ETH Zürich
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Rasmus Kyng
Prof. Angelika Steger

FS 2024

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Theorie-Aufgaben 7

Abgabe in Moodle () bis zum 25.04.2024 um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 – *Couch to k k*

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens $\frac{3}{4}$ aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schnieft* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph $G = (V, E)$ ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung $v \in V$ und die Route ist ein gegebener Kreis $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$ der Länge k.

Bei jeder Strasse $e \in E$ gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

(a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.

(b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.

(c) Nimm an, dass du $n-1$ Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Routen, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schniefender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt $k \geq \log_2(n) + 1$, dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ keinen einzigen schniefenden Hund.

(d) Nimm an, dass $k = 1000 \log_2 n$ und $n \geq 2$. Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.

Theorieaufgabe 4

Aris Amin

a) kein Vergnügen : falls $\geq \frac{3}{4}k$ Strassen Blumen haben

Sei X die Anzahl Strassen mit Blumen auf dem Spaziergang und X_i für $\{1, \dots, k\}$ eine Indikatorvariable $X_i = \begin{cases} 1 & \text{Strasse } i \text{ hat Blumen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Da jede Strasse Blumen mit $p = \frac{1}{2}$ hat folgt da $X_i \sim Ber(p)$:

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2}$$

Dann weil $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ folgt:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$$

Linearität : X_i unabhängig gemäss Aufgabenstellung

Markov : $\Pr\left[X \geq \frac{3}{4}k\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{3/4\, k} = \frac{\cancel{4}^{2}}{3\cancel{k}} \cdot \frac{\cancel{k}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

b) Wir können die Werte von oben übernehmen. Für Chebyshev benötigen wir jedoch noch die Varianz :

$$\mathbb{E}[X_i^2] = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X_i]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$Var[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$Var[X] = Var\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{k} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4} = \frac{k}{4}$$

X_i unabhängig

Chebyshev : $\Pr\left[X \geq \frac{3}{4}k\right] = \Pr\left[X \geq \frac{k}{2} + \frac{k}{4}\right]$

$$= \Pr\left[X - \frac{k}{2} \geq \frac{k}{4}\right]$$

$$= \Pr\left[X - \mathbb{E}[X] \geq \frac{k}{4}\right]$$

$\rightarrow \Pr\left[X - \mathbb{E}[X] \geq \frac{k}{4}\right] \leq \Pr\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \frac{k}{4}\right]$ | Def. Betrag

$\overset{(*)}{\leq} \frac{Var[X]}{(k/4)^2} = \frac{k}{4} \cdot \frac{16}{k^2} = \frac{4}{k}$ // | Chebyshev (*)

c) $n-1$ Freunde mit $n-1$ Heuschnupfenhunden.

schniefender Hund : Alle k Straßen auf Spaziergang haben Blumen.

Zeige: Falls $k \geq \log_2(n) + 1 \Rightarrow \Pr[\text{keine schniefende Hunde}] \geq \frac{1}{2}$.

Ereignis "Hund i schnieft" $\Leftrightarrow$ "alle k Straßen haben Blumen"

Da die Blumenwahrscheinlichkeiten aller Straßen unabhängig sind hat der Fall, dass alle k Straßen Blumen haben Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Wir definieren eine neue Indikatorvariable für $i = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unser Hund}}}{1}, \underbrace{\ldots, n}_{\text{n-1 Hunde der Freunde}}\}$.

$$H_i = \begin{cases} 1 & \text{Hund } i \text{ schnieft} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H = \sum_{i=1}^{n} H_i$$

Wie oben beschrieben. $\mathbb{E}[H_i] = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Und da H_i unabhängig: $\mathbb{E}[H] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} H_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[H_i] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n}{2^k}$

Wir berechnen nun also die Whk, dass mind. ein Hund schnieft.

Glücklicherweise können wir für H wieder Markov verwenden:

$$\Pr[H \geq 1] \leq \frac{\mathbb{E}[H]}{1} = \mathbb{E}[H]$$

$$\Leftrightarrow \Pr[H \geq 1] \leq \frac{n}{2^k}$$

Setzen wir wie gegeben $k \geq \log_2(n) + 1$ ein:

$$\Longrightarrow \Pr[H \geq 1] \leq \frac{n}{2^k} \leq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \Pr[H \geq 1] \leq \frac{1}{2}$$

Damit ist die Aufgabenstellung gezeigt, dass es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ keinen schniefenden Hund gibt.

d) Sei $k = 1000 \log_2(n)$ und $n \geq 2$.

z.z: Pr[alle Spaziergänge sind ein Vergnügen]

Um noch genauere Schranken zu bekommen wollen wir Chernoff benutzen. Wir wissen aus a) noch, dass $X_i \sim Ber(p)$, daher erfüllen wir auch die Bedingungen für Chernoff. Wir schätzen die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang mit unserem Hund <u>kein</u> Vergnügen wird. Dies ist der Fall falls: $Pr[X \geq \frac{3}{4}k]$

$$\overset{b)}{=} Pr\left[X \geq \mathbb{E}[X] + \frac{k}{4}\right]$$

$$= Pr\left[X \geq \frac{k}{2} + \frac{k}{4}\right]$$

$$= Pr\left[X \geq \frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= Pr\left[X \geq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\mathbb{E}[X]\right] \qquad \Big| \text{Chernoff Format}, \ \delta = \frac{1}{2}$$

$$\overset{\text{Chernoff}}{\leq} e^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\mathbb{E}[X]}$$

$$= e^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{k}{2}}$$

$$= e^{-\frac{k}{24}} \qquad \Big| \ k = 1000\log_2(n)$$

$$= e^{-\frac{1000\log_2(n)}{24}}$$

$$\leq 2^{-\frac{1000\log_2(n)}{24}} \qquad \Big| \ 2^{\log_2(n)} = n$$

$$= n^{-\frac{1000}{24}} \qquad \Big| \ \frac{1000}{24} = 41.\overline{6}$$

$$\leq n^{-41.\overline{6}} \qquad (1)$$

Nun gehen wir noch durch alle Freunde. Sei F_i:

$$F_i = \begin{cases} 1 & \text{Spaziergang des Freundes } i \text{ ist kein Vergnügen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathbb{E}[F_i] \overset{(1)}{\leq} n^{-41}$$

Wieder: $F = \sum_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow F =$ "Anz. Spaziergänge die kein Vergnügen sind"

Wir wollen, dass mit Whk. 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sind, daher suchen wollen wir die Whk., dass min. ein Spaziergang kein Vergnügen ist ≤ 0.01 abschätzen.

$$Pr[F \geq 1] \underset{\substack{\text{Markov} \\ \text{siehe c)}}}{\leq} \mathbb{E}[F] \underset{\substack{\text{Linearität} \\ \text{da unabhängig}}}{\leq} n \cdot \mathbb{E}[F_i] \leq n \cdot n^{-41.\overline{6}} \leq n^{-40.\overline{6}} \underset{n \geq 2}{\leq} 2^{-40.\overline{6}} \leq 0.01$$

$\Rightarrow$ Damit ist Behauptung gezeigt.