function analysis Note

泛函分析 笔记

Institute for Advanced Study

I can do this all day

整理：何清海

整理时间：December 20, 2019

Email: ddswhu@gmail.com

Version: 1.00

目　录

第 1 章
第六章距离空间

Definition 1.1

设 X 为一非空几何，如果对于 X 中任给的两个**元素**$x,\ y$，均有一个确定的实数，记为 $\rho\,(x,\ y)$，与他们对应且满足下面三个条件：
(i) **非负性**：$\rho(x,\ y) \geqslant 0, \rho(x,\ y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$；
(ii) **对称性**：$\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)$
(iii) **三角不等式**：$\rho(x,\ y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ y)$，这里 z 也是 X 中任意一个元素.
则称 ρ 是 X 上的一个**距离**，而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间，记为 $(X,\ \rho)$
设 X 为一非空几何，如果对于 X 中任给的两个**元素**$x,\ y$，均有一个确定的实数，记为 $\rho\,(x,\ y)$，与他们对应且满足下面三个条件：

Note: *设 X，定义距离 $\rho(x,\ x) = 0, \rho(x,\ y) = 1 x \neq y,\ x,\ y \in X$，则称 (X, ρ) 为离散的距离空间*

Example 1.1

n **维欧式空间** $\mathbb{R}^n$ 其上的距离为：

$$\rho(x,\ y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2\Big)^{1/2} \tag{1.1}$$

Note: *1. 此处证明使用了柯西（A.Cauthy）不等式*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \tag{1.2}$$

2. 另外可以引入距离

$$\rho_1(x,\ y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k|. \tag{1'}$$

3. 对于 $\mathbb{C}^n$ 同样可以用 ρ 定义距离空间

Example 1.2

空间 $C[a,\ b]$

$$\rho(x,\ y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{1.3}$$

Example 1.3

$L^p(F)\ (1 \leqslant p < \infty,\ F \subset \mathbb{R}$, 且为可测集)

$$\rho(x,\ y) = \Big(\int_F |x(t) - y(t)|^p \, \mathrm{d}t \Big)^{1/p} \tag{1.4}$$

$\mathrm{d}x$

Note: