Obliczenia naukowe
Sprawozdanie – Lista 3
Bartosz Rzepkowski
22.11.2015

1. Zadanie 1 – Metoda bisekcji

1.1 Opis algorytmu

Algorytm na wejściu przyjmuje wartości a oraz b (odpowiednio początek i koniec przedziału, w którym szukamy miejsca zerowego funkcji. Aby zadziałał poprawnie muszą zostać spełnione następujące warunki:
- funkcja przyjmuje różne znaki w punktach a i b, tzn. f(a)f(b) < 0,
- funkcja w przedziale jest ciągła.

Przebieg algorytmu:
1. Początkowo obliczana jest długość przedziału (ozn. e = b - a). Następnie dzielona jest przez dwa i dodawana do wartości a (ozn. r = a + e). Algorytm sprawdza, czy przedział e jest mniejszy od przyjętej początkowo dokładności obliczeń. Jeśli spełnia ten warunek, algorytm zwraca punkt r oraz wartość funkcji w tym punkcie.
2. Jeśli przedział e jest większy od przyjętej dokładności obliczeń, całkowity przedział dzielony jest na dwa mniejsze przedziały [a,r] oraz [r,b]. Algorytm sprawdza, w którym z nich funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału, podstawia pod wartości a i b odpowiednio jego początek i koniec, po czym przechodzi do kroku 1.

2. Zadanie 2 – Metoda Newtona (stycznych).

2.1 Opis algorytmu

Zakładamy, że szukany pierwiastek jest jednokrotny ($f'(r)\neq 0$).

Początkowo wybierany jest punkt startowy x_0. Każdy kolejny punkt wyznaczany jest za pomocą rekurencyjnego wzoru:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Dla danego punktu obliczana jest wartość funkcji $f(x_n)$. Następnie prowadzona jest styczna do wykresu funkcji w tym punkcie, a miejsce jej przecięcia z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie rozwiązania x_{n+1}. Jeśli odległość między wartościami x_n oraz x_{n+1} lub wartość funkcji $f(x_{n+1})$ jest większa niż przyjęta dokładność obliczeń, wybierane zostaje kolejne przybliżenie rozwiązania.

3. Zadanie 3 – Metoda siecznych

3.1 Opis algorytmu

Zakładamy, że szukany pierwiastek jest jednokrotny ($f'(r)\neq 0$), a funkcja w danym przedziale [a,b] zmienia znak.

W celu wyznaczenia rekurencyjnego wzoru na obliczenie kolejnych przybliżeń rozwiązania aproksymujemy pochodną:

$$f'(x_n)\approx\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

Następnie otrzymaną wartość wstawiamy do rekurencyjnego wzoru z metody Newtona, dzięki czemu otrzymujemy następujący wzór:

$$x_0=a$$
$$x_1=b$$
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

Algorytm zakłada, że funkcję na dostatecznie małym przedziale można zastąpić sieczną. Punkt przecięcia siecznej z osią OX wyznacza kolejną przybliżoną wartość pierwiastka funkcji. Jeśli odległość między punktami $|f(x_{n+1}) – f(x_n)|$ lub wartość $f(x_{n+1})$ są większe od przyjętej dokładności obliczeń wyznaczana jest nowa styczna i obliczane kolejne przybliżenie miejsca zerowego funkcji.

4. Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Zastosować metodę bisekcji, stycznych oraz siecznych do wyznaczenia pierwiastka równania $\sin(x)-(\frac{1}{2}x)^2=0$. W obliczeniach przyjąć następujące wartości początkowe:

1. metoda bisekcji – przedział [1.5, 2], δ = $\frac{1}{2}10^{-5}$, ϵ = $\frac{1}{2}10^{-5}$,
2. metoda Newtona – x_0 = 1.5, δ = $\frac{1}{2}10^{-5}$, ϵ = $\frac{1}{2}10^{-5}$,
3. metoda siecznych – x_0 = 1, x_1 = 1, δ = $\frac{1}{2}10^{-5}$, ϵ = $\frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2 Wyniki

Metoda	Pierwiastek równania	Wartość funkcji	Liczba iteracji
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
Metoda Newtona	1.933749984135789	4.995107540040067e-6	13
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

4.3 Wnioski

Możemy zauważyć, że metoda bisekcji wykonuje najwięcej iteracji w celu obliczenia pierwiastka równania. Natomiast metoda siecznych, działająca w sposób analogiczny do metody Newtona dla aproksymowanej funkcji, dla odpowiednio dobranych przedziałów jest najbardziej efektywna.

5. Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Metodą bisekcji znaleźć wartość zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y=3x$ oraz $y=e^x$. Przyjąć dokładność obliczeń δ = 10^{-4}, ϵ = 10^{-4}.

5.2 Rozwiązanie

Aby znaleźć punkt przecięcia zadanych funkcji szukamy rozwiązania równania $3x=e^x$. Po przekształceniu otrzymujemy równanie $3x-e^x=0$, dla którego stosujemy metodę bisekcji.

5.3 Wyniki

Przedział	Miejsce przecięcia funkcji	Liczba iteracji
[0, 1]	0.6190643310546875	16
[1, 2]	1.5121307373046875	16

5.4 Wnioski

Możemy zauważyć, że dla funkcji, która ma dwa miejsca zerowe wynik metody bisekcji jest zależny od przedziału, na którym ją uruchomimy. Jest to doskonały przykład pokazujący, że metodę bisekcji należy stosować hybrydowo (dzielić przedział na mniejsze przedziały i na nich uruchamiać metodę).

6. Zadanie 6

6.1 Opis problemu

Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x)=e^{1-x}-1$ oraz $g(x)=xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona oraz siecznych. Przyjąć dokładności obliczeń δ = 10^{-5}, ϵ = 10^{-5}.

6.2 Rozwiązanie

W celu obliczenia miejsc zerowych funkcji wykorzystałem wcześniej zaprogramowane metody. Podczas obliczania wyniku metodą Newtona przyjąłem pochodne funkcji $f'(x)=-e^{1-x}$ oraz $g'(x)=-e^{-x}(x-1)$.

6.3 Wyniki

f(x)

Metoda	Przedział / punkt początkowy	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Liczba iteracji
Metoda bisekcji	[0, 3]	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	17
	[-20, 30]	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	19
Metoda Newtona	X_0 = 0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4
	X_0 = -10	0.9999999998781014	1.2189849130095354e-10	15
Metoda siecznych	[0, 2]	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6
	[-10, 10]	9.99966600720658	-0.999876548971044	3

g(x)

Metoda	Przedział / punkt początkowy	Miejsce zerowe	Wartość funkcji	Liczba iteracji
Metoda bisekcji	[-2, 3]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	17
	[-20, 30]	4.76837158203125e-6	4.768348844717916e-6	21
Metoda Newtona	X_0 = -1	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
	X_0 = 1	nothing	-	-
	X_0 = -20	-8.5021353701261e-9	-8.502135442412406e-9	27
Metoda siecznych	[-1, 1]	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18
	[-1, 2]	14.310428368676307	8.72393778926339e-6	15

6.4 Wnioski

Możemy zauważyć, że metoda bijekcji zwraca bardzo podobne wartości dla dowolnie dobranych przedziałów. Jest to dowód tego, że metoda ta jest zbieżna globalnie. Wyniki zwracane przez metody Newtona i siecznych dla różnych wartości początkowych dają bardzo rozbieżne wyniki. Jeśli wartości początkowe nie trafią do pewnego otoczenia miejsca zerowego funkcji, otrzymane wyniki będą błędne. Przykład ten ukazuje, że metody Newtona i siecznych są zbieżne lokalnie. Warto również zauważyć, że metoda Newtona dla funkcji g(x) i wartości początkowej x_0 = 1 nie zwraca żadnego wyniku, ponieważ styczna do wykresu w x_0 jest równoległa do osi OX (wartości x_n zawsze wynoszą 1).