Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Skript für den Prüfungsvorbereitungs Workshop Lineare Algebra

Steven Battilana, Kai Zheng

30. Dezember 2021

Zusammenfassung

Idee.
Dieses Skript wurde in Hinblick auf die Prüfung geschrieben. Die Idee ist, dass es prinzipiell ein Kapitel pro Prüfungsaufgabe hat, wobei nur das neue Reglement berücksichtigt wird. Um das ganze möglichst kurz zu halten wurden die *Grundkenntnisse* in das gleichnamige Kapitel ausgelagert. Damit werden die anderen Kapitel aufs wesentliche beschränkt.

Viel Erfolg!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundvoraussetzung für die LR-Zerlegung

1.1 Komplexe Zahlen

Bemerkung 1.1
$z^2 + 1 = 0$ *ist ein Beispiel für eine in* $\mathbb{R}$ *unlösbare Gleichung. Um eine Lösung zu finden erweitern wir deshalb den Körper auf* $\mathbb{R}^2$ *und nennen dies* ***Körper*** *(engl. Field, wird in der diskreten Mathematik im 5. Kapitel* Algebra *genauer behandelt)* ***der komplexen Zahlen*** $\mathbb{C}$.

Definition 1.2 (imaginäre Einheit)

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i &\mathrel{\widehat{=}} \text{ die imaginäre Einheit} \end{aligned}$$

Definition 1.3 (kartesische Form)

$$z = x + iy$$

Definition 1.4 (Real- und Imaginärteil)

$$\begin{aligned} Re(z) &:= x \in \mathbb{R} && \widehat{=} \text{ Realteil} \\ Im(z) &:= y \in \mathbb{R} && \widehat{=} \text{ Imaginärteil} \end{aligned}$$

Definition 1.5 (Konjugation)
Die Konjugation von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *sei*

$$\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}.$$

Die Konjugation hat die folgenden Eigenschaften*:*

(i) *Für alle* $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}$ *gilt*

- $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = \|z\|^2$.

(ii) *Für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt*

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Definition 1.6 (Euler Formel)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Definition 1.7 (Polarform)
Die Polarform *von* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *sei*

$$\begin{aligned} & z = re^{i\varphi}, \\ \overset{\text{Euler Formel}}{\Leftrightarrow} \quad & z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ & \text{mit } r = \|z\|, \\ & \quad x = r\cos\varphi, \\ & \quad y = r\sin\varphi. \end{aligned} \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{undefiniert}, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1.8 (Ausblick)
$z^2 + 1 = 0$ *ist ein Beispiel für eine in* $\mathbb{R}$ *unlösbare Gleichung, die in* $\mathbb{C}$ *Lösungen hat (nämlich* $z = \pm i$*). Allgemein gilt der* ***Fundamentalsatz der Algebra:*** *Jedes Polynom*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

vom Grad $n \geq 1$ *hat in* $\mathbb{C}$ *eine Nullstelle. Das heisst,* $\mathbb{C}$ *ist im Unterschied zu* $\mathbb{R}$ ***algebraisch vollständig****.*

Beispiel 1.9
Berechne: $\frac{6+7i}{3-8i}$

Lösung*:*

$$\frac{6+7i}{3-8i} = \frac{6+7i}{3-8i} \cdot \frac{3+8i}{3+8i} = \frac{18+21i+48i+56i^2}{9-64i^2} = \frac{18+21i+48i-56}{9+64} = \frac{-38+69i}{73}$$

Beispiel 1.10
Berechne die Polarform von $z = 1 + i$*.*

Lösung*:*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow z &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Beispiel 1.11
Berechne die kartesische Form von $7e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Lösung*:*

$$7e^{i\frac{\pi}{3}} = 7(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)) = 7\cdot\frac{1}{2} + 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}i$$

Beispiel 1.12
Zeichnen Sie die folgenden Mengen grafisch in der komplexen Ebene:

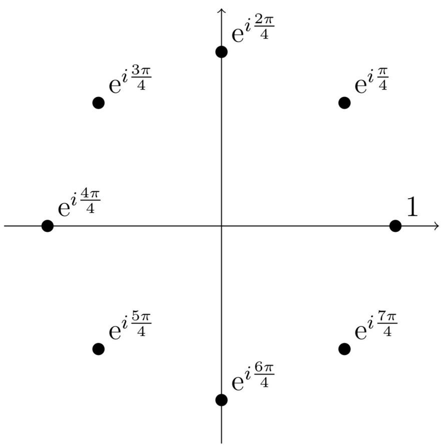
$$D := \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n \quad : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Lösung*: In Polarkoordinaten gilt* $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$*, also folgt*

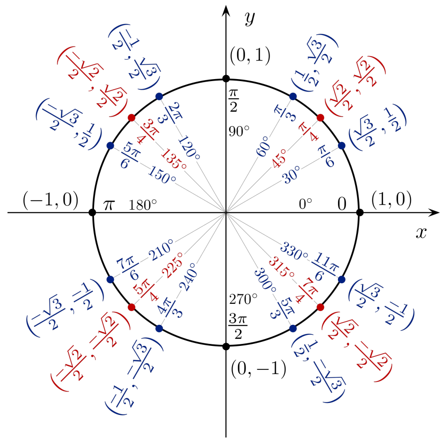
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

Weil $e^{i\theta} = e^{i\theta+2k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{C}$ *besteht* D *aus 8 Punkten, die für* $n = 0, 1, 2, ..7$ *gefunden werden:*

$$D = \{1, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{2\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{4\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{6\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$$



Bemerkung 1.13 (sollte auf eure Zusammenfassung für die Prüfung)
Im folgenden sieht ihr schöne *Cosinus- und Sinuswerte auf dem Einheitskreis, wobei die x-Richtung* $\cos(x)$ *und die y-Richtung* $\sin(x)$ *entspricht:*



1.2 Lineare Gleichungssysteme LGS

Der allgemeine Fall hat m lineare Gleichungen, n Unbekannte und stellt ein LGS dar. Falls

$$
\begin{aligned}
&m > n, \text{ dann ist das LGS überbestimmt (numerisch lösbar)}\\
&m < n, \text{ dann ist das LGS unterbestimmt (analytisch lösbar)}\\
&m = n, \text{ sonst (analytisch lösbar)}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
$$

Wobei

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}
$$

$A \mathrel{\widehat{=}}$ Koeffizientenmatrix, $x \mathrel{\widehat{=}}$ Unbekanntenvektor, $b \mathrel{\widehat{=}}$ Lösungsvektor (RHS)

Lösungsansatz: ***Gauss-Elimination***

Bemerkung 1.14
Für ein LGS gilt jeweils eines der folgenden Punkte: Es besitzt

- *genau eine Lösung, dann nennt man es ein* reguläres *LGS*
- *keine Lösung, dann nennt man es ein* singuläres *LGS*
- *∞ viele Lösungen, dann nennt man es ebenfalls ein* singuläres *LGS*

Kochrezept 1.15 (Gauss-Elimination)
Gegeben: LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *(für* $m < n \vee m = n$*)*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1. *Stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left(A \mid \boldsymbol{b}\right).$$

2. *Bringe* $\left(A \mid b\right)$ *durch Operationen der Art (I), (II), (III) in folgende Form (Zeilenstufenform, d.h. es muss nicht unbedingt die Einheitsmatrix ergeben!):*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & x_n \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\mathbb{1} \mid \boldsymbol{x}\right), \text{ wobei } \mathbb{1} \mathrel{\hat{=}} \text{Einheitsmatrix}$$

(I) *Zeilen vertauschen*

(II) *Addition/Subtraktion von einer Zeile (Gleichung) zu einer anderen*

(III) *Ver-k-fachen einer Zeile (Gleichung) mit* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. *Am besten geht das, wenn ihr das folgende Verhältnis bildet (dies werden wir später nochmals brauchen!)*

$$l_{ij} := \frac{a_{i1}}{a_{jj}}$$

und dies folgend nutzt

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & RHS \end{array} \\ \begin{array}{c}(i)\\(ii)\\(iii)\end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21}-l_{21}a_{11} & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{21}a_{13} & b_2-l_{21}b_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \widetilde{b_2} \\ a_{31}-l_{31}a_{11} & a_{32}-l_{31}a_{12} & a_{33}-l_{31}a_{13} & b_2-l_{31}b_1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & \widetilde{b_2} \end{array}\right) \dots$$

Beispiel 1.16
Löse das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Lösung*:*

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 8 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 8 & -4 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{6}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \overset{(iii)-l_{32}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{(-2)}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: (*)$$

In der 3. Zeile gibt es nur Nullen $\Rightarrow \infty$ *viele Lösungen.*
Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 2. Zeile:

$$x_3 = -1$$

Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 1. Zeile:

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Wähle z.B. $x_2 = t \in \mathbb{R}$ als freien Parameter

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Bemerkung 1.17
Falls wir statt $(*)$ z.B.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

erhalten hätten, gäbe es keine Lösung, weil in der 3. Zeile $0 = 2$ steht, was bekanntlich einen Widerspruch darstellt.

Beispiel 1.18
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende homogene lineare Gleichungssystem eine nichttriviale (von 0 verschiedene) Lösung?

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + ax_2 - x_3 &= 0 \\ a^2x_1 + 2ax_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung*:*

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + ax_2 - x_3 &= 0 \\ a^2x_1 + 2ax_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & a & -1 & 0 \\ a^2 & 2a & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & a & -1 & 0 \\ a^2 & 2a & -10 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & a & -1 \\ a^2 & 2a & -10 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ a^2 & 2a & -10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 0 & 2a & a^2-10 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{32}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$$

1. *Fall: $x_3 \neq 0$*
   Die 3. Zeile gibt uns

   $$(a^2-4)x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$$

   Wir wählen $x_3 =: s$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als freien Parameter.
   Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 2. Zeile

   $$ax_2 - 3s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax_2 = 3s \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{3s}{a}$$

Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 1. Zeile

$$x_1 - s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = s$$

Somit sind wir bereits bei der Lösung von diesem Fall angelangt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ \frac{3s}{a} \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a = \pm 2 \right\}$$

2. *Fall:* $x_3 = 0$
   Somit macht die 3. Zeile keine Aussage über a. Also müssen wir auf die 2. Zeile ausweichen.

$$ax_2 - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_2 - 3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ax_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee x_2 = 0$$

   a) *a = 0,* $x_2 \neq 0$*:*
      Wir wählen $x_2 = t$*,* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *als freien Parameter. Mit Rückwärtseinsetzen erhalten wir von der 1. Zeile* $x_1 = 0$*. Somit erhalten wir die Lösung:*

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a = 0 \right\}$$

   b) $x_2 = 0$*: Somit folgt aus der 1. Zeile:* $x_1 = 0$
      Dieser Fall liefert nur die triviale Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und kann ausgeschlossen werden.*

Insgesamt folgt also, dass wir für $a \in \{-2, 0, 2\}$ *nichttriviale Lösungen erhalten.*

1.3 Matrizen und Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Definition 1.19
Die im folgenden Bild eingekreisten Elemente heissen Pivotelement *oder kurz Pivot.*

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
x_{n_1} & \cdots & x_{n_2} & \cdots & \cdots & x_{n_r} & x_{n_r+1} & \cdots & x_n & 1 \\
\hline
a_{1,n_1} & \cdots & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & \cdots & a^{(1)}_{2,n_2} & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & & a^{(r-1)}_{r,n_r} & * & \cdots & * & c_r \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_m \\
\hline
\end{array}
$$

Definition 1.20 (Pivotisierung)
Pivotisiere in der aktuellen Spalte j, d.h. bestimme den Index $i_p \in \{j, j+1, ..., n\}$ mit $|a_{i_p j}| = \max\limits_{i \in \{j,j+1,...,n\}} |a_{ij}|$.

Definition 1.21
In der Zeilenstufenform (ZSF) des Systems heisst die Anzahl $r \in \mathbb{N}$ der Pivotelemente der **Rang** *der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und des Gleichungssystems, d.h.*

$$\text{Rang}(A) := r \mathrel{\hat{=}} \#\ \text{Pivotelemente}.$$

Bemerkung 1.22
Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der Rang $r \in \mathbb{N}$, dann gilt

(i) $r \leq min\{m, n\}$,

(ii) $k - r \mathrel{\hat{=}} \#$ freie Parameter, *mit* $k = min\{m, n\}$.

Beispiel 1.23 (zu (ii))
$m < n:$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad Rang(A) = 3$$

Hier sieht man, dass der Rang nicht mehr als 3 sein kann, da die maximal mögliche Anzahl Pivotelemente gleich 3 ist.

$m > n:$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad Rang(B) = 3$$

In diesem Fall ist die letzte Zeile linear abhängig, d.h. mit den ersten drei Zeilen können wir die Letzte zu Nullzeile umwandeln. Somit ist auch hier die maximal mögliche Anzahl Pivotelemente gleich 3.

Bemerkung 1.24 (Rechenregeln)
Sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ und sei $B, C \in \mathbb{E}^{n\times n}$ mit $\mathbb{E} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(i) *Rang(A^T) = Rang(A) = Rang(A^H)*

(ii) *Rang(B) + Rang(C) $-n \leq$ Rang(BC) $\leq$ min$\{$Rang(B), Rang(C)$\}$*

Definition 1.25
Sei das folgende lineare Gleichungssystem (LSG) gegeben:

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
x_{n_1} & \cdots & x_{n_2} & \cdots & \cdots & x_{n_r} & x_{n_r+1} & \cdots & x_n & & 1 \\
\hline
a_{1,n_1} & \cdots & * & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & & c_1 \\
0 & \cdots & a^{(1)}_{2,n_2} & \cdots & \cdots & * & * & \cdots & * & & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & & a^{(r-1)}_{r,n_r} & * & \cdots & * & & c_r \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & c_{r+1} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & c_m \\
\hline
\end{array}
$$

Die im Falle $m > r$ für die Existenz einer Lösung notwendigen Bedingungen

$$c_{r+1} = c_{r+2} = ... = c_m = 0$$

sind die Verträglichkeitsbedingungen *des LGS.*

Definition 1.26
einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} m \mathrel{\widehat{=}} \text{Zeilen} \\ n \mathrel{\widehat{=}} \text{Spalten} \end{array}$$

Bemerkung 1.27
Falls $m = n$, dann heisst die Matrix A quadratisch.

Bemerkung 1.28 (Rechnen mit Matrizen)
Sei ein Skalar (Zahl) $\alpha \in \mathbb{R}$, seien die Matrizen A,$B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$, dann gilt

- *Addition:* $(A \pm B)_{ij} = (A)_{ij} \pm (B)_{ij}$

- ***Matrixmultiplikation:*** $(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (C)_{kj}$
  Die resultierende Matrix AC ist eine $m \times p$ Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} (AC)_{ij} = a_{i1}c_{1j} + \cdots + a_{in}c_{nj} \\ \\ \end{pmatrix}$$

- ***Erinnerung:*** *Skalarprodukt (Dotproduct)*

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad a \cdot b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Beispiel 1.29
Berechne AB mit den gegebenen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung*:*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + -3 \cdot 1 + 5 \cdot -2 & 2 \cdot 5 + -3 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + -2 \cdot 2 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1.30
Es gelten für die Matrixmultiplikation die gängigen Rechenregeln (Assoziativität, Distributivität). AUSSER ~~Kommutativität~~ ***!!!*** *$(AB \neq BA)$!!!!!*

Definition 1.31
Sei A einen relle *$m \times n$ - Matrix. Die $n \times m$ - Matrix A^T mit $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ heisst die zu A* **transponierte** *Matrix.*

Definition 1.32
Sei A eine komplexe *$m \times n$ - Matrix. Die $n \times m$ - Matrix A^H mit $A^H = (\overline{A})^T = \overline{A^T}$ heisst die zu A* **hermitesch** *oder* konjugiert-transponierte *Matrix.*

Bemerkung 1.33 (Eigenschaft von transponiert bzw. hermitesch)
Sei $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann gilt
$(AB)^H = B^H A^H$ *(bzw. $(AB)^T = B^T A^T$).*

Beispiel 1.34
Berechne A^H der gegebenen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & -5 \\ i & 15-7i \\ 0 & 0.5i \end{pmatrix}$$

Lösung*:*

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & -5 \\ i & 15-7i \\ 0 & 0.5i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^H = \begin{pmatrix} 3-2i & -i & 0 \\ -5 & 15+7i & -0.5i \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1.35
Wenn die untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{E}^{n\times n}$ gleich Null ist, dann handelt es sich um eine nilpotente Matrix.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad L^k = \mathbf{0} \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 1.36

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad A^3 = \mathbf{0}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad B^2 = \mathbf{0}$$

Definition 1.37 (Hermitesch)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist A hermitesch genau dann, wenn folgendes gilt:

$$A^H = A \quad \Leftrightarrow \quad (A^H)_{ij} = (A)_{ij} \;\; \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Beispiel 1.38
Welche der folgenden Matrix ist hermitesch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3i & 1-5i \\ 2+i & 4 & -6+2i \\ -3-2i & 4+3i & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2-5i & -8-i & 4+3i \\ 2+5i & 3 & 6+2i & 1+13i \\ -8+i & 6-2i & 7 & -3-2i \\ 4-3i & 1-13i & -3+2i & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung*:*

$$B^H = B$$

1.4 Skalarprodukt

Definition 1.39
Ein **Skalarprodukt** *ist eine Abbildung* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{v_k} w_k$ *so dass:* $\forall u, v, w \in \mathbb{E}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:

(i) $\langle v, u + \lambda w \rangle = \langle v, u \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$ *(linear im zweiten Faktor)*

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ *(symmetrisch bzw. hermitesch)*

(iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ *und* $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(positiv semidefinit)*

(iv) $\langle v + \lambda w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \overline{\lambda} \langle w, u \rangle$ *(bilinear bzw. sesquilinear)*

Definition 1.40
Die Länge oder euklidische Norm *eines Vektors* $x \in \mathbb{E}^n$ *ist die nichtnegative reelle Zahl* $\|x\|$ *definiert durch*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^H x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

Bemerkung 1.41
Seien $x, y \in \mathbb{E}^n, \alpha \in \mathbb{E}$, *dann gilt:*

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos(\alpha).$$

Bemerkung 1.42
Beim Standardskarprodukt gilt das folgende: $\quad \langle x, y \rangle = x^H y \;\; \forall x, y \in \mathbb{E}^n$.

Definition 1.43
Eine Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ *heisst* symmetrisch, *falls gilt:* $\quad A = A^H$.

Beispiel 1.44 (zum Skalarprodukt)
Sei $V := \mathbb{R}^2$ *und betrachte die Abbildung*

$$\begin{aligned} &V \times V \to \mathbb{R} \\ &(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle := v^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} w \end{aligned}$$

Zeige oder widerlege das $\langle v, w \rangle$ *ein Skalarprodukt ist.*

Lösung*:*

Beweis*:*

Bilinearität:
- *Linearität im zweiten Argument: Seien $v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt wegen der Linearität von Matrix-Multiplikationen*

$$\begin{aligned}\langle w, \lambda v_1 + v_2 \rangle &= w^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} (\lambda v_1 + v_2) \\ &= w^T \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \lambda v_1 + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v_2 \right) \\ &= \lambda w^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v_1 + w^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v_2 \\ &= \lambda \langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle.\end{aligned}$$

  Also ist die Abbildung linear im zweiten Argument.
- *Die Sesquilinearität im ersten Argument beweist man analog.*

Symmetrie: *Sei $v, w \in V$. Da $\langle v, w \rangle$ eine reelle Zahl ist und reelle Zahlen durch Transponierung nicht verändert werden, gilt*

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle v, w \rangle^T \\ &= w^T \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v \\ &= \langle w, v \rangle.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die mittlere Matrix gleich ihrer Transponierten ist, und dass für Matrizen A, B, C von entsprechender Grösse gilt $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Positive Definitheit: *Sei $x := (x_1, x_2)^T \in V$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= 3x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2.\end{aligned}$$

Da alle Summanden nicht-negativ sind, ist deren Summe auch nicht-negativ. Somit ist positive Semidefinitheit gezeigt. Desweiteren ist der Ausdruck genau dann Null, wenn jeder einzelne Summand verschwindet. Das ergibt die Bedingungen

$$x_1 = x_2, \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 0,$$

welche ausschliesslich für den Nullvektor allesamt erfüllt sind. Somit ist die Abbildung sogar positiv definit.

$\square$

1.5 Orthogonale und uniäre Matirzen

Definition 1.45

- *Eine komplexe $n \times n$ - Matrix A heisst* **unitär**, *falls $A^H A = AA^H = \mathbb{1}$.*
- *Eine reelle $n \times n$ - Matrix A heisst* **orthogonal**, *falls $A^T A = AA^T = \mathbb{1}$.*

Satz 1.46
Sind $A, B \in \mathbb{E}^{n \times n}$ unitäre (bzw. orthogonale) Matrizen, so gilt:

(i) *A ist regulär*

(ii) *$A^{-1} = A^H$ (bzw. $A^{-1} = A^T$)*

(iii) *A^{-1} ist unitär (orthogonal)*

(iv) *AB ist unitär (orthogonal)*

Definition 1.47
Das Kronecker-Delta *ist definiert durch:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Definition 1.48 (Einheitsvektoren)

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.49

- $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$
- $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$

Definition 1.50 (Orthonormal)
Seien $a, b \in \mathbb{E}^n$. Die Vektoren a, b sind orthonormal, falls folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Vektoren sind normiert, also es gilt:

$$\|a\| = 1 \quad \textit{bzw.} \quad \|b\| = 1.$$

(ii) Die Vektoren sind orthogonal, also es gilt:

$$\langle a, b \rangle = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

Bemerkung 1.51
Für eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ mit der Form $A = (a_1|...|a_n)$ sind die Spaltenvektoren $a_1, ..., a_n$ paarweise orthonormal.

1.6 Cauchy-Schwarz

Definition 1.52
Cauchy-Schwarz *Ungleichung (C.S.):* $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$, *mit Gleichheit* $\Leftrightarrow$ v, w *linear abhängig,* $\forall u, v \in \mathbb{E}^n$.
Beweis:
Seien $u, v \in \mathbb{E}^n$ *beliebig, sei* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* $\mathbb{E}^n$.

(i) $\langle u, v\rangle = 0$*: (dieser Schritt wird in Wikipedia als trivial bezeichnet)*

- $u = \mathbf{0}$ *oder* $v = \mathbf{0}$ $\quad \Rightarrow \quad$ *es folgt die Gleichheit:* $\langle u, v\rangle = \|u\| \, \|v\| = 0$
- $u \neq \mathbf{0}, v \neq \mathbf{0}$ $\quad \Rightarrow$ *C.S. gilt, da* $\|u\| > 0, \|v\| > 0$

(ii) $\langle u, v\rangle \neq 0$:

Sei $u \neq \mathbf{0}, v \neq \mathbf{0}$.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ *gegeben mit* $\lambda = \frac{\overline{\langle v,u\rangle}}{\|v\|^2} = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle u - \lambda v, \langle u - \lambda v\rangle \\
&= \langle u, u - \lambda v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, u - \lambda v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \lambda\langle u, v, \rangle - \overline{\lambda}(\langle v, u\rangle + \lambda\langle v, v\rangle) \\
&= \langle u, u\rangle - \lambda\langle u, v, \rangle - \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \overline{\lambda}\lambda\langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \lambda\langle u, v, \rangle - \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + |\lambda|^2\langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\langle u, v\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}\langle v, u\rangle + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^4}\langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} - \frac{\langle v, u\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^4}\langle v, v\rangle \\
&= \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} - \frac{\langle v, u\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} - \frac{\langle v, u\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} \\
&= \|u\|^2 - \frac{\langle v, u\rangle^2}{\|v\|^2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\langle v, u\rangle^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle v, u\rangle^2 = \|v\|^2\,\|u\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle v, u\rangle| = \|v\|\,\|u\| \qquad \square$$

1.7 Invertierbare Matrizen

Definition 1.53
Eine Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ heisst **invertierbar**
$\Longleftrightarrow \exists! B \in \mathbb{E}^{n\times n}$*, so dass* $AB = BA = \mathbb{1}$.

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \widehat{=} \text{ Einheitsmatrix}$$

B heisst dann Inverse *von A und wird meistens mit* $B = A^{-1}$ *bezeichnet.*

Bemerkung 1.54 (Eigenschaften)
Sei $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$*, dann gilt:*

(i) *Falls* A^{-1} *existiert, dann ist* A^{-1} *eindeutig*

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iv) $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

(v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Definition 1.55
Eine Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ *heisst* symmetrisch/hermitesch*, falls gilt:* $\quad A = A^H$.

Bemerkung 1.56
Sei $A, B \in \mathbb{E}^{n\times n}$*, dann gilt*
$(AB)^H = B^H A^H$ *(bzw.* $(AB)^T = B^T A^T$*).*

Satz 1.57
Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$*, dann gilt:*

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar} &\Longleftrightarrow A \text{ ist regulär} \\ &\Longleftrightarrow \forall b \in \mathbb{E}^n,\ LGS\ Ax = b : \quad \exists! x \in \mathbb{E}^n \text{ s.d. } \quad x = A^{-1}b \\ &\Longleftrightarrow Rang(A) = n \quad (\text{"A hat vollen Rang"}) \end{aligned}$$

Definition 1.58
Ist m eine beliebige natürliche Zahl, $1 \leq i, j \leq m$ *mit* $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{E}$ *und* $A \in \mathbb{E}^{m\times m}$*,*
so nennt man die Matrizen $P_{ij}, S_i(\lambda), E_{ij}(\lambda) \in \mathbb{E}^{m\times m}$ Elementarmatrizen.

(i) *Zeile i mit Zeile j vertauschen, multipliziere von links die* Permutationsmatrix $P_{ij}A$:

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} &&& \textit{i-te Spalte} &&&& \textit{j-te Spalte} &&& \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \textit{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \textit{j-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Bemerkung: *Für Permutationsmatrizen gilt:* $P_{ij}^T = P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

(ii) *Zeile i mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren, multipliziere von links $S_i(\lambda)A$:*

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} &&& \textit{i-te Spalte} &&& \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \textit{i-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(iii) *Zeile i durch (Zeile $i + \lambda\cdot$ Zeile j) erstetzten, multipliziere von links $E_{ij}(\lambda)A$:*

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccccccccc} &&& i\text{-te Spalte} &&&& j\text{-te Spalte} &&& \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 1 &&&& \lambda &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

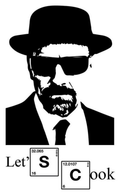
Bemerkung 1.59
Oben haben wir gesehen wie man Zeilenumformungen mit Links-Multiplikation von Elementarmatrizen macht. Wenn wir nun $P_{ij}, S_i(\lambda), E_{ij}(\lambda) \in \mathbb{E}^{m\times m}$ von rechts multiplizieren, z.B. AP_{ij}, dann erhalten wir Spaltenumformungen.

Beispiel 1.60
Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 10 \\ -3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ -9 & 5 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Vertausche die zweite mit der vierten Zeile:

$$P_{24}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 10 \\ -3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ -9 & 5 & -3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 10 \\ -9 & 5 & -3 & 15 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ -3 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Kochrezept 1.61 (Berechnung der Inverse)
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
Gesucht: A^{-1}

1. *Schreibe das Schema* $(A|\mathbb{1})$
2. *Forme* A *mit Hilfe von Gauss-Elimination in die Einheitsmatrix um* $(A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (\mathbb{1}|A^{-1})$
3. *Teste* $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$

Bemerkung 1.62
Sei $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ *eine Diagonalmatrix, dann gilt:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.63
Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Gesucht: A^{-1}

Lösung*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{1}{1}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{6}{1}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(i)-\frac{2}{1/3}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{(ii)\cdot 3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kapitel 2

LR-Zerlegung

2.1 LR-Zerlegung (engl. LU decomposition)

Idee.
Bei grossen Gleichungssystemen $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ und $b, x \in \mathbb{E}^n$ ist die Lösung x meist nicht einfach zu finden. Daher wollen wir A gerne in eine einfachere Form von Dreiecksmatrizen zerlegen, d.h.
Wir suchen Matrizen $P, L, R \in \mathbb{E}^{n \times n}$ so dass $PA = LR$,

$$\begin{aligned} P &\mathrel{\widehat{=}} \textit{ist eine } \text{Permutationsmatrix } \textit{(enthält nur } 1 \textit{ und } 0\textit{)} \\ L &\mathrel{\widehat{=}} \textit{ist eine } \text{linke Dreiecksmatrix } \textit{(engl. lower triangular matrix)} \\ R \textit{ (engl. U)} &\mathrel{\widehat{=}} \textit{ist eine } \text{rechte Dreiecksmatrix } \textit{(engl. upper triangular matrix)} \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.1
Seien $A, P, L, R \in \mathbb{E}^{n \times n}$. P speichert die Zeilenvertauschungen, die man für die Pivotisierung braucht, L speichert die Umformungsschritte, um A in Zeilenstufenform zu verwandeln, R ist die Zeilenstufenform von A.

Bemerkung 2.2
Seien $A, P, L, R \in \mathbb{E}^{n \times n}$ und $b, c, x \in \mathbb{E}^n$. Das anfängliche System $Ax = b$ lässt sich nun einfacher lösen:

1. *Löse $Lc = Pb$ nach c durch* Vorwärtseinsetzen*, d.h. $(L|Pb)$ von oben nach unten "Gaussen".*

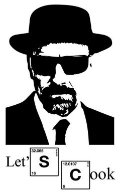
2. *Löse $Rx = c$ nach x durch* Rückwärtseinsetzen*, d.h. $(R|c)$ von untern nach oben "Gaussen".*

Bemerkung 2.3
Dass die Beziehung aus der obigen Bemerkung für $A, P, P^{-1}, L, R \in \mathbb{E}^{n \times n}$ die richtige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n$ liefert, sieht man auch daraus, dass

$$A\boldsymbol{x} = P^{-1}PA\boldsymbol{x} = P^{-1}LR\boldsymbol{x} = P^{-1}L\boldsymbol{c} = P^{-1}P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Satz 2.4
Für eine reguläre, quadratische Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ existiert eine LR-Zerlegung, d.h.

$$\exists P, L, R \in \mathbb{E}^{n \times n} : \quad PA = LR.$$



Kochrezept 2.5 (LR-Zerlegung light)
(d.h. ohne *Pivotisierung):*
Annahme: keine Zeilenvertauschungen nötig und A hat keine Nullspalte
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$
Gesucht: $L \in \mathbb{E}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ so dass gilt: $A = LR$

1. *Schreibe das Schema $(A|\mathbb{1})$*
2. *Forme A mit Hilfe von Gauss-Elimination (OHNE Zeilenvertauschungen!) um bis ihr die Zeilenstufenform erreicht habt. Dies tut ihr alles nur auf der linken Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix.*
3. *Auf der rechten Seite schreibt ihr die Verhältnisse auf:*

$$l_{ij} := \frac{a_{i1}}{a_{jj}}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Schritte sehen wie folgt aus:

$$(A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (R|L)$$

mit mehr Details:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} - l_{21}a_{11} & a_{22} - l_{21}a_{12} & a_{23} - l_{21}a_{13} & l_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} - l_{31}a_{11} & a_{32} - l_{31}a_{12} & a_{33} - l_{31}a_{13} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \cdots \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{a_{33}} & l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ 0 & 0 & \widehat{a_{33}} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ 0 & 0 & \widehat{a_{33}} \end{pmatrix} = LR$$

Beispiel 2.6
Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 129 \\ 109 \end{pmatrix}$$

(i) Gesucht: $L, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}: \quad A = LR$.

Lösung*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(iii)-l_{32}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = LR.$$

(ii) Gesucht: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Lösung:
Wir gehen vor, wie in der Bemerkung ganz oben auf Seite 4 vorgeschlagen:

1. *Löse $L\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 3 & 1 & 0 & 129 \\ 2 & 1 & 1 & 109 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{3}{1}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 1 & 1 & 109 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{2}{1}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 39 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-\frac{1}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 35 \\ 24 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2. *Löse $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 35 \\ 0 & 2 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{2}{3}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 35 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(i)-\frac{4}{3}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{2}{2}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(ii)\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{(iii)\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Kochrezept 2.7 (LR-Zerlegung full)
(d.h. mit *Pivotisierung):*
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$
Gesucht: $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{E}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{E}^{n\times n}$ *so dass gilt:* $PA = LR$

1. *Schreibe das Schema* $(\mathbb{1}|A|\mathbb{1})$. *Links merkt ihr euch die Zeilenvertauschungen, in der Mitte 'Gausst" ihr und rechts merkt ihr euch die Verhältnisse.*

2. *Pivotisiere in der aktuellen Spalte* j, *d.h. bestimme den Index* $i_p \in \{j, j+1, ..., n\}$ *mit* $|a_{i_p j}| = \max\limits_{i\in\{j,j+1,...,n\}} |a_{ij}|$. *Falls* $|a_{i_p j}| = 0$ *breche ab, es existiert keine LR-Zerlegung. Sonst berechne* $P_{ij}A = \widetilde{A}$ *in der Mitte, wobei* $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *von links an die Matrix links im Schema multipliziert wird und auf der rechten Seite müsst ihr entsprechend die Verhältnisse vertauschen (ausser im ersten Schritt).*

   - *Falls zu Beginn pivotisieren müsst, sieht das Resultat vom Schritt wie folgt aus:*
     $(\mathbb{1}|A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow (P_{ij}|\widetilde{A}|\mathbb{1})$

   - *Sonst, sieht das Resultat vom Schritt wie folgt aus:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{pivotisiere}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. *Forme A mit Hilfe von Gauss-Elimination (OHNE Zeilenvertauschungen!) um bis ihr die Zeilenstufenform erreicht habt. Dies tut ihr alles nur auf der linken Seite der erweiterten Koeffizientenmatrix.*
   Taucht bei der Berechnung wieder ein Nulleintrag auf in der Hauptdiagonale, dann müsst ihr wieder pivotisieren, also wiederholt den zweiten Schritt. Dann weiter "Gaussen".

4. *Auf der rechten Seite schreibt ihr die Verhältnisse auf:*

$$l_{ij} := \frac{a_{i1}}{a_{jj}}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Schritte sehen wie folgt aus:

$$(\mathbb{1}|A|\mathbb{1}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (P|R|L)$$

mit mehr Details:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{21}-l_{21}a_{11} & a_{22}-l_{21}a_{12} & a_{23}-l_{21}a_{13} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{31}-l_{31}a_{11} & a_{32}-l_{31}a_{12} & a_{33}-l_{31}a_{13} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{pivotisiere}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} & l_{31} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{a_{23}} & l_{21} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & 1 & 0 \\ l_{21} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \widetilde{a_{32}} & \widehat{a_{33}} \\ 0 & 0 & \widehat{a_{23}} \end{pmatrix} = LR$$

Beispiel 2.8
Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -86 \\ -29 \end{pmatrix}$$

(i) Gesucht: $L, P, R \in \mathbb{R}^{3\times 3}: \quad PA = LR$.

Lösung*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{pivotisiere{:}P_{21}} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(ii)-l_{21}\cdot(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{pivotisiere{:}P_{32}} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{(iii)-l_{32}\cdot(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -16 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -17 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = LR$$

(ii) Gesucht: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n: \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Lösung*:*

Wie gehen vor, wie in der Bemerkung ganz oben auf der Seite 4 vorgeschlagen:

1. *Löse $L\boldsymbol{c} = P\boldsymbol{b}$:*

$$P\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ -86 \\ -29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -86 \\ -29 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 1 & 40 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{-1/2}{1}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{(iii)-\frac{1/8}{1}\cdot(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -86 \\ -29 \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

2. *Löse $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -16 & -86 \\ 0 & 8 & -17 & -29 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{-17}{1/8}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -16 & -86 \\ 0 & 8 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(i)-\frac{-16}{1/8}\cdot(iii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)\cdot(-\frac{1}{6})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(ii)\cdot\frac{1}{8}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{array}\right) \overset{(iii)\cdot 8}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Kapitel 3

Grundvoraussetzung für die Vektorräume und linearen Abbildung

3.1 Vektorräume

Definition 3.1
Eine Menge $\mathbb{E}$ *zusammen mit zwei Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad (x, y) \mapsto x + y && \textit{(Addition)} \\ \cdot : \quad & \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y && \textit{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

heisst Körper, *wenn* $\forall x, y, z \in \mathbb{E}$ *folgendes gilt:*

K1 $\mathbb{E}$ *zusammen mit der Addition* $+$ *ist eine abelsche Gruppe.*
(Ihr neutrales Element wird mit 0*, das zu* $a \in \mathbb{E}$ *inverse Element mit* $-a$ *bezeichnet; vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra, Definition 5.7 und 5.8:* $\langle \mathbb{E}; + \rangle$ *is an abelian group):*

(i) *(Assoziativität)* $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$

(ii) *(Neutrales Element)* $\quad \exists e \in \mathbb{E} : \quad x + e = e + x = x$

(iii) *(Inverses Element)* $\quad \exists x' \in \mathbb{E} : \quad x + x' = x' + x = e$

(iv) *(Abelsch* $\Leftrightarrow$ *Kommutativität)* $\quad x + y = y + x$

K2 *Bezeichnet* $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{0\}$*, so gilt für* $x, y \in \mathbb{E}^*$ *auch* $x \cdot y \in \mathbb{E}^*$*, und* $\mathbb{E}^*$ *zusammen mit der so erhaltenen Multiplikation ist eine abelsche Gruppe.*
(Ihr neutrales Element wird mit 1*, das zu* $x \in \mathbb{E}*$ *inverse Element mit* x^{-1} *oder* $1/x$ *bezeichnet. Man schreibt* $y/x = x^{-1}y = yx^{-1}$*.*
Vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra, Definition 5.7 und 5.8: $\langle \mathbb{E}; \cdot \rangle$ *is an abelian group)*

(vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra: Definition 5.26 und Theorem 5.23)

Bemerkung 3.2
Meistens werden wir mit den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten. Ein weiterer Körper der für uns Informatiker bekannt ist, ist der kleinste endliche Körper $\mathbb{Z}_2$, der nur $\{0,1\}$ enthält.

Definition 3.3
Ein Vektorraum *V über $\mathbb{E}$ (oder auch $\mathbb{E}$-Vektorraum; VR) ist eine nichtleere Menge V zusammen mit zwei Operationen:*

$$+: \quad V \times V \to V, \quad (x,y) \mapsto x+y \qquad \text{(Addition)}$$
$$\cdot: \quad \mathbb{E} \times V \to V, \quad (\alpha,x) \mapsto \alpha y \qquad \text{(Skalarmultiplikation)}$$

so dass $\forall x,y,z \in V$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{E}$ gilt:

V1 *V zusammen mit der Addition ist eine abelsche (kommutative) Gruppe (das neutrale Element heisst Nullvektor, es wird mit* **0***, und das Negative wird mit $-x$ bezeichnet; vgl. Diskrete Mathematik, 5. Algebra: $\langle V; + \rangle$ is an abelian group):*

- **(i)** *(Assoziativität)* $(x+y)+z = x+(y+z)$
- **(ii)** *(Neutrales Element)* $\exists e \in V: \quad x+e = e+x = x$
- **(iii)** *(Inverses Element)* $\exists x' \in V: \quad x+x' = x'+x = e$
- **(iv)** *(Abelsch $\Leftrightarrow$ Kommutativität)* $x+y = y+x$

V2 *Die Multiplikation mit Skalaren muss in folgender Weise mit den anderen Verknüpfungen verträglich sein:*

- **(i)** *(Distributivität I)* $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
- **(ii)** *(Distributivität II)* $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$
- **(iii)** *(Assoziativität)* $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- **(iv)** *(Verträglichkeit mit 1)* $1x = x$

Beispiel 3.4

1. *n-dimensionale Vektoren bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.*
2. *$m \times n$-Matrizen bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.*
3. *$\mathcal{P}_n := \{$Polynome in einer Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{E}$ von max. Grad $n\}$ bilden über $\mathbb{E}$ einen Vektorraum.*

3.2 Basen, Dimensionen und lineare (Un-)Abhänigkeit

Bemerkung 3.5
Für diesen Abschnitt werden wir folgendes annehmen. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und eine Familie *(Menge) $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$. Ist $I = \{1,...,r\}$, so hat man Vektoren $v_1,...,v_r$.*

Definition 3.6
Für allgemeines I definiert man

$$span_{\mathbb{E}}(v_i)_{i\in I}$$

als die Menge all der $v \in V$ die sich aus einer (von v abhängigen) endlichen Teilfamilie (Teilmenge) von $(v_i)_{i\in I}$ linear kombinieren lassen.
Man nennt $span_{\mathbb{E}}(v_i)_{i\in I}$ den von der Familie (Menge) aufgespannten *(oder* erzeugten*) Raum. Für eine endliche Familie $(v_1, ..., v_r)$ verwendet man oft die suggestivere Notation:*

$$\begin{aligned} span_{\mathbb{E}}(v_1, ..., v_r) &:= \mathbb{E}v_1 + ... + \mathbb{E}v_n \\ &= \{v \in V \quad | \quad \exists \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{E} \text{ mit } v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.7
Die folgenden Notationen sind äquivalent: $span_{\mathbb{E}}(v_1, ..., v_r) \Leftrightarrow span_{\mathbb{E}}\{v_1, ..., v_r\} \Leftrightarrow \langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Bemerkung 3.8
Die Vektoren $v_1, ..., v_r$ in der Defintion von $span_{\mathbb{E}}(v_1, ..., v_r)$ oben heissen Erzeugendensystem *von V, wenn $\forall a \in V$ als Linearkombination der Vektoren $v_1, ..., v_r$ dargestellt werden kann.*

Bemerkung 3.9
Falls klar ist, welcher Körper gemeint ist, schreibt man nur span statt $span_{\mathbb{E}}$.

Bemerkung 3.10
Sei V ein $\mathbb{E}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie (Menge) von Elementen aus V mit $I = \{1, ..., r\}$. Dann gilt:

(i) *$span(v_1, ..., v_r)$ ist ein Untervektorraum*

(ii) *Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum und gilt $v_i \in W$ für alle $i \in \{1, ..., r\}$ so ist $span(v_1, ..., v_r) \subset W$.*

Beispiel 3.11

- $span(1, x, x^2, x^3) = \mathcal{P}_3$
- $span(x^3 + x^2, x^2 - 1, x, x - 1, 1000) = \mathcal{P}_3$

$\Rightarrow$ ein Erzeugendensystem ist nicht eindeutig.

3.3 Lineare Abbildungen

Definition 3.12
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst injektiv*, falls*

$$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(In Worten: Verschiedene Elemente aus X werden auf verschiedene Bilder in Y abgebildet.)

Definition 3.13
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst surjektiv, *falls*

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f "getroffen".)

Definition 3.14
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst bijektiv, *falls*

$$\forall y \in Y \, \exists ! x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f genau einmal *"getroffen".)*

Definition 3.15
Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen $\mathbb{E}$-Vektorräumen V und W heisst linear *(genauer* Homomorphismus *von $\mathbb{E}$-Vektorräumen), wenn $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{E}$:*

L1 $F(v + w) = F(v) + F(w)$

L2 $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

Diese beiden Bedingungen kann man zusammenfassen zu einer:

L $F(v + \lambda w) = F(v) + \lambda F(w)$.

Notation.
Für $F : V \to W$ linear ist $F \in Hom(V, W)$.

Bemerkung 3.16
Es ist üblich, den Begriff Homomorphismus zu verschärfen:

(i) $F \in Hom(V, W)$ *und bijektiv* $\Leftrightarrow$ Isomorphismus *(Notation: $V \cong W$)*

(ii) $F \in Hom(V, W)$ *und* $V = W$ $\Leftrightarrow$ Endomorphismus *(Notation: $F \in End(V)$)*

(iii) $F \in End(V)$ *und bijektiv* $\Leftrightarrow$ Automorphismus

Zudem gilt: (i) $\Leftrightarrow \exists G : W \to V$ linear, so dass $F \circ G = id_W$, $G \circ F = id_V$, d.h.

$$\begin{aligned} \forall w \in W : \quad & F(G(w)) = w \\ \forall v \in V : \quad & G(F(v)) = v \end{aligned}$$

Definition 3.17
Zu jeder Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ von V gibt es genau einen Isomorphismus:

$$\phi_B : \mathbb{E}^n \to V, (x_1, ..., x_n) \mapsto \phi_B(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \ mit \phi_B(e_i) = v_i.$$

(In Worten: ϕ_B ordnet x seinen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ zu.)

Kapitel 4

Vektorräume und lineare Abbildungen

4.1 Untervektorräume

Definition 4.1
Sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$, $U \neq \{\}$. U heisst Untervektorraum, *Unterraum, linearer Teilraum (UVR), falls sie bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist, d.h. wenn $\forall x, y \in U$ und $\forall \alpha \in \mathbb{E}$ gilt:*

U1 $x + y \in U$

U2 $\alpha x \in U$.

Bemerkung 4.2
Jeder Untervektorraum U enthählt den Nullvektor, d.h.

U0 $\mathbf{0} \in U$.

Satz 4.3
Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum.

Beispiel 4.4
Zu zeigen: $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ *ist ein Vektorraum.*

Bemerkung
Wir haben zwei Optionen:

1. *Überprüfe ob V1 und V2 von der Vektorraum Definition erfüllt sind*
2. *Verwende den Satz von oben und zeige nur U1 und U2*

Beweis:
Wir führen den Beweis mit der zweiten Option durch. Also genügt es nach dem Satz zu zeigen, dass W ein Untervektorraum ist.

Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W, \lambda \in \mathbb{E}$

U0 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, *da* $0+0+0=0$, *(U0 folgt trivialerweise)*

U1 $x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \in W$,
da $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0} + \underbrace{(y_1+y_2+y_3)}_{y_1+y_2+y_3=0} =$
0

U2 $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in W$, *da* $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0} = 0$

Oder statt, dass ihr U1 und U2 separat zeigt könnt ihr auch die 'all in one"Variante zeigen:

U1/U2 $x - \lambda y = \begin{pmatrix} x_1-\lambda y_1 \\ x_2-\lambda y_2 \\ x_3-\lambda y_3 \end{pmatrix} \in W$,
da $(x_1-\lambda y_1)+(x_2-\lambda y_2)+(x_3-\lambda y_3) = \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{x_1+x_2+x_3=0} - \lambda \underbrace{(y_1+y_2+y_3)}_{y_1+y_2+y_3=0} =$
0 $\square$

4.2 Basen, Dimensionen und lineare (Un-)Abhänigkeit

Bemerkung 4.5
Für diesen Abschnitt werden wir folgendes annehmen. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und eine Familie *(Menge) $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren $v_i \in V$. Ist $I = \{1,...,r\}$, so hat man Vektoren $v_1,...,v_r$.*

Definition 4.6
Seien $v_1,...,v_r \in V$ ausgewählte Vektoren. Ein Vektor der Form

$$x := \lambda_1 v_1, ..., \lambda_r v_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k$$

mit $\lambda_1,...,\lambda_r \in \mathbb{E}$ heisst Linearkombination *von $v_1,...,v_r$.*

Definition 4.7
$v_1,...,v_r \in V$ heissen linear unabhängig, *wenn:*

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

und sonst heissen sie linear abhängig.

Bemerkung 4.8
$v_1, ..., v_r \in V$ heissen linear unabhängig genau dann, wenn kein v_i sich als Linearkombination der anderen a_j mit $j \neq i$ schreiben lässt. (z.B. v_1 ist keine Linearkombination von $v_2, ..., v_r$).

Beispiel 4.9

- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ *ist linear abhängig von* $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, *weil* $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ *ist linear unabhängig von* $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.
  Bei komponentenweiser Multiplikation bekommt man in der ersten Koordinate niemals 0, *wenn man* 2 *und* 3 *behalten will.*

Definition 4.10
Sei $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I} \subseteq V$. $\mathcal{B}$ heisst Basis *von V, wenn*

$$V = span(\mathcal{B}) \quad (V \text{ wird erzeugt von } \mathcal{B})$$
$$\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I} \quad (\text{alle } b_i \text{ sind untereinander linear unabhängig}).$$

Satz 4.11
$\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h.

$$span(\mathcal{B}) = V, \text{ aber } span(\mathcal{B} \setminus \{b_i\}) \neq V, \quad \forall b_i \in \mathcal{B}.$$

Satz 4.12
$\mathcal{B}$ ist ein maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. $(b_i)_{i\in I}$ sind linear unabhängig aber $(b_i)_{i\in I} \cup \{v\}$ sind nicht mehr linear unabhängig, $\forall v \in V \setminus \mathcal{B}$.

Bemerkung 4.13
Sind $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basen von V, so gilt $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Definition 4.14
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann ist $|\mathcal{B}| = dim(V)$ (= # Basisvektoren) die Dimension von V, wobei $|\cdot| \mathrel{\widehat{=}}$ Kardinalität von einer Menge ist.

Bemerkung 4.15
Falls $dim(V) = n$, dann gilt allgemein:

- *Falls $k < n$, sind $v_1, ..., v_k \in V$* nicht erzeugend
- *Falls $k > n$, sind $v_1, ..., v_k \in V$* linear abhängig

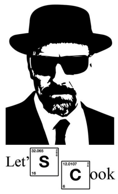
Satz 4.16 (Basisauswahlsatz)
Aus jedem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraumes kann man eine Basis auswählen. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine endliche Basis.

Satz 4.17 (Basisergänzungssatz)
In einem endlich erzeugten Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren $w_1, ..., w_n$ *gegeben. Dann kann man* $w_n + 1, ..., w_r$ *finden so dass*

$$\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n, w_n + 1, ..., w_r\}$$

eine Basis von V ist.

Beispiel 4.18
- $dim(\mathbb{R}^n) = n = dim(\mathbb{C}^n)$
- $dim(\mathcal{P}_n) = n + 1 \quad (\mathcal{B}(\mathcal{P}_n) = \{\underbrace{1, x, x^2, ..., x^n}_{n+1 \text{ Basisvektoren}}\})$
- $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ *(Basis von* $\mathbb{C}$ *über dem Körper* $\mathbb{R}$ *ist z.B.* $\{1, i\}$*)*
- $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ *(Basis von* $\mathbb{C}$ *über dem Körper* $\mathbb{C}$ *ist z.B.* $\{1\}$*)*



Kochrezept 4.19 (Tricks beim Rechnen)
(bei Fragen betreffend Dimension, Basis, lineare Abhängigkeit, etc.)
Gegeben: $v_1, ..., v_k \in V$
Gesucht: $dim(V)$, $span(v_1, ..., v_k)$ *linear unabhängig?*

1. *Schreibe* $\begin{pmatrix} v_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline v_k^T \end{pmatrix} = A$ *in eine Matrix mit n Zeilen.*
2. *Führe Gauss-Elimination auf A aus bis ihr die Zeilenstufenform erreicht habt.*
3. *Ziehe Fazit:*
   - $Rang(A) = dim(span(v_1, ..., v_k))$
   - $Rang(A) = k \quad \Rightarrow \quad v_1, ..., v_k$ *ist linear unabhängig*
   - $Rang(A) < k \quad \Rightarrow \quad v_1, ..., v_k$ *ist linear abhängig*
   - $Rang(A) = dim(V) \quad \Rightarrow \quad v_1, ..., v_k$ *ist erzeugend*
   - *Falls* $Rang(A) = dim(V) = k$, *dann bilden* $v_1, ..., v_k$ *also eine Basis für* $\mathbb{R}^n$

Beispiel 4.20
Zu zeigen: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *bilden eine Basis in* $\mathbb{R}^3$.

Beweis:
Wissen $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, *und wir haben* 3 *Vektoren.*
Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{32}(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow \quad Rang(A) = 3$ *voller Rang*
$\Rightarrow$ *Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von* $\mathbb{R}^3$. $\square$

Beispiel 4.21
Ist $\mathcal{B} = \{1, x, 1 + x^2 + x^3\}$ *eine Basis von* $\mathcal{P}_3$?
Wenn ja beweise, wenn nein, erweitere zu einer Basis.

Wissen: $dim(\mathcal{P}_3) = 4$
$\mathcal{B}$ *kann keine sein, weil* $dim(\mathcal{B}) = 3 < 4$.

Behauptung: $\mathcal{B}' = \{1, x, 1 + x^2 + x^3, x^2\}$ *ist eine Basis von* $\mathcal{P}_3$.
Beweis:

$$\begin{aligned} 1 &\mathrel{\widehat{=}} e_1 \\ x &\mathrel{\widehat{=}} e_2 \\ x^2 &\mathrel{\widehat{=}} e_3 \\ x^3 &\mathrel{\widehat{=}} e_4 \\ 1 + x^2 + x^3 &\mathrel{\widehat{=}} e_1 + e_3 + e_4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ *linear unabhänging, also ist* $\mathcal{B}'$ *eine Basis von* $\mathcal{P}_3$ $\square$

4.3 Lineare Abbildungen

Definition 4.22
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst injektiv, *falls*

$$\forall x_1, x_2 \in X : \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

(In Worten: Verschiedene Elemente aus X werden auf verschiedene Bilder in Y abgebildet.)

Definition 4.23
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst surjektiv, *falls*

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f "getroffen".)

Definition 4.24
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst bijektiv, *falls*

$$\forall y \in Y \, \exists ! x \in X : \quad f(x) = y.$$

(In Worten: Jedes Element aus Y wird von f genau einmal *"getroffen".)*

Bemerkung 4.25
Seien $M(F)$, $M(G)$ die darstellenden Matrizen von $F : V \to W$ isomorph und $G : W \to V$ homomorph und V, W sind endlichdimensionale Vektorräume, d.h. $dim(V) < \infty$ und $dim(W) < \infty$. Dann bedeutet Bijektivität von F, dass

- $dim(V) = dim(W)$
- $M(F) \cdot M(G) = M(G) \cdot M(F) = \mathbb{1}_{dim(V)} \Leftrightarrow M(F) = (M(G))^{-1}$

Definition 4.26
Sei die $F \in Hom(V, W)$.

- *$Im(F) := F(V) = \{F(v) | v \in V\} \subset W$ ist ein Untervektorraum von W und heisst $Bild(F)$ oder $\boldsymbol{Im(F)}$.*
- *$ker(F) := \{v \in V | F(v) = 0\} \subset V$ ist ein Untervektorraum von V und heisst $\boldsymbol{ker(F)}$.*

Satz 4.27
Sei $F : V \to W$ linear und V, W sind Vektorräume. Dann gilt:

(i) *$F(0) = 0$, die Null wird immer auf die Null abgebildet*

(ii) *F surjektiv $\Leftrightarrow Im(F) = W \Leftrightarrow dim(Im(F)) = dim(W)$*

(iii) *F injektiv $\Leftrightarrow ker(F) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow dim(ker(F)) = 0$*

(iv) *F ist ein Isomorphismus $\quad \Leftrightarrow \quad dim(V) = dim(W) = rang(F)$*

Definition 4.28
Der Rang der linearen Abbildung F ist definiert als:

$$rang(F) = dim(Im(F)).$$

Bemerkung 4.29
Der Rang der linearen Abbildung F ist gleich dem Rang ihrer Abbildungsmatrix $M(F)$. Es gilt: $rang(F) = dim(Im(F)) = rang(M(F)) = rang(M(F)^T)$

Bemerkung 4.30
Zeilenrang = Spaltenrang: $rang(M(F)) = rang(M(F)^T)$
Achtung*: Im Allgemeinen gilt:* *Spaltenraum* $\neq$ *Zeilenraum*

Beispiel 4.31
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5x - 1$.
F ist nicht linear, da $F(0) = -1 \neq 0$.

Satz 4.32
Sei $F : V \to W$ *linear. Dann gilt:* $f(0) = 0$.

Kochrezept 4.33 (Abbildungsmatrix)
(darstellende Matrix; Spezialfall mit Standardbasis)
Gegeben: V *ein Vektorraum,* $F : (V, \mathcal{A}) \to (W, \mathcal{B}), v \mapsto F(v)$ *und Basis von* V *mit* $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ *und die Standardbasis von* W *mit* $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_m\}$
Gesucht: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$

1. *Berechne für jeden Basisvektor* $F(a_i),\ i \in \{1, ..., n\}$
2. *Erstelle* $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \underbrace{(F(a_1), ..., F(a_n))}_{n\text{-Spalten}}\ \}\quad m\text{-Zeilen.}$

   Wir haben die Abbildungsmatrix von F *erhalten, wobei der Definitionsbereich bezüglich* $\mathcal{A}$ *und Bildbereich bezüglich* $\mathcal{B}$ *gegeben ist.*

Beispiel 4.34
Sei $F = \frac{d}{dt} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, p \mapsto \dot{p} = \frac{dp}{dt}$.

(i) *Zu zeigen:* F *ist eine lineare Abbildung.*
Beweis: $\forall a, b \in \mathcal{P}_2,\ \lambda \in \mathbb{E}:$

$$\begin{aligned} F(a + \lambda b) &= \frac{d}{dt}(a + \lambda b) \\ &= \frac{d}{dt}a + \lambda \frac{d}{dt}b \\ &= F(a) + \lambda F(b) \qquad \square \end{aligned}$$

(ii) *Finde die Abbildungsmatrix* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ *bezüglich der Monombasis* $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \in \mathcal{P}_2, \qquad p \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

$$\dot{p} = \lambda_1 + 2\lambda_2 t \in \mathcal{P}_1, \qquad \dot{p} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$$

$$\begin{aligned} 1 &\mathrel{\hat{=}} e_1 \\ t &\mathrel{\hat{=}} e_2 \\ t^2 &\mathrel{\hat{=}} e_3 \end{aligned}$$

$$\dot{p}(1) \mathrel{\hat{=}} \dot{p}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{p}(t) \mathrel{\hat{=}} \dot{p}(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{p}(t^2) \mathrel{\hat{=}} \dot{p}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.35
Gegeben: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 2y + 6z \end{pmatrix}$
Gesucht: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ *bezüglich* $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
($\mathcal{B}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$)

Lösung:

$$F(a_1) = F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ 1 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F(a_2) = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 1 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$F(a_3) = F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \\ 0 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Kochrezept 4.36 (Abbildungsmatrix (darstellende Matrix; Allgemein))
Gegeben: V ein Vektorraum, $F : (V, \mathcal{A}) \to (W, \mathcal{B}), v \mapsto F(v)$ *und Basis von V mit* $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ *und die Basis von W mit* $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_m\}$
Gesucht: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$

1. *Schreibe* $F(a_i)$, $i \in \{1, ..., n\}$ *in Koordinaten von der Basis* $\mathcal{B}$*, das heisst finde* $\mu_{ji} \in \mathbb{E}$, $j \in \{1, ..., m\}$*:*

$$F(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{ji} b_j$$

2. *Erstelle*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (F(a_1), ..., F(a_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir haben die Abbildungsmatrix von F erhalten, wobei der Definitionsbereich bezüglich $\mathcal{A}$ und Bildbereich bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben ist.

Beispiel 4.37
Gegeben: $G : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1,\ p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mapsto 2p'(x) + 1 = (2\alpha_1 + 1) + 4\alpha_2 x$
Gesucht: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G)$ *bezüglich* $\mathcal{A} = \{x^2 + x + 1, x + 1, x\}$ *und* $\mathcal{B} = \{x + 1, 1\}$

Lösung*:*
Zuerst stellen wir die Abbildung und Basen bezüglich der Monombasis dar:

$$G : \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 1 \\ 4\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \mathrel{\widehat{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} \mathrel{\widehat{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$G(a_1) = G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_e} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = 4 \cdot b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$G(a_2) = G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_e} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = 0 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$G(a_3) = G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_e} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_e} = 0 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Longrightarrow \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.38
Ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ ist durch die Funktionswerte $p(x_i)$ an $n+1$ paarweise verschiedenen Punkten $x_i \in \{1, ..., n\}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4.39
Seien V, U, W $\mathbb{E}$-Vektorräume mit $dim(V) = n$, $dim(U) = k$ und $dim(W) = \ell$, dann ist die Dimensionsregel für Verknüpfungen von linearen Abbildungen:

$$M(f) \in \mathbb{R}^{\ell \times n},\ M(g) \in \mathbb{R}^{k \times \ell} \quad \Rightarrow \quad M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) \in ("\mathbb{R}^{k \times \ell} \cdot \mathbb{R}^{\ell \times n}") = \mathbb{R}^{k \times n}$$

Satz 4.40
Seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume eines grösseren Vektorraums (endlichdimensional $\Leftrightarrow$ $dim(V) = n < \infty$ und $dim(W) = k < \infty$) und sei $f : V \to W$ linear, dann gelten die folgenden **Dimensionsformeln***:*

- $dim(V + W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W)$
- $n = dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$

Bemerkung 4.41 (Eigenschaften von linearen Abbildungen)
Seien V, W $\mathbb{E}$-Vektorräume und $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V. Sei $F : V \to W$ linear.

- *$Im(F) = span(F(v_1), ..., F(v_n))$, d.h. F ist eindeutig definiert durch die Werte der Basisvektoren*
- *Ist F injektiv und $v_1, ..., v_n \in V$ linear unabhängig, dann sind $F(v_1), ..., F(v_n) \in Im(F)$ linear unabhängig*
- *$dim(F) < \infty$ und F injektiv $\quad \Rightarrow \quad$ F ist bijektiv!*

Kapitel 5

Grundvorraussetzung für die Methode der kleinsten Quadrate

5.1 Normen von linearen Abbildungen (Operatoren) und Matrizen, Konditionszahl

Definition 5.1 (Norm)
$\forall x, y \in \mathbb{E}^n, \forall \lambda \in \mathbb{E}$

(i) *Definitheit:* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

(ii) *absolute Homogenität:* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(iii) *Dreiecksungleichung:* $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Satz 5.2 (Skript: Satz 6.18)
Die durch $\|F\| := \sup_{x \neq o} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}$ *definierte induzierte Operatornorm hat die folgenden Eigenschaften:*

(OpN1) *Sie ist* positiv definit*:*

$$\begin{aligned} &\|F\| \geq 0 \quad (\forall F \in \mathcal{L}(X, Y)), \\ &\|F\| = 0 \quad \Rightarrow \quad F = O. \end{aligned}$$

(OpN2) *Sie ist* dem Betrage nach homogen*:*

$$\|\alpha F\| = |\alpha| \|F\| \quad (\forall F \in \mathcal{L}(X, Y), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{E}).$$

(OpN3) *Die* Dreiecksungleichung *gilt:*

$$\|F + G\| \leq \|F\| + \|G\| \quad (\forall F, G \in \mathcal{L}(X, Y)).$$

(OpN4) *Für zusammengesetzte Abbildungen gilt:*

$$\|G \circ F\| \leq \|G\|\|F\| \quad (\forall F \in \mathcal{L}(X,Y),\ \ \forall G \in \mathcal{L}(Y,Z)).$$

(OpN5) WICHTIG! *Sie ist* kompatibel mit den Vektornormen *in X, Y:*

$$\|Fx\|_Y \leq \|F\|\|x\|_X \quad (\forall \in \mathcal{L}(X,Y),\ \ \forall x \in X).$$

Beweis zu Satz 5.2

(OpN1): *Aus der Definition $\|F\| := \sup_{x \neq o} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}$ ist klar, dass $\|F\| \geq 0$ gilt und dass $\|F\| = 0$ bedeutet, dass $F(x) = o$ für alle x, also F die Nullabbildung O ist.*

(OpN2): *Unter Verwendung der zweiten Eigenschaft der Vektornorm (absolute Homogenität) in Y folgt, dass*

$$\begin{aligned} \|\alpha F\| &\overset{(i)}{=} \sup_{\|x\|_X=1} \|\alpha F(x)\|_Y \\ &\overset{(ii)}{=} \sup_{\|x\|_X=1} (|\alpha|\|F(x)\|_Y) \\ &\overset{(iii)}{=} |\alpha| \sup_{\|x\|_X=1} \|F(x)\|_Y \\ &\overset{(i)}{=} |\alpha|\|F\|. \end{aligned}$$

Erklärungen zu den Schritten oben:

(i) Definition der induzierten Operatornorm.

(ii) Zweite Eigenschaft der Vektornorm (absolute Homogenität) in Y.

(iii) Wir dürfen den Skalar hinausziehen, da die Gleichheit erhalten bleibt.

(OpN3): *Hier verwendet man unter anderem die dritte Eigenschafft der Vektornorm (die Dreiecksungleichung) aus Y:*

$$\begin{aligned} \|F + G\| &\overset{(i)}{=} \sup_{\|x\|_X=1} \|(F+G)(x)\|_Y \\ &\overset{(ii)}{=} \sup_{\|x\|_X=1} \|F(x) + G(x)\|_Y \\ &\overset{(iii)}{\leq} \sup_{\|x\|_X=1} (\|F(x)\| + \|G(x)\|_Y) \\ &\overset{(iv)}{=} \sup_{\|x\|_X=1} \|F(x)\| + \sup_{\|x\|_X=1} \|G(x)\|_Y \\ &\overset{(i)}{=} \|F\| + \|G\|. \end{aligned}$$

(i) *Definition der induzierten Operatornorm.*

(ii) *Distributivgesetz für lineare Abbildungen.*

(iii) *Dritte Eigenschafft der Vektornorm (die Dreiecksungleichung) aus Y.*

(iv) *Erste Eigenschaft aus dem Satz (Rechnen mit sup/inf)*

(OpN5): *Folgt sofort daraus, dass für ein festes $x = \widetilde{x}$ gilt*

$$\frac{\|F(\widetilde{x})\|_Y}{\|\widetilde{x}\|_X} \overset{(i)}{\leq} \sup_{x \neq o} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X} \overset{(ii)}{=} \|F\|.$$

(i) *Entweder wir erhalten die Gleichheit oder der Bruch links ist strikt kleiner als der von rechts. Die Gleichheit erhalten wir, falls $\widetilde{x}$ genau das Supremum ist. Strikt kleiner erhalten wir in allen anderen Fällen.*

(ii) *Definition der induzierten Operatornorm.*

(OpN4): *Wir wenden (OpN5) zunächst auf G, dann auf F an, umzu sehen, dass*

$$\begin{aligned}
\|G \circ F\| &\overset{(i)}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|(G \circ F)(x)\|_Z}{\|x\|_X} \\
&\overset{(ii)}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|G(F(x))\|_Z}{\|x\|_X} \\
&\overset{(iii)}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|G\| \|F(x)\|_Y}{\|x\|_X} \\
&\overset{(iii)}{\leq} \sup_{x \neq 0} \frac{\|G\| \|F\| \|x\|_X}{\|x\|_X} \\
&\overset{(iv)}{=} \sup_{x \neq 0} \|G\| \|F\| \\
&= \|G\| \|F\|.
\end{aligned}$$

(i) *Definition der induzierten Operatornorm.*

(ii) *Definition von der Komposition von Funktionen.*

(iii) *(OpN5)*

(iv) *Kürze $\|x\|_X$.*

□

Lemma 5.3 (Skript: Beispiel 6.13)
Die Matrixnorm ist kompatibel mit der 2-Norm (als Vektornorm im $\mathbb{E}^n$).

Beweis vom Lemma*:*

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &\overset{(i)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} x_\ell \right)^2 \\
&\overset{(ii)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \\
&\overset{(iii)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}^2 \\
&\overset{(iv)}{=} \|x\|_2^2 \|A\|_F^2
\end{aligned}$$

□

(i) Definition von der 2-Norm und Matrix-Vektor-Multiplikation

(ii) Cauchy-Schwartz Ungleichung

(iii) Die letzte Summe ist unabhängig von den Indizes k, ℓ.

(iv) Definition von der 2-Norm und der Frobenius-Norm

Definition 5.4
Die Maximumnorm *(auch l_∞ genannt) ist definiert durch:*

$$v \in V: \quad \|v\|_\infty := \max_i \{|v_i|\}.$$

Definition 5.5
Es seien X und Y zwei normierte Vektorräume mit den Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$. Eine lineare Abbildung (oder: ein linearer Operator) $F : X \to Y$ heisst beschränkt*, wenn es ein $\gamma_F \geq 0$ gibt mit*

$$\|F(x)\|_Y \leq \gamma_F \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Die Gesamtheit solcher linearer Abbildungen (Operatoren) F zwischen X und Y heisst $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definition 5.6

(i) Die auf $\mathcal{L}(X, Y)$ durch die Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ induzierte Operatornorm *ist definiert durch*

$$\begin{aligned}
\|\cdot\| : \mathcal{L}(X, Y) &\to \mathbb{R} \\
F &\mapsto \|F\| := \sup_{x \neq o} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}.
\end{aligned}$$

(ii) *Ist $X = Y = \mathbb{E}^n$, so dass F durch eine quadratische Matrix A gegeben ist, heiss $\|A\|$ die durch die Vektornorm (in $\mathbb{E}^n$)* induzierte Matrixnorm *von A:*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{E}^{n\times n} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \|A\| := \sup_{x\neq o} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

(iii) *Verwendet man in $\mathbb{E}^n$ die Euklidische 2-Norm, so heisst die induzierte Matrixnorm* Spektralnorm *oder* 2-Norm*; sie wird auch mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet:*

$$\|A\|_2 := \sup_{x\neq o} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Definition 5.7
Die Frobenius-Norm *ist definiert durch*

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}|^2}.$$

Definition 5.8
Sei $x \in \mathbb{E}^n$, dann ist die Summennorm *wie folgt definiert:*

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Definition 5.9
Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$, dann ist die Maximum-Matrixnorm *wie folgt definiert:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &:= \max\{\|a_1\|_1, ..., \|a_n\|_1\} \\ &= \max\{|a_{11}| + ... + |a_{1n}|, \quad ..., \quad |a_{n1}| + ... + |a_{nn}|\}. \end{aligned}$$

Definition 5.10
Die Konditionszahl *einer regulären Matrix A bezüglich einer gewissen Norm $\|\cdot\|$ (Gemeint ist eine Matrixnorm oder eine Vektornorm mit der induzierten Operatornorm) oder, kurz, die* Kondition *ist wie folgt definiert:*

$$\kappa(A) := \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Definition 5.11
Wir erweitern die obige Definition und wählen eine Norm, nämlich die 2-Norm. Dann ist die 2-Norm-Konditionszahl *ist wie folgt definiert:*

$$\kappa(A)_2 := \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

Kapitel 6

Die Methode der kleinsten Quadrate

6.1 Methode der kleinsten Quadrate

Idee.
Wir betrachten für $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $m > n$ das überbestimmte LGS $Ax = y$. Oftmals haben solche LGS keine (exakten) Lösungen, daher löst man sie mit Hilfe von Nährungsverfahren, wobei ein Fehler entsteht.
Die Methode der kleinsten Quadrate (manchmal auch als lineare Ausgleichsrechnung *bezeichnet) versucht den Fehler zu minimieren. Der* Residuenvektor *(das Residuum, der Fehler) $r := y - Ax$ soll minimale euklidische Norm haben, d.h. wir suchen $x \in \mathbb{R}^n$, so dass*

$$\|r\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} |r_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} |y_k - \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l|^2$$

minimal ist.

Bemerkung 6.1
Die Methode der kleinsten Quadrate lässt sich auf allgemeine Normen erweitern. (Beispiel: S10A2)

Bemerkung 6.2
Betrachte für $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $m > n$ das überbestimmte LGS

$$Ax \overset{!}{=} y$$

Methode der kleinsten Quadrate: Finde $x \in \mathbb{E}^n$, so dass Residuum $r = y - Ax$ minimale Norm hat. Formal ausgedrückt:

$$\underset{x\in\mathbb{E}^n}{\arg\min} \|y - Ax\|_2$$

Lösungsansatz:

1. *Normalengleichung*
2. *QR-Zerlegung*

6.1.1 Normalengleichung

Lemma 6.3 (Skript: Lemma 7.3)
Sind die Kolonnen einer $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ Matrix linear unabhängig, d.h. ist rang$(A) = n(\leq m)$, so ist $A^H A$ regulär.

Satz 6.4 (Skript: Satz 7.4)
Die Orthogonalprojektion $P_A : \mathbb{E}^m \rightarrow Im(A) \subset \mathbb{E}^m$ auf den Kolonnenraum $Im(A) = Im(A)$ einer $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ Matrix mit Rang $n(\leq m)$ ist gegeben durch:

$$P_A := A(A^H A)^{-1} A^H.$$

Satz 6.5 (Skript: Satz 7.6)
Für eine Orthogonalprojektion $P \in \mathbb{E}^{n\times n}$ gilt:

$$\|y - Py\|_2 = \min_{z\in Im(P)} \|y - z\|_2, \quad \forall y \in \mathbb{E}^n$$

Bemerkung 6.6
Angenommen die Kolonnen von $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$ sind linear unabhängig, also $ker(A) = \{0\}$ gilt und $A^H A$ gemäss Lemma 7.3 regulär ist. Auf Grund von Satz 7.6 wissen wir, dass $\|r\|$ minimal ist wenn gilt:

$$\begin{aligned} Ax = P_A y &\overset{\text{Satz 7.4}}{\Longrightarrow} Ax = A(A^H A)^{-1} A^H y \\ &\overset{ker(A)=\{0\}}{\Longrightarrow} x = (A^H A)^{-1} A^H y \\ &\Rightarrow A^H Ax = A^H y \quad \text{Normalengleichung} \end{aligned}$$

Definition 6.7 (Pseudoinverse)

$$\begin{aligned} A^\dagger &:= (A^H A)^{-1} A^H \\ &\Rightarrow A^\dagger A = (A^H A)^{-1} A^H A = \mathbb{1} \\ &\overset{ABER}{\Longrightarrow} AA^\dagger = A(A^H A)^{-1} A^H \overset{\text{im Allgemeinem}}{\neq} \mathbb{1} \end{aligned}$$

Satz 6.8 (Skript: Satz 7.7)
Es sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, rang$(A) = n \leq m$, $y \in \mathbb{E}^m$. Dann hat das überbestimmte Gleichungssystem $Ax = y$ eine eindeutig bestimmte Lösung x im Sinne der kleinsten Quadrate, d.h. x mit

$$\|y - Ax\|_2^2 = \underset{\tilde{x}\in\mathbb{E}^n}{\arg\min} \|y - A\tilde{x}\|_2^2 \quad x \in \mathbb{E}^n \tag{6.1}$$

x kann berechnet werden durch Lösen des regulären Systems der Normalgleichungen (Bemerkung 6.6). Der Residuenvektor $r \perp Im(A)$.

Beispiel 6.9
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad m = 3 > 2 = n, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Bestimme mit Hilfe der Normalengleichung $x = (x_1, x_2)^T$, so dass $\|r\|_2^2 = \|y - Ax\|_2^2$ minimal ist bezüglich dem Standard-Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = x^H y$.

Lösung*:*

$$\begin{aligned}
Ax = y &\Rightarrow A^T Ax = A^T y \\
&\Leftrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (*) \\
ATA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} \\
(A^T A)^{-1} &= \frac{1}{5 \cdot 14 - (-1) \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{69} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\
A^T y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\overset{(*)}{\Longrightarrow} x &= \frac{1}{69} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{69} \begin{pmatrix} 140 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 6.10
Gegeben: Lege Bestmögliche Gerade (d.h. der Abstand zwischen Punkt und Gerade ist minimal) duch P_1, P_2, P_3, P_4 wobei

$$P_1 = (0, 6),\ P_2 = (1, 0),\ P_3 = (2, 0),\ P_4 = (3, -4)$$

Gesucht: Geradengleichung $y = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^2$ unbekannte Parameter sind.

Lösung*:*

$$P_i = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} 6 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 1 + b \\ 0 = a \cdot 2 + b \\ -4 = a \cdot 3 + b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=y}$$

$$\begin{aligned}
Ax = y \Rightarrow A^T A x &= A^T y \\
\Leftrightarrow x &= (A^T A)^{-1} A^T y \quad (*)
\end{aligned}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{14 \cdot 4 - 6 \cdot 6} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} x &= (A^T A)^{-1} A^T y \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -15 \\ 25 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \textit{Gerade: } y = -3x + 5$$

6.1.2 QR-Zerlegung

Bemerkung 6.11
Sei $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$. Angenommen $rang(A) = n \leq m$ (voller Rang). Dann existiert eine orthogonale/unitäre (Matrix $Q = (Q_1|Q_2)$ mit $Q \in \mathbb{E}^{m \times m}$, $Q_1 \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $Q_2 \in \mathbb{E}^{m \times (m-n)}$ und es existiert eine rechte Dreiecksmatrix $R_1 \in \mathbb{E}^{n \times n}$ und mit $\mathbf{0} \in \mathbb{E}^{(m-n) \times n}$, so dass

$$A = Q \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} =: QR$$

Bemerkung 6.12
Da $\begin{pmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, ist $A = QR = Q_1 R_1$.

Bemerkung 6.13 (Zusammenhang QR-Zerlegung und kleinste Quadrate)
Für das Residuum r gilt, dann $r = y - \sum_{i=1}^{n} \langle q_i, y \rangle q_i$, wobei $\{q_i\}_{i=1}^{n}$ sie Spalten von Q bezeichnet.

Bemerkung 6.14
Falls das betrachtete Skalarprodukt das Standard-Skalarprodukt ist, gilt:

$$\begin{aligned} Q_1^H Q_1 &= \mathbb{1} \\ Ax = y &\overset{A=Q_1R_1}{\Longleftrightarrow} Q_1 R_1 x = y \\ &\Leftrightarrow R_1 x = Q_1^H y \\ &\Leftrightarrow x = R_1^{-1} Q_1^H y \end{aligned}$$

Für ein anderes Skalarprodukt erggibt sich eine andere Fromel für x!

Kochrezept 6.15 (QR-Zerlegung)
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $m > n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ein Skalarprodukt*
Gesucht: Q_1, R_1, *so dass* $A = Q_1 R_1$.

Q1: *Seien* $a_1, ..., a_n$ *Spalten von A. Wende Gram-Schmidt Verfahren bezüglich* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *auch* $\{a_i\}_{i=1}^n$ *an. Das liefert dann* $\{q_1, ..., q_n\}$.
$\Rightarrow (q_1|...|q_n) = Q_1 \in \mathbb{E}^{m \times n}$

R1: 1.

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ \langle q_i, a_j \rangle, & i < j \\ \|\widetilde{q}_i\| = \sqrt{\langle \widetilde{q}_i, \widetilde{q}_i \rangle}, & i = j \end{cases}$$

wobei $\widetilde{q}_i$ *den i-ten orthogonalisierten, aber noch nicht normierten Vektor bezeichnet.*

2. $R_1 = (r_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

Beispiel 6.16
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad m = 3 > 2 = n, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Bestimme mit Hilfe der QR-Zerlegung $x = (x_1, x_2)^T$, *so dass* $\|r\|_2^2 = \|y - Ax\|_2^2$ *minimal ist bezüglich dem Standard-Skalarprodukt* $\langle x, y \rangle = x^H y$.

Lösung*:*

(Q1)

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\widetilde{q_2} &= a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{16}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \\
q_2 &= \frac{\widetilde{q_2}}{\|\widetilde{q_2}\|} = \frac{1}{5} \frac{5}{\sqrt{345}} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{345}} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad Q_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{345}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{16}{\sqrt{345}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-8}{\sqrt{345}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(R1)

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= \|a_1\| = \sqrt{5} \\
r_{22} &= \|\widetilde{q_2}\| = \left(\frac{1}{5} \frac{1}{5} \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{25} (25 + 256 + 64) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{345}}{5} \\
r_{12} &= \langle q_1, a2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$$r_{21} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad R_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{345}}{5} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad A &= Q_1 R_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ax = y &\Rightarrow Q_1R_1x = y \\
&\Leftrightarrow R_1x = Q_1^Ty \\
&\Leftrightarrow x = R_1^{-1}Q_1^Ty \\
R_1^{-1} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{345}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{345}}{5} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\
Q_1^T &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{345}} & \frac{16}{\sqrt{345}} & \frac{-8}{\sqrt{345}} \end{pmatrix} \\
x &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{345}}{5} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{345}} & \frac{16}{\sqrt{345}} & \frac{-8}{\sqrt{345}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{345} & \frac{85}{345} & \frac{130}{345} \\ \frac{25}{345} & \frac{80}{345} & -\frac{40}{345} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{345}\begin{pmatrix} 5 & 85 & 130 \\ 25 & 80 & -40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 1 & 17 & 26 \\ 5 & 16 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 2+34+104 \\ 10+32-32 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 140 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Korollar 6.17 (Skript: Korollar 10.10)
*Die 2-Norm-*Konditonszahl *(kurz: Kondition) einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ist gegeben durch*

$$\kappa_2 = \frac{\max\{|\omega|\}}{\min\{|\omega|\}},$$

wobei ω der Eigenwert von A ist.
Insbesondere ist die Konditionszahl immer grösser oder gleich 1.

Bemerkung 6.18
Wir möchten immer eine möglichst kleine Kondition haben, da dann die Implementierung numerisch am stabilsten ist, d.h. grosse Kondition ist schlecht und unerwünscht.

Bemerkung 6.19
Die QR-Zerlegung ist für $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$ eindeutig, wenn man die Vorzeichen der Diagonalelemente von der Dreiecksmatrix vorgibt.

Bemerkung 6.20 (Normalengleichung vs. QR-Zerlegung)
Normalengleichung

Pro:
- *ßchönüm von Hand zu rechnen*
- *$A^H A$ ist hermitesch positiv definit $\Rightarrow$ kann für Cholesky-Zerlegung ausgenutzt werden*

Con:
- *Wenn A schlecht Konditioniert ist, ist $A^H A$ quadratisch schlecht konditioniert. $\Rightarrow$ Cholesky liefert unbrauchbare Resultate (Rundungsfehler massiv verstärkt, Implementiereung instabil)*

QR-Zerlegung

Pro:
- *kann numerisch stabil implementiert werden (Verfahren hängt weniger von der Kondition ab)*
- *Q ist Projektion der Spalten von A*

Con:
- *"hässlichßum von Hand rechnen (Wurzeln)*

Kapitel 7

Grundvorraussetzung für die Eigenwerte und Eigenvektoren

7.1 Petermutationen

Definition 7.1
Eine Permutation *ist eine bijektive Abbildung:*

$$p : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

Definition 7.2
Die Menge aller Permutationen heisst symmetrische Gruppe S_n.

Definition 7.3
Eine Permutation, welche nur zwei Elemente vertauscht heisst Transposition.

Satz
Jede Permutation kann als Produkt (hintereinanderschaltung von Abbildungen) von Transpositionen geschrieben werden.

Bemerkung 7.4
Die Darstellung einer Permutation als Produkt von Transpositionen ist nicht eindeutig. Aber die Anzahl benötigter Transpositionen ist eindeutigerweise entweder gerade oder ungerade.

Definition 7.5
Ist $p \in S_n$, so nennt man jedes Paar $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit

$$i < j \quad \textit{aber} \quad p(i) > p(j),$$

einen Fehlstand *von p.*

Beispiel 7.6
Gegeben:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Gesucht: Fehlstände von p

Lösung*:*
Es gibt insgesamt zwei Fehlstände, nämlich

$$1 < 3, \text{ aber } 2 > 1, \quad \text{und} \quad 2 < 3, \text{ aber } 3 > 1.$$

Definition 7.7
Das Signum *einer Permutation ist definiert als*

$$sign(p) = (-1)^k = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \text{ eine gerade Anzahl } k \text{ von Fehlständen hat} \\ -1, & \text{falls } p \text{ eine ungerade Anzahl } k \text{ von Fehlständen hat.} \end{cases}$$

Definition 7.8
Man nennt $p \in S_n$:

- gerade*, falls $sign(p) = +1$,*
- ungerade*, falls $sign(p) = -1$.*

7.2 Determinanten

Definition 7.9
Die Determinante *ist eine Abbildung:*

$$\begin{aligned} det: \ & \mathbb{E}^{n \times n} \to \mathbb{E} \\ & A \mapsto det(A) = \sum_{p \in S_n} sign(p) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)} \end{aligned}$$

Bemerkung 7.10
In der obigen Definition summieren wir über $n!$ Summanden.

Tricks um Determinanten zu berechnen.

- 1×1-*Matrix:* $\quad det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$
- 2×2-*Matirx:*

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- 3×3-*Matrix (Regel von Sarrus):*

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Es wird das folgende Muster bei der Regel von Sarrus angewendet:

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a & b & c & a & b \\
d & e & f & d & e \\
g & h & i & g & h \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Bemerkung 7.11
Für eine $n \times n$-Matrix kann man die Determinante über die Definition mit Permutationen berechnen, aber ist sehr ineffizient (Aufwand proportional zu $n!$).

Satz 7.12
Sei $\widetilde{A}$ die Zeilenstufenform von A (d.h. $\widetilde{A}$ ist eine obere/untere Dreiecksmatrix), welche man durch den Gauss-Algorithmus aus A berechnet hat. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl ausgeführter Zeilenvertauschungen:

$$\Rightarrow \quad det(A) = (-1)^k \cdot det(\widetilde{A}) = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} \widetilde{A}_{ii},$$

$$\textit{wobei} \ \prod_{i=1}^{n} \widetilde{A}_{ii} \ \textit{das Produkt der Diagonaleinträge ist.}$$

Satz 7.13 (Laplace'sche Entwicklungssatz)
Sei $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ und $A'_{ij} \in \mathbb{E}^{n-1 \times n-1}$ die Streichmatrix ohne i-te Zeile und j-te Spalte.

$$\Rightarrow \quad \textit{Entwicklung nach der i-ten Zeile:} \quad det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A'_{ij})$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Entwicklung nach der j-ten Spalte:} \quad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A'_{ij}).$$

Beispiel 7.14
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $det(A)$

Lösung*:*

(1) Sarrus:

$$\begin{aligned} det(A) &= 1 \cdot (-1) \cdot +2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= -5 - 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= -5 - 30 \\ &= -35 \end{aligned}$$

(2) Gauss:

- *ohne Zeilenvertauschung*

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \overset{(iii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} =: \widetilde{A}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad det(A) &= det(\widetilde{A})\\ &= 1\cdot(-7)\cdot 5\\ &= -35\end{aligned}$$

- *mit Zeilenvertauschung*

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \overset{Zeilenvertauschung}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{21}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -15\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\overset{(ii)-l_{31}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -15\\ 0 & 2 & -5\end{pmatrix} \overset{(ii)-l_{23}\cdot(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -15\\ 0 & 0 & -35\end{pmatrix} =: \widetilde{A}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad det(A) &= (-1)\cdot det(\widetilde{A})\\ &= (-1)\cdot[1\cdot(-1)\cdot(-35)]\\ &= -35\end{aligned}$$

(3) Laplace:

(i) *Entwicklung nach der letzten Spalten (am effizientesten):*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix} &= 5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ &= 5((-1)\cdot 1 - 3\cdot 2)\\ &= 5\cdot(-7)\\ &= -35\end{aligned}$$

(ii) *Entwicklung nach der ersten Zeile (dient nur zur Illustration, da ineffizient):*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}\\ &= 1\cdot(-1)\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 5\\ &= -5-30\\ &= -35\end{aligned}$$

Satz 7.15 (Axiomatischer Zugang, Eigenschaften der Determinante)
Die Abbildung

$$\begin{aligned} det : \mathbb{E}^{n\times n} &\to \mathbb{E} \\ A &\mapsto det(A) \end{aligned}$$

heisst Determinante, *falls folgende Eigenschaften gelten: Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, dann gilt:*

(D1) $det(\mathbb{1}) = 1$

(D2) Hat A zwei gleiche oder lineare abhängige Zeilen/Spalten, so ist

$$det(A) = 0$$

(D3) Linearität in jeder Zeile/Spalte (in der Literatur auch n-Linearität genannt)

$$det(v_1, ..., \lambda v_i + w, ..., v_n) = \lambda det(v_1, ..., v_i, ..., v_n) + det(v_1, ..., w, ..., v_n)$$

Die Determinante hat folgende weitere Eigenschaften, die sich aus den ersten Drei herleiten lassen:

(D4) $det(\lambda A) = \lambda^n\, det(A)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{E}$

(D5) Ist eine Zeile/Spalte gleich Null, so ist:

$$det(A) = 0$$

(D6) Vertauscht man zwei Zeilen/Spalten von A, so ändert sich das Vorzeichen von $det(A)$:

$$det(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = -det(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$$

(D7) Entsteht B aus A durch Addition des λ-fachen ($\lambda \neq 0$) der i-ten zur j-ten Zeile/Spalte, dann ist:

$$det(A) = det(B)$$

(D8) Ist A eine obere/untere Dreiecksmatrix, so ist:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(D9) $det(AB) = det(A)det(B)$

(D10) $det(\overline{A}) = \overline{det(A)}$

(D11) $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

(D12) $det(A^T) = det(A)$

(D13) *Ist*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad \textit{so ist:} \quad det(A) = det(A_1) \cdot det(A_3)$$

und analog gilt:

$$det \begin{pmatrix} B_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & B_n \end{pmatrix} = det(B_1) \cdot ... \cdot det(B_n)$$

(D14) $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, *wobei* λ_i *ein Eigenwert von* A *ist.*

(D15) *Definition der Determinante ist* Basisinvariant*:*

$$det(B) = det(S^{-1}BS) = \frac{1}{det(S)} \cdot det(B) \cdot det(S)$$

(D16) *Orthogonale/unitäre Matrizen* A *haben:*

$$\begin{aligned} det(A) &= \pm 1, \\ \textit{weil } \ det(AA^T) &= det(A)det(A^T) \\ &= det(A)det(A) \\ &= det(A)^2 \\ &\stackrel{!}{=} det(\mathbb{1}) = 1 \end{aligned}$$

(D17) *Für hermitesche Matrizen* $(A^H = A)$ *haben wir:*

$$\begin{aligned} det(A) &\in \mathbb{R}, \\ \textit{weil } det(A^H) &= det(\overline{A}^T) \\ &= det(\overline{A}) \\ &= \overline{det(A)} \\ &\stackrel{!}{=} det(A) \end{aligned}$$

Satz 7.16

- $det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *nicht invertierbar* $\Leftrightarrow rang(A) < n$
- $Ax = b$ *eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.

Definition 7.17
Zu jedem Element a_{kl} einer $n \times n$-Matrix A werde die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix $A_{[}k, l]$ definiert durch Streichen der Zeile k und der Kolonne l von A. Der Kofaktor *κ_{kl} von a_{kl} ist dann die Zahl:*

$$\kappa_{kl} := (-1)^{k+l} \, det \left(A_{[k,l]} \right).$$

Definition 7.18
Der Grad *d_j des Knotens j ist wie folgt definiert:*

$$d_j := \sum_{i=1}^{n} (A)_{ij}.$$

Satz 7.19 (Satz von Kirchhoff)
Der Satz von Kirchhoff besagt, dass die Anzahl der aufspannenden Teilbäume eines Graphen gleich dem Wert eines beliebigen Kofaktors von L ist, wobei wie folgt definiert ist:

$$L := D - A$$

mit $D = diag(d_1, ..., d_n)$, $d_i \,\hat{=}\,$ *Grad des Knotens* i
und $A \,\hat{=}\,$ *Adjazenzmatrix mit* $\left(A_{ij}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ mit } j \text{ durch eine Kante verbunden ist} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Kapitel 8

Eigenwerte und Eigenvektoren

8.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei in diesem Abschnitt V ein Vektorraum über $\mathbb{E}$, $dim(V) = n < \infty$, $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$.

Definition 8.1

- $\lambda \in \mathbb{E}$ *heisst* Eigenwert *(EW) von A* $\quad\Leftrightarrow\quad \exists v \in V \setminus \{0\}: \quad Av = \lambda v.$
- $v \in V \setminus \{0\}$ *heisst dann* Eigenvektor *(EV) von A zum Eigenwert λ.*
- $E_\lambda(A) = \{v \in V | Av = \lambda v\}$ *heisst* Eigenraum *von A zum Eigenwert λ.*
- $\sigma(A) := \{\lambda \mid \lambda$ *Eigenwerte von A*$\}$ *heisst* Spektrum *von A.*

Bemerkung 8.2
$E_\lambda(A) = ker(A - \lambda \mathbb{1})$ *ist ein* nichttrivialer *Untervektorraum von V, d.h. es gilt:*

$$\{0\} \subsetneq E_\lambda(A) \quad \text{(echt grösser als nur der Nullraum)}$$

Bemerkung 8.3
Diese Definition lässt sich analog für eine lineare Abbildung $F : V \to V$ führen. Es gilt:

λ ist ein Eigenwert von F, v ist ein Eigenvektor von F
$\Leftrightarrow \quad \lambda$ ist ein Eigenwert von A, v ist ein Eigenvektor von A,
wobei A die Abbildungsmatrix von F bezeichnet.

Bemerkung 8.4 (Herleitung des charakteristischen Polynoms χ_A)
Betrachte

$$\begin{aligned} Av = \lambda v \quad &\Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda \mathbb{1})v = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

$v = 0$ löst (1), aber $v = 0$ ist als Eigenvektor nicht zugelassen. Wir fordern mehr Lösungen, d.h. ∞ viele Lösungen (da ein LGS immer $0, 1$ oder ∞ viele Lösungen

hat). Gemäss dem Satz aus der Erinnerung können wir dies , indem wir $det(A - \lambda\mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$ *setzen, weil*

$$\begin{aligned} det(A-\lambda\mathbb{1}) &\overset{Satz}{\iff} A - \lambda\infty \text{ singulär} \\ &\iff (A-\lambda\infty)v = 0 \text{ hat } \infty \text{ viele Lösungen, da } v = 0 \\ &\ \text{nicht zugelassen ist.} \end{aligned}$$

Definition 8.5
$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1})$ *heisst* charakteristisches Polynom.

Bemerkung 8.6

- $\chi_A(\lambda)$ *hat Grad n*
- λ *ist der Eigenwert von A*
  $\Leftrightarrow$ λ *ist eine Nullstelle (NST) des charakteristischen Polynoms* $\chi_A(\lambda)$.

Bemerkung 8.7
Mitternachtsformel (auswendig)]

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Rightarrow \quad x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Kochrezept 8.8 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren)
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$
(falls $F : V \to V$ *lineare Abbildung gegeben ist, finde zuerst die Abbildungsmatrix A)*
Gesucht: $\sigma(A)$ *(d.h.* $\forall$ *Eigenwerte von A),* $E_\lambda(A)$ *mit* $\forall \lambda \in \sigma(A)$

1) *Berechne* $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1})$

2) *Setze* $\chi_A(\lambda) \overset{!}{=} 0$*:*

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n \text{ Nullstellen } \lambda_1, ..., \lambda_n \\ &\Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \end{aligned}$$

Bemerkung. $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sind nicht zwingend verschieden, sondern mit Nullstellenvielfachheit gezählt.*

3) *Für jeden verschiedenen Eigenwert λ_k bestimme die Basis von $E_{\lambda_k}(A) = ker(A - \lambda_k(A))$ mit Hilfe von der Gauss-Elimination.*

4) *Die Menge der Eigenvektoren ist*

$$span \left\{ \bigcup_k Basis\ von\ E_{\lambda_k}(A) \right\} \setminus \{0\}$$

(Wir vereinigen alle Eigenräume minus den Nullvektor)

Beispiel 8.9
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Eigenwerte, Eigenvektoren von A

Lösung*:*

1)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 4 & (3-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & (5-\lambda) \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) \cdot 4 \cdot 2 \\
&= (5-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot 2] \\
&= (5-\lambda)[3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 8] \\
&= (5-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - 5] \\
&= (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) \quad \textit{(allenfalls mit Hilfe der Mitternachtsformel)} \\
&= -(\lambda-5)(\lambda-5)(\lambda+1) \\
&= -(\lambda-5)^2(\lambda+1)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& & \chi_A(\lambda) &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow & & -(\lambda-5)^2(\lambda+1) &= 0 \\
& \Rightarrow & \lambda_1 = \lambda_2 &= 5 \qquad \textit{(Später: algebraische Vielfachheit von 5 ist 2)} \\
& & \lambda_3 &= -1 \\
& \Rightarrow & \sigma(A) &= \{5, -1\}
\end{aligned}$$

3) • $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$:

$$E_5(A) = ker(A - 5 \cdot \mathbb{1}) = ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

• $\lambda_3 = -1$:

$$E_{-1}(A) = ker(A - (-1) \cdot \mathbb{1}) = ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4) Menge der Eigenvektoren:

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemerkung 8.10
Es wäre mathematisch unpräzis in Beispiel 1 zu sagen: "Die Eigenvektoren sind $(1,2,0)^T$ und $(1,-1,0)^T$". Denn es gibt ∞ viele Eigenvektoren.
Sei zum Beispiel v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, d.h. $Av = \lambda v$
$\Rightarrow c \cdot v$ ist ein Eigenvektor von A zu λ für alle $c \in \mathbb{E}$, da auch $A(cv) = \lambda(cv)$ gilt.
Meist genügt es trotzdem, einen Basisvektor: $v \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ als "repräsentativen Eigenvektor zu nehmen.

Bemerkung 8.11
Komplexwertige Nullstellen des Charakteristischen Polynoms mit reellen Koeffizienten treten immer paarweise auf, und zwar ist mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch λ eine Nullstelle. Somit muss eine orthogonale Matrix von ungerader Dimension mindestens einen reellen Eigenwert ± 1 besitzen.

Definition 8.12
Die Summe der Diagonalelemente von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ nennt man Spur *von A:*

$$spur(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + ... + a_{nn}.$$

Lemma 8.13 (Skript: Lemma 9.6)
Eine (quadratische) Matrix A ist genau dann singulär, wenn sie 0 als Eigenwert hat:

$$A \textit{ singuär} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \sigma(A).$$

Satz 8.14 (Skript: Satz 9.11)
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Korollar 8.15 (Skript: Korollar 9.12)
Sind die n Eigenwerte von $F : V \to V$ (mit $n = dim(V)$) verschieden, so gibt es eine Basis von Eigenvektoren und die entsprechende Abbildungsmatrix ist diagonal.

Satz 8.16 (Skript: Satz 9.15)
Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, so gilt:

(i) *Alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sind reell.*

(ii) *Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}$.*

(iii) *Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, ..., u_n$ von A.*

(iv) *Für die unitäre Matrix $U := (u_1, ..., u_n)$ gilt:*

$$U^H A U = \Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

8.2 Spektralzerlegung, Diagonalisierbarkeit

Definition 8.17
Sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$.

- Algebraische Vielfachheit *von λ:*

$$a_\lambda := \text{"Nullstellen vielfachheit von } \lambda \text{ in } \chi_A(\lambda)\text{"}$$

- Geometische Vielfachheit*:*

$$\begin{aligned} g_\lambda &:= dim(E_\lambda(A)) \\ &= dim(ker(A - \lambda\mathbb{1})) \\ &= n - rang(A - \lambda\mathbb{1}) \end{aligned}$$

Definition 8.18
A heisst diagonalisierbar *(es existiert eine Spektralzerlegung)*

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \exists V \in \mathbb{E}^{n\times n},\ \Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n}, \textit{ mit } V \textit{ regulär, } \Lambda \textit{ diagonal, so dass} \\ & A = V\Lambda V^{-1} \end{aligned}$$

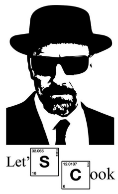
Man sagt auch: "A ist ähnlich *zu einer Diagonalmatrix".*

Satz 8.19
A ist diagonalisierbar
$\Leftrightarrow$ Die Eigenvektoren von A bilden eine Basis von V
$\Leftrightarrow$ Für alle Eigenwerte λ von A gilt $g_\lambda = a_\lambda$.

Bemerkung 8.20
Eine Diagonalisiertung ist ein Basiswechsel mit Transformationsmatrizen V und V^{-1}.

Satz 8.21
Bei Ähnlichkeitstransformation bleibt erhalten:

- *Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheit*
- *Rang*
- *Determinante*
- *Spur*
- *Charakteristische Polynom $\chi_A(t)$*
- **nicht** *die Eigenvektoren!*



Kochrezept 8.22 (Berechnung der Diagonalmatrix)
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ diagonalisierbar
Gesucht: $V, \Lambda \in \mathbb{E}^{n \times n}$

1) *Finde die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ und finde die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ von A (wobei $v_i \in E_{\lambda_i}(A)$ und $\{v_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig).*

2) *Definiere die Diagonalmatrix wie folgt:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$$

3) *Schreibe die Eigenvektoren $v_i \in E_{\lambda_i}(A)$ in eine Matrix:*

$$V = (v_1 | \cdots | v_n)$$

4) Test: $A \stackrel{?}{=} V\Lambda V^{-1}$

Beispiel 8.23 (Beispiel 8.9 fortgesetzt...)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textit{wie in Beispiel 1 mit } \chi_A(\lambda) = -(\lambda-5)^2(\lambda+1)$$

Gesucht: Algebraische und geometrische Vielfachheit

Lösung*:*

- *Algebraische Vielfachheit:*

$$\lambda_1 = 5 \textit{ mit } a_5 = 2 \quad \textit{und} \quad \lambda_2 = -1 \textit{ mit } a_{-1} = 1$$

- *Geometrische Vielfachheit:*

$$\begin{aligned} g_5 = &\ dim(E_5(A)) = 1 \quad \neq a_5 = 2 \\ g_{-1} = &\ dim(E_{-1}(A)) = 1 \quad = a_{-1} = 1 \end{aligned}$$

Da $g_5 \neq a_5 \Rightarrow A$ *ist nicht diagonalisierbar.*

Beispiel 8.24
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Finde die Spektralzerlegung.

Lösung*:*

1) (i)

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= det(A - \lambda\mathbb{1}) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(-2-\lambda)(3-\lambda) + (-1)\cdot 3\cdot(-2) + 1\cdot(-3)\cdot(-2) \\
&\quad - (-2)\cdot(-2-\lambda)\cdot 1 - (-2)\cdot 3\cdot(-\lambda) - (3-\lambda)\cdot(-3)\cdot(-1) \\
&= 6\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 6 + 6 - 4 - 2\lambda - 6\lambda - 9 + 3\lambda \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1
\end{aligned}$$

Bemerkung. *Hier müsst ihr ein Trick verwenden, indem ihr die Nullstelle erratet (teste:* $1, -1, 2, -2$, *etc.) und dann eine Polynomdivision durchführt.*

$\lambda_1 = 1$ *ist eine Nullstelle:*

$$\begin{array}{l}
\big(-t^3 + t^2 + t - 1\big) : \big(t-1\big) = -t^2 + 1 \\
\underline{\;\; t^3 - t^2 \;\;} \\
\qquad\qquad t - 1 \\
\qquad\quad \underline{-t + 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) &= (\lambda-1)(1-\lambda^2) \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\chi_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \\
&\quad \Leftrightarrow 0 = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \\
\Rightarrow \quad &\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \;\; a_1 = 2 \\
&\lambda_3 = -1, \;\; a_{-1} = 1 \\
\Rightarrow \quad &\sigma(A) = \{-1, 1\}
\end{aligned}$$

(iii) • $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} E_1(A) &= ker(A - \mathbb{1}) \\ &= ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad g_1 = 2$

• $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= ker(A + \mathbb{1}) \\ &= ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{"Gaussen"}}{\rightsquigarrow} ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad g_{-1} = 1$

$\Longrightarrow \qquad a_1 = g_1$ *und* $a_{-1} = g_{-1} \Rightarrow A$ *ist diagonalisierbar.*

(iv) Menge der Eigenvektoren:

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

wobei ihr die Inverse V^{-1} *mit dem üblichen Rezept berechnet.*

4) Test: $\qquad A = V\Lambda V^{-1}\checkmark$

Kapitel 9

Addendum

Bemerkung 9.1
Hier werden weitere Themen aufgeführt die in der Vorlesung behandelt wurden, aber in den vorherigen Kapiteln nicht aufgelistet sind.

9.1 Basiswechsel und Koordinatentransformation

Definition 9.2
Seien $\mathcal{A} = (e_1, ..., e_n)$ die kanonische Basis vom Vektorraum V und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ eine weitere Basis von V beschrieben mit der kanonischen Basis. Dann existiert eine Transformationsmatrix *mit:*

$$T_A^B = (b_1 | \cdots | b_n) \quad \text{mit } e_i = T_A^B b_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{T_B^A} V_{\mathcal{B}}$$

Bemerkung 9.3
Es gilt die folgende Rechenregel: $T_B^A = (T_A^B)^{-1}$
Mit der obigen Definition erhalten wir somit: $T_B^A e_i = b_i,\ i \in \{1, ..., n\}$.

Satz 9.4
Sei $\mathbb{E}$ ein Körper, V ein $\mathbb{E}$-Vektorraum mit $dim(V) = n < \infty$. Seien $v \in V$, $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ Basen für V. Dann existieren eindeutige $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{E}$ sowie eindeutige $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{E}$, so dass

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k.$$

Da stellt sich die Frage wie man zwischen den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wechseln kann, konkret hat man zum Beispiel die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{A}$ gegeben und möchte nun die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ darstellen.

Definition 9.5
Zu jeder Basis $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ von V gibt es genau einen Isomorphismus:

$$\phi_B : \mathbb{E}^n \to V, (x_1, ..., x_n) \mapsto \phi_B(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \text{ mit } \phi_B(e_i) = v_i.$$

(In Worten: ϕ_B ordnet x seinen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ zu.)

Definition 9.6
Seien V mit Basis $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_m\}$ und W mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ Vektorräume über $\mathbb{E}$. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ genau eine Matrix $M_B^A(f)$, so dass $M_B^A(f)_j = f(v_j) = a_{1j}w_1 + ... + a_{mj}w_m$ für $j = 1, ..., n$.

Bemerkung 9.7
Die Matrix $M_B^A(f)$ von oben hat als j-te Spalte den Vektor der Koordinaten von $f(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Bemerkung 9.8 (Wichtig)
In den Spalten *einer Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren, d.h. $M_B^A(f) = (f(v_1)|\cdots|f(v_m))$.*

Bemerkung 9.9
Die Matrix $M_B^A(f)$ kann mit Hilfe des kommutierenden Diagramms auch foglendermassen beschrieben werden:

$$M_B^A(f) = \phi_B^{-1} \circ f \circ \phi_A$$

Definition 9.10
Die reguläre Transformationsmatrix *$T_{\mathcal{B}}^{A}$ mit Basen $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$, $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ vom Vektorraum V sieht wie folgt aus:*

$$T_{\mathcal{B}}^{A} = \phi_B^{-1}\phi_A = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}^n \arrow[rr, "T_{\mathcal{B}}^{A}"] \arrow[dr, "\phi_A"] & & \mathbb{E}^n \arrow[dl, "\phi_B"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Dadurch kann man nun folgend beschreiben $w_i = t_{1i}v_1 + ... + t_{ni}v_n = T_{\mathcal{B}}^{A} v_i, \quad i \in \{1, ..., n\}$, wobei w_i bezüglich $\mathcal{B}$ und v_i bezüglich $\mathcal{A}$ dargestellt ist:

$$T_{\mathcal{B}}^{A} \boldsymbol{v}_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{w}_{\mathcal{B}}, \quad \text{wobei } \boldsymbol{v}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \mathcal{A}, \ \boldsymbol{w}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ bzgl. } \mathcal{B}.$$

Bemerkung 9.11 (Rechenregeln)
- $T_{\mathcal{A}}^{A} = \mathbb{1}$
- $T_{\mathcal{B}}^{A} = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1}$

- $\lambda_{\mathcal{A}} \in \mathbb{K}^n$ *ein Koordinatenvektor bezüglich* $\mathcal{A}$
  $\mu_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ *ein Koordinatenvektor bezüglich* $\mathcal{B}$
  $\Rightarrow \quad T^A_{\mathcal{B}} \lambda_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{B}}$
- $f : V \to V$ *linear mit Abbildungsmatrix* $M^A_A(f)$ *wobei der Definitionsbereich und der Bildbereich bezüglich* A *gegeben ist. Analog ist die Abbildungsmatrix* $M^B_B(f)$ *im Definitionsbereich und im Bildbereich bezüglich* B *gegeben. Wir erreichen eine Basistransformation von* A *nach* B *der Abbildungsmatrix* $M^A_A(f)$ *mit den Transformationsmatrizen* T^B_A, T^A_B:

$$M^B_B(f) = T^A_B M^A_A(f) T^B_A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[r, "M^B_B(f)"] & \mathbb{E}^n \\
V \arrow[u, "\phi_B"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_A"] & V \arrow[u, "\phi_B"'] \arrow[d, "\phi_A"'] \\
\mathbb{E}^n \arrow[r, "M^A_A(f)"] & \mathbb{E}^n \arrow[uu, bend right, "T^A_B"']
\arrow[from=1-1, to=3-1, bend right, "T^B_A"']
\end{tikzcd}$$

- $f : V \to V$ *linear mit Abbildungsmatrix* $M^{B_1}_{B_2}(f)$ *wobei der Definitionsbereich bezüglich* B_1 *und der Bildbereich bezüglich* B_2 *gegeben ist. Analog ist die Abbildugnsmatrix* $M^{B'_1}_{B'_2}(f)$ *im Definitionsbereich bezüglich* B'_1 *und im Bildbereich bezüglich* B'_2 *gegeben. Wir erreichen eine Basistransformation von* B_1 *nach* B'_1 *(Definitionsbereich) bzw. von* B_2 *nach* B'_2 *(Bildbereich) der Abbildungsmatrix* $M^{B_1}_{B_2}(f)$ *mit den Transformationsmatrizen* $T^{B_2}_{B'_2}$, $T^{B'_1}_{B_1}$:

$$M^{B'_1}_{B'_2}(f) = T^{B_2}_{B'_2} M^{B_1}_{B_2}(f) T^{B'_1}_{B_1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}^n \arrow[r, "M^{B'_1}_{B'_2}(f)"] & \mathbb{E}^n \\
V \arrow[u, "\phi_{B'_1}"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_{B_1}"] & V \arrow[u, "\phi_{B'_2}"'] \arrow[d, "\phi_{B_2}"'] \\
\mathbb{E}^n \arrow[r, "M^{B_1}_{B_2}(f)"] & \mathbb{E}^n \arrow[uu, bend right, "T^{B_2}_{B'_2}"']
\arrow[from=1-1, to=3-1, bend right, "T^{B'_1}_{B_1}"']
\end{tikzcd}$$

Definition 9.12
Seien $\mathcal{A} = (e_1, ..., e_n)$ *die kanonische Basis vom Vektorraum* V *und* $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ *eine weitere Basis von* V *beschrieben mit der kanonischen Basis. Dann existiert eine*

Transformationsmatrix *mit:*

$$T_A^B = (b_1| \cdots |b_n) \quad \textit{mit } e_i = T_A^B b_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$$

$$V_{\mathcal{A}} \xrightarrow{T_B^A} V_{\mathcal{B}}$$

Bemerkung 9.13
Mit der obigen Definition erhalten wir somit: $\quad T_B^A e_i = b_i,\ i \in \{1, ..., n\}.$

Kochrezept 9.14 (Transformationsmatrix)
(dekt alle Fälle ab)
Gegeben: $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ *sind Basen von V.*
Gesucht: Transformationsmatrix T_B^A *und* T_A^B.

$$(B \mid A) \Leftrightarrow (b_1 \quad \cdots \quad b_n \mid a_1 \quad \cdots \quad a_n) \overset{''\text{Gaussenöhne Zeilenvertauschung}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow} (\mathbb{1} \mid T_B^A)$$

$$(A \mid B) \Leftrightarrow (a_1 \quad \cdots \quad a_n \mid b_1 \quad \cdots \quad b_n) \overset{''\text{Gaussenöhne Zeilenvertauschung}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow} (\mathbb{1} \mid T_A^B)$$

Bemerkung 9.15 (Intuition)

$$(B \mid A) \rightsquigarrow \left(\underbrace{BB^{-1}}_{\mathbb{1}} \;\middle|\; \underbrace{AB^{-1}}_{=T_B^A} \right) \rightsquigarrow (\mathbb{1} \mid T_B^A)$$

Beispiel 9.16 *Gegeben:* $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$
Gesucht: T_B^A, T_A^B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(ii)-l_{21}(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(iii)-l_{31}(i)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{32}(ii)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \overset{(iii)\cdot -\frac{3}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(ii)-(iii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{(i)-3\cdot(iii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-(ii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{(i)\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad T_B^A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung.
$T_A^B = (T_B^A)^{-1}$ könnt ihr entweder mit dem Rezept von oben berechnen oder ihr benützt das Rezept aus der 3. Übungsstunde und berechnet die Inverse $(T_B^A)^{-1} = T_A^B$.

Beispiel 9.17
Sei $V = \mathcal{P}$ mit Basen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ Standardbasis (Monombasis) und $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 &= x^2 \\ a_2 &= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ a_3 &= (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

a) T_B^A, T_A^B?

b) *Sei $F = \frac{d}{dt} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, p \mapsto \dot{p} = \frac{dp}{dt}$ mit Abbildungsmatrix*

$$M(F) = M_B^B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was ist $M_A^A(F)$?

c) *Sei $p(x) = 3x^2 - 8x + 2 \in \mathcal{P}_2$. Was sind die Koordinaten von p bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?*

a) *Da $\mathcal{B}$ die Standardbasis ist, gilt: $T_B^A = (a_1|a_2|a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*

$T_A^B = (T_B^A)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{Zeilenvertauschungen}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(iii)-l_{32}(ii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(ii)-\frac{1}{-4}(iii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(i)-\frac{1}{-4}(iii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(i)-(ii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{4}(iii)}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad T_A^B = (T_B^A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) *Unter Verwendung der Rechenregel erhalten wir:*

$$\begin{aligned} M_A^A(F) &= T_A^B M_B^B(F) T_B^A \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) *Koordinaten von p bezüglich $\mathcal{B}$:*

$$p_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten von p bezüglich $\mathcal{A}$:

$$p_{\mathcal{A}} = T_A^B p_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Test: $a_1 - a_2 + 3a_3 = 3x^2 - 8x + 2 = p(x) \quad \checkmark$

Definition 9.18
Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{E}^{m\times n}$ heissen äquivalent, *wenn es $S \in \mathbb{E}^{m\times m}$ und $T \in \mathbb{E}^{n\times n}$ gibt mit:*

$$B = SAT^{-1}$$

Falls $m = n$ nennen wir $A, B \in \mathbb{E}^{m\times n}$ ähnlich, *wenn es ein $S \in \mathbb{E}^{m\times m}$ gibt mit:*

$$B = SAS^{-1}.$$

9.2 Orthonormalbasis und Parsevalsche Formel

Definition 9.19
Sei $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Skalarprodukt auf V.

- *$\mathcal{B}$ heisst* orthogonal $\Leftrightarrow \quad \langle b_k, b_l\rangle = 0, \forall k \neq l$
  In Worten: Basisvektoren ßtehen $\perp$ aufeinander".

- *$\mathcal{B}$ heisst* orthonormal *(ONB)* $\Leftrightarrow \quad \langle b_k, b_l\rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$
  *In Worten: Basisvektoren ßtehen $\perp$ aufeinander"*und *haben Länge* 1.

Bemerkung 9.20
Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i\in I}$ Basis von V. Per Definition von Basis kann man jedes $v \in V$ schreiben als $v = \sum_{i\in I} \alpha_i b_i$. Falls $\mathcal{B}$ eine ONB ist, so ist $\alpha_i = \langle b_i, v\rangle$, $\forall i \in I$,
$\Rightarrow$ *Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ sind $\langle b_i, v\rangle$.*

Satz 9.21
Sei $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ eine ONB von V. Dann gilt:

- *Die Koordinaten von $v \in V$ sind gegeben durch $\xi_k = \langle b_k, v\rangle_V$, $k \in \{1, ..., n\}$, d.h. $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle b_k, v\rangle_V b_k$.*

- *Falls $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v, w \in V$ sind, $\xi_k = \langle b_k, v\rangle_V, \eta_k = \langle b_k, w\rangle_V$, so gilt die* Parsevalsche Formel*:*

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle_V &= \xi^H \eta \\ &= \langle \xi, \eta\rangle \end{aligned}$$

Bemerkung 9.22
Die Parsevalsche Formel besagt, dass der Winkel zwischen zwei Vektoren von einem euklidischen/unitären Vektorraum V durch eine Koordinatentransformation nicht verändert wird, falls wir eine orthonormale Basis haben. Somit können wir eine Koordinatentransformation von V zu $\mathbb{E}$ finden und den Winkel mit dem uns bekannten euklidischen Skalarprodukt (d.h. Standardskalarprodukt) berechnen.

Bemerkung 9.23
Aus der Parsevalscher Formel folgt:

- $$\begin{aligned}\|v\|_V &:= \sqrt{\langle v,v\rangle_V}\\ &\overset{Parseval}{=} \|\xi\|\\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sphericalangle_V(v,w) &:= \arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle_V}{\|v\|_V\,\|w\|_V}\right)\\ &= \sphericalangle(\xi,\eta)\\ &= \arccos\left(\frac{\langle \xi,\eta\rangle}{\|\xi\|\,\|\eta\|}\right)\end{aligned}$$

- *$v \perp w$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_V \Leftrightarrow \xi \perp \eta$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$*

9.3 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Definition 9.24
Es seien X und Y zwei unitäre (bzw. orthogonale) Vektorräume. Eine lineare Abbildung $F : X \to Y$ heiss unitär *(bzw.* orthogonal*), falls für $x, y \in X$ gilt:*

$$\langle F(x), F(y)\rangle_Y = \langle x, y\rangle_X.$$

Satz 9.25 (Skript: Satz 6.13)
Für eine orthogonale oder unitře Abbildung $F : X \to F$ gilt:

(i) $\|F(x)\|_Y = \|x\|_X$*, d.h. F ist* längentreu *(oder* isometrisch*);*

(ii) $x \perp y \quad \Rightarrow \quad F(x) \perp F(y)$*, d.h. F ist* winkeltreu*;*

(iii) $ker(F) = \{0\}$*, d.h. F ist* injektiv*;*

Ist $dim(X) = dim(Y) < \infty$, so gilt zusätzlich:

(I) F ist ein Isomorphismus*;*

(II) Ist $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von X, so ist $\{F(b_1), ..., F(b_n)\}$ eine ONB von Y;

(III) F^{-1} ist unitär *(bzw.* orthogonal*;*

(IV) Die Abbildungsmatrix A bezüglich orthonormierten Basen in X und Y ist unitär *(bzw.* orthogonal*).*

9.4 Singulärwertzerlegung

Satz 9.26
Sei $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ symmetrisch ($A^T = A$) oder hermitesch ($A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T} = A$), dann gilt:

(i) *A hat nur reelle Eigenwerte*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal*

Bemerkung 9.27
Um einen Orthonormalbasis aus Eigenvektoren einer symmetisch/hermiteschen Matrix zu erhalten, muss man die Eigenvektoren nur normieren und gegebenenfalls mit Gram-Schmidt orthogonalisieren (macht man falls es einen Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit > 1 gibt).

Satz 9.28 (Singulärwertzerlegung)
Sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$, $rang(A) =: r \leq min\{m, n\}$. Dann existieren $U \in \mathbb{E}^{m\times m}$ orthogonal/unitär, $V \in \mathbb{E}^{n\times n}$ orthogonal/unitär, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \underbrace{\mathbf{0}}_{r} & \underbrace{\mathbf{0}}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, m-r \end{matrix}, \qquad mit\ \Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r > 0$$

eine verallgemeinerte Diagonalmatrix mit Singulärwerten *$\sigma_1, ..., \sigma_r$ ist, so dass $A = U\Sigma V^H$, d.h. A besitzt eine Singulärwertezerlegung.*

Satz 9.29
Sei $A \in \mathbb{E}^{m\times n}$.

$$\begin{aligned} A^H A &= (U\Sigma V^H)^H U\Sigma V^H \\ &= V \underbrace{\Sigma^H}_{=\Sigma^T;} \underbrace{U^H U}_{=\mathbb{1}_n \text{ da } U \text{ unitär}} \Sigma V^H \\ &= V\Sigma^T\Sigma V^H \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *$A^H A$ ist ähnlich zu (im Sinne von unitärer Spektralzerlegung) zu*

$$\Sigma^T\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

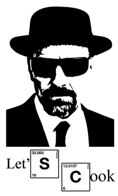
$\Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, *wobei* λ_i *die positiven reellen Eigenwerte von* $A^H A$ *sind.*

Anwendung.

1) *Die Singulärwertzerlegung ist gewissermassen eine Verallgemeinerung von der Spektralzerlegung für Rechtecksmatrizen.*

2) *Singuläre LGS und Ausgleichsprobleme (kleinste Quadrate) lösen.*

3) *Bildkompressionsverfahren. Dabei wird ein Bilde als Matrix von Farbwerten betrachtet, wovon die Singulärwertzerlegung berechnet wird. Bei der Rücktransformation von* $U\Sigma V^H$ *nach* A *werden aber nur noch die ßtark von* 0 *abweichendenSSingulärwerte gespeichert, im Betrag kleine Singulärwerte werden vernachlässigt.*



Kochrezept 9.30 (Singulärwertzerlegung)
Gegeben: $A \in \mathbb{E}^{m \times n}, \;\; m \geq n$ *(sonst betrachte* A^H*)*
Gesucht: $U \in \mathbb{E}^{m \times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, V \in \mathbb{E}^{n \times n}$

1) *Berechne* $B = A^H A \in \mathbb{E}^{n \times n}$

2) *Berechne die Eigenwerte von* B*, "nummeriereßie der Grösse nach:*

$$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0,$$

wobei $r = rang(B) = rang(A^H A)$

3)

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, & i = j \\ 0, & sonst \end{cases}$$

4) *Bilde die Orthonormalbasis* $\{w_1, ..., w_n\}$ *mit Gram-Schmidt mit Eigenvektoren* $\{v_1, ..., v_n\}$ *von* B*. (Betrachte* $B = A^H A$ *ist hermitesch, d.h. verwende Bemerkung 9.27)*

$$\Rightarrow \quad V = (w_1 | \cdots | w_n)$$

5)

$$\forall i \in \{1, ..., r\} \;\; \textit{definiere} \;\; u_1 := \frac{1}{\sigma_i} A w_i \quad \Rightarrow \quad u_i \textit{ sind orthonormal/unitär}$$

Ergänze $\{u_1, ..., u_r\}$ *zu einer Orthonormalbasis von* $\mathbb{E}^{m \times m}$ *mit Gram-Schmidt*

$$\Rightarrow \quad U = (u_1 | ... | u_m)$$

6) Test: $A \stackrel{?}{=} U\Sigma V^H$ ✓

Beispiel 9.31
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: U, Σ, V *so dass* $A = U\Sigma V^H$*; Zusatzfrage: Beschreibe die vier Fundamentalräume gemäss Satz 11.1 (siehe Skirpt).*

1)

$$B = A^H A = A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Eigenwerte berechnen von B:

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-6) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 = 6 > \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

3)

$$\sigma_1 = \sqrt{6}, \ \ \sigma_2 = \sqrt{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$E_6 = ker(B - 6\mathbb{1}) = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{normieren}{\rightsquigarrow} w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = ker(B - \mathbb{1}) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{normieren}{\rightsquigarrow} w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_3} &= e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1 - \langle e_2, u_2\rangle u_2\\
&= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{30}}\frac{1}{\sqrt{30}}\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{5}{30}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{\widetilde{u_3}}{\|\widetilde{u_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

6) Test: $A = U\Sigma V^H$ ✓

7) Die vier Fundamentalräume:

$$\begin{aligned}
im(A) &= \{u_1, u_2\}\\
im(A^H) &= \{w_1, w_2\}\\
ker(A^H) &= \{u_3\}\\
ker(A) &= \{\}
\end{aligned}$$

Beispiel 9.32
Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: U, Σ, V *so dass* $A = U\Sigma V^H$

Lösung:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis