
Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Theorie-Aufgaben 5

ABGABE IN MOODLE () BIS ZUM 09.05.2024 UM 10:00 UHR.

Aufgabe 1 – *Bewachen eines nicht-konvexen Reiches*

Alice ist die Königin eines polygonalen Reiches, das heisst, die Grenzen ihres Reiches bilden ein Polygon P (nicht unbedingt konvex), mit n Knoten. Sie will ihr Reich mit neu gebauten Wachtürmen beschützen. Es erscheint ihr ausreichend, Wachtürme bei allen Knoten von P zu bauen, welche auf dem Rand der konvexen Hülle von P liegen. Daher will sie die konvexe Hülle ihres Reiches berechnen, und sie würde das gerne in Zeit $O(n)$ erreichen. Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass die Punkte in \mathbb{R}^2 liegen und sich in allgemeiner Lage befinden, das heisst, dass keine drei Punkte auf einer gemeinsamen Linie liegen. Für einen Punkt p schreiben wir $p(x)$ für die x -Koordinate von p und $p(y)$ für die y -Koordinate von p .

- (a) Sei $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ eine Menge von Punkten, die eine x -monotone Kurve bilden, das heisst, $s_i(x) < s_{i+1}(x)$, für $1 \leq i < n$. Berechnen Sie die konvexe Hülle von S in Zeit $O(n)$.
- (b) Sei $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ eine Menge von Punkten, die eine nicht-überschneidende Kurve bilden, das heisst, das Segment (c_i, c_{i+1}) schneidet maximal zwei weitere Segmente: Segment (c_{i-1}, c_i) bei c_i (falls $i \geq 2$), und Segment (c_{i+1}, c_{i+2}) bei c_{i+1} (falls $i \leq n-2$). Wir nehmen ausserdem an, dass $c_1(x) < c_i(x)$ für $1 < i \leq n$ und $c_i(x) < c_n(x)$ für $1 \leq i < n$. Berechnen Sie die konvexe Hülle von C in Zeit $O(n)$.
- (c) Sei P ein (möglicherweise) nicht-konvexes einfaches¹ Polygon. Wir nehmen an, dass die Punkte p_1, p_2, \dots, p_n rund um den Rand des Polygons P der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn gegeben sind. Berechnen Sie die konvexe Hülle von P in Zeit $O(n)$.

¹d.h. die Liniensegmente schneiden sich nicht, genauso wie (b)