Metody optymalizacji - Lista 3

Bartosz Rzepkowski

4 czerwca 2017

1 Opis problemu

Dane wejściowe do naszego zadania wyglądają następująco:

- M - liczba maszyn, jaką dysponujemy,
- J - liczba zadań, które mamy przydzielić do maszyn,
- T_i - ograniczenia zasobów nałożone na maszyny,
- p_{ij} - ilość zasobów wykorzystanych po przydzieleniu zadania j do maszyny i,
- c_{ij} - koszta związane z przydzieleniem zadania j do maszyny i.

Podany poniżej algorytm podaje rozwiązanie optymalne (minimalizujące koszta) przy wykorzystaniu co najwyżej $2T_i$ zasobów. Zostało w nim zastosowane podejście, w którym zadania i maszyny traktuje się jako dwa zbiory wierzchołków grafu dwudzielnego. Początkowo każdy wierzchołek reprezentujący zadanie jest połączony z każdym wierzchołkiem odpowiadającym maszynie.

2 Opis algorytmu

Solver ma za zadanie podanie rozwiązania dla następującego modelu:

$$
\begin{aligned}
\sum_{e=(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij} & \rightarrow min \\
\sum_{e\in\delta(j)} x_e &= 1 && \forall\, j \in J \\
\sum_{e\in\delta(i)} p_e x_e &\leq T_i && \forall\, i \in M' \\
x_e &\geq 0 && \forall\, e \in E
\end{aligned}
$$

Poniższy algorytm iteracyjny opisuje sposób wykorzystania solvera (zmienna x_{ij} odpowiada krawędzi z wierzchołka i do j):

(i) Inicjalizacja $E(F) \leftarrow \emptyset, M' \leftarrow M$

(ii) **while** $J \neq \emptyset$ **do**

(a) Znajdź rozwiązanie optymalne x i usuń wszystkie krawędzie, dla których $x_{ij} = 0$,

(b) Jeśli istnieje zmienna $x_{ij} = 1$, wtedy uaktualnij $F \leftarrow F \bigcup \{ij\}, J \leftarrow J \setminus \{j\}, T_i \leftarrow T_i - p_{ij}$,

(c) Jeśli istnieje maszyna, której stopień jest równy 1 lub maszyna ze stopniem równym 2 i $\sum_{j\in J} x_{ij} \geqslant 1$, wtedy uaktualnij $M' \leftarrow M' \setminus \{i\}$.

end

3 Wyniki

3.1 Przykład zadania

Poniżej przedstawiono przykład rozwiązania dla następującego zadania:

- $M = 5$,
- $J = 15$,
- $T = [36, 34, 38, 27, 33]$ - jest to macierz ograniczeń dla maszyn.

W poniższych tabelach przedstawiono koszta przydzielenia zadania j do maszyny i oraz związane z tym zapotrzebowania:

(Koszt)

17	21	22	18	24	15	20	18	19	18	16	22	24	24	16
23	16	21	16	17	16	19	25	18	21	17	15	25	17	24
16	20	16	25	24	16	17	19	19	18	20	16	17	21	24
19	19	22	22	20	16	19	17	21	19	25	23	25	25	25
18	19	15	15	21	25	16	16	23	15	22	17	19	22	24

(Zapotrzebowanie na zasoby)

8	15	14	23	8	16	8	25	9	17	25	15	10	8	24
15	7	23	22	11	11	12	10	17	16	7	16	10	18	22
21	20	6	22	24	10	24	9	21	14	11	14	11	19	16
20	11	8	14	9	5	6	19	19	7	6	6	13	9	18
8	13	13	13	10	20	25	16	16	17	10	10	5	12	23

3.2 Rozwiązanie

Poniżej przedstawiono kolejne kroki przebiegu algorytmu iteracyjnego. Przez parę (i, j) oznaczono krawędź łączącą wierzchołek i z wierzchołkiem j.

(G)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) & (1,9) \\ (1,10) & (1,11) & (1,12) & (1,13) & (1,14) & (1,15) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (2,4) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) & (2,9) & (2,10) & (2,11) & (2,12) \\ (2,13) & (2,14) & (2,15) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (3,7) & (3,8) & (3,9) & (3,10) & (3,11) & (3,12) & (3,13) & (3,14) & (3,15) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) & (4,9) \\ (4,10) & (4,11) & (4,12) & (4,13) & (4,14) & (4,15) & (5,1) & (5,2) & (5,3) \\ (5,4) & (5,5) & (5,6) & (5,7) & (5,8) & (5,9) & (5,10) & (5,11) & (5,12) \\ (5,13) & (5,14) & (5,15) & & & & & & \end{bmatrix}$$

(F) $[]$

(G)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,9) & (1,15) & (2,2) & (2,5) & (2,11) & (2,14) & (3,1) & (3,3) \\ (3,8) & (3,12) & (3,13) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) & (4,10) & \\ (5,1) & (5,4) & (5,10) & & & & & & \end{bmatrix}$$

(F) $\begin{bmatrix} (2,2) & (3,13) \end{bmatrix}$

(G)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,9) & (1,15) & (2,5) & (2,11) & (2,14) & (3,1) & (3,3) & (3,8) \\ (3,12) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) & (4,10) & (5,1) & (5,4) & (5,10) \end{bmatrix}$$

(F)

$$\begin{bmatrix} (2,2) & (3,13) & (1,9) & (1,15) & (2,11) & (2,14) & (3,3) & (3,12) & (4,6) \\ (4,7) & (5,4) & & & & & & & \end{bmatrix}$$

(G) $\begin{bmatrix} (1,1) & (2,5) & (3,1) & (3,8) & (4,5) & (4,8) & (4,10) & (5,1) & (5,10) \end{bmatrix}$

(F)

$$\begin{bmatrix} (2,2) & (3,13) & (1,9) & (1,15) & (2,11) & (2,14) & (3,3) & (3,12) & (4,6) \\ (4,7) & (5,4) & & & & & & & \end{bmatrix}$$

(G) $\begin{bmatrix} (2,5) & (3,1) & (4,8) & (5,10) \end{bmatrix}$

(F)

$$\begin{bmatrix} (2,2) & (3,13) & (1,9) & (1,15) & (2,11) & (2,14) & (3,3) & (3,12) & (4,6) \\ (4,7) & (5,4) & (2,5) & (3,1) & (4,8) & (5,10) & & & \end{bmatrix}$$

Możemy zauważyć, że ostatni wektor F przydzielił do maszyn wszystkie zadania (od 1 do 15). Zostały też spełnione postawione na początku założenia (dla każdej maszyny wykorzystane zasoby nie przekroczą dwukrotności jej pojemności):

Maszyna	Wykorzystane zasoby	$2T_i$
1	24	2 x 36
2	43	2 x 34
3	52	2 x 38
4	30	2 x 27
5	30	2 x 33