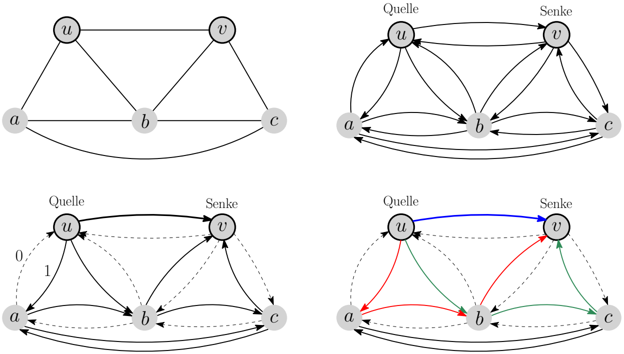
# Flüsse in Netzwerken: Anwendungen (Teil 1)



# I Matchings – Problemstellung

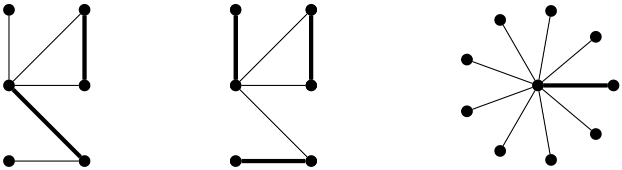
**Maximum Bipartite Matching Problem**. Gegeben ein bipartiter Graph, finde ein maximum (d.h. kardinalitätsmaximales) Matching.

Graph, ungerichtet, ungewichtet.

# Matching – Definition

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heisst **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$, falls kein Knoten des Graphen zu mehr als einer Kante aus $M$ inzident ist, d.h., wenn

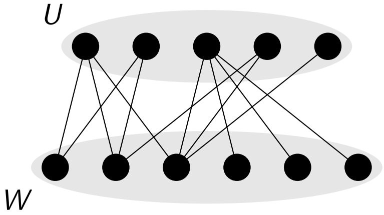
$$e \cap f = \emptyset \quad \text{für alle } e, f \in M \text{ mit } e \neq f.$$



# Bipartiter Graph – Definition

Die Knotenmenge eines **bipartiten Graphen** $G = (U \uplus W, E)$ besteht aus zwei disjunkten Mengen $U$ und $W$ und die Kanten von $G$ verlaufen nur zwischen den beiden Mengen, d.h.

$$\forall e \in E\colon\; |e \cap U| = |e \cap W| = 1\ .$$



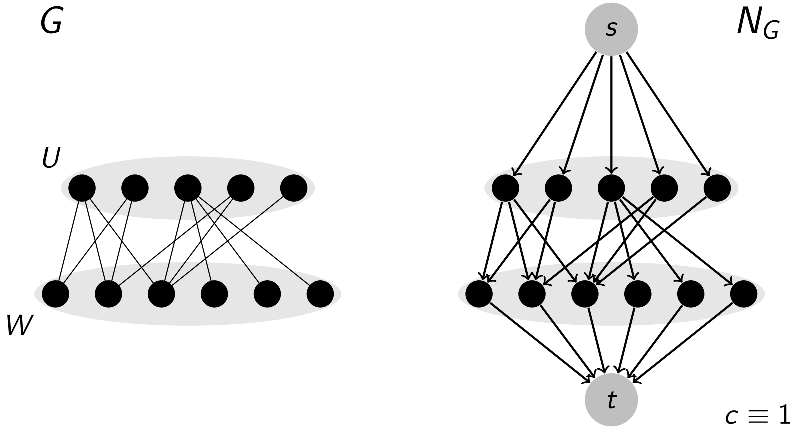
# Graph zu Netzwerk (für Matchings)

Wir bilden jeden bipartiten Graphen (mit vorgegebener Knotenpartition $U \uplus W$) auf ein Netzwerk ab.

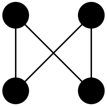
$$\overbrace{G = (U \uplus W, E)}^{\text{bipartiter Graph}} \quad \mapsto \quad \overbrace{N_G = (\underbrace{U \uplus W \uplus \{s,t\}}_{\text{Knotenmenge}}, A, c, s, t)}^{\text{Netzwerk}}$$

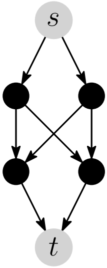
- $s \neq t$ zusätzliche Knoten.
- $A := \{s\} \times U \ \cup\ \{(u,w) \in U \times W \mid \{u,w\} \in E\} \ \cup\ W \times \{t\}$.
- $c \equiv 1$.

# Graph zu Netzwerk (für Matchings)



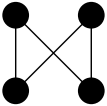
# Maximale Flüsse in $N_G$

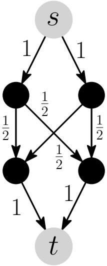





$c \equiv 1$

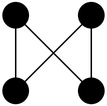
# Maximale Flüsse in $N_G$

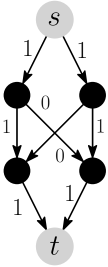





$c \equiv 1$

# Maximale Flüsse in $N_G$






$c \equiv 1$

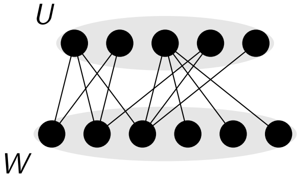
$\Leftarrow$

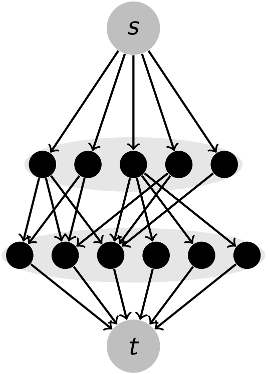
**Satz (Ford-Fulkerson, ganzzahlig)**

*Sei $N$ ein Netzwerk mit ganzz. Kapazitäten $\leq U$. Dann gibt es einen* **ganzz. maximalen Fluss**. *Er kann in* **Zeit** $O(mnU)$ *berechnet werden.*

Hier: $U = 1$.

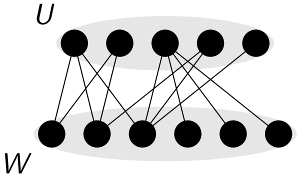
# Matching zu Fluss – und vice versa

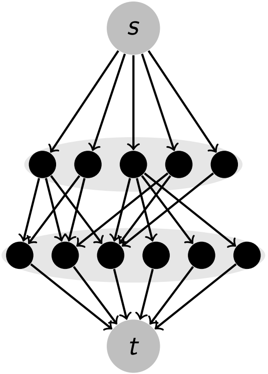



$c \equiv 1$

# Matching zu Fluss – und vice versa

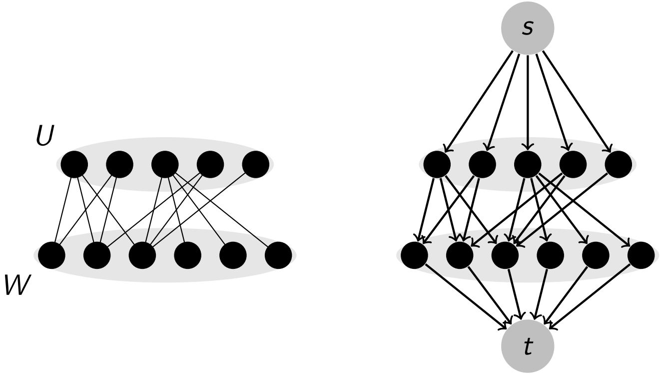



$c \equiv 1$

Matching $M$ in $G \quad \mapsto \quad$ Fluss $f_M$ in $N_G$ mit $\mathrm{val}(f_M) = |M|$.

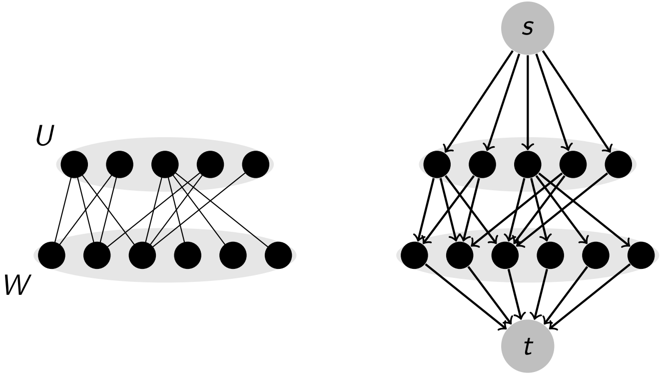
# Matching zu Fluss – und vice versa




$c \equiv 1$

$$\text{Matching } M \text{ in } G \quad \mapsto \quad \text{Fluss } f_M \text{ in } N_G \text{ mit } \mathrm{val}(f_M) = |M|.$$
$$\text{Ganzz. Fluss } f \text{ in } N_G \quad \mapsto \quad \text{Matching } M \text{ in } G \text{ mit } |M| = \mathrm{val}(f).$$

# Matching zu Fluss – und vice versa




$c \equiv 1$

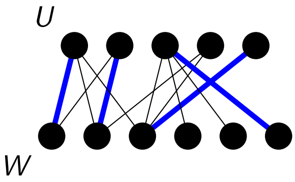
Matching $M$ in $G \quad \mapsto \quad$ Fluss $f_M$ in $N_G$ mit $\mathrm{val}(f_M) = |M|$.

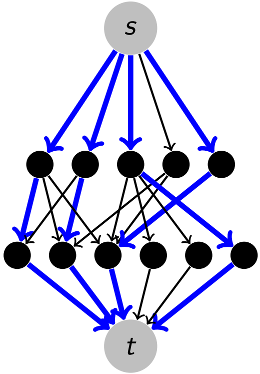
Ganzz. Fluss $f$ in $N_G \quad \mapsto \quad$ Matching $M$ in $G$ mit $|M| = \mathrm{val}(f)$.

**Maximum Matching in $G$ „$\simeq$“ ganzz. Maxflow in $N_G$.**

$$\max_{M \text{ Matching in } G} |M| = \max_{f \text{ Fluss in } N_G} \mathrm{val}(f)$$

# Matching zu Fluss – und vice versa




$c \equiv 1$

Matching $M$ in $G \quad \mapsto \quad$ Fluss $f_M$ in $N_G$ mit $\mathrm{val}(f_M) = |M|$.

Ganzz. Fluss $f$ in $N_G \quad \mapsto \quad$ Matching $M$ in $G$ mit $|M| = \mathrm{val}(f)$.

**Maximum Matching in $G$ „$\simeq$“ ganzz. Maxflow in $N_G$.**

$$\max_{M \text{ Matching in } G} |M| = \max_{f \text{ Fluss in } N_G} \mathrm{val}(f)$$

# II Kantendisjunkte Pfade

**Kantendisjunkte Pfade Problem.** Gegeben ein Graph $G$ mit zwei ausgezeichneten Knoten $u$ und $v$, $v \neq u$, bestimme eine möglichst grosse Menge kantendisjunkter $u$-$v$-Pfade.

Zur Erinnerung:

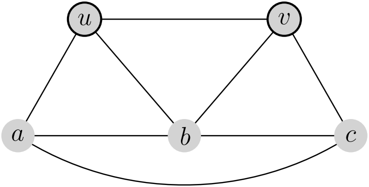
### Satz (Menger)

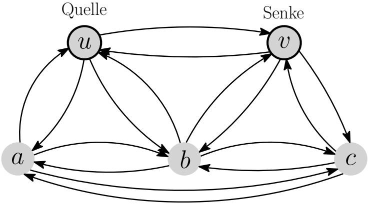
*Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $G$ ist genau dann $k$-kantenzusammenhängend, wenn es für alle Paare von Knoten $u, v \in V$, $u \neq v$, mindestens $k$ kantendisjunkte $u$-$v$-Pfade gibt.*

# Graph zu Netzwerk (für kantendisjunkte Pfade)

$$\overbrace{G = (V, E), u, v \in V}^{\text{Graph mit 2 Knoten}} \quad \mapsto \quad \overbrace{N_G^* = (V, A, c, u, v)}^{\text{Netzwerk}}$$

- $A := \{(x, y), (y, x) \mid \{x, y\} \in E\}$ .
- $c \equiv 1$ .



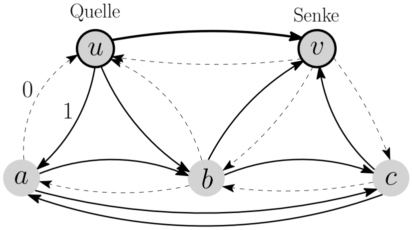




Nun haben wir entgegen gerichtete Kanten im Netzwerk!

# Fluss zu kantendisjunkten Pfaden

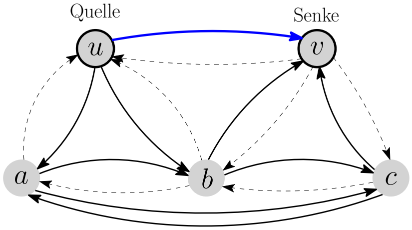
- Berechne ganzz. max. Fluss $f$ in $N_G^* \Rightarrow$ Flusswerte $\in \{0, 1\}$.
- Für alle Knoten $w \notin \{u, v\}$ gilt: $\mathrm{indeg}_f(w) = \mathrm{outdeg}_f(w)$.
- $\mathrm{val}(f) = \mathrm{outdeg}_f(u) - \mathrm{indeg}_f(u) = \mathrm{indeg}_f(v) - \mathrm{outdeg}_f(v)$.

Ein-/Ausgrade
bzgl. Fluss 1
Kanten.



# Fluss zu kantendisjunkten Pfaden

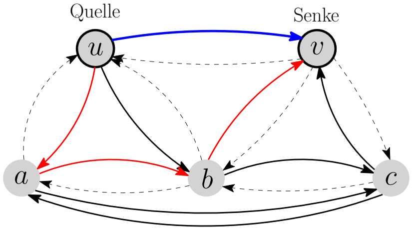
- Berechne ganzz. max. Fluss $f$ in $N_G^* \Rightarrow$ Flusswerte $\in \{0, 1\}$.
- Für alle Knoten $w \notin \{u, v\}$ gilt: $\mathrm{indeg}_f(w) = \mathrm{outdeg}_f(w)$.
- $\mathsf{val}(f) = \mathrm{outdeg}_f(u) - \mathrm{indeg}_f(u) = \mathrm{indeg}_f(v) - \mathrm{outdeg}_f(v)$.




- Beginnend bei $u$ laufe entlang gerichteten ungebrauchten Kanten mit Fluss 1 bis man bei $v$ ankommt. Unterwegs durchlaufene Kanten werden als gebraucht markiert.

# Fluss zu kantendisjunkten Pfaden

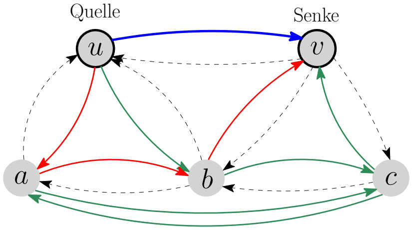
- Berechne ganzz. max. Fluss $f$ in $N_G^*$ $\Rightarrow$ Flusswerte $\in \{0,1\}$.
- Für alle Knoten $w \notin \{u,v\}$ gilt: $\mathrm{indeg}_f(w) = \mathrm{outdeg}_f(w)$.
- $\mathsf{val}(f) = \mathrm{outdeg}_f(u) - \mathrm{indeg}_f(u) = \mathrm{indeg}_f(v) - \mathrm{outdeg}_f(v)$.




- Beginnend bei $u$ laufe entlang gerichteten ungebrauchten Kanten mit Fluss 1 bis man bei $v$ ankommt. Unterwegs durchlaufene Kanten werden als gebraucht markiert.
- Wiederhole $\mathsf{val}(f)$ Mal. Das gibt $\mathsf{val}(f)$ kantendisjunkte Pfade

# Fluss zu kantendisjunkten Pfaden

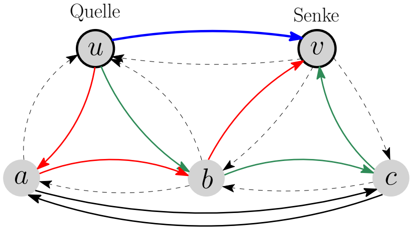
- Berechne ganzz. max. Fluss $f$ in $N_G^* \Rightarrow$ Flusswerte $\in \{0, 1\}$.
- Für alle Knoten $w \notin \{u, v\}$ gilt: $\mathrm{indeg}_f(w) = \mathrm{outdeg}_f(w)$.
- $\mathsf{val}(f) = \mathrm{outdeg}_f(u) - \mathrm{indeg}_f(u) = \mathrm{indeg}_f(v) - \mathrm{outdeg}_f(v)$.




- Beginnend bei $u$ laufe entlang gerichteten ungebrauchten Kanten mit Fluss 1 bis man bei $v$ ankommt. Unterwegs durchlaufene Kanten werden als gebraucht markiert.
- Wiederhole $\mathsf{val}(f)$ Mal. Das gibt $\mathsf{val}(f)$ kantendisjunkte Pfade (nach Entfernen von Kreisen).

# Fluss zu kantendisjunkten Pfaden

- Berechne ganzz. max. Fluss $f$ in $N_G^* \Rightarrow$ Flusswerte $\in \{0, 1\}$.
- Für alle Knoten $w \notin \{u, v\}$ gilt: $\mathrm{indeg}_f(w) = \mathrm{outdeg}_f(w)$.
- $\mathrm{val}(f) = \mathrm{outdeg}_f(u) - \mathrm{indeg}_f(u) = \mathrm{indeg}_f(v) - \mathrm{outdeg}_f(v)$.




- Beginnend bei $u$ laufe entlang gerichteten ungebrauchten Kanten mit Fluss 1 bis man bei $v$ ankommt. Unterwegs durchlaufene Kanten werden als gebraucht markiert.
- Wiederhole $\mathrm{val}(f)$ Mal. Das gibt $\mathrm{val}(f)$ kantendisjunkte Pfade (nach Entfernen von Kreisen).

# Maxflow-Mincut Theorem vs. Satz von Menger

## Satz (**Maxflow-Mincut**)

*Jedes Netzwerk erfüllt*

$$\max_{f \text{ Fluss}} \mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ s-t-Schnitt}} \mathrm{cap}(S, T) \ .$$

*Und ganzzahlige Netzwerke haben ganzzahlige maximale Flüsse.*

# Maxflow-Mincut Theorem vs. Satz von Menger

## Satz (**Maxflow-Mincut**)

*Jedes Netzwerk erfüllt*

$$\max_{f \text{ Fluss}} \mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ s-t-Schnitt}} \mathrm{cap}(S,T) \ .$$

*Und ganzzahlige Netzwerke haben ganzzahlige maximale Flüsse.*

$$\Downarrow$$

## Satz (**Menger**, Variante)

*Sei $G$ ein Graph mit Knoten $u$ und $v$, $u \neq v$.*

$$\begin{gathered}\max \ \#\ \textit{kantendisjunkter u-v-Pfade in } G \\ = \\ \min \ \#\ \textit{Kanten, die u und v trennen}\end{gathered}$$

*(„trennen“ heisst, nach Entfernen der Kanten sind $u$ und $v$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten des Graphen).*

# Maxflow-Mincut Theorem vs. Satz von Menger

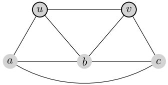
## Satz (**Maxflow-Mincut**)

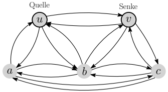
*Jedes Netzwerk erfüllt*

$$\max_{f \text{ Fluss}} \mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ s-t-Schnitt}} \mathrm{cap}(S,T) \ .$$

*Und ganzzahlige Netzwerke haben ganzzahlige maximale Flüsse.*

$$\Downarrow$$




## Satz (**Menger**, Variante)

*Sei $G$ ein Graph mit Knoten $u$ und $v$, $u \neq v$.*

$$\begin{gathered}\max \ \# \ \textit{kantendisjunkter } u\text{-}v\textit{-Pfade in } G \\ = \\ \min \ \# \ \textit{Kanten, die } u \textit{ und } v \textit{ trennen}\end{gathered}$$

*(„trennen“ heisst, nach Entfernen der Kanten sind $u$ und $v$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten des Graphen).*

# Flüsse helfen bei ...

- Matchings, hier: bipartites maximum Matching in $O(mn)$ (geht besser in $O((m+n)\sqrt{n})$ [Hopcroft&Karp'73]).
- Schnitten zwischen Knoten $u$ und $v$ (Knoten-/Kantenzusammenhang).
- Kantendisjunkten Pfaden (auch knotendisjunkten Pfaden).
- Beweis Satz von Menger (aus Maxflow-Mincut).