ETH Zürich
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Rasmus Kyng
Prof. Angelika Steger

FS 2024

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Theorie-Aufgaben 7

Abgabe in Moodle () bis zum 25.04.2024 um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 – *Couch to* k ***k***

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens $\frac{3}{4}$ aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schnieft* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph $G = (V, E)$ ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung $v \in V$ und die Route ist ein gegebener Kreis $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = v)$ der Länge k.

Bei jeder Strasse $e \in E$ gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

(a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.

(b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.

(c) Nimm an, dass du $n-1$ Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Routen, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schniefender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt $k \geq \log_2(n) + 1$, dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ keinen einzigen schniefenden Hund.

(d) Nimm an, dass $k = 1000 \log_2 n$ und $n \geq 2$. Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.

(a)

Let X be the random variable denoting the number of streets with flowers. We recall that the trip is a disaster, if $\mathrm{X} \geq \frac{3}{4}$. To apply Markov's inequality, $\Pr[\mathrm{X} \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[\mathrm{X}]}{t}$, we need the expected value $\mathbb{E}[\mathrm{X}]$, meaning the expected number of streets with flowers encountered.
For this, we can use linearity of expectation, since the probability for a street to have flowers is binomially distributed. Hence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{X}] &= np = \frac{k}{2} \\ \Pr\left[\mathrm{X} \geq \frac{3k}{4}\right] &\leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\square$

(b)

Using Chebyshev's inequality, $\Pr[|\mathrm{X} - \mathbb{E}[\mathrm{X}]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[\mathrm{X}]}{t^2}$, requires $\mathrm{Var}[\mathrm{X}]$. This is given by $\mathrm{Var}[\mathrm{X}] = np(1-p) = \frac{k}{4}$, as $\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}(k, p)$.

$$\begin{aligned}\Pr\left[\left|\mathrm{X} - \frac{k}{2}\right| \geq \frac{k}{4}\right] &= \frac{\mathrm{Var}[\mathrm{X}]}{\left(\frac{k}{4}\right)^2} \\ &= \frac{k}{4} \qquad nbsp; \cdot \frac{4^2}{k^2} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

$\square$

(c)

Let $\mathrm{Y} = \text{"\# sniffling dogs"}$, where $\mathrm{Y} := \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Y}_i$ with $\mathrm{Y}_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, independent. Let $\mathrm{Y}_i = \text{"the } i\text{-th dog sniffles"}$. The probability, p for some i-th dog to sniffle all day is $\Pr[\mathrm{Y_i} = 1] = \Pr[\mathrm{X} = k] = \frac{1}{2^k}$, given by all of its trip's streets having flowers. Thus, $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Bin}(n-1, p)$.

The expected number of sniffling dogs is given by

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{Y}] &= \frac{n-1}{2^k} \\ &= \frac{n-1}{2^{\log_2(n)+1}} = \frac{n-1}{2n} \\ &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\square$

Now, we need to show that $k \geq \log_2(n) + 1 \implies \Pr[\mathrm{Y} = 0] \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\Pr[\mathrm{Y} = 0] &= 1 - \Pr[\mathrm{Y} \geq 1] \qquad (\text{Markov}) \\ &\geq 1 - \mathbb{E}[\mathrm{Y}] \\ &\geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\square$

(d)

Let $\mathrm{Z} = \text{"\# disaster trips"}$, where $\mathrm{Z} := \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Z}_i$ with $\mathrm{Z}_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, independent denoting, whether the i-th trip was a disaster. We know, that the probability, p for any one trip to be a disaster is $\Pr\left[\mathrm{X} \geq \frac{3k}{4}\right] \leq \frac{2}{3}$. Thus, $\mathrm{Z} \sim \mathrm{Bin}(n-1, p)$.

We need to show that $k = 1000 \log_2(n),\ n \geq 2 \implies 1 - \Pr[\mathrm{Z} \geq 1] \geq 0.99$.

Let $\delta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &\Pr[\mathrm{Z} \geq 1] \leq 0.01 \\ &\Pr[\mathrm{Z} \geq (1+\delta)\mathbb{E}[\mathrm{Z}]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \mathbb{E}[\mathrm{Z}]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\left[\mathrm{X} \geq \frac{3k}{4}\right] &= 1 - \Pr\left[\mathrm{X} \leq \frac{\mathrm{k}}{4} - 1\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{4} - 1 \rfloor} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[\mathrm{Z}] = \frac{2 \cdot (n-1)}{3}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\mathrm{X}] = np = \frac{1000 \log_2(n)}{2} \\ &\Pr\left[\mathrm{X} \geq \frac{3}{4} \cdot k\right] \leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3} \\ &\square \end{aligned}$$

"i always find it therefore i never search"