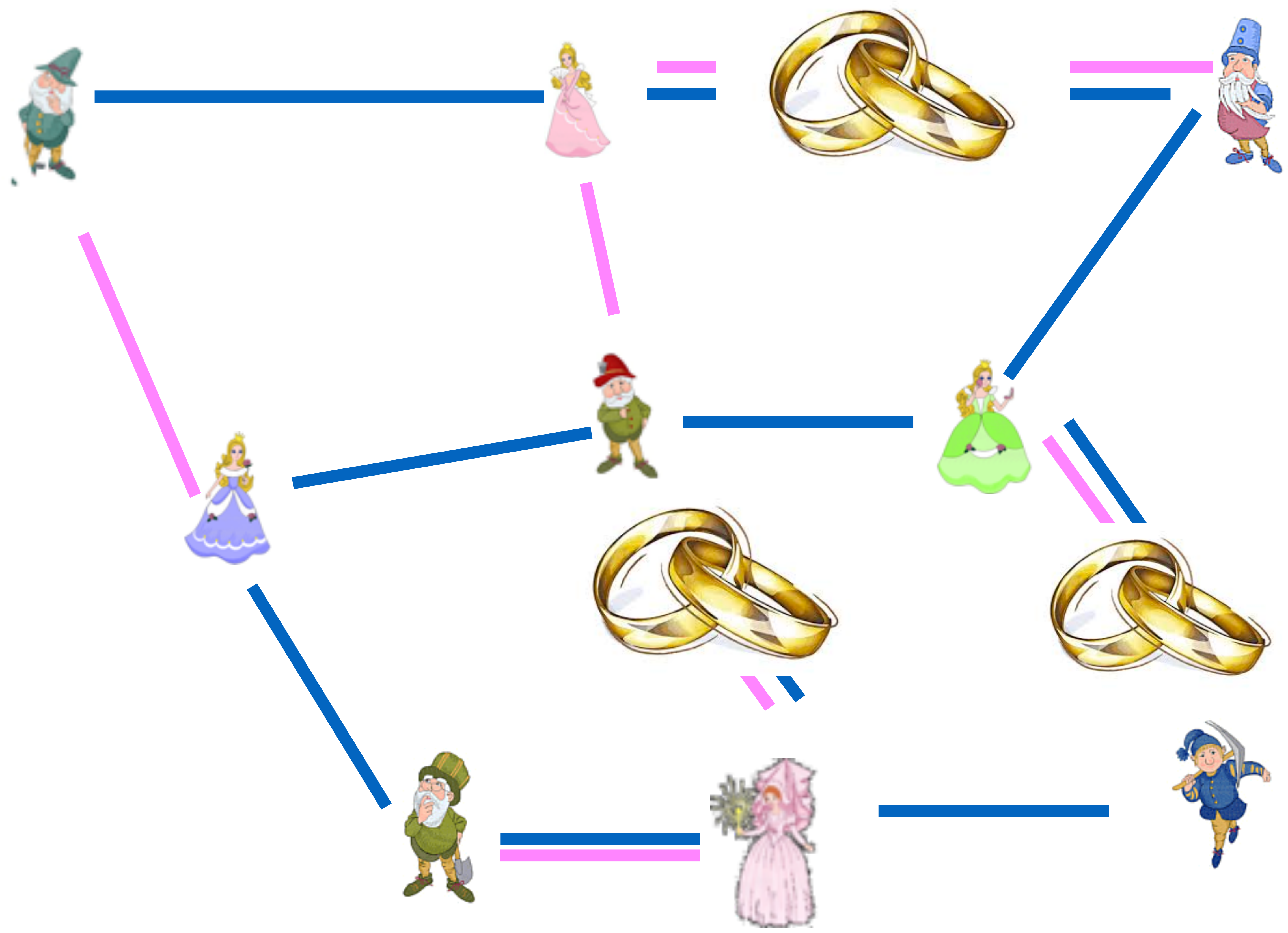
Matchings

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

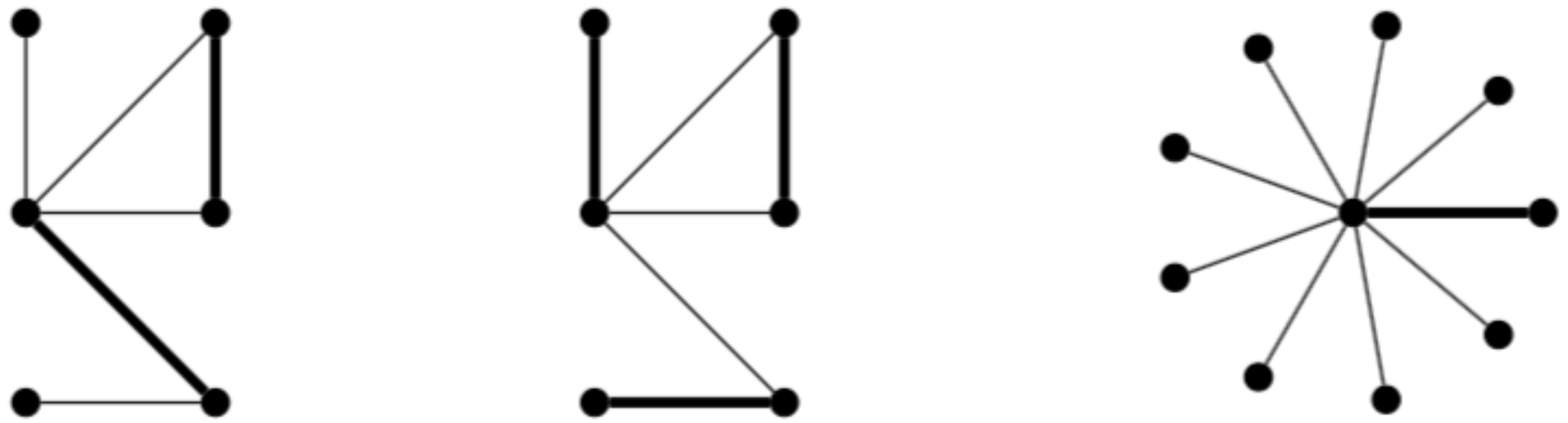


Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heisst **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$, falls kein Knoten des Graphen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist.

Ein Knoten v wird von M **überdeckt**, falls es eine Kante $e \in M$ gibt, die v enthält.

Ein Matching M heisst **perfektes Matching**, wenn jeder Knoten durch genau eine Kante aus M überdeckt wird, oder, anders ausgedrückt, wenn $|M| = |V|/2$.



Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **inklusionsmaximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $M \subseteq M'$ und $|M'| > |M|$.

Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **(kardinalitäts-)maximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $|M'| > |M|$.

inklusionsmaximales Matching
(aber nicht kardinalitätsmaximal)

kardinalitätsmaximales Matching
(auch inklusionsmaximal!)

Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **inklusionsmaximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $M \subseteq M'$ und $|M'| > |M|$.

Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **(kardinalitäts-)maximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $|M'| > |M|$.

Satz: Mit dem Greedy-Algorithmus kann man in Zeit $O(|E|)$ ein inklusionsmaximales Matching M_{Greedy} bestimmen mit

$$|M_{Greedy}| \geq |M_{max}| \ / \ 2,$$

wobei M_{max} ein kardinalitätsmaximales Matching ist.

Greedy-Algorithmus

```
Greedy-Matching (G)
M ← ∅
while E ≠ ∅ do
    wähle eine beliebige Kante e ∈ E
    M ← M ∪ {e}
    lösche e und alle inzidenten Kanten in G
```

Satz: Mit dem Greedy-Algorithmus kann man in Zeit $O(|E|)$ ein inklusionsmaximales Matching M_{Greedy} bestimmen mit

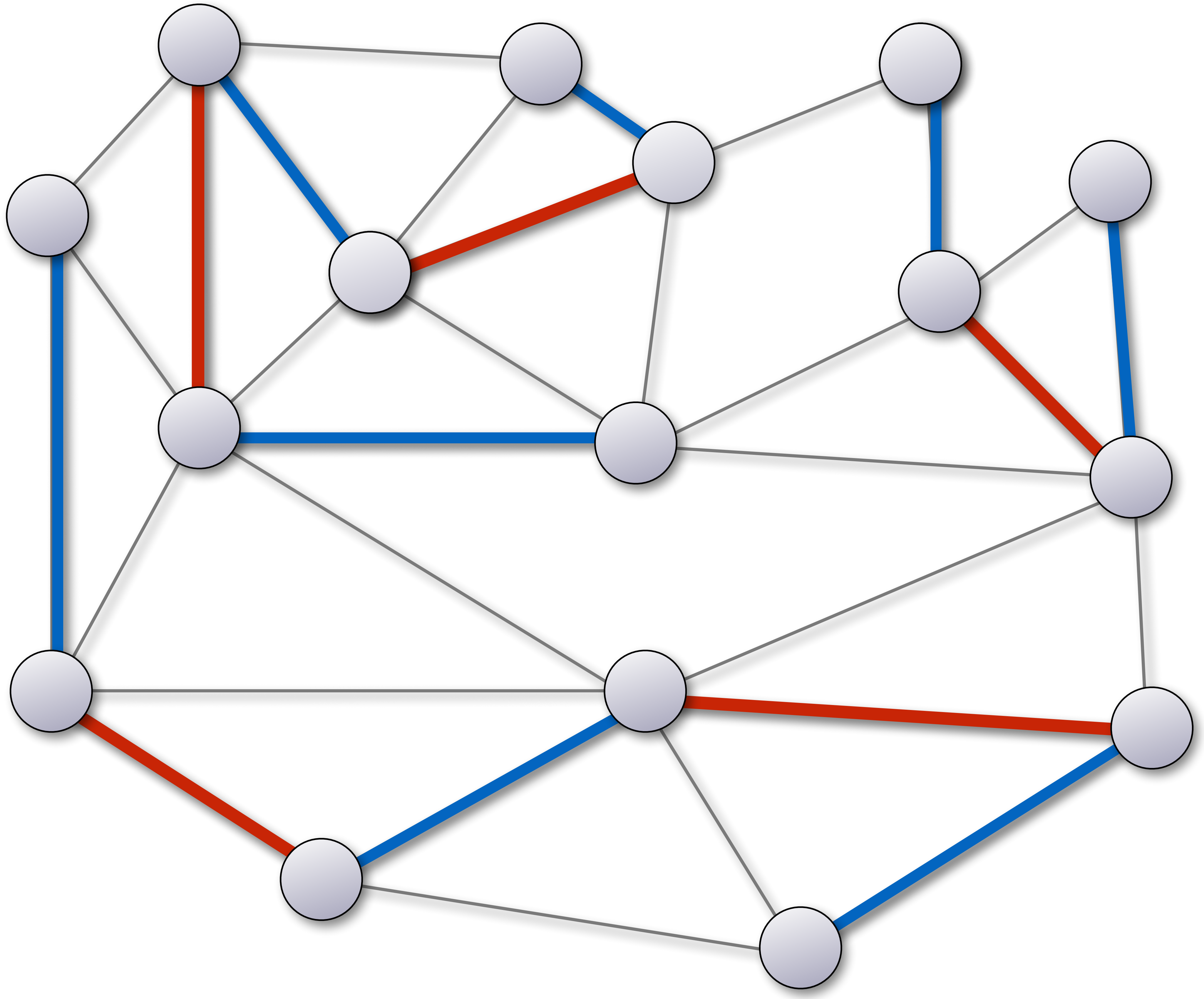
$$|M_{Greedy}| \geq |M_{max}| \;/\; 2,$$

wobei M_{max} ein kardinalitätsmaximales Matching ist.

Greedy-Algorithmus

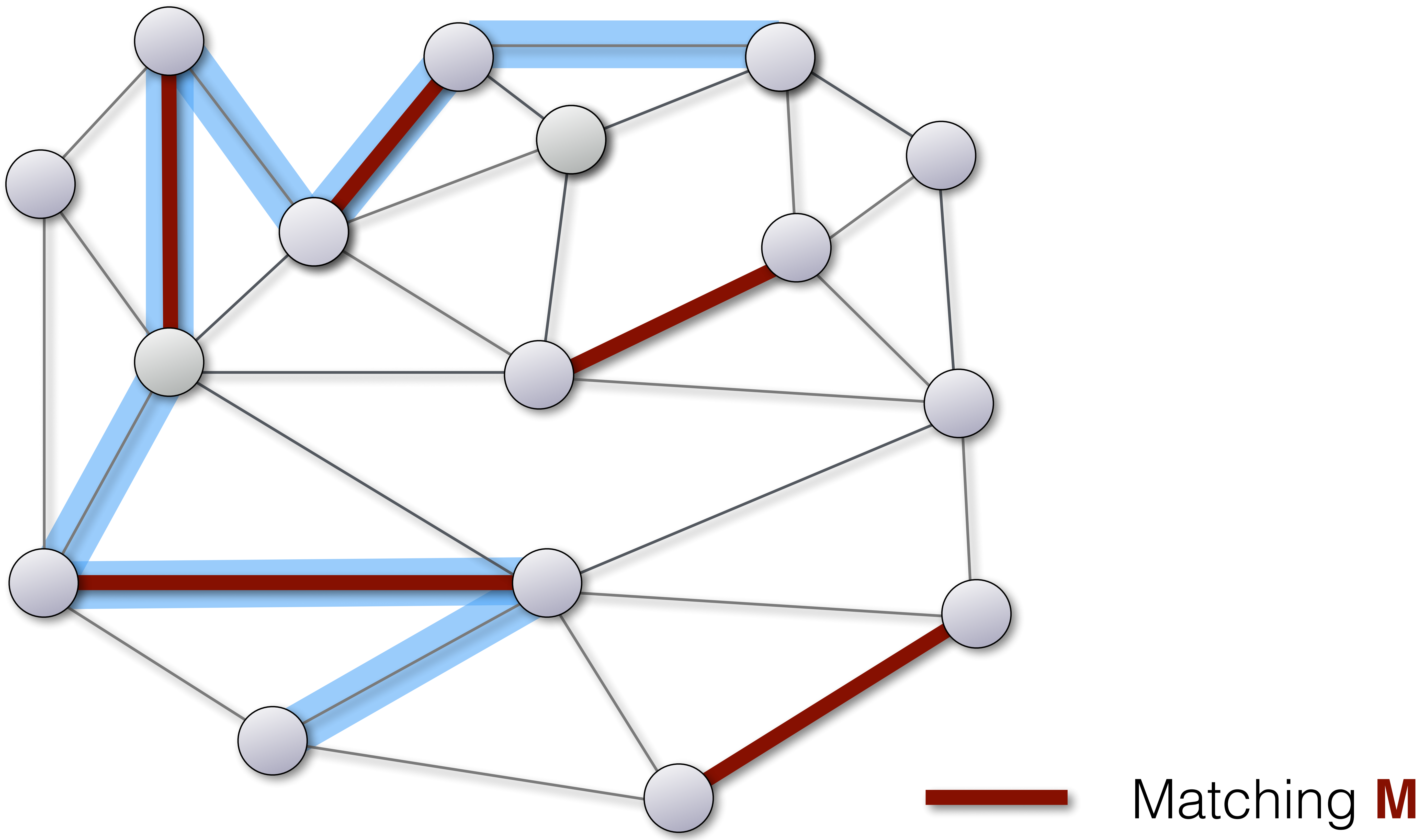
M_{Greedy}

M_{max}



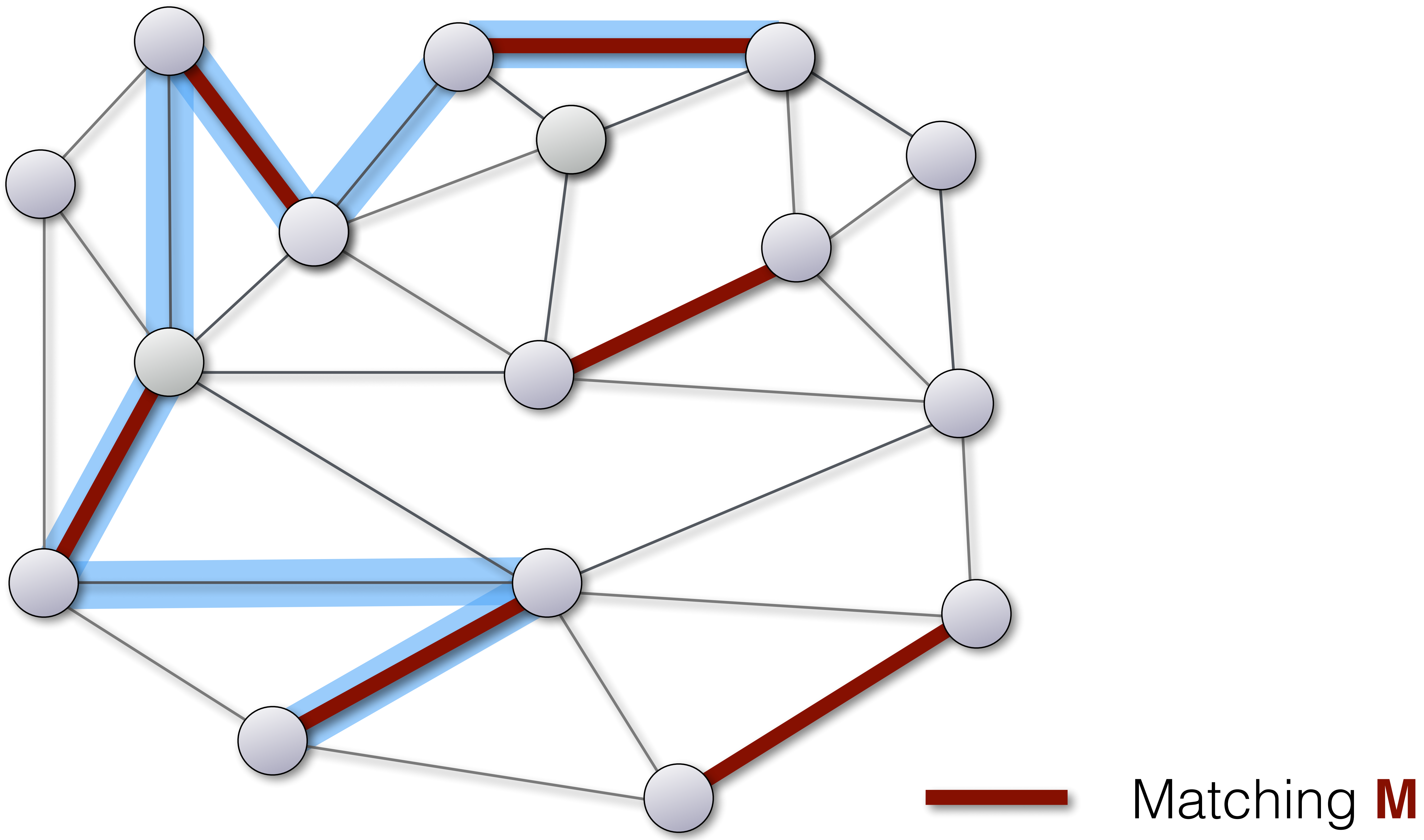
Beobachtung:

- für jede Kante in M_{max} gilt: mindestens einer der beiden Endpunkte wird von einer Kante aus M_{Greedy} überdeckt
  (denn sonst könnten wir die Kante zu M_{Greedy} hinzufügen)
- jede Kante in M_{Greedy} kann höchstens zwei Kanten aus M_{max} überdecken



Ein **M-augmentierender Pfad** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus M und nicht aus **M** enthält und der in von **M** nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.

⇒ durch *tauschen* entlang M können wir das Matching vergrössern



Ein **M**-**augmentierender Pfad** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus M und nicht aus **M** enthält und der in von **M** nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.

⇒ durch *tauschen* entlang M können wir das Matching vergrössern

Konzept der augmentierenden Pfade:

$\Rightarrow$ $O(|V| \cdot |E|)$ für bipartite Graphen

State of the Art Matching:

$O(|E|^{1+o(1)})$ für bipartite Graphen

$O(|V|^{1/2} \cdot |E|)$ für generelle Graphen

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

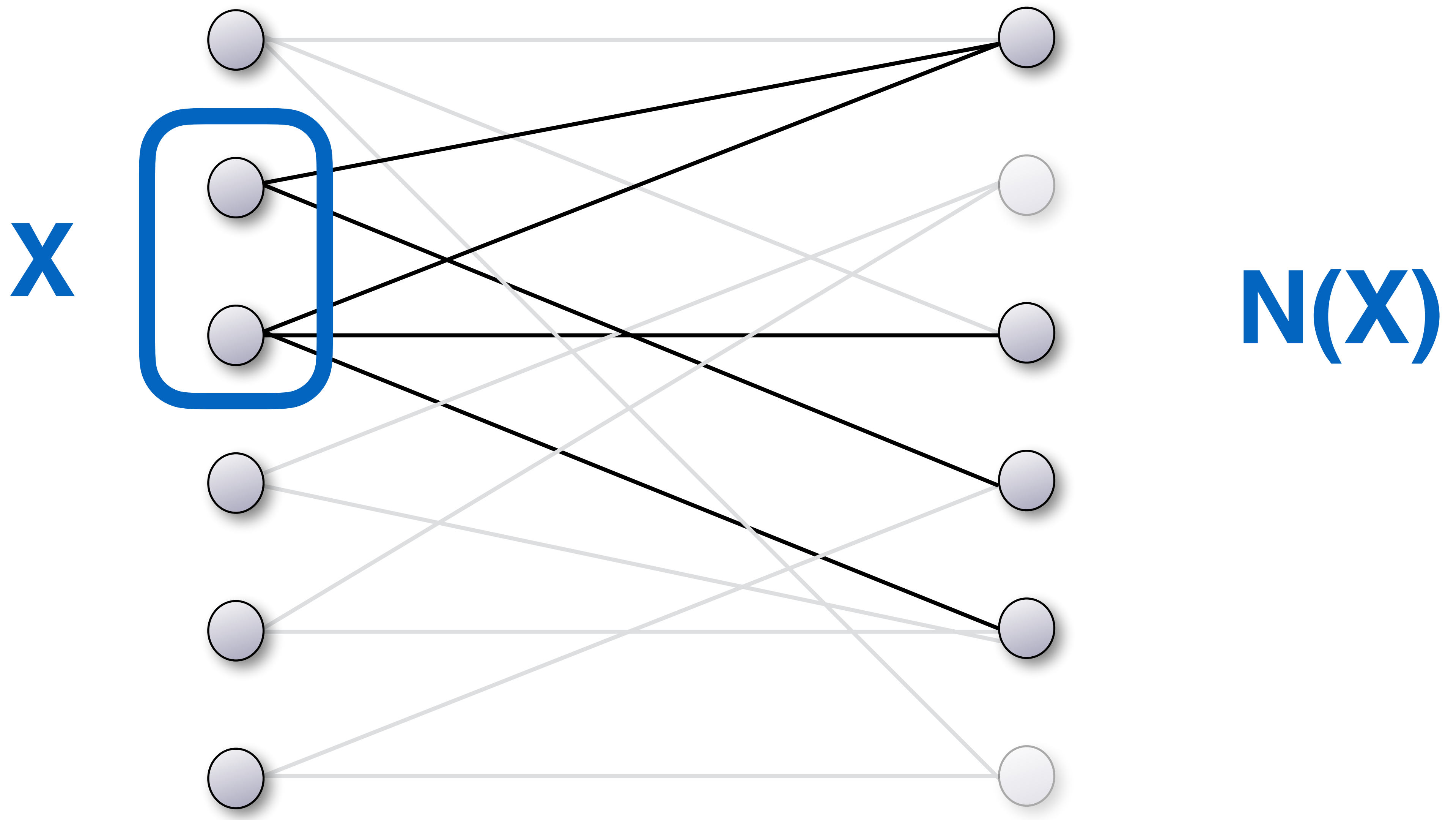
Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein bipartiter graph $G=(A \uplus B, E)$ enthält ein Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ **gdw**

$\forall\, X \subseteq A \;:\; |X| \leq |N(X)|$

Philip Hall
(1904-1982)

muss für <u>**jede**</u> Teilmenge gelten



„$\Longrightarrow$“ ✓

„$\Longleftarrow$“ !

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein bipartiter graph $G=(A \uplus B, E)$ enthält ein Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ **gdw**

$\forall\, X \subseteq A \;:\; |X| \leq |N(X)|$

Philip Hall
(1904-1982)

Beweis: **Induktion über a = |A|**

Induktionsverankerung: **a = 1:** ✓

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen:

Satz gilt für alle bipartiten Graphen mit $|A| \leq a\text{-}1$ $\Rightarrow$ *Satz gilt für alle bipartiten Graphen mit* $|A| = a$

“a-1 $\Rightarrow$ a“

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)
Ein bipartiter graph $G=(A \uplus B, E)$ enthält ein Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ **gdw**

$\forall X \subseteq A \; : \; |X| \leq |N(X)|$ (*)

Philip Hall
(1904-1982)

Beweis: "a-1 $\Rightarrow$ a" Betrachte *beliebigen* Graphen mit $|A|=a$:

1.Fall: $\forall \emptyset \neq X \subsetneq A \; : \; |X| < |N(X)|$

- Wähle beliebige Kante $\{x,y\}$ und lösche x, y und alle inzidenten Kanten.
- Zeige dass der verbleibende Graph die Bedingung (*) erfüllt.

2.Fall: $\exists \emptyset \neq X_0 \subsetneq A \; : \; |X_0| = |N(X_0)|$

- Betrachte die beiden durch
  $X_0 \cup N(X_0)$ bzw
  $A \setminus X_0 \cup B \setminus N(X_0)$
  induzierten Graphen
- Zeige dass beide Graphen die Bedingung (*) erfüllen.