AuW-u03-bf

ETH Zürich
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Rasmus Kyng
Prof. Angelika Steger

FS 2024

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Theorie-Aufgaben 5

Abgabe in Moodle () bis zum 11.04.2024 um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 – *Zufällige Schnitte*

(a) Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten betrachten wir den Laplace-Raum $\Omega = \{S \mid S \subseteq V\}$ und die Zufallsvariable $X :=$"Anzahl Kanten über den Schnitt $(S, V \setminus S)$".

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Hinweis: Schreiben Sie X als Summe von geeigneten Indikator Zufallsvariablen.

(b) Folgern Sie aus Ihrem Ergebnis in (a), dass G einen Schnitt der Grösse mindestens $m/2$ hat.

Aufgabe 2 – *Unabhängigkeit*

Seien A und B zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann

(i) $\bar{A}$ und B,

(ii) A und $\bar{B}$, sowie

(iii) $\bar{A}$ und $\bar{B}$

jeweils unabhängig sind.

1.

a)

We assume, that "Anzahl Kanten über den Schnitt $(S, V \setminus S)$" means # of edges e with an incident vertex in each set $(S, V \setminus S)$.

We define an indicator variable:

$$Y_e = \begin{cases} 1, & e \text{ is an edge over } (S, V \setminus S) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

As all subsets are equally likely, the chance for every edge to have its vertices in different subsets $(S, V \setminus S)$ is 0.5.

$$\forall e \in E : \mathbb{E}[Y_e] = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{E}[X] \overset{\text{Linearity of } \mathbb{E}}{=} \sum_{e \in \mathbb{E}} \mathbb{E}[Y_e] = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

$\square$