

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{1 - (\alpha\beta)^t}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \alpha^t \ln k_0 \right] \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \left[\frac{\beta^t}{1 - \alpha} - \frac{(\alpha\beta)^t}{1 - \alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k_0 + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左边} = V(k) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \\ &\triangleq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

$$\text{右边} = \max \{ u(f(k) - y) + \beta V(y) \}$$

利用 FOC 和包络条件求解得到 $y = \beta k^\alpha$ ，代入求右边。

Institute for Advanced Study

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \max \{ u(f(k) - y) + \beta V(y) \} \\ &= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right] \\ \text{I can do this all day} &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta k^\alpha + A \right] \\ &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + A \right] \\ &= \alpha \ln k + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

整理：何清海

整理时间：December 20, 2019

Email: ddswhu@gmail.com

所以，左边 = 右边，证毕。

目 录



第 1 章

第六章距离空间

Definition 1.1

设 X 为一非空几何, 如果对于 X 中任给的两个元素 x, y , 均有一个确定的实数, 记为 $\rho(x, y)$, 与他们对对应且满足下面三个条件:


(i) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$;

(ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) 三角不等式: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, 这里 z 也是 X 中任意一个元素.

则称 ρ 是 X 上的一个距离, 而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间, 记为 (X, ρ)


设 X 为一非空几何, 如果对于 X 中任给的两个元素 x, y , 均有一个确定的实数, 记为 $\rho(x, y)$, 与他们对对应且满足下面三个条件:

 **Note:** 设 X , 定义距离 $\rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 1, x \neq y, x, y \in X$, 则称 (X, ρ) 为离散的距离空间

Example 1.1

n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 其上的距离为:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

 **Note:** 1. 此处证明使用了柯西 (A. Cauchy) 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (1.2)$$

2. 另外可以引入距离

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|. \quad (1')$$

3. 对于 \mathbb{C}^n 同样可以用 ρ 定义距离空间

Example 1.2空间 $C[a, b]$

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (1.3)$$

**Example 1.3** $L^p(F)$ ($1 \leq p < \infty$, $F \subset \mathbb{R}$, 且为可测集)

$$\rho(x, y) = \left(\int_F |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.4)$$

**Note:**