ETH Zürich FS 2023
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Rasmus Kyng, Prof. Angelika Steger, Prof. Emo Welzl
Marc Kaufmann, Ulysse Schaller

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Peer-Aufgaben 2 — Lösung

Lösung zu Aufgabe 1

(a) (i) Sei $\Omega = \{0, 1\}$ ein Laplace Raum und $A = \{0\}, B = \{1\}$. Dann gilt

$$\Pr[A] = 0.5 > \Pr[A \mid B] = 0.$$

(ii) Dies ist unmöglich. Man erkennt das schnell, wenn man ein Venn-Diagram betrachtet. Formal gibt es zwei einfache Möglichkeiten, diese Aussage zu beweisen:

Variante 1: Wir verwenden zuerst die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

Wir wissen, dass $\Pr[B] = 3/4$. Anhand eines Venn Diagrams sieht man leicht, dass $\Pr[A \cap B] \geq 1/2$, formal kann man die Siebformel verwenden um dies zu beweisen: $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cup B] \geq 3/4 + 3/4 - 1 = 1/2$.

Daraus folgt:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \geq \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4}.$$

Variante 2: Wir verwenden den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, der besagt, dass

$$\Pr[A] = \Pr[A \mid B] \cdot \Pr[B] + \Pr[A \mid \bar{B}] \cdot \Pr[\bar{B}].$$

Wenn wir $\Pr[\bar{B}] = 1 - \Pr[B]$ verwenden und nach $\Pr[A \mid B]$ auflösen erhalten wir

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A] - \Pr[A \mid \bar{B}] \cdot (1 - \Pr[B])}{\Pr[B]}$$

Wenn wir nun verwenden, dass $\Pr[A \mid \bar{B}] \leq 1$ und $\Pr[B] = 3/4, \Pr[A] = 3/4$ erhalten wir

$$\Pr[A \mid B] \geq \frac{3/4 - 1 \cdot 1/4}{3/4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4}.$$

(b) Den direktesten Weg einen Wahrscheinlichkeitsraum zu definieren, erhält man, indem man die Knoten des Graph C_6 im Uhrzeigersinn von 1 bis 6 numeriert (beginnend bei einem beliebigen Knoten) und Ω als Laplaceraum über die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, 6\}$ definiert.

Wir analysieren nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Greedy-Algorithmus 3 Farben braucht. Wir nennen die Farben, die dem Greedyalgorithus zur Verfügung stehen a, b, c. Wir wissen, das Greedy höchstens drei Fraben braucht, da der Graph C_6 Maximalgrad 2 hat. Wenn Greedy einen neuen Knoten färbt, färbt es ihn mit der "kleinsten" Farbe (wir verwenden die alphabetische Reihenfolge der Farben), die noch nicht in der Nachbarschaft dieses Knoten auftaucht.

Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass wir den Knoten 1 zuerst färben, da das Problem symmetrisch bezüglich des Startknotens ist. D.h. Knoten 1 wird mit Farbe a gefärbt.

Wir betrachten nun die drei Knoten 3,4,5 und Unterscheiden 3 Fälle, je nachdem welcher dieser drei Konten zuerst von Greedy gefärbt wird.

Wenn wir von 3,4,5 zuerst den Knoten 4 färben, werden wir ihn sicher mit der gleichen Farbe a wie Knoten 1 färben (da seine einzigen Nachbarn 3,5 noch ungefärbt sind und wir die kleinstmögliche Farbe verwenden). Man sieht schnell, dass jede Färbung, in der Knoten 1,4 die gleiche Farbe haben mindestens drei Farben braucht (und wie oben bemerkt, brauch Greedy nie mehr als 3 Farben). Das bedeutet, dass wir in diesem Fall 3 Farben benötigen.

Wenn wir von 3,4,5 zuerst den Knoten 3 färben, wird dieser Farbe a erhalten: Der Nachbar 4 ist ungefärbt, und der Nachbar 2 ist nicht mit a gefärbt (da 1 mit a gefärbt ist). Das bedeutet, dass wir 5 auch mit a Färben werden (da keiner seiner Nachbarn $4, 6$ mit a gefärbt sein kann) und dann wissen wir auch, dass wir $2, 4, 6$ mit b gefärben sein werden. Also verwendent Greedy in diesem Fall 2 Farben.

Der Fall, dass wir von 3,4,5 zuerst den Knoten 5 färben ist symmetrisch zum Fall, dass wir den Knoten 3 zuerst färben und Greedy kommt mit 2 Farben aus.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer uniform zufälligen Permutation, die mit 1 beginnt, der Knoten 4 vor 3 und 5 auftaucht ist genau 1/3. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass Greedy drei Farben braucht genau 1/3.

(c) Wir definieren $\Omega = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, \ldots, 6\}\}$ als Laplaceraum. Hier entsprechen a, b den Augenzahlen des ersten bzw. zweiten Würfels.

Ich gewinne falls eines der folgenden Elementarereignisse auftritt:
$(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$

Meine Schwester gewinnt nicht, falls einer der beiden Würfel eine gerade Zahl zeigt.

Das heisst, der Fall dass ich gewinne und meine Schwester nicht, tritt genau für folgende Elementarereignisse ein: $(4, 6), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$. Da es sich um einen Laplaceraum mit 36 Elementarereignissen handelt, ist die Wahrscheinlichkeit hierfür $5/36$.