

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Theorie-Aufgaben 7

ABGABE IN MOODLE () BIS ZUM 25.04.2024 UM 10:00 UHR.

Aufgabe 1 – *Couch to k k*

Endlich ist der Frühling da in deiner Heimatstadt. Die Sonne scheint - und Blumen spriessen zufällig verteilt am Strassenrand. Bei diesem schönen Wetter entscheidest du dich, zusammen mit deiner Französischen Bulldogge Doug die diesjährige Spaziersaison einzuläuten. Es gibt nur ein Problem - die Blumen sind zwar schön, zu viele auf einmal führen jedoch dazu, dass Dougs Heuschnupfen ausbricht, so dass eure Spazier-Route deutlich weniger angenehm ist. Ein paar wenige Blumen sind für Doug gerade noch auszuhalten, wenn allerdings mindestens $\frac{3}{4}$ aller Strassen auf eurer Route von Blumen gesäumt sind, ist der Spaziergang *kein Vergnügen* mehr. Wenn an allen Strassen auf eurer Route Blumen wachsen, so *schneift* Doug für den Rest des Tages.

Wir nehmen an, dass deine Heimatstadt - wie so viele Heimatstädte - ein Graph $G = (V, E)$ ist. Die Knoten sind dabei Kreuzungen und die Kanten sind Strassen, welche zwei Kreuzungen verbinden. Die Anfangsposition eurer Spazier-Route ist irgend eine Kreuzung $v \in V$ und die Route ist ein gegebener Kreis $C = (v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$ der Länge k .

Bei jeder Strasse $e \in E$ gibt es Blumen am Strassenrand mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dies geschieht unabhängig für jede Strasse.

- (a) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Markov, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (b) Berechne, unter Zuhilfenahme der Ungleichung von Chebyshev, eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spaziergang kein Vergnügen ist.
- (c) Nimm an, dass du $n-1$ Freunde mit je einem vom Heuschnupfen geplagten Hund hast, welche am selben Tag wie du spazieren gehen wollen. Ihr alle habt eure individuellen Spazier-Routen, welche aber nicht disjunkt sein müssen. Berechne die erwartete Anzahl *schneifender* Hunde, nachdem ihr alle eure Spaziergänge beendet habt. Zeige, falls gilt $k \geq \log_2(n) + 1$, dann gibt es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ keinen einzigen schneifenden Hund.
- (d) Nimm an, dass $k = 1000 \log_2 n$ und $n \geq 2$. Zeige, dass mit Wahrscheinlichkeit mindesten 0.99 alle Spaziergänge ein Vergnügen sein werden.

(a)

Let X be the random variable denoting the number of streets with flowers. We recall that the trip is a disaster, if $X \geq \frac{3}{4}$. To apply Markov's inequality, $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$, we need the expected value $\mathbb{E}[X]$, meaning the expected number of streets with flowers encountered. For this, we can use linearity of expectation, since the probability for a street to have flowers is binomially distributed. Hence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np = \frac{k}{2} \\ \Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] &\leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3}\end{aligned}\quad \square$$

(b)

Using Chebyshev's inequality, $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$, requires $\text{Var}[X]$. This is given by $\text{Var}[X] = np(1-p) = \frac{k}{4}$, as $X \sim \text{Bin}(k, p)$.

$$\begin{aligned}\Pr\left[\left|X - \frac{k}{2}\right| \geq \frac{k}{4}\right] &= \frac{\text{Var}[X]}{\left(\frac{k}{4}\right)^2} \\ &= \frac{k}{4} \cdot \frac{4^2}{k^2} = \frac{4}{9}\end{aligned}\quad \square$$

(c)

Let $Y = \text{"# sniffing dogs"}$, where $Y := \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$ with $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, independent. Let $Y_i = \text{"the } i\text{-th dog sniffles"}$. The probability, p for some i -th dog to sniffle all day is $\Pr[Y_i = 1] = \Pr[X = k] = \frac{1}{2^k}$, given by all of its trip's streets having flowers. Thus, $Y \sim \text{Bin}(n-1, p)$.

The expected number of sniffing dogs is given by

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \frac{n-1}{2^k} \\ &= \frac{n-1}{2^{\log_2(n)+1}} = \frac{n-1}{2n} \\ &< \frac{1}{2}\end{aligned}\quad \square$$

Now, we need to show that $k \geq \log_2(n) + 1 \implies \Pr[Y = 0] \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\Pr[Y = 0] &= 1 - \Pr[Y \geq 1] \quad (\text{Markov}) \\ &\geq 1 - \mathbb{E}[Y] \\ &\geq \frac{1}{2}\end{aligned}\quad \square$$

(d)

Let $Z = \text{"\# disaster trips"}$, where $Z := \sum_{i=1}^{n-1} Z_i$ with $Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, independent denoting, whether the i -th trip was a disaster. We know, that the probability, p for any one trip to be a disaster is $\Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] \leq \frac{2}{3}$. Thus, $Z \sim \text{Bin}(n-1, p)$.

We need to show that $k = 1000 \log_2(n)$, $n \geq 2 \implies 1 - \Pr[Z \geq 1] \geq 0.99$.

Let $\delta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Pr[Z \geq 1] &\leq 0.01 \\ \Pr[Z \geq (1 + \delta)\mathbb{E}[Z]] &\leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2\mathbb{E}[Z]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left[X \geq \frac{3k}{4}\right] &= 1 - \Pr\left[X \leq \frac{k}{4} - 1\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{4} - 1 \rfloor} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{2 \cdot (n-1)}{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np = \frac{1000 \log_2(n)}{2} \\ \Pr\left[X \geq \frac{3}{4} \cdot k\right] &\leq \frac{\frac{k}{2}}{\frac{3}{4} \cdot k} = \frac{2}{3} \\ &\square\end{aligned}$$

"i always find it therefore i never search"