

## Algorithmen und Wahrscheinlichkeit Theorie-Aufgaben 7

ABGABE IN MOODLE () BIS ZUM 25.04.2024 UM 10:00 UHR.

### Aufgabe 1 – *Couch to k k*

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens  $\frac{3}{4}$  aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schneift* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph  $G = (V, E)$  ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung  $v \in V$  und die Route ist ein gegebener Kreis  $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$  der Länge  $k$ .

Bei jeder Strasse  $e \in E$  gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ . Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

- (a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (c) Nimm an, dass du  $n-1$  Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Route, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schneifender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt  $k \geq \log_2(n) + 1$ , dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens  $\frac{1}{2}$  keinen einzigen schneifenden Hund.
- (d) Nimm an, dass  $k = 1000 \log_2 n$  und  $n \geq 2$ . Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.

---

(a)

Let  $X$  be the random variable denoting the number of streets with flowers. We recall that the trip is a disaster, if  $X \geq \frac{3}{4}$ . To apply Markov's inequality,  $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ , we need the expected value  $\mathbb{E}[X]$ , meaning the expected number of streets with flowers encountered. For this, we can use linearity of expectation, since the probability for a street to have flowers is binomially distributed. Hence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np = \frac{k}{2} \\ \Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] &\leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3}\end{aligned}\quad \square$$

---

(b)

Using Chebyshev's inequality,  $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$ , requires  $\text{Var}[X]$ . This is given by  $\text{Var}[X] = np(1-p) = \frac{k}{4}$ , as  $X \sim \text{Bin}(k, p)$ .

$$\begin{aligned}\Pr\left[\left|X - \frac{k}{2}\right| \geq \frac{k}{4}\right] &= \frac{\text{Var}[X]}{\left(\frac{k}{4}\right)^2} \\ &= \frac{k}{4} \cdot \frac{4^2}{k^2} = \frac{4}{9}\end{aligned}\quad \square$$

---

(c)

Let  $Y = \text{"# sniffing dogs"}$ , where  $Y := \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$  with  $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ , independent. Let  $Y_i = \text{"the } i\text{-th dog sniffles"}$ . The probability,  $p$  for some  $i$ -th dog to sniffle all day is  $\Pr[Y_i = 1] = \Pr[X = k] = \frac{1}{2^k}$ , given by all of its trip's streets having flowers. Thus,  $Y \sim \text{Bin}(n-1, p)$ .

The expected number of sniffing dogs is given by

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{n-1}{2^k} \\ &= \frac{n-1}{2^{\log_2(n)+1}} = \frac{n-1}{2n} \\ &< \frac{1}{2}\end{aligned}\quad \square$$

Now, we need to show that  $k \geq \log_2(n) + 1 \implies \Pr[Y = 0] \geq \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}\Pr[Y = 0] &= 1 - \Pr[Y \geq 1] \quad (\text{Markov}) \\ &\geq 1 - \mathbb{E}[Y] \\ &\geq \frac{1}{2}\end{aligned}\quad \square$$

---

(d)

Let  $Z = \text{"\# disaster trips"}$ , where  $Z := \sum_{i=1}^{n-1} Z_i$  with  $Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ , independent denoting, whether the  $i$ -th trip was a disaster.

We need to show that  $k = 1000 \log_2(n)$ ,  $n \geq 2 \implies \Pr[Z = 0] \geq 0.99$ .

$$\Pr[Z = 0] \geq 0.99 \implies \Pr[Z \geq 1] \leq 0.01$$

$$\begin{aligned} p = \Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] &= \Pr\left[X \geq \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \frac{k}{2}\right] \\ &= \Pr\left[X \geq \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbb{E}[X]\right] && \text{(Chernoff)} \\ &\leq e^{-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \mathbb{E}[X]} = e^{-\frac{k}{24}} = e^{-\frac{1000 \log_2(n)}{24}} \\ &\leq 2^{-\frac{1000 \log_2(n)}{24}} = n^{-\frac{1000}{24}} \\ &\leq n^{-41.6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 1] &\leq \mathbb{E}[Z] = n \cdot p_{Z_i} && \text{(Markov)} \\ &\leq n \cdot n^{-41.6} = n^{-40.6} \\ &\leq 2^{-40.6} && (n \geq 2) \\ &\leq 0.01 \end{aligned}$$

□

"i always find it therefore i never search"