

## تسک پراکنش موجودات (۳۵۲ نمره)

جمعیت‌ها یک زیستگاه را اشغال می‌کنند و افراد در این زیستگاه حرکت می‌کنند. یکی از ساده‌ترین مدل‌هایی که حرکت موجودات در زیستگاه خود را بررسی می‌کند مدل Random Walk است. در این مدل زیستگاه را به چند خانه تقسیم می‌کنیم. در هر زمان فرد می‌تواند وارد یکی از این خانه‌ها شود. در این مدل جای دقیق هر فرد را نمی‌توان مشخص کرد، بلکه ویژگی‌های فضایی این جمعیت در طی زمان بررسی می‌شود.

برای ساده کردن محاسبات، فرض کنید محیط خطی (تک بعدی) و یک دست است. در نتیجه در هر زمان افراد می‌توانند به چپ یا راست حرکت کنند. چنین مدلی شبیه زیستگاه‌های رودخانه‌ای است. برای محاسبات، این رودخانه را به ۱۰ خانه تقسیم می‌کنیم. در هر ساعت،  $d_L$  درصد افراد به خانه‌ی چپ و  $d_R$  درصد افراد به خانه‌ی راست حرکت می‌کنند. در زمان صفر، در خانه‌ی شش ۲۰۰۰ نفر قرار می‌دهیم. در این شبیه‌سازی  $d_L = d_R = 0.1$  است. در زیر نمایی از این رودخانه را می‌بینید.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

۱) تعداد افراد موجود در هر خانه را در طی ۱۵ ساعت در زیر بنویسید. (هر خانه درست دو نمره مثبت)

[illegible]

۲) در زیر تعیین کنید اگر زمان خیلی زیادی از شروع آزمایش بگذرد، در هر خانه چند فرد یافت می‌شود. (هر خانه درست یک نمره مثبت)

شماره خانه										
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱

می‌خواهیم وسعت (range) زیستگاه این جمعیت را پیدا کنیم. وسعت زیستگاه برابر با فضایی است که ۹۵ درصد افراد جمعیت در آن قرار دارند. می‌توانیم فرض کنیم تعداد افراد در طول خانه‌ها از توزیع نرمال (Gaussian) پیروی می‌کند. در این صورت تعداد افراد در هر خانه  $x$  ( $\mathcal{N}(x)$ ) در زمان  $t$ ، از طریق فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{N}(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(\frac{-(x - \bar{x})^2}{4Dt}\right)$$

در این فرمول،  $\bar{x}$  همان خانه شش است،  $x$  شماره خانه و  $N_0$  تعداد اولیه (۲۰۰۰ نفر) است. اگر این فرمول را با فرمول توزیع نرمال استاندارد مقایسه کنیم، پی خواهیم برد که در هر زمان  $\sigma^2 = 2Dt$  است.

۳) با توجه به پرسش ۱ و محاسبات خود،  $D$  را به دست آورید. (۲۵ نمره درست)

مقدار $D$	
-----------	--

۴) با توجه به این فرمول تعداد افراد هر خانه در ساعت‌های خواسته شده را محاسبه کنید. (هر خانه درست دو نمره مثبت)

شماره خانه											
ساعت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۲۰											
۳۰											
۴۰											
۵۰											
۹۰											

۵) با توجه به محاسبات پرسش‌های ۱ و ۴ مقدار  $D$  را مجدداً تخمین بزنید. (۷ نمره درست)

مقدار $D$	
-----------	--

۶) همانطور که گفته شد، وسعت زیستگاه فاصله‌ای از مرکز است که در آن فاصله ۹۵ افراد وجود دارند. به نظر شما کدام یک از گزینه‌های زیر رابطه بین range و  $\sigma$  را به درستی نشان می‌دهد؟ (دو نمره مثبت)

۱	$3\sigma$	۴	$2\sigma$
۲	$1.5\sigma$	۵	$\sigma/\sqrt{N_0}$
۳	$2\sigma/\sqrt{N_0}$	۶	$\sigma$

(۷) با توجه به محاسبات خود تا اینجا، تعیین کنید در هر یک از ساعت‌های زیر وسعت زیستگاه به چه صورت است.

(هر خانه درست یک و نیم نمره مثبت)

ساعت	وسعت	ساعت	وسعت
۱		۱۱	
۲		۱۲	
۳		۱۳	
۴		۱۴	
۵		۱۵	
۶		۲۰	
۷		۳۰	
۸		۴۰	
۹		۵۰	
۱۰		۹۰	

(۹) تعیین کنید بعد از چند ساعت وسعت زیستگاه این جمعیت تمامی یازده خانه است. (دو نمره مثبت)

	ساعت
--	------