function analysis Note

泛函分析 笔记

Institute for Advanced Study

stay hungry, stay foolish

整理：何清海

整理时间：December 28, 2019

Email: heji98@gmail.com

Version: 1.00

目　　录

第 1 章
第六章距离空间

Definition 1.1

设 X 为一非空几何，如果对于 X 中任给的两个**元素**$x,\ y$，均有一个确定的实数，记为 $\rho\,(x,\ y)$，与他们对应且满足下面三个条件：

(i) **非负性**：$\rho(x,\ y) \geqslant 0, \rho(x,\ y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$；

(ii) **对称性**：$\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)$

(iii) **三角不等式**：$\rho(x,\ y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ y)$，这里 z 也是 X 中任意一个元素.

则称 ρ 是 X 上的一个**距离**，而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间，记为 (X, ρ)

设 X 为一非空几何，如果对于 X 中任给的两个**元素**$x,\ y$，均有一个确定的实数，记为 $\rho\,(x,\ y)$，与他们对应且满足下面三个条件：

Note: *设 X，定义距离 $\rho(x,\ x) = 0,\ \rho(x,\ y) = 1,\ x \neq y,\ x,\ y \in X$，则称 (X, ρ) 为离散的距离空间*

Example 1.1

n **维欧式空间** $\mathbb{R}^n$ 其上的距离为：

$$\rho(x,\ y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2\Big)^{1/2} \tag{1.1}$$

Note: *1. 此处证明使用了柯西（A.Cauthy）不等式*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \tag{1.2}$$

2. 另外可以引入距离

$$\rho_1(x,\ y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k|. \tag{1'}$$

3. 对于 $\mathbb{C}^n$ 同样可以用 ρ 定义距离空间

Example 1.2

空间 $C[a, b]$

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{1.3}$$

Example 1.3

$L^p(F)$ $(1 \leqslant p < \infty, F \subset \mathbb{R},$ 且为可测集)

$$\rho(x, y) = \Big(\int_F |x(t) - y(t)|^p \, \mathrm{d}t \Big)^{1/p} \tag{1.4}$$

Note: 两个几乎处处相等的 p 幂可积函数在 $L^p(F)$ 中视为同一元素.

Example 1.4

空间 $L^p(F)$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \inf_{\substack{\mathrm{m}F_0 = 0 \\ F_0 \subset F}} \{ \sup_{t \in F \setminus F_0} |x(t) - y(t)| \} \\ &= \operatorname*{esssup}_{t \in F} |x(t) - y(t)| \end{aligned} \tag{1.5}$$

Note: *1.* 称定义在可测集 F 上的可测函数 $x(\cdot)$ 是本性有界的，如果存在 F 的某个零测度子集 F_0，使得 $x(\cdot)$ 在集合 $F \setminus F_0$ 上有界.

2. F 上所有本性有界可测函数构成的集合用 $L^\infty(F)$ 表示.

3. 几乎处处相等的两个本性有界的可测函数看做同一元素. *4.* 证明其中第三条性质的时候. 用好 *sup* 的定义

Example 1.5

空间 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 令 l^p 是满足下列不等式的实（或复）数列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$ 构成的集合：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$$

$$\rho(x, y) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\Big)^{1/p} \tag{1.6}$$

Note: 借助以下三个不等式可得：

1. Young 不等式

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \tag{1.7}$$

2. 赫尔德不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\Big)^{1/q} \tag{1.8}$$

3. H.Minkowski 不等式

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^p\Big)^{1/p} \tag{1.9}$$

Example 1.6

空间 l^{∞}

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leqslant n < \infty} |\xi_n - \eta_n| \tag{1.10}$$

Definition 1.2

设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个**点列** (或称**序列**), 这里 $n = 1, 2, 3, \ldots$. 如果存在 X 中的点 x_0 使得当 $x \to \infty$ 时，$\rho(x_n, x_0) \to 0 (n \to \infty)$. 则称点列 $\{x_n\}$ **收敛**于 x_0，记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad 或\{x_n\} \to x_0 \quad (n \to \infty)$$

Theorem 1.1

设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的收敛点列，则下列性质成立：
(i) $\{x_n\}$ 的极限唯一；
(ii) 对任意的 $y_0 \in X$，数列 $\{\rho(x_n, y_0)\}$ 有界.

Theorem 1.2

设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的点列，且收敛，则 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛，且收敛于同一极限.
反之，若 $\{x_n\}$ 的任一子列收敛，则 $\{x_n\}$ 本身也收敛。

Note: *1.* $\mathbb{R}^n$ 中的收敛，其中的点列 $\{x^{(m)}\} = \{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})\}$ 按照等式 *((??))* 或按照等式 *(??)* 定义的距离收敛于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的充分必要条件均为 $x^{(m)}$ 的每个坐标收敛于 x 的相应坐标。*2.* 对于 $C[a,b]$，按照距离 *(??)* 其中点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x_0 的充分必要条件是：作为函数列的 $\{x_n(\cdot)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x_0(\cdot)$。*3.* 在 $C[a,b]$ 中，并不是所有距离下的收敛都和一致收敛等价，如定义

$$\rho_1(x, y) = \Big(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}$$

取函数列

$$x_n(t) = \frac{1}{(b-a)^n}(t-a)^n \quad (t \in [a, b], n = 1, 2, \cdots)$$

可知道, 按照 ρ_1，其收敛于 *0*，而显然，它并不是一致收敛的 (其在 *1* 附近总不一致收敛)

Note:

(i) 对于任何一个非空集合，我们都可以定义距离。但是一般来说，我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点。例如，对 $C[a, b]$，我们常常用等式 *(??)* 定义距离；对于 $L^p(F)$ 我们常用等式 *(??)* 定义距离，等等。只有这样，在理论和实践上才有意义。

(ii) 定义距离的方式一般不说唯一。

(iii) 如果一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离，那么由它们导出的收敛可以等价也可以不等价。当不等价时，便得到本质上不同的两个或两个以上的距离空间。

Definition 1.3

距离空间

$$\{x\colon \rho(x,\,x_0)\ < r\}\quad (r>0) \tag{1.11}$$

称为以 x_0 为中心，以 r 为半径的开球，也可表示为 $S(x_0,\,r)$，也叫做 x_0 的一个球形邻域，或简称邻域。距离空间

$$\{x\colon \rho(x,\,x_0)\ \leqslant r\}\quad (r>0)$$

称为以 x_0 为中心，以 r 为半径的闭球，也可表示为 $\bar{S}(x_0,\,r)$，也叫做 x_0 的一个球形邻域，或简称邻域。

Definition 1.4

设 X 是一个距离空间，$G\subset X$, $x\in G$. 如果存在 x 的某个邻域 $S(x,\,r)\subset G$，则称 x 是 G 的内点。G 的全部内点构成的集合记为 G^0，称为 G 的内部. 如果 G 中的每一个点都是它的内点，则称 G 为开集，空集规定为开集。

Note:

1. 如果 x 集合 $A\subset X(A$未必是开集$)$ 的内点，我们也称 A 是 x 的一个邻域。

Theorem 1.3

设 x 是距离空间，则

(i) 空间 X 与空集 $\emptyset$ 都是开集；

(ii) 任意多个开集的并是开集；

(iii) 有限多个开集的交是开集

Definition 1.5

设 X 是距离空间，$A \subset X$。点 $x_0 \in X$。弱队任给的 $\epsilon > 0$，x_0 的邻域 $S(x_0,\ \epsilon)$ 中含有 A 中异于 x_0 的点，即

$$S(x_0,\ \epsilon) \cap (A \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$$

则称 x_0 是 A 的聚点或极限点。如果 $x_0 \in A$ 但不是 A 的聚点，则称 x_0 为 A 的孤立点。集合 A 的全部聚点构成的集合称为 A 的导集。记为 A' 并集 $A \cup A'$ 称为 A 的闭包, 记为 $\bar{A}$。如果 $A = \bar{A}$，则称 A 为闭集。

Example 1.7

1. 设 $A = \{1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n}\}$ 距离为 $\rho(x,\ y) = |x - y|$。0 是聚点，但不在 A 中。
2. 设 B 是区间 $(0,\ 1]$，距离为 $\rho(x,\ y) = |x - y|$，0 是聚点，但不在其中。

因此聚点可以是内点，也可以不是内点。

Example 1.8

设 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ cdots\}$，$\rho(x,\ y) = |x - y|$ A 中的一切点都是它的孤立点，同时也是内点，内点和孤立点并不互斥。

Theorem 1.4

(i) $A \subset \bar{A}$

(ii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

(iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(iv) $\bar{\emptyset} = \emptyset$

Theorem 1.5

设 X 为距离空间，则

(i) 空间 X 及空集 $\emptyset$ 都是闭集；

(ii) 任意多个闭集的交是闭集；

(iii) 有限多个闭集的并是闭集。

Example 1.9

设 X 为一离散的距离空间，则 X 中的每个点既为它的内点，也是它的孤立点，因此 X 的每个子集都是既开又闭的集。

Definition 1.6

设 A, B 均为距离空间 X 的子集，如果 $\bar{B} \supset A$，则称 B 在 A 中稠密.
其有等价命题如下：

(i) 对于任给的 $x \in A$ 以及任给的 $\varepsilon > 0$，存在 B 中的点 y 使 $\rho(x, y) < \varepsilon$

(ii) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 以 B 中的每个点为中心，以 ε 为半径的全部开球的并包含 A

(iii) 对于任给的 $x \in A$，存在 B 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x

Note: *在稠密集的定义中，并不要求 $B \subset A$，B 和 A 甚至可以没有交集*

Definition 1.7

设 X 为距离空间，若 X 存在稠密的可列子集，则称 X 可分.

Example 1.10

(i) $\mathbb{R}^n$ 是可分的，因为 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标为有理数的点构成的集是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可列稠密子集

(ii) 空间 $C[a, b]$ 是可分的（因为可以利用伯恩斯坦定理证明：有理系数的多项式构成的集 P_n 在 $C[a, b]$ 中稠密，而 P_0 是可列集

(iii) 空间 $L^p(F)$ $(p \geqslant 1)$ 是可分的。

Example 1.11

$L^\infty[a, b]$ 是不可分的距离空间。设 A 是由如下的函数

$$x_s(t) = \begin{cases} 1 & a \leqslant t \leqslant s. \\ 0, & s < t \leqslant b \end{cases} \qquad (s \in [a, b])$$

Definition 1.8

设 X, Y 都是距离空间，距离分别为 ρ, ρ_1。如果对每一个 $x \in X$，按照某个规律必有 Y 中唯一的 y 与之相对应，则称这个对应是一个**映射**。映射常用记号 T 来表示。据此，我们有 $Tx = y$。

如果对于某一给定的点 $x_0 \in X$，映射 T 满足下面的条件：对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\rho(x, x_0) < \delta$ 时，有 $\rho_1(Tx, Tx_0) < \varepsilon$，则称映射 T 在点 x_0 处**连续**。如果映射 T 在 X 中的每一点处都连续，则称 T 在X **上连续**，且称 T 是**连续映射**

Definition 1.9

设 T 是由距离空间 X 到距离空间 Y 的映射，$A \subset X$。称集合

$$\{Tx \colon x \in A\}$$

为集合 A 的**像**，记为 $T(A)$。设 $B \subset Y$，则称集合

$$\{x \colon Tx \in B\}$$

为集合 B 的原像，记为 $T^{-1}(B)$。

Example 1.12

设 X 是距离空间，以 ρ 为距离，$x_0 \in X$ 为任一给定点，则 $f(x) = \rho(x, x_0)$ 是 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射将所有由距离空间 X 到实（或复数域）的映射称为泛函，

Theorem 1.6

距离空间 X 到距离空间 Y 中的映射 T 在点 $x_0 \in X$ 连续的充分必要条件是对任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\} \subset X$，有 $\{Tx_n\}$ 收敛于 Tx_0

Note:

(i) 其将点处 T 收敛 $\Leftrightarrow$ 考察收敛 x_0 点列像的收敛

Theorem 1.7

距离空间 X 到距离空间 Y 中的映射 T 连续的充分必要条件是下列两个条件之一成立：

(i) 对于 Y 中的任一开集 G，G 的原像 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集

(ii) 对于 Y 中的任一闭集 F，G 的原像 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集

Note:

(i) *(ii)* 和 *(i)* 可从余集的角度直接证明

(ii) 证明中，可运用连续定义，构造合适的开球，包含点的像

Definition 1.10

设 T 是由距离空间 X 到距离空间 Y 的单映射，即对任意的 $x_1,\ x_2 \in X$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，$Tx_1 \neq Tx_2$。
今再设 T 为满映射, 即 $T(x) = Y$，于是对任一 $y \in Y$，必存在唯一的 $x \in X$ 使得

$$Tx = y \tag{1.12}$$

因此通过 (??) 我们得到一个新的映射，它将 y 映成 x，称这个映射为 T 的**逆映射**，记为

$$T^{-1}y = x$$

当 T 存在逆映射时，称 T 是**可逆的**。
因此，T 存在逆映射的充分必要条件是 T 既为单映射又为满映射。它统称既单又满的映射为双映射。单映射又称为一对一映射

Definition 1.11

设 $X,\ Y$ 为距离空间，距离分别为 $\rho,\ \rho_1$，又设 T 是由 X 到 Y 的映射。若 T 存在逆映射，且 T 及其逆映射 T^{-1} 均连续，则称 T 是 X 到 Y 上的**同胚映射**. 如果存在一个从 X 到 Y 上的同胚映射，则称 X 与 Y 同胚。
设 T 是双映射，且对任意的 $x,\ y \in X$，有 $\rho_1(Tx,\ Ty) = \rho(x,\ y)$，则称 T 是 X 到 Y 上的**等距映射**。如果存在一个从 X 到 Y 上的等距映射，则称 X 与 Y **等距**。

Note: 两个同胚或等距的距离空间在很多情况下可视为同一。

Example 1.13

$y = \arctan x$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的同胚映射
$y = e^x$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $(0,\ \infty)$ 上的同胚映射

Note:

(i) 对于非空集合 X 的任意性以及在 X 上定义距离的多样性导致了距离空间的复杂性

(ii) 注意一般距离空间与 $\mathbb{R}^n$ 相似的一面，更要注意不同的另一面。最重要的是，所有内容都离不开预先给定的距离。

(iii) 因此，如果在一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离，应如实地将它们看成两个或两个以上不同的距离空间。由于它们的不同，故其中一个很可能是

可分的，而其他的则不是。对于稠密性以及映射的连续性和同胚等，也类似。