# Serie 2

**Abgabe:** Bis am 08.03.2024 um 18:00 einzureichen (SAM-UP).

## Konvergenz/Divergenz

### Beispiel 1: Konvergenz der Folge $\left(\frac{n^3+2n^2}{n^3+n+1}\right)$

Betrachte die Folge $a_n = \frac{n^3+2n^2}{n^3+n+1}$. Diese Folge konvergiert gegen 1, da der führende Term in Zähler und Nenner $n^3$ ist. Eine detaillierte Betrachtung zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{2}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{1} = 1.$$

### Beispiel 2: Divergenz

Die Folge mit exponentiellem Wachstum $d_n = 2^n$ wächst exponentiell und ist ein klassisches Beispiel für eine divergierende Folge. Mit jedem Schritt verdoppelt sich der Wert des Terms, was zu einem schnellen Anstieg führt.

Der Beweis für die Divergenz dieser Folge ergibt sich aus ihrem exponentiellen Wachstum. Für jede noch so große Zahl $M$, existiert ein $N$, sodass für alle $n > N, d_n = 2^n > M$ gilt. Dies zeigt, dass die Folge gegen Unendlich strebt.

### Beispiel 3: Divergenz

Die Folge mit alternierenden Termen $c_n = (-1)^n \cdot n$ zeigt ein alternierendes Verhalten, wobei $c_i$ entweder positiv oder negativ ist, abhängig von der Parität von $n$. Trotz des alternierenden Zeichens divergiert diese Folge, da der Betrag jedes Gliedes unbegrenzt wächst. Um die Divergenz dieser Folge zu beweisen, betrachten wir den Betrag der Glieder der Folge. Unabhängig vom Vorzeichen wird der Betrag $|c_n| = |(-1)^n \cdot n| = n$ mit jedem Schritt größer. Da $n$ gegen Unendlich strebt, tut dies auch der Betrag der Folge, was die Divergenz von $c_n$ beweist.

### Beispiel 4: Konvergenz

**Beweis der Konvergenz von $a_n = \frac{1}{n}$**

Um die Konvergenz dieser Folge zu zeigen, nutzen wir die Definition der Konvergenz einer Folge. Eine Folge $(a_n)$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N$ existiert, sodass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Wählen wir $a = 0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$, jetzt müssen wir ein $N$ finden, so dass für alle $n > N$ gilt: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, was äquivalent zu $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ist.

Wählen wir $N$ so, dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$, dann gilt für alle $n > N$, dass $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, was die Konvergenz der Folge gegen 0 beweist.

## Verhalten von Folgenprodukten

Es ist **falsch** zu glauben, dass, wenn $a_n \to 0$ und $b_n \to \infty$, dann notwendigerweise $a_n \cdot b_n \to 0$. Tatsächlich kann das Verhalten von $a_n \cdot b_n$ je nach Wahl der Folgen $a_n$ und $b_n$ sehr unterschiedlich sein.

Ein klassisches Beispiel zur Demonstration dieses Phänomens ist die Setzung $a_n = \frac{c_n}{n^2}$ und $b_n = n^2$. Dann ist $a_n \cdot b_n = c_n$, und das Verhalten von $c_n$ bestimmt das Verhalten des Produkts. Hier sind einige konkrete Beispiele:

- Wenn wir $c_n = 1$ für alle $n$ wählen, dann konvergiert $a_n \cdot b_n = c_n$ gegen 1.
- Setzen wir $c_n = n$, so divergiert $a_n \cdot b_n = c_n$ offensichtlich gegen Unendlich.

- Wählen wir $c_n = (-1)^n$, dann oszilliert $a_n \cdot b_n = c_n$ zwischen -1 und 1 und konvergiert nicht.

Diese Beispiele zeigen, dass das Produkt $a_n \cdot b_n$ konvergieren, divergieren oder oszillieren kann, unabhängig davon, dass $a_n \to 0$ und $b_n \to \infty$. Die spezifische Natur des Grenzwertes hängt vollständig von der Struktur der Folge $c_n$ ab.

## $\sqrt[n]{a}$

Serie 2: Aufgabe 2.2.

## Rekursion

Beispiel 2.2.8 aus dem Skript.