

## Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

### Theorie-Aufgaben 7

ABGABE IN MOODLE () BIS ZUM 25.04.2024 UM 10:00 UHR.

#### Aufgabe 1 – *Couch to k k*

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens  $\frac{3}{4}$  aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schneift* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph  $G = (V, E)$  ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung  $v \in V$  und die Route ist ein gegebener Kreis  $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$  der Länge  $k$ .

Bei jeder Strasse  $e \in E$  gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ . Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

- (a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (c) Nimm an, dass du  $n-1$  Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Routen, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schneifender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt  $k \geq \log_2(n) + 1$ , dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens  $\frac{1}{2}$  keinen einzigen schneifenden Hund.
- (d) Nimm an, dass  $k = 1000 \log_2 n$  und  $n \geq 2$ . Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.

(a)

Let  $X$  be the random variable denoting the number of streets with flowers. We recall that the trip is a disaster, if  $X \geq \frac{3}{4}$ . To apply Markov's inequality,  $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ , we need the expected value  $\mathbb{E}[X]$ , meaning the expected number of streets with flowers encountered. For this, we can use linearity of expectation, since the probability for a street to have flowers is binomially distributed. Hence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np = \frac{k}{2} \\ \Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] &\leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

□

(b)

Using Chebyshev's inequality,  $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$ , requires  $\text{Var}[X]$ . This is given by  $\text{Var}[X] = np(1-p) = \frac{k}{4}$ , as  $X \sim \text{Bin}(k, p)$ .

$$\begin{aligned}\Pr\left[\left|X - \frac{k}{2}\right| \geq \frac{k}{4}\right] &= \frac{\text{Var}[X]}{\left(\frac{k}{4}\right)^2} \\ &= \frac{k}{4} \cdot \frac{4^2}{k^2} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

□

(c)

Let  $Y$  = "# sniffing dogs", where  $Y := \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$  with  $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ , independent. Let  $Y_i$  = "the  $i$ -th dog sniffles". The probability,  $p$  for some  $i$ -th dog to sniffle all day is  $\Pr[Y_i = 1] = \Pr[X = k] = \frac{1}{2^k}$ , given by all of its trip's streets having flowers. Thus,  $Y \sim \text{Bin}(n-1, p)$ .

The expected number of sniffing dogs is given by

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{n-1}{2^k} \\ &= \frac{n-1}{2^{\log_2(n)+1}} = \frac{n-1}{2n} \\ &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Now, we need to show that  $k \geq \log_2(n) + 1 \implies \Pr[Y = 0] \geq \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}\Pr[Y = 0] &= 1 - \Pr[Y \geq 1] \quad (\text{Markov}) \\ &\geq 1 - \mathbb{E}[Y] \\ &\geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

\_\_\_\_ ## (d) Let  $\text{Z} = \#\text{ disaster trips}$ , where  $\mathrm{Z} := \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Z}_i$  with  $\mathrm{Z}_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ , independent denoting, whether the  $i$ -th trip was a disaster. We know, that the probability,  $p$  for any one trip to be a disaster is  $\Pr[\mathrm{X} \geq \frac{3k}{4}] \leq \frac{2}{3}$ . Thus,  $\mathrm{Z} \sim \text{Bin}(n-1, p)$ .

We need to show that  $k = 1000 \log_2(n), n \geq 2 \implies 1 - \Pr[\mathrm{Z} \geq 1] \geq 0.99$ .

Let  $\delta = \frac{1}{2}$

$$\Pr[\mathrm{Z} \geq 1] \leq 0.01$$

$$\Pr[\mathrm{Z} \geq (1 + \delta)\mathbb{E}[\mathrm{Z}]] \leq e^{-\frac{\delta^2}{3}\mathbb{E}[\mathrm{Z}]}$$

$$\Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] = 1 - \Pr\left[X \leq \frac{k}{4} - 1\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{4} - 1 \rfloor} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

$$\mathbb{E}[\mathrm{Z}] = \frac{2 \cdot (n-1)}{3}$$

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}] = np = \frac{1000 \log_2(n)}{2}$$

$$\Pr\left[X \geq \frac{3}{4} \cdot k\right] \leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3}$$

□

"i always find it therefore i never search"