Angelika Steger & Emo Welzl

Flüsse in Netzwerken: Anwendungen (Teil 2)

Kopf CT [CT-MRTinstitut Berlin]

III Bildsegmentierung

Bildsegmentierung. Gegeben ein Bild (aus Pixeln mit Farbwerten), trenne Vordergrund von Hintergrund.

Intuitiv: Ein Bild ist ein Menge P von Pixeln (z.B. gitterförmig angeordnet) mit Farben (z.B. RGB, Grauwerte), mit einer Nachbarschaftsrelation, die sagt welche Pixel nebeneinander liegen.

Modellierung

Ein **Bild** ist ein Graph (P, E) mit Farbinformation $\chi\colon P \to$ Farben.

Modellierung

Ein **Bild** ist ein Graph (P, E) mit Farbinformation $\chi \colon P \to$ Farben.

Jemand extrahiert aus den Farben der Pixel individuell eine Einschätzung, ob das Pixel im Vordergrund oder Hintergrund liegt:

$$\begin{aligned} \alpha : P \to \mathbb{R}_0^+ \qquad & \alpha_p \text{ grösser } \Rightarrow \text{ eher im Vordergrund} \\ \beta : P \to \mathbb{R}_0^+ \qquad & \beta_p \text{ grösser } \Rightarrow \text{ eher im Hintergrund} \end{aligned}$$

Modellierung

Ein **Bild** ist ein Graph (P, E) mit Farbinformation $\chi\colon P \to$ Farben.

Jemand extrahiert aus den Farben der Pixel individuell eine Einschätzung, ob das Pixel im Vordergrund oder Hintergrund liegt:

$$\begin{array}{lll} \alpha : P \to \mathbb{R}_0^+ & \alpha_p \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im Vordergrund} \\ \beta : P \to \mathbb{R}_0^+ & \beta_p \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im Hintergrund} \end{array}$$

Erster Ansatz:

$$\begin{aligned} \text{Vordergrund } A &:= \{p \in P \mid \alpha_p > \beta_p\} \text{ und} \\ \text{Hintergrund } B &:= P \setminus A\,. \end{aligned}$$

Nachteil: Die Aufteilung wir in vielen Fällen zu feinkörnig.

Modellierung

Ein **Bild** ist ein Graph (P, E) mit Farbinformation $\chi \colon P \to$ Farben.

Wir erhalten eine dritte Einschätzung, ob benachbarte Pixel eher im gleichen Teil (Vorder-/Hintergund) liegen.

$$\begin{array}{lll} \alpha : P \to \mathbb{R}_0^+ & \alpha_p \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im Vordergrund} \\ \beta : P \to \mathbb{R}_0^+ & \beta_p \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im Hintergrund} \\ \gamma : E \to \mathbb{R}_0^+ & \gamma_e \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im gleichen Teil} \end{array}$$

Modellierung

Ein **Bild** ist ein Graph (P, E) mit Farbinformation $\chi\colon P \to$ Farben.

Wir erhalten eine dritte Einschätzung, ob benachbarte Pixel eher im gleichen Teil (Vorder-/Hintergund) liegen.

$$\begin{array}{lll} \alpha : P \to \mathbb{R}_0^+ & \alpha_p \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im Vordergrund} \\ \beta : P \to \mathbb{R}_0^+ & \beta_p \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im Hintergrund} \\ \gamma : E \to \mathbb{R}_0^+ & \gamma_e \text{ grösser } \Rightarrow & \text{eher im gleichen Teil} \end{array}$$

Qualitätsfunktion für Vorder-/Hintergrundspartition (A, B) von P:

$$q(A, B) := \sum_{p \in A} \alpha_p + \sum_{p \in B} \beta_p - \sum_{e \in E,\, |e \cap A| = 1} \gamma_e \ .$$

Unsere Problemstellung

Bildsegmentierung. Gegeben ein Bild (P, E) mit

$$\alpha : P \to \mathbb{R}_0^+, \quad \beta : P \to \mathbb{R}_0^+, \quad \gamma : E \to \mathbb{R}_0^+ \ ,$$

finde eine Partition (A, B) von P die

$$q(A, B) := \sum_{p \in A} \alpha_p + \sum_{p \in B} \beta_p - \sum_{e \in E,\, |e \cap A| = 1} \gamma_e \ .$$

maximiert.

Umformung von $q(A, B)$

$$q(A,B) := \sum_{p \in A} \alpha_p + \sum_{p \in B} \beta_p - \sum_{e \in E,\, |e \cap A| = 1} \gamma_e \ .$$

Mit $Q := \sum_{p \in P} (\alpha_p + \beta_p)$ gilt

$$q(A,B) = Q - \sum_{p \in A} \beta_p - \sum_{p \in B} \alpha_p - \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e \ .$$

Umformung von $q(A, B)$

$$q(A,B) := \sum_{p\in A}\alpha_p + \sum_{p\in B}\beta_p - \sum_{e\in E,\, |e\cap A|=1}\gamma_e \ .$$

Mit $Q := \sum_{p\in P}(\alpha_p + \beta_p)$ gilt

$$q(A,B) = Q - \sum_{p\in A}\beta_p - \sum_{p\in B}\alpha_p - \sum_{e\in E,|e\cap A|=1}\gamma_e \ .$$

$q(A, B)$ zu maximieren is äquivalent zur Minimierung von

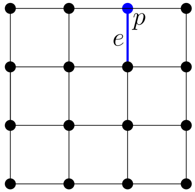
$$q'(A,B) := \sum_{p\in A}\beta_p + \sum_{p\in B}\alpha_p + \sum_{e\in E,|e\cap A|=1}\gamma_e \ .$$

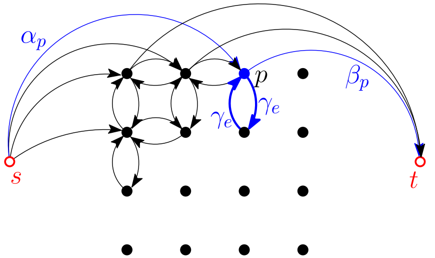
Vom Bild zum Netzwerk

$N := (P \cup \{s, t\}, \vec{E}, c, s, t)$:

- Neue Knoten s und t, Quelle und Senke im Netzwerk.
- Die Quelle s hat eine gerichtete Kante zu jedem Pixel $p \in P$ mit Kapazität α_p.
- Jedes Pixel p hat eine gerichtete Kante zur Senke t mit Kapazität β_p.
- Für jede Kante $e = \{p, p'\} \in E$ gibt es zwei gerichtete Kanten (p, p') und (p', p), je mit Kapazität γ_e.

Bild von „Vom Bild zum Netzwerk“





Kapazität eines s-t-Schnitts in N

Sei (S, T) ein s-t-Schnitt, und $A := S \setminus \{s\}$ und $B := T \setminus \{t\}$.
Welche Kanten mit welchem Beitrag sind in diesem s-t-Schnitt?

- Kanten (s, p) mit $p \in B$; Beitrag zu $\mathrm{cap}(S, T)$ ist $\sum_{p \in B} \alpha_p$.
- Kanten (p, t) mit $p \in A$; Beitrag zu $\mathrm{cap}(S, T)$ ist $\sum_{p \in A} \beta_p$.
- Kanten (p, p') des Netzwerks in $A \times B$ mit Beitrag

$$\sum_{(p,p') \in A \times B, \{p,p'\} \in E} \gamma_{(p,p')}.$$

Es folgt

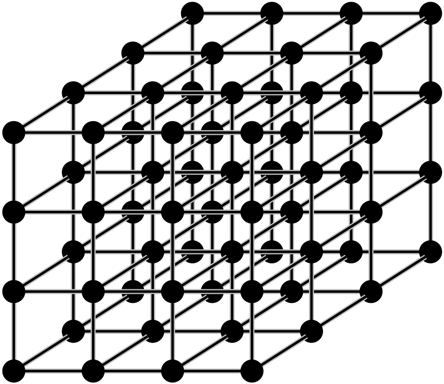
$$\begin{aligned} q'(A, B) &:= \sum_{p \in A} \beta_p + \sum_{p \in B} \alpha_p + \sum_{e \in E, |e \cap A| = 1} \gamma_e \\ &= \mathrm{cap}(S, T) \end{aligned}$$

Anmerkungen

- Die optimale Partition (A, B) kann also mit Hilfe von MaxFlow für den minimalen s-t-Schnitt berechnet werden.

Anmerkungen

- Die optimale Partition (A, B) kann also mit Hilfe von MaxFlow für den minimalen s-t-Schnitt berechnet werden.



- Dieser Lösungsansatz kommt in Anwendungen zum Einsatz,
- insbesondere auch für höherdimensionale Bilder (mit Voxeln), z.B. Computertomographie.