Serie 1

Abgabe: Bis am 01.03.2024 um 18:00 einzureichen (SAM-UP).

Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Die Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ bedeutet, dass zwischen je zwei reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt. Formell ausgedrückt: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $a < q < b$. Diese Eigenschaft zeigt, dass die rationalen Zahlen überall in den reellen Zahlen verteilt sind, ohne Lücken.

Vollständigkeitsaxiom und rationale Zahlen

Das Vollständigkeitsaxiom besagt, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen das Supremum (die kleinste obere Schranke) in $\mathbb{R}$ besitzt. Dieses Axiom gilt nicht für die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Beispiel

Betrachten wir $A = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ und $B = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Die Menge A enthält alle rationalen Zahlen kleiner als $\sqrt{2}$, und B enthält alle rationalen Zahlen größer als $\sqrt{2}$.

Demonstration der Unvollständigkeit von $\mathbb{Q}$

Die Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ lässt sich verwenden, um zu zeigen, dass nur $\sqrt{2}$ zwischen A und B liegt. Für jedes $c \in \mathbb{R}$, wenn $c < \sqrt{2}$, dann gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $c < r < \sqrt{2}$. Somit gehört r zu A und c kann nicht zwischen A und B liegen, da es kleiner als ein Element in A ist. Analog, wenn $c > \sqrt{2}$, existiert ein $r' \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2} < r' < c$, was bedeutet, dass r' zu B gehört und c kann auch nicht zwischen A und B liegen. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, gibt es keine rationale Zahl zwischen A und B, womit das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbb{Q}$ nicht erfüllt ist.

Obere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Die Menge aller oberen Schranken von A ist definiert als die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: für alle $a \in A$, $a \leq x$. Die kleinste obere Schranke von A wird als das Supremum von A, bezeichnet als $\sup A$, definiert.

Formell ausgedrückt, stimmt die Menge der oberen Schranken von A mit dem Intervall $[\sup A, \infty)$ überein. Das bedeutet, dass jedes Element des Intervalls $[\sup A, \infty)$ eine obere Schranke von A ist und es keine kleinere obere Schranke als $\sup A$ gibt.

Untere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Die Menge aller unteren Schranken von A ist definiert als die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt: für alle $a \in A$, $a \geq x$. Die größte untere Schranke von A wird als das Infimum von A, bezeichnet als $\inf A$, definiert.

Formell ausgedrückt, stimmt die Menge der unteren Schranken von A mit dem Intervall $(-\infty, \inf A]$ überein. Das bedeutet, dass jedes Element des Intervalls $(-\infty, \inf A]$ eine untere Schranke von A ist und es keine größere untere Schranke als $\inf A$ gibt.

(1) Supremum Eigenschaft

Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Falls B nach oben beschränkt ist, dann ist auch A nach oben beschränkt, und es gilt, dass das Supremum von A nicht größer als das Supremum von B ist. Das bedeutet:

$$\sup A \leq \sup B$$

Dies folgt daraus, dass alle Elemente von A auch Elemente von B sind. Da $\sup B$ die kleinste obere Schranke für B ist, muss sie auch eine obere Schranke für A sein. Da $\sup A$ die kleinste obere Schranke von A ist, kann sie nicht größer als $\sup B$ sein.

(2) Infimum Eigenschaft

Falls B nach unten beschränkt ist, dann ist auch A nach unten beschränkt, und es gilt, dass das Infimum von B nicht größer als das Infimum von A ist. Das bedeutet:

$$\inf B \leq \inf A$$

Dies folgt daraus, dass alle Elemente von A auch Elemente von B sind. Da $\inf B$ die größte untere Schranke für B ist, muss sie auch eine untere Schranke für A sein. Da $\inf A$ die größte untere Schranke von A ist, kann $\inf B$ nicht größer als $\inf A$ sein.

Beispiel

Betrachten wir die Menge $A = \left\{ \frac{2x}{x+3} \mid x > 0 \right\}$. Wir wollen das Maximum, Minimum, Supremum und Infimum dieser Menge bestimmen.

Um die Eigenschaften dieser Menge zu verstehen, betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ für $x > 0$.

Minimum

Da $f(x)$ für $x > 0$ stetig und positiv ist und da $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, ist das Infimum von A gleich 0. Allerdings gehört 0 nicht zu A, da es keinen Wert von x gibt, für den $f(x) = 0$. Daher hat A kein Minimum.

Maximum

Betrachten wir das Verhalten der Funktion, wenn x gegen Unendlich strebt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$. Daher ist das Supremum von A gleich 2. Da $f(x)$ niemals den Wert 2 für ein $x > 0$ erreicht, hat A kein Maximum. Wir nehmen hier an, dass $+\infty$ nicht als Maximum funktionieren darf (Intuition: man kann immer eine 'größere' Zahl konstruieren).

Supremum und Infimum

Zusammenfassend haben wir festgestellt:

- Das Infimum von A ist 0.
- Das Supremum von A ist 2.
- A hat kein Minimum.
- A hat kein Maximum.

Euklidischer Raum

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist der n-dimensionale Raum der reellen Zahlen. Er wird verwendet, um Punkte durch n Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem zu beschreiben.

Bonus: Komplexe Zahlen sind nicht im traditionellen Sinne Elemente des euklidischen Raums, da euklidische Räume über dem Körper der reellen Zahlen definiert sind. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen geordneten n-Tupeln reeller Zahlen, die als Punkte in einem n-dimensionalen Raum betrachtet werden können. Dieser Raum ist mit der euklidischen Norm ausgestattet, die den "gewöhnlichen" Abstand zwischen Punkten in diesem Raum misst.

Komplexe Zahlen bilden ihren eigenen Raum, bekannt als die komplexe Ebene oder $\mathbb{C}$. Jede komplexe Zahl kann als $a + bi$ dargestellt werden, wobei a und b reelle Zahlen sind und i die imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ ist. Dies ermöglicht es, komplexe Zahlen als Punkte in einer zweidimensionalen Ebene darzustellen, wobei die x-Achse den Realteil und die y-Achse den Imaginärteil der komplexen Zahl repräsentiert.

Es ist jedoch möglich, komplexe Zahlen in Beziehung zum euklidischen Raum zu setzen, da die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$, dem 2-dimensionalen euklidischen Raum, ist. Beide Räume können durch Paare reeller Zahlen dargestellt werden: $\mathbb{C}$ verwendet diese Paare, um den Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen darzustellen, während $\mathbb{R}^2$ sie verwendet, um Koordinaten in einer Ebene darzustellen. Trotz dieses Isomorphismus können die Operationen und die geometrischen Interpretationen in diesen beiden Räumen, insbesondere bei der Betrachtung von Multiplikation und anderen komplexen Operationen, recht unterschiedlich sein.

Beispiel

Im $\mathbb{R}^2$, repräsentiert der Punkt $(2, 3)$ die Position, die 2 Einheiten entlang der x-Achse und 3 Einheiten entlang der y-Achse vom Ursprung entfernt ist.

Abstand zwischen zwei Punkten

Der Abstand zwischen zwei Punkten $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch:

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen erweitern die reellen Zahlen um eine zusätzliche Dimension, die durch die imaginäre Einheit i (mit $i^2 = -1$) repräsentiert wird. Eine komplexe Zahl ist in der Form $z = a + bi$ darstellbar, wobei a der Realteil und b der Imaginärteil ist.

Beispiel

Die komplexe Zahl $z = 3 + 4i$ hat den Realteil 3 und den Imaginärteil 4.

Addition von komplexen Zahlen

Die Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ ist gegeben durch:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Multiplikation von komplexen Zahlen

Die Multiplikation wird durchgeführt unter Verwendung der Formel:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Beispiel

Seien $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Die Multiplikation von z_1 und z_2 ergibt:

$$(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) + (1 \cdot 4 + 2 \cdot 3)i = -5 + 10i$$

Beispiel 1: Addition und Multiplikation

Betrachten wir die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 1 - 2i$. Wir wollen ihre Summe und ihr Produkt bestimmen.

Addition

Die Summe von z_1 und z_2 ist definiert als:

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 - 2i) = (3 + 1) + (4i - 2i) = 4 + 2i.$$

Multiplikation

Das Produkt von z_1 und z_2 ist definiert als:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i) \cdot (1 - 2i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2i) + 4i \cdot 1 + 4i \cdot (-2i) = 3 - 6i + 4i - 8 = -5 - 2i.$$

Beispiel 2: Konjugation und Betrag

Nehmen wir die komplexe Zahl $z = 3 + 4i$. Wir wollen ihr konjugiertes und ihren Betrag bestimmen.

Konjugation

Die konjugierte Zahl bzgl. z ist definiert als:

$$\bar{z} = 3 - 4i.$$

Betrag

Der Betrag von z ist definiert als die Wurzel aus der Summe der Quadrate des Real- und des Imaginärteils:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$