

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{1 - (\alpha\beta)^t}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \alpha^t \ln k_0 \right] \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k_0 + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{左边} = V(k) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \\ &\triangleq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

$$\text{右边} = \max \{ u(f(k) - y) + \beta V(y) \}$$

利用 FOC 和包络条件求解得到  $y = \beta k^\alpha$ ，代入求右边。

Institute for Advanced Study

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \max \{ u(f(k) - y) + \beta V(y) \} \\ &= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right] \\ \text{I can do this all day} &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta k^\alpha + A \right] \\ &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + A \right] \\ &= \alpha \ln k + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

整理：何清海

整理时间：December 20, 2019

Email: ddswhu@gmail.com

所以，左边 = 右边，证毕。

# 目 录



# 第 1 章

## 第六章距离空间

### Definition 1.1

设  $X$  为一非空几何, 如果对于  $X$  中任给的两个元素  $x, y$ , 均有一个确定的实数, 记为  $\rho(x, y)$ , 与他们对对应且满足下面三个条件:


(i) 非负性:  $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0$  的充分必要条件是  $x = y$ ;

(ii) 对称性:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) 三角不等式:  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ , 这里  $z$  也是  $X$  中任意一个元素.

则称  $\rho$  是  $X$  上的一个距离, 而称  $X$  是以  $\rho$  为距离的距离空间, 记为  $(X, \rho)$


设  $X$  为一非空几何, 如果对于  $X$  中任给的两个元素  $x, y$ , 均有一个确定的实数, 记为  $\rho(x, y)$ , 与他们对对应且满足下面三个条件:

 **Note:** 设  $X$ , 定义距离  $\rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 1, x \neq y, x, y \in X$ , 则称  $(X, \rho)$  为离散的距离空间

### Example 1.1

$n$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  其上的距离为:

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

 **Note:** 1. 此处证明使用了柯西 (A. Cauchy) 不等式

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (1.2)$$

2. 另外可以引入距离

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|. \quad (1')$$

3. 对于  $\mathbb{C}^n$  同样可以用  $\rho$  定义距离空间

**Example 1.2**空间  $C[a, b]$ 

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (1.3)$$

**Example 1.3** $L^p(F)$  ( $1 \leq p < \infty$ ,  $F \subset \mathbb{R}$ , 且为可测集)

$$\rho(x, y) = \left( \int_F |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.4)$$

 $dx$ **Note:**