Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Johannes Lengler

Institut für Theoretische Informatik

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Rasmus Kyng, Angelika Steger, Emo Welzl

Institut für Theoretische Informatik

Kapitel 1

Graphentheorie

Überblick

A&D:

- Breiten- und Tiefensuche
- Eulertouren
- Minimal spannende Bäume
- Kürzeste Wege

A&W:

- Zusammenhang
- Hamiltonkreise
- Matchings
- Färbungen

Kapitel 1.3

Zusammenhang

Zusammenhang

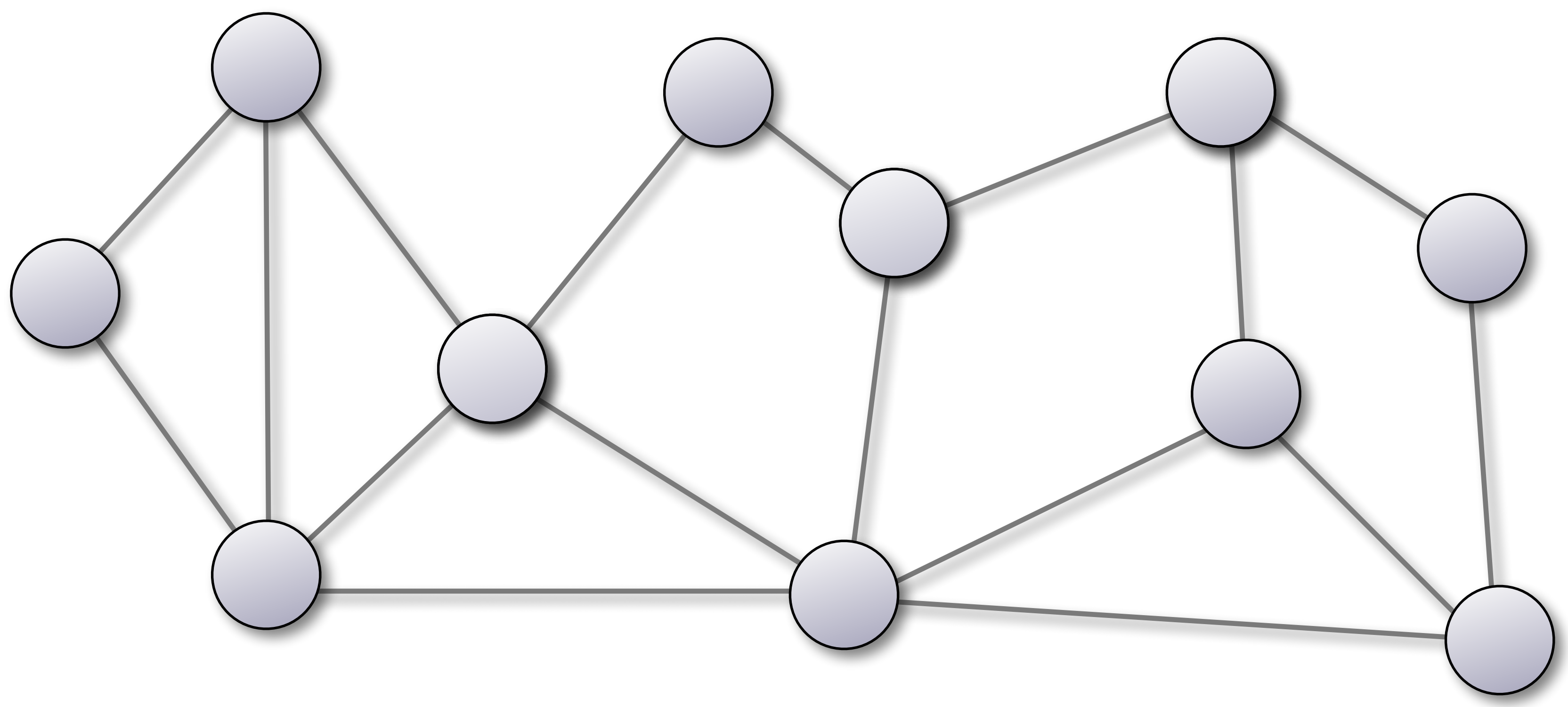
Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
G heisst zusammenhängend, wenn
$\forall u, v \in V, u \neq v$ gilt: es gibt einen u-v-Pfad in G.

Heute:

Gegeben ein zusammenhängender Graph.

Wie (sehr) zusammenhängend ist dieser Graph?

Zusammenhang



Wieviele Knoten / Kanten muss man (mindestens) löschen, um den Zusammenhang des Graphen zu zerstören?

Separatoren und k-Zusammenhang

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $u, v \in V$ und $X \subseteq V \setminus \{u, v\}$.

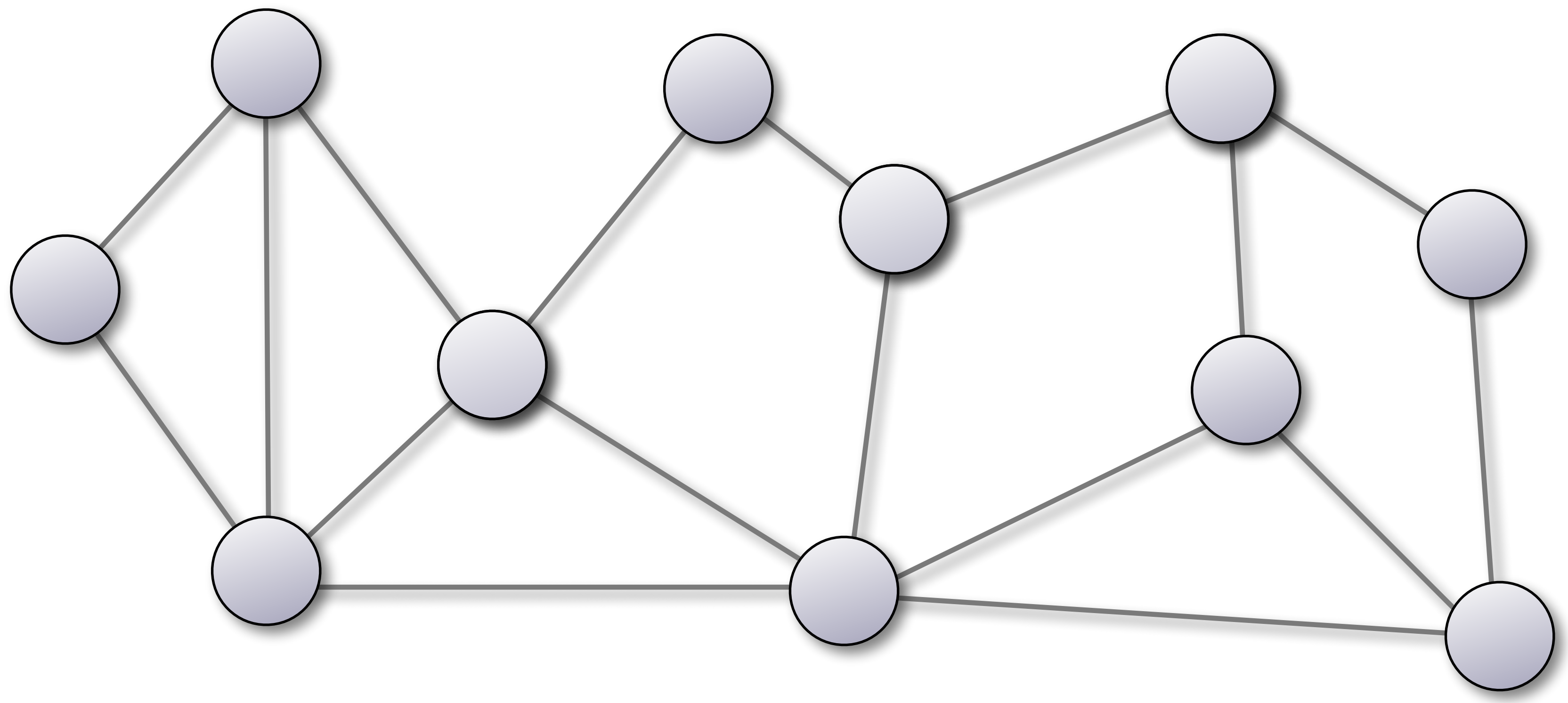
X heisst u-v-Separator, wenn u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G[V \setminus X]$ liegen.

G heisst k-zusammenhängend, wenn gilt:

- $|V| \geq k + 1$ und
- $\forall u, v \in V$: Jeder u-v-Separator X hat Grösse $|X| \geq k$.

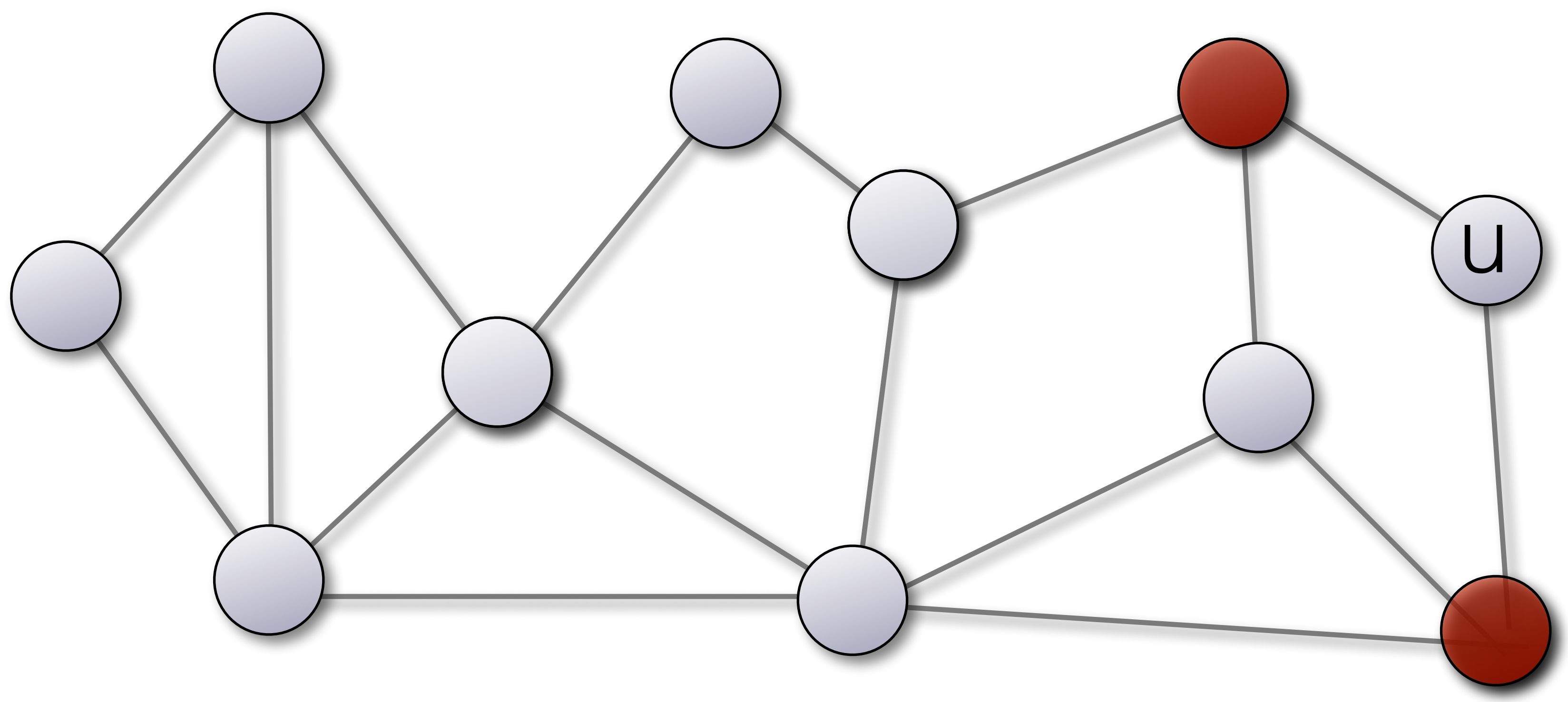
Anschaulich:

Man muss mindestens k Knoten (und die inzidenten Kanten) löschen, um den Zusammenhang zu zerstören.



Graph ist 2-zusammenhängend:

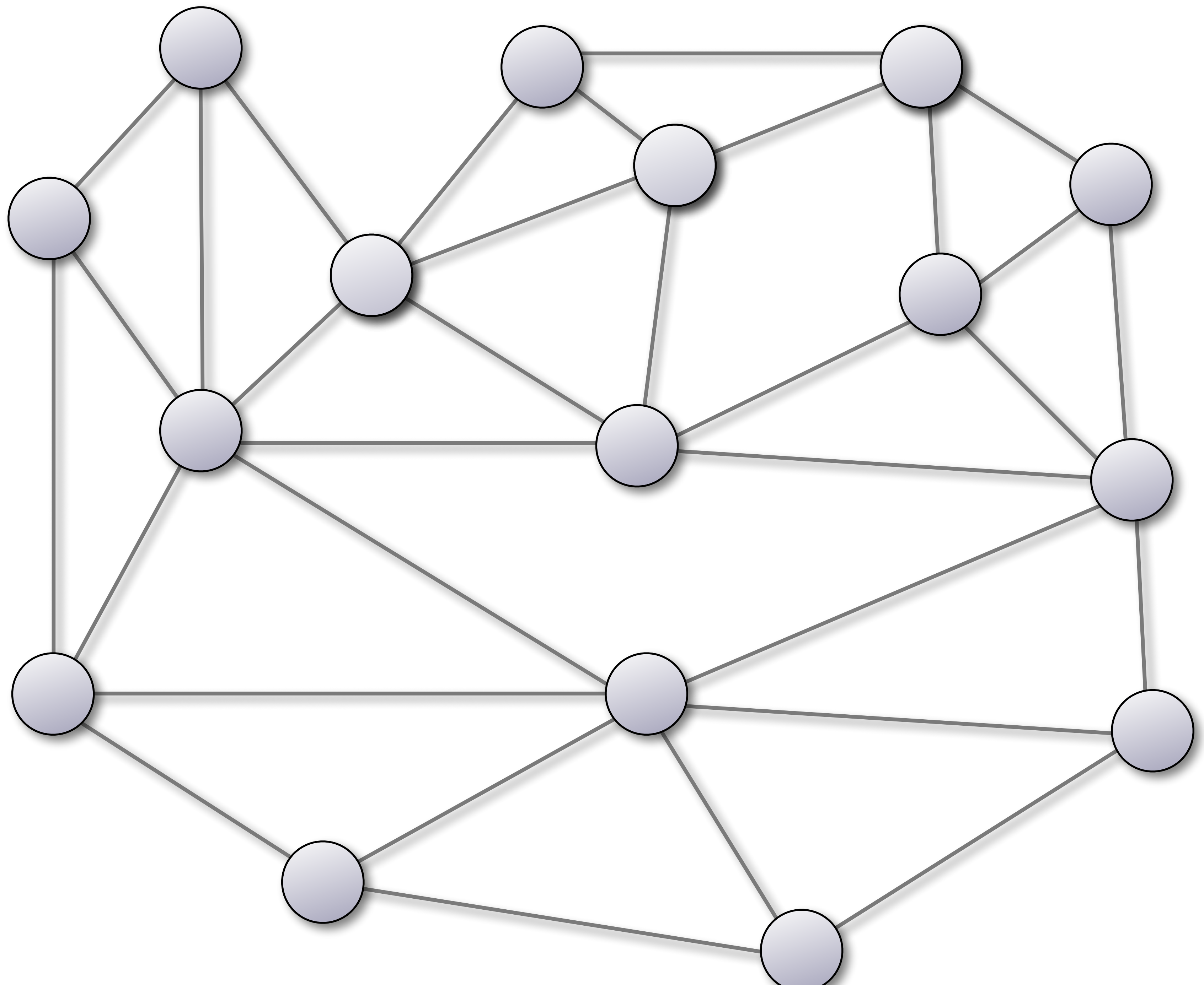
Es gibt keine Separatoren der Grösse 1. (Ausprobieren!)

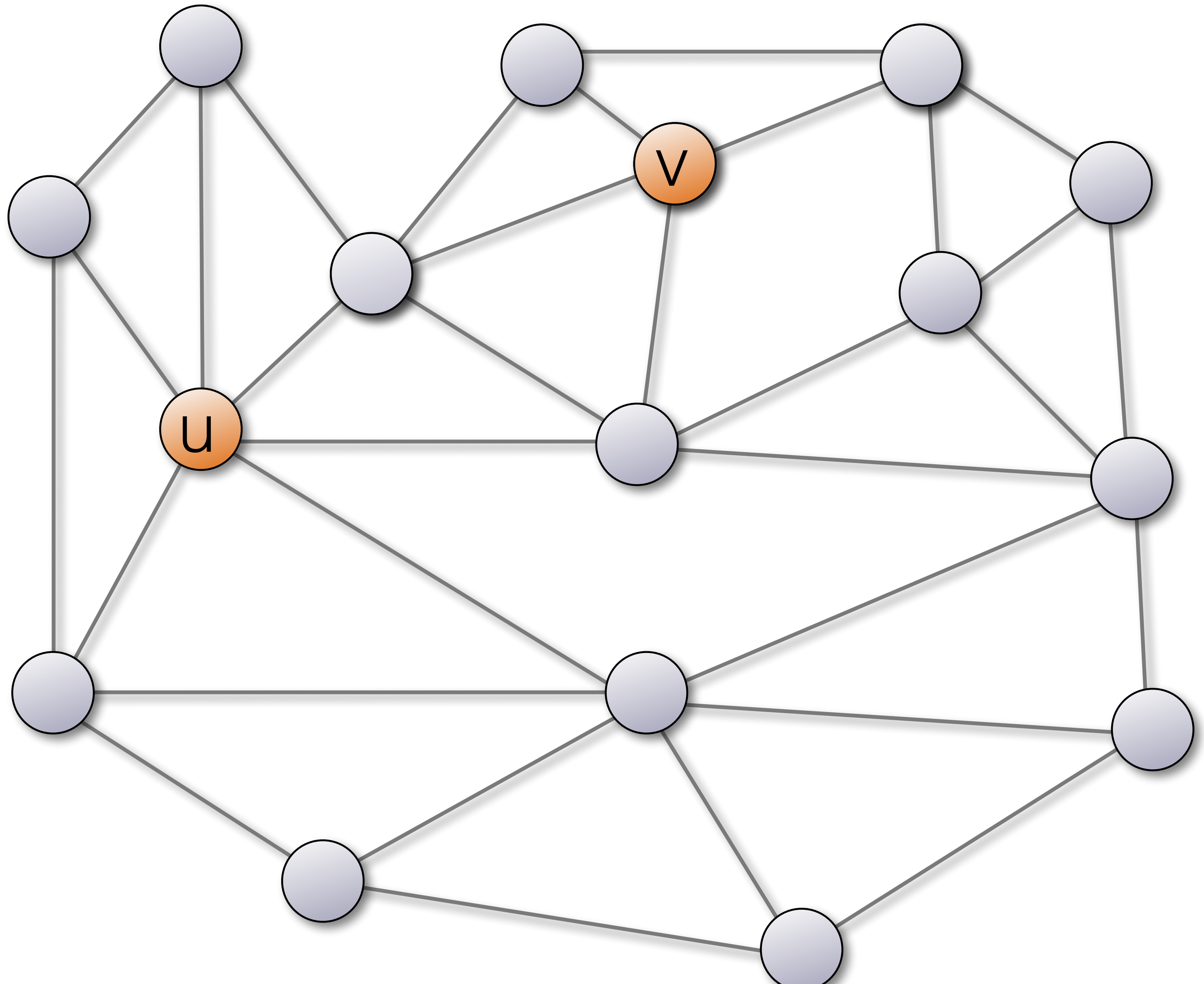


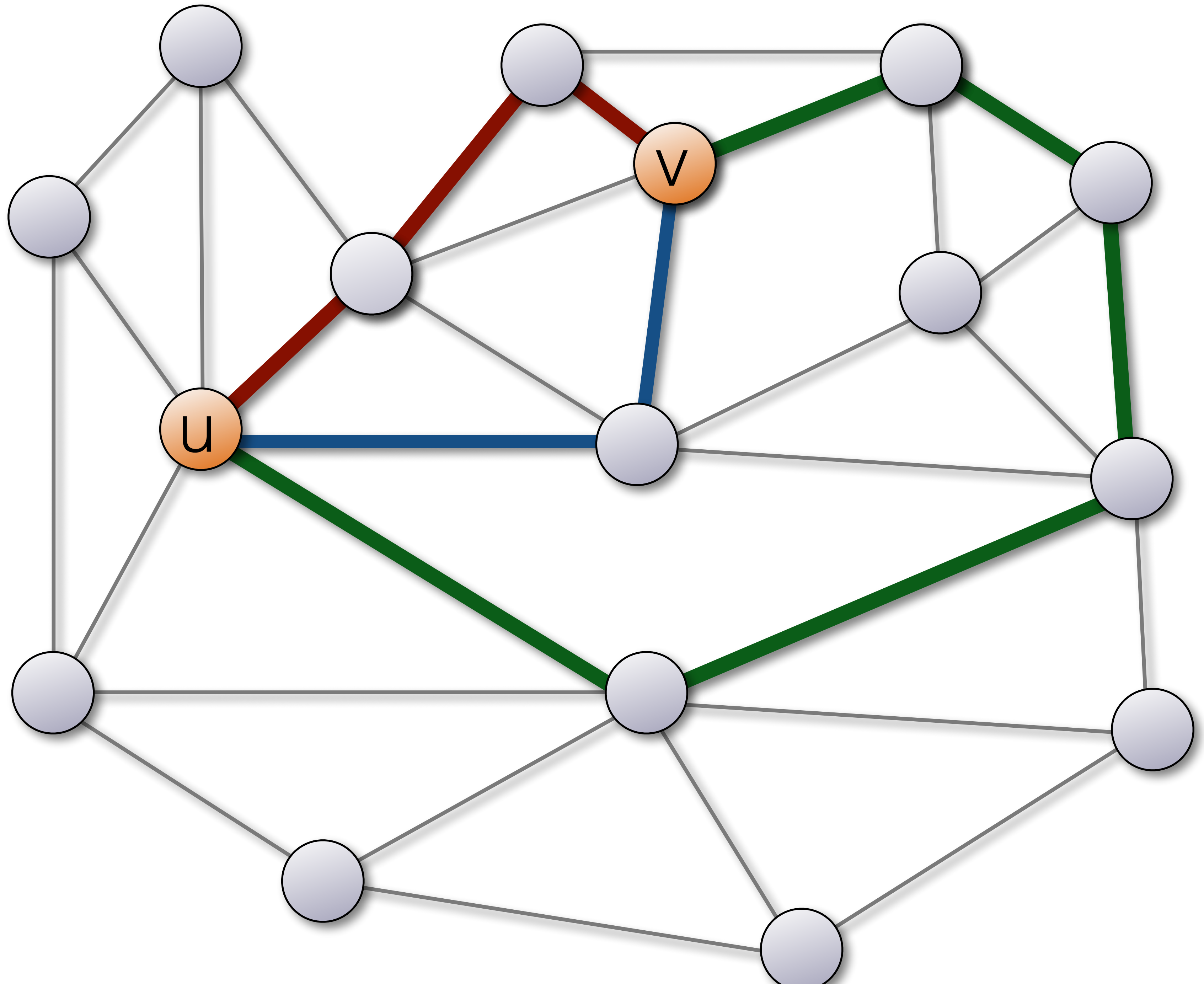
Graph ist **nicht** 3-zusammenhängend

Es gilt allgemein:

Enthält G einen Knoten mit **Grad < k** so ist G **nicht k-zusammenhängend**.




v
u


v
u

Satz von Menger (Knoten-Version):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$. Dann gilt:

Jeder u-v-Separator X hat Grösse $|X| \geq k$.

$\Longleftrightarrow$ Es gibt k intern-knotendisjunkte u-v-Pfade.

(Beweis: später im allgemeineren Kontext)

Separatoren und k-Zusammenhang

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $u, v \in V$ und $X \subseteq V \setminus \{u, v\}$.

X heisst u-v-$\mathrm{Separator}$, wenn u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G[V \setminus X]$ liegen.

G heisst k-zusammenhängend, wenn gilt:

- $|V| \geq k + 1$ und
- $\forall u, v \in V\colon$ Jeder u-v-$\mathrm{Separator}$ X hat Grösse $|X| \geq k$.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $u, v \in V$ und $X \subseteq E$.

X heisst u-v-Kanten-$\mathrm{Separator}$, wenn u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G' = (V, E \setminus X)$ liegen.

G heisst k-kanten-zusammenhängend, wenn gilt:

- $\forall u, v \in V\colon$ Jeder u-v-$\mathrm{Kantenseparator}$ X hat Grösse $|X| \geq k$.

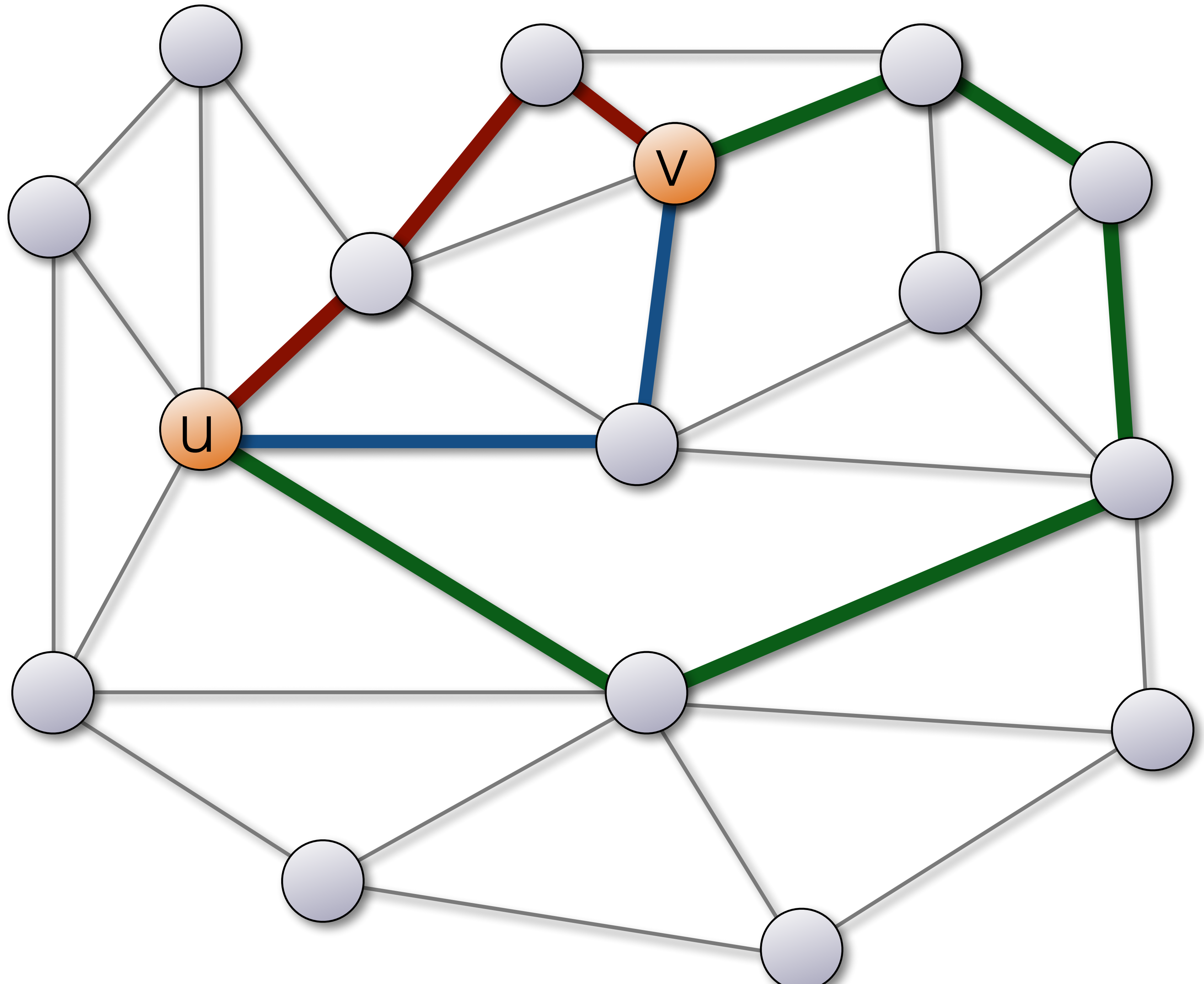
Satz von Menger (Kanten-Version):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$. Dann gilt:

Jeder u-v-Kantenseparator X hat Grösse $|X| \geq k$.

$\iff$ Es gibt k kantendisjunkte u-v-Pfade.

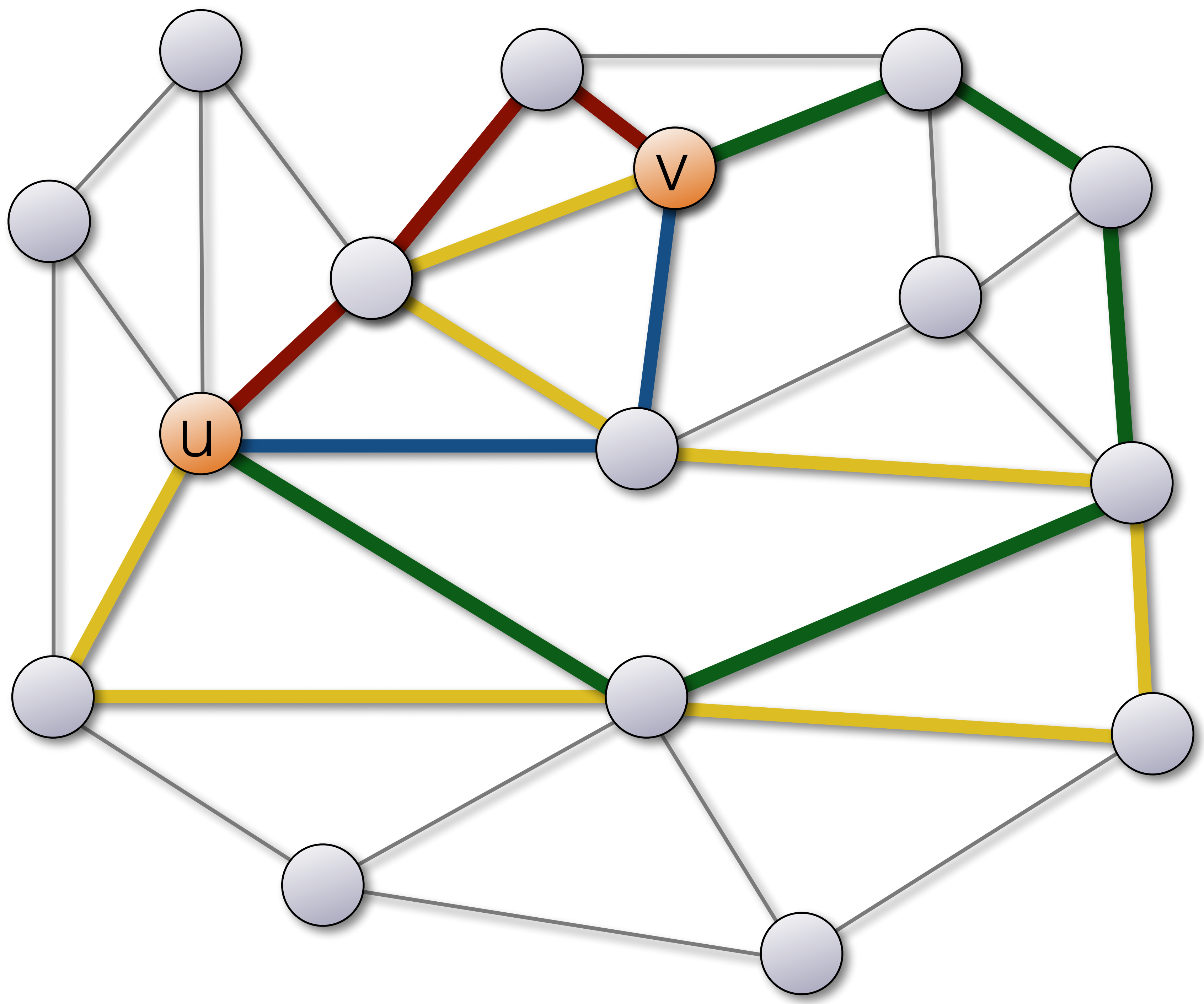
(Beweis: später im allgemeineren Kontext)



v
u

Es gilt immer:

(Knoten-)Zusammenhang ≦ Kanten-Zusammenhang ≦ minimaler Grad

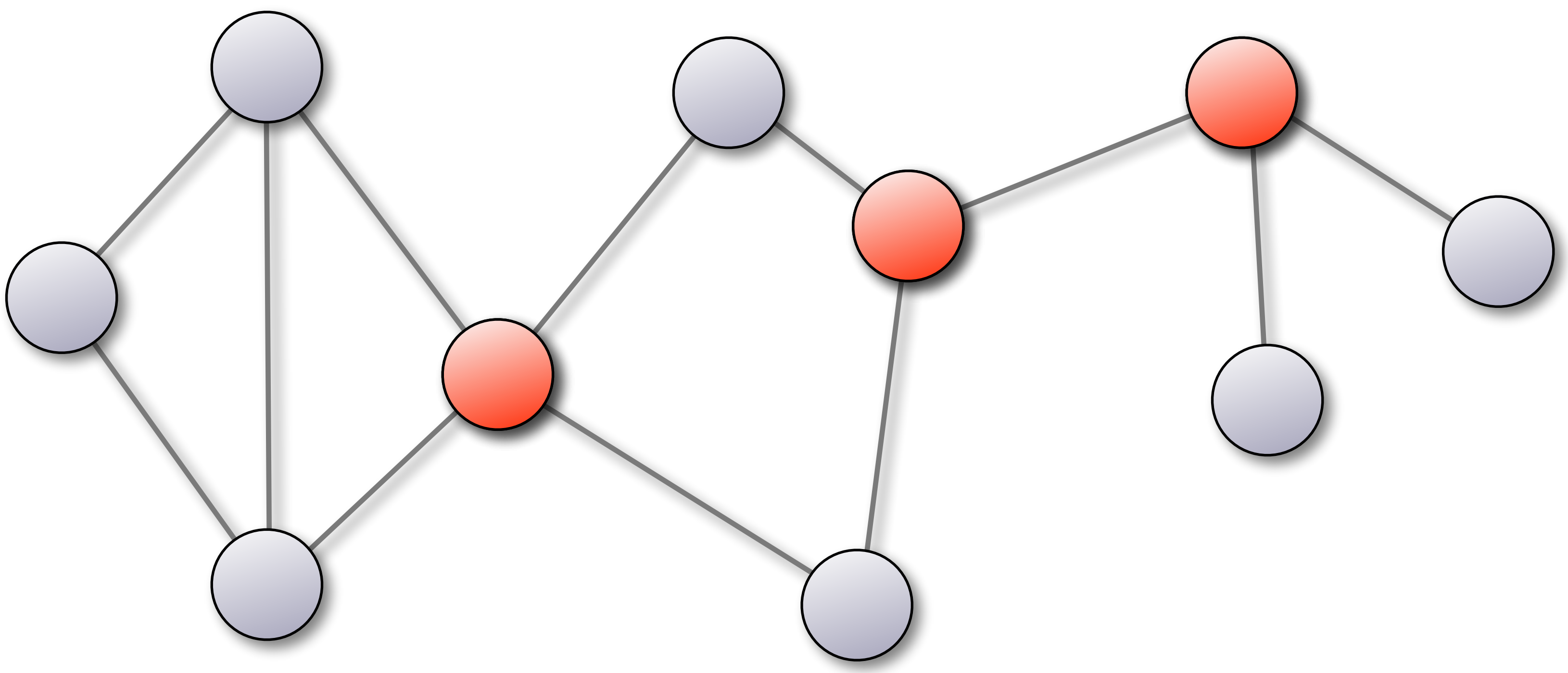


Heute:

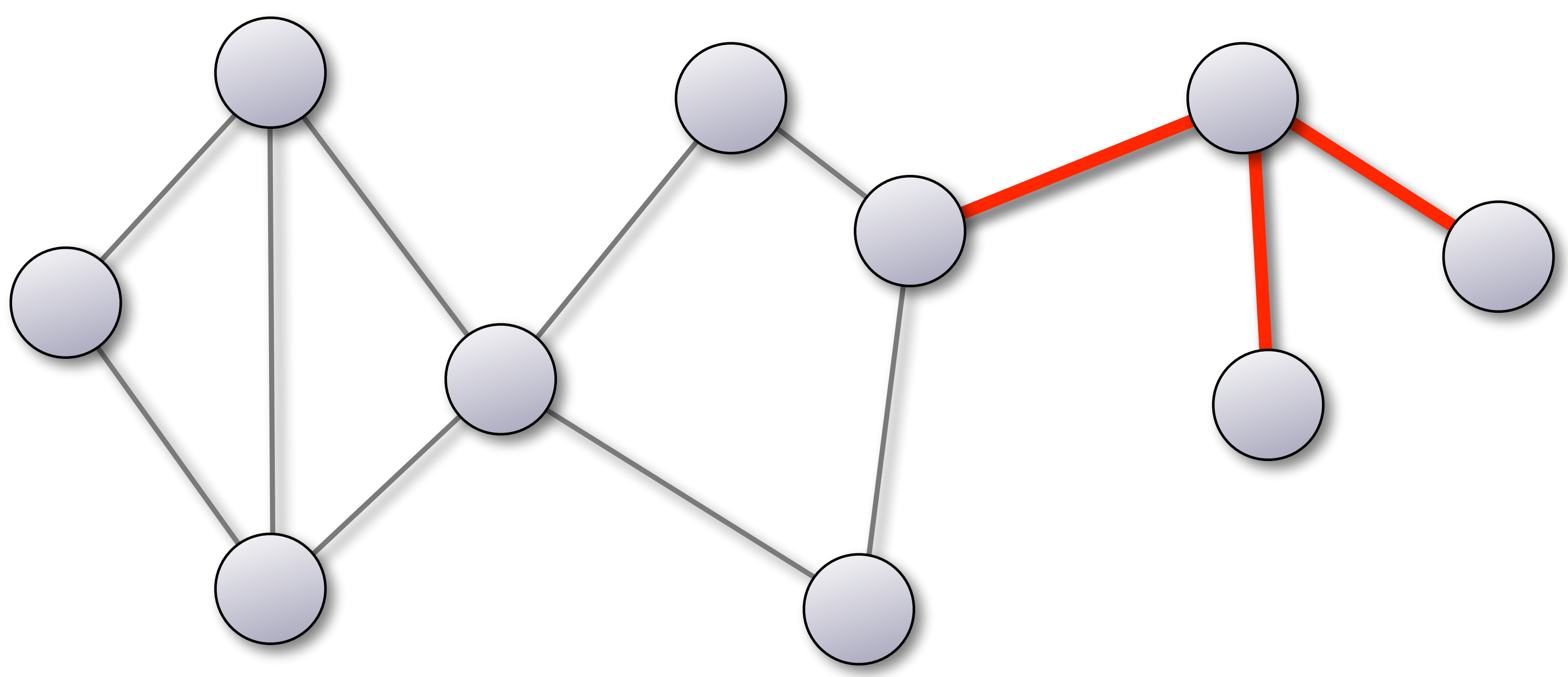
Spezialfall $k=1$

Artikulationsknoten

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.
Ein Knoten $v \in V$ heisst *Artikulationsknoten* (engl. cut vertex)
gdw. $G[V \setminus \{v\}]$ nicht zusammenhängend ist



Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.
Ein Kante $e \in E$ heisst *Brücke* (engl. cut edge)
gdw. $G - e$ nicht zusammenhängend ist

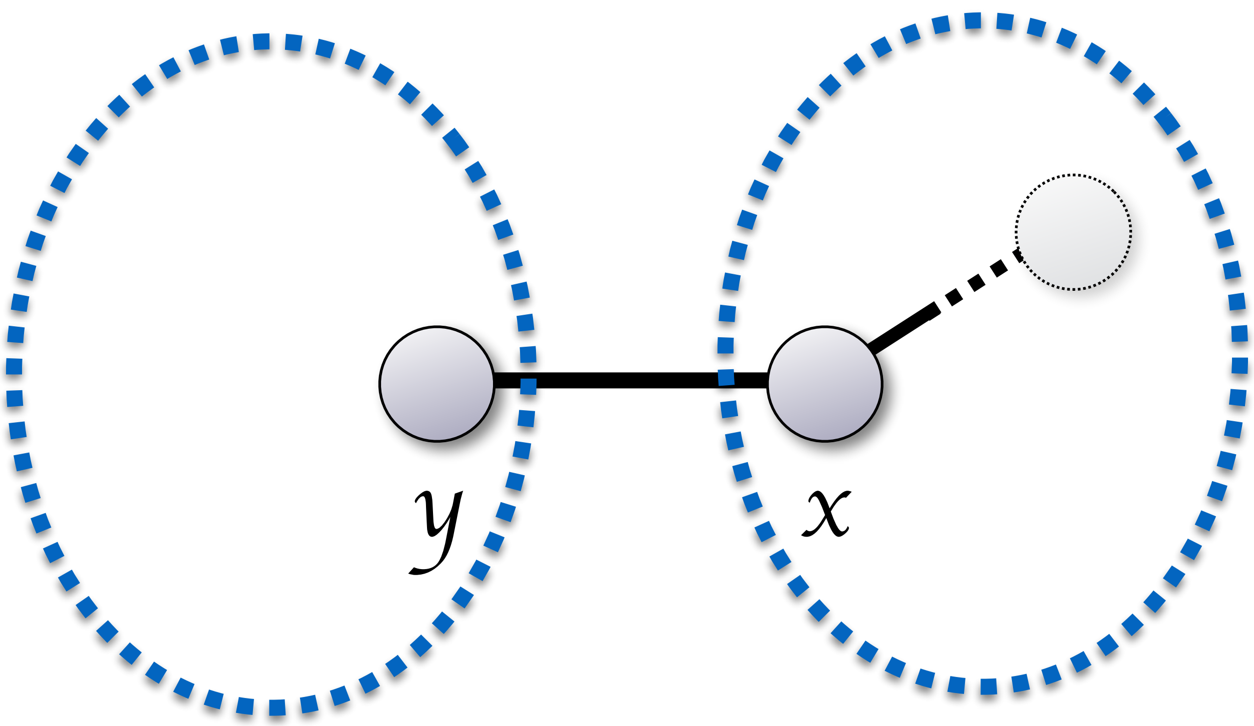


Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ist $\{x, y\} \in E$ eine Brücke so gilt:

deg(x) = 1 oder x ist Artikulationsknoten

(und analog für y).

Beweisidee:



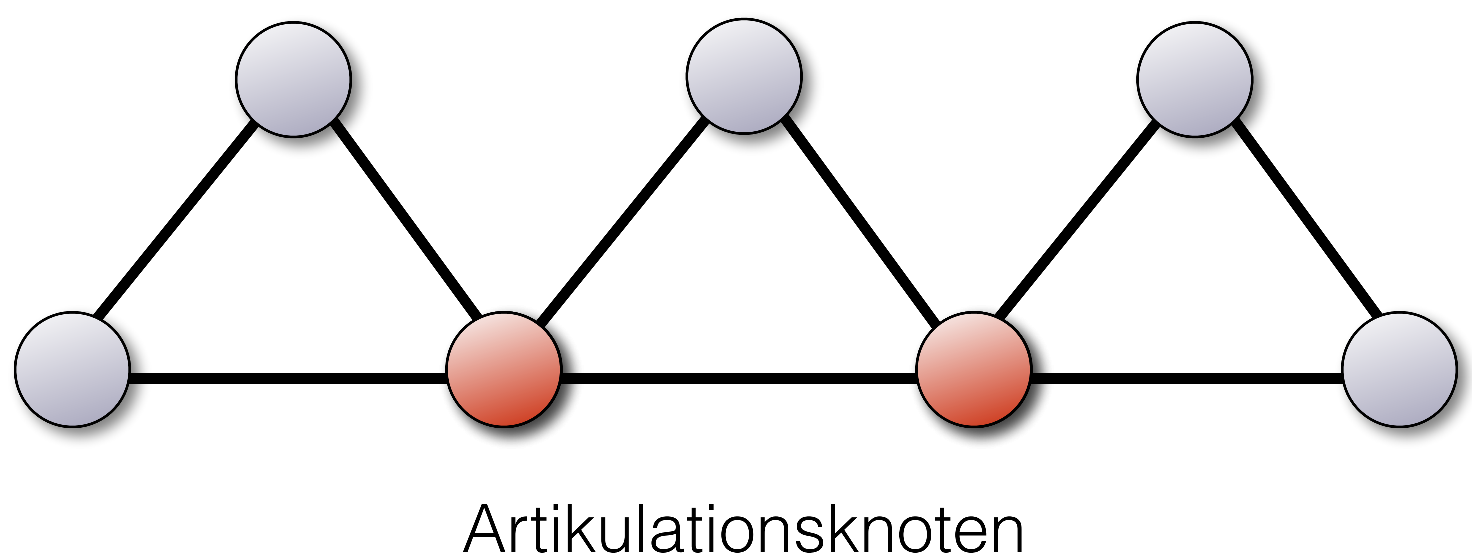
Artikulationsknoten und Brücken

Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ist $\{x, y\} \in E$ eine Brücke so gilt:

deg(x) = 1 oder x ist Artikulationsknoten

(und analog für y).

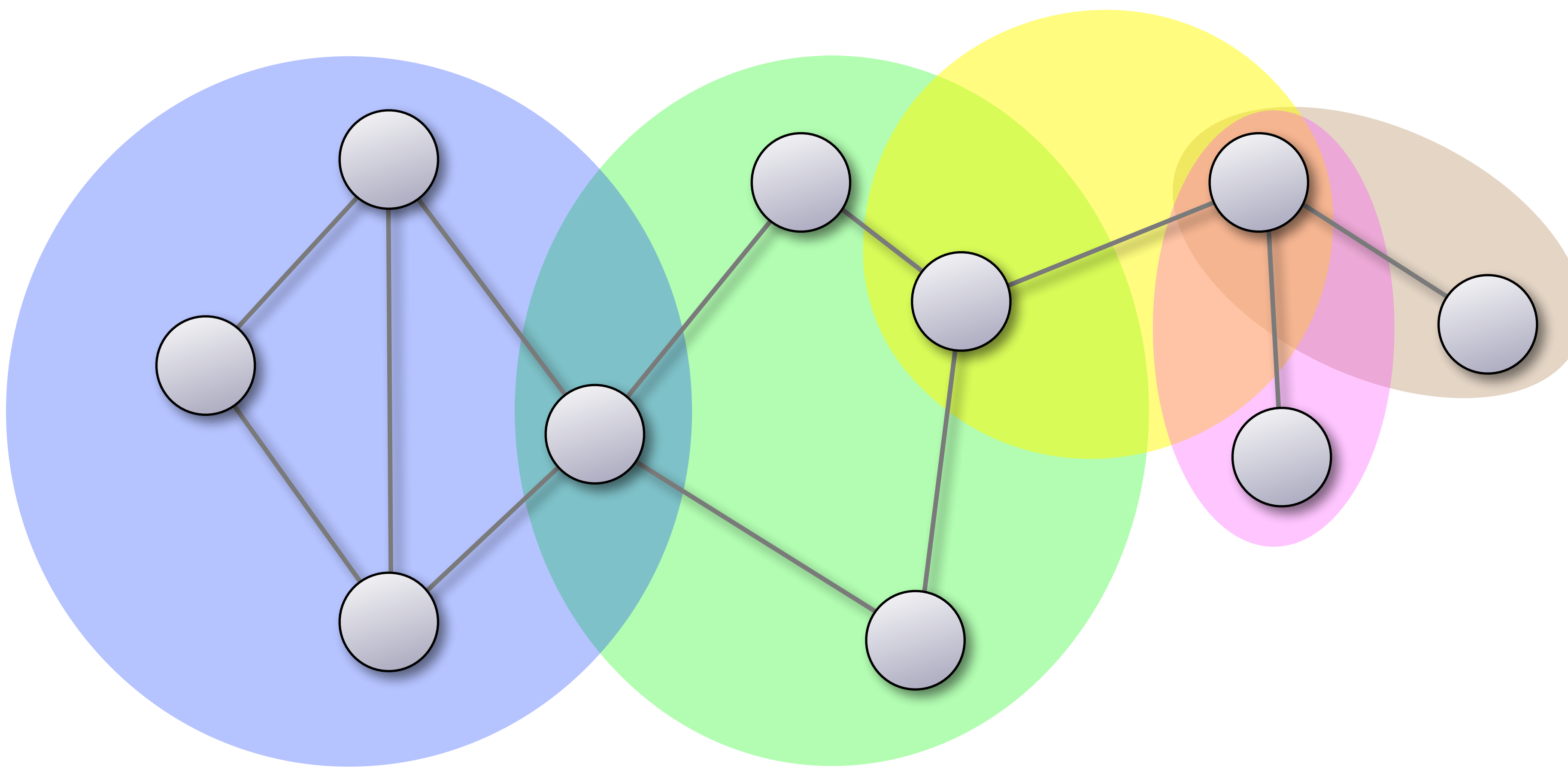
Aber: die Umkehrung gilt i.A. nicht …!!



Definition: Sei $G = (V, E)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E durch

$$e \sim f :\Longleftrightarrow \begin{cases} e = f, & \text{oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$$

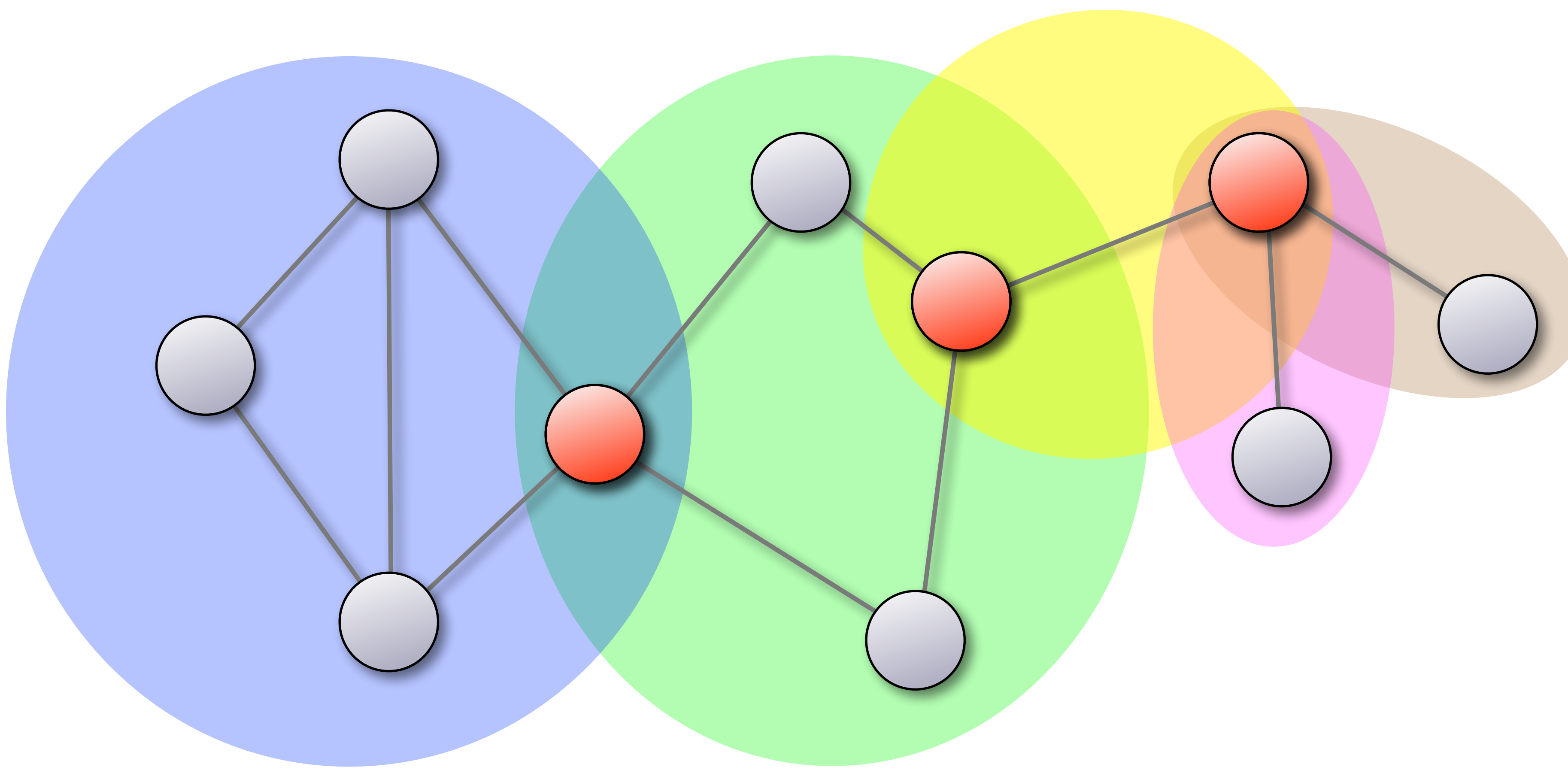
Die Äquivalenzklassen nennen wir Blöcke.



Definition: Sei $G = (V, E)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E durch

$$e \sim f :\Longleftrightarrow \begin{cases} e = f, & \text{oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$$

Die Äquivalenzklassen nennen wir Blöcke.

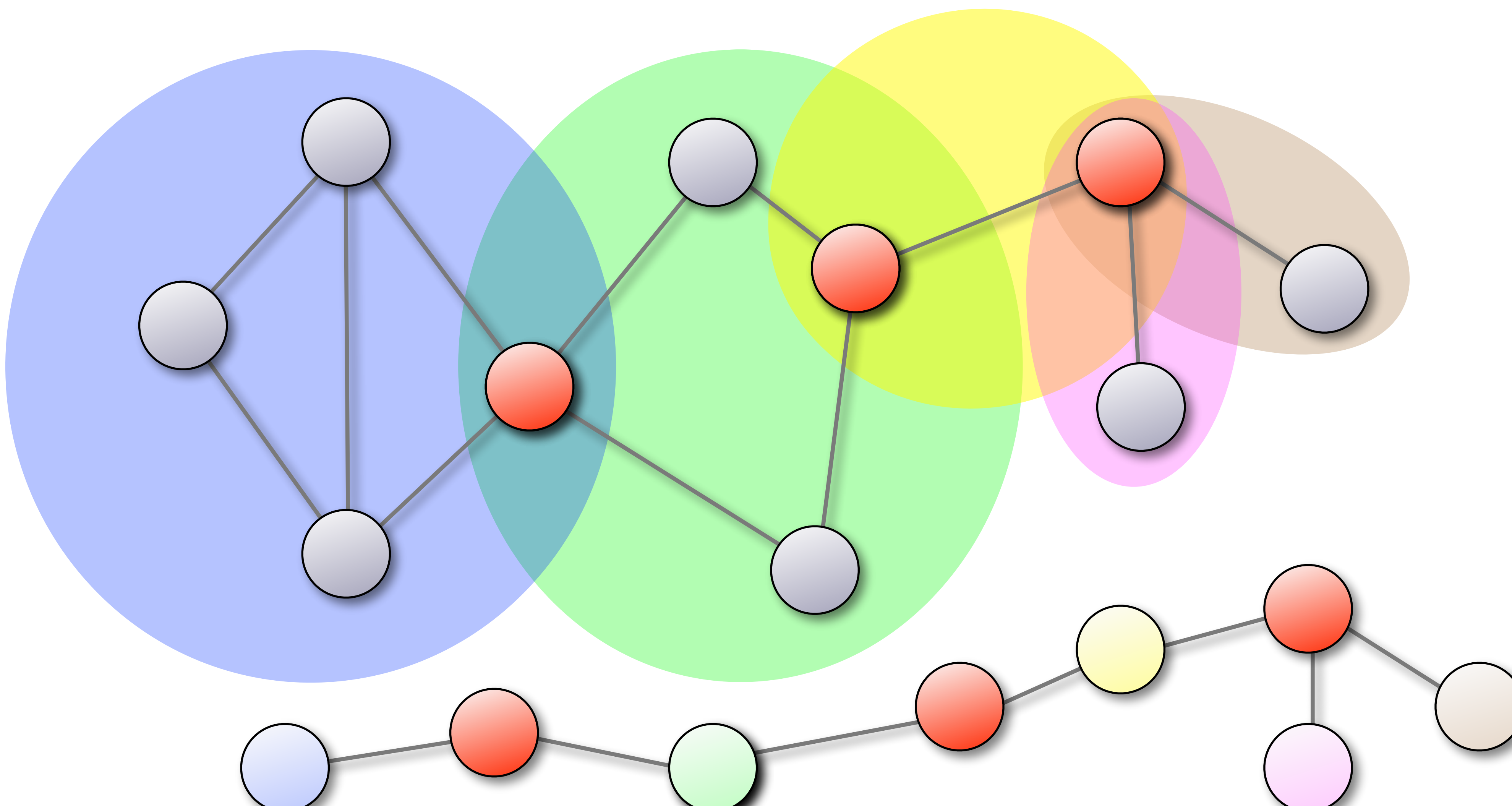


Lemma: Zwei Blöcke schneiden sich — wenn überhaupt — immer in einem Artikulationsknoten.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

Der Block-Graph von G ist der bipartite Graph $T = (A \uplus B, E_T)$ mit

- $\text{A} = \{\text{Artikulationsknoten von } G\}$.
- $\text{B} = \{\text{Blöcke von } G\}$.
- $\forall a \in A, b \in B : \quad \{a, b\} \in E_T \iff a \text{ inzident zu einer Kante in } b$.



Satz: Ist G zusammenhängend, so ist der Blockgraph von G ein Baum.