UNIVERSIDAD DE CUENCA

TALLER DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

AUTOR: Bryan Mendoza

ASIGNATURA: Matemáticas Discretas

TUTOR: Ing. María Fernanda Granda

CARRERA: Computación 1

FECHA: 15 de junio 2022

TALLER DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

1. Para los ejercicios del 1 al 7 demuestre usando inducción matemática

   1) $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$

Paso base

I. $n = 1$

$1(1!) = (1+1)! - 1$

$1 = (2)! - 1$

$1 = 1$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$n = k$
$1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 1$

III. $n = k + 1$

$1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$(k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$[(k+1)! + (k+1)(k+1)!] - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+1)!\,[1 + (k+1)] - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1$

$(k+2)! - 1 = (k+2)! - 1$

RESPUESTA: Como se cumple el paso base y el inductivo, entonces la ecuación:
$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$, es verdadera para todo entero positivo n.

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Paso base

I. $n = 1$

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$$

$$1 = \frac{1(2)(3)}{6}$$

$$1 = \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$n = k$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

III. $n = k + 1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\begin{array}{lll} 2k^2 + 7k + 6 & & \\ k & & 2 = 4k \\ 2k & & 3 = \underline{3k} \\ & & \quad 7k \end{array}$$

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

RESPUESTA: Como si se cumplió el paso base y el inductivo, entonces la ecuación: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, es verdadera para todo entero positivo n.

3) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

Paso base

I. $n = 1$

$$1^2 = \frac{(-1)^{1+1}1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 * 1(2)}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1$$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$n = k$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^{k+1}k(k+1)}{2}$$

III. $n = k + 1$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2 = \frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+1}k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}(k+1)^2 = \frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+1}k(k+1)+2(-1)^{k+2}(k+1)^2}{2}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{[(-1)^{k+1}k(k+1)+2(-1)^{k+2}(k+1)^2]}{(2)}*\frac{(-1)}{(-1)}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+2}k(k+1)-2(-1)^{k+2}(k+1)^2}{-2}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+2}(k+1)[k-2(k+1)]}{-2}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+2}(k+1)[-k-2]}{-2}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+2}(k+1)[-(k+2)]}{-2}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)}{2}$$

RESPUESTA: Como si se cumplió el paso base y el inductivo, entonces la ecuación: $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$, es verdadera para todo entero positivo n.

4) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Paso base

I. $n = 1$

$$1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$$

$$1 = \left[\frac{1(2)}{2}\right]^2$$

$$1 = [1]^2$$

$$1 = 2$$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$$n = k$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

III. $n = k + 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{2^2} + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{k^2(k+1)^2 + 2^2(k+1)^3}{2^2} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{(k+1)^2[(k^2 + 4(k+1)]}{2^2} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{2^2} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

RESPUESTA: Como si se cumplió el paso base y el inductivo, entonces la ecuación: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, es verdadera para todo entero positivo n.

5) $\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Paso base

I. $n = 1$

$$\frac{1}{1*3} = \frac{1}{2(1)+1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$n = k$

$$\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

III. $n = k + 1$

$$\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$2k^2+3k+1$$

$$\begin{array}{ll} 2k & 1 = k \\ k & 1 = \underline{2k} \\ & \quad 3k \end{array}$$

$$2k^2+3k+1=(2k+1)(k+1)$$

$$\frac{\cancel{(2k+1)}(k+1)}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

$$\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2k+3}$$

RESPUESTA: Como si se cumplió el paso base y el inductivo, entonces la ecuación: $\frac{1}{1*3}+\frac{1}{3*5}+\frac{1}{5*7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$, es verdadera para todo entero positivo n.

6) $\frac{1}{2*4}+\frac{1*3}{2*4*6}+\frac{1*3*5}{2*4*6*8}+\cdots+\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots(2n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2n+1)}{2*4*6\ldots(2n+2)}$

Paso base

I. $n=1$

$$\frac{1}{2*4}=\frac{1}{2}-\frac{1*(2(1)+1)}{2*(2(1)+2)}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2}-\frac{1*3}{2*4}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{4-3}{8}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$$n = k$$

$$\frac{1}{2*4}+\frac{1*3}{2*4*6}+\frac{1*3*5}{2*4*6*8}+\cdots+\frac{1*3*5\ldots(2k-1)}{2*4*6\ldots(2k+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+1)}{2*4*6\ldots(2k+2)}$$

III. $n = k + 1$

$$\frac{1}{2*4}+\frac{1*3}{2*4*6}+\cdots+\frac{1*3*5\ldots(2k-1)}{2*4*6\ldots(2k+2)}+\frac{1*3*5\ldots(2k+1)}{2*4*6\ldots(2k+4)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+3)}{2*4*6\ldots(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+1)}{2*4*6\ldots(2k+2)}+\frac{1*3*5\ldots(2k+1)}{2*4*6\ldots(2k+4)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+3)}{2*4*6\ldots(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+1)}{2*4*6\ldots2(k+1)}+\frac{1*3*5\ldots(2k+1)}{2*4*6\ldots2(k+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+3)}{2*4*6\ldots(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+1)(k+2)+1*3*5\ldots(2k+1)(k+1)}{2*4*6\ldots2(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+3)}{2*4*6\ldots(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+1)[(k+2)+(k+1)]}{2*4*6\ldots2(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+3)}{2*4*6\ldots(2k+4)}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+1)(2k+3)}{2*4*6\ldots2(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2k+3)}{2*4*6\ldots(2k+4)}$$

RESPUESTA: Como se cumplió el paso base, pero el inductivo no, entonces la ecuación: $\frac{1}{2*4}+\frac{1*3}{2*4*6}+\frac{1*3*5}{2*4*6*8}+\cdots+\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots(2n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1*3*5\ldots(2n+1)}{2*4*6\ldots(2n+2)}$, es falsa para todo entero positivo n.

7) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

Paso base

I. $n=1$

$$\frac{1}{2^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(1+1)}-\frac{1}{2(1+2)}$$

$$\frac{1}{4-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{9-3-2}{12}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Paso Inductivo

II. Asumo que la ecuación dada es verdadera

$n=k$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}$$

III. $n=k+1$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}+\frac{1}{(k+2)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)^2-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\frac{1}{k^2+4k+3}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\left[\frac{1}{(k+3)(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)}\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\left[\frac{1*2-1(k+3)}{2(k+3)(k+1)}\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\left[\frac{2-k-3}{2(k+3)(k+1)}\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\left[\frac{-k-1}{2(k+3)(k+1)}\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\left[\frac{-\cancel{(k+1)}}{2(k+3)\cancel{(k+1)}}\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}+\left[\frac{-1}{2(k+3)}\right]=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(k+2)}-\frac{1}{2(k+3)}$$

RESPUESTA: Como si se cumplió el paso base y el inductivo, entonces la ecuación: $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$, es verdadera para todo entero positivo n.

2. Demostrar si el siguiente razonamiento es válido usando reglas de inferencia
   - Cuando Eduardo no juega al baloncesto, juega al tenis.
   - Cuando juega al tenis, entonces juega al fútbol.
   - No juega al fútbol.
   - Por lo tanto, Eduardo juega al baloncesto.

   p: Eduardo juega al baloncesto
   q: juega al tenis
   r: juega al fútbol

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \neg r \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \ \equiv\ [(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\ ] \wedge \neg r$ Asociatividad

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \ \equiv (\neg p \rightarrow r) \wedge \neg r$ Silogismo Hipotético

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \ \equiv\ \neg(\neg p)$ Modus Tollens

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \ \equiv\ p$ Ley de la doble negación

RESPUESTA: El razonamiento es válido

3. Demostrar ¬ (H = 7 Λ Ñ = 9)

   Si se tienen las premisas:
   1) ¬ (Ñ = 7)
   2) H + Ñ=16 → Ñ=7
   3) H + Ñ=16 V ¬ (H = 7)

   4) ¬ (H + Ñ=16) Modus Tollens 1 y 2
   5) ¬ (H + Ñ=16) → ¬ (H = 7) Implicación 3
   6) ¬ (H = 7) Modus Ponens 4 y 5
   7) ¬ (H = 7) V ¬ (Ñ = 9) Ley de la Adición 6
   8) ¬ (H = 7 Λ Ñ = 9) Ley de Morgan 7

4. Demostrar $z>6 \vee z<y$

Si se tienen las premisas:
1) $x > y \rightarrow x > z$
2) $\neg (z>6) \rightarrow \neg(x>y \rightarrow z < 7)$
3) $x > z \rightarrow z < 7$

4) $x > y \rightarrow z < 7$ Silogismo Hipotético 1 y 3
5) $\neg \neg (z>6)$ Modus Tollens 2 y 4
6) $z>6$ Doble negación 5
7) $z>6 \vee z<y$ Ley de la adición 6

5. Demostrar $\neg (x = 5 \wedge y = 4)$

Si se tienen las premisas:
1) $y \neq 3 \equiv \neg(y=3)$
2) $x + y = 8 \rightarrow y = 3$
3) $x + y = 8 \vee x \neq 5$

4) $\neg (x + y = 8)$ Modus Tollens 1 y 2
5) $x \neq 5$ Silogismo Disyuntivo 3 y 4
6) $x \neq 5 \vee y \neq 4$ Ley de la Adición 5
7) $\neg (x = 5 \wedge y = 4)$ Ley de Morgan 6

6. Demostrar P

Si se tienen las premisas:
1) $P \vee Q$
2) $\neg T$
3) $Q \rightarrow T$

4) $\neg Q$ Modus Tollens 2 y 3
5) P Silogismo Disyuntivo 1 y 4

7. Usar una demostración indirecta para demostrar Si 3n+2 es impar entonces n es impar.

   p(n): n es impar
   q(n): n es impar

   Esquema en notación simbólica:

$$\forall n\ [p(3n+2) \rightarrow q(n)]$$

   Por contrarecíproca

$$\forall n\ [\neg q(n) \rightarrow \neg p(3n+2)]$$

   “Si n es par, entonces 3n+2 es par”

$$n = 2k$$

$$3n + 2 = 2k$$

$$3(2k) + 2 = 2k$$

$$6k + 2 = 2k$$

$$2(3k + 1) = 2k$$

$$3k + 1 = m$$

$$2m = 2k$$

   Queda demostrado que si n es par entonces 3n+2 también es par.

   RESPUESTA: Como la contrareciproca es verdadera, entonces la afirmación original “Si 3n+2 es impar entonces n es impar” también es verdadera.

8. Demostrar por reducción al absurdo. Si a^2 es par entonces a es par.

p(a): a es par

Esquema en notación simbólica

$$\forall a\ [p(a^2) \rightarrow p(a)]$$

Por contradicción o reducción al absurdo

$$\forall a\ [p(a^2) \land \neg p(a) \rightarrow C]$$

Entonces tenemos que a^2 es par y a no es par

$$a^2 = 2k \qquad\qquad a = 2c + 1$$

$$a^2 = (2c + 1)^2$$

$$a^2 = 4c^2 + 4c + 1$$

$$2k = 4c^2 + 4c + 1$$

$$2k = 2(2c^2 + 2c) + 1$$

$$2c^2 + 2c = h$$

$$2k = 2m + 1$$

En este punto, hemos llegado a una contradicción, al decir que a es impar; por lo que lo verdadero seria que a es par, es decir la afirmación original.

RESPUESTA: La afirmación "Si a^2 es par entonces a es par" es verdadera.

9. Use demostración directa. Sea x Ɛ Z. Demuestre que, si x es impar, entonces x+1 es par

   p(x): x es impar
   q(x): x es par
   Con dominio de discurso los números enteros

$$\forall x\ [p(x) \rightarrow q(x+1)]$$

   "Para todo x, Si x es impar, entonces x+1 es par"

$$x = 2k + 1$$

$$x + 1 = 2k + 1 + 1$$

$$x + 1 = 2k + 2$$

$$x + 1 = 2(k + 1)$$

$$k + 1 = f$$

$$x + 1 = 2f$$

   En efecto, se ha demostrado que x+1 es par.

   RESPUESTA: La afirmación "si x es impar, entonces x+1 es par" con $x \in Z$, es verdadera.