
Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Theorie-Aufgaben 7

ABGABE IN MOODLE () BIS ZUM 25.04.2024 UM 10:00 UHR.

Aufgabe 1 – *Couch to k*

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens $\frac{3}{4}$ aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schneift* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph $G = (V, E)$ ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung $v \in V$ und die Route ist ein gegebener Kreis $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$ der Länge k .

Bei jeder Strasse $e \in E$ gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

- (a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (c) Nimm an, dass du $n - 1$ Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Routen, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schneifender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt $k \geq \log_2(n) + 1$, dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ keinen einzigen schneifenden Hund.
- (d) Nimm an, dass $k = 1000 \log_2 n$ und $n \geq 2$. Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.