

## Taller de Calculo Estocastico

Notas de Clase con Derechos Reservados

Profesor: Fabian Velasquez Clavijo

Curso: Procesos Estocasticos

2025

*Resolver el taller en grupos de 2 personas y enviarlo en un unico archivo pdf al grupo whasapp del curso el dia anterior al examen.*

**I).** Suponga que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots$  son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con media  $\mu$  y la sucesión de sumas parciales  $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$  con  $\mathcal{F}_n$  que contiene la información de las variables aleatorias y sea  $M_n = S_n - n\mu$  un proceso aleatorio. Calcule la esperanza condicional  $E(M_n/\mathcal{F}_m)$  con  $m < n$ .

**II).** Verifique si los procesos indicados son Martingalas de tiempo continuo.

- 1)  $g(B_t) = B_t^4 - 4t$
- 2)  $g(B_t) = e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)$
- 3)  $g(B_t) = B_t^3 - tB_t$
- 4)  $g(B_t) = e^{\frac{-t^2}{2} + B_t}$

**III)** Suponga que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots$  son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con  $\mu = 0$  y  $E(X_i^2) = \sigma^2$ . Se denota la sucesión de sumas parciales como  $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$  y  $\mathcal{F}_n$  representa la información de las variables aleatorias  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}, X_n$ . Verifique si  $K_n = S_n + n$  es una martingala.

**IV)** Determine los diferenciales estocasticos de cada proceso indicado.

- 1)  $g(B_t) = \ln(B_t^2)$
- 2)  $g(B_t) = e^{\frac{t}{2}} \cosh(B_t)$
- 3)  $g(B_t) = e^{B_t^3}$
- 4)  $g(B_t) = e^{\frac{-t^2}{2} + B_t}$
- 5)  $g(B_t) = \arctan(B_t^2) - 2 \sec(tB_t)$

**V)** Hallar la varianza y el valor esperado de cada proceso estocastico.

- 1)  $g(B_t) = \cosh(B_t)$
- 2)  $g(B_t) = e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)$
- 3)  $g(B_t) = \arctan(B_t)$
- 4)  $g(B_t) = e^{\frac{-t^2}{2} + B_t}$

**VI).** Resolver las operaciones indicadas.

- 1)  $\int_0^t \sinh(B_t) dB_t$
- 2)  $E\left(\int_0^t e^{2B_t} dt\right)$
- 3)  $E\left(\left(\int_0^t B_t^6 dB_t\right)^2\right)$
- 4)  $\int_0^t \ln(B_t) dB_t$

**VII).** Resolver las ecuaciones diferenciales estocásticas indicadas y calcular su valor esperado.

- 1).  $dX_t = 3X_t dt + 2X_t dB_t$   
 $X_0 = 2$
- 2).  $dX_t = (X_t - 4) dt + -5dB_t$   
 $X_0 = -3$
- 3).  $dX_t = (tX_t - 2) dt + 3dB_t$   
 $X_0 = 1$
- 4).  $dX_t = (2X_t + 1) dt + (4X_t + 3) dB_t$   
 $X_0 = 2$
- 5).  $dX_t = (tX_t - 3) dt + (4X_t + 1) dB_t$   
 $X_0 = 4$
- 6).  $dX_t = (X_t - 4) dt + -5X_t dB_t$   
 $X_0 = 6$ .

**VIII).** Halle el valor esperado y varianza de los procesos de difusión asociados a las ecuaciones diferenciales estocásticas indicadas:

- 1).  $dX_t = 3X_t dt + 2X_t dB_t$   
 $X_0 = 2$
- 2).  $dX_t = (X_t - 4) dt + -5dB_t$   
 $X_0 = -3$