Lógica de Predicados: Semántica

- Interpretación I:
  Una interpretación de una fórmula F en lógica predicados es una asignación de valores {v, f} a cada símbolo de la formula.

Lógica de Predicados: Semántica

- Estructura de una interpretación
  - Un dominio de discurso $\mathbb{D}$
  - Los símbolos constantes se asignan a elementos de $\mathbb{D}$

  $I\ (c_i) \in \Delta$ (elementos del dominio)
  - Los símbolos de función se asignan a funciones en $\mathbb{D}$.

  $I\ (f_i)\colon \Delta n \to \Delta$ (función n-aria en el dominio)
  - Los símbolos de predicados se asignan a relaciones sobre $\mathbb{D}$.

  $I\ (P_i) \subseteq \Delta n$ (relación n-aria en el dominio)
- Entonces
  - Las afirmaciones se convertirán en elementos de $\mathbb{D}$.
  - Los símbolos de predicados con argumentos se volverán verdaderos o falsos
  - Los cuantificadores y conectivos lógicos se tratan de la misma manera

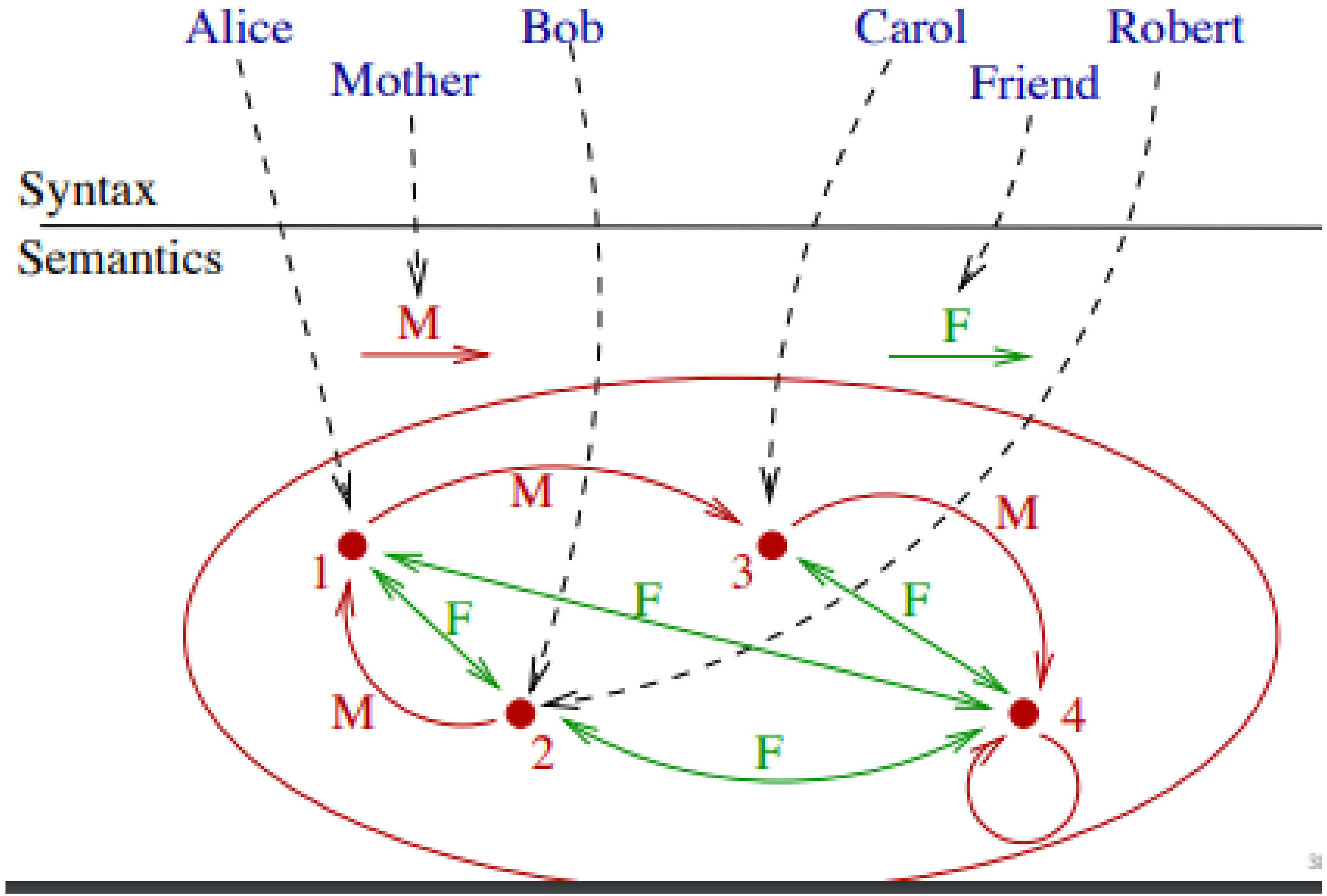
Lógica de Predicados: Ejemplo de Interpretación

Symbols	Constants: *alice*, *bob*, *carol*, *robert* Function: *mother-of* (with arity equal to 1) Predicate: *friends* (with arity equal to 2)
Domain	$\Delta = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Interpretation	$\mathcal{I}(alice) = 1$, $\mathcal{I}(bob) = 2$, $\mathcal{I}(carol) = 3$, $\mathcal{I}(robert) = 2$

$$\mathcal{I}(\textit{mother-of}) = M \qquad \begin{array}{l} M(1) = 3 \\ M(2) = 1 \\ M(3) = 4 \\ M(n) = n + 1 \text{ for } n \geq 4 \end{array}$$

$$\mathcal{I}(friends) = F = \left\{ \begin{array}{lll} \langle 1, 2 \rangle, & \langle 2, 1 \rangle, & \langle 3, 4 \rangle, \\ \langle 4, 3 \rangle, & \langle 4, 2 \rangle, & \langle 2, 4 \rangle, \\ \langle 4, 1 \rangle, & \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle & \end{array} \right\}$$

Lógica de Predicados: Ejemplo de Interpretación



Lógica Predicados: reglas semánticas

Dada una fórmula F y una interpretación I, el valor de F bajo I , denotado por I(F) es:

- Si F es de la forma $G \vee H$
  entonces $I(F) =$ **F** si I(G) = I(H) = F
  V en caso contrario

- Si F es de la forma $G \rightarrow H$
  entonces $I(F) =$ **F** si I(G) = V y I(H) = F
  V en caso contrario

- Si F es de la forma $G \leftrightarrow H$
  entonces $I(F) =$ **V** si I(G) = I(H)
  F en caso contrario

- .....

Lógica Predicados: reglas semánticas

Dada una fórmula F y una interpretación I, el valor de F bajo I, denotado por $I(F)$ es:

- Si F es de la forma $\forall x(G(x))$ entonces $I(F) =$

  V si I(G(d)) = V para todo $d \in D$
  F en caso contrario

- Si F es de la forma $\exists x(G(x))$ entonces $I(F) =$

  V si I(G(d)) = V para algún $d \in D$
  F en caso contrario

Lógica de Predicados: ejemplo

Para todo n natural se cumple que $2 \cdot n$ es par

Sea $F = \forall x (P(x))$

Dominio= $\mathbb{N}$

Constantes=no existen

Funciones=no existen

Predicados= $I(P)(x) = 2x$ es par

- $x=1$; $I(F) = V$
- $x=2$; $I(F) = V$

V si $I(G(d)) = V$ para todo $d \in \mathbb{D}$

F en caso contrario

es equivalente a enunciar

$2 \cdot 1$ es par y $2 \cdot 2$ es par y $2 \cdot 3$ es par y $2 \cdot 4$ es par ….

Lógica de Predicados: ejemplo

Existen algunos números que son mayores que uno

Sea $F=\exists x(P(x))$

Dominio= $\mathbb{N}$

Constantes=no existen

Funciones=no existen

Predicados= I(P) (x) = x es un número mayor que 1

- x=1; $I(F) = f$
- x=2; $I(F) = v$

V si I(G(d)) = V para algún d ∊ D

F en caso contrario

es equivalente a enunciar 1 es mayor que 1 o 2 es mayor que 1 o 3 es mayor que 1 o 4 es mayor que 1 o . . .

Lógica de Predicados: ejemplo

Sea $F=\forall x(P(x))$

Dominio= Z

Predicados= $I(P)(x) = x > 0$

Sea $F=\forall x(P(x))$

Dominio= Z^+

Predicados= $I(P)(x) = x > 0$

Sea $F=\exists x(P(x))$

Dominio= Z

Predicados= $I(P)(x) = x = x +1$

Sea $F=\exists x(P(x))$

Dominio= Z

Predicados= $I(P)(x) = x = x * 2$

FALSO
VERDADERO
FALSO
VERDADERO

Lógica de Predicados: ejemplo

Sea $F=\forall x \forall y\ (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{R}$

Predicados= $I(P)(x) = x / y = 1$

Sea $F=\forall x \exists y\ (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{R}$

Predicados= $I(P)(x) = x / y = 1$

Sea $F= \exists x \forall y\ (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{R}$

Predicados= $I(P)(x) = x / y = 1$

Sea $F= \exists x \exists y\ (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{R}$

Predicados= $I(P)(x) = x / y = 1$

Falso

Verdadero

Falso

Verdadero

Lógica de Predicados: ejemplo

Sea F= $\forall x \exists y (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{Z}$

Predicados= $I(P)^2(x,y)$: $x + y = 0$

Sea F= $\forall x \exists y (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{N}$

Predicados= $I(P)^2(x,y)$: $x + y = 0$

Sea F= $\exists x \forall y (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{Z}$

Predicados= $I(P)^2(x,y)$: $xy = x(y + 1)$

Sea F= $\exists x \forall y (P(x,y))$

Dominio= $\mathbb{Z}^+$

Predicados= $I(P)^2(x,y)$: $xy = x(y + 1)$

V
F
V
F

Lógica de Predicados: ejemplo

Sea $F = \forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge Q(a)$

Dominio: D={1,2,3}

Constantes: I(a)=3

Funciones:

x	I (f) (x)
1	2
2	3
3	1

Predicados: I(P)={(1,3),(2,3)}, I(Q)={2,3}

x=1, y=2

$\forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge Q(a)$

$P(1,3) \wedge Q(3)$

$v \wedge v \therefore v$

Lógica de Predicados: ejemplo

Sea $F = \forall x \exists y P(x, f(y)) \land Q(a)$

Dominio: $D = \{1,2,3\}$

Constantes: $I(a)=3$

Funciones:

x	I(f) (x)
1	2
2	3
3	1

Predicados: $I(P)=\{(1,3),(2,3)\}$, $I(Q)=\{2,3\}$

x=2, y=2

$\forall x \exists y P(x, f(y)) \land Q(a)$

$P(2,3) \land Q(3)$

$v \land v \therefore v$

Lógica de Predicados: ejemplo

Sea $F = \forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge Q(a)$

Dominio: $D=\{1,2,3\}$

Constantes: $a^I=3$

Funciones:

x	I(f) (x)
1	2
2	3
3	1

Predicados: $I(P)=\{(1,3),(2,3)\}$, $I(Q)=\{2,3\}$

x=3, y=?

$\forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge Q(a)$

$P(3,?) \wedge Q(3)$

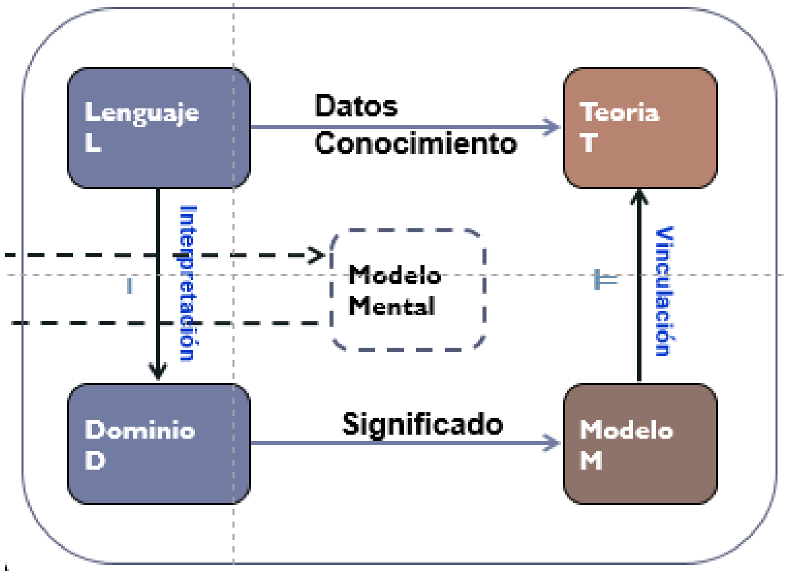
$f \wedge v \therefore f$

$\therefore I(F) = \forall x \exists y P(x, f(y)) \wedge Q(a) = F$

Lógica Predicados: modelo

Una interpretación `I` es un **modelo** para una fórmula `F` si `I(F) = v`

Una formula `F` es **valida** si y solo toda interpretación `I` es un modelo de `F`



Lógica Predicados: satisfacibilidad

- **Satisfacible**: Una formula `F` es satisfacible si existe alguna interpretación `I` que sea modelo de `F`

- **Insatisfacible**: Una formula `F` es insatisfacible si no existe ninguna interpretación `I` que sea modelo de `F`

Práctica 3