Meine Website: https://n.ethz.ch/~lbehric/

Website der Übungsstunde:

Vorlesung

Multiplikation

Schulmultiplikation:

$$\overbrace{a_1 \quad a_0}^{A} \cdot \overbrace{b_1 \quad b_0}^{B}$$

$8\ 7 \cdot 4\ 3$	
21	$a_0 \cdot b_0$
24	$a_1 \cdot b_0$
28	$a_0 \cdot b_1$
32	$a_1 \cdot b_1$
3741	

4 Teilprodukte

Korrektheit:

$$a_0 \cdot b_0 + 10 \cdot (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) + 100 \cdot a_1 \cdot b_1 = \underbrace{(10 \cdot a_1 + a_0)}_{A} \cdot \underbrace{(10 \cdot b_1 + b_0)}_{B} \checkmark$$

"Laufzeit":

$$\left.\begin{matrix} (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) & b_0 \\ (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) & b_1 \\ \vdots & \\ \underbrace{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})}_{n} & b_{n-1} \end{matrix}\right\} n \Rightarrow n^2 \text{ Multiplikationen}$$

Karatsuba:

$$\overbrace{a_1 \quad a_0}^{A} \cdot \overbrace{b_1 \quad b_0}^{B}$$

$8\ 7 \cdot 4\ 3$	
21	$a_0 \cdot b_0$
32	$a_1 \cdot b_1$
53	$a_0 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1$
-1	$-(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)$
3741	

3 Multiplikation

$n = 4$

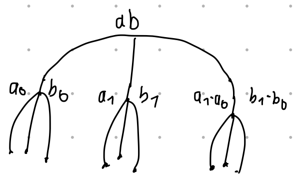
$$\overbrace{87}^{a_1}\overbrace{65}^{a_0} \cdot \overbrace{43}^{b_1}\overbrace{21}^{b_0}$$

$a_0 \cdot b_0$

4-stellig

2-stellig

1-stellig



Fall $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$

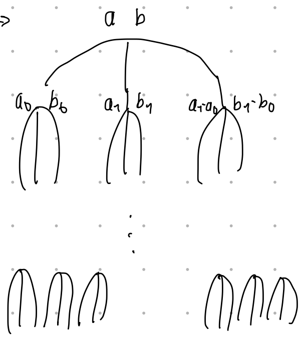
2^k-stellig $\rightarrow$ 1

2^{k-1}-stellig $\rightarrow$ 3

$\vdots$

2-stellig $\rightarrow$ 3^{k-1}

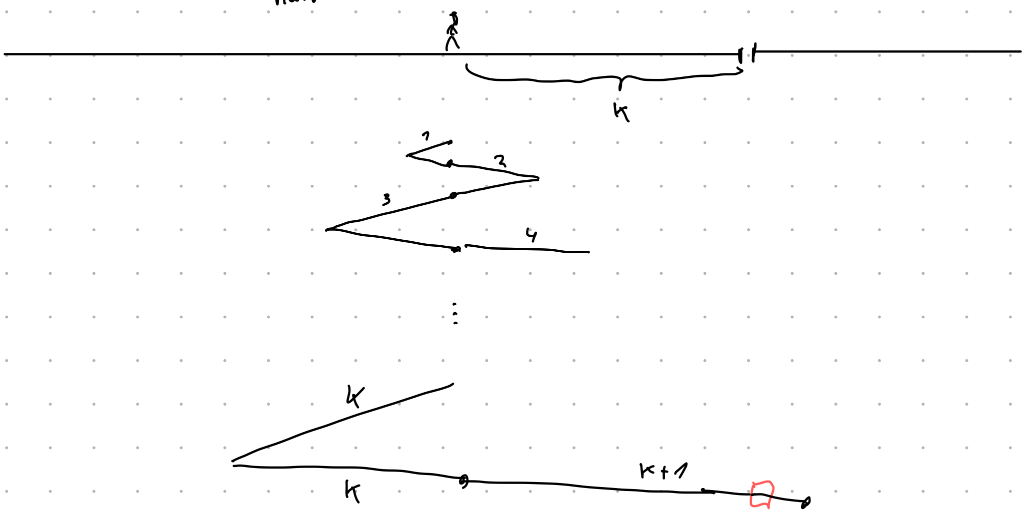
1-stellig $\rightarrow$ 3^k



$n^2 = 4^k$

Pasture break

"naiv"

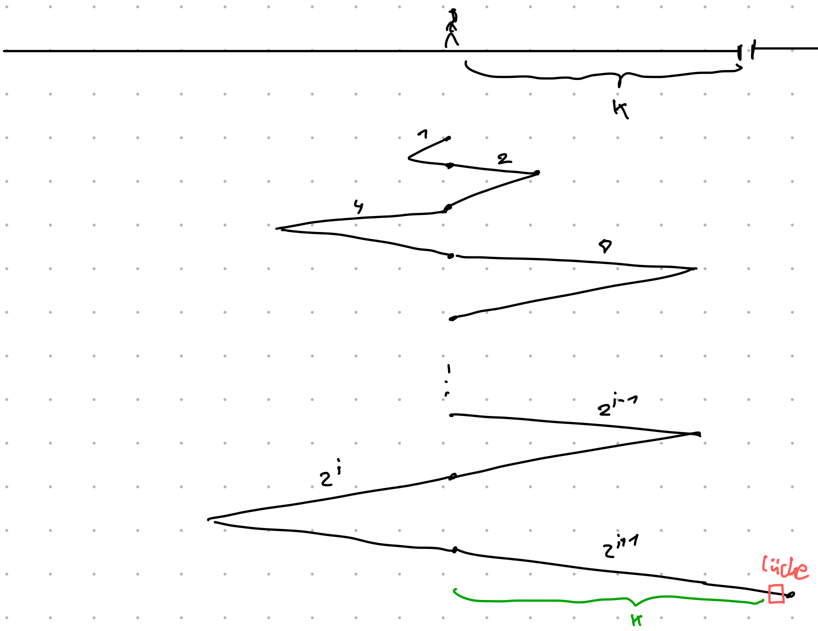


$$\underbrace{2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + 2\cdot k} + k$$

$$= 2(\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{=\frac{k(k+1)}{2}}) + k$$

$$= k(k+1) + k = k\cdot(k+2)$$

"Verdoppeln der Distanz"



$2^{i-1} < k \leq 2^{i+1}$

Analyse:

$$2\cdot(\underbrace{1+2+4+8+\dots+2^{i-1}+2^i}_{2^{i+1}-1}) + k$$

$$= 2(\underbrace{2^{i+1}-1}_{< 4\cdot 2^{i-1} < 4\cdot k}) + k \quad < 2(4k) + k = 9k$$

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Beispiel aus der Vorlesung

$1+2+4+8+\ldots+2^{k-1} = 2^k-1$

Base case $k=1$

$1 = 2^1-1$ ✓

Induktionshypothese (I.H.)

Wir nehmen an, dass $1+2+4+\ldots+2^{k-1} = 2^k-1$ gilt für ein $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt $k \to k+1$

$$1+2+4+8+\ldots+2^{k-1}+2^{(k+1)-1}$$
$$= \underbrace{1+2+4+8+\ldots+2^{k-1}}_{\text{I.H.}=\,2^k-1} + 2^k$$
$$\overset{\text{I.H.}}{=} 2^k-1+2^k$$
$$= 2\cdot 2^k-1 = 2^{k+1}-1 \quad \square$$

Übung: Zeige, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ gilt für $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

B.C. $k=1$

$1 = 1^2$ ✓

I.H.

$1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$ gilt für ein $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$

I.S. $k \to k+1$

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{=k^2}+(2(k+1)-1)$$
$$\overset{\text{I.H}}{=} k^2+(2(k+1)-1)$$
$$= k^2+2k+2-1$$
$$= k^2+2k+1 = (k+1)^2 \quad \square$$

Exercise sheet 0

0.1

a) $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

B.C. $n=1$

$1 = \frac{1(2)}{2}$ ✓

I.H.

$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ gilt für ein $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$

I.S.

$1+2+\dots+k+(k+1)$

$\overset{I.H.}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$

$= \frac{(k+2)(k+1)}{2}$ $\square$

b) $T(n) \geq 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n$

$T(1) = 4$

Zeige, dass $T(n) \geq 6n^2 - 2n$

$n = 2^k$, mit $k \in \mathbb{N}$

B.C. $k=0$, $n=2^0=1$

$T(1) = 4 \geq 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4$ ✓

I.H.

wir nehmen an, dass für ein $m = 2^k$ folgendes gilt: $T(m) \geq 6m^2 - 2m$

I.S. $k \to k+1$ $m \to 2m$

$T(2m) \geq 4 \cdot \underbrace{T(m)} + 3 \cdot 2 \cdot m$

$\overset{I.H.}{\geq} 4 \cdot (6m^2 - 2m) + 6m$

$= 24m^2 - 8m + 6m$

$= 24m^2 - 2m$ (*)

$\geq 24m^2 - 2m - 2m = 6 \cdot 4m^2 - 4m = 6(2m)^2 - 2(2m)$ $\square$

(*) Ziel: $6(2m)^2 - 2(2m)$

$= 6 \cdot 4 \cdot m^2 - 4m$

$= 24m^2 - 4m$

Asymptotic Growth

Seien f, g zwei Funktionen sind

f wächst asymptotisch schneller als g $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$

Limes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstanten

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\alpha \cdot f(n) + \beta\right) = \alpha \left(\lim\limits_{n\to\infty} f(n)\right) + \beta$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) + g(n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(n)$ wenn mind. 1 davon existiert (nicht "$-\infty$" oder "$+\infty$").

3. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \cdot g(n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} g(n)$ wie oben + geht nicht bei "$0 \cdot \infty$"

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)}$ wie oben + $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) \neq 0$

$f(n)$ stetig : $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(n)) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} g(n)\right)$

z.B. $f(x) = e^x$: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{g(n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} g(n)}$

Regel von de l'Hôpital

$f(n), g(n)$ zwei differenzierbare Funktionen

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$ geht nur, wenn $f(n)$ und $g(n) \to \infty$: "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\to 0$: $\frac{"0"}{"0"}$

Exercise 0.2

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot \log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0$$

c) $f(n) = 3^n$ $g(n) = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} = 0$$

Exercise 0.3

a) $f(n) = n^{1.01}$ $g(n) = n \cdot \ln(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln(n)}{n^{1.01}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln(n)}{n \cdot n^{0.01}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))'}{(n^{0.01})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{0.01 \cdot n^{-0.99}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{0.01 \cdot n^{0.01}}} = 0$$

d) $f(n) = 1.01^n \qquad g(n) = n^{100}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{1.01^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\ln(n^{100})}}{e^{\ln(1.01^n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{100\cdot\ln(n)}}{e^{n\cdot\ln(1.01)}} = \lim_{n\to\infty} e^{100\cdot\ln(n) - n\ln(1.01)}$$

Nebenrechnung: $\lim_{n\to\infty} 100\cdot\ln(n) - n\cdot\ln(1.01) = \lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{n}\left(\underbrace{100\frac{\ln(n)}{n}}_{\to 0} - \ln(1.01)\right) = -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n\to\infty}} = 0 \;//$$

e) $f(n) = \log_2(n) \qquad g(n) = \log_2(\log_2(n))$

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(\log_2(n))}{\log_2(n)} \overset{y=\log_2(n)}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{\log_2(y)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{(\ln(y))'}{(y)'}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1/y}{1} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{y \to \infty}$$

$$= 0$$

f) $f(n) = 2^{\sqrt{\log_2 n}} \qquad g(n) = (\log_2(n))^{100}$

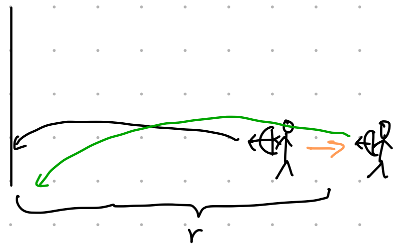
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2(n))^{100}}{2^{\sqrt{\log_2(n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log_2\left(\log_2(n)^{100}\right)}}{2^{\sqrt{\log_2(n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{100\cdot\log_2(\log_2(n))}}{2^{\sqrt{\log_2(n)}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{100\cdot\log_2(\log_2(n)) - \sqrt{\log_2(n)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(100\log_2(\log_2(n)) - \sqrt{\log_2(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\sqrt{\log_2(n)}\left(1 - 100\,\underbrace{\frac{\log_2(\log_2(n))}{\sqrt{\log_2(n)}}}_{\to 0}\right)\right) = -\infty$$

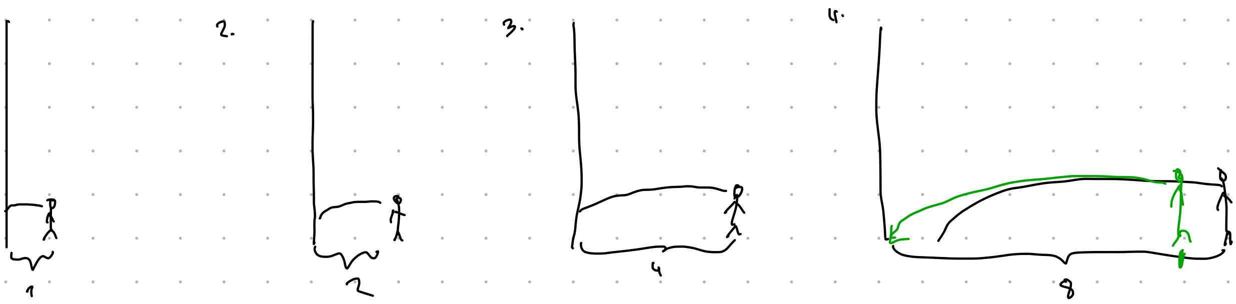
hier mit $y = \log_2(n)$ substituieren.

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \;//$$

Exercise 0.5

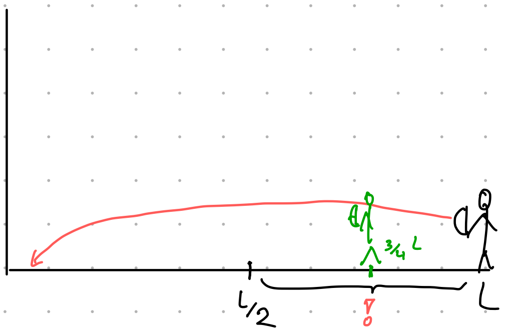


a)



$$\text{Versuche} \leq 1+\log_2(r) \leq 10\cdot\log_2(r)$$

b)



$|\tilde{r}-r| < 1$

c)

$L \quad 2L \quad 2\cdot 2\cdot L$

2^i

(Lösungsblatt anschauen)

2^{2^i}

$i=1 \qquad i=2 \qquad i=3$

$2^2=4 \qquad 2^{2^2}=2^4 \qquad 2^{2^3}=2^8$