function analysis Note

泛函分析笔记

Institute for Advanced Study

I can do this all day

整理：何清海

整理时间：December 20, 2019

Email: ddswhu@gmail.com

Version: 1.00

目　　录

第 1 章
第六章距离空间

Definition 1.1

设 X 为一非空几何，如果对于 X 中任给的两个元素$x,\ y$，均有一个确定的实数，记为 $\rho\,(x,\ y)$，与他们对应且满足下面三个条件：

(i) 非负性：$\rho(x,\ y) \geqslant 0, \rho(x,\ y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$；

(ii) 对称性：$\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)$

(iii) 三角不等式：$\rho(x,\ y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ y)$，这里 z 也是 X 中任意一个元素.

则称 ρ 是 X 上的一个距离，而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间，记为 (X,ρ)

设 X 为一非空几何，如果对于 X 中任给的两个元素$x,\ y$，均有一个确定的实数，记为 $\rho\,(x,\ y)$，与他们对应且满足下面三个条件：

Note: *设 X，定义距离 $\rho(x,\ x) = 0,\ \rho(x,\ y) = 1,\ x \neq y,\ x,\ y \in X$，则称 (X,ρ) 为离散的距离空间*

Example 1.1

n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 其上的距离为：

$$\rho(x,\ y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2\Big)^{1/2} \tag{1.1}$$

Note: *1. 此处证明使用了柯西（A.Cauthy）不等式*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \tag{1.2}$$

2. 另外可以引入距离

$$\rho_1(x,\ y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k - \eta_k|. \tag{1'}$$

3. 对于 $\mathbb{C}^n$ 同样可以用 ρ 定义距离空间

Example 1.2

空间 $C[a,\, b]$

$$\rho(x,\, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{1.3}$$

Example 1.3

$L^p(F)$ $(1 \leqslant p < \infty,\ F \subset \mathbb{R}$, 且为可测集)

$$\rho(x,\, y) = \Big(\int_F |x(t) - y(t)|^p \,\mathrm{d}t \Big)^{1/p} \tag{1.4}$$

Note: 两个几乎处处相等的 p 幂可积函数在 $L^p(F)$ 中视为同一元素.

Example 1.4

空间 $L^p(F)$

$$\begin{aligned} \rho(x,\, y) &= \inf_{\substack{\mathrm{m}F_0=0 \\ F_0 \subset F}} \{ \sup_{t \in F \setminus F_0} |x(t) - y(t)| \} \\ &= \operatorname*{esssup}_{t \in F} |x(t) - y(t)| \end{aligned} \tag{1.5}$$

Note: *1.* 称定义在可测集 F 上的可测函数 $x(\cdot)$ 是本性有界的，如果存在 F 的某个零测度子集 F_0，使得 $x(\cdot)$ 在集合 $F \setminus F_0$ 上有界.

2. F 上所有本性有界可测函数构成的集合用 $L^\infty(F)$ 表示.

3. 几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看做同一元素. *4.* 证明其中第三条性质的时候. 用好 *sup* 的定义

Example 1.5

空间 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 令 l^p 是满足下列不等式的实（或复）数列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$ 构成的集合：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$$

$$\rho(x, y) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\Big)^{1/p} \tag{1.6}$$

Note: 借助以下三个不等式可得：

1. Young 不等式

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \tag{1.7}$$

2. 赫尔德不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\Big)^{1/q} \tag{1.8}$$

3. H.Minkowski 不等式

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\Big)^{1/p} \tag{1.9}$$

Example 1.6

空间 l^∞

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leqslant n < \infty} |\xi_n - \eta_n| \tag{1.10}$$

Definition 1.2

设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个**点列** (或称**序列**), 这里 $n = 1, 2, 3, \ldots$. 如果存在 X 中的点 x_0 使得当 $x \to \infty$ 时，$\rho(x_n, x_0) \to 0 (n \to \infty)$. 则称点列 $\{x_n\}$ **收敛**于 x_0，记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad 或 \{x_n\} \to x_0 \quad (n \to \infty)$$

Theorem 1.1

设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的收敛点列，则下列性质成立：
(i) $\{x_n\}$ 的极限唯一；
(ii) 对任意的 $y_0 \in X$，数列 $\{\rho(x_n, y_0)\}$ 有界.

Theorem 1.2

设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的点列，且收敛，则 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛，且收敛于同一极限.
反之，若 $\{x_n\}$ 的任一子列收敛，则 $\{x_n\}$ 本身也收敛。

Note: *1.* $\mathbb{R}^n$ *中的收敛，其中的点列* $\{x^{(m)}\} = \{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})\}$ *按照等式 (??) 或按照等式 (??) 定义的距离收敛于* $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ *的充分必要条件均为* $x^{(m)}$ *的每个坐标收敛于* x *的相应坐标。2. 对于* $C[a,b]$*，按照距离 (??) 其中点列* $\{x_n\}$ *收敛于点* x_0 *的充分必要条件是：作为函数列的* $\{x_n(\cdot)\}$ *在* $[a,b]$ *上一致收敛于函数* $x_0(\cdot)$*。3. 在* $C[a,b]$ *中，并不是所有距离下的收敛都和一致收敛等价，如定义*

$$\rho_1(x, y) = \Big(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, \mathrm{d}dt\Big)^{1/2}$$

取函数列

$$x_n(t) = \frac{1}{(b-a)^n}(t-a)^n \quad (t \in [a, b], n = 1, 2, \cdots)$$

可知道, 按照 ρ_1*，其收敛于 0，而显然，它并不是一致收敛的 (其在 1 附近总不一致收敛)*

Note:

(i) 对于任何一个非空集合，我们都可以定义距离。但是一般来说，我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点。例如，对 $C[a, b]$*，我们常常用等式 (??) 定义距离；对于* $L^p(F)$ *我们常用等式 (??) 定义距离，等等。只有这样，在理论和实践上才有意义。*

(ii) 定义距离的方式一般不说唯一。

(iii) 如果一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离，那么由它们导出的收敛可以等价也可以不等价。当不等价时，便得到本质上不同的两个或两个以上的距离空间。