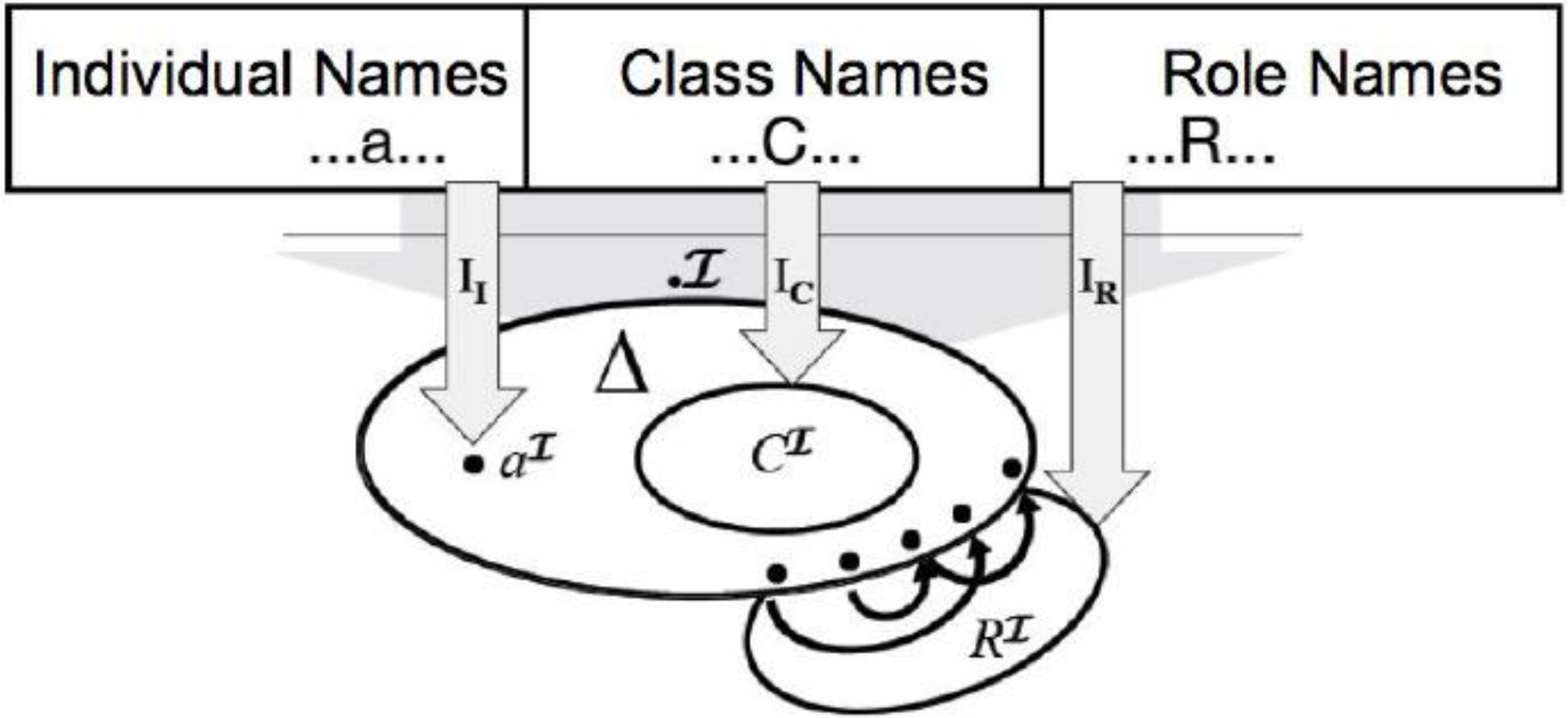
Lógica Descriptiva ($\mathcal{ALC}$): Semántica

- La semántica de $\mathcal{ALC}$ se define a través de **interpretaciones**

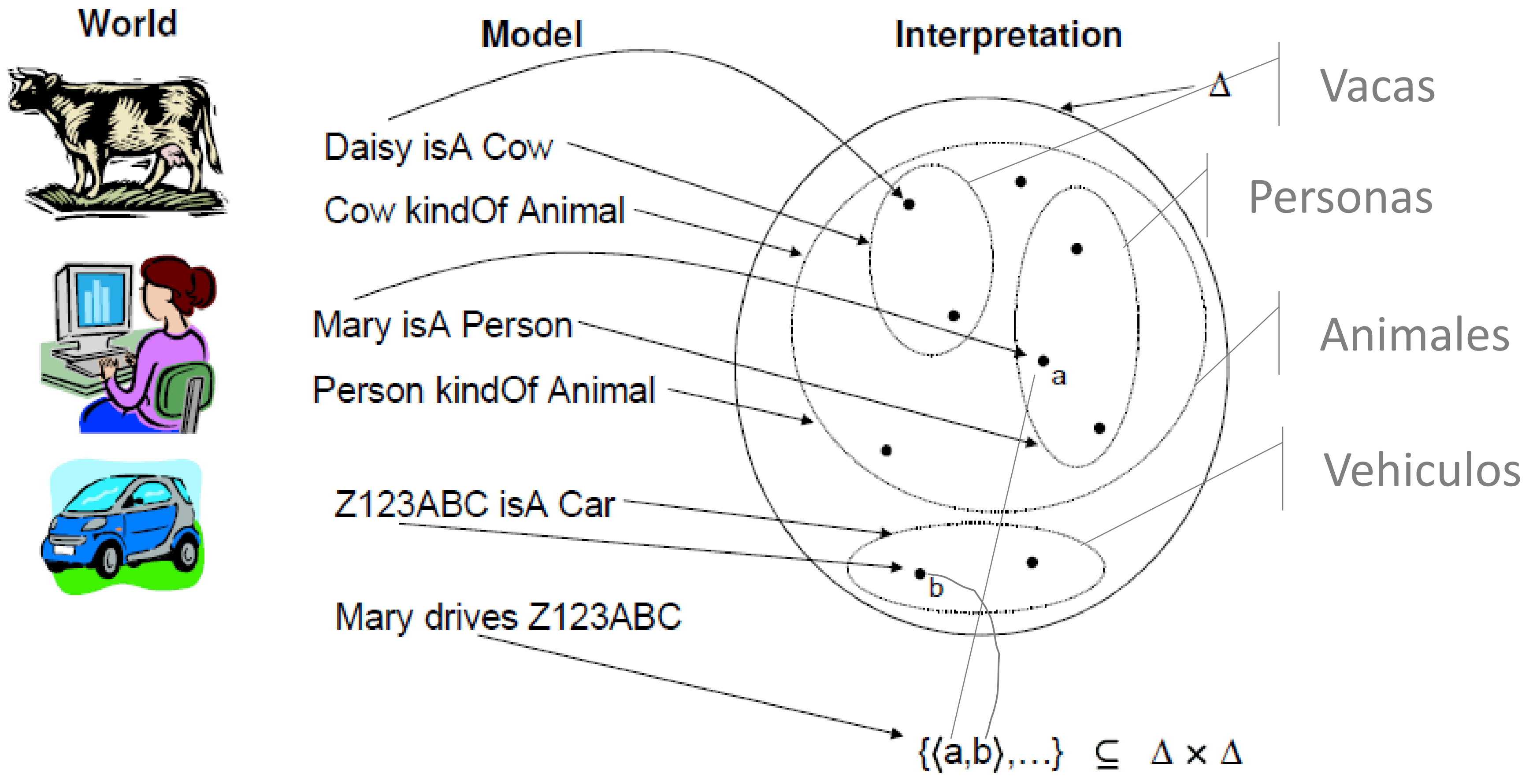
- Una **interpretación I = (Δ^I, $.^I$)** contiene
  - un conjunto $\mathbf{\Delta^I}$ (dominio) de individuos
  - una función de interpretación $.^I$ que mapea
    - Nombres individuos **a** a los elementos de dominio $\mathbf{a^I \in \Delta^I}$
    - Todo concepto **C** a un conjunto de elementos de dominio $\mathbf{C^I \subseteq \Delta^I}$
    - Todo rol **R** a una relación binaria $\mathbf{R^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I}$

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica



Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica

Ejemplo.



Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica

Extensión (de Interpretación I) para clases complejas:

- $\top^I = \Delta^I = (C \sqcup \neg C)^I$
- $\bot^I = \emptyset = (C \sqcap \neg C)I$
- $(C \sqcup D)^I = C^I \cup D^I$ y $(C \sqcap D)^I = C^I \cap D^I$
- $(\neg C)^I = \Delta^I \setminus C^I$
- $\neg\neg C^I = C^I$
- $\neg(C \sqcup D)^I = (\neg C \sqcap \neg D)^I$
- $\neg(C \sqcap D)^I = (\neg C \sqcup \neg D)^I$

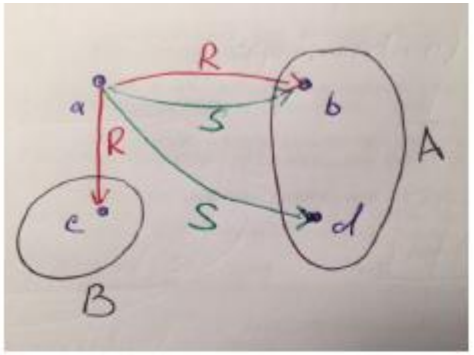
Extensión (de Interpretación I) para clases complejas:

- $\forall R.C^I=\{a\in\Delta^I \mid (\forall b\in\Delta^I)((a,b)\in R^I \rightarrow b\in C^I)\}$

Ejemplo

- $(\forall R.A)^I=\{?\}$ es el conjunto de todos los objetos x en Δ^I tal que
  - o bien x no tiene ninguna flecha R saliente
  - existen tales flechas y sus extremos pertenecen todos a A

– $\Delta^I = \{a; b; c; d\}$
– $A^I = \{b; d\}$
– $B^I = \{c\}$
– $R^I = \{(a,b); (a,c)\}$
– $S^I = \{(a,b); (a,d)\}$



Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica

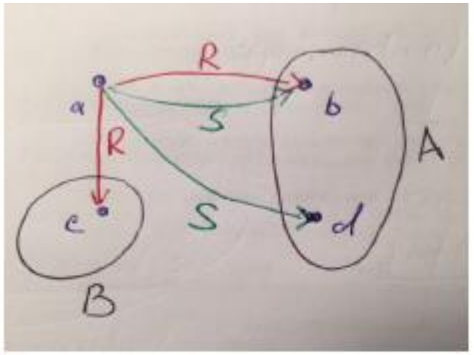
Extensión (de Interpretación I) para clases complejas:

- $\forall R.C^I = \{a \in \Delta^I \mid (\forall b \in \Delta^I)((a,b) \in R^I \rightarrow b \in C^I)\}$

Ejemplo

- $(\forall R.A)^I = \{b,c,d\}$ es el conjunto de todos los objetos x en Δ^I tal que
  - o bien x no tiene ninguna flecha R saliente
  - existen tales flechas y sus extremos pertenecen todos a A

– $\Delta^I = \{a; b; c; d\}$
– $A^I = \{b; d\}$
– $B^I = \{c\}$
– $R^I = \{(a,b); (a,c)\}$
– $S^I = \{(a,b); (a,d)\}$



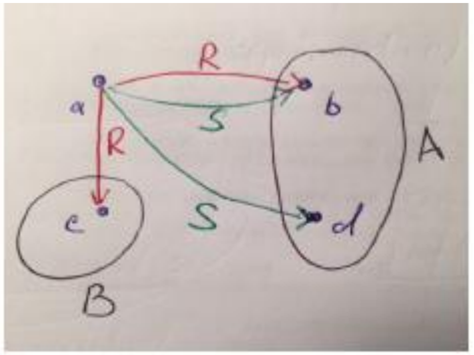
Extensión (de Interpretación I) para clases complejas:

- $\exists R.C^I = \{a \in \Delta^I \mid (\exists b \in \Delta^I)((a,b) \in R^I \wedge b \in C^I)\}$

Ejemplo

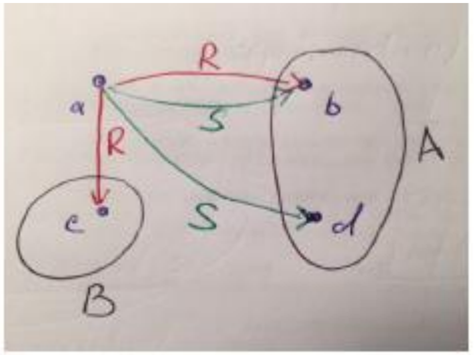
- $(\exists R.A)^I = \{?\}$ es el conjunto de todos los objetos x en Δ^I tal que
  - existe alguna flecha R saliente y sus extremos pertenecen a A

– $\Delta^I = \{a; b; c; d\}$
– $A^I = \{b; d\}$
– $B^I = \{c\}$
– $R^I = \{(a,b); (a,c)\}$
– $S^I = \{(a,b); (a,d)\}$



Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica

- $\Delta^I = \{a; b; c; d\}$
- $A^I = \{b; d\}$
- $B^I = \{c\}$
- $R^I = \{(a,b); (a,c)\}$
- $S^I = \{(a,b); (a,d)\}$



Extensión (de Interpretación I) para clases complejas:

- $\exists R.C^I = \{a \in \Delta^I \mid (\exists b \in \Delta^I)((a,b) \in R^I \wedge b \in C^I)\}$

Ejemplo

- $(\exists R.A)^I = \{a\}$ es el conjunto de todos los objetos x en Δ^I tal que
  - existe alguna flecha R saliente y sus extremos pertenecen a A

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica

Extensión (de Interpretación I) para clases complejas:

- $(\neg(\exists r.C))^I = (\forall r.\neg C)^I$
- $(\neg(\forall r.C))^I = (\exists r.\neg C)^I$

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica - ejemplo

Sea $I = (\Delta^I, .^I)$ donde

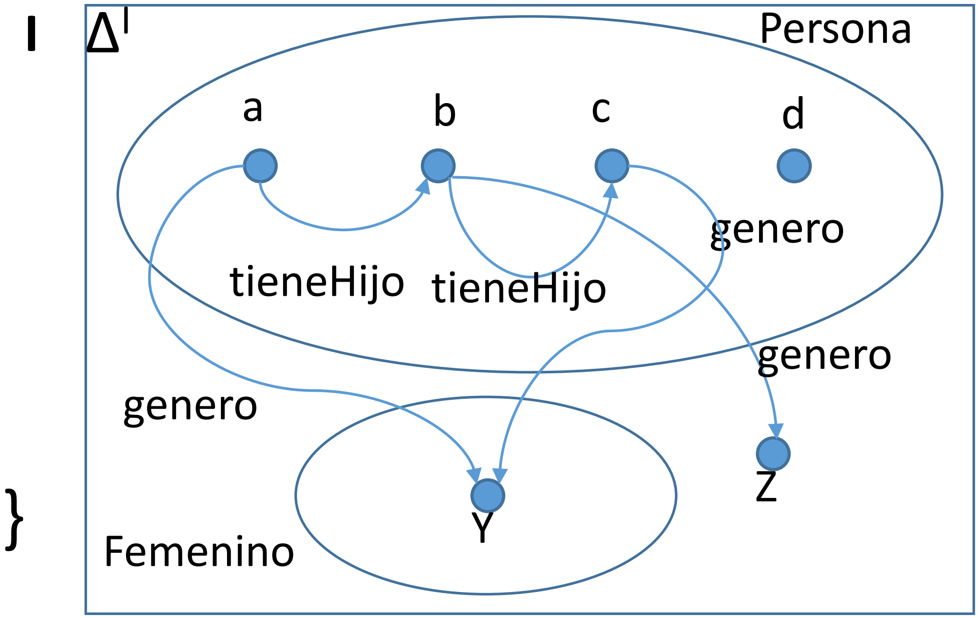
– $\Delta^I = \{a; b; c; d; Y; Z\}$

– $Persona^I = \{a; b; c; d\}$

– $Femenino^I = \{Y\}$

– $tieneHijo^I = \{(a; b); (b; c)\}$

– $genero^I = \{(a; Y); (b;Z); (c;Y)\}$



Defina el valor de los siguientes axiomas:

$(Persona \sqcap \exists genero.\top)^I$

$= \{a,b,c\}$ como

$Persona^I = \{a; b; c; d\}$, $(\exists genero.\top)^I = \{a; b; c\}$

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica - ejemplo

Sea $I = (\Delta^I, .^I)$ donde

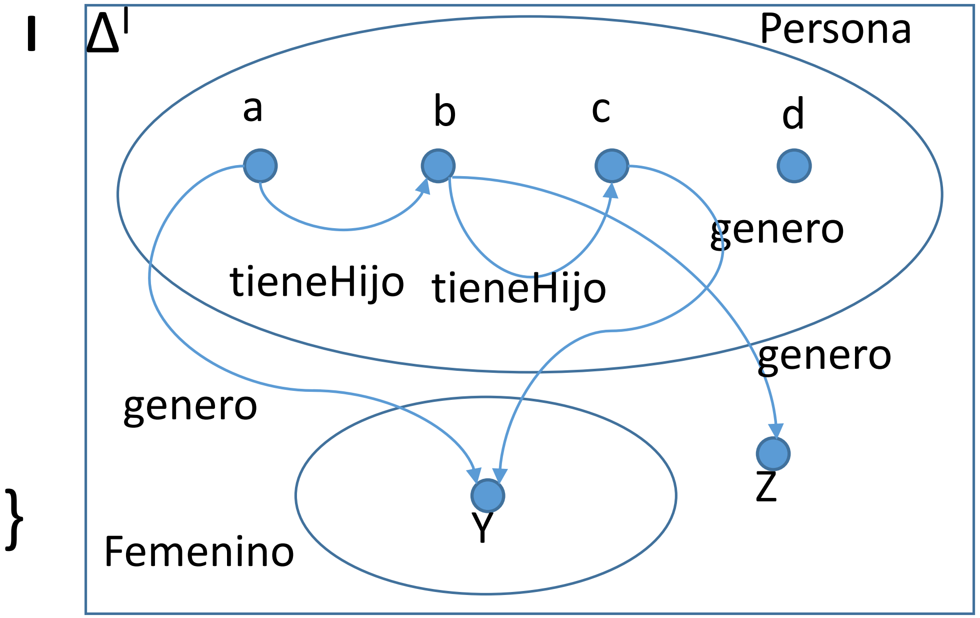
– $\Delta^I = \{a; b; c; d; Y; Z\}$

– $Persona^I = \{a; b; c; d\}$

– $Femenino^I = \{Y\}$

– $tieneHijo^I = \{(a; b); (b; c)\}$

– $genero^I = \{(a; Y); (b;Z); (c;Y)\}$



Defina el valor de los siguientes axiomas:

$(Persona \sqcap \exists genero.Femenino)^I$

$= \{a,c\}$ como

$Persona^I = \{a; b; c; d\}$, $(\exists genero.Femenino)^I = \{a; c\}$

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica - ejemplo

Sea I = (Δ^I, $.^I$) donde

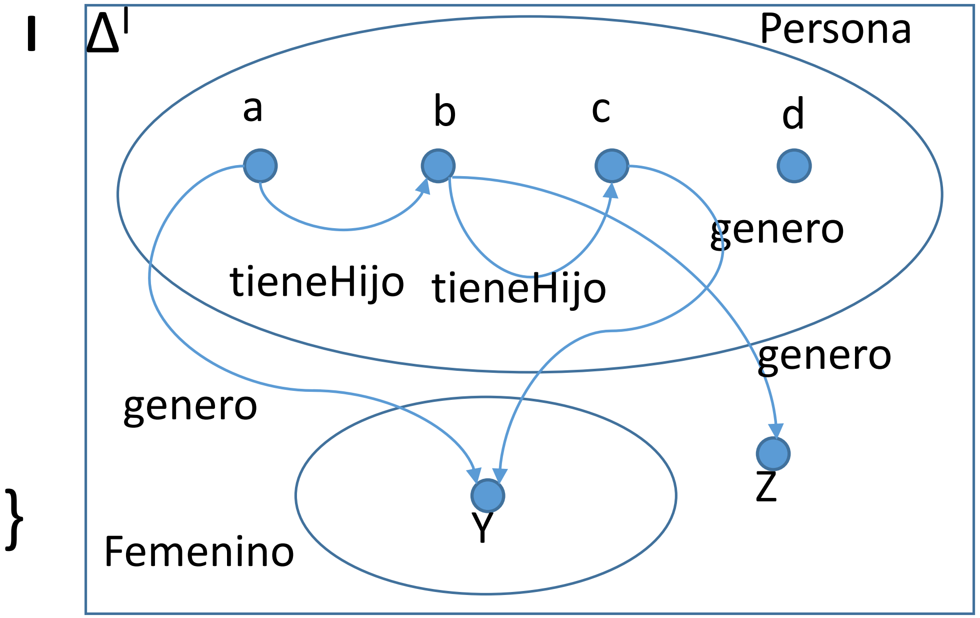
– Δ^I = {a; b; c; d; Y; Z}

– $Persona^I$ = {a; b; c; d}

– $Femenino^I$ = {Y}

– $tieneHijo^I$ = {(a; b); (b; c)}

– $genero^I$ = {(a; Y); (b;Z); (c;Y)}



Defina el valor de los siguientes axiomas:

$(Persona \sqcap \exists tieneHijo.Persona)^I$

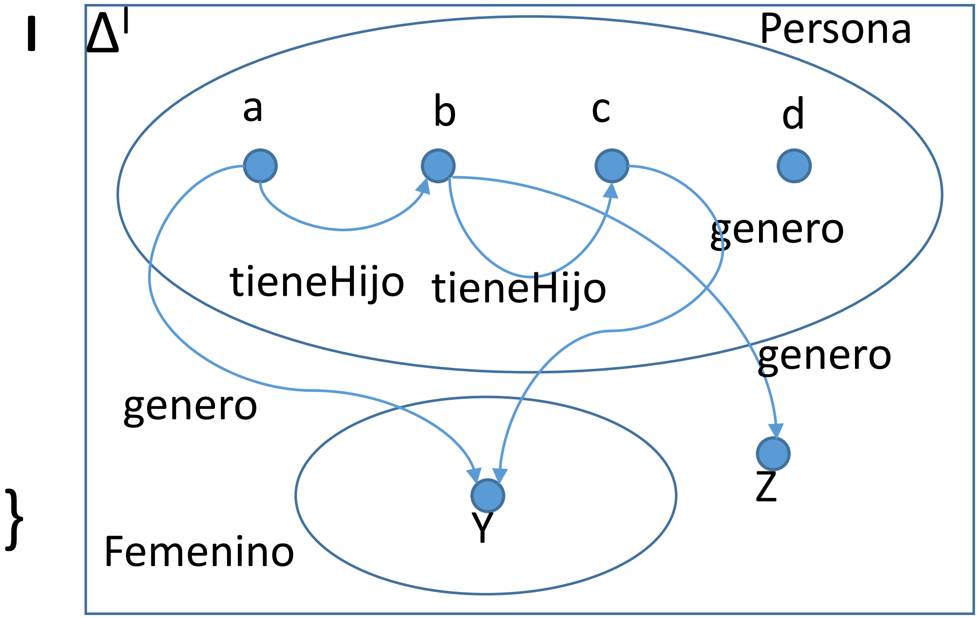
= {a,b} como

$Persona^I$ = {a; b; c; d}, $(\exists tieneHijo.Persona)^I$ = {a; b}

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica - ejemplo

Sea $I = (\Delta^I, .^I)$ donde

- $\Delta^I = \{a; b; c; d; Y; Z\}$
- $Persona^I = \{a; b; c; d\}$
- $Femenino^I = \{Y\}$
- $tieneHijo^I = \{(a; b); (b; c)\}$
- $genero^I = \{(a; Y); (b;Z); (c;Y)\}$



Defina el valor de los siguientes axiomas:

$(Persona \sqcap \exists tieneHijo.\exists genero.Femenino)^I$

$= \{b\}$ como

$Persona^I = \{a; b; c; d\}$, $(\exists tieneHijo.\exists genero.Femenino)^I = \{b\}$

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Semántica - ejemplo

Sea I = (Δ^I, $.^I$) donde

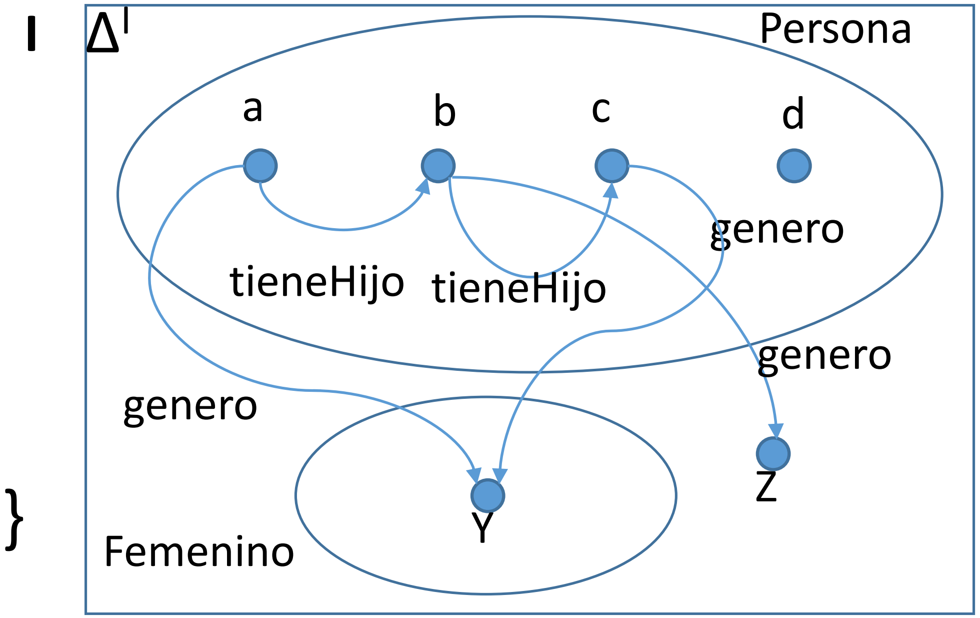
– Δ^I = {a; b; c; d; Y; Z}

– $Persona^I$ = {a; b; c; d}

– $Femenino^I$ = {Y}

– $tieneHijo^I$ = {(a; b); (b; c)}

– $genero^I$ = {(a; Y); (b;Z); (c;Y)}



Defina el valor de los siguientes axiomas:

$(Persona \sqcap \exists tieneHijo.tieneHijo.\top)^I$

= {a} como

$Persona^I$ = {a; b; c; d}, $(\exists tieneHijo.tieneHijo.\top)^I$ = {a}

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Sintaxis y Semántica BC

Un TBox $\mathcal{ALC}$ contiene axiomas de la forma:

$$C \sqsubseteq D \text{ y } C \equiv D$$

donde C, D son clases complejas.

- $C \sqsubseteq D$ se mantiene, sii $C^I \subseteq D^I$
- $C \equiv D$ se mantiene, sii $C^I = D^I$

Un ABox $\mathcal{ALC}$ contiene axiomas de la forma

$$C(a) \text{ y } R\ (a, b),$$

donde C es una clase compleja, R un rol y a, b Individuos

- C (a) se cumple, sii $a^I \in C^I$
- R (a, b) se cumple, sii $(a^I, b^I) \in R^I$

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Sintaxis y Semántica BC

Una interpretación I que satisface todas los axiomas de una TBox T se denomina un modelo de T.

Una interpretacion I que satisface todos los axiomas de una ABox A se denomina modelo de A.

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Ejemplo BC

Dado el siguiente Tbox T = {Libro ⊆ autor.Persona} y la interpretación I

– Δ^I = {G.G. Marquez; Cien años de soledad}

– $Libro^I$ = {Cien años de soledad}

– $Persona^I$ = {G.G. Marquez}

– $autor^I$ = {(Cien años de soledad; G.G. Marquez)}

Determine que

- **I ⊢ T (I satisface T ó I es un modelo T)**
- **I ⊮ Libro ⊆ Persona (I no satisface A ⊆ B)**

$\therefore$

- $Libro^I$ = {Cien años de soledad} ⊆ {Cien años de soledad} = $(autor.Persona)^I$, $\therefore$ **I ⊨ T**
- {Cien años de soledad} = $Libro^I$ ⊈ $Persona^I$ = {G.G.Marquez}, $\therefore$ **I ⊮ A ⊆ B**

Lógicas Descriptivas ($\mathcal{ALC}$): Ejemplo BC

Dado el siguiente Tbox T = {A $\subseteq$ $\exists$R.B} y la interpretación I

– Δ^I = {a; b}

– A^I = {a}

– B^I = {b}

– R^I = {(a; b)}

Determine que

- **I $\vdash$ T (I satisface T ó I es un modelo T)**
- **I $\nVdash$ A $\subseteq$ B (I no satisface A $\subseteq$ B)**

Entonces

- $A^I = \{a\} \subseteq \{a\} = (\exists R.B)^I$, $\therefore$ **I $\vDash$ T**

- $\{a\} = A^I \nsubseteq B^I = \{b\}$, $\therefore$ **I $\nVdash$ A $\subseteq$ B**

Práctica 5

Más allá de $\mathcal{ALC}$: Otros constructores

<table>
<tr><th>Operator/Constructor</th><th>Syntax</th><th colspan="2">Language</th></tr>
<tr><td>Conjunction</td><td>$A \sqcap B$</td><td rowspan="3">$\mathcal{FL}$</td><td rowspan="10">$\mathcal{S}^*$</td></tr>
<tr><td>Value Restriction</td><td>$\forall R.C$</td></tr>
<tr><td>Existential Quantifier</td><td>$\exists R$</td></tr>
<tr><td>Top</td><td>$\top$</td><td rowspan="7">$\mathcal{AL}^*$</td></tr>
<tr><td>Bottom</td><td>$\bot$</td></tr>
<tr><td>Negation</td><td>$\neg A$</td></tr>
<tr><td>Disjunction</td><td>$A \sqcup B$</td></tr>
<tr><td>Existential Restriction</td><td>$\exists R.C$</td></tr>
<tr><td>Number Restriction</td><td>$(\leq nR)$ $(\geq nR)$</td></tr>
<tr><td>Set of Inividuals</td><td>$\{a_1, \ldots, a_2\}$</td></tr>
<tr><td>Role Hierarchy</td><td>$R \sqsubseteq S$</td><td colspan="2">$\mathcal{H}$</td></tr>
<tr><td>inverse Role</td><td>R^{-1}</td><td colspan="2">I</td></tr>
<tr><td>Qualified Number Restriction</td><td>$(\leq nR.C)$ $(\geq nR.C)$</td><td colspan="2">$\mathcal{Q}$</td></tr>
</table>

Más allá de $\mathcal{ALC}$: Otros constructores

- *Restricciones numéricas para roles:*
  - *≥3 tieneHijos, ≤1 tieneMadre*
- *Restricciones de número calificado para roles:*
  ≥2 tieneHijos.Mujer, ≤1 tieneHijos.Masculino
- *Nominales (definición por extensión):*
  {Italia, Francia, España}
- *Dominios concretos (tipos de datos):*
  tieneEdad (≥21)
- *Funciones inversas:*
  tieneHijo^{-} ≡ tienePadres

Algunas guías de modelado básicas en LD

X debe ser Y, X es un Y que ...	$X \subseteq Y$
X es exactamente Y, X es la Y que ...	$X \equiv Y$
X e Y son disjuntos	$X \cap Y \subseteq \bot$
X es Y o Z	$X \subseteq Y \cup Z$
X es Y para la cual la propiedad P tiene solo instancias de Z como valores	$X \subseteq Y \cap (\forall P.Z)$
X es Y para la cual la propiedad P tiene al menos una instancia de Z como valor	$X \subseteq Y \cap (\exists P.Z)$
X es Y para la cual la propiedad P tiene a lo mucho 2 valores	$X \subseteq Y \cap (\leq 2.P)$
El individuo x es un Y	$x \in Y$

Ejercicio Clase 1

Preguntas?