

---

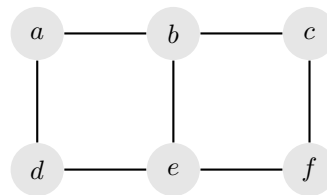
## Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

### Übung zum Selbstlösen am 22.02.2024

---

#### Aufgabe 1 – *Pfade, Wege, Kreise*

Betrachten Sie folgenden Graphen  $G = (V, E)$ .



1. Welche Pfade der Länge 4 (d.h. mit 4 Kanten) gibt es von  $a$  nach  $e$ ?
2. Welche Wege der Länge 4 (d.h. mit 4 Kanten) gibt es von  $a$  nach  $e$ ?
3. Welche Kreise gibt es in  $G$ ?
4. Wie viele Zykeln gibt es in  $G$ ?

#### Aufgabe 2 – *Asymptotisches Wachstum.*

- (a) (Leicht.) Sortieren Sie die folgenden Funktionen asymptotisch, d.h. entsprechend der  $O$ -Notation. Dabei bezeichnet  $\log n$  den Logarithmus zur Basis 2, und  $\ln n$  den natürlichen Logarithmus. In welchen Fällen haben Sie asymptotische Gleichheit  $\Theta(\cdot)$ ?

$$n, \quad 0.01n^2, \quad e^n, \quad \log n, \quad 2^{32}, \quad 2^n, \quad n + \sqrt{n},$$

- (b) (Schwerer.) Sortieren Sie zusätzlich die folgenden Funktionen in Ihre Abfolge ein.

$$\ln n, \quad \frac{n}{\log n}, \quad e^{\sqrt{\log n}}, \quad \log(n^2), \quad n^{1/4}, \quad n!$$

#### Aufgabe 3 – *Induktion*

- (a) Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

- (b) Zeigen Sie die folgende *Ungleichung von Bernoulli*: Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  und alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $h \geq -1$  gilt:

$$1 + nh \leq (1 + h)^n.$$

#### Aufgabe 4 – *Eine generelle Eigenschaft von Graphen*

Zeigen Sie, dass jeder Graph  $G$  mit  $n \geq 2$  Knoten zwei Knoten  $v \neq w$  enthält, sodass  $\deg(v) = \deg(w)$ .

**Hinweis:** Für ein gegebenes  $n$ , was ist der grösstmögliche Grad den ein Knoten haben kann?

#### Aufgabe 5 – *Algorithmus*

Beschreiben Sie einen Algorithmus der das folgende Problem löst: Gegeben ist die Eingabe bestehend aus einem Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten (gehen Sie davon aus, dass der Graph als Adjazenzliste gegeben ist). Ihr Algorithmus soll “Ja” ausgeben, falls  $G$  ein Baum ist und “Nein” andernfalls.

Wie immer wenn Sie einen Algorithmus beschreiben gehört zu einer vollständigen Lösung: eine klare Beschreibung des Algorithmus, ein Korrektheitsbeweis und eine Laufzeitanalyse.

**Hinweis:** Für diese Aufgabe dürfen Sie das Statement aus Aufgabe 6 ohne Beweis verwenden.

#### Aufgabe 6 – *Charakterisierung von Bäumen (Challenge-Aufgabe)*

Zeigen Sie: Ist  $G = (V, E)$  ein Graph auf  $|V| \geq 1$  Knoten, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $G$  ist zusammenhängend und kreisfrei (d.h.  $G$  ist ein Baum).
- (b)  $G$  ist zusammenhängend und  $|E| = |V| - 1$ .
- (c)  $G$  ist kreisfrei und  $|E| = |V| - 1$ .
- (d) Für alle  $x, y \in V$  gilt:  $G$  enthält genau einen  $x$ - $y$ -Pfad.