LinAlg Cheatsheet

Robin Frauenfelder - robinfr@ethz.ch

Version: 26. Juni 2021

Dieses Cheatsheet wurde im Laufe meiner Übungstunde im MAVT Basisjahr 18/19 erstellt. bearbeitet von Christophe Maier(cmaier) und Katharina Jaeger(kjaeger)

1. Lineare Gleichungssysteme

1.1 Zeilenstufenform

Jedes lineare Gleichungssystem kann durch wiederholtes Ausführen folgender drei Rechenoperationen in die sogenannte Zeilenstufenform gebracht werden (Gaussalgorithmus):

- Zeilen vertauschen
- Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren
- Eine Zeile mit beliebigem Skalar $\neq 0$ multiplizieren

$$\text{m: Anzahl Gleichungen}\left\{\begin{array}{ccccccc|cl}
\multicolumn{7}{c|}{\overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_j \quad \cdots \quad x_n}^{\text{n: Anzahl Unbekannte}}} & 1 & \\
\hline
\circledast & * & * & \cdots & * & \cdots & * & b_1 & \\
0 & 0 & \circledast & \cdots & * & \cdots & * & b_2 & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & * & \cdots & * & b_1 & \Bigg\}\text{r: Rang} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \circledast & \cdots & * & b_r & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_m &
\end{array}\right.$$

Keine Lösung: $r < m$ und $b_i \neq 0\ \forall i > r$

Eindeutige Lösung: $r = n = m$

Unendlich Lösungen: $r < n$ und $b_i = 0\ \forall i > r$
Anzahl freie Parameter: $n - r$

Ax = b für beliebiges b lösbar: Voller Rang: $r = m$
oder
$m = n$, und $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

Ax = b für beliebiges b eindeutig lösbar: Voller Rang: $r = m$ und gleich viele Gleichungen wie Unbekannte: $m = n$

1.2 Homogenes Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc|cl}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 & \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \Bigg\}\text{Nullvektor} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 &
\end{array}$$

- Hat immer die triviale Lösung $x = 0$
- Hat ausschliesslich die triviale Lösung, wenn Rang vollständig ($r = n$, $det(A) \neq 0$)
- Hat zusätzlich nichttriviale Lösungen, wenn Rang nicht vollständig ($r < n$, $det(A) = 0$)

2. Matrizen

2.1 Matrixschreibweise

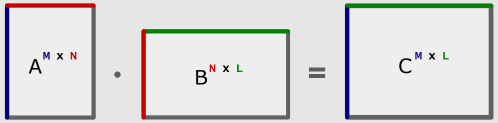
Ein lineares Gleichungssystem kann in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$\begin{array}{cc|c}
x_1 & x_2 & 1 \\
\hline
a_{11} & a_{12} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & b_3
\end{array} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

2.2 Matrixmultiplikation

Matrizen können auf folgende Weise miteinander multipliziert werden:

$$\boxed{A \cdot B = C \quad \Rightarrow \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}}$$



Assoziativ- & Distributivgesetz: $A+B=B+A$,$(A+B)+C=A+(B+C)$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D$$

Achtung! Kommutativgesetz gilt nicht! i.A. $A \cdot B \neq B \cdot A$

2.3 Identitätsmatrix

Die Identitäts- oder Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, deren Hauptdiagonalelemente 1 und deren Ausserdiagonalelemente 0 sind.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Rechenregel: $A^{m \times n} \cdot I_n = I_m \cdot A^{m \times n} = A^{m \times n}$

2.4 Diagonal- und Dreiecksmatrizen

Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, deren Elemente ausserhalb der Hauptdiagonalen 0 sind.

$$D = diag(d_1, d_2, d_3) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Eine **Dreiecksmatrix** ist eine quadratische Matrix, deren Elemente entweder oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind. Man unterscheidet zwischen einer **Rechtsdreiecksmatrix** und einer **Linksdreiecksmatrix.**

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

Für Diagonal- und Dreiecksmatrizen gilt:

- $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$
- $eig(A) = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$

2.5 Transponierte

Die Transponierte einer Matrix erhält man, indem man sie an ihrer Diagonalen „spiegelt“.

$$\textbf{Bsp:} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \qquad rang(A^T) = rang(A)$$
$$(c \cdot A)^T = c \cdot A^T \qquad det(A^T) = det(A)$$
$$(A^T)^T = A \qquad eig(A^T) = eig(A)$$

2.6 Inverse

Die Inverse A^{-1} von A macht eine Multiplikation mit A rückgängig. Multipliziert man A mit A^{-1}, erhält man die Identitätsmatrix.

$$\boxed{\begin{array}{c} A \cdot v = w \Leftrightarrow A^{-1} \cdot w = v \\ A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \end{array}}$$

Eigenschaften:

- Nur quadratische Matrizen können invertierbar sein.
- Eine invertierbare Matrix nennt man **regulär**, eine nicht invertierbare **singulär**.
- Die Inverse ist eindeutig.
- A ist invertierbar $\iff$ A hat vollen Rang
- A ist invertierbar $\iff$ A^T ist invertierbar
- A ist symmetrisch $\iff$ A^{-1} ist symmetrisch
- A ist eine Dreiecksmatrix $\iff$ A^{-1} ist eine Dreiecksmatrix
- A ist invertierbar $\iff$ $det(A) \neq 0$
- A ist invertierbar $\iff$ kein Eigenwert $\lambda = 0$
- A und B sind invertierbar $\Longrightarrow$ AB ist invertierbar

Gauss-Jordan Algorithmus:

Methode zur Bestimmung der Inversen. Man schreibt die Matrix und die Identität nebeneinander auf und führt den Gaussalgorithmus gleich auf beiden Seiten aus, sodass am Ende auf der linken Seite die Identitätsmatrix steht.

Tipp: Erzeuge zuerst durch „nach unten gaussen“ links eine Rechtsdreiecksmatrix, dann durch „nach oben gaussen“ eine Diagonalmatrix, und am Ende durch Zeilenmultiplikation die Identitätsmatrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}}_{A} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Adjunktenformel für 2x2-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$I^{-1} = I \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad rang(A^{-1}) = rang(A)$$
$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \qquad det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$
$$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1} \qquad eig(A^{-1}) = eig(A)^{-1}$$
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2.7 Orthogonale Matrizen

Eine quadratische Matrix ist orthogonal, wenn sie aus **zueinander orthogonalen Spaltenvektoren der Länge 1** besteht. Dies ist der Fall, wenn eine Matrix mit der Transponierten multipliziert die Identität ergibt.

$$\boxed{Q^T \cdot Q = I}$$

Multipliziert man einen Vektor mit einer orthogonalen Matrix, kann sich seine Orientierung ändern, jedoch nicht seine Länge. Abbildungen sind deshalb kongruent.

Eigenschaften:

- Q orthogonal $\Leftrightarrow$ Spalten/Zeilen von Q sind zueinander orthogonale Vektoren der Länge 1.
- Nur quadratische Matrizen können orthogonal sein.
- A und B orthogonal $\Rightarrow$ $A \cdot B$ orthogonal
- Q orthogonal $\Leftrightarrow$ Q^{-1} orthogonal
- $Q^{-1} = Q^T$ $\Rightarrow AA^T = \mathbb{I}$
- $|det(Q)| = 1$ EW=$|1|$

Drehungs- und Spiegelungsmatrizen:
Drehung um Ursprung im $\mathbb{R}^2$:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um x-Achse im $\mathbb{R}^3$:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um y-Achse im $\mathbb{R}^3$:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um z-Achse im $\mathbb{R}^3$:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8 LR-Zerlegung

$$\boxed{A = L \cdot R}$$

Mit der LR-Zerlegung kann man eine quadratische Matrix A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L sowie einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegen. Dies ermöglicht ein effizienteres Lösen von $Ax = b_i$ mit vielen verschiedenen b_i.

Bsp: Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vorgehen:

① Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

② Bestimme L und R. L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

③ Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).

④ Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei ① zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.
Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A, und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P. L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt. Bei ③ löse man nun $Ly = Pb$, bei ④ weiterhin $Rx = y$.

2.9 Symmetrische Matrizen

Eine symmetrische Matrix ist eine quadratische Matrix, deren Einträge spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen sind.
Dies ist der Fall, wenn sie gleich ihrer Transponierten ist:

$$\boxed{S = S^T}$$

A sym $\Leftrightarrow$ A^{-1} sym.
A, B sym $\rightarrow$ A+B sym
A sym $\rightarrow$ A^2 sym

Eigenschaften:

- $A^T A$ und AA^T sind immer symmetrisch.
- Die Eigenwerte von S sind alle reell.
- Ist x ein Eigenvektor von S zum Eigenwert λ, so sind auch $konj(x)$, $Re(x)$, $Im(x)$ Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ
- Die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.
- S ist halbeinfach, also diagonalisierbar.
- S besitzt eine orthonormale Eigenbasis.
- Transformationsmatrix T in Eigenbasis kann orthogonal gewählt werden.

schiefsymmetrische
-> Anhang

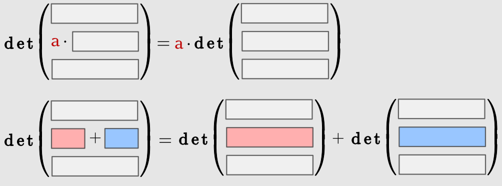
3. Determinante

3.1 Definition Determinante

Nur für quadr. MAT.

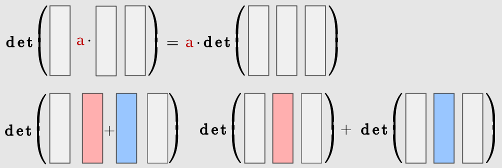
Die Determinante ist eine Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet wird und aus ihren Einträgen berechnet werden kann. Die folgenden Spalten/zeileneigenschaften sind Teil ihrer Definition.

Zeileneigenschaften:



- Vertauscht man zwei Zeilen von A, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

Spalteneigenschaften:



- Vertauscht man zwei Spalten von A, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Addiert man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

Folgerungen aus Zeilen/Spalteneigenschaften:

- Hat A zwei lin. abh. Zeilen/Spalten, so gilt $det(A) = 0$.
- Hat A eine Nullzeile/spalte, so gilt $det(A) = 0$
- $det(\alpha \cdot A^{n \times n}) = \alpha^n \cdot det(A)$

$det(A) = 0$

- $A \cdot x = b$ hat keine oder unendl. Lösungen
- $A \cdot x = 0$ hat unendl. Lösungen
- Rang(A) ¡ n

3.2 Rechenregeln Determinante

Neben den Zeilen/Spalteneigenschaften von 3.1 gelten folgende Rechenregeln:

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$
$$det(A^T) = det(A)$$

$det(AB) = det(BA)$

$$det(diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$$
$$det(Dreiecksmatrix) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$$
$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

$det(A+B) \neq det(A) + det(B)$

$det(AB^{-1}) = det(A)\, det(B^{-1}) = det(A)/det(B)$

3.3 Berechnungsmethoden Determinante

Es gibt verschiedene Methoden, die Determinante zu bestimmen. Je nach Matrix eignen sich unterschiedliche Rechnungswege oder Kombinationen davon.

Fertige Formeln
Eignen sich nur bei kleinen Matrizen. Meistens für 3x3-Matrix bereits zu kompliziert.

1x1: $|a| = a$

2x2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

3x3: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Laplace'scher Entwicklungssatz:
Bei den meisten Matrizen ineffizient. Kann jedoch bei Matrix mit vielen Nullen in einer Zeile oder Spalte geschickt angewendet werden.

① Zeile oder Spalte auswählen (dort wo viele Nullen).

② Jedem Element dieser Zeile/Spalte ein Vorzeichen zuordnen (Schachbrett).

③ Für jedes Element die zugehörige Zeile und Spalte streichen und Unterdeterminante bestimmen.

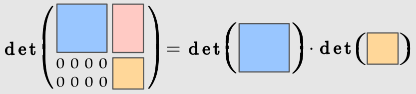
④ Jede Unterdeterminante mit zugehörigem Element und Vorzeichen multiplizieren und addieren.

Bsp: Entwicklung nach erster Spalte:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ \mathbf{3} & 8 & 5 \\ \mathbf{0} & 3 & 2 \end{vmatrix} = +\mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Anwenden von Zeilen/Spalteneigenschaften
Durch vertauschen von Spalten/Zeilen (Vorzeichenänderung) oder Zeilen/Spaltenaddition (Determinante bleibt gleich) lässt sich die Matrix oft in eine einfachere Form bringen.

Blocksatz
Oft in Kombination mit „Anwenden von Zeilen/Spalteneigenschaften" nützlich.



LR-Zerlegung
Nur sinnvoll, wenn LR-Zerlegung bereits vorliegt.

$det(A) = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen} \cdot r_{11} \cdot r_{22} \cdots r_{nn}$

Determinante mit Nullstellen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & b & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & b & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & c \end{pmatrix}$$

Betrachte als $A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & a \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ --- & \begin{vmatrix} b & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix} & 0 \\ --- & --- & c \end{pmatrix}$

$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix} \cdot c$

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- $rang(A) = n$
- Das LGS $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar.
- Das LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung.
- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- Die Zeilen/Spalten von A sind linear unabhängig.
- A ist invertierbar.
- $det(A) \neq 0$
- Die Spalten von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$.
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor.
- Kein Eigenwert von A ist 0.

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

Innere Operation:
$\bigoplus$: $V \times V \rightarrow V$
$(a, b) \mapsto a \bigoplus b$

Äussere Operation:
$\bigodot$: $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$
$(\alpha, a) \mapsto \alpha \bigodot a$

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V$: $\quad u \bigoplus v = v \bigoplus u$

(A2) $\forall u, v, w \in V$: $\quad (u \bigoplus v) \bigoplus w = u \bigoplus (v \bigoplus w)$

(A3) $\exists 0 \in V$, $\forall u \in V$: $\quad u \bigoplus 0 = u$

(A4) $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$: $\quad u \bigoplus (-u) = 0$

(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$: $\quad (\alpha \cdot \beta) \bigodot u = \alpha \bigodot (\beta \bigodot u)$

(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad (\alpha + \beta) \bigodot u = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\beta \bigodot u)$
$\forall u, v \in V$: $\quad \alpha \bigodot (u \bigoplus v) = (\alpha \bigodot u) \bigoplus (\alpha \bigodot v)$

(M3) $\forall u \in V$: $\quad 1 \bigodot u = u$

dim(V) = # Einträge von A

4.2 Definition Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge eines Vektorraums V heisst Unterraum von V, falls:

① $\forall a, b \in U$: $\quad a \bigoplus b \in U$

② $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\quad \alpha \bigodot a \in U$

- Ein Unterraum ist selber ein Vektorraum.
- Ein Unterraum **muss den Nullvektor enthalten!**

4.3 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Summe von mit Skalaren x_i multiplizierten Vektoren v_i. ($v_i \in V, x_i \in \mathbb{K}$)

$$w = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$$

- $w = V \cdot x$ hat Lösung ($V = (v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(n)})$)
  $\Longrightarrow$ w ist Linearkombination von v_i.

4.4 Lineare Unabhängigkeit

$a_1 \cdot \vec{V_1} + a_2 \cdot \vec{V_2} + a_3 \cdot \vec{V_3} + \ldots = 0$ nur für $a_1, a_2, \ldots = 0$

$$\boxed{\sum x_i \cdot v_i = 0}$$

Die Vektoren v_i sind linear unabhängig, falls die Summe $\sum$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 0$ hat.

Prüfen, ob Vektoren linear unabhängig:

① Matrix mit Vektoren als Spalten erstellen:
$V = (v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(n)})$

② Der Rang ist die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren.
$rang(V) = n \Longrightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig.

4.5 Span, Erzeugendensystem und Basis

Die **lineare Hülle** $span(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen der v_i mit Skalaren aus $\mathbb{R}$.

Falls für einen Vektorraum gilt $span(v_1, v_2, \cdots, v_n) = V$, heisst $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ein **Erzeugendensystem** von V.

Falls ein Erzeugendensystem für V aus linear unabhängigen Vektoren besteht, heisst es **Basis** von V. Jeder Vektor kann **eindeutig** als Linearkombination von Basisvektoren dargestellt werden.

Aus Erzeugendensystem Basis finden:

① Matrix aufstellen, deren Zeilen aus den transponierten erzeugenden Vektoren besteht.

② Mit Gaussalgorithmus in Zeilenstufenform bringen. Dadurch wird lineare Abhängigkeit eliminiert.

③ Die Ausgangsvektoren der Pivotspalten sind Basisvektoren.

4.6 Basiswechsel

Sei V^n ein Vektorraum mit Basen $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Sei v ein Vektor $\in V$.

Basiswechsel von $[v]_q$ nach $[v]_w$ durchführen:

① Übergangsmatrix: $T_{q \to w} = ([q_1]_w, \dots, [q_n]_w)$

② $[v]_w = T_{q \to w} \cdot [v]_q$

Tipps:

- $T_{w \to q} = T^{-1}_{q \to w}$
- Meist ist eine der beiden Basen die Standardbasis S. Die Übergangsmatrix $T_{q \to s}$ ist dann sehr einfach bestimmbar. Die entgegengesetzte Übergangsmatrix wird am schnellsten durch invertieren gefunden.
- Basiswechsel für Matrizen:
  $[A]_w = T_{q \to w} \cdot [A]_q \cdot T^{-1}_{q \to w}$
- Falls T orthogonal: $T^{-1} = T^T$

4.7 Koordinaten

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$. Dann kann jeder Vektor $x \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten $x_1, \cdots, x_n$ heissen **Koordinaten** von x bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

4.8 Dimension

Besitzt der Vektorraum V eine Basis $B = b^1, b^2, \dots, b^n$, so heißt n die Dimension von V und man schreibt $dim(V) = n$.

5. Lineare Abbildungen

5.1 Definition Lineare Abbildung

Eine Abbildung $\mathcal{F}$ heisst **linear**, falls $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

① $\mathcal{F}(x + y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$

② $\mathcal{F}(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \mathcal{F}(x)$

- Eine Abbildung ist linear $\Longrightarrow$ **bildet 0 auf 0 ab!**
- Eine Abbildung zwischen endlichdimensionalen VR ist linear $\Longleftrightarrow$ kann mit einer $m \times n$-Matrix A mit Hilfe der Matrizenmultiplikation dargestellt werden.
- Ist $A \in R^{nxn}$ und $a \in R^n$, dann heißt $F : R^n \to R^n, x \to A \cdot x + a$ eine affin lineare Abbildung.

5.2 Kern und Bild einer Matrix

Kern: Der Kern einer Matrix ist die Menge aller Vektoren, die durch Multiplikation auf den Nullvektor abgebildet werden.

$$Kern(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | A \cdot x = 0\}$$

- **Kern bestimmen:** Gleichungssystem $Ax = 0$ lösen.

  Wenn Rang nicht voll ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Der Lösungsraum (am besten dargestellt als Linearkombination von mit Parameter multiplizierten Vektoren) ist der Kern der Matrix.

Bild: Das Bild einer Matrix A ist die Menge aller Bildvektoren, also aller möglichen „Ergebnisse“einer Multiplikation von A mit einem beliebigen Vektor.

$$Bild(A) = \{y \in \mathbb{R}^m |\ \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = A \cdot x\}$$

- **Bild bestimmen:** $Bild = span\{a^{(1)}, a^{(2)} \dots a^{(n)}\}$

  Ist nach einem Erzeugendensystem gefragt, reicht es, einfach die Spaltenvektoren hinzuschreiben.

  Wenn $ker(A)$ schon berechnet: im(A) = Pivotspalten der Matrix

  Achtung: Die Spaltenvektoren sind immer ein Erzeugendensystem des Bildes, jedoch nicht unbedingt eine Basis! Um Basis zu erstellen: Siehe 4.5

Zusammenhänge

- $dim(Bild(A)) = Rang(A)$
- für $A^{m \times n}$: $dim(Bild(A)) + dim(Kern(A)) = n$
- $Bild(A) \perp Kern(A^T)$ Kern (A) ⊥ Bild (A^T)
- Fredholm Alternative: $Ax = b$ ist lösbar (b liegt im Bild) genau dann, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten LGS $A^T \cdot y = 0$ steht.

5.3. Abbildungsmatrix aus gegebener Abbildung

Idee: Wir bilden zuerst die Basisvektoren ab und konstruieren uns aus den Ergebnissen unsere Matrix.

Bsp: $P_2 \to P_1 : p(x) \mapsto p'(x)$

① Finde Basis für Vektorraum aus dem man abbildet und für Vektorraum in den man abbildet.

Bsp: Basis für $P_2 = \{x^2, x, 1\}$
Basis für $P_1 = \{x, 1\}$

② Überlege, was nach gegebener Abbildungsvorschrift mit den Basisvektoren passiert und schreibe die Ergebnisse in Vektorschreibweise.

Bsp: $(x^2)' = 2 \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^T$
$(x)' = 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$
$(1)' = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

③ Resultate von Punkt 2 sind Spalten der gesuchten Matrix. (Multiplikation mit Basisvektor = Extraktion von Spalte)

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ oder MAT. Basis kann auch ein MAT. sein

Bei Projektion eines Vektors v auf einen Unterraum F gilt:
$proj_F(v) = \langle v, F_1 \rangle F_1 + \langle v, F_2 \rangle F_2 + \langle v, F_3 \rangle F_3$
↳1. Basis ↳2. Basis

6. Eigenwertproblem

Überprüfen von EV und EW

6.1 Definition Eigenwerte und Eigenvektoren

$\lambda \in \mathbb{C}$ heisst Eigenwert von $A^{n \times n}$, falls dieser für einen bestimmten Vektor v Eigenvektor Eigenwert

$$\boxed{A \cdot v = \lambda \cdot v}$$

erfüllt. Der zum Eigenwert λ zugehörige Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ heisst Eigenvektor.

6.2 Eigenwerte bestimmen

① Bestimme die Determinante $det(A - \lambda \cdot I)$

Das Resultat ist das "charakteristische Polynom" $p(\lambda)$ vom Grad n

② Bestimme die Nullstellen: $p(\lambda) = 0$.

Die Nullstellen λ_i heissen Eigenwerte.

Berechnung überprüfen

- $Spur(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum \lambda_i$ Summe alle EW
- $det(A) = \prod \lambda_i$

Es gilt: EW von A = EW von A^T

- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind die Elemente der Diagonalen.
- Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.
- Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^n ein Eigenwert von A^n.

6.3 Eigenvektoren bestimmen

Nach dem Bestimmen der Eigenwerte können die zugehörigen Eigenvektoren bestimmt werden.

① Setze einen Eigenwert λ_k in $(A - \lambda_k \cdot I)$ ein

② Löse das Gleichungssystem $(A - \lambda_k \cdot I) \cdot x = 0$

③ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Man erhält einen oder mehrere mit freien Parametern multiplizierte Eigenvektoren v_k.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$EV = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a,b direkt in 2a-b setzen.

Eigenschaften

- Eigenvektoren sind per Definition $\neq 0$
- Eigenvektoren sind linear unabhängig.
- Komplex konjugierte Eigenwerte haben komplex konjugierte Eigenvektoren (spart Zeit bei Berechnung).
- Falls A orthogonal: Die Eigenvektoren von verschiedenen λ von A sind immer orthogonal.

6.4 Algebraische und geometrische Vielfachheit

$$\boxed{1 \leqslant \text{gVfh. von } \lambda \leqslant \text{algVfh. von } \lambda \leqslant n}$$

Algebraische Vielfachheit
Die algebraische Vielfachheit ist die Vielfachheit einer Nullstelle im charakteristischen Polynom $p(\lambda)$ beim jeweiligen Eigenwert λ.

Bsp: $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda - 2)$
$\Longrightarrow \lambda = 3$ hat algVfh. 2 und $\lambda = 2$ hat algVfh. 1

Geometrische Vielfachheit
Die geometrische Vielfachheit von λ ist die Anzahl der zum EW gehörigen EV = Anzahl der freien Parameter.

6.5 (Halb)einfache Matrizen und Eigenbasis

Einfachheit

- Eine Matrix ist halbeinfach ⇔ jedes λ hat algVh = gVfh
- Eine Matrix ist einfach ⇔ jedes λ hat algVh = gVfh = 1

Es gilt:

- Ist A halbeinfach, so ist auch A^n und A^T halbeinfach
- Ist A einfach, so ist A^n ***nicht*** einfach

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n$ $\Longleftrightarrow$ die Matrix ist halbeinfach.

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$$\boxed{A \text{ halbeinfach} \Longleftrightarrow A \text{ diagonalisierbar}}$$

Matrix diagonalisieren (Basiswechsel in Eigenbasis)

① Bestimme die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren v_i

② Die Matrix $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.

③ Die Matrix $T = (v_1, \dots, v_n)$ hat die Eigenvektoren als Spalten **(Gleiche Reihenfolge wie bei D!)**.

④ Bestimme T^{-1}. Falls EV orthonormal $T^{-1} = T^T$

Potenzen und Exponentialfunktion
Potenzen/Exponentialfunktionen von diagonalisierbaren Matrizen können einfach berechnet werden:

- $A^k = (TDT^{-1})^k = T \cdot diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \cdot T^{-1}$
- $e^A = e^{TDT^{-1}} = T \cdot diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \cdot T^{-1}$

$D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ $A^{-1} = T D^{-1} T^{-1}$

6.7 Ähnlichkeit

A und B heissen ähnlich, falls für eine beliebige Matrix T gilt:

$$\boxed{A = T^{-1}BT}$$

Ähnliche Matrizen haben:

- die gleichen Eigenwerte
- die gleiche Determinante

Satz: Ist v ein EV von A zum EW λ, so ist $y = T^{-1}v$ ein EV von B zum selben EW.

6.8 Spektrum

Das Spektrum ist definiert als die Menge aller Eigenvektoren von A.

6.9 Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen

Sei $A \in R^{nxn}$ symmetrisch, dann gilt:

- alle Eigenwerte von A sind reell
- Eigenvektoren sind zu den versch. EW orthogonal
- A ist halbeinfach (diagonalisierbar)

- A besitzt eine ONB (Spalten von T normieren → Gram-Schmidt)
- Es gibt eine orthogonale Matrix T, sodass $T^{-1}AT = T^TAT = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, Spalten normieren!

7. Normen

7.1 Definition Vektornorm

Eine Norm im Vektorraum V ordnet jedem Vektor v eine relle Zahl $||v||$ zu und kann so als eine Art Mass verstanden werden.

Die Norm ist unabhängig von der Basis.
Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

① $||v|| \geqslant 0$ und $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

② $||\alpha \cdot v|| = |\alpha| \cdot ||v||$

③ $||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$

7.2 L_p-Normen im $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\text{Allgemeine } L_p\text{-Norm: } ||v||_p = \sqrt[p]{\sum |v_i|^p}}$$

Beispiele

- L_1-Norm: $||v||_1 = |v|_1 + |v|_2 + \ldots + |v|_n$
- L_2-Norm: $||v||_2 = \sqrt{|v|_1^2 + |v|_2^2 + \ldots + |v|_n^2}$ (Euklid)
- L_∞-Norm: $||v||_\infty = max(|v|_1, |v|_2, \ldots, |v|_n)$ (Maximum)

7.3 L_p-Normen für Funktionen

$$\boxed{\text{Allgemeine } L_p\text{-Norm: } ||f||_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}}$$

Beispiele

- L_1-Norm: $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx$
  (Gibt den Betrag der Fläche unter der Kurve an)
- L_∞-Norm: $||f||_\infty = max(|f(x)| : x \in (a, b))$
  (Gibt den maximalen Ausschlag an)

7.4 Matrixoperatornormen

$$\boxed{||A|| = \max_{\{||x||_2=1\}} = ||Ax||_2}$$

Beispiele

- A quadratisch: $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max} von A^T \cdot A}$
- A symmetrisch: $||A||_2 = |\lambda_{max} von A|$
- A orthogonal: $||A||_2 = 1$
- A regulär: $||A^{-1}||_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min} von A^T \cdot A}}$
- regulär symmetrisch: $||A^{-1}||_2 = \frac{1}{min(|\lambda_i|)}$
- $||A||_1$ = maximale Spaltensummennorm = Maximum der Addition des Betrages der einzelnen Einträge der Spalte
- $||A||_\infty$ = maximale Zeilensummennorm = Maximum der Addition des Betrages der einzelnen Einträge der Zeile
- Ist A symmetrisch, so gilt: $||A||_1 = ||A^T||_\infty = ||A||_\infty$

8. Skalarprodukt

8.1 Definition Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Paar x, y von Vektoren eine Zahl $\langle x, y \rangle$ zu.

Es muss folgende Bedingungen erfüllen:

① $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

② $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

③ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

④ $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Beispiele für Skalarprodukte erfüllt ①, ④

Sp: $A, B \in \mathbb{R}^{2x2} \Rightarrow \langle A, B \rangle = Spur(AB^T)$

- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$
- Funktionenskalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

8.2 Von Skalarprodukt induzierte Norm

Aus einem Skalarpodukt kann eine Norm induziert werden. Dieser Ausdruck erfüllt alle Axiome für eine Norm (siehe 7.1.)

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

8.3 Orthogonalität und Orthogonalprojektion

Zwei Vektoren sind orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$.

Notation: $x \perp y$

Die Orthogonalprojektion des Vektors x auf Vektor y ist:

$$z = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$$

8.4 Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Ziel des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens ist, aus einer beliebigen Basis eine sogenannte **Orthonormalbasis** zu erzeugen.

Bei einer Orthonormalbasis sind alle Basisvektoren:

- orthogonal zueinander: $\langle b_i, b_j \rangle = 0$
- Einheitsvektoren: $||b_i|| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$

Orthonormalisierungsverfahren durchführen:

Für die Durchführung benötigt man eine beliebige Basis, sowie ein beliebiges Skalarprodukt (meistens gegeben).

① Wähle beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere mit von Skalarprodukt induzierter Norm.

$$e_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$

② Wähle zweiten Basisvektor b_2. Zuerst zu b_1 parallelen Teil abziehen, und dann normieren.

$$e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle \cdot e_1$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$

③ Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i:

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle \cdot e_2$$
$$- \ldots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle \cdot e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{||e_i'||} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

8.5 Abbildung eines Vektors in einer ONB

Abbildung von $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bezüglich der ONB $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ orthogonale Projektion $\boxed{\text{ZF 5,3}}$ Abbidung

$$[V]_B = \begin{pmatrix} \langle V, b_1 \rangle \\ \langle V, b_2 \rangle \\ \ldots \\ \langle V, b_n \rangle \end{pmatrix}$$

9. Quadratische Formen

9.1 Definition Quadratische Form

Quadratische Formen sind bestimmte Funktionen, die mit einer symmetrischen Matrix A und einem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gebildet werden. Es kommen maximal quadratische Terme vor.

$$\boxed{q_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q(x) = x^TAx}$$

- Quadratische Formen, die mit einer diagonalen Matrix gebildet werden (siehe q_c) nennt man **rein quadratisch**.
- Die symmetrische Matrix A legt die Gestalt der entstehenden Fläche fest.

Beispiele:

$$q_b(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$q_c(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 1x_3^2$$

9.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0 \; \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A (siehe 9.3)

9.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

Variante 2: Hurwitz-Kriterium

Die zweite Möglichkeit ist, die Definitheit durch Bestimmung von Unterdeterimanten zu bestimmen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Longrightarrow A_1 = (a), \; A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & e & h \end{pmatrix}$$

- positiv definit: Alle $det(A_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$
- negativ definit: Alle $det(A_i) < 0$ für $i = 1, 3, 5, \ldots$
  Alle $det(A_i) > 0$ für $i = 2, 4, 6, \ldots$

9.4 Extrema einer quadratischen Form

Kritische Punkte finden:

Man setze den Gradienten der quadratischen Form $grad(q(x)) = (\frac{dq}{dx_1}, \frac{dq}{dx_2}, \ldots, \frac{dq}{dx_n})^T = 0$. Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man die Koordinaten der kritischen Punkte.

Kritische Punkte zuordnen:

① Bilde Hessesche Matrix in der richtigen Dimension für jeden kritischen Punkt:

Bsp: $$H_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{dq(x)^2}{d^2x_1} & \frac{dq(x)^2}{dx_1x_2} \\ \frac{dq(x)^2}{dx_1x_2} & \frac{dq(x)^2}{d^2x_2} \end{pmatrix}$$

② Bestimme Definitheit der Matrix (siehe 9.3).

positiv definit $\Longrightarrow$ lokales Minimum

negativ definit $\Longrightarrow$ lokales Maximum

indefinit $\Longrightarrow$ Sattelpunkt

9.5 Kegelschnitte und Quadriken

Setzt man eine quadratische Form in eine Gleichung folgender Form ein ($x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$), erhält man eine sogenannte Quadrik:

$$x^TAx + a^Tx + b = 1$$

Ist die quadratische Form zweidimensional, erhält man einen sogenannten Kegelschnitt, ist sie dreidimensional erhält man eine Fläche zweiten Grades.
Durch Hauptachsentransformation und Translation findet man heraus, um welche Art Kegelschnitt/Quadrik es sich handelt.

9.6 Hauptachsentransformation einer quadr. Form

Wir können durch zwei Koordinatentransformationen (Drehung $y = Tx$ und Verschiebung $z = y + c$) jede quadratische Form rein quadratisch machen.

Während der Koordinatenvektor x die quadratische Form in der Standardbasis darstellt, stellt der Koordinatenvektor z die quadratische Form in der neuen Basis dar.

Die Basis, in der $q(x)$ rein quadratisch wird, ist die Eigenbasis der zugehörigen symmetrischen Matrix A.

Bsp: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2$

Vorgehen:

Je nach Aufgabe müssen nicht alle Punkte durchgeführt werden. Für ausschliesslich Hauptachsentransformation reicht 1-3.

① Man bestimme die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $q(x) = x^T Ax$

Trick: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$s

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

② Man diagonalisiere die Matrix A (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T. Da A symmetrisch ist, kann T orthogonal gewählt werden und $T^{-1} = T^T$.

T orthogonal wählen! Spalten von T normieren, falls zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert: 8.4

Bsp: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ Multipliziere aus: $q(y) = y^T \cdot D \cdot y$. Wir haben nun unsere Hauptachsentransformation durchgeführt.

Bsp: $y^T Dy = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

④ Falls in Aufgabe gefragt: Bringe Quadrik $q(x) + a^T x + b = 1$ in Normalform. ⟶ Ziel: $\frac{z_1^2}{a_5} + \frac{z_2^2}{b_5} = 1$
Bestimme $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

Bsp: $q(x) + 2x_3 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{3}$

⑤ Schreibe Quadrik in transformierter Form (ausmultiplizieren): $y^T Dy + a^T Ty + b = 1$

Bsp: $y^T Dy + a^T Ty + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3} = 1$

⑥ Falls noch lineare Terme übrig: Ergänze quadratisch

$$
\begin{aligned}
\text{Bsp: } 0 &= -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \tfrac{4}{3} \\
&= -3(y_1^2 - \tfrac{2}{3}y_1) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\
&= -3((y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - (\tfrac{2}{2\cdot 3})^2) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\
&= -3(y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} + 3\cdot(\tfrac{1}{3})^2 \\
&= -3(y_1 \underbrace{- \tfrac{1}{3}}_{})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 1
\end{aligned}
$$

$z_1 = y_1 \underbrace{-\frac{1}{3}}_{c_1}$

Durchführung der zweiten Koordinatentransformation $z = y + \boxed{c}$ (Verschiebung). Man bestimme Vektor c.

Danach enthält die Gleichung nur noch rein quadratische Terme.

Bsp: $c = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(z) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$

⑦ Falls gefragt: Gib die zusammengesetzte Koordinatentransformation an: $z = T^T x + c$

Welche Hauptachse schneidet $q(x) = a > 0$ nicht?
Die mit dem negativen Eigenwert. Jeder Vektor auf dieser Achse gibt in $q(x)$ eingesetzt eine negative Zahl.

Wie skizziere ich die Quadrik in Normalform?
In Normalform ist es nicht schwer, mehrere Punkte einzusetzen und dann Linien durchzuziehen.

Wie skizziere ich die Quadrik im ursprünglichen System?
Skizziere zuerst in Normalform und transformiere Skizze mit Drehungsmatrix T und Verschiebungsvektor c.

Welche Punkte sind dem Ursprung am nächsten?
Falls Koordinatentransformation nur aus Drehung $y = Tx$ bestand, sind die gleichen Punkte dem Ursprung am nächsten wie in der Normalform.

① Man schreibe die Funktion in folgender Form: $q(x) = x^T Ax + a^T \cdot x + b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$

Bsp: $y^T Dy + a^T Ty + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3}$

10. Kleinste Quadrate

10.1 Kleinste Quadrate

Mit dem Prinzip der „kleinsten Quadrate“ kann man zwar überbestimmte Gleichungssysteme nicht lösen, man kann jedoch eine möglichst „gute“ Lösung finden, indem man den quadratischen Fehler minimiert.

Bsp:
$$
\begin{matrix} 2x_1 & + & 3x_2 & = \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = \\ 2x_1 & + & 1x_2 & = \end{matrix} \overset{c}{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow \text{überbestimmt}
$$

Wir bilden die Differenz (= Fehler) aus der rechten und der linken Seite und nennen sie Residuenvektor r:

$$
\begin{matrix} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 6 & = \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 8 & = \\ 2x_1 & + & 1x_2 & - & 3 & = \end{matrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}
$$

Wir suchen $(x_1\ x_2)^T$, sodass $||r||$ minimal.
⇒ quadratischer Fehler minimal

Vorgehen:
Meist ist das Gleichungssystem in Aufgabe bereits in Form $A \cdot x - c = \underset{\text{Residuenvektor}}{r}$ gegeben (siehe oben).

① Man bestimme A und c

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

② Man berechne $A^T A$ und $A^T c$

Bsp: $A^T A = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T c = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$

③ Man löse das Gleichungssystem $\overset{\text{Normalgleichung}}{\boxed{A^T A \cdot x = A^T c}}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2.67 \\ -0.17 \end{pmatrix}$

10.2 QR-Zerlegung

Mit der QR-Zerlegung kann eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer oberen Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ verwandelt werden:

$$\boxed{A = Q \cdot R}$$

Vorgehen:
Wir wollen nacheinander alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen von A eliminieren.

① Man wähle zu eliminierendes Element und benenne es a_{ij}.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_{31}$ soll eliminiert werden

② Lese i, j ab und notiere a_{jj}, a_{ij}

Bsp: $i = 3, j = 1 \Longrightarrow a_{jj} = 1, a_{ij} = 1$

③ Berechne $w = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$

Bsp: $w = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

④ Man finde die richtige Rotationsmatrix Q'^T. Man nehme zuerst die Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und setze $i_{ii} = \cos(\alpha)$, $i_{ij} = -\sin(\alpha)$, $i_{ji} = \sin(\alpha)$, $i_{jj} = \cos(\alpha)$.

Bsp: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

⑤ Setze in Rotationsmatrix $\sin(\alpha) = \frac{a_{ij}}{w}$ und $\cos(\alpha) = \frac{a_{jj}}{w}$

Bsp: $Q'^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

⑥ Berechne $Q'^T \cdot A = A'$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

⑦ Falls A' keine obere Dreiecksmatrix, wiederhole (finde Q''^T etc.) bis alle nötigen Elemente eliminiert.

Bsp: $Q''^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑧ Wenn $A'' = R$ gefunden, berechne $Q = (Q''^T \cdot Q'^T)^T$ $\Longrightarrow A = Q \cdot R$

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung
Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

① Man bestimme A und c wie bei 10.1.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

Bsp: $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ Man berechne $d = Q^T \cdot c$

Bsp: $d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

④ Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot x = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

Bsp: $R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

⑤ Falls nach dem minimalen Fehler gefragt ist, berechne $||d_1||_2$

Bsp: $||d_1||_2 = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

11. Lineare Diff'gleichungssysteme

11.1 Lösen von homogenem Diff'gleichungssystem

Man sucht eine Lösung für ein System von Differentialgleichungen, gegeben in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingungen $y(0)$ sowie die Matrix A sei bekannt, gesucht ist $y(t)$.
Das Problem kann durch Transformation in Eigenbasis (Entkopplung) gelöst werden.

Bsp: $\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Vorgehen: (Transformation in Eigenbasis $z = T^{-1} \cdot y$)

① Man diagonalisiere die Matrix $A = TDT^{-1}$ (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T.

Bsp: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

② Sei $t^{(i)}$ die i-te Spalte von T und d_{ii} der i-te Diagonaleintrag von D.
Die Lösung des Diff'gleichungssystems lautet dann:
$y(t) = z_1(0) \cdot t^{(1)} \cdot e^{d_{11}t} + z_2(0) \cdot t^{(2)} \cdot e^{d_{22}t} + \ldots$

Bsp: $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = z_1(0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + z_2(0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$

③ Variante 1: Bestimme T^{-1}, danach $z(0) = T^{-1} \cdot y(0)$.
Variante 2: Bestimme $z(0)$ durch Lösen des Gleichungssystems $T \cdot z(0) = y(0)$.
Falls keine Anfangsbedingungen gegeben, $z_i(0) = C_i$.

Bsp: $\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix}$

11.2 Umwandlung höhere Ordnung in System 1. Ordnung

Man will eine Differentialgleichung höherer Ordnung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umwandeln:

Bsp:
$$y'''(t) + 4 \cdot y''(t) + 2 \cdot y'(t) - 3y(t) = 0$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 2$$

Vorgehen:

① Man substituiere $y = y_0, y' = y_1$ etc. Die höchste Ableitung lasse man stehen.

Bsp: $y'''(t) + 4 \cdot y_2(t) + 2 \cdot y_1(t) - 3y_0(t) = 0$

② Man ersetze höchste Ableitung durch einfache Ableitung mit Substitution.

Bsp: $y_2'(t) + 4 \cdot y_2(t) + 2 \cdot y_1(t) - 3y_0(t) = 0$

③ Durch die Substitution hat man automatisch ein Diff'gleichungssystem erster Ordnung erzeugt:

Bsp: $$\begin{array}{lllllll} y_0' & = & y_1 & & & & (y_{n-1}' = y_n) \\ y_1' & = & y_2 & & & & \\ y_2' & = & 3\cdot y_0 & - & 2\cdot y_1 & - & 4\cdot y_2 \end{array}$$

Löse dies, wie in 11.1. Die gesuchte Lösung ist $y = y_0$, also nur eine Zeile!

④ Zum Schluss substituiere noch die Anfangsbedingungen

Bsp: $y_0(0) = 1,\ y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 2$

11.3 Lösen von inhomogenem Diff'gleichungssystem

Man hat bereits mit dem in 11.1 beschriebenen Verfahren die Lösung $y_h(t)$ für das homogene Diff'gleichungssystem $y' = A\cdot y$ gefunden. Jetzt sucht man die Lösung für das inhomogene System:

$$y' = A\cdot y + b:$$

Das Prinzip ist, dass man eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ findet, die die Diff'gleichung sicher erfüllt. Die allgemeine Lösung ist dann $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Vorgehen:

① Man nimmt an, dass die partikuläre Lösung $y_p(t)$ konstant ist. Daraus folgt, dass $y_p'(t) = 0$. Man löse also das Gleichungssystem $A\cdot y_p = -b$ $\Rightarrow y_p = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

② Man addiere die homogene und die Partikuläre Lösung zusammen: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ $\Rightarrow y(t) = y_h(t) + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

11.4 Bedingungen im Unendlichen

Für das Bestimmen der Konstanten C_i sind nicht immer nur Anfangsbedingungen $y_i(0)$ gegeben, sondern manchmal auch Bedingungen wie $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = a$.

Bsp: Bestimme C_i von $y(t) = C_1 + 3C_2e^{-t} + C_3\cdot e^{2t}$ mit $y(0) = 2$ und $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 5$

Vorgehen:

① Verlangt eine Bedingung, dass $y(t)$ im Unendlichen beschränkt sein soll, setze Konstanten vor Exponentialfunktionen mit positiven Exponenten null.

Bsp: Zweite Bedingung $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 5 \ \Rightarrow\ C_3 = 0$

② Man bestimme weitere Konstanten, indem man $t \to \infty$ einsetzt.

Bsp: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = C_1 = 5$

③ Man bestimme die übrigen Konstanten, indem man $t = 0$ einsetzt.

Bsp: $y(0) = 5 + 3C_2 = 2 \ \Rightarrow\ C_2 = -1$

11.5 Komplexe Lösungen

Die Eigenwerte von A können auch komplex sein. Ist dies der Fall, so gilt:

Bsp: Gegeben sei $y''(x) = -5y(x) + 4y'(x)$. Finde die allgemeine Lösung des Systems.

Vorgehen:

① Substitution:

Bsp: $y_0 = y, y_1 = y'$

② Höchste Ableitung ist durch die DGL gegeben:

Bsp: $y_1'(x) = -5y_0(x) + 4y_1(x)$

③ Dadurch ergibt sich diese DGL-System mit zugehöriger Matrix:

Bsp: $y_0' = y_1, y_1' = -5y_0 + 4y_1 \begin{pmatrix}y_0'\\y_1'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_0\\y_1\end{pmatrix}$

④ Mittels Diagonalisierung der Matrix A ergeben sich die Eigenwerte und -vektoren:

Bsp: $\lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2-i v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix}2-i\\5\end{pmatrix}, v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix}2+i\\5\end{pmatrix}$

⑤ Daraus erhält man die allgemeine Lösung:

Bsp: $\begin{pmatrix}y_0\\y_1\end{pmatrix} = c_1e^{(2+i)x}\cdot\begin{pmatrix}2-i\\5\end{pmatrix} + c_2e^{(2-i)x}\cdot\begin{pmatrix}2+i\\5\end{pmatrix}$

⑥ Es gilt: $e^{\pm i} = cos(x) \pm i\cdot sin(x)$

Bsp:
$$\begin{pmatrix}y_0\\y_1\end{pmatrix} = c_1e^{2x}\cdot(cos(x) + i\cdot sin(x))\cdot\begin{pmatrix}2-i\\5\end{pmatrix}$$
$$+ c_2e^{2x}\cdot(cos(x) - i\cdot sin(x))\cdot\begin{pmatrix}2+i\\5\end{pmatrix}$$

⑦ Auch hier ist nur die erste Zeile die gesuchte Lösung:

$$y_0 = y(x) = c_1e^{\alpha x}\cdot(cos(\beta x) + i\cdot sin(\beta x))\cdot v_{1,y0} + c_2e^{\alpha x}\cdot(cos(\beta x) - i\cdot sin(\beta x))\cdot v_{2,y0}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cdot cos(\beta x) + c_2 sin(\beta x))$$

Bsp:
$y_0 = y(x) = c_1e^{2x}\cdot(cos(x) + i\cdot sin(x)) + c_2e^{2x}\cdot(cos(x) - i\cdot sin(x))$
$y(x) = e^{2x}(c_1\cdot cos(x) + c_2 sin(x))$

12. Persönliche Ergänzungen

12.1 Beispiel L-R Zerlegung

$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\6 & 1 & -10\\-2 & -7 & 8\end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix}4\\-1\\25\end{pmatrix}$

⇒ L/R- Schreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3\\ - & 1 & 0 & 6 & 1 & -10\\ - & - & 1 & -2 & -7 & 8 \end{array}\right)$$
L R

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1\\ -1 & - & 1 & 0 & -8 & 5 \end{array}\right)$$
L R

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1\\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
L R

$L\cdot y = b$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\-1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\25\end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix}4\\-13\\3\end{pmatrix}$$

$R\cdot x = y$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\0 & 4 & -1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-13\\3\end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

12.2 Beispiel P-L-R-Zerlegung

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{2}{5} & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 6 \end{array}\right)$$
P L R

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} \end{array}\right)$$
P L R

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$
P L R

⇒ L$\cdot y = P\cdot b$
⇒ R $\cdot x = y$

12.3 Beispiel Unterraum

Sei $V = R^n$ und A eine nxn-Matrix. Wir betrachten als Teilmenge U von V die Lösungsmenge $A\cdot x = 0$. Ist U ein Unterraum von V?
Seien a,b zwei Lösungen von $A\cdot x = 0$. Dann gilt $A\cdot a = 0$ und $A\cdot b = 0$.
⇒ Bedingung 1:
$A\cdot(a+b) = A\cdot a + A\cdot b = 0 \Rightarrow$ erfüllt
⇒ Bedingung 2:
$A\cdot(\alpha\cdot a) = \alpha\cdot A\cdot a = \alpha\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ erfüllt
U ist also ein Unterraum von V.

12.4 Beispiel Basiswechsel Matrix

Seien $Q = (e_1, e_2)$ die Standardbasis und $W = (e_1+e_2, e_1-e_2)$ und $[F]_Q = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, berechne $[F]_W$!

$T_{W\to Q} = ([w_1]_Q, [w_2]_Q, \dots, [w_n]_Q) = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$,

$T_{W\to Q}^{-1} = T_{Q\to W} = \dots = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$[F]_W = T_{W\to Q}\cdot[F]_Q\cdot T_{Q\to W} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

12.5 Beispiel Linearität

Ist die folgende Abbildung linear?
$F_1 : P_3 \to P_3,\ p(x) \to p(x) + 1$
$F_1(p(x)+q(x)) = p(x)+q(x)+1 \neq [p(x)+1]+[q(x)+1]$
→ keine lineare Abbildung

12.6 Berechnung von A^kx

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar und $x \in \mathbb{C}^n$ und man will $y = A^kx$ berechnen, so muss man folgende Schritte durchlaufen:

① Löse das Eigenwertproblem von A, so dass $T^{-1}AT = D$

② Löse das LGS $T\cdot z = x$ nach z

③ Berechne D^k, dann gilt $w = D^k\cdot z$

④ Dann ist $y = T\cdot w$

⑤ Falls A symmetrisch ist, kann man auch T orthogonal wählen, in diesem Fall gilt $A^k = TD^kT^T$

⑥ Falls A nicht symmetrisch ist, kann man T nicht orthogonal wählen, es gilt $A^k = TD^kT^{-1}$

⑦ Die Eigenwerte von A^k sind $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$

⑧ Jetzt kann man mit der neu berechneten Matrix das LGS lösen

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Berechne A^3

① Eigenwertproblem lösen (wurde schon gemacht):

$$T = \begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

② 2. - 4. wird nicht benötigt

③ Schritt 5. $A^3 = TD^3T^T$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{27}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

12.7 Berechnung von e^A

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrisch dann gilt

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}; T^{-1}AT = D$$

Daraus entsteht:

$$e^A = ... = T \cdot diag(e^{d1}, ..., e^{dn}) \cdot T^{-1}$$

Besondere Eigenschaften:

- $e^{A^T} = (e^A)^T$
- Falls e^{tA} stetig diff'bar: $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A \cdot e^{tA}$
- $(e^A)^{-1=e^{-A}}$
- $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$
- $det(e^A) = e^{spur(A)}$

Beispiel:

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Eigenwertproblem lösen
  $P_A(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{I}) = det(\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix}$
  $= (\lambda - 2)(\lambda + 1) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$
  $E_{\lambda_1} = ... = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $E_{\lambda_2} = ... = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
  $T^{-1} = \frac{1}{det(T)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $e^A = ... = T \cdot diag(e^{d_1}, ..., e^{d_n})T^{-1}$
  $e^A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} 2e^2 & e^{-1} \\ e^2 & e^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} 2e^{-2} - e^{-1} & -2e^2 + 2e^{-1} \\ e^2 - e^{-1} & -e^2 + 2e^{-1} \end{pmatrix}$

12.8 Beispiel lineares inhomogenes DGL System

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem ist von der Form

$$y' = A \cdot y + b$$

Verfahren:

① Man löst das homogene DGL-System gemäss bekannten Strukturen $= y_h(x)$

② Man muss nun irgendeine passende partikuläre Lösung $y_p(x)$ finden

③ Die Gesamtlösung ist $y(x) = y_{h(x)+y_p(x)}$

Beispiel:
Gegeben sei

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_2 - y_3 + 1 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}, \lambda_3 = -1 - \sqrt{2}$

$$E_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, E_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$+ c_2 e^{(1+\sqrt{2})x} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{(-1+\sqrt{2})x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun zu $y_p(x)$

$$y_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow y_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ folgt

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} +$$
$$c_3 e^{(-1+\sqrt{2})x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13. Anhang

13.1 Givens-Rotationsmatrizen

Drehung um x-Achse:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$
Drehung um y-Achse:
$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{pmatrix}$
Drehung um z-Achse:
$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13.2 Abbildungsmatrizen

Spiegelung an x=y Diagonalebene:
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Orthogonalprojektion auf die y-Achse:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für vollen Rang gilt $Rang(A) = n$ $(A^{n \times n})$

- LGS $Ax = b$ für beliebiges b lösbar

- LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lsg.

- homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lsg.

- Zeilen/spalten von A sind linear unabhängig

- A ist invertierbar

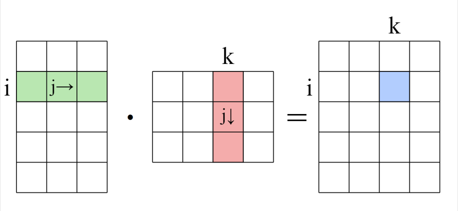
- $det(A) \neq 0$

- spalten von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$

- Kern von A besitzt nur aus dem $\vec{0}$

- Keine EW von A ist 0

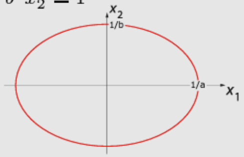
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



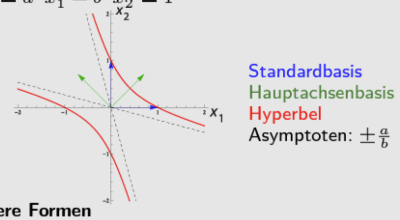
10.8 Formen von Quadriken

Je nach Rang von A, den Vorzeichen der EW von A, a und b ergeben sich verschiedenen Typen von von Kegelschnitten respektive Quadriken.

Ellipse
$q(x) = a^2x_1^2 + b^2x_2^2 = 1$



Hyperbel
$q(x) = a^2x_1^2 - b^2x_2^2 = 1$



Weitere Formen

$a^2x_1^2 + b^2x_2^2 + 1 = 0$	leere Menge
$x_1^2 + b^2x_2^2 = 0$	Punkt
$x_1^2 - b^2x_2^2 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar

Schiefsymmetrische Matrix

Eine schiefsymmetrische Matrix ist eine quadratische Matrix, welche gleich dem Negativen ihrer Transponierten ist:

$$\boxed{-S = S^T}$$

Eigenschaften:

- Die Eigenwert von S sind alle imaginär oder gleich 0
- Alle Diagonaleinträge sind notwendigerweise gleich 0
- $det(S) = det(S^T) = det(-S) = (-1)^n det(S)$
- $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $s_{ij} = -s_{ji}$

13.5 Spur

Die Spur einer quadratischen $n \times n$ Matrix A bezeichnet die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist also

$$Spur(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Eigenschaften:

- $Spur(A) = Spur(A^T)$.
- $Spur(\alpha A + \beta B) = \alpha Spur(A) + \beta Spur(B)$.
- $Spur(AB) = Spur(BA)$ beides mit $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ji}$
- $Spur(ABC) = Spur(CBA) = Spur(BCA)$
- $Spur(B^{-1}AB) = Spur(A)$
- Sind A und B $n \times n$ Matrizen, wobei A positiv definit und B nicht negativ ist, so gilt $Spur(AB) \geqslant 0$.