ETH Zürich FS 2023
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Rasmus Kyng, Prof. Angelika Steger, Prof. Emo Welzl
Marc Kaufmann, Ulysse Schaller

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Peer-Aufgaben 3

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Die Zufallsvariable X wird aus $\{1, \ldots, n\}$ gezogen, die Zufallsvariable Y aus $\{1, \ldots, X\}$. Also ist $Y \leq X$ immer erfüllt. Ist $X = i$, so bleiben noch i viele Möglichkeiten für Y übrig. Wir summieren die Möglichkeiten auf und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alternativ können wir die Möglichkeiten auch wie folgt abzählen: Für alle $i > j$ ist das Paar (i, j) zulässig, aber nicht das Paar (j, i). Dafür gibt es $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten. Ausserdem sind auch noch die n Paare $(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)$ zulässig. Die Gesamtzahl addiert sich so zu

$$n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Wir wissen per Definition dass $X \geq Y$ immer erfüllt ist. Falls $x < y$ ist, so gilt also

$$f_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x, Y = y] = 0.$$

Falls $x \geq y$, so haben wir zunächst eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$, dass $X = x$ gilt, und anschliessend, bedingt auf $X = x$, eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{x}$, dass $Y = y$ gilt (denn Y wird uniform zufällig aus $\{1, \ldots, x\}$ gezogen). In diesem Fall gilt also

$$f_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x, Y = y] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y \mid X = x] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x}.$$

Zusammengefasst ist die gemeinsame Dichte somit

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/(nx), & 1 \leq y \leq x \leq n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Wir benützen Teilaufgabe (b) und erhalten für die Randdichte von Y

$$f_Y(y) = \Pr[Y = y] = \sum_{x=1}^{n} f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{x=y}^{n} \frac{1}{x} = \frac{1}{n}(H_n - H_{y-1}).$$

(d) Sei $x \in \{1, \ldots, n\}$ fixiert. Falls $X = x$ und $y > x$, so ist die Wahrscheinlichkeit für $Y = y$ null, da wir Y nur aus $\{1, \ldots, x\}$ ziehen. Wenn $y \leq x$, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{x}$. Formal ist die Verteilung von Y, gegeben $X = x$, also

$$\Pr[Y = y \mid X = x] = \begin{cases} 1/x, & y \leq x; \\ 0, & y > x. \end{cases}$$

(e) Nach der Definition von bedingter Wahrscheinlichkeit gilt

$$\Pr[X = x \mid Y = y] = \frac{\Pr[X = x, Y = y]}{\Pr[Y = y]} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Nun wenden wir die Teilaufgaben (b) und (c) an und erhalten

$$\Pr[X = x \mid Y = y] = \begin{cases} 1/(x(H_n - H_{y-1})), & x \geq y; \\ 0, & x < y. \end{cases}$$

(f) Betrachten wir den Fall $Y = n$, so ist es intuitiv klar, dass die beiden Zufallsvariablen nicht unabhängig sein können: Wenn tatsächlich $Y = n$ eintritt, so *muss* $X = n$ gelten nach Teilaufgabe (b). Wenn wir nur die Zufallsvariable Y betrachtet haben, wissen also bereits auch Informationen über X. Um formal zu zeigen, dass X und Y nicht unabhängig sind, rechnen wir nach und sehen mit Teilaufgabe (b), dass

$$\Pr[X = n, Y = n] = \frac{1}{n^2}.$$

Andererseits impliziert Teilaufgabe (c), dass

$$\Pr[Y = n] = \frac{1}{n^2},$$

und somit folgt tatsächlich

$$\Pr[X = n] \cdot \Pr[Y = n] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \neq \frac{1}{n^2} = \Pr[X = n, Y = n].$$

(g) (X', Y') hat den gleichen Wertebereich wie (X, Y), und im Fall $x < y$ gilt sicher

$$f_{X',Y'}(x, y) = 0.$$

Andernfalls wenden wir wie in Teilaufgabe (b) denn Multiplikationssatz an und sehen, dass

$$f_{X',Y'}(x, y) = \Pr[X' = x, Y' = y] = \Pr[Y' = y] \cdot \Pr[X' = x \mid Y' = y] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n - y + 1}.$$

Also ist die gemeinsame Dichte

$$f_{X',Y'}(x, y) = \begin{cases} 1/(n(n - y + 1)), & x \geq y; \\ 0, & x < y. \end{cases}$$

Insbesondere sehen wir, dass (X, Y) und (X', Y') zwar den gleichen Wertebereich aufweisen, aber unterschiedliche gemeinsame Dichten besitzen.