Serie 3

Abgabe: Bis am 15.03.2024 um 18:00 einzureichen (SAM-UP).

Häufungspunkt

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen a konvergiert.

Analog sagt man, dass ∞ bzw. $-\infty$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen ∞ bzw. $-\infty$ konvergiert.

Limes Superior (limsup)

Der **Limes superior** einer Folge (a_n) ist definiert als der größte Häufungspunkt dieser Folge. Formal ist der Limes superior gegeben durch:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k : k \geq n\}\right).$$

Limes Inferior (liminf)

Der **Limes inferior** einer Folge (a_n) ist definiert als der kleinste Häufungspunkt dieser Folge. Formal ist der Limes inferior gegeben durch:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{a_k : k \geq n\}\right).$$

Serie 3, Aufgabe 3.1.a

siehe Lösung (am Freitag)

Beispiel 1

Betrachten wir die Folge (a_n), die alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 auflistet. Diese Folge ist besonders interessant, da sie uns erlaubt, die Konzepte von Häufungspunkten, dem limes superior ($\limsup$) und dem limes inferior ($\liminf$) zu veranschaulichen.

Limes Inferior und Limes Superior

Für die gegebene Folge (a_n) können wir feststellen, dass:

- Der **limes inferior** $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ ist. Dies bedeutet, dass es zu jedem positiven ε Elemente der Folge gibt, die kleiner als ε sind – Elemente innerhalb des Intervalls $[0, \varepsilon)$, und sich 0 als untere Grenze der Folge annähern lässt, ohne sie zu unterschreiten.
- Der **limes superior** $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ ist. Analog bedeutet dies, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente der Folge existieren, die innerhalb des Intervalls $(1-\varepsilon, 1]$ liegen, und sich 1 als obere Grenze annähern lässt, ohne überschritten zu werden.

Häufungspunkte

Interessanterweise sind alle Zahlen im Intervall $[0, 1]$ Häufungspunkte der Folge (a_n). Das bedeutet, dass für jede Zahl $x \in [0, 1]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ immer unendlich viele Elemente der Folge existieren, die in das Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ fallen. Dies illustriert die Dichte der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen innerhalb des Intervalls von 0 bis 1.

Beispiel 2

Betrachten wir zwei periodische Folgen, (a_n) und (b_n), definiert durch:

$$(a_n) = (2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \ldots) \text{ und}$$
$$(b_n) = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots),$$

wobei beide Folgen eine Periode von 4 haben.

Für die Folge (a_n) sowie für die Folge (b_n) gilt, dass:

- Der **limes superior** $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 2$ ist.
- Der **limes inferior** $\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0$ ist.

Wenn wir jedoch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ betrachten, erhalten wir:

$$(a_n + b_n) = (2 + 0, 1 + 1, 1 + 2, 0 + 1, 2 + 0, \ldots) = (2, 2, 3, 1, 2, \ldots),$$

für die gilt:

- Der **limes superior** $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 3$.
- Der **limes inferior** $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1$.

Dieses Beispiel zeigt, dass Additivität im Allgemeinen nicht für den limes superior und limes inferior gilt. Stattdessen gelten die Ungleichungen:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \text{ und}$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Diese Ungleichungen verdeutlichen, dass die Operationen des limes superior und limes inferior mit Vorsicht behandelt werden müssen, insbesondere in Bezug auf die Eigenschaften der Additivität und Subadditivität.

Definition einer Reihe

Eine **Reihe** ist die Summe der Glieder einer unendlichen Folge von Zahlen. Formal ausgedrückt ist eine Reihe gegeben durch:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

wobei a_n das n-te Glied der Folge ist.

Geometrische Reihe

Eine **geometrische Reihe** ist eine Reihe, bei der jedes Glied nach dem ersten das r-fache des vorhergehenden Gliedes ist, wobei r der Quotient ist. Die Summe einer geometrischen Reihe ist gegeben durch:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \text{ für } |r| < 1,$$

wobei a das erste Glied und r der Quotient der Reihe ist.

Harmonische Reihe

Die **harmonische Reihe** ist eine Reihe, die durch die Summe der Kehrwerte der natürlichen Zahlen gebildet wird:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe divergiert, das heißt, sie hat keinen endlichen Grenzwert.

Summierbarkeit von $\frac{1}{n^2}$

Die Reihe der Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen konvergiert gegen einen endlichen Wert, bekannt als die **Basler Problem** Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bemerkung

In der mathematischen Analyse ist es wichtig, eine klare Unterscheidung zwischen einer Reihe und dem Grenzwert ihrer Partialsummen zu machen. Diese Unterscheidung ist analog zur Unterscheidung zwischen Folgen und ihren Grenzwerten, falls sie konvergieren.

Reihen und Partialsummen

Eine Reihe, bezeichnet mit $\sum_{k\geq 1} a_k$, stellt lediglich die Folge ihrer Partialsummen dar:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Hierbei ist zu beachten, dass eine Reihe unabhängig davon definiert werden kann, ob sie konvergiert. Ein Beispiel hierfür ist die Reihe der alternierenden Einser $(-1)^k$, welche wohldefiniert ist als die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, jedoch nicht konvergiert.

Konvergenz von Reihen

Nur wenn die Folge der Partialsummen konvergiert (und nur dann), kann der Wert der Reihe, bezeichnet als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, definiert werden. Dieser Wert ist definiert als der Grenzwert (S) der Partialsummen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Beispiel 3

Wir betrachten die Reihe, die nur aus den Termen der harmonischen Reihe besteht, deren Nenner ungerade Zahlen sind, also die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Konvergenzüberprüfung

Um zu überprüfen, ob diese Reihe konvergiert, betrachten wir auch die Reihe der Kehrwerte der geraden Zahlen, $\frac{1}{2n}$. Es gilt:

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}.$$

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ konvergieren würde, dann müsste aufgrund der obigen Ungleichung auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ konvergieren. Durch Addition der beiden Reihen erhielten wir die gesamte harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

die bekanntermaßen divergiert.

Schlussfolgerung

Diese Beobachtung führt zu einem Widerspruch, da wir wissen, dass die harmonische Reihe divergiert. Daher kann die ursprünglich betrachtete Reihe der Kehrwerte der ungeraden Zahlen nicht konvergieren. Ähnlich lässt sich argumentieren, dass auch die Reihe der Kehrwerte der geraden Zahlen nicht konvergiert.

Beispiel 4

Es ist eine grundlegende Eigenschaft konvergenter Reihen, dass die Summe ihrer Restterme gegen 0 konvergiert. Das heißt, wenn eine Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert, dann gilt für die "tails of the sequence":

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

Erklärung

Diese Aussage verallgemeinert die Beobachtung, dass die Glieder einer konvergenten Reihe gegen 0 konvergieren müssen. Die Konvergenz der Glieder gegen 0 ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe. Die zusätzliche Bedingung, dass die Summe der Restterme gegen 0 konvergiert, hilft zu verdeutlichen, wie die Konvergenz der gesamten Reihe sichergestellt wird.

Satz

Wir sollen es noch beweisen 😎. Wenn eine Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert, dann konvergiert die Summe ihrer Restterme gegen 0, das heißt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

Beweis

Sei $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ der Grenzwert der konvergenten Reihe. Für die n-te Partialsumme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gilt, dass S_n gegen S konvergiert, wenn n gegen Unendlich geht.

Betrachten wir nun die Summe der Restterme ab dem Index n, das heißt $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Diese Summe kann auch ausgedrückt werden als $S - S_{n-1}$, da die ersten $n-1$ Terme der Reihe in S_{n-1} zusammengefasst werden und S die Summe aller Terme ist.

Da S_n gegen S konvergiert, muss auch S_{n-1} gegen S konvergieren, da der Unterschied zwischen S_n und S_{n-1} gerade a_n ist, welches gegen 0 konvergiert (notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe).

Daher gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (S - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Summe der Restterme einer konvergenten Reihe gegen 0 konvergiert. □