

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{1 - (\alpha\beta)^t}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \alpha^t \ln k_0 \right] \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k_0 + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左边} = V(k) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \\ &\triangleq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

$$\text{右边} = \max \{u(f(k) - y) + \beta V(y)\}$$

利用 FOC 和包络条件求解得到 $y = \beta k^\alpha$ ，代入求右边。

Institute for Advanced Study

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \max \{u(f(k) - y) + \beta V(y)\} \\ &= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right] \\ \text{I can do this all day} &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta k^\alpha + A \right] \\ &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + A \right] \\ &= \alpha \ln k + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

整理：何清海

整理时间：December 20, 2019

Email: heji98@gmail.com

所以，左边 = 右边，证毕。

目 录

第 1 章

第六章距离空间

Definition 1.1

设 X 为一非空几何, 如果对于 X 中任给的两个元素 x, y , 均有一个确定的实数, 记为 $\rho(x, y)$, 与他们对对应且满足下面三个条件:


(i) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$;

(ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) 三角不等式: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, 这里 z 也是 X 中任意一个元素.

则称 ρ 是 X 上的一个距离, 而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间, 记为 (X, ρ)


设 X 为一非空几何, 如果对于 X 中任给的两个元素 x, y , 均有一个确定的实数, 记为 $\rho(x, y)$, 与他们对对应且满足下面三个条件:

 **Note:** 设 X , 定义距离 $\rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 1, x \neq y, x, y \in X$, 则称 (X, ρ) 为离散的距离空间

Example 1.1

n 维欧式空间 \mathbb{R}^n 其上的距离为:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

 **Note:** 1. 此处证明使用了柯西 (A. Cauchy) 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (1.2)$$

2. 另外可以引入距离

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|. \quad (1')$$

3. 对于 \mathbb{C}^n 同样可以用 ρ 定义距离空间

Example 1.2空间 $C[a, b]$

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (1.3)$$

Example 1.3 $L^p(F)$ ($1 \leq p < \infty$, $F \subset \mathbb{R}$, 且为可测集)

$$\rho(x, y) = \left(\int_F |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.4)$$



Note: 两个几乎处处相等的 p 幂可积函数在 $L^p(F)$ 中视为同一元素.

Example 1.4空间 $L^p(F)$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \inf_{\substack{mF_0=0 \\ F_0 \subset F}} \left\{ \sup_{t \in F \setminus F_0} |x(t) - y(t)| \right\} \\ &= \operatorname{esssup}_{t \in F} |x(t) - y(t)| \end{aligned} \quad (1.5)$$



Note: 1. 称定义在可测集 F 上的可测函数 $x(\cdot)$ 是本性有界的, 如果存在 F 的某个零测度子集 F_0 , 使得 $x(\cdot)$ 在集合 $F \setminus F_0$ 上有界.

2. F 上所有本性有界可测函数构成的集合用 $L^\infty(F)$ 表示.

3. 几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看做同一元素. 4. 证明其中第三条性质的时候, 用好 \sup 的定义



Example 1.5

空间 $l^p (1 \leq p < \infty)$ 令 l^p 是满足下列不等式的实 (或复) 数列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ 构成的集合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$$

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{1/p} \quad (1.6)$$



Note: 借助以下三个不等式可得:

1. Young 不等式

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \quad (1.7)$$

2. 赫尔德不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{1/q} \quad (1.8)$$

3. H.Minkowski 不等式

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p \right)^{1/p} \quad (1.9)$$

Example 1.6

空间 l^∞

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leq n < \infty} |\xi_n - \eta_n| \quad (1.10)$$

Definition 1.2

设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个点列 (或称序列), 这里 $n = 1, 2, 3, \dots$ 如果存在 X 中的点 x_0 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{或} \quad \{x_n\} \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



Theorem 1.1


设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的收敛点列, 则下列性质成立:

- (i) $\{x_n\}$ 的极限唯一;
- (ii) 对任意的 $y_0 \in X$, 数列 $\{\rho(x_n, y_0)\}$ 有界.

Theorem 1.2

设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的点列, 且收敛, 则 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且收敛于同一极限.

反之, 若 $\{x_n\}$ 的任一子列收敛, 则 $\{x_n\}$ 本身也收敛.

 **Note:** 1. \mathbb{R}^n 中的收敛, 其中的点列 $\{x^{(m)}\} = \{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})\}$ 按照等式 (??) 或按照等式 (??) 定义的距离收敛于 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的充分必要条件均为 $x^{(m)}$ 的每个坐标收敛于 x 的相应坐标。2. 对于 $C[a, b]$, 按照距离 (??) 其中点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x_0 的充分必要条件是: 作为函数列的 $\{x_n(\cdot)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $x_0(\cdot)$ 。3. 在 $C[a, b]$ 中, 并不是所有距离下的收敛都和一致收敛等价, 如定义

$$\rho_1(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

取函数列

$$x_n(t) = \frac{1}{(b-a)^n} (t-a)^n \quad (t \in [a, b], n = 1, 2, \dots)$$

可知道, 按照 ρ_1 , 其收敛于 0, 而显然, 它并不是一致收敛的 (其在 1 附近总不一致收敛)

 **Note:**

(i) 对于任何一个非空集合, 我们都可以定义距离。但是一般来说, 我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点。例如, 对 $C[a, b]$, 我们常用等式 (??) 定义距离; 对于 $L^p(F)$ 我们常用等式 (??) 定义距离, 等等。只有这样, 在理论和实践上才有意义。

(ii) 定义距离的方式一般不说唯一。

(iii) 如果一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离, 那么由它们导出的收敛可以等价也可以不等价。当不等价时, 便得到本质上不同的两个或两个以上的距离空间。

