right| \leqslant \dfrac{1}{k}$ 对任意 $1 \leqslant m \leqslant N_k$ 都成立.

证明. 首先我们找到一些复数 $z_1, \cdots, z_k$ 满足

$$\sum_{j=1}^{k} z_j^p = \begin{cases} 0, & p \in C_k \\ 1, & p \in D_k \end{cases}. \tag{20.1}$$

显然, 上述方程组等价于另一个方程组 $\sigma_v(z_1, \cdots, z_k) = w_v (v = 1, 2, \cdots, k)$, σ_v 是第 v 个基本对称多项式, 而常数 w_v 由 Newton-Waring-Girard 公式唯一确定. 则数 $z_1, \cdots, z_k$ 是多项式 $z^k - w_1 z^{k-1} + \cdots + (-1)^k w_k$ 的根按照某种顺序排列的.

现在令

$$M = \left\lceil \max_{1 \leqslant m \leqslant k, p \in C_k} \left|\sum_{j=1}^{m} z_j^p\right| \right\rceil,$$

且 $N_k = k \cdot (kM)^k$. 通过把序列 $\left(\dfrac{z_1}{kM}, \dfrac{z_2}{kM}, \cdots, \dfrac{z_k}{kM}\right)$ 重复 $(kM)^k$ 次来定义数 $x_{k,1}, \cdots, x_{k,N_k}$, 即如果 $\ell \equiv j \pmod k$, 则 $x_{k,\ell} = \dfrac{z_j}{kM}$. 那么我们有

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{k,j}^p = (kM)^k \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{z_j}{kM}\right)^p = (kM)^{k-p} \sum_{j=1}^{k} z_j^p.$$

那么由 (20.1) 式可知性质 (a) 以及 (b) 的第一部分都成立. 至于 (b) 的第二部分, 假定 $p \in C_k$ 以及 $1 \leqslant m \leqslant N_k$, 则 $m = kr + s$, r 是某个整数且 $1 \leqslant s \leqslant k$, 因此

$$\left|\sum_{j=1}^{m} x_{k,j}^p\right| = \left|\sum_{j=1}^{kr} x_{k,j}^p + \sum_{j=kr+1}^{kr+s} x_{k,j}^p\right| = \left|\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{z_j}{kM}\right)^p\right| \leqslant \frac{M}{(kM)^p} \leqslant \frac{1}{k}.$$

引理得证. ☆

现在令 $S_k = N_1 \cdots N_k (S_0 = 0)$. 定义序列 $\{a_n\}$:

$$(a_1, a_2, \cdots) = (x_{1,1}, \cdots, x_{1,N_1}, x_{2,1}, \cdots, x_{2,N_2}, \cdots, x_{k,N_k}, \cdots;$$

$$a_{S_k+j} = x_{k+1,j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N_{k+1}.$$

如果 $p \in D$ 以及 $k \geqslant p$, 则

$$\left|\sum_{j=S_k+1}^{S_{k+1}} a_j^p\right| = \left|\sum_{j=1}^{N_k+1} x_{k+1,j}^p\right| \geqslant 1,$$

由 Cauchy 收敛原理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛.

如果 $p \in C$ 且 $S_u < n < S_{u+1}$ 对某个 $u \geqslant p$ 成立, 则

$$\left|\sum_{j=S_p+1}^{n} a_j^p\right| = \left|\sum_{k=p+1}^{u-1} \sum_{j=1}^{N_k} x_{k,j}^p + \sum_{j=1}^{n-S_u-1} x_{u,j}^p\right| \leqslant \frac{1}{u}$$

那么由 Cauchy 收敛原理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛.

§ 20.2 第二天

1. 设 z 是一个复数且 $|z+1| > 2$. 证明: $|z^3+1| > 1$.

证明 有于 $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$, 因此只需要证明 $|z^2-z+1| \geqslant \frac{1}{2}$.

令 $z+1 = re^{i\theta}$, 其中 $r = |z+1| > 2$, 而 $\theta = \arg(z+1)$ 是某个实数. 则

$$z^2 - z + 1 = \left(re^{i\theta} - 1\right)^2 - \left(re^{i\theta} - 1\right) + 1 = r^2e^{2i\theta} - 3re^{2i\theta} + 3,$$

且

$$\begin{aligned}
\left|z^2 - z + 1\right|^2 &= \left(r^2e^{2i\theta} - 3re^{2i\theta} + 3\right)\left(r^2e^{-2i\theta} - 3re^{-2i\theta} + 3\right) \\
&= r^4 + 9r^2 + 9 - \left(6r^3 + 18r\right)\cos\theta + 6r^2\cos 2\theta \\
&= r^4 + 9r^2 + 9 - \left(6r^3 + 18r\right)\cos\theta + 6r^2\left(2\cos^2\theta - 1\right) \\
&= 12\left(r\cos\theta - \frac{r^2+3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(r^2 - 3\right)^2 > 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

得证.

2. 设 p 和 q 是互素的正整数. 证明:

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } pq \text{ 是偶数} \\ 1, & \text{如果 } pq \text{ 是奇数.} \end{cases} \tag{20.2}$$

这里 $\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的整数部分.

证明 先假定 pq 是偶数 (这意味着 p 和 q 奇偶性相反), 令 $a_k=(-1)^{\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor}$. 我们来证明 $a_k+a_{pq-1-k}=0$, 因此 (20.2) 式左边的项成对相消.

对每个正整数 k, 我们有 $\left\{\frac{k}{p}\right\}+\left\{\frac{p-1-k}{p}\right\}=\frac{p-1}{p}$, 因此

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{pq-1-k}{p}\right\rfloor&=\left(\frac{k}{p}-\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)+\left(\frac{pq-1-k}{p}-\left\{\frac{-1-k}{p}\right\}\right)\\&=\frac{pq-1}{p}-\frac{p-1}{p}=q-1,\end{aligned}$$

类似的还有

$$\left\lfloor\frac{pq-1-k}{q}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor=p-1.$$

由于 p,q 奇偶性相反, 那么 $\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor$ 和 $\left\lfloor\frac{pq-1-k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{pq-1-k}{q}\right\rfloor$ 也有相反的奇偶性, 因此 $a_{pq-1-k}=-a_k$.

再假定 pq 是奇数. 对每个指标 k, 分别用 p_k 和 q_k 表示 k 模 p 和 q 的余数. 注意到

$$\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor\equiv p\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+q\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor=(k-p_k)+(k-q_k)\equiv p_k+q_k \pmod 2.$$

由于 p,q 互素, 根据中国剩余定理可知映射 $k\mapsto(p_k,q_k)$ 是集合 $\{0,1,\cdots,pq-1\}$ 和 $\{0,1,\cdots,p-1\}\times\{0,1,\cdots,q-1\}$ 之间的双射. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor}&=\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{p_k+q_k}=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^{i+j}\\&=\left(\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\right)=1.\end{aligned}$$

3. 设 $v_1,\cdots,v_d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位向量. 证明: 存在一个单位向量 u 使得

$$|u\cdot v_i|\leqslant 1/\sqrt{d}$$

对 $i=1,2,\cdots,d$ 成立 (这里 $\cdot$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的一般内积).

证明 如果 $v_1,\cdots,v_d$ 线性相关, 那我们可以取一个垂直于 $\operatorname{span}v_1,\cdots,v_d$ 的单位向量 u, 所以假定 $v_1,\cdots,v_d$ 线性无关. 设 $w_1,\cdots,w_d$ 是 $(v_1,\cdots,v_d)$ 的对偶基, 即

$$w_i\cdot w_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\quad\forall 1\leqslant i,j\leqslant d.$$

由 $w_i\cdot v_i=1$ 我们有 $|w_i|\geqslant 1$.

对每个符号序列 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)\in\{+1,-1\}^d$, 定义 $u_\varepsilon=\sum_{i=1}^d\varepsilon_i w_i$. 那么我们有

$$|u_\varepsilon\cdot v_k|=\left|\sum_{i=1}^d\varepsilon_i(w_i\cdot v_k)\right|=\left|\sum_{i=1}^d\varepsilon_i\delta_{ik}\right|=|\varepsilon_k|=1,\quad k=1,\cdots,d.$$

现在来估计 $|u_\varepsilon|^2$ 的平均值,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^d}\sum_{\varepsilon\in\{+1,-1\}^n}|u_\varepsilon|^2 &= \frac{1}{2^d}\sum_{\varepsilon\in\{+1,-1\}}\left(\sum_{i=1}^d\varepsilon_i w_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^d\varepsilon_j w_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d\left(w_i\cdot w_j\right)\left(\frac{1}{2^d}\sum_{\varepsilon\in\{+1,-1\}}\varepsilon_i\varepsilon_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d\left(w_i\cdot w_j\right)\delta_{ij}=\sum_{i=1}^d|w_i|^2\geqslant d.\end{aligned}$$

这就说明存在 ε 使得 $|u_\varepsilon|^2\geqslant d$. 对这样的 ε, 向量 $u=u_\varepsilon/|u_\varepsilon|$ 满足条件.

4. 是否存在一个由正整数构成的无穷集合 M, 使得对任意 $a,b\in M$, $a<b$, $a+b$ 都没有非 1 平方因子?

证明　答案是肯定的. 我们构造一个无穷序列 $1=n_1<2=n_2<n_3<\cdots$ 使得对任意 $i<j$, n_i+n_j 都是不含非 1 平方因子的. 假定我们已经有一些数 $n_1<\cdots<n_k(k\geqslant 2)$ 满足条件, 我们要找下一个数 n_{k+1} 满足条件.

我们选择的 n_{k+1} 具有形式 $n_{k+1}=1+Mx$, 这里 $M=((n_1+\cdots+n_k+2k)!)^2$, x 是某个正整数. 对 $i=1,2,\cdots,k$, 我们有 $n_i+n_{k+1}=1+Mx+n_i=(1+n_i)m_i$, 其中 m_i 和 M 是互素的, 所以任意整除 $1+Mx+n_i$ 的数都和 M 互素.

为了找到一个合适的 x, 取一个大的 N, 考虑值 $x=1,2,\cdots,N$. 如果某个 $1\leqslant x\leqslant N$ 不合适, 这就意味着存在一个指标 $1\leqslant i\leqslant k$ 和素数 p 使得 $p^2|1+Mx+n_i$. 对 $p\leqslant 2k$, 这是不可能的, 因为 $p|M$. 而且我们还有 $p^2\leqslant 1+Mx+n_i<M(N+1)$, 所以 $2k<p<\sqrt{M(N+1)}$.

对任意固定的 i 和 p, 满足 $p^2|1+Mx+n_i$ 的 x 的值构成一个公差为 d^2 的等差数列, 因此存在至多 N/p^2+1 个这样的值. 总之, 不合适的 x 的值得个数小于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k\sum_{2k<p<\sqrt{M(N+1)}}\left(\frac{N}{p^2}+1\right) &< k\left(N\sum_{p>2k}\frac{1}{p^2}+\sum_{p<\sqrt{M(N+1)}}1\right)\\ &< kN\sum_{p>2k}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)+k\sqrt{M\,(N+1)}\\ &< \frac{N}{2}+k\sqrt{M\,(N+1)}.\end{aligned}$$

如果 N 足够大, 那么上式就小于 N, 必然存在一个合适的 x.

5. 考虑一个有 2013 颗珠子的圆项链, 每个珠子都被染成白色或者绿色. 一个项链的染色称为是好的, 指的是在连续 21 个珠子中至少有一个绿色的珠子. 证明: 染色是好的项链的个数为奇数.

证明　对 $k=0,1,\cdots$, 用 N_k 表示由连续 k 个珠子构成的好的开项链, 使得连续 21 个珠子中至少有一个绿色珠子. 对 $k\leqslant 21$, 所以的项链都满足条件, 所以 $N_k=2^k, 0\leqslant k\leqslant 20$. 特别地, N_0 是奇数, $N_1,\cdots,N_{20}$ 是偶数.

对 $k\geqslant 21$, 在最后 21 个珠子中必然有一个绿色的. 假定最后一个绿色的珠子在第 ℓ 个位置上, 则 $\ell\geqslant k-20$. 前面 $\ell-1$ 个珠子有 $N_{\ell-1}$ 种好的染色, 每一个这种好的染色都提供了一个长度

为 k 的好项链. 因此

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2} + \cdots + N_{k-21}, \quad k \geqslant 21. \tag{20.3}$$

由 (20.3) 式可得 $N_{21} = N_0 + \cdots + N_{20}$ 式奇数, $N_{22} = N_1 + \cdots + N_{21}$ 也是奇数.

再次将 (20.3) 式应用于 N_{k-1},

$$\begin{aligned} N_k &= N_{k-1} + \cdots + N_{k-21} \\ &= (N_{k-2} + \cdots + N_{k-22}) + N_{k-2} + \cdots + N_{k-21} \equiv N_{k-22} \pmod 2, \end{aligned}$$

所以在 $\{N_k\}$ 中序列奇偶性是以 22 为周期的. 因此

- 如果 $k \equiv 0 \pmod{22}$ 或 $k \equiv 21 \pmod{22}$, 则 N_k 是奇数;
- 其他情形下 N_k 为偶数.

现在考虑由 2013 个珠子组成的好的环链, 在一个介于两个珠子之间的固定点剪断. 剩下来的开项链在两端可能都有一些连续的白色珠子, 加起来最多 20 个. 假定在项链的的一端有 x 个白色珠子, 在另一端有 y 个白色珠子. 则我们有 $x, y \geqslant 1, x + y \leqslant 20$, 且我们在项链中部, 介于第一个和最后一个绿色珠子之间有一个好的开项链. 此中间项链包含 $2011 - x - y$ 个珠子. 所以多任意固定的 x, y, 这样的情形数为 $N_{2011-x-y}$.

容易得知从这样一个好的开项链中, 我们可以走早一个新的圆项链. 因此, 好项链的总数为

$$\begin{aligned} \sum_{x+y\leqslant 20} N_{2011-x-y} &= N_{2011} + 2N_{2010} + 3N_{2009} + \cdots + 21N_{1991} \\ &\equiv N_{2011} + N_{2009} + N_{2007} + \cdots + N_{1991} \pmod 2. \end{aligned}$$

由 $91 \cdot 22 - 1 = 2001$, N_{2001} 是奇数, 剩下的项是偶数, 所以好的环项链的个数为奇数.

21. 2014 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 21.1 第一天

1. 求出所有的实数对 (a,b), 使得存在唯一的 2×2 实对称矩阵 M, 使得 $\mathrm{tr}(M)=a, \det(M)=b$.

解 *方法一* 设矩阵为 $M=\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$, 上述两个条件说明 $x+y=a, xy-z^2=b$. 由于此式关于 x,y 对称, 当且仅当 $x=y$, 此矩阵才唯一. 因此 $2x=a, x^2-z^2=b$. 进一步, 如果 (x,y,z) 满足此方程, 则 $(x,y,-z)$ 也满足, 所以此矩阵唯一当且仅当 $z=0$. 这就意味着 $2x=a, x^2=b$, 所以 $a^2=4b$.

$$(x-y)^2+4z^2=(x+y)^2+4z^2-4xy=a^2-4b=0,$$

所以一定有 $x=y, z=0$, 这意味着 $M=\begin{pmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & a/2 \end{pmatrix}$ 是唯一的解.

方法二 注意到 $\mathrm{tr}(M)=a, \det(M)=b$ 当且仅当 M 的两个特征值 λ_1,λ_2 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的根. 如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 则 $M_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 和 $M_2=\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ 是两个不同的解, 与唯一性矛盾. 因此 $\lambda_1=\lambda_2=a/2$, 这说明 $a^2=4b$. 在这种情形下, 由于 M 是对称的, 因此是可以对角化的, 于是存在可逆矩阵 T 使得

$$M=T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

而这就使得 $M=\lambda(T^{-1}IT)=\lambda I$, 这也证明 M 是唯一的.

2. 考虑序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,\cdots\}$. 求出所有的正实数对 (α,β) 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k/n^{\alpha}=\beta$.

解 记 $N_n=\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 a_{N_n} 就是 n 第一次出现在此序列中的项, 考虑序列极限

$$b_{N_n}=\frac{\sum_{k=1}^{N_n}a_k}{N_n^{\alpha}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(1+\cdots+k)}{\binom{n+2}{2}^{\alpha}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}}{\binom{n+1}{2}^{\alpha}} = \frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}^{\alpha}} = \frac{\frac{1}{6}n^3(1+2/n)(1+1/n)}{(1/2)^{\alpha} n^{2\alpha}(1+1/n)^{\alpha}}.$$

可以发现极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_{N_n}$ 存在且非零当且仅当 $\alpha = \dfrac{3}{2}$. 在这种情形下, 极限为 $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. 所以, 数对 $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 是唯一可能的解. 对这个 α 和 β, 我们来证明原来的数列是收敛的.

设 N 是 $[N_n, N_{n+1}]$ 之间的一个正整数, 即 $N = N_n + m$ 对某个 $1 \leqslant m \leqslant n+1$ 成立. 那么我们有

$$b_N = \frac{\binom{n+2}{3} + \binom{m+1}{2}}{\left(\binom{n+1}{2} + m\right)^{3/2}}.$$

我们有不等式

$$\frac{\binom{n+2}{3}}{\left(\binom{n+1}{2} + n\right)^{3/2}} \leqslant n b_N \leqslant \frac{\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2}}{\left(\binom{n+1}{2}\right)^{3/2}}.$$

由于左右两边都收敛于 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, 则 b_N 也收敛于 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. 设 n 是一个正整数. 证明: 存在正实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得对多项式 $\pm a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1 x \pm a_0$ 的每一个符号的选择都有 n 个不同的根.

证明 我们对 n 进行归纳.$n=1$ 的情形是平凡的, 下面我们假定对某个 n, 已经有 $a_n, \cdots, a_0$ 满足条件, 现在考虑多项式

$$\widetilde{P}(x) = \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1}x^n \pm \cdots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x.$$

由归纳假设以及 $a_0 \neq 0$, 每一个这样的多项式都有 $n+1$ 个不同的零点, 包括 $\pm a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1 x \pm a_0$ 的 n 个非零根, 还有一个 0. 特别地, 每一个多项式都不以它的根为极值点. 因此我们可以取定 $\varepsilon > 0$, 使得对每个这样的多项式 $\widetilde{P}(x)$ 以及它的每个极值点 s, 我们有 $\widetilde{P}(s) > \varepsilon$. 我们断言每个多项式

$$P(x) = \pm a_n x^{n+1} \pm a_{n-1}x^n \pm \cdots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x \pm \varepsilon$$

也恰有 $n+1$ 个不同的零点. 由于 $\widetilde{P}(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点, 它在 n 个不同的点取到极值. 我们记这些极值为 $-\infty = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} = +\infty$. 则对每个 $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$,$\widetilde{P}(s)$ 和 $\widetilde{P}(s+1)$ 符号相反. 由 ε 的选择, 这个结论对 $P(s)$ 和 $P(s+1)$ 也成立. 因此在每个区间 (s_i, s_{i+1}) 内至少有一个 $P(x)$ 的实根, 即 $P(x)$ 至少有 $n+1$ 个零点, 这就说明我们已经找到了一列正实数 $a'_{n+1} = a_n, a'_n = a_{n-1}, \cdots, a'_1 = a_0, a'_0 = \varepsilon$ 满足条件.

4. 设 $n > 6$ 是一个完全数, 且 $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ 是它的素因子分解,$1 < p_1 < \cdots < p_k$. 证明 e_1 是偶数.

注 一个数 n 称为完全数是指 $s(n) = 2n$, 其中 $s(n)$ 表示 n 的所有因子的和.

证明 反证法, 设 e_1 是奇数. 我们知道 $s(n) = \prod\limits_{i=1}^{k}(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{e_i}) = 2n = 2p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$. 由于 e_1 是奇数,$p_1 + 1$ 整除第一个因子 $1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{e_1}$, 所以 $p_1 + 1$ 整除 $2n$. 由于 $p_1 + 1 > 2$, 则 $p_1, \cdots, p_k$ 中至少有一个整除 $p_1 + 1$. 而素数 $p_3, \cdots, p_k$ 比 $p_1 + 1$ 大,p_1 不可能整除 $p_1 + 1$,

所以 p_2 一定整除 p_1+1. 由于 $p_1+1<2p_2$, 这当且仅当 $p_2=p_1+1$, 因此 $p_1=2, p_2=3$, 故 $6|n$.

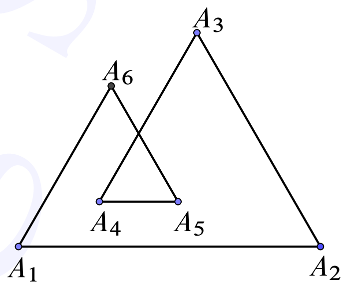
现在 $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ 和 1 是 n 的不同因子, 所以

$$s(n) \geqslant n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}+1=2n+1>2n,$$

矛盾.

注 我们知道所有偶数的完全数都具有形式 $n=2^{p-1}(2^p-1)$, 使得 p 和 2^p-1 互素. 所以, 如果 e_1 是奇数, 则 $k=2, p_1=2, p_2=2^p-1, e_1=p-1$ 且 $e_2=1$. 如果 $n>6$, 则 $p>2$, 所以 p 是奇数, 且 $e_1=p-1$ 应当是奇数.

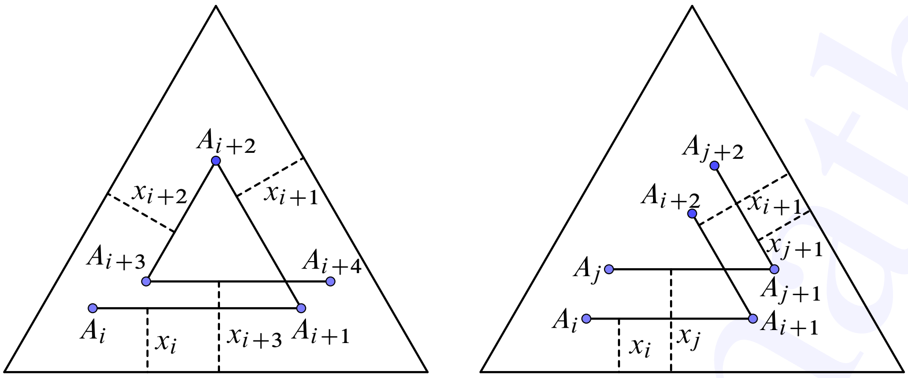
5. 设 $A_1A_2\cdots A_{3n}$ 是由 Euclid 空间中的 $3n$ 条线段组成的闭的折线. 假定其中任意三个顶点都不共线, 且对每个指标 $i=1,2,\cdots,3n$, 三角形 $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 都具有逆时针的方向, 且 $\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}=60^\circ$, 其中 $A_{3n-1}=A_1, A_{3n+2}=A_2$. 证明: 此折线的自交的交点数最多为 $\frac{3}{2}n^2-2n+1$.



证明 把此折线放在一个等边三角形 T 的内部, 使得三角形的边分别和断线的各个部分平行. 对每个 $i=1,2,\cdots,3n$, 用 x_i 表示线段 A_iA_{i+1} 与 T 的平行于 A_iA_{i+1} 的边的距离. 接下来我们使用的指标都会模 3.

易知如果 $i\equiv j \pmod 3$, 则折线 $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 和 $A_jA_{j+1}A_{j+2}$ 最多相交一次, 当且仅当 $x_i<x_{i+1}, x_j>x_{j+1}$ 或者 $x_i<x_{i+1}, x_j>x_{j+1}$ 才可能. 而且这样的情形覆盖了所有可能的自交情形. 所以, 自交的交点数目不可能超过满足下述情形的数对 (i,j) 的数目

$$i\equiv j \pmod 3,\quad (x_i<x_{i+1})\text{或}(x_i>x_{i+1}, x_j<x_{j+1}). \tag{$*$}$$



把指标 $1,2,\cdots,3n$ 按模 3 的余数归类, 每个类都含有 n 个指标. 一共有 $3\binom{n}{2}$ 对指标 (i,j) 满足 $i \equiv j \pmod 3$. 我们将证明对每个 k 满足 $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, 都存在指标 i, 使得数对 $(i, i+6k)$ 不满足 $(*)$ 式. 这就有 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 对了, 这就说明至多有 $3\binom{n}{2} - \left[\frac{n-1}{2}\right] \leqslant \frac{3}{2}n^2 - 2n + 1$ 个自交点数.

不失一般性, 我们假定 $x_{3n} = x_0$ 是 $x_1,\cdots,x_{3n}$ 中最小的. 假定所有下列数对

$$(-6k,0),\ \ (-6k+1,1),\ \ (-6k+2,2),\ \ \cdots,\ \ (-1,6k-1),\ \ (0,6k) \tag{$**$}$$

都满足 $(*)$ 式. 由于 x_0 是最小的, 我们有 $x_{-6k} > x_0$. 数对 $(-6k,0)$ 满足 $(*)$ 式, 我们有 $x_{-6k+1} < x_1$. 那么我们可得 $x_{-6k+2} > x_2,\cdots$, 最后可得 $x_0 > x_{6k}$. 但是这和 x_0 的最小性矛盾. 因此, 存在 $(**)$ 中的一个数对不满足 $(*)$.

§ 21.2 第二天

1. 对正整数 x, 用 $d_n(x)$ 表示它的第 n 位数字, 即 $d_n(x) \in \{0,1,\cdots,9\}$ 且 $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x)10^{n-1}$. 假定对某个序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 序列 $\{d_n(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 中只有有限个 0. 证明: 存在无穷多个正整数不出现在序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中.

证明 *方法一* 由假设知存在某个指标 n_0 使得 $d_n(a_n) \neq 1$ 对所有 $n \geqslant n_0$ 成立. 下面我们证明

$$a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots > 10^n \quad \forall n \geqslant n). \tag{1}$$

注意到在求和式 $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(a_n)10^{k-1}$ 中有一项 $d_n(a_n)10^{n-1}$ 且 $d_n(a_n) \geqslant 1$, 因此 $a_n \geqslant 10^{n-1}$. 则对 $m > n$ 有 $a_m \geqslant 10^m > 10^n$, 这就证明了 (1) 式.

由 (1) 式可知, 仅仅前 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可能在区间 $[1, 10^n]$. 因此, 在此区间内至少有 $10^n - n$ 个整数没有出现在此序列中. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(10^n - n) = +\infty$, 这说明有无穷多个数不出现在 $a_1, a_2, \cdots$.

方法二　我们将利用 Cantor 对角方法来构造无穷多个正整数不出现在序列 $\{a_n\}$ 中.

假定对 $n > n_0$ 有 $d_n(a_n) \neq 0$, 定义序列

$$g_n = \begin{cases} 2, & d_n(x_n) = 1 \\ 1, & d_n(x_n) \neq 1 \end{cases}.$$

因此 $g_n \neq d_n(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$. 设

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} g_n \cdot 10^{n-1},\ \ k = 1, 2, \cdots.$$

由于 $x_{k+1} \geqslant 10^k > x_k$,$\{x_k\}$ 是严格单调递增的, 因此它包含无穷多个不同的正整数. 我们来证明 $x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots$ 不出现在序列 $\{a_n\}$ 中, 换句话说, 对每个 $n \geqslant 1$ 和 $k \geqslant n_0$, 有 $x_k \neq a_n$.

显然, 如果 $k \geqslant n$, 则 $d(x_k) = g_n \neq d_n(a_n)$, 所以 $x_k \neq a_n$.

如果 $n > k \geqslant n_0$, 则 $d_n(x_k) = 0 \neq d_n(a_n)$, 所以 $x_k \neq a_n$.

2. 设 $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 是一个 $n \times n$ 实对称矩阵, 用 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 表示它的特征值. 证明

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ii} a_{jj} \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j,$$

并求出所有使得等号成立的矩阵.

证明　首先实对称矩阵的特征值均为实数, 原不等式是有意义的. 因为矩阵的迹等于特征值的和, 即 $\sum\limits_{i=1}^n a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} a_{ii} a_{jj} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j.$$

于是, 待证不等式等价于

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

矩阵 $A^2 = A^{\mathrm{T}} A$ 的特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$, 因此可得

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}} A\right) = \operatorname{tr}\left(A^2\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

等号成立当且仅当矩阵 A 是对角阵.

3. 设 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, x > 0, n$ 是一个正整数. 证明: $|f^{(n)}(x)| < \dfrac{1}{n+1}$, 这里 $f^{(n)}$ 表示 f 的 n 阶导数.

证明　*方法一*　取 $f(0) = 1$, 则我们可以假定 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是解析的. 设

$$g(x) = x^{n+1}\left(f^{(n)}(x) - \frac{1}{n+1}\right),$$

则 $g(0)=0$ 且

$$\begin{aligned}g'(x)&=(n+1)x^n\left(f^{(n)}(x)-\frac{1}{n+1}\right)+x^{n+1}f^{(n+1)}(x)\\&=x^n\left((n+1)f^{(n)}(x)+xf^{(n+1)}(x)-1\right)=x^n\left(bigl(xf(x))^{(n+1)}-1\right)\\&=x^n\left(\sin^{(n+1)}(x)-1\right)\leqslant 0.\end{aligned}$$

因此 $g(x)\leqslant 0,\forall x>0$. 考虑到 $g'(x)<0,0<x<\frac{\pi}{2}$, 即可得到待证的不等式.

方法二 首先有

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_0^1-\cos(xt)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(-\cos(xt)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^n g_n(xt)\,\mathrm{d}t,$$

这里的函数 $g_n(x)$ 可以是与 n 有关的 $\pm\sin u$ 或者 $\pm\cos u$. 我们只需要注意到 $|g_n|\leqslant 1$ 且等号只在有限个点成立, 所以

$$\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}\right|\leqslant\int_0^1 t^n\,|g_n(xt)|\,\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}.$$

4. 我们称一个集合几乎 k 包含于一个超平面, 是指此集合中至多有 k 个元素不属于此超平面. 如果一个点集没有几乎 k 包含于任何一个超平面, 则称此点集是一个 k 泛型集. 对每一对正整数 k 和 n, 求出最小的 $d(k,n)$ 使得 $\mathbb{R}^n$ 中每一个有限 k 泛型集都包含一个至多 $d(k,n)$ 个元素的 k 泛型集.

解 答案为 $d(k,n)=\begin{cases}kn, & k,n>1\\ k+n, & \text{其他}\end{cases}$.

在下面的证明中, 我们说一个超平面跳过一个点来表示此平面不包含此点.

当 $n=1$ 时, 答案显然成立.

对 $k=1$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中任取一个有限集使得任意超平面不包含此点. 我们逐步来构造一个 $n+1$ 个点的子集: 每一步中加一个点, 不包含在由原来的点所张成的最小平面内. 因此任意的 1 类集都包含一个 $n+1$ 个点的非退化的单形, 而且显然包含 $n+1$ 个点的非退化单形不可能被约化而不失 1 类性.

在 $k,n>1$ 的情形, 我们来给出一个 $k\cdot n$ 个点的例子. 在每个坐标轴上取 k 个不同于原点的点, 我们来证明这个集合是 k 泛型集. 有两类平面: 包含或不包含原点. 如果一个平面包含原点, 则它要么包含一个坐标轴上的所有点, 要么不包含轴上任意点. 由于没有任何平面包含所有坐标轴, 它一定不包含其中一条轴上选定的 k 个点. 如果某个平面不包含原点, 它包含每条坐标轴上至多一个点, 因此它至少不包含所选定的 $n(k-1)$ 个点. 剩下的只需要证明一个简单的不等式 $n(k-1)\geqslant k$, 这等价于 $(n-1)(k-1)\geqslant 1$, 这对 $n,k>1$ 自然成立.

我们上面给出的例子是极小的: 如果移除任何一个点, 比如 x 轴上的一个点 i, 则超平面 $x_i=0$ 只跳过 $k-1$ 个点, 并且我们的集合不再是 k 泛型集. 因此 $d(k,n)\geqslant kn$.

还需要对 $k,n>1$ 证明 $d(k,n)\leqslant kn$, 即对每一个 k 泛型的有限点集, 可以选择最多 kn 点的 k 泛型子集. 我们把点的子集称为 *极小的*, 如果我们去掉任何点, 就失去了 k 泛型性. 只需要证明 $\mathbb{R}^n$

中的任意极小 k 泛型集至多包含 kn 个点. 一个超平面称为是 *充足的*, 如果它刚好跳过了 k 个点. 如果一个点当且仅当它只被一个充分的超平面跳过时, 该点不能从 k 泛型集中删除. 因此, 在极小集合中, 每个点都被一个充分的超平面跳过.

组织以下过程: 在每一步中我们选择一个充足的超平面, 并将所有被跳过的点涂成蓝色. 每次我们选择一个充足的超平面, 它会跳过一个未上漆的点. 每个步骤 (开始后) 的未涂漆点是所有选定的超平面的交点, 每个步骤都会减少选定超平面的交集 (因为每个步骤上至少绘制了一个点).

请注意, 在每个步骤中我们最多绘制 k 个点, 因此, 如果我们从一个不少于 nk 个点的极小集开始, 我们可以选择 n 个平面并且仍然至少有一个未涂漆的点. 所选平面的交点是一个点 (因为在每一步上交叉平面的尺寸都减小了), 所以在该集合中最多有 $nk+1$ 个点. 最后一个未涂漆的点由 O 表示, 最后一个未涂漆的线 (在最后一个之前的步骤上形成) 由 ℓ_1 表示.

这条线是除最后一个超平面以外的其他超平面的交线. 如果我们有超过 nk 个点, 则 ℓ_1 恰好包含此集合中的 $k+1$ 个点, 其中之一为 O.

我们可以通过选择相同的超平面执行相同的过程, 但顺序不同. 无论如何, 在每个步骤我们将绘制最多 k 个点, 并且在 n 个步骤之后仅 O 将保持未涂漆; 所以每一步都恰好是 k 点. 在最后一步之前的步骤中, 我们可能得到一条不同的线, 即除了最后一条线之外的所有平面的交点. 以这种方式获得的线将表示为 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$, 并且每个都包含除了 O 之外的恰好 k 个点. 由于我们在 n 行上有 O 和 k 个点, 这就是整个集合. 请注意, 跨越这些线的向量是线性无关的 (因为对于每条线, 我们有一个包含除该线之外的所有其他线的超平面). 因此, 通过删除 O, 我们获得了我们已经描述过的示例, 即 k 泛型的.

注 从以上证明我们知道, 这个例子是唯一的.

5. 对每个正整数 n, 用 D_n 满足对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 满足 $x_j \neq j$ 的 $(1,2,\cdots,n)$ 的置换 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的个数. 对 $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}$, 用 $\Delta(n,k)$ 表示对每个 $1 \leqslant i \leqslant k$ 满足 $x_i = k+i$, 对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$ 满足 $x_j \neq j$ 的 $(1,2,\cdots,n)$ 的置换 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的个数. 证明:

$$\Delta(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i).}$$

证明 设 $a_r \in \{i_1,\cdots,i_k\} \cap \{a_1,\cdots,a_k\}$. 因此对某个 $s \neq r$ 有 $a_r = i_s$. 现在有两种情形:

情形 1. $a_s \in \{i_1,\cdots,i_k\}$. 设 $a_s = i_t$. 在这种情形下, 重排 $x = (x_1,\cdots,x_n)$ 满足条件 $x_{i_j} = a_j$ 当且仅当集合 $[n]\backslash\{i_t\}$ 的重排 $x' = (x'_1,\cdots,x'_{i_t-1},x'_{i_t+1},x'_n$ 对所有的 $j \neq t$ 满足 $x'_{i_j} = a'_j$, 这里 $j \neq ss$ 时 $a'_j = a_j$, 而 $a'_s = a_t$. 对给定具有 l 个公共元素的集合 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 和 $\{a_1,\cdots,a_k\}$, $[n]$ 的重排 $x = (x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $x_{i_j} = a_j$; 对给定的具有 $\ell-1$ 个公共元素的集合 $\{i_1,\cdots,i_k\}\backslash\{i_t\}$ 和 $\{a'_1,\cdots,a'_k\}\backslash\{a'_t\}$ 的重排满足 $x_{i_j} = a'_j$, 这两个重排之间建立了一个一一对应.

情形 2. $a_s \notin \{i_1,\cdots,i_k\}$. 在这种情形下, 重排 $x = (x_1,\cdots,x_n)$ 满足中条件 $x_{i_j} = a_j$ 当且仅当集合 $[n]\backslash\{a_s\}$ 的重排 $x' = (x'_1,\cdots,x'_{a_s-1},x'_{a_s+1},x'_n)$ 对所有的 $j \neq s$ 满足 $x'_{i_j} = a_j$. 对给定的具有 ℓ 个公共元素的集合 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ 和 $\{a_1,\cdots,a_k\}$, $[n]$ 的重排 $x = (x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $x_{i_j} = a_j$; 对给定的具有 $\ell-1$ 个元素的集合 $\{i_1,\cdots,i_k\}\backslash\{i_s\}$ 和 $\{a_1,\cdots,a_k\}\backslash\{a_s\}$, 重排 $x' = (x'_1,\cdots,x'_{a_s-1},x'_{a_s+1},x'_n)$ 满足 $x_{i_j} = a_j$.

这些讨论证明了 $\Delta*n,k\ell)=\Delta(n-1,k-1,\ell-1)$. 重复此讨论我们得到

$$\Delta(n,k,\ell)=\Delta(n-\ell,k-\ell,0).$$

因此我么可以假定 $\ell=0$. 对 $2k\leqslant n$, 我们来估计 $\Delta(n,k,0)$. 对 $k=0$, 显然我们有 $\Delta(n,0,0)=D_n$. 对 $k\geqslant 1$, 我们断言

$$\Delta(n,k,0)=\Delta(n-1,k-1,0)+\Delta(n-2,k-1,0).$$

对满足 $x_{i_j}=a_j$ 的重排 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 有两种情形: $x_{a_1}=i_1$ 或 $x_{a_1}\neq i_1$.

在第一种情形, 对于给定的不交的集合 $\{i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{a_2,\cdots,a_k\}$, 我们需要估计集合 $[n]\backslash\{i_1,a_1\}$ 的重排的个数, 此数目为 $\Delta(n-2,k-1,0)$.

在第二种情形, 对于给定的不交的集合 $\{i_2,\cdots,i_k\}$ 和 $\{a_2,\cdots,a_k\}$, 我们需要估计集合 $[n]\backslash\{a_1\}$ 的重排的个数, 此数目为 $\Delta(n-1,k-1,0)$.

下面我们对 k 归纳证明

$$\Delta(n,k,0)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i).}$$

对 $k=1$, 我们有

$$\Delta(n,1,0)=\Delta(n-1,0,0)=\Delta(n-2,0,0)=D_{n-1}+D_{n-2}=\frac{D_n}{n-1}.$$

现在假设结论对 $k-1$ 成立. 我们有

$$\begin{aligned}
\Delta(n,k,0)&=\Delta(n-1,k-1,0)+\Delta(n-2,k-1,0)\\
&=\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i}\frac{D_{n-(k-1+i)}}{(n-1)-(k-1+i)}+\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i}\frac{D_{(n-1)-(k-1+i)}}{(n-2)-(k-1+i)}\\
&=\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i}\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-2}{i-1}\frac{D_{n-(k+i-1)}}{(n-1)-(k+i-1)}\\
&=\frac{D_{(n+1)-k}}{n-k}+\sum_{i=1}^{k-2}\binom{k-2}{i}\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}\\
&\quad+\frac{D_{(n+1)-(2k-1)}}{n-(2k-1)}+\sum_{i=1}^{k-2}\binom{k-2}{i-1}\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}\\
&=\frac{D_{(n+1)-k}}{n-k}+\sum_{i=1}^{k-2}\left[\binom{k-2}{i}+\binom{k-2}{i-1}\right]\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}+\frac{D_{(n+1)-(2k-1)}}{n-(2k-1)}\\
&=\frac{D_{(n+1)-k}}{n-k}+\sum_{i=1}^{k-2}\binom{k-1}{i}\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}+\frac{D_{(n+1)-(2k-1)}}{n-(2k-1)}\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{D_{(n+1)-(k+i)}}{n-(k+i)}.
\end{aligned}$$

注　作为上述问题的推论, 我们可以解决第一个问题. 令 $n = 2k, i_j = j$, 对 $j = 1, \cdots, k$ 令 $a_j = k + j$. 那么重排 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 满足条件 $x_{i_j} = a_j$ 当且仅当 $x' = (x_{k+1}, \cdots, x_n)$ 是 $[k]$ 的置换. 这样的置换 x' 的数目是 $k!$, 因此 $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{D_{k+1-i}}{k-i} = k!$.

22. 2015 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 22.1 第一天

1. 对任意整数 $n \geqslant 2$, 两个 $n \times n$ 实矩阵 A, B 满足方程

$$A^{-1}+B^{-1}=(A+B)^{-1},$$

证明 $\det(A)=\det(B)$.

同样的结论是否对复矩阵也成立?

证明 两边乘以 $(A+B)$ 我们得到

$$\begin{aligned} I &= (A+B)(A+B)^{-1}=(A+B)(A^{-1}+B^{-1}) \\ &= AA^{-1}+AB^{-1}+BA^{-1}BB^{-1}=I+AB^{-1}+BA^{-1}+I, \end{aligned}$$

$$AB^{-1}+BA^{-1}+I=\boldsymbol{O}.$$

记 $X=AB^{-1}$, 则 $A=XB$ 且 $BA^{-1}=X^{-1}$, 所以 $X+X^{-1}+I=\boldsymbol{O}$, 乘以 $(X-I)X$ 得

$$\boldsymbol{O}=(X-I)X\cdot(X+X^{-1}+I)=(X-I)\cdot(X^2+X+I)=\boldsymbol{O}=X^3-I.$$

因此,

$$X^3=I,$$

$$(\det X)^3=\det(X^3)=\det(I)=1,$$

$$\det X=1,$$

$$\det A=\det(XB)=\det X\cdot\det B=\det B.$$

在复矩阵的情形是不对的. 令 $\omega=\frac{1}{2}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. 显然 $\omega\notin\mathbb{R}$ 且 $\omega^3=1$, 所以 $1+\omega+\omega^2=1+\omega+\overline{\omega}$. 设 $A=I$, B 是对角元均为 ω 或 $\overline{\omega}=\omega^2$ 使得 $\det(B)\neq 1$ (如果 n 不被 3 整除, 我们可以令 $B=\omega I$). 则 $A^{-1}=I$, $B^{-1}=\overline{B}$. 显然 $I+B+\overline{B}=\boldsymbol{O}$, 且

$$(A+B)^{-1}=\left(-\overline{B}\right)^{-1}=-B=I+\overline{B}=A^{-1}+B^{-1},$$

由 A 和 B 的选择可知 $\det A=1\neq\det B$.

2. 对正整数 n, 设 $f(n)$ 表示把 n 写为二进制数以后再把每一个 0 换成 1, 把 1 换成 0 得到的数. 例如, $n=23$ 的二进制数为 10111, 所以 $f(n)$ 的二进制数就是 1000, 因此 $f(23)=8$. 证明

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

等号何时成立?

证明　设 r 和 k 是正整数且满足 $2^{r-1} \leqslant k < 2^r$, 则 k 有 r 个二进制数字, 所以

$$k+f(k)=\overline{\underbrace{11\cdots1}_{r}}^{(2)}=2^r-1.$$

假定 $2^{s-1}-1 \leqslant n \leqslant 2^s-1$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+2)}{2}+\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \sum_{k=1}^{n}\big(k+f(k)\big)\\
&= \sum_{r=1}^{s-1}\sum_{2^{r-1}\leqslant k<2^r}\big(k+f(k)\big)+\sum_{2^{s-1}\leqslant k\leqslant n}\big(k+f(k)\big)\\
&= \sum_{r=1}^{s-1} 2^{r-1}\cdot(2^r-1)+(n-2^r+1)\cdot(2^s-1)\\
&= \sum_{r=1}^{s-1} 2^{2r-1}-\sum_{r=1}^{s-1} 2^{r-1}+(n-2^{s-1}+1)(2^s-1)\\
&= \frac{2}{3}(4^{s-1}-1)-(2^{s-1}-1)+(2^s-1)n-2^{2s-1}+3\cdot 2^{s-1}-1\\
&= (2^s-1)n-\frac{1}{3}4^s+2^s-\frac{2}{3},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{4}-\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \frac{n^2}{4}-\left((2^s-1)n-\frac{1}{3}4^s+2^s-\frac{2}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{3}{4}n^2-\left(2^s-\frac{3}{2}\right)n+\frac{1}{3}4^s-2^s+\frac{2}{3}\\
&= \frac{3}{4}\left(n-\frac{2^{s+1}-2}{3}\right)\left(n-\frac{2^{s+1}-4}{3}\right).
\end{aligned}$$

主音调最后一个式子的两个因式的差不超过 1, 且其中一个一定是整数: 如果 s 为偶数则 $\dfrac{2^{s+1}-2}{3}$ 是整数, 如果 s 为奇数则 $\dfrac{2^{s+1}-4}{3}$ 是整数. 因此, 要么其中一个式子为零, 那么结果为零, 要么两个因子具有相同的符号, 那么此乘积严格为正. 这就证明了结论, 且当 $n=\dfrac{2^{s+1}-2}{3}$ (s 为偶数) 或 $n=\dfrac{2^{s+1}-4}{3}$ (s 为奇数) 时等式成立.

3. 设 $F(0)=0, F(1)=\dfrac{3}{2}$, 以及 $F(n)=\dfrac{2}{5}F(n-1)-F(n-2), n\geqslant 2$. 问 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^n)}$ 是否为有理数?

解 *方法一* 此线性递推的特征方程为 $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$, 特征根为 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$, 所以存在常数 a,b 使得 $F(n)=a\cdot 2^n+b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$. 由 $F(0)=0$ 和 $F(1)=\frac{3}{2}$ 可得 $a+b=0, 2a+\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$, 因此 $a=1, b=-1$, 于是

$$F(n)=2^n-2^{-n}.$$

注意到

$$\frac{1}{F(2^n)}=\frac{2^{2^n}}{(2^{2^n})^2-1}=\frac{1}{2^{2^n}-1}-\frac{1}{(2^{2^n})^2-1}=\frac{1}{2^{2^n}-1}-\frac{1}{,}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2^n}-1}-\frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{1}{2^{2^0}-1}=1.$$

因此级数的和为 1, 是一个有理数.

方法二 与方法一相同, 我们得到 $F(n)=2^n-2^{-n}$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^n)}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2^n}-2^{-2^n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k\cdot 2^n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n(2k+1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=1.\end{aligned}$$

这也说明级数收敛到 1, 这里我们利用了每一个正整数 m 都有唯一的表示 $m=2^m(2k+1)$, 这里 n,k 均为非负整数.

4. 判定是否存在 15 个整数 $m_1,\cdots,m_{15}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{15}m_k\cdot\arctan(k)=\arctan(16). \tag{22.1}$$

解 我们来证明这样的整数 $m_1,\cdots,m_{15}$ 不存在.

假定 (22.2) 对整数 $m_1,\cdots,m_{15}$ 成立, 则复数 $z_1=1+16\mathrm{i}$ 与复数

$$z_2=(1+\mathrm{i})^{m_1}(1+2\mathrm{i})^{m_2}(1+3\mathrm{i})^{m_3}\cdots(1+15\mathrm{i})^{m_{15}}$$

的参数一致. 因此比值 $R=z_2/z_1$ 是非零实数. 由于 $\Re z_1=1$ 而 $\Re z_2$ 是一个整数, 所以 R 是一个非零整数.

考虑 z_1 和 z_2 绝对值的平方, 我们得到

$$(1+16^2)R^2=\prod_{k=1}^{15}(1+k^2)^{m_k}.$$

注意到 $p=1+16^2=257$ 是一个素数, 通过 p 进数估值产生一个简单的矛盾: 右手边的所有素数因子都严格低于 p (因为 $k<16$ 意味着 $1+K2<p$). 另一方面, 在左侧, 素数 p 以奇数指数出现.

5. 设 $n \geqslant 2, A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ 是 n 伟 Euclidean 空间中的 $n+1$ 个点, 且不在同一个超平面, 设点 B 严格在 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ 生成的凸包内部. 证明 $\angle A_i B A_j > 90^\circ$ 至少对 n 对满足 $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ 的数组 (i, j) 成立.

证明 设 $\boldsymbol{v}_i = \overrightarrow{BA_i}$. 条件 $\angle A_i B A_j > 90^\circ$ 等价于 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j < 0$. 由于 B 是单形的内点, 存在权值 $w_1, \cdots, w_{n+1} > 0$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} w_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.

下面我们在顶点 $1, \cdots, n+1$ 之间构造一个图. 如果 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j < 0$, 则在顶点 v_i 与 v_j 之间连一条边, 我们来证明此图是连通的. 由于在 $n+1$ 个顶点上的连通图至少有 n 条边, 这样就可以证明原来的命题.

假定此图是非连通的, 那么此图可以分为两个不交的非空集, 记为 V 和 W, 使得 $V \cup W = \{1, 2, \cdots, n+1\}$. 由于在这两个顶点集之间没有边, 我们有 $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \geqslant 0$ 对任意 $i \in V$ 和 $j \in W$ 车还能管理.

考虑

$$0 = \left(\sum_{i \in V \cup W} w_i \boldsymbol{v}_i\right)^2 = \left(\sum_{i \in V} w_i \boldsymbol{v}_i\right)^2 + \left(\sum_{i \in W} w_i \boldsymbol{v}_i\right)^2 + 2 \sum_{i \in V} \sum_{i \in W} w_i w_j \left(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j\right).$$

注意到右边的所有项都是非负的. 且 $\sum\limits_{i \in V} w_i \boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i \in W} w_i \boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}$, 因此至少有两个严格非零的项, 矛盾.

注 如果 $\boldsymbol{v}_{n+1} = (1, 1, \cdots, 1)$ 且对 $i = 1, \cdots, n$ 有 $\boldsymbol{v}_i = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i-1}, -1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-i})$, 则 $v_i \cdot v_j < 0$ 只对 $i = n+1$ 或 $j = n+1$ 成立, 因此题目中的数 n 是最佳的. 此题源自 Math Stack Exchange 论坛.

§ 22.2 第二天

1. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2.$$

证明 我们来证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}. \tag{22.2}$$

两边乘以 $\sqrt{n}(n+1)$, 不等式 (22.2) 等价于

$$1 < 2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1)} \Longleftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < n + (n+1),$$

由均值不等式, 这显然成立. 于是应用不等式 (22.2) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) < 2.$$

2. 计算

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

解 方法一 对 $A>1$, 被积函数大于 1, 所以

$$\frac{1}{A}\int_!^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x>\frac{1}{A}\int_1^A 1\,\mathrm{d}x=\frac{1}{A}(A-1)=1-\frac{1}{A}.$$

为了找到一个紧的上界, 固定两个实数 $\delta>0$ 和 $K>0$, 将区间在点 $1+\delta$ 和 $K\log A$ 处分为三部分. 注意到对充分大的 A (即对某个 $A_0(\delta,K)>1$, $A>A_0(\delta,K)$), 我们有 $1+\delta<K\log A<A$. 对 $A>1$, 被积函数是单调递减的, 所以我们可以通过它在区间左端点附近的值来估计它:

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{A}\left(\int_1^{1+\delta}+\int_{1+\delta}^{K\log A}+\int_{K\log A}^A\right)\\&<\frac{1}{A}\left(\delta\cdot A(K\log A-1-\delta)A^{\frac{1}{1+\delta}}+(A_K\log A)A^{\frac{1}{K\log A}}\right)\\&<\frac{1}{A}\left(\delta A+KA^{\frac{1}{1+\delta}}\log A+A\cdot A^{\frac{1}{K\log A}}\right)\\&=\delta+KA^{-\frac{\delta}{1+\delta}}\log A+\mathrm{e}^{\frac{1}{K}},\end{aligned}$$

因此, 对 $A>A_0(\delta,K)$ 我们有

$$1-\frac{1}{A}<\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x<\delta+KA^{-\frac{\delta}{1+\delta}}\log A+\mathrm{e}^{\frac{1}{K}}.$$

令 $A\to+\infty$, 我们得到

$$1\leqslant\liminf_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\leqslant\limsup_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\leqslant\delta+\mathrm{e}^{\frac{1}{K}}.$$

现在令 $\delta\to0^+$, $K\to+\infty$, 我们得到

$$1\leqslant\liminf_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\leqslant\limsup_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\leqslant1.$$

因此 $\liminf\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\leqslant\limsup\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=1$, 即

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=1.$$

方法二 我们将应用 L'Hospital 法则.

令 $f(A<x)=A^{\frac{1}{x}}$, $g(A,x)=\frac{1}{x}A^{\frac{1}{x}}$, $F(A)=\int_!^A f(A,x)\,\mathrm{d}x$, $G(A)=\int_1^A g(A,x)\,\mathrm{d}x$. 由于 $\frac{\partial}{\partial A}f$ 和 $\frac{\partial}{\partial A}g$ 都连续, 参数积分 $F(A)$ 和 $G(A)$ 关于 A 可导, 且

$$F'(A)=f(A,A)+\int_1^A\frac{\partial}{\partial A}f(A,x)\,\mathrm{d}x=A^{\frac{1}{A}}+\int_1^A\frac{1}{x}A^{\frac{1}{x}-1}\,\mathrm{d}x=A^{\frac{1}{A}}+\frac{1}{A}G(A),$$

且

$$G'(A)=g(A,A)+\int_1^A\frac{\partial}{\partial A}g(A,x)\,\mathrm{d}x=\frac{A^{\frac{1}{A}}}{A}+\int_1^A\frac{1}{x^2}A^{\frac{1}{x}-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= A^{\frac{1}{A}} \left(\frac{-1}{\log A} A^{\frac{1}{x}-1} \right) \Bigg|_1^A = \frac{A^{\frac{1}{A}}}{A} - \frac{A^{\frac{1}{A}}}{A \log A} + \frac{1}{\log A}.$$

由于 $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{\frac{1}{A}} = 1$, 我们可知 $\lim\limits_{A\to+\infty} G'(A) = 0$. 有 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{G(A)}{A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{G'(A)}{1} = 0,$$

因此

$$\lim_{A\to+\infty} F'(A) = \lim_{A\to+\infty} \left(A^{\frac{1}{A}} + \frac{G(A)}{A} \right) = 1 + 0 = 1.$$

再次应用 L'Hospital 法则我们得到

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A} \int_1^A A^{\frac{1}{x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \frac{F(A)}{A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{F'(A)}{1} = 1.$$

3. 考虑拉丁字母表中所有长度为 26 的 26^{26} 个单词. 如果一个单词中有 k 个字母未出现, 定义这个单词的重量为 $\dfrac{1}{k+1}$, 证明所有单词的重量之和为 3^{75}.

证明 记 $n = 26$, 则 $3^{75} = (n+1)^{(n-1)}$. 我们利用下面的引理

引理 22.1. *如果 $f(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式, 则它的 $n+1$ 阶差分为零:*

$$\Delta^{n+1} f(x) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(x+i) \equiv 0.$$

证明. 如果 Δ 算子把 $f(x)$ 映为 $f(x+1) - f(x)$, 注意到算子 Δ 降低了 $f(x)$ 的次数, 因此 $\Delta^{n+1} f = 0$. ☆

换句话说, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \dbinom{n+1}{i} f(x+i)$. 对 $f(x) = (n-x)^n$ 使用这个公式, 代入 $x = -1$, 并记 $i = j+1$ 可得

$$(n+1)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} (n-j)^n = (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} (n-j)^n.$$

第 j 个式子 $\dbinom{n}{j} \dfrac{(-1)^j}{j+1} (n-j)^n$ 可以这么看: 取定 j 个字母, 考虑所有的不包含此 j 个字母的的 $(n-j)^n$ 个单词, 然后乘以 $\dfrac{(-1)^j}{j+1}$ 对所有这些单词求和. 现在我们改变求和次序, 首先按单词数. 首先对固定的缺 k 个字母的单词 W, 我们有 $\sum\limits_{j=0}^{k} \dbinom{k}{j} \dfrac{(-1)^j}{j+1} = \dfrac{1}{k+1} \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^j \dbinom{k+1}{j+1} = \dfrac{1}{k+1}$, 由于交错的二项式系数求和 $\sum\limits_{j=-1}^{k} (-1)^j \dbinom{k+1}{j+1}$ 为零. 也就是说, 改变求和次序之后, 我们刚好得到了最初的和式, 且它等于 $(n+1)^{n-1}$.

4. 一个 $n\times n$ 复矩阵 A 称为规范的, 如果 $AA^t=A^tA$, 这里 A^t 是 A 的转置. 对每个 n, 求出由 $n\times n$ 规范方阵构成的线性空间的最大维数.

解 这样的线性空间的最大维数是 $\dfrac{n(n+1)}{2}$. 这个维数是可以取到的, 比如所有对称矩阵都是规范的, 它们所形成的线性空间的维数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$. 下面来证明这是最大可能的维数.

用 M_n 表示 $n\times n$ 复矩阵空间, $S_n\subset M_n$ 是所有对称矩阵构成的子空间, $A_n\subset M_n$ 是所有反服从矩阵构成的子空间.

设 $V\subset M_n$ 是由规范方阵构成的线性子空间, 我们需要证明 $\dim(V)\leqslant\dim(S_n)$. 设 $\pi: V\to S_n$ 表示线性映射 $\pi(A)=A+A^t$, 我们有

$$\dim(V)=\dim\big(\ker(\pi)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(\pi)\big).$$

因此我们需要证明 $\dim\big(\ker(\pi)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(\pi)\big)\leqslant\dim(S_n)$. 注意到 $\ker(\pi)\subset A_n$.

我们断言对每个 $A\in\ker(\pi)$ 和 $B\in V$, $A\pi(B)=\pi(B)A$. 换言之, $\ker(\pi)$ 和 $\mathrm{Im}(\pi)$ 是可交换的. 对于 $A,B\in V$ 和 $A=-A^t$, 则

$$\begin{aligned}&(A+B)(A+B)^t=(A+B)^t(A+B)\\ \Leftrightarrow\ &AA^t+AB^t+BA^t+BB^t=A^tA+A^tB+B^tA+B^tB\\ \Leftrightarrow\ &AB^t-BA=-AB+B^tA\Leftrightarrow A(B+B^t)+(B+B^t)A\\ \Leftrightarrow\ &A\pi(B)=\pi(B)A.\end{aligned}$$

V 的维数的上界可以从下面的引理得到:

引理 22.2. 设 $X\subset S_n$ 和 $Y\subset A_n$ 是线性子空间, 且满足 X 中的每个元素与 Y 中的每个元素可交换, 则

$$\dim(X)+\dim(Y)\leqslant\dim(S_n).$$

证明. 不失一般性, 我么可以假定 $X=Z_{S_n}(Y):=\{x\in S_n: xy=yx,\forall y\in Y\}$. 定义双线性映射 $B: S_N\times A_n\to\mathbb{C}$, $B(x,y)=\mathrm{tr}\big(d[x,y]\big)$, 这里 $[x,y]=xy-yx$, $d=\mathrm{diag}(1,\cdots,n)$. 显然 $B(X,Y)=\{0\}$. 进一步, 如果 $y\in Y$ 满足对所以的 $x\in S_n$ 有 $B(x,y)=0$, 则 $\mathrm{tr}\big(d[x,y]\big)=-\mathrm{tr}\big([d,x]y\big)=0,\forall x\in S_n$.

我们断言 $\{[d,x]: x\in S_n\}=A_n$. 设 E_i^j 表示 (i,j) 元为 1, 其它元为零的矩阵. 直接计算表明 $[d,E_i^j]=(j-i)E_i^j$, 因此 $[d,E_i^j+E_j^i]=(j-i)(E_i^j-E_j^i)$, 且集合 $\{(j-i)(E_I^j-E_j^i)\}_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 张成了 A_n.

如果 $B(x,y,)=0,\forall x\in S_n$, 则 $\mathrm{tr}(yz)=0,\forall z\in A_n$. 那么取 $z=\overline{y}$, 这里 $\overline{y}$ 表示 y 的共轭, 我们得到 $0=\mathrm{tr}(y\overline{y})=-\mathrm{tr}(y\overline{y}^t)$, 这个刚好等于 y 的所有元的平方和. 这意味着 $y=0$.

如果 $y_1,\cdots,y_k\in V$ 是线性无关的, 则方程组

$$B(x_1,y_1)=0,\quad\cdots,\quad B(x,y_k)=0$$

也是线性无关的, 否则存在 $a_1,\cdots,a_k$ 使得 $B(x,a_1y_1+\cdots+a_ky_k)=0,\forall x\in S_n$, 这与上面的观察矛盾. 由于 k 个线性无关的线性方程的维数为 k,

$$\dim\big(\{x\in S_n:[x,y_i]=0,i=1,\cdots,k\}\big)$$

$$\leqslant \dim\big(\{x \in S_n : B(x, y_i) = 0, i = 1, \cdots, k\}\big) = \dim(S_n) - k.$$

取 $y_1, \cdots, y_k$ 为 Y 的一组基即可证得引理. ☆

由于 $\ker(\pi)$ 和 $\mathrm{Im}(\pi)$ 是可交换的, 根据引理我们得到

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(\pi)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(\pi)\big) \leqslant \dim(S_n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. 设 n 是一个正整数, $p(x)$ 是一个整系数多项式, 证明

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p(x)| > \frac{1}{\mathrm{e}^n}.$$

证明 记 $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p(x)|$. 对每个正整数 k, 设

$$J_k = \int_0^1 \big(p(x)\big)^{2k} \,\mathrm{d}x.$$

显然 $0 < J_k < M^{2k}$ 为一个有理数. 如果 $\big(p(x)\big)^{2k} = \sum\limits_{i=0}^{2kn} a_{k,i} x^i$, 则 $J_k = \sum\limits_{i=0}^{2kn} \dfrac{a_{k,i}}{i+1}$. 取公共的分母, 我们有 $J_k \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, 2kn+1)}$.

素数定理的等价形式为当 $N \to \infty$ 时, $\log \mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, N) \sim N$. 因此对每个 $\varepsilon > 0$, 以及充分大的 k, 我们有

$$\mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, 2kn+1) < \mathrm{e}^{(1+\varepsilon)(2kn+1)},$$

因此

$$M^{2k} > J_k \geqslant \frac{1}{\mathrm{lcm}(1, 2, \cdots, 2kn+1)} > \frac{1}{\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)(2kn+1)}},$$
$$M > \frac{1}{\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\left(n+\frac{1}{2k}\right)}}.$$

令 $k \to \infty$ 以及 $\varepsilon \to 0^+$, 我们得到 $M \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$. 由于 e 是超越数, 等号是不可能成立的.

23. 2016 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 23.1 第一天

1. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 假定 f 有无穷多个零点, 但是不存在 $x\in(a,b)$ 使得 $f(x)=f'(x)=0$.

(a) 证明: $f(a)f(b)=0$.

(b) 给出一个 $[0,1]$ 上这样的函数的例子.

证明

(a) 取一个 $f(x)$ 的零点集的收敛子列 $\{z_n\}$, 且设 $c=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\in[a,b]$. 由 f 的连续性, 我们得到 $f(c)=0$. 我们要证明要么 $c=a$ 要么 $c=b$, 所以 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$, 则结论自然成立.

如果 c 是一个内点, 则我们有 $f(c)=0$ 且 $f'(c)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(z_n)-f(c)}{z_n-c}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0-0}{z_n-c}=0$, 这与条件矛盾, 因此 $c=a$ 或 $c=b$.

(b) 令

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases},$$

则此函数的零点为 $\dfrac{1}{k\pi},k=1,2,\cdots$, 且它在 $x=0$ 处也连续. 在 $(0,1)$ 内我们有

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 和 $\cos\dfrac{1}{x}$ 不可能同时为零, 那么在 $(0,1)$ 内我们有 $f(x)\neq 0$ 或 $f'(x)\neq 0$.

2. 设 k 和 n 为正整数. $n\times n$ 实矩阵序列 $(A_1,\cdots,A_k)$ 是优选的, 如果 $A_i^2\neq\boldsymbol{O},1\leqslant i\leqslant k$, 但 $A_iA_j=\boldsymbol{O},1\leqslant i,j\leqslant k,i\neq j$. 证明: 在所有的优选序列中 $k\leqslant n$, 并对每个 n 给出一个 $k=n$ 的优选序列.

证明 *方法一* 对每个 $i=1,\cdots,n$, 由于 $A_i\cdot A_i\neq\boldsymbol{O}$, 在 A_i 中存在一列 $v_i\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A_iv_i\neq\mathbf{0}$. 我们要证明 $v_1,\cdots,v_k$ 是线性无关的, 这样就立刻证明了 $k\leqslant n$. 设

$$c_1v_1+\cdots+c_kv_k=\mathbf{0},\quad c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R}.$$

对 $i \neq j$ 我们有 $A_i A_j = \mathbf{0}$, 特别地, $A_i v_j = \mathbf{0}$. 现在, 对每个 $i = 1, \cdots, n$, 由

$$\mathbf{0} = A_i(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k) = \sum_{j=1}^{k} c_j (A_i v_j) = c_i (A_i v_i),$$

我们可知 $c_i = 0$, 因此 $c_1 = \cdots = c_k = 0$.

$k = n$ 的情形是可能的: 如果 A_i 表示第 i 个对角元为 1, 其它元为零的矩阵, 则 $A_i^2 = A_i$ 且 $A_i A_j = \mathbf{0}, i \neq j$.

注 上述解决方案可以使用分块矩阵以下列方式重新配制. 考虑

$$(A_1, A_2, \cdots, A_k)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^2 \end{pmatrix}.$$

容易看出左边矩阵的秩最多为 n, 而右边矩阵的秩至少为 k.

方法二 设 U_i 和 K_i 分别表示矩阵 A_i 的像与核. 对每一对指标 i, j, 我们有 $U_J \subset K_i$ 当且仅当 $i \neq j$.

设 $X_0 = \mathbb{R}^n$, 对 $i = 1, \cdots, k$ 记 $X_i = K_1 \cap K_2 \cap \cdots K_i$, 所以 $X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k$. 注意到 $U_i \subset K_j, j < i$, 所以 $U_i \subset X_{i-1}$, 且因为 $U_i \not\subset K_i$, 所以 $U_i \not\subset X_i$. 因此 $X_i \neq X_{i-1}$, X_i 为 X_{i-1} 的真子空间.

现在由

$$n = \dim X_0 > \dim X_1 > \cdots > \dim X_k \geqslant 0$$

我们得到 $k \geqslant n$.

3. 设 n 是一个正整数. 且设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_i + b_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

证明 注意到等式

$$\frac{XY - Y^2}{X + Y} = Y - \frac{2Y^2}{X + Y},$$

因此

$$\text{LHS} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \frac{2b_i^2}{a_i + b_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} b_i - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i},$$

$$\text{RHS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i - 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

于是, 待证明的式子等价于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)},$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式知原不等式成立.

4. 设正整数 $n \geqslant k$, $\mathcal{F}$ 是一个满足以下性质的有限集族:

(i) $\mathcal{F}$ 至少包含 $\binom{n}{k}+1$ 个不同的 k 元集合;

(ii) 对任意两个 $A, B \in \mathcal{F}$, 其并集 $A \cup B$ 也包含于 $\mathcal{F}$.

证明: $\mathcal{F}$ 至少包含 3 个具有不少于 n 个元素的集合.

证明 *方法一* 如果 $n=k$, 则在此集族中至少包含两个 n 元集合及其并集, 那么结论显然成立. 下面我们假定 $n>k$.

在 $\mathcal{F}$ 中固定 $\binom{n}{k}+1$ 个含有 k 元集合, 称它们为 '生成元', 设 $V \in \mathcal{F}$ 是这些生成元的并集. 由于 V 至少有 $\binom{n}{k}+1$ 个 k 元集合, 我们有 $|V|>n$.

如果元素 $v \in V$ 至多属于 $\binom{n-1}{k-1}$ 的生成元, 则称此元素是 *合适的*. 则至少存在 $\binom{n}{k}+1-\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{k}+1$ 个生成元不包含 v. 它们的并包含至少 n 个集合, 且不包含 v.

现在我们断言, 在 V 的任意 n 个元素 $x_1, \cdots, x_n$ 中, 都存在一个合适的元素. 考虑所有的组合 (G, x_i) 使得 G 是一个生成元, 而 $x_i \in G$. 每一个生成元恰有 k 个元素, 所以这样的组合的数目至多为 $\left(\binom{n}{k}+1\right) \cdot k$. 如果某个 x_i 是不合适的, 则 x_i 至少属于 $\binom{n-1}{k-1}+1$ 个生成元. 如果 $x_1, \cdots, x_n$ 中没有合适的, 那我们至少有 $n \cdot\left(\binom{n-1}{k-1}+1\right)$ 对. 但是 $n \cdot\left(\binom{n-1}{k-1}+1\right)>\left(\binom{n-1}{k-1}+1\right) \cdot k$, 所以这是不可能的, $x_1, \cdots, x_n$ 中至少有一个是合适的.

由于 $|V|>n$, 集合 V 包含某个合适的元素 v_1. 设 $U_1 \in \mathcal{F}$ 是所有不包含 v_1 的生成元的集合的并. 现在从 U_1 中取一个合适的元素 v_2, 让 U_2 是所有不包含 v_2 的生成元的集合的并, 则 $|U_2| \geqslant n$, 所以我们有三个不少于 n 元的三个集合 $V, U_1, U_2 \in \mathcal{F}$: $V \neq U_1$ 是因为 $v_1 \in V$ 而 $v_1 \notin U_1$, 且 U_2 是不同于 V 和 U_1, 因为 $v_2 \in V, U_1$ 但 $v_2 \notin U_2$.

方法二 我们对 k 进行归纳, 所以我们可以假定原结论对比较小的 k 值成立. 用反证法, 假定 $\mathcal{F}$ 包含少于三个不小于 n 元的集合, 也就是这样的集合的数目只能是 0,1 或 2. 不失一般性, 我们可以假设 $\mathcal{F}$ 恰由 $N:=\binom{n}{k}+1$ 个不同的 k 元集及其所有可能的并组成. 把其中的 k 元集记为 $S_1, S_2, \cdots$.

考虑极大指标集 $I \subset\{1, \cdots, N\}$ 使得 $A:=\underset{i \in I}{\cup} S$ 的元素个数小于 n. 这意味着任意增加 $S_j, j \notin I$ 都会使得元素个数不小于 n, 即 $|S_j \cup A| \geqslant n$. 首先, 我们来证明这样的 j 存在, 否则, 所有的 S_i 都包含于 A. 但是只有 $\binom{|A|}{k} \leqslant\binom{n-1}{k}<N$ 个不同 A 的 k 元子集, 矛盾. 所以至少存在一个 j 使得 $|S_j \cup A| \geqslant n$. 考虑所有可能的 $|S_j \cup A|, j \notin A$ 类型的集合. 它们的元素个数至少为 n, 所以它们的个数为 1 或 2. 如果有两个这样的集合, 记为 B 和 C, 则 $B \subset C$ 或 $C \subset B$, 否则 B 与 C 的并就不同于 B 和 C, 那么就有三个不同的集合 $B, C, B \cup C$, 其元素个数都不小于 n. 因

此, 在任何情形下, 都一定存在 $x \notin A$ 使得 $x \in S_j, \forall j \notin I$. 考虑集合 $S'_j = S_j \backslash \{x\}, j \notin I$, 它们的元素个数为 $k-1$, 这样的集合数目至少为

$$N - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + 1.$$

由归纳假设, 我们可以用 S'_j 的并构造三个元素不少于 $n-1$ 的集合. 把 x 加回来, 我们发现对应的集合 S_j 的并的元素个数至少为 n, 因此我们完成了归纳步骤.

上述证明允许我们一直将 k 递降至 $k=0$, 所以只需要证明 $k=0$ 的情形, 反证法的假设是我们至少有 $\binom{n}{0}+1=2$ 个零元集, 这是不可能的, 因为只有一个空集, 所以结论对 $k=0$ 显然成立.

5. 设 S_n 表示序列 $(1,2,\cdots,n)$ 的所有置换. 对每个置换 $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)\in S_n$, 设 $\mathrm{inv}(\pi)$ 表示满足 $\pi_i>\pi_j$ 的数对 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 的个数, 即 π 的逆序数. 用 $f(n)$ 表示 $\mathrm{inv}(\pi)$ 被 $n+1$ 整除的置换 $\pi\in S_n$ 的个数.

证明: 存在无穷多个素数 p 使得 $f(p-1)>\dfrac{(p-1)!}{p}$, 以及无穷多个素数 p 使得 $f(p-1)<\dfrac{(p-1)!}{p}$.

证明　我们将应用如下公式

$$\sum_{\pi\in S_n} x^{\mathrm{inv}(\pi)} = 1\cdot(1+x)\cdot(1+x+2^{)}\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

这个公式可以对 n 归纳证明. $n=1,2$ 的情形是显然的, 对 $(1,2,\cdots,n-1)$ 的每个置换, 我们在 $1,2,\cdots,n-1$ 前, 后或之间的 n 个位置插入元素 n, 就可得到 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换, 逆序数增加的数目分别可能是 $n-1,n-2,\cdots 1$ 或 0.

现在令

$$G_n(x)=\sum_{\pi\in S_n} x^{\mathrm{inv}(\pi)},$$

并记 $\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n+1}}$, 那么

$$f(n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} G_n\left(\varepsilon^k\right)=\frac{n!}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} G_n\left(\varepsilon^k\right).$$

因此, 我们要考虑的是

$$f(n)-\frac{n!}{n+1}=\sum_{k=1}^{n-1} G_n\left(\varepsilon^k\right)$$

的符号, 其中 $n=p-1$, 而 p 是充分大的素数.

对每个固定的 $1\leqslant k\leqslant p-1$, 我们有

$$G_{p-1}\left(\varepsilon^k\right)=\prod_{j=1}^{p-1}\left(1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\cdots+\varepsilon^{(j-1)k}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{p-1} \frac{1-\varepsilon^{jk}}{1-\varepsilon^k} = \frac{\left(1-\varepsilon^k\right)\left(1-\varepsilon^{2k}\right)\cdots\left(1-\varepsilon^{(p-1)k}\right)}{\left(1-\varepsilon^k\right)^{p-1}}.$$

注意到分子中的因式为 $1-\varepsilon, 1-\varepsilon^2, \cdots, 1-\varepsilon^{p-1}$, 只是它们的次数不同. 由等式 $(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)\cdots(z-\varepsilon^{p-1}) = 1+z+\cdots+z^{p-1}$, 我们有

$$G_{p-1}\left(\varepsilon^k\right) = \frac{p}{\left(1-\varepsilon^k\right)^{p-1}} = \frac{p}{\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{p}}\right)^{p-1}}.$$

因此 $f(p-1) - \dfrac{(p-1)!}{p}$ 与

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p-1}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{p}}\right)^{1-p} &= \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{e}^{\frac{k(1-p)\pi\mathrm{i}}{p}}\left(-2\mathrm{i}\sin\frac{\pi k}{p}\right) \\ &= 2\cdot 2^{1-p}(-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos\frac{\pi k(p-1)}{p}\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

对充分大的素数 p, $k=1$ 所对应的项增长的速度远比其他项都快, 所以此项决定了整个和式的符号. 注意到 $\cos\dfrac{\pi(p-1)}{p}$ 收敛到 -1, 所以此和式当 $p-1$ 是奇数时为正, 当 $p-1$ 是偶数时为负. 因此, 对于充分大的素数 p,

$$f(p-1) - \frac{(n-1)!}{p}\begin{cases} > 0, & p \equiv 3 \pmod 4 \\ < 0, & p \equiv 1 \pmod 4\end{cases}.$$

§ 23.2 第二天

1. 设 $(x_1, x_2, \cdots)$ 是正实数列, 满足 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_k}{k^2} \leqslant 2.$$

证明 交换求和次序可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_k}{k^2} = \sum_{1\leqslant n\leqslant k} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$

我们有

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2-\frac14} = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k-\frac12} - \frac{1}{k+\frac12}\right) = \frac{1}{n-\frac12}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n-\frac12} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 2.$$

2. 满足 $f(x)+f(y)\geqslant|x-y|,\forall x,y\in[0,1]$ 的函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 称为是 *优选的*. 在所有的优选函数中, 求出 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的最小值.

解 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

如果令 $y=x+\frac{1}{2},0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, 我们得到

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

积分可得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

另一方面, 函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ 满足题目条件, 因为

$$|x-y|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-y\right)\right|\leqslant\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}-y\right|=f(x)+f(y).$$

且满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}.$$

3. 设 n 是一个正整数, 用 $\mathbb{Z}_n$ 表示整数模 n 的环. 假定存在函数 $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ 满足下列三条性质:

(i) $f(x)\neq x$,

(ii) $f\big(f(x)\big)=x$,

(iii) $f\big(f(f(x+1)+1)\big)=x,\forall x\in\mathbb{Z}_n$.

证明: $n\equiv 2 \pmod 4$.

证明 由性质 (ii) 可知 f 是满射, 所以 f 是 $\mathbb{Z}_n$ 的置换中的一个元素, 它的阶至多为 2. 因此, 置换 f 是不交的换位 $\big(x,f(x)\big)$ 的置换. 性质 (i) 说明此置换没有不动点, 所以 n 为偶数, 且这样的换位的数目恰为 $n/2$.

考虑置换 $g(x)=f(x+1)$. 如果 g 是奇置换, 则 $g\circ g\circ g$ 也是奇置换. 但是性质 (iii) 的限制说明 $g\circ g\circ g$ 是恒等置换, 这是一个偶置换. 所以 g 不可能是奇置换, g 一定为偶置换. 置换 $h(x)=x-1$ 的阶为 n, 为偶置换, 则 h 为奇置换, 因此 $f(x)=g\circ h$ 为奇置换. 由于 f 是 $n/2$ 个转换的乘积, 这说明 $n/2$ 一定是奇数, 于是 $n\equiv 2 \pmod 4$.

4. 设 k 为正整数. 对每个非负整数 n, 设 $f(n)$ 表示不等式 $|x_1|+\cdots+|x_k|\leqslant n$ 的解 $(x_1,\cdots,x_k)\in\mathbb{Z}^k$ 的个数. 证明: 对每个 $n\geqslant 1$, 我们有 $f(n-1)f(n+1)\leqslant\big(f(n)\big)^2$.

证明 *方法一* 我们对 k 归纳. 如果 $k=1$, 则我们有 $f(n)=2n+1$, 上述结论立刻由均值不等式知成立.

假定 $k\geqslant 2$, 结论对 $k-1$ 已经成立. 设 $g(m)$ 表示不等式 $|x_1|+\cdots+|x_{k-1}|\leqslant m$ 的正数解的个数. 由归纳假设知 $g(m-1)g(m+1)\leqslant\big(g(m)\big)^2$ 成立, 变形可得

$$\frac{g(0)}{g(1)}\leqslant\frac{g(1)}{g(2)}\leqslant\frac{g(2)}{g(3)}\leqslant\cdots$$

对任意常数 c, 不等式 $|x_1+\cdots+|x_{k-1}|+|c|\leqslant n$ 有 $g(n-|c|)$ 个整数解. 因此, 我们有递推关系

$$f(n)=\sum_{c=-n}^{n} g(n-|c|)=g(n)+2g(n-1)+\cdots+2g(0).$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{f(n-1)}{f(n)}&=\frac{g(n-1)+2g(n-2)+\cdots+2g(0)}{g(n)+2g(n-1)+\cdots+2g(1)+2g(0)}\\&\leqslant\frac{g(n)+g(n-1)+[g(n-1)+\cdots+2g(0)+2\cdot 0]}{g(n+1)+g(n)+[g(n)+\cdots+2g(1)+2g(0)]}=\frac{f(n)}{f(n+1)},\end{aligned}$$

得证.

方法二 我们首先计算 $f(n)$ 的母函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n=\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\mathbb{Z}^k}\sum_{c=0}^{\infty} q^{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+c}=\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} q^{|x|}\right)^k\frac{1}{1-q}=\frac{(1+q)^k}{(1-q)^{k+1}}.$$

对每个 $a=0,1,2,\cdots$, 用 $g_a(n)\,(n=0,1,2,\cdots)$ 表示下列展开式中的系数:

$$\frac{(1+q)^a}{(1-q)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty} g_a(n)q^n.$$

所以显然有 $g_{a+1}(n)=g_a(n)+g_a(n-1)\,(n\geqslant 1), g_a(0)=1$. 如果正实数序列 $g(0),g(1),g(2),\cdots$ 满足 $\dfrac{g(n-1)}{g(n)}$ 是单调递增的, 我们称此序列是 *好的*. 可以直接验证 g_0 是好的:

$$g_0(n)=\binom{k+n}{k},\quad \frac{g_0(n-1)}{g_0(n)}=\frac{n}{k+n}.$$

如果 g 是一个好的序列, 则由 $g'(0)=g(0), g'(n)=g(n)+g(n-1)\,(n\geqslant 1)$ 定义的序列 g' 也是好的:

$$\frac{g'(n-1)}{g(n)}=\frac{g(n-1)+g(n-2)}{g(n)+g(n-1)}=\frac{1+\frac{g(n-2)}{g(n-1)}}{1+\frac{g(n)}{g(n-1)}},$$

其中定义 $g(-1)=0$. 因此我们发现序列 $g_1,g_2,\cdots,g_k=f$ 都是好的, 待证不等式成立.

5. 设 A 是一个 $n\times n$ 复矩阵, 其特征值的模不超过 1, 证明:

$$\|A^n\|\leqslant\frac{n}{\ln 2}\|A\|^{n-1}.$$

这里, 对每个复向量 $x\in\mathbb{C}^n$, $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$, 对每个 $n\times n$ 矩阵 B, $\|B\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Bx\|$.

证明 *方法一* 记住 $r=\|A\|$, 我们来证明 $\|A^n\|\leqslant\dfrac{n}{\ln 2}\|A\|^{n-1}$.

我们知道矩阵范数满足对任意矩阵 X,Y 有 $\|XY\|\leqslant\|X\|\cdot\|Y\|$. 作为一个简单的推论有 $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k=r^k$ 对 $k\in\mathbb{N}$ 都成立.

设 $\chi(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)=t^n+c_1t^{n-1}+\cdots+c_n$ 为 A 的特征多项式. 由 Vieta 定理我们得到

$$|c_k|=\left|\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\right|\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left|\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\right|\leqslant\binom{n}{k}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

由 Cayley-Hamilton 定理我们知道 $\chi(A)=\boldsymbol{O}$, 所以

$$\|A^n\|=\|c_1A^{n-1}+\cdots+c_nI\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\|A^k\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}r^k=(1+r)^n-r^n.$$

将此式与 $\|A^n\|\leqslant r^n$, 我们有

$$\|A^n\|\leqslant\min\bigl(r^n,(1+r)^n-r^n\bigr).$$

记 $r_0=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$, 容易验证上述两个上界当 $r=r_0$ 是相等, 进一步有

$$r_0=\frac{1}{\mathrm{e}^{(\ln 2)/n}-1}<\frac{n}{\ln 2}.$$

对 $r\leqslant r_0$,

$$\|A^n\|\leqslant r^n\leqslant r_0\cdot r^{n-1}<\frac{n}{\ln 2}r^{n-1}.$$

对 $r>r_0$, 我们有

$$\|A^n\|\leqslant(1+r)^n-r^n=r^{n-1}\cdot\frac{(1+r)^n-r^n}{r^{n-1}}.$$

注意到函数 $f(r)=\dfrac{(1+r)^n-r^n}{r^{n-1}}$ 是单调递减的, 所以

$$\frac{(1+r)^n-r^n}{r^{n-1}}<\frac{(1+r_0)^n-r_0^n}{r_0^{n-1}}=r_0\bigl((1+1/r_0)^n-1\bigr)=r_0<\frac{n}{\ln 2},$$

所以 $\|A^n\|\leqslant\dfrac{n}{\ln 2}r^{n-1}$.

方法二 我们将用到下面一个易证的事实:

- 对任意矩阵 A, 存在一个酉方阵 U 使得 UAU^{-1} 是上三角的.
- 对任意矩阵 A,B 我们有 $\|A\|\leqslant\|(A|B)\|$ 且 $\|B\|\leqslant\|(A|B)\|$, 这里 $(A|B)$ 是由矩阵 A 的列与 B 的列构成的矩阵.
- 对任意矩阵 A,B, 我们有 $\|A\|\leqslant\left\|\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right\|$ 且 $\|B\|\leqslant\left\|\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right\|$, 这里 $\left\|\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right\|$ 是由矩阵 A 的行与矩阵 B 的行构成的矩阵.
- 给一个矩阵增加领行或者零列不改变矩阵的范数.

我们将对任一个特征值的模不超过 1 的 $n\times n$ 矩阵 A 证明一个更强的不等式

$$\|A^n\|\leqslant n\|A\|^{n-1}.$$

我们对 n 进行归纳. $n=1$ 的情形是平凡的. 不失一般性, 我们假定矩阵 A 是上三角的, 因此有

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意到矩阵 A 的特征值恰为其对角元. 我们把 A 分成三个矩阵的和 $A=X+Y+Z$:

$$X=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 A' 表示从 A 中移除第一行与第一列得到的矩阵:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 $|a_{11}|\leqslant 1$, 我们有 $\|X\|\leqslant 1$, 以及

$$\|A'\|=\|Z\|\leqslant\|Y+Z\|\leqslant\|A\|.$$

现在我们将 A^n 分解如下:

$$A^n=XA^{n-1}+(Y+Z)A^{n-1}.$$

我们在第二项中代入 $A=X+Y+Z$ 并展开括号, 由于如下等式成立:

$$Y^2=\boldsymbol{O},\quad YX=\boldsymbol{O},\quad ZY=\boldsymbol{O},\quad ZX+\boldsymbol{O},$$

只有两项 YZ^{n-1} 与 Z^n 非零, 所以有

$$A^n=XA^{n-1}+(Y+Z)Z^{n-1}.$$

由归纳假设, 我们有 $\|A^{n-1}\|\leqslant(n-1)\|A'\|^{n-2}$, 因此 $\|Z^{n-1}\|\leqslant(n-1)\|Z\|^{n-2}\leqslant(n-1)\|A\|^{n-2}$. 因此

$$\|A^n\|\leqslant\|XA^{n-1}\|+\|(Y+Z)Z^{n-1}\|\leqslant\|A\|^{n-1}+(n-1)\|Y+Z\|\,\|A\|^{n-2}\leqslant n\|A\|^{n-1}.$$

24. 2017 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 24.1 第一天

1. 求出所有的复数 λ, 使得存在正整数 n 和一个实的 $n\times n$ 矩阵, 满足 $A^2=A^{\mathrm{T}}$ 且 λ 是 A 的一个特征值.

解 根据条件可知

$$A^4=(A^2)^2=(A^{\mathrm{T}})^2=(A^2)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A,$$

因此 $A^4-A=\boldsymbol{O}$, 这说明 A 的特征值都是多项式 x^4-x 的根, 即 $0,1,\dfrac{-1\pm\sqrt{4}\mathrm{i}}{2}$. 为了说明这些值都是可能的, 考虑如下矩阵:

$$A_0=(0),\quad A_1=(1),\quad A_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

0 和 1 分别是 1×1 矩阵 A_0 和 A_1 的特征值.$\dfrac{-1\pm\sqrt{4}\mathrm{i}}{2}$ 是 A_2 的特征值, 很容易验证

$$A_2^2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A_2^{\mathrm{T}}.$$

而矩阵 A_4 则将所有的特征值囊括在一个矩阵中. **注** 矩阵 A_2 表示一个 $2\pi/3$ 角度的旋转.

2. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 为一个可微函数, 并假定存在常数 $L>0$ 使得

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant L|x-y|$$

对任意 x,y 成立. 证明:

$$\left(f'(x)\right)^2<2Lf(x)$$

对所有的 x 成立.

证明 注意到 f' 满足 Lipschitz 条件, 所以 f' 是连续的, 且局部可积. 考虑任意 $x \in \mathbb{R}$, 并令 $d = f'(x)$, 我们需要证明 $f(x) > \dfrac{d^2}{2L}$.

如果 $d = 0$, 则结论显然成立.

如果 $d > 0$, 则由已知条件得 $f'(x-t) \geqslant d - Lt$, 当 $0 \leqslant t < \dfrac{d}{L}$ 时, 这个估计值为正. 在此区间上积分得

$$f(x) > f(x) - f\left(x + \frac{|d|}{L}\right) = \int_0^{\frac{|d|}{L}} = \int_0^{\frac{d}{L}} f'(x-t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{d}{L}} (d - Lt)\,\mathrm{d}t = \frac{d^2}{2L}.$$

如果 $d < 0$, 则由 $f'(x+t) \leqslant d + Lt = -|d| + Lt$ 进行重复讨论得

$$f(x) > f(x) - f\left(x + \frac{|d|}{L}\right) = \int_0^{\frac{|d|}{L}} \left(-f'(x+t)\right)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{|d|}{L}} (|d| - Lt)\,\mathrm{d}t = \frac{d^2}{2L}.$$

3. 对任意整数 m, 用 $P(m)$ 表示 m 所有可能的因子的乘积, 比如 $P(6) = 36$. 对每个正整数 n, 定义序列

$$a_1(n) = n, \quad a_{k+1}(n) = P\left(a_k(n)\right) \quad (k = 1, 2, \cdots, 2016).$$

判定是否对每个集合 $S \subset \{1, 2, \cdots, 2017\}$, 存在一个正整数 n 满足如下条件:

对每个 $k, 1 \leqslant k \leqslant 2017$, $a_k(n)$ 是一个完全平方数当且仅当 $k \in S$.

解 我们证明答案是肯定的. 对每个 $S \subset \{1, 2, \cdots, 2017\}$, 都存在一个合适的 n. 特别地, n 可以是 2 的某个幂次: $n = 2^{w_1}$, 这里 w_1 是某个非负整数 w_1. 记 $a_k(n) = 2^{w_k}$, 则

$$2^{w_{k+1}} = a_{k+1}(n) = P\left(a_k(n)\right) = P(2^{w_k}) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2^{w_k} = 2^{\frac{w_k(w_k+1)}{2}},$$

所以

$$w_{k+1} = \frac{w_k(w_k+1)}{2}.$$

如果我们证明对 S 的每个选择, 存在一个初值 w_1 使得 w_k 为偶数当且仅当 $k \in S$, 证明就完成了.

引理 24.1. 假定序列 $(b_1, b_2, \cdots)$ 和 $(c_1, c_2, \cdots)$ 满足 $b_{k+1} = \dfrac{b_k(b_k+1)}{2}$ 和 $c_{k+1} = \dfrac{c_k(c_k+1)}{2}$, $k \geqslant 1$, 且 $c_1 = b_1 + 2^m$. 则对每个 $k = 1, \cdots, m$, 我们有 $c_k \equiv b_k + 2^{m-k+1} \pmod{2^{m-k+2}}$.

作为一个直接的推论, 我们有 $b_k \equiv c_k \pmod 2$, $1 \leqslant k \leqslant m$ 且 $b_{m+1} \equiv c_{m+1} + 1 \pmod 2$.

证明. 我们通过归纳证明. 对 $k = 1$, 我们有 $c_1 = b_1 + 2^m$, 则结论成立. 假定结论对某个 $k < m$ 成立, 则对 $k+1$ 我们有

$$\begin{aligned} c_{k+1} = \frac{c_k(c_k+1)}{2} &\equiv \frac{(b_k + 2^{m-k+1})(b_k + 2^{m-k+1} + 1)}{2} \\ &= \frac{b_k^2 + 2^{m-k+2} b_k + 2^{2m-2k+2} + b_k + 2^{m-k+1}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{b_k(b_k+1)}{2} + 2^{m-k} + 2^{m-k+1}b_k + 2^{2m-2k+1}$$
$$\equiv \frac{b_k(b_k+1)}{2} + 2^{m-k} \pmod{2^{m-k+1}},$$

因此 $c_{k+1} \equiv b_{k+1} + 2^{m-(k+1)+1} \pmod{2^{m-(k+1)+2}}$. ☆

回到原问题的解答, 对每个 $1 \leqslant m \leqslant 2017$, 我们直接构造一个序列 $(v_1, v_2, \cdots)$ 使得 $v_{k+1} = \frac{v_k(v_k+1)}{2}$, 且对每个 $1 \leqslant k \leqslant m$, v_k 是偶数当且仅当 $k \in S$.

对 $m = 1$, 如果 $v_1 = 1$ 或 $1 \notin S$, 我们可以取 $v_1 = 0$. 如果对正整数 m, 我们已经有一个这样的序列 $(v_1, v_2, \cdots)$ 我们可以要么取同样的序列, 要么取 $v_1' = v_1 + 2^m$, 然后应用同样的递推 $v_{k+1}' = \frac{v_k'(v_k'+1)}{2}$. 由引理可知, 我们有 $v_k \equiv v_k' \pmod 2$, $k \leqslant m$, 但 v_{m+1} 和 v_{m+1}' 属于相反的组, 因此对于 , +1, 要么是序列 (v_k), 要么是序列 (v_k') 满足条件.

对 $m = 1, 2, \cdots, 2017$, 重复此过程, 我们得到了一个合适的序列 (w_k).

4. 在一个城市有 n 个人, 每个人恰有 1000 个朋友 (友谊是相互的). 证明: 可以选出一组人群 S, 使得在 S 中至少有 $n/2017$ 个人恰在 S 中有两个朋友.

证明 设 $d = 1000$ 且 $0 < p < 1$. 随机取定集合 S, 且每个人被选取的概率为 p, 不受其他人影响.

一个确定的人被选入 S 且刚好认识 S 中两个人的概率为

$$q = \binom{d}{2} p^3 (1-p)^{d-2}.$$

取定 $p = 3/(d+1)$(这是使得 q 取最大值的 p), 则

$$q = \binom{d}{2}\left(\frac{3}{d+1}\right)^3\left(\frac{d-2}{d+1}\right)^{d-2}$$
$$= \frac{27d(d-1)}{2(d+1)^3}\left(1+\frac{3}{d-2}\right)^{-(d-2)} > \frac{27d(d-1)}{2(d+1)^3}\cdot \mathrm{e}^{-3} > \frac{1}{2017}.$$

因此, $E(|S|) = nq > \frac{n}{2017}$, 所以存在一个 S 的选择使得 $|S| > \frac{n}{2017}$.

5. 设 k 和 n 为正整数, 且 $n \geqslant k^2 - 3k + 4$, 且设

$$f(z) = z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \cdots + c_0$$

为一个复系数多项式, 满足

$$c_0c_{n-2} = c_1c_{n-3} = \cdots = c_{n-2}c_0 = 0.$$

证明: $f(z)$ 与 $z^n - 1$ 至多有 $n-k$ 个公共根.

证明 令 $M = \{z : z^n = 1\}$, $A = \{z \in M : f(z) \neq 0\}$ 且 $A^{-1} = \{z^{-1} : z \in A\}$, 我们要证明 $|A| \geqslant k$. 首先断言

$$A \cdot A^{-1} = M.$$

即对任意 $\eta \in M$, 存在某个元素 $a, b \in A$ 使得 $ab^{-1}\eta$.

证明. 熟知对每个整数 m 有

$$\sum_{z\in M} z^m = \begin{cases} n, & n\mid m \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

定义 $c_{n-1}=1$ 并考虑

$$\begin{aligned}\sum_{z\in M} z^2 f(z) f(\eta z) &= \sum_{z\in M} z^2 \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell (\eta z)^\ell \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} c_j c_\ell \eta^\ell \sum_{z\in M} z^{j+\ell+2} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_\ell \eta^\ell \sum_{z\in M} \begin{cases} n, & n\mid j+\ell+2 \\ 0, & 其他 \end{cases} \\ &= c_{n-1}^2 n + \sum_{j=0}^{n-2} c_j c_{n-2-j} \eta^{n-2-j} n = n \neq 0.\end{aligned}$$

☆

因此存在某个 $b\in M$ 使得 $f(b)\neq 0$ 且 $f(\eta b)\neq 0$, 即 $b\in A$ 且 $a=\eta b\in A$, 满足 $ab^{-1}=\eta$.

通过对 M 中的元素二次计数, 由断言我们可得

$$|A|(|A|-1)\geqslant \left|M\backslash\{1\}\right| = n-1 \geqslant k^2-3k+3 > (k-1)(k-2),$$

这就说明 $|A|>k-1$.

§ 24.2 第二天

1. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为连续函数且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ 存在 (可能是有限值或无穷大). 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx), \mathrm{d}x = L.$$

证明 利用洛必达法则可得

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u}{t} = \lim_{t\to+\infty} f(t) = L$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x = L$.

2. 设 $p(x)$ 是一个非常数的实系数多项式. 对每个正整数 n, 令

$$q_n(x) = (x+1)^n p(x) + x^n p(x+1).$$

证明: 只有有限个 n 使得 $q_n(x)$ 的根均为实数.

证明 首先有如下引理:

引理 24.2. 如果 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$ 是一个多项式, 且 $a_m \neq 0$, 且 f 的所有根为实数, 则

$$a_{m-1}^2-2a_m a_{m-2} \geqslant 0.$$

证明. 设 f 的根为 $w_1,\cdots,w_n$, 由 Vieta 定理得

$$\sum_{i=1}^m w_i=-\frac{a_{m-1}}{a_m}, \quad \sum_{i<j} w_i w_j=\frac{a_{m-2}}{a_m},$$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^m w_i^2=\left(\sum_{i=1}^m w_i\right)^2-2\sum_{i<j} w_i w_j=\left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^2-2\frac{a_{m-2}}{a_m}=\frac{a_{m-1}^2-2a_m a_{m-2}}{a_m^2}.$$

☆

考虑到引理, 我们考虑 $q_n(x)$ 中次数最高的三项的渐近性. 设 $p(x)=ax^k+bx^{k-1}+cx^{k-2}+\cdots$ 以及 $q_n(x)=A_n x^{n+k}+B_n x^{n+k-1}+C_n x^{n+k-2}+\cdots$, 则

$$\begin{aligned}
q_n(x)&=(x+1)^n p(x)+x^n p(x+1)\\
&=\left(x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+\cdots\right)\left(ax^k+bx^{k-1}+cx^{k-2}+\cdots\right)\\
&+x^n\left(a\left(x^k+kx^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}x^{k-2}+\cdots\right)\right)\\
&=2ax^{n+k}+\big((n+k)a+2b\big)x^{n+k-1}\\
&+\left(\frac{n(n-1)+k(k-1)}{2}a+(n+k-1)b+2c\right)x^{n+k-2}+\cdots,
\end{aligned}$$

因此

$$A_n=2a, \quad B_n=(n+k)a+2b, \quad C_n=\frac{n(n-1)+k(k-1)}{2}a+(n+k-1)b+2c.$$

如果 $n \to \infty$, 则

$$B_n^2-2A_nC_n=(na+O(1))^2-2\cdot 2a\left(\frac{n^2a}{2}+O(n)\right)=-an^2+O(n)\to-\infty,$$

所以 $B_n^2-2A_nC_n$ 最终为负, 意味着 q_n 不可能仅有实根.

3. 递归定义矩阵序列 $A_1,A_2,\cdots$ 如下:

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad A_{n+1}=\begin{pmatrix}A_n&I_{2^n}\\I_{2^n}&A_n\end{pmatrix} \quad (n=1,2,\cdots),$$

这里 I_m 为 $m\times m$ 单位矩阵. 证明: A_n 有 $n+1$ 个不同的整数特征值 $\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n$, 其重数分别为 $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\cdots,\binom{n}{n}$.

证明 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 矩阵 A_n 为 $2^n\cdot 2^n$ 对称矩阵, 其元素均为 0 或 1, 且主对角元均为 0. 我们有

$$A_n=I_{2^{n-1}}\otimes A_1+A_{n-1}\otimes I_2, \tag{24.1}$$

这里 $\otimes$ 是矩阵空间的二元算符, 对任意 $N \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 和 $C|in\mathbb{R}^{m\times s}$, 定义

$$B \otimes C := \begin{pmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \cdots & b_{1p}C \\ b_{21}C & b_{22}C & \cdots & b_{2p}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}C & b_{n2}C & \cdots & b_{np}C \end{pmatrix}_{nm\times ps}.$$

引理 24.3. 如果 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, i = 1,\cdots,n$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 的特征值为 $\mu_j, j = 1,\cdots,m$, 则 $B\otimes C$ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j, i = 1,\cdots,n, j = 1,\cdots,m$. 如果 B 和 C 是可对角化的, 则 $B\otimes C$ 的特征值为 $y_i \otimes z_j$, 这里 (λ_i, y_i) 和 (μ_j, z_j) 分别为 B 和 C 的特征对.

证明. 设 (λ, y) 为 B 的特征对, (μ, z) 为 C 的特征对, 则

$$(B\otimes C)(y\otimes z) = By \times Cz = \lambda y \otimes \mu z = \lambda\mu(y\otimes z).$$ ☆

如果我们取 (λ,μ) 为 A_1 的特征对, (μ, z) 为 A_{n-1} 的特征对, 则由 (24.1) 式和引理 24.3 我们有

$$\begin{aligned} A_n(z\otimes y) &= (I_{2^{n-1}} \otimes A_1 + A_{n-1}\otimes I_2)(z\otimes y) \\ &= (I_{2^{n-1}} \otimes A_1)(z\otimes y) + (A_{n-1}\otimes I_2)(z\otimes y) \\ &= (\lambda+\mu)(z\otimes y). \end{aligned}$$

所以 A_n 的完整谱可以由 A_{n-1} 和 A_1 的特征值得到: 只需要把 A_{n-1} 与 A_1 的每个特征值加起来即可. 由于 A_1 的谱为 $\sigma(A_1) = \{-1, 1\}$, 我们得到

$$\begin{aligned} &\sigma(A_2) = \{-1+(-1), -1+1, 1+(-1), 1+1\} = \{-2, 0^{(2)}, 2\}, \\ &\sigma(A_3) = \{-1+(-2), -1+0, -1+0, -1+2, 1+(-2), 1+0, 1+0, 1+2\} = \{-3, (-1)^{(3)}, 1^{(3)}, 3\}, \\ &\sigma(A_4) = \{-1+(-3), -1+(-1^{(3)}), -1+1^{(3)}, 1+(-3), 1+(-1^{(3)}), 1+1^{(3)}, 1+3\} \\ &\qquad = \{-4, (-2)^{(4)}, 0^{(6)}, 2^{(4)}, 4\}. \end{aligned}$$

归纳下来可知 A_n 有 $n+1$ 个不同的整数特征值: $-n, -n+2, -n+4, \cdots, n-4, n-2, n$, 且其重数分别为 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$.

4. 递归定义连续可微函数列 $f_1, f_2, \cdots : [0,1) \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f_1 = 1, \quad \text{在 } (0,1) \text{ 内}, f'_{n+1} = f_n f_{n+1}, \quad f_{n+1}(0) = 1.$$

证明: 对每个 $x \in [0,1)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 并求出极限函数.

证明 首先, 序列 f_n 是良定义的, 且

$$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{24.2}$$

映射 $\Phi : C([0,1)) \to C([0,1))$

$$\Phi(g)(x) = \mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$$

是单调的, 即如果在 $(0,1)$ 上 $f<g$, 则

$$\Phi(x)(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}<\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}=\Phi(g)(x), x\in(0,1).$$

由于 $f_2(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x 1\,\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^x>1=f_1(x), x\in(0,1)$, 由归纳我们有 $f_{n+1}(x)>f_n(x), x\in(0,1), n\in\mathbb{N}$. 进一步, 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 是方程 $f'=f, f(0)=1$ 的唯一解, 即它是 Φ 在 $\{\varphi\in C([0,1)):\varphi(0)=1\}$ 中的唯一不动点. 由于在 $(0,1)$ 内 $f_1<f$, 由归纳我们有 $f_{n+1}=\Phi(f_n)<\Phi(f)=f, \forall n\in\mathbb{N}$. 因此, 对每个 $x\in(0,1)$, 序列 $f_n(x)$ 是单调递增有界的, 因此存在有限的极限.

现在将极限函数记为 $g(x)$, 我们将证明 $g(x)=f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. 显然 $g(0)+\lim\limits_{n\to\infty}f_0(x)=1$. 由 $f_1\equiv 1$ 和 (24.2) 式可知 $f_n(x)>0, x\in[0,1), n\in\mathbb{N}$, 因此再由 (24.2) 式可知函数 f_{n+1} 单调递增. 由于 f_n, f_{n+1} 为正切单调递增, 因此 f'_{n+1} 也递增 (因为 $f'_{n+1}=f_nf_{n+1}$), 因此 f_{n+1} 为凸函数. 凸函数列的逐点极限函数为凸函数, 在如下不等式中令 $n\to\infty$

$$f_n\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant\lambda f_n(x)+(1-\lambda)f_n(y)$$

即可得到

$$g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

对任意 $x,y\in[0,1)$ 以及 $\lambda\in(0,1)$ 成立. 因此 g 为凸函数, 从而它在 $(0,1)$ 内连续. 进一步, g 在 0 处也连续, 因为 $1\equiv f_1\leqslant g\leqslant f$ 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x0=1$. 由 Dini 定理, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, f_n 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上一致收敛于 g(单调序列在紧集上收敛到连续函数). 我们来证明 Φ 是连续的, 因此 f_n 必须收敛于 Φ 的不动点.

事实上, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 我们考虑空间 $C([0,1-\varepsilon])$, $\|\cdot\|$ 表示 $[0,1-\varepsilon]$ 的上确界范数 (supremum norm). 则对一个满足 $\|\varphi-h\|$ 固定的函数 h, 我们有

$$\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]}|\Phi(h)(x)-\Phi(\varphi)(x)|=\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]}\mathrm{e}^{\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t}\left|1-\mathrm{e}^{\int_0^x[\varphi(t)-h(t)]\,\mathrm{d}t}\right|\leqslant C\left(\mathrm{e}^{\delta}-1\right)<2C\delta.$$

对充分小的 $\delta>0$ 成立. 因此, Φ 在 $C([0,1-\varepsilon])$ 上连续. 现在我们假定 $\Phi(g)\neq g$, 则存在 $\eta>0$ 和 $x_0\in[0,1-\varepsilon]$ 使得 $\|\Phi(g)(x_0)-g(x_0)\|<\eta$. 存在 $\delta>0$, 当 $\|\varphi-g\|<\delta$ 时, $\|\Phi(\varphi)-\Phi(g)\|<\dfrac{1}{3}\eta$. 取足够大的 n_0, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, $\|f_n-g\|<\min\left\{\delta,\dfrac{1}{3}\eta\right\}$. 因此,

$$\|f_{n+1}-\Phi(g)\|=\|\Phi(f_n)-\Phi(g)\|\leqslant\frac{1}{3}\eta.$$

另一方面, 我们

$$|f_{n+1}(x_0)-\Phi(g)(x_0)|>|\Phi(g)(x_0)-g(x_0)|-|g(x_0)-f_{n+1}(x_0)|>\eta-\frac{1}{3}\eta=\frac{2}{3}\eta,$$

矛盾, 因此 $\Phi(g)=g$.

由于 f 是 Φ 在 $\{\varphi\in C([0,1-\varepsilon]):\varphi(0)=1\}$ 中的唯一不动点, 我们有 $g=f, x\in[0,1-\varepsilon]$. 由于 $\varepsilon\in(0,1)$ 是任意的, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\dfrac{1}{1-x}, \forall x\in[0,1)$.

5. 设 K 是平面上的一个等边三角形. 证明: 对每个 $p > 0$ 都存在一个 $\varepsilon > 0$ 满足: 如果 n 是一个正整数, 且 $T_1, \cdots, T_n$ 是 K 内部不相交的三角形, 每一个三角形都以非负的位似比与 K 位似, 且

$$\sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{area}(T_\ell) < \operatorname{area}(K) - \varepsilon,$$

则

$$\sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{perimeter}(T_\ell) > p.$$

解 对任意 $\varepsilon > 0$, 我们给上述周长之和找到一个下界, 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 此和趋于 $+\infty$, 那就证明了问题.

将图形旋转或者尺度变换, 使得 K 的一条边是从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 的部分, 横向拉伸此图形使得 K 到 x 轴上的投影是 $[0,1]$. 显然, 我们不需要考虑这些周长, 而考虑这些周长到 x 轴或 y 轴投影的长度, 再考虑它们的和, 这就是我们进行仿射变换的原因.

设 $f_i(a)$ 表示直线 $x = a$ 与 T_i 相交的长度, 令 $f(a) = \sum_i f_i(a)$. 则 f 是分段递增的, 且可能有向下的跳跃度, $f(a) \leqslant 1 - a$, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

设 $d_1, \cdots, d_N$ 是 f 的跳跃度. 每一个跳跃度都是某些 T_i 的边长之和, 并且每一个 T_i 贡献给一个 d_j, 于是我们就可以估计 f 的向下跳跃度的和.

在 f 的可微点处, 我们有 $f'(a) \geqslant f(a)/a$, 这是对 $f_i'(a) \geqslant f_i(a)/a$ 求和的结果. 当然, 如果 f_i 为零, 则不等式显然成立, 否则的话则 $f_i' = 1$, 不等式即 $f_i(a) \leqslant a$, 这显然由定义可得.

考虑 ε 充分小, 取定整数 $m = [1/(8\varepsilon)]$, 将 K 按 $x/m \leqslant x \leqslant (k+1)/m$ 分成几个部分, 则对所有的被小三角形 T_i 覆盖的 $k = 0, 1, \cdots, [(m-1)/2]$ 对应的区域 K 不小于 $1/(2m) - \varepsilon \geqslant 1/(4m)$. 因此

$$\int_{k/m}^{(k+1)/m} f'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{k/m}^{(k+1)/m} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{m}{k+1} \int_{k/m}^{(k+1)/m} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{m}{k+1} \cdot \frac{1}{4m} = \frac{1}{4(k+1)}.$$

于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{[(m-1)/2]}\right).$$

当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 右边是趋于无穷的. 另一方面, 左边等于

$$f(1/2) + \sum_{x_i < 1/2} d_i,$$

因此 $\sum_i d_i$ 也趋于无穷.

25. 2018 年国际大学生数学竞赛 Blagoevgrad, Bulgaria

§ 25.1 第一天

1. 设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是两个正实数序列, 证明下列论述等价:

(1) 存在正实数序列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{b_n}$ 都收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ 收敛.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 由均值不等式,

$$\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}=\sqrt{\frac{a_n}{c_n}\cdot\frac{c_n}{b_n}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{c_n}+\frac{c_n}{b_n}\right),$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{b_n}<+\infty.$$

于是, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ 收敛.

(2) $\Rightarrow$ (1): 取 $c_n=\sqrt{a_nb_n}$, 则

$$\frac{a_n}{c_n}=\frac{c_n}{b_n}=\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}.$$

根据条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{b_n}$ 都收敛.

2. 是否存在一个域使得它的乘法群同构于它的加法群?

解 不存在这样的域.

设 F 是一个域且 $g:F^*\to F^+$ 是群同构, 则 $g(1)=0$.

设 $a=g(-1)$, 则 $2a=2\cdot g(-1)=g\big((-1)^2\big)=g(1)=0$, 则要么 $a=0$ 要么 $\operatorname{char}F=2$. 如果 $a=0$, 则 $-1=g^{-1}((a))=g^{-1}(0)=1$, 因此在任何情形下有 $\operatorname{char}F=2$.

对每个 $x\in F$, 我们有 $g(x^2)=2g(x)=0=g(1)$, 所以 $x^2=1$. 但是此方程只有 1 或 2 个根, 因此 F 为 2 元域. 但它的加法群和乘法群的元素不同, 因此不是同构的.

3. 求出所有的有理数 a 使得矩阵

$$\begin{pmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a & -a \end{pmatrix}$$

是一个有理元矩阵的平方.

解 我们将证明唯一的数是 $a=0$.

设 $A=\begin{pmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a & -a \end{pmatrix}$ 且假设 $A=B^2$. 容易计算 A 的特征值多项式为

$$p_A(x)=\det(A-xI)=(x^2+1)^2.$$

由 Cayley-Hamilton 定理, 我们有 $p_A(B^2)=p_A(A)=\boldsymbol{O}$.

设 $\mu_B(x)$ 是 B 的极小多项式, 此多项式整除 B 的所有零化多项式, 特别地, $\mu_B(x)$ 是多项式 $p_A(x^2)=(x^4+1)^2$ 的因子. 多项式 $\mu_B(x)$ 是有理系数, 且次数不超过 4. 另一方面, 多项式 x^4+1 是第 8 个分圆多项式, 它在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约. 因此 $\mu_B(x)$ 的唯一可能性为 $\mu_B(x)=x^4+1$. 因此,

$$A^2+I=\mu_B(B)=\boldsymbol{O}. \tag{25.1}$$

由于我们有

$$A^2+I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a & 2a \\ 0 & 0 & -2a & 2a \\ 2a & -2a & 0 & 0 \\ 2a & -2a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

式 (25.1) 使得 $a=0$. 当 $a=0$ 时, 我们有

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

4. 求出所有的可微函数 $f:(),+\infty)\to\mathbb{R}$ 使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\sqrt{ab}\right),\quad \forall a,b>0. \tag{25.2}$$

解 首先我们证明 f 是无穷次可微的. 在 (25.2) 中令 $a=\dfrac{1}{2}t, b=2t$ 得

$$f'(t)=\frac{f(2t)-f\left(\frac{1}{2}t\right)}{\frac{3}{2}t}. \tag{25.3}$$

直观地, 如果 (25.3) 式右边的 f 是 k 次可微的, 则左边的 $f'(t)$ 也是 k 次可微的, 因此 f 就是 $k+1$ 次可微的.

在 (25.2) 中令 $b=\mathrm{e}^h t, a=\mathrm{e}^{-h} t$, 两边关于 h 微分三次, 然后令 $h \to 0$ 得

$$
\begin{gathered}
f\left(\mathrm{e}^h t\right)-f\left(\mathrm{e}^h t\right)-\left(\mathrm{e}^h t-\mathrm{e}^{-h} t\right) f(t)=0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^3\left(f\left(\mathrm{e}^h t\right)-f\left(\mathrm{e}^{-h} t\right)-\left(\mathrm{e}^h t-\mathrm{e}^{-h} t\right) f(t)\right)=0 .
\end{gathered}
$$

将上式化简可得

$$
t^3 f'''(t)+3 f''(t)=(t f(t))'''=0 .
$$

因此, $t f(t)$ 至多是 t 的二次多项式, 于是

$$
f(t)=C_1 t+\frac{C_2}{t}+C_3, \tag{25.4}
$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 为任意常数. 可以很简单验证具有形式 (25.4) 的函数满足方程 (25.2).

5. 设 p, q 为素数且 $p<q$. 假定在图多边形 $P_1 P_2 \cdots P_{pq}$ 中, 所有的内角相等, 而各边为不相等的正整数边. 证明:

$$
P_1 P_2+P_2 P_3+\cdots+P_k P_{k+1} \geqslant \frac{k^3+k}{2}
$$

对每个满足 $1 \leqslant k \leqslant p$ 的整数 p 成立

证明 将多边形在复平面上逆时针放置, 使得 P_2-P_1 为一个正实数. 设 $a_i=\left|P_{i+2}-P_{i+1}\right|$ 是一个整数, 定义多项式 $f(x)=a_{pq-1} x^{pq-1}+\cdots+a_1 x+a_0$. 设 $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{pq}}$, 则 $P_{i+1}-P_i=a_{i-1} \omega^{i-1}$, 因此 $f(\omega)=0$.

ω 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上的极小多项式为分圆多项式 $\Phi_{pq}(x)=\dfrac{\left(x^{pq}-1\right)(x-1)}{\left(x^p-1\right)\left(x^q-1\right)}$, 因此 $\Phi_{pq}(x)$ 整除 $f(x)$. 同时, $\Phi_{pq}(x)$ 是 $s(x)=\dfrac{x^{pq}-1}{x^p-1}=\Phi_q\left(x^p\right)$ 和 $t(x)=\dfrac{x^{pq}-1}{x^q-1}=\Phi_p\left(x^q\right)$ 的的最大公因式, 因此有由实多项式的 Bezout 定理知存在多项式 $u(x), v(x)$ 使得

$$
f(x)=s(x) u(x)+t(x) v(x) .
$$

这两个多项式可以用 $u^*(x)=u(x)+w(x) \dfrac{x^p-1}{x-1}$ 和 $v(x)=v(x)-w(x) \dfrac{x^q-1}{x-1}$ 替代, 因此不失一般性我们假设 $\operatorname{deg} u \leqslant p-1$. 由于 $a=pq-1$, 这迫使 $v \leqslant q-1$.

设 $u(x)=u_{p-1} x^{p-1}+\cdots+u_1 x+u_0, v(x)=v_{q-1} x^{q-1}+\cdots+v_1 x+v_0$. 用 (i, j) 表示满足 $n \equiv i \pmod p$ 和 $n \equiv j \pmod q$ 的唯一整数 $n \in\{0,1, \cdots, pq-1\}$. 根据 s 和 t 的选择, 我们有 $a_{(i, j)}=u_i+v_j$. 于是

$$
\begin{aligned}
P_1 P_2+\cdots+P_k P_{k+1} & =\sum_{i=0}^{k-1} a_{(i, i)}=\sum_{i=0}^{k-1}\left(u_i+v_i\right)=\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1}\left(u_i+v_j\right) \\
& =\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} a_{(i, j)} \stackrel{(*)}{\geqslant} \frac{1}{2} 1+2+\cdots+k^2=\frac{k^3+k}{2},
\end{aligned}
$$

这里 $(*)$ 式应用了数 (i, j) 是两两互异的事实.

§ 25.2 第二天

1 设 k 是一个正整数. 求出最小的正整数 n, 使得存在 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个非零向量 $v_1, \cdots, v_k$, 对每一对满足 $|i-j|>1$ 指标 i, j, 向量 v_i 和 v_j 正交.

证明 首先我们证明: 如果 $2n+1 \leqslant k$, 则不存在向量 $v_1, \cdots, v_k$ 满足条件. 反证法, 假定向量 $v_1, \cdots, v_k$ 满足条件, 考虑向量

$$v_1, v_3, v_5, \cdots, v_{2n+1}.$$

由条件知这 $n+1$ 个向量两两正交, 但这在 $\mathbb{R}^n$ 中是不可能的.

下面对每一对满足 $2k \geqslant k$ 的 k, n, 我们给出一个可能的构造. 取 $\mathbb{R}^n$ 的正交基 $(e_1, \cdots, e_n)$, 并考虑向量

$$v_1 = v_2 = e_1, \quad v_3 = v_4 = e_2, \quad \cdots, v_{2n-1} = v_{2n} = e_n.$$

对每一对满足 $1 \leqslant i, j \leqslant 2n, |i-j|>1$ 的指标 (i, j), 向量 v_i 和 v_j 是不同的基向量, 所以它们是正交的. 显然向量 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 也满足同样的性质.

因此, 这样的向量组存在当且仅当 $2n \geqslant k$, 也就是说对固定的 k, 最小的合适的 n 是 $\left\lceil \dfrac{k}{2} \right\rceil$.

2 设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是一个实数列, 满足 $a_0 = 0$, 且

$$a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

证明下列级数收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|. \tag{25.5}$$

证明 我们来估计 $|a_{n+2} - a_{n+1}|$ 与 $|a_{n+1} - a_n|$ 之间的比率.

在解决这个问题时, 我们将 a_n 局部化: 我们来证明

$$-2 \leqslant a_n \leqslant -\sqrt[3]{4}, n \geqslant 1. \tag{25.6}$$

下界可以直接由递推式得到: $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}^2 - 8} \geqslant \sqrt[3]{8} = -2$. 而上界的证明可以通过归纳: 我们有 $a_1 = -2 < -\sqrt[3]{4}$, 且只要 $-2 \leqslant a_n < 0$, 就有 $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 - 8} \leqslant \sqrt[3]{2^2 - 8} = -\sqrt[3]{4}$.

现在比较 $|a_{n+2} - a_{n+1}|$ 和 $|a_{n+1} - a_n|$. 由 $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ 以及递推公式得

$$\begin{aligned}
\left(a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2\right) \cdot |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left|a_{n+2}^3 - a_{n+1}^3\right| \\
&= \left|(a_{n+1}^2 - 8) - (a_n^2 - 8)\right| \\
&= |a_{n+1} + a_n| \cdot |a_{n+1} - a_n|.
\end{aligned}$$

而在左边我们有

$$a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 \geqslant 3 \cdot 4^{2/3},$$

而在右边我们有

$$|a_{n+1}+a_n| \leqslant 4.$$

因此,

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| \leqslant \frac{4}{3\cdot 4^{2/3}}|a_{n+1}-a_n| = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}|a_{n+1}-a_n|.$$

通过简单的归纳可知

$$|a_{n+1}-a_n| < \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1}|a_2-a_1|.$$

这样就说明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛.

3 设 $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 : y+1 \geqslant x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0\}$. 一只青蛙沿着 Ω 中的点以步长 1 跳跃. 对每个正整数 n, 求出青蛙恰好用 $3n$ 步从 $(0,0,0)$ 跳到 (n,n,n) 点的路径的数目.

解 设 $\Psi = \{(u,v)\in\mathbb{Z}^3 : v \geqslant 0, u \geqslant 2v\}$. 注意到映射 $\pi : \Omega \to \Psi, \pi(x,y,z) = (x+y,z)$ 是两个集合间的双射. 进一步,π 只使用单位跳跃向量将青蛙所有允许的路径投射到集合 Ψ 内部. 因此, 我们感兴趣的是在集合 Ψ 内从 $\pi(0,0,0) = (0,0)$ 到 $\pi(n,n,n) = (2n,n)$ 的路径的数目, 只使用跳跃 $(1,0)$ 和 $(0,1)$.

对每个格点 $(u,v)\in\Psi$, 设 $f(u,v)$ 是 Ψ 中从 $(0,0)$ 到 (u,v) 的跳跃 $u+v$ 次的路径数目. 显然我们有 $f(0,0)=1$. 用 $v=-1, 2v=u+1$ 扩充此定义, 设

$$f(u,-1) = 0, \quad f(2v-1,v) = 0. \tag{25.7}$$

对 Ψ 中除去原点的任意点 (u,v), 此路径要么过 $(u-1,v)$ 要么过 $(u,v-1)$, 所以

$$f(u,v) = f(u-1,v) + f(u,v-1), \quad (u,v)\in\Psi\backslash\{(0,0)\}. \tag{25.8}$$

如果我们忽略边界条件 (25.7) , 存在大量函数满足 (25.8). 即对每一个整数 c, $(u,v) \to \binom{u+v}{v+c}$ 就是一个这样的函数, 当 $v+c<0$ 或 $v+c>u+v$ 时, 定义二项式系数为零.

在直线 $2v=u+1$ 上我们有 $\binom{u+v}{v} = \binom{3v-1}{v} = 2\binom{3v-1}{v-1} = 2\binom{u+v}{v-1}$. 因此, 函数

$$f^*(u,v) = \binom{u+v}{v} - 2\binom{u+v}{v-1}$$

满足 (25.7) , (25.8) 且 $f(0,0)=1$. 这些性质唯一定义了此函数 f, 因此 $f=f^*$.

特别地, 青蛙从 $(0,0,0)$ 到 (n,n,n) 的路径数目为

$$f\big(\pi(n,n,n)\big) = f(2n,n) = \binom{3n}{n} - 2\binom{3n}{n-1} = \frac{\binom{3n}{n}}{2n+1}.$$

4 求出所有的首一复多项式对 $P(x), Q(x)$ 使得 $P(x)$ 整除 $Q^2(x)+1$ 且 $Q(x)$ 整除 $P^2(x)+1$.

解 答案是所有的函数对为 $(1,1)$ 和 $(P,P+\mathrm{i}), (P,P-\mathrm{i})$, 这里 P 是 $\mathbb{C}[x]$ 中的一个首一多项式, i 是虚数单位.

注意到如果 $P|Q^2+1$ 且 $Q|P^2+1$, 则 P 与 Q 互素, 且条件等价于 $PQ|P^2+Q^2+1$.

引理 25.1. 如果 $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ 是首一多项式使得 P^2+Q^2+1 被 PQ 整除, 则 $\deg P = \deg Q$.

证明. 用反证法, 假定存在一对 (P,Q) 使得 $\deg P \neq \deg Q$. 在所有这些函数对中, 取一对使得 $\deg P + \deg Q$ 最小, 并设 (P,Q) 是这样的函数对. 不失一般性, 假定 $\deg P > \deg Q$, 设 S 是多项式满足

$$\frac{P^2+Q^2+1}{PQ} = S.$$

注意到 P 是关于 X 的多项式方程 $X^2 - QSX + Q^2 + 1 = 0$ 的一个解. 由 Vieta 定理, 另一个解为 $R = QS - P = \dfrac{Q^2+1}{P}$. 由 $R = QS - P$ 知 R 显然是一个多项式, 且因为 P, Q 是首一的, 则 $R = \dfrac{Q^2+1}{P}$ 也是首一的. 因此函数对 (R,Q) 满足引理的条件. 注意到 $\deg R = 2\deg Q - \deg P < \deg P$, 这与 $\deg P + \deg Q$ 的最小性矛盾. 这就证明了引理. ☆

由引理知, 我们有 $\deg(PQ) = \deg(P^2+Q^2+1)$, 因此 $\dfrac{P^2+Q^2+1}{PQ}$ 是一个常多项式. 如果 Q 和 Q 是常多项式, 则我们有 $P = Q = 1$. 假定 $\deg P = \deg Q \geqslant 1$, 由于 P, Q 是首一的,P^2+Q^2+1 的首项系数为 2, 而 PQ 的首项系数为 1, 这说明 $\dfrac{P^2+Q^2+1}{PQ} = 2$. 最后, 我们有 $P^+Q^1+1 = 2PQ$, 于是 $(P_Q)^2 = -1$, 即 $Q = P + \mathrm{i}$ 或 $Q = P - \mathrm{i}$. 容易验证, 这些函数对都是方程的解.

5 设 $R > 1$, 令 $\mathcal{D}_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : 0 < a^2+b^2 < R\}$. 计算

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{(a,b)\in\mathcal{D}_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2}.$$

解 定义 $\mathcal{E}_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} : a^2+b^2 < R, 且 a+b 为偶数\}$, 则

$$\sum_{(a,b)\in\mathcal{D}_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2} = 2\sum_{(a,b)\in\mathcal{E}_R} \frac{1}{a^2+b^2} - \sum_{(a,b)\in\mathcal{D}_R} \frac{1}{a^2+b^2}. \tag{25.9}$$

但是 $a+b$ 为偶数当且仅当我们能写成 $(a,b) = (m-n, m+n)$, 并且这样的 m, n 是唯一的. 还注意到 $a^2+b^2 = (m-n)^2+(m+n)^2 = 2m^2+2n^2$, 因此 $a^2+b^2 < R$ 当且仅当 $m^2+n^2 < R/2$. 于是我们得到

$$2\sum_{(a,b)\in\mathcal{D}_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2} = 2\sum_{(m,n)\in\mathcal{D}_{R/2}} \frac{1}{(m-n)^2+(m+n)^2} = \sum_{(m,n)\in\mathcal{D}_{R/2}} \frac{1}{m^2+n^2}. \tag{25.10}$$

将 (25.10) 代入 (25.9) 中得

$$\sum_{(a,b)\in\mathcal{D}_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2} = -\sum_{R/2\leqslant a^2+b^2<R} \frac{1}{a^2+b^2}, \tag{25.11}$$

其中第二个式子是对整数 a, b 求和.

用 $N(r)$ 表示开圆盘 $x^2+y^2<r^2$ 的格点数. 在半径为 $r(\sqrt{R/2}\leqslant r<\sqrt{R})$ 的圆上, 有 $N(r+0)-N(r-0)$ 个格点, 每一个都在求和式 (25.11) 中贡献了 $\dfrac{1}{r^2}$. 所以我们可以将求和式重新写为 Stieltjes 积分:

$$\sum_{R/2\leqslant a^2+b^2<R}\frac{1}{a^2+b^2}=\int_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}N(r).$$

熟知 $N(r)=\pi r^2+O(r)$. 分部积分得

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}N(r)&=\left(\frac{1}{r^2}N(r)\right)\bigg|_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}+\int_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}\frac{2}{r^3}N(r)\,\mathrm{d}r\\&=\left(\frac{\pi r^2+O(r)}{r^2}\right)\bigg|_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}+2\int_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}\frac{\pi r^2+O(r)}{r^3}\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}\frac{\mathrm{d}r}{r}+O\left(1/\sqrt{R}\right)=\pi\log 2+O\left(1/\sqrt{R}\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\sum_{(a,b)\in\mathcal{D}_R}\frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2}&=-\lim_{R\to\infty}\sum_{R/2\leqslant a^2+b^2<R}\frac{1}{a^2+b^2}\\&=-\lim_{R\to\infty}\int_{\sqrt{R/2}}^{\sqrt{R}}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}N(r)=-\pi\log 2.\end{aligned}$$