

Taller de Calculo Estocastico

Notas de Clase con Derechos Reservados
Profesor: Fabian Velasquez Clavijo
Curso: Procesos Estocasticos
2025

Resolver el taller en grupos de 2 personas y enviarlo en un unico archivo pdf al grupo whasapp del curso el dia anterior al examen.

I). Suponga que $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con media μ y la sucesión de sumas parciales $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ con \mathcal{F}_n que contiene la información de las variables aleatorias y sea $M_n = S_n - n\mu$ un proceso aleatorio. Calcule la esperanza condicional $E(M_n/\mathcal{F}_m)$ con $m < n$.

II). Verifique si los procesos indicados son Martingalas de tiempo continuo.

- 1) $g(B_t) = B_t^4 - 4t$
- 2) $g(B_t) = e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(B_t)$
- 3) $g(B_t) = B_t^3 - tB_t$
- 4) $g(B_t) = e^{\frac{-t^2}{2} + B_t}$

III) Suponga que $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con $\mu = 0$ y $E(X_i^2) = \sigma^2$. Se denota la sucesión de sumas parciales como $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ y \mathcal{F}_n representa la información de las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n-1}, X_n$. Verifique si $K_n = S_n + n$ es una martingala.

IV) Determine los diferenciales estocasticos de cada proceso indicado.

- 1) $g(B_t) = \ln(B_t^2)$
- 2) $g(B_t) = e^{\frac{t}{2}} \cosh(B_t)$
- 3) $g(B_t) = e^{B_t^3}$
- 4) $g(B_t) = e^{\frac{-t^2}{2} + B_t}$
- 5) $g(B_t) = \arctan(B_t^2) - 2 \sec(tB_t)$

V) Hallar la varianza y el valor esperado de cada proceso estocastico.

- 1) $g(B_t) = \cosh(B_t)$
- 2) $g(B_t) = e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(B_t)$
- 3) $g(B_t) = \arctan(B_t)$
- 4) $g(B_t) = e^{\frac{-t^2}{2} + B_t}$

VI). Resolver las operaciones indicadas.

- 1) $\int_0^t \operatorname{senh}(B_t) dB_t$
- 2) $E\left(\int_0^t e^{2B_t} dt\right)$
- 3) $E\left(\left(\int_0^t B_t^6 dB_t\right)^2\right)$
- 4) $\int_0^t \ln(B_t) dB_t$

VII). Resolver las ecuaciones diferenciales estocasticas indicadas y calcular su valor esperado.

- 1). $dX_t = 3X_t dt + 2X_t dB_t$
 $X_0 = 2$
- 2). $dX_t = (X_t - 4) dt + -5dB_t$
 $X_0 = -3$
- 3). $dX_t = (tX_t - 2) dt + 3dB_t$
 $X_0 = 1$
- 4). $dX_t = (2X_t + 1) dt + (4X_t + 3) dB_t$
 $X_0 = 2$
- 5). $dX_t = (tX_t - 3) dt + (4X_t + 1) dB_t$
 $X_0 = 4$
- 6). $dX_t = (X_t - 4) dt + -5X_t dB_t$
 $X_0 = 6.$

VIII). Halle el valor esperado y varianza de los procesos de difusión asociados a las ecuaciones diferenciales estocasticas indicadas:

- 1). $dX_t = 3X_t dt + 2X_t dB_t$
 $X_0 = 2$
- 2). $dX_t = (X_t - 4) dt + -5dB_t$
 $X_0 = -3$