

Características eletrônicas, síntese e aplicações de pontos quânticos

Alan Abdalad Vianna^{*1}, Ângelo Augusto Santos Marcolin^{† 1}, Bruno Sardinha Alves Pereira^{‡ 1}, Caroline Teixeira Lisboa^{§ 1}, Vitor Gabriel Fernandes^{¶ 1}, Vinícius Rodrigues Costa^{|| 1}, and Yasmin Michelin dos Santos^{** 1}

¹*Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, 12602-810, Lorena, SP, Brasil*

8 de junho de 2017

Resumo

A sociedade nos dias atuais vive a era da nanotecnologia. Além dos dispositivos já existentes no mercado, há ainda uma enorme gama de novas nanotecnologias que prometem inovar e criar diversos dispositivos. Seja em áreas como medicina ou eletrônica, o uso de produtos nanotecnológicos se tornará cada vez mais comum. Em particular, há uma classe de nanopartículas semicondutoras, denominada ponto quântico, que vem chamando a atenção de diversos setores da indústria e pesquisa, devido às suas características únicas de confinamento. Dessa forma, o escopo da presente monografia é explicar o que são os pontos quânticos, suas propriedades e aplicações. Inicia-se introduzindo conceitos de mecânica quântica e física do estado sólido, base para entender fundamentos que descrevem semicondutores, além de possibilitar o entendimento das peculiaridades do ponto quântico quando comparado com um material *bulk*. Em seguida, descreve-se o fenômeno de confinamento, uma das bases centrais do trabalho, a equação de Brus e propriedades ópticas. Após a explanação acerca das características do ponto quântico, é feita uma descrição de forma sucinta sobre métodos de caracterização e síntese, além de aplicações dessas nanopartículas na área de tecnologia.

Sumário

1 Introdução

2

*alan@alunos.eel.usp.br

†angelo.marcolin@usp.br

‡bruno.sap@alunos.eel.usp.br

§caroline.tl@alunos.eel.usp.br

¶vitor.gf@alunos.eel.usp.br

||vinicius.rc@alunos.eel.usp.br

**yasmin.michelin@usp.br

2	Introdução à Mecânica Quântica e Física do Estado Sólido	4
2.1	Equação de Schrödinger	4
2.1.1	Elétron livre	5
2.1.2	Elétron em um poço de potencial infinito	5
2.2	Rede Cristalina	7
2.2.1	Rede de Bravis	7
2.2.2	Rede Recíproca	8
2.2.3	Primeira zona de Brillouin	9
2.3	Potencial Periódico e Teorema de Bloch	9
2.3.1	Potencial Periódico	9
2.3.2	Teorema de Bloch	10
2.4	Teoria de Bandas nos Sólidos	13
2.4.1	Condutores, semicondutores e isolantes	13
2.4.2	Semicondutores <i>bulk</i>	14
2.5	Heterojunções	17
3	Desenvolvimento	18
3.1	Confinamento quântico e densidade de estados	18
3.2	Densidade de estado	19
3.3	Equação de Brus	22
3.4	Propriedades Ópticas	25
4	Aplicação	26
4.1	Síntese de pontos quânticos	26
4.1.1	Síntese de Pontos Quânticos Feitos de Carbono (CQDs)	27
4.1.2	Síntese dos <i>Core-Shell Quantum Dots</i> em Poros de Estruturas Metal- Orgânicas	27
4.1.3	Método de Caracterização	28
4.1.4	Aplicações de pontos quânticos	32
	Referências	34

1 Introdução

Pontos quânticos [1] são nanopartículas semicondutoras, que por terem o tamanho reduzido, se comportam como se estivesse sujeitas a um poço de potencial. Isso faz com que elétrons e buracos sofram um forte confinamento quântico nas três dimensões espaciais. Devido a esse confinamento, eles têm sua energia quantizada em valores discretos, como em um átomo. Por isso também são chamados de átomos artificiais.

A história dessas nanopartículas começa em 1980 em um artigo publicado pelo físico russo, Ekimov. Seu trabalho foi baseado no estudo de efeitos quânticos de tamanho em cristais semicondutores microscópicos em três dimensões. Segundo Ekimov [2]:

"Apresentamos a descoberta e a espectroscopia de uma nova classe de objetos que exibem efeitos quânticos de tamanho: cristais microscópicos tridimensionais de compostos semicondutores crescidos em uma matriz dielétrica transparente."

Apesar de tratar como uma nova classe de objetos, Ekimov não os denomina nem os trata como pontos quânticos.

Durante seu estudo, ao realizar a absorção espectral de três amostras de cristais microscópicos com raios diferentes, observou uma dependência na posição espectral das linhas de absorção, onde supôs se tratar de um efeito quântico de tamanho ocorrido devido ao tamanho da partícula, e complementa:

"Tais portadores de carga na matriz dielétrica estão presos em um poço de potencial onde as paredes são limitadas pelo cristal microscópico."

Apesar de considerar esse poço de potencial simétrico e esférico, Ekimov não se aprofunda no tópico, deixando a discussão dos pontos quânticos como "um efeito quântico".

Foi apenas em 1984 que Louis Brus, ao apresentar uma relação entre o tamanho e o *gap* de energia das nanopartículas semicondutoras após aplicar um modelo esférico na função de onda de um semicondutor *bulk* para uma partícula, começa a dar forma ao conceito que futuramente será denominado ponto quântico.

No artigo [3], Brus considera cristalitos suficientemente pequenos de modo que os níveis de energia *bulk* não sejam válidos e afirma:

"Conforme os cristalitos se aproximam do tamanho da excitação 1S, as interações elétron-buraco com a superfície destes cristalitos dominam a dinâmica. Neste limite molecular, a energia dependerá do tamanho e forma dos cristalitos e da natureza do material."

Apesar dos avanços nos estudos de Brus, levou cerca de uma década para que o ponto quântico voltasse a ser estudado, quando Murray [4], durante seu estudo sobre evolução de propriedades de materiais pelo tamanho de cristalitos nanométricos, afirma que o regime de tamanhos intermediários dos cristalitos afetam o comportamento de materiais *bulk*, emergindo a natureza discreta das propriedades moleculares deles.

O objetivo de Murray era estudar estes diferentes regimes para observar e, se possível, controlar certos comportamentos como efeitos ópticos de estados excitados altamente polarizados ou comportamento fotoquímico.

Já era conhecido que as propriedades físicas desses nanocristais semicondutores eram regidas por confinamentos espaciais de excitação e, apesar do progresso de certos semicondutores, a interpretação dos dados experimentais era complicada de ser analisada devido a problemas na superfície derivacional e baixa cristalinidade destes materiais.

Murray se concentrou na síntese e caracterização de nanocristais semicondutores de CdSe, devido às propriedades ópticas e eletroquímicas deste material, resultando futuramente em sínteses coloidais de compostos CdX (X = S, Se, Te) que permearam os estudos em pontos quânticos e suas aplicações.

As aplicações destes compostos foram se tornando cada vez mais amplas com o passar do tempo, porém, devido a toxicidade dos íons de Cádmio, ainda era inviável sua utilização na área biomédica.

A fim de melhorar a estabilidade dos núcleos de nanocristais para redução da toxicidade, passou-se a introduzir camadas de átomos de semicondutores com *gap* de banda maior para encapsular o núcleo das nanopartículas, formando então nanocristais *core-shell*. Como consequência desta mudança, a eficiência luminescente foi melhorada e estudada por Hines e Guyot-Sionnest em 1996 na caracterização da alta luminescência de nanocristais de CdSe encapsulados em ZnS.

Ao longo dos anos, foram realizadas melhorias como encapsulação dupla do núcleo, introdução de ácidos mercapto-carboxílicos que possibilitaram a solubilidade e eficiência fotoluminescente em solventes orgânicos e água, além de proporcionar uma gama de aplicações dos pontos quânticos.

Para entender melhor como os pontos quânticos podem ser utilizados nestas diversas aplicações, é necessário o entendimento de conceitos relacionados a mecânica quântica e física do estado sólido, que serão apresentados nas seções a seguir.

2 Introdução à Mecânica Quântica e Física do Estado Sólido

A mecânica quântica foi desenvolvida com o intuito de descrever fenômenos na escala microscópica, que não conseguiam ser explicados pela mecânica clássica, pois essa descreve apenas sistemas macroscópicos. A física do estado sólido utiliza os resultados da mecânica quântica para o estudo de sistemas com muitos átomos ligados entre si, o que possibilitou o desenvolvimento tecnológico em diversas áreas, como eletrônica, biomedicina, nanociência, computação quântica, entre outros. [7]

2.1 Equação de Schrödinger

A dualidade onda-partícula de um elemento na escala atômica é uma propriedade básica descrita pela mecânica quântica [10]. Quando as partículas são tratadas como ondas, a função de onda (Ψ) é utilizada para formalizar seu deslocamento e amplitude [11]. A densidade de probabilidade, $|\Psi|^2$, é utilizada quando se deseja encontrar a probabilidade de uma partícula estar em um determinado local.

Para conseguir descrever um sistema quântico matematicamente, Erwin Schrödinger desenvolveu a principal equação em torno da mecânica quântica, conhecida como equação de Schrödinger:

$$\mathcal{H} \cdot \Psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \cdot \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.1)$$

Na equação (2.1), \mathcal{H} é o operador hamiltoniano, definido por $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ [21], no qual ∇^2 é o Laplaciano que representa a segunda derivada. Além disso, $U(\mathbf{r})$ é o potencial da partícula numa dada posição \mathbf{r} .

O termo E representa a energia da partícula no estado que ela se encontra, sendo um autovalor na equação de Schrödinger que está associado ao autovetor da função de onda.

2.1.1 Elétron livre

No estudo das várias condições para solução da equação de Schrödinger, o exemplo mais trivial é o caso do elétron livre. Dizer que o elétron move-se livremente no sistema é análogo a dizer que não há nenhum potencial aplicado, ou seja, $U(r) = 0, \forall r \in \mathbb{R}^3$. Assim, a equação (2.1) torna-se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = E \cdot \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

A solução para essa equação diferencial de segunda ordem pode ser escrita como [24]:

$$\Psi(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x}. \quad (2.3)$$

A equação acima implica que:

$$E = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}. \quad (2.4)$$

Assim, observa-se que não há restrições para o valor da energia do sistema E . Portanto, conclui-se que a energia do elétron livre é contínua, pois o valor de E varia continuamente entre 0 e ∞ .

Algumas passagens foram omitidas neste tópico, já que o tópico seguinte de um elétron num poço de potencial infinito as abordará.

2.1.2 Elétron em um poço de potencial infinito

Para análise de uma partícula confinada em um poço de potencial infinito e unidimensional de largura L , será considerado que ela se move livremente dentro do poço e que não há brechas na barreira de potencial, evitando assim o tunelamento quântico. Reescrevendo a equação (2.1) para o caso unidimensional:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x) + U(x) \cdot \Psi(x) = E \cdot \Psi(x), \quad (2.5)$$

$$\text{onde } V(0) = V(L) \rightarrow \infty \text{ e } V(x) = 0, \forall x | 0 < x < a. \quad (2.6)$$

Reaarranjando (2.5):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x) - [E - U(x)] \cdot \Psi(x) = 0. \quad (2.7)$$

Pelo método de equações diferenciais de segunda ordem, sabe-se que $\Psi(x) = e^{\lambda x}$ é uma boa proposta de solução para a equação. Calculando o laplaciano e substituindo essa proposta de solução na equação de Schrödinger, obtém-se:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \lambda^2 - [E - U(x)] \end{cases} \cdot e^{\lambda x} = 0, e^{\lambda x} \neq 0, \forall x, y \in \mathfrak{R}$$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \lambda^2 - [E - U(x)] \end{cases} = 0. \quad (2.8)$$

Em $0 < x < L, U(x) = 0$. Substituindo esse potencial nulo na equação acima, obtém-se λ [24]:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{2Em}{\hbar}}. \quad (2.9)$$

Admitindo a combinação linear da solução proposta para os vetores de λ obtidos:

$$\Psi(x) = A \cdot e^{+\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}}ix} + B \cdot e^{-\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}}ix}. \quad (2.10)$$

Pela fórmula de Euler:

$$\Psi(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}} \cdot x\right) + C_2 i \sin\left(\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}} \cdot x\right). \quad (2.11)$$

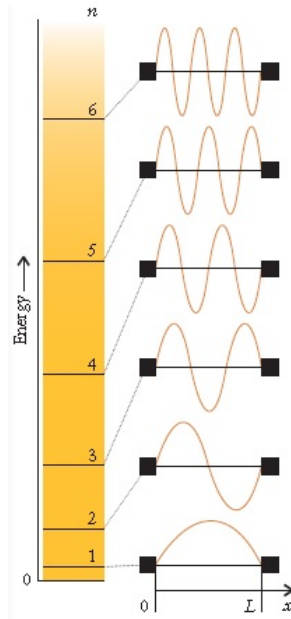
Aplicando a condição de contorno, checka-se em C_1 , então:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}} \cdot a\right) = 0 \\ \sin\left(\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}} \cdot a\right) &= 0 \\ \left(\sqrt{\frac{2Em}{\hbar}} \cdot a\right)^{\frac{1}{2}} &= n \cdot \pi, n \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Conclui-se que

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2a^2 m}, n \in \mathfrak{R}. \quad (2.13)$$

Sendo n o número quântico relacionado com o nível de energia em que a partícula se encontra. Pode-se verificar uma equação de onda bem definida (autovetor) para cada valor de nível de energia do sistema (autovalor), exemplificado na figura 1.

Figura 1: Formas da função de onda para valores de n entre 1 e 6 [20]

Como $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, a equação (2.13) mostra que somente alguns valores para energia são aceitos no confinamento dentro de uma caixa de tamanho L . A partir disso, conclui-se que os níveis de energia de uma partícula confinada são discretos e que a energia pode ser quantizada [20].

2.2 Rede Cristalina

Rede cristalina é a designação dada para o conjunto ordenado de partículas que constituem um sólido. Cada cristal é constituído de células unitárias semelhantes que se repetem ao longo do material. A rede cristalina pode ser descrita pela rede de Bravais e pela rede recíproca [8].

2.2.1 Rede de Bravis

Considerando-se uma rede cristalina infinita, o arranjo periódico dos átomos dessa rede pode ser descrito pela rede de Bravais, sendo que a posição de cada átomo é considerada um ponto em um espaço tridimensional (também pode ser representado na forma bidimensional). A rede de Bravais é o arranjo de todos esses pontos e a posição de cada ponto pode ser definida por um vetor \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = n_1 \cdot \mathbf{a}_1 + n_2 \cdot \mathbf{a}_2 + n_3 \cdot \mathbf{a}_3, \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ são vetores não coplanares, ou seja, são linearmente independentes, e são conhecidos como vetores primitivos e n_1, n_2, n_3 são números inteiros. [12]

A rede de Bravais tem a característica de que independente do ponto escolhido para definir o vetor \mathbf{R} , há sempre uma preservação da orientação, ou seja, a rede cristalina é a

mesma independente de onde se observa [12].

2.2.2 Rede Recíproca

Dado o conjunto de pontos \mathbf{R} que constituem uma rede de Bravais e uma onda plana $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, tem-se que para certos vetores de onda \mathbf{G} , a onda plana assume a periodicidade da rede de Bravais. Esse conjunto de vetores, dado por \mathbf{G} , é conhecido como rede recíproca da rede de Bravais.

Como a questão da periodicidade é válida, a relação:

$$e^{i\mathbf{G}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{R})} = e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.15)$$

deve ser satisfeita, em que \mathbf{r} é o vetor correspondente à célula primitiva.

Para que (2.15) seja válida, tem-se que:

$$e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}} * e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.16)$$

$$e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}} = 1. \quad (2.17)$$

Ou seja, a rede recíproca pode ser caracterizada pelo conjunto de vetores \mathbf{k} que satisfazem a relação (2.16).

A rede recíproca é gerada pela transformada de Fourier da rede de Bravais, uma vez que a transformada representa uma mudança de coordenadas de uma função periódica [14]. No caso da rede recíproca, ela representa uma mudança para o espaço do momento [15]. Como a rede recíproca é definida a partir da rede de Bravais, a segunda é conhecida como rede direta quando associada à rede recíproca [12].

Os vetores da rede recíproca estão relacionados com os vetores primitivos a partir de:

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \quad (2.20)$$

e devem satisfazer

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad (2.21)$$

onde δ_{ij} representa o *delta de kronecker*, que obedece a seguinte relação:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.22)$$

Pode-se escrever o vetor \mathbf{k} como:

$$\mathbf{k} = k_1 \cdot \mathbf{b}_1 + k_2 \cdot \mathbf{b}_2 + k_3 \cdot \mathbf{b}_3. \quad (2.23)$$

De (2.14) e (2.23), tem-se:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} = (k_1 \cdot \mathbf{b}_1 + k_2 \cdot \mathbf{b}_2 + k_3 \cdot \mathbf{b}_3) \cdot (n_1 \cdot \mathbf{a}_1 + n_2 \cdot \mathbf{a}_2 + n_3 \cdot \mathbf{a}_3). \quad (2.24)$$

Aplicando a equação (2.21), obtém-se:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} = 2\pi(k_1 \cdot n_1 + k_2 \cdot n_2 + k_3 \cdot n_3). \quad (2.25)$$

Para que $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = 1$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}$ deve ser múltiplo inteiro de 2π . Como os coeficientes n_i são inteiros, os coeficientes k_i também deve ser. Então \mathbf{k} será um vetor da rede recíproca sempre que puder ser escrito como a combinação linear de vetores \mathbf{b}_i com coeficientes inteiros. Assim, a rede recíproca é uma rede de Bravais, ao considerar esses vetores como sendo os vetores primitivos. Um ponto importante é que a recíproca da rede recíproca corresponde a rede direta original [12].

2.2.3 Primeira zona de Brillouin

A primeira zona de Brillouin representa a célula primitiva de Wigner-Seitz na rede recíproca. Ela é particularmente importante porque representa o conjunto de pontos no espaço recíproco que não cruzam o plano de Bragg. As ondas que se propagam em um potencial periódico podem ser escritas como ondas de Bloch dentro das zonas de Brillouin [13].

2.3 Potencial Periódico e Teorema de Bloch

Para entender as propriedades eletrônicas dos pontos quânticos, uma análise de semicondutores *bulk* (não confinados) é necessária. Como calcular o estado eletrônico para esses materiais é algo complexo, utilizam-se aproximações. Uma dessas aproximações consiste na observação do comportamento de um elétron, assumindo que todos os outros fazem parte dos íons que criam o potencial periódico.

2.3.1 Potencial Periódico

A hamiltoniana [12] de um sólido contém tanto os potenciais monoelétrônicos quanto os potenciais de par. O primeiro descreve as interações dos elétrons com os núcleos e o segundo, as interações entre os elétrons.

Para o elétron independente, essas interações são representadas por um potencial efetivo monoelétrônico $U(\mathbf{r})$. Independente da forma desse potencial, se o cristal for perfeitamente periódico, ele deve satisfazer a seguinte equação:

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = U(\mathbf{R}). \quad (2.26)$$

Para o caso do elétron livre, $U(\mathbf{R})$ é zero, caracterizando o caso mais simples de um periódico. Assim, a equação de Schrödinger para o elétron livre se reduz à equação

(2.26). O vetor \mathbf{r} está relacionado à célula primitiva, enquanto \mathbf{R} indica os pontos de uma rede de Bravais [8].

2.3.2 Teorema de Bloch

O teorema de Bloch [12] afirma que os autoestados Ψ podem ser escritos como uma onda plana vezes uma função de periodicidade para elétrons independentes, considerando que sobre eles atua um potencial periódico em uma rede de Bravais

$$\Psi_{nk}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cdot u_{nk}(\mathbf{r}). \quad (2.27)$$

As equações (2.26) e (2.27) implicam em:

$$\Psi_{nk}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cdot u_{nk}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \quad (2.28)$$

$$\Psi(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \cdot \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.29)$$

Os subíndices n e k serão explicados no final da prova do Teorema de Bloch, mas sua omissão não comprometerá o entendimento do desenvolvimento a seguir.

- Condição de Contorno de Born-Von Karman

Serão aplicadas as condições de contorno para que as funções de onda sejam periódicas.

No caso tridimensional,

$$\begin{cases} \Psi(x+L, y, z) = \Psi(x, y, z) \\ \Psi(x, y+L, z) = \Psi(x, y, z) \\ \Psi(x, y, z+L) = \Psi(x, y, z) \end{cases} \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é conhecida como condição de contorno de Born-Von Karman de periodicidade macroscópica. Como nem sempre a rede de Bravais é cúbica, generaliza-se a condição de contorno para:

$$\Psi(\mathbf{r} + Ni \cdot \mathbf{a}_i) = \Psi(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.31)$$

no qual \mathbf{a}_i são os vetores primitivos da rede direta e Ni são números inteiros, de forma que:

$$N1 \cdot N2 \cdot N3 = N, \quad (2.32)$$

onde N é o número total de células primitivas no cristal.

Aplicando o Teorema de Bloch, obtém-se:

$$\Psi(\mathbf{r} + Ni \cdot \mathbf{a}_i) = e^{iNi \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} \cdot \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

A equação (2.33) será válida para:

$$e^{i \cdot N i \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

A partir do mesmo desenvolvimento feito em (2.25),

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i = 2\pi \mathbf{k} i. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.34), tem-se que:

$$e^{i \cdot N i 2\pi \cdot \mathbf{k} i} = 1. \quad (2.36)$$

Uma exponencial complexa pode ser escrita em função de senos e cossenos, através da fórmula de Euler. Observa-se que a relação acima será válida sempre que 2π estiver sendo multiplicado por um número inteiro. Como Ni é um número inteiro e $\mathbf{k}i$ também, pode-se definir $\mathbf{k}i$ em função de Ni :

$$\mathbf{k}i = \frac{m_i}{N_i}, \quad \text{com } m_i \text{ inteiro.} \quad (2.37)$$

Assim, a forma geral dos vetores de onda de Bloch permitidos é:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{N_i} \cdot \mathbf{b}i. \quad (2.38)$$

É definido que o elemento de volume, ou seja, o menor volume $\Delta \mathbf{k}$ da rede recíproca é formado pelo paralelepípedo com arestas $\frac{\mathbf{b}i}{N_i}$, que pode ser escrito pelo produto misto:

$$\Delta \mathbf{k} = \frac{\mathbf{b}1}{N1} \cdot \left(\frac{\mathbf{b}2}{N2} \times \frac{\mathbf{b}3}{N3} \right) = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{b}1 \cdot (\mathbf{b}2 \times \mathbf{b}3). \quad (2.39)$$

O vetor de onda pode ser escrito como $k = \frac{2\pi}{a}$, em que a é o parâmetro de rede da célula unitária. Assim, obtém-se $k^3 = \frac{8\pi^3}{a^3}$, ou seja, $k^3 = \frac{8\pi^3}{v}$, em que v é o volume de uma célula primitiva na rede direta. Esse volume também é dado por $v = \frac{V}{N}$, onde V representa o volume associado ao número de sítios da rede. Como o produto misto dos vetores $\mathbf{b}i$ representa o volume k^3 . Logo, a equação (2.39) pode ser reescrita por:

$$\Delta \mathbf{k} = \frac{8\pi^3}{V}. \quad (2.40)$$

Ao construir o teorema de Bloch para esse volume, ele se torna válido para toda a rede cristalina devido a sua periodicidade.

- Prova do Teorema de Bloch

Para realizar a prova desse teorema, parte-se do princípio de que qualquer função que atenda às condições de Born-Von Karman pode ser expandida em ondas planas, sendo que essa expansão é feita por séries de Fourier.

Expandindo o potencial com periodicidade na rede de Bravais e a função de onda em ondas planas, obtém-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{K}} U_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \\ \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $C_{\mathbf{k}}$ e $U_{\mathbf{K}}$ são coeficientes.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} &= \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} i\mathbf{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \\ \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} &= -\sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} k^2 e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Substituindo as equações de (2.42) na equação de Schrödinger (??), tem-se que

$$\sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} k^2 e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} + \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} i\mathbf{K} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} = E \cdot \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.43)$$

Reorganizando os termos para que se consiga colocar $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ em evidência:

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[C_{\mathbf{k}} \left(\frac{k^2 \hbar^2}{2m} - E \right) + \sum_{\mathbf{K}} U_{\mathbf{K}} \cdot C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} \right] = 0. \quad (2.44)$$

Como a equação (2.44) é válida para todo \mathbf{r} , então

$$\left(\frac{k^2 \hbar^2}{2m} - E \right) + \sum_{\mathbf{K}} U_{\mathbf{K}} \cdot C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} = 0. \quad (2.45)$$

A equação (2.45) é análoga à equação de Schrödinger só que para o espaço recíproco [8]. Um resultado importante obtido a partir dessa equação é que o coeficiente $C_{\mathbf{k}}$ se relaciona com os demais coeficientes [12]. Ou seja, $C_{\mathbf{k}}$ acopla-se com $C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}1}$, $C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}2}$, etc. Isso significa que um ponto $C_{\mathbf{k}}$ da rede sofre influência de todos os outros pontos, gerando uma sobreposição das funções de onda. Isso fornece uma introdução aos níveis de energia [26]. É interessante observar que para $U_{\mathbf{K}} = 0$, a energia obtida é a do elétron livre.

Pode reescrever a função de onda como:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} \cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.46)$$

Trazendo $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ para fora do somatório:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot \left(\sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} \cdot e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (2.47)$$

Da equação (2.47), tem-se que a função de periodicidade u é dada por:

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{k}-\mathbf{K}} \cdot e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.48)$$

Assim, provou-se o teorema de Bloch, ao encontrar uma função de periodicidade u

que satisfaça a equação (2.26).

Como o problema foi analisado para um volume fixo, que diz respeito à região da célula unitária (equação (2.40)), tem-se infinitas soluções para \mathbf{k} com autovalores discretos, indexados pelo índice de bandas n . As energias $E_n(\mathbf{K})$ varia de forma contínua à medida que \mathbf{k} varia e representam os níveis de energia para o elétron em um potencial periódico. Em relação a n , a energia varia de forma discreta. Ao atribuir os índices n para as funções de onda e para os níveis de energia, obtém-se $E_n\mathbf{k}$. As informações que essas funções contêm são chamadas de estrutura de banda. Para cada n , o conjunto de níveis eletrônicos é chamado de banda de energia [12].

2.4 Teoria de Bandas nos Sólidos

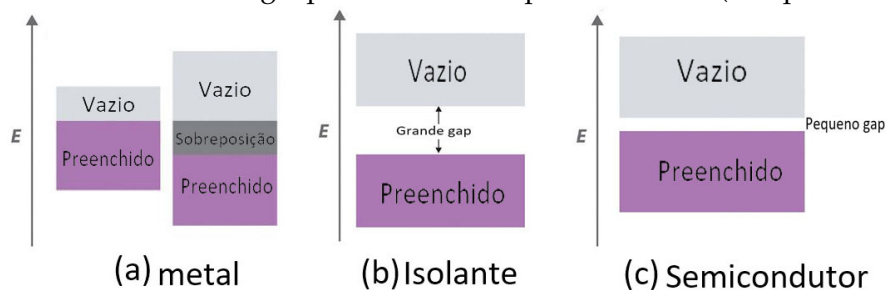
A equação de Schrödinger mostra que átomos confinados possuem níveis de energia quantizados, conforme foi abordado anteriormente para o caso do elétron confinado em um potencial periódico. Num cristal, existem aproximadamente 10^{23} átomos por centímetro cúbico. Como os átomos em um material estão próximos um do outro, as funções de onda dos elétrons se superpõem, principalmente as dos elétrons da camada de valência. O princípio de exclusão de Pauli afirma que eles não podem ocupar os mesmos níveis de energia e, juntamente com a ação de um potencial, é criada uma distribuição de níveis, conhecida como banda de energia. As regiões energeticamente proibidas são chamadas de *gaps* de energia [13].

2.4.1 Condutores, semicondutores e isolantes

As bandas de energia [13] são preenchidas de formas distintas para os diferentes tipos de materiais. O mapeamento das bandas de energia de ponto a ponto nas zonas de Brillouin gera as estruturas de banda.

Denomina-se por banda de condução, a banda de energia que é ocupada por elétrons que possuem energia maior que o nível de Fermi, promovendo a condutividade no material. Já a banda de valência é ocupada por elétrons que estão mais afastados do núcleo que os demais, sendo menos energética que a banda de condução.

Figura 2: Bandas de energia para diferentes tipo de material (Adaptado de [27])



- Metais

Para que o elétron possa conduzir num metal ele precisa possuir energia acima da energia de fermi, E_f . Nesse tipo de material existem estados livres adjacentes aos estados com a energia de fermi, já que existe superposição entre as bandas de valência e condução. Portanto, muito pouca energia é necessária para que se faça um elétron de um metal conduzir. A figura 2a ilustra as bandas de energia num metal.

- Isolantes

No caso dos isolantes existe um grande *gap* de energia entre as bandas de valência e condução, sendo necessária muita energia para que um elétron conduza. A figura 2b ilustra as bandas de energia um isolante.

- Semicondutores

Finalmente, para os semicondutores, categoria à qual os pontos quânticos pertencem, existe, como nos isolantes, um *gap* de energia entre as bandas de valência e condução. Porém, o *gap* para esses materiais é menor do que nos isolantes. Sendo assim, é possível que alguns elétrons da camada de valência saltem para a de condução se alguma energia for fornecida ao semicondutor. Essa energia pode ser, por exemplo, térmica ou eletromagnética. A figura 2c ilustra as bandas de energia de um semicondutor.

2.4.2 Semicondutores *bulk*

Quando as dimensões dos materiais são reduzidas à nanoescala, propriedades interessantes aparecem. O impacto desse confinamento depende de cada material e da propriedade a ser analisada. Para a análise das propriedades ópticas de nanocristais semicondutores, por exemplo, leva-se em consideração o raio de Bohr, pois essa dimensão descreve espacialmente os éxcitons, que são pares elétron-buraco e serão retomados em tópicos posteriores. O confinamento espacial deles é conhecido como confinamento quântico. Para entender esse confinamento, é necessária uma abordagem da estrutura e das transições eletrônicas de semicondutores *bulk*.

- Estrutura Eletrônica de Semicondutores *bulk*

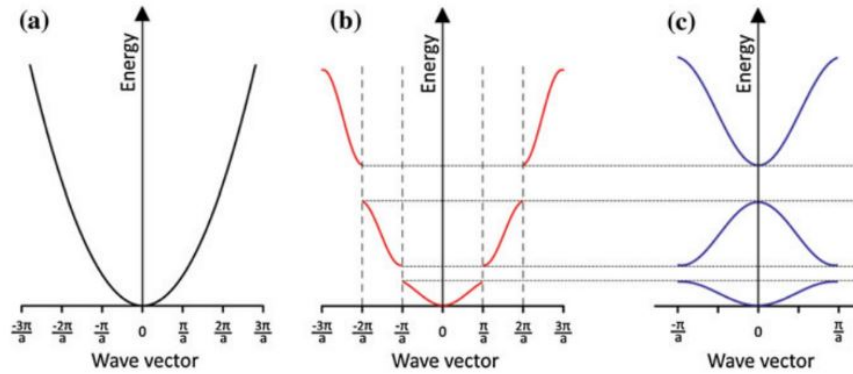
Diferentemente do que ocorre para o elétron livre, um potencial periódico atua sobre o elétron em um semicondutor. Devido à periodicidade da rede e ao teorema de Bloch, sabe-se que a autofunção que satisfaz a propriedade de translação da rede é a função de onda de Bloch, definida anteriormente pela equação (2.28).

Novamente, para um elétron livre, a relação de dispersão é dada pela equação (2.4), reescrita abaixo:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (2.49)$$

Essa relação pode ser observada na figura 3a

Figura 3: (a) Dispersão de energia para um elétron livre. (b) Dispersão de energia para um elétron perturbado por um potencial periódico. (c) Banda de energia para a primeira zona de Brillouin. [6]

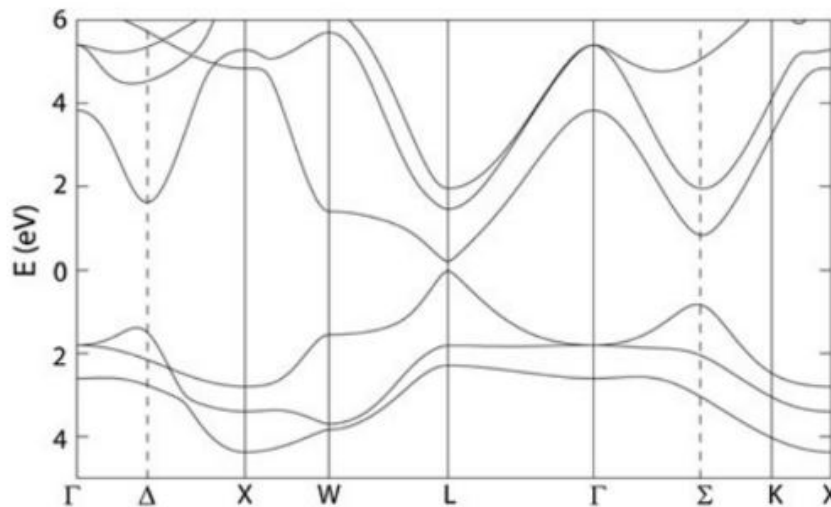


Ao perturbar a rede cristalina com um potencial periódico, ocorre uma mudança na relação de dispersão para o elétron. Essa perturbação provoca um *gap* de energia na região de degenerescência. Diz-se que um estado quântico é degenerado quando mais de uma função de onda está associada à mesma energia. Esse fenômeno pode ser observado na figura 3b. Os *gaps* de energia ocorrem para $\frac{n\pi}{a}$ porque os elétrons são refletidos, e essa reflexão é conhecida como reflexão de Bragg.

A dispersão de energia pode ser restringida para valores de K entre $-\frac{\pi}{a} < K < \frac{\pi}{a}$, devido à periodicidade em K proporcionada pelo teorema de Bloch. Esse intervalo é conhecido como primeira zona de Brillouin. Quando a dispersão de energia é representada nela, tem-se a representação em zona reduzida. Considerando mais de um elétron nesse intervalo, configura-se a banda de energia, mostrada na figura 3c.

Essa análise foi feita para o caso unidimensional. Para o caso tridimensional, a interpretação é mais complexa. Um exemplo desse último caso é mostrado na 4.

Figura 4: Estrutura de banda para o PbSe. [6]



É válido ressaltar que as estruturas de bandas podem ser calculadas por modelos teóricos, como o método k.p e o DFT (teoria do funcional de densidade).

O método utilizado para o cálculo da estrutura de banda dos pontos quânticos é o *one-band mass efective model* [28]. Como o grau de dificuldade desses métodos é elevado, uma abordagem mais profunda foge do escopo neste trabalho.

- Transições eletrônicas para semicondutores *bulk*

Um semicondutor ideal na temperatura de zero Kelvin comporta-se como um isolante (estado fundamental). Ou seja, a banda de valência está totalmente preenchida e a banda de condução, vazia.

Ao receber energia, alguns elétrons saltam para a banda de condução, fazendo com que buracos se desloquem para a banda de valência [25]. Buracos são orbitais vazios em uma banda de energia, que respondem a campos elétricos e magnéticos como se possuíssem carga $+e$ [13]. O par elétron-buraco é chamado de éxciton e sua interação se dá pelo potencial de Coulomb [25].

A energia mínima necessária para a formação do éxciton é dada por:

$$E = \hbar\omega = E_g + E_{e,kin} + E_{h,kin}. \quad (2.50)$$

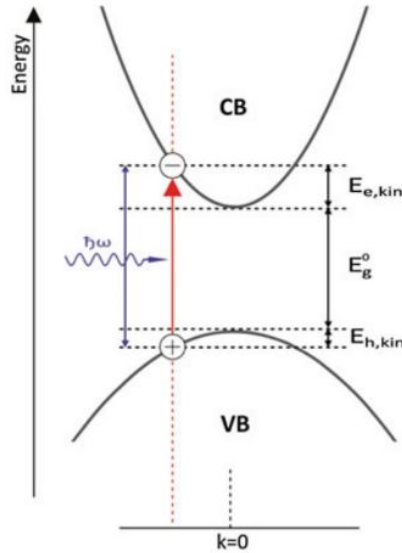
onde E_g representa o *gap* de energia fundamental do semicondutor, $E_{e,kin}$ representa a energia cinética do elétron e $E_{h,kin}$, a energia cinética do buraco.

Da conservação de momento, tem-se:

$$\hbar\mathbf{k}_{cb} = \hbar\mathbf{k}_{vb} + \hbar\mathbf{k}_{foton}. \quad (2.51)$$

O termo \mathbf{k}_{vb} é o vetor de onda para o elétron na banda de valência, \mathbf{k}_{cb} , o do buraco na banda de valência, e \mathbf{k}_{foton} , do fóton que tem momento desprezível. Assim a relação $\mathbf{k}_{cb} = \mathbf{k}_{vb}$ deve ser satisfeita, como observado na figura 5

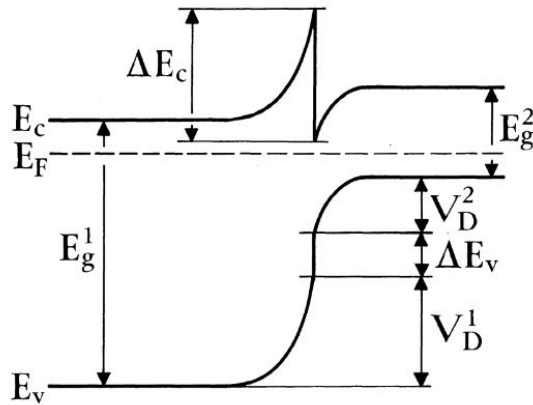
Figura 5: Esquema de absorção de energia pelo elétron. Ao absorver o fóton, o elétron salta para a banda de condução. [6]



2.5 Heterojunções

Os pontos quânticos são formados por dois materiais semicondutores diferentes. A junção desses materiais constitui uma heteroestrutura, assim, é necessário entender como as estruturas de banda desses materiais se comportam na interface [28].

Figura 6: Diagrama de energia de banda para uma heterojunção. [9]

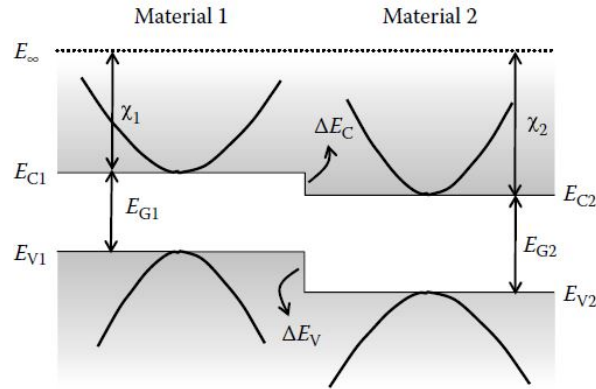


A figura 6 mostra dois tipos diferentes de semicondutores, com lacunas de energia E_{g1} e E_{g2} . E_c e E_v se referem à borda da banda de condução e de valência, respectivamente. A energia de Fermi é denotada por E_f . V_{d1} e V_{d2} medem os dobramentos de bandas para os dois lados da heterojunção.

A diferença de energia $E_{g1} - E_{g2}$ está associada a descontinuidades tanto na banda de valência quanto na banda de condução. Essas descontinuidades determinam as propri-

idades ópticas e de transporte para uma heterojunção e podem ser visualizadas melhor na figura abaixo:

Figura 7: Estrutura de banda para diferentes materiais [9]



Em 1962, R.R. Anderson publicou um artigo de referência sobre heterojunção baseado no modelo de Schottky para certos tipos de diodo [9]. De acordo com o modelo de Anderson, as descontinuidades são obtidas por:

$$\Delta E_C = |\chi_1 - \chi_2|. \quad (2.52)$$

$$\Delta E_V = |(E_{g1} + \chi_1) - (E_{g2} + \chi_2)|. \quad (2.53)$$

em que χ representa a afinidade eletrônica, que está relacionada com a energia necessária para retirar um elétron da banda de condução do material.

É relevante salientar que o modelo de Anderson só é válido para casos em que o desnível da rede é pequeno.

Elétrons e buracos podem estar confinados em um mesmo material ou em materiais diferentes, o que proporciona diferentes tipos de confinamento [28].

3 Desenvolvimento

3.1 Confinamento quântico e densidade de estados

O confinamento quântico é um dos fenômenos mais estudados em nanotecnologia e é causado pelo confinamento espacial dos portadores de carga em uma ou mais direções por barreiras de potencial (Miller, et al. 1984). O confinamento resulta na mudança de parâmetros referentes à estrutura eletrônica de um material. O tamanho de uma partícula interfere diretamente na sua estrutura de banda e causa mudança nas propriedades do material, como será visto adiante. (Takagahara and Takeda 1992a Wise 2000 Zhao et al. 2004).

Efeitos quânticos começam a se tornar relevantes quando a dimensão dos pontos quânticos se aproxima do raio de Bohr do éxciton do material na forma *bulk* (a_B). O

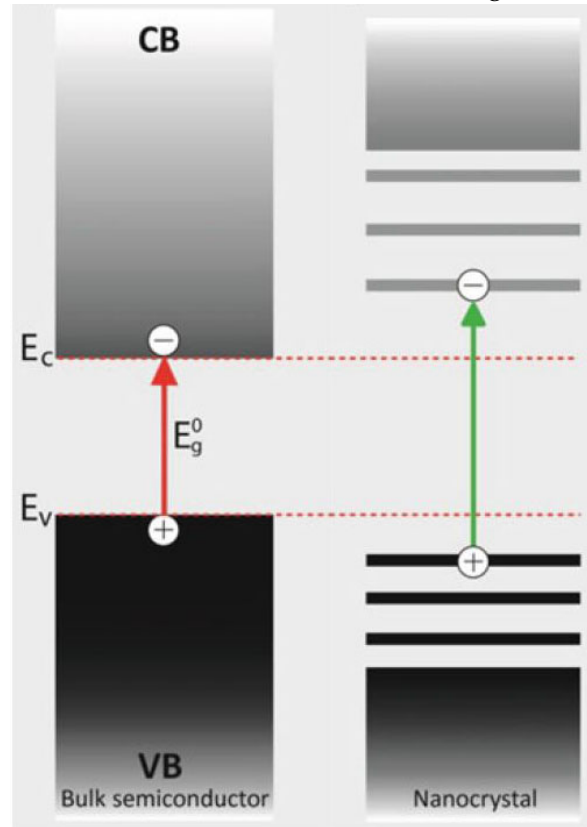
tamanho do raio de Bohr do éxciton do material *bulk* pode ser definido [29] como:

$$a_B = \epsilon \frac{m}{m^*} a_0, \quad (3.1)$$

onde ϵ é a constante dielétrica do material, m^* é a massa efetiva da partícula, m é a massa do elétron e a_0 é o raio de Bohr do átomo de hidrogênio.

O confinamento quântico nos leva a um efeito extremamente relevante para aplicações: o colapso das bandas de energia contínuas para bandas de energia que seguem um padrão discreto e bem definido, semelhante a um átomo, ilustrado na figura 8. Para que se entenda o porquê desse efeito de confinamento, vamos analisar o conceito de densidade de estados para os materiais.

Figura 8: Efeito de confinamento na banda de energia (Adaptado de [28])



3.2 Densidade de estado

O conceito de densidade de estados ($\rho(E)$) consiste no número de estados por volume no espaço k . A densidade de estados aparece em diversas áreas da Física, como, por exemplo, na termodinâmica e na óptica, na dedução da Lei de Planck para calcular densidade de estados de fótons. Em física estatística, para calcular densidades de energia nos sistemas físicos, e na mecânica quântica para calcular as probabilidades de transição envolvendo estados em um contínuo de energia, por exemplo [30].

Essa densidade de estados é dada por:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE}, \quad (3.2)$$

em que N é o número total de estados por espaço e E é a energia do estado.

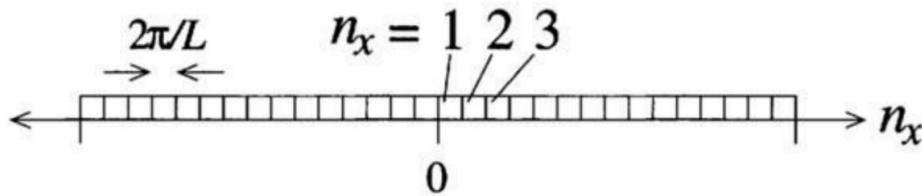
A densidade de estado pode ser analisada para os casos de três, duas, uma e zero dimensões livres, como podemos ver na tabela presente na figura 9:

Figura 9: Classificação de estruturas confinadas

Estrutura	Confinamento Quântico	Numero de dimensões Livre
Bulk	0	3
Poço Quântico	1	2
Fio Quântico	2	1
Ponto Quântico	3	0

Nesse tópico do trabalho será analisada a densidade de estados para os pontos quânticos, que consiste no caso de zero dimensões livres (0D). Porém, para que fique mais claro o argumento utilizado para obtenção da expressão matemática que rege a densidade de estados no caso 0D, é conveniente que se entenda como se obtém a densidade de estado para qualquer dimensão livre. Por exemplo, utilizaremos o caso mais simples, que consiste em apenas uma dimensão livre (1D), nos chamados fios quânticos.

Figura 10: Fio quântico inserido no espaço recíproco k [31]



O número de estados N é igual ao comprimento do fio ($2k$), dividido pelo comprimento ocupado por um estado ($\frac{2\pi}{L}$) e dividido pelo comprimento no espaço real. Tem-se [31] então

$$N = 2k \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{L}} \cdot \frac{1}{L} \cdot 2, \quad (3.3)$$

onde o fator 2 surge devido à degeneração do spin.

Logo, N e sua derivada:

$$N^{1D} = \frac{4k}{2\pi}. \quad (3.4)$$

$$\frac{dN^{1D}}{dk} = \frac{2}{\pi}. \quad (3.5)$$

Portanto, definindo a densidade de estados utilizando a regra da cadeia

$$\rho^{1D}(E) = \frac{dN^{1D}}{dE} = \frac{dN^{1D}}{dk} \frac{dk}{dE}. \quad (3.6)$$

É possível calcular o termo $\frac{dk}{dE}$ utilizando a energia do elétron livre dada na equação [31]

$$\frac{dk}{dE} = \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{E^{-\frac{1}{2}}}{2}. \quad (3.7)$$

Da equação (3.4) e (3.7), substitui-se em (3.6)

$$\rho^{1D}(E) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{E^{-\frac{1}{2}}}{2} \quad (3.8)$$

$$\rho^{1D}(E) = \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi E^{-\frac{1}{2}}}, \quad (3.9)$$

sendo esta, a densidade de estado para 1D.

De forma análoga, obtém-se os valores das densidades de estado para todas as dimensões. A tabela expressa na figura mostra os resultados:

Figura 11: Tabela das densidades de estado para as três dimensões. Extraído de [31]

Dimensionality	$\rho(E)$
3D	$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$
2D	$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^1 E^0$
1D	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}}$

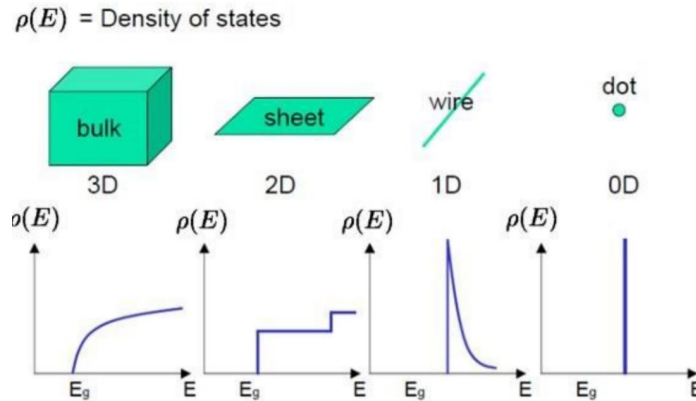
No entanto a situação para os pontos quânticos é diferente. Como o elétron no ponto quântico está confinado nas 3 dimensões, não há espaço k para ser preenchido e todos os estados disponíveis existem apenas em energias discretas. Portanto, pode-se descrever a densidade de estados com o **delta de Dirac**.

$$\rho(E)_{0D} = 2\delta(E - E_c), \quad (3.10)$$

onde δ representa o delta de Dirac e E_c é a energia de confinamento do elétron.

A figura apresenta gráficos indicadores de densidade de estado para todas as dimensões.

Figura 12: Gráficos da densidade de estado em todas as dimensões [33]



Observando os resultados de densidade de estados para os pontos quânticos, comprova-se que de fato existem apenas alguns níveis de energia bem definidos e discretos nos quais o elétron pode ocupar um estado. O ponto quântico pode, por isso, ser chamado de átomo artificial.

3.3 Equação de Brus

Como visto anteriormente, no material *bulk* a estrutura eletrônica dos materiais é constituída por bandas de energia e, quando as dimensões do material são reduzidas, haverá uma alteração na estrutura eletrônica do material devido aos efeitos de confinamento. Seria interessante quantificar a relação entre as mudanças na estrutura eletrônica de um ponto quântico com o seu tamanho. Uma equação desse tipo seria muito importante para caracterização de QD's dado que é possível estimar o tamanho de uma partícula a partir da medição de alguma de suas características eletrônicas, como espectro de emissão. Com esse objetivo, L.E. Brus, um premiado cientista americano, desenvolveu uma teoria que nos fornecesse tal fórmula.

Como vimos anteriormente, quando um elétron é excitado da banda de valência para a banda de condução, ele deixa para trás uma região positiva chamada de buraco. A ligação resultante desse par elétron-buraco é o éxciton e pode ser aproximada por um modelo de partícula na caixa da mecânica quântica. Para explicar o comportamento do éxciton, o modelo de Brus será deduzido. A seguinte dedução do teorema de Brus foi baseada na dedução feita por Kippeny et al (2002).

O modelo de Brus faz as seguintes aproximações:

- 1 - Considera-se um nanocristal esférico e de raio R .
- 2 - As cargas e espaços ocupados que não são do éxciton são desconsiderados.
- 3 - A energia potencial fora do nanocristal é infinita, ou seja, o éxciton está sempre dentro da região delimitada pelo raio do nanocristal.

Explora-se primeiramente o hamiltoniano de apenas uma partícula carregada (e não um éxciton) num nanocristal:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_c} \nabla_c^2 + V^* \quad (3.11)$$

$$V^* = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \infty, & r > R \end{cases}, \quad (3.12)$$

onde m_c é a massa efetiva da carga e r é a distância da carga em relação ao centro do ponto quântico.

A solução da equação de Schrodinger para esse caso pode ser obtida como no caso da partícula na caixa. Os autovalores e autovetores modificados para coordenadas esféricas são:

$$\begin{aligned} \Psi_n(r) &= \frac{1}{r\sqrt{2\pi R}} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \\ E_n &= \frac{\hbar^2 n^2}{8m_c R^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Percebe-se que conforme se aumenta o raio do nanocristal, as energias de absorção decrescem. Porém, a criação do éxciton envolve um par elétron-buraco. Para esse caso, o Hamiltoniano fica:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_e} \nabla_e^2 - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_h} \nabla_h^2 + V^*(S_e, S_h), \quad (3.14)$$

onde S_e e S_h são as posições do elétron e do buraco, respectivamente. m_e é a massa efetiva do elétron e m_h a massa efetiva do buraco.

A parte potencial da equação acima pode ser dividida em duas partes: a primeira parte, para $r < R$, é a atração coulombiana entre o elétron e o buraco, da seguinte maneira:

$$V_{Coul}^*(S_e, S_h) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_b\epsilon_0|S_e - S_h|}, \quad (3.15)$$

onde ϵ_b é a constante dielétrica para o material *bulk* e ϵ_0 é a permissividade no vácuo.

O segundo termo importante desse potencial é devido ao efeito de polarização. Isso acontece devido à polarização causada no cristal por uma carga. Esse efeito afeta a energia da segunda carga. O termo de polarização é dado por:

$$V_{pol}^*(S_e, S_h) = \frac{e^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{S_e^{2k} + S_h^{2k}}{R^{2k+1}}, \quad (3.16)$$

onde α é dado por:

$$\alpha_k = \frac{(\epsilon - 1)(k + 1)}{4\pi\epsilon_b\epsilon_0(\epsilon k + k + 1)}; \epsilon = \frac{\epsilon_b}{\epsilon_{out}}, \quad (3.17)$$

onde ϵ_{out} é a constante dielétrica do meio que cerca o ponto quântico.

Combinando as equações (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), o hamiltoniano total para o sistema elétron-buraco no nanocristal é:

$$\mathcal{H} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_e} \nabla_e^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m_h} \nabla_h^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_b\epsilon_0|S_e - S_h|} + \frac{e^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{S_e^{2k} + S_h^{2k}}{R^{2k+1}}. \quad (3.18)$$

É claro perceber que conforme R tende ao infinito, o termo de polarização tende a zero, e a equação acima se torna o hamiltoniano hidrogenoide da forma *bulk*.

Para que se obtenham as energias entre o elétron e o buraco no éxciton, é necessário determinar a função de onda para esse sistema considerando o hamiltoniano acima. Essa função de onda pode ser dada como o produto das funções de menor energia das cargas individuais consideradas nessa dedução. Utilizando uma aproximação de primeira ordem com uma função de onda não correlacionada para esse sistema, temos que:

$$\phi_{ex}(S_e, S_h) = \Psi_1(S_e)\Psi_1(S_h). \quad (3.19)$$

Aplicando o hamiltoniano da equação (3.18) na função de onda acima e resolvendo a equação de Schrodinger resultante, é possível mostrar que os autovalores que representam a energia do éxciton são da forma:

$$E_{ex} = \frac{h^2}{8R^2} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h} \right) - \frac{1.8e^2}{4\pi\epsilon_b\epsilon_0 R} + \frac{e^2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{S}{R} \right)^{2k}. \quad (3.20)$$

Essa fórmula é conhecida como Equação de Brus. O primeiro termo da parte direita da equação representa a energia cinética e é bem relevante para pequenos valores de R . O segundo termo se refere à atração coulombiana entre as partículas que compõem o éxciton, e o terceiro termo é devido aos efeitos de polarização.

Alguns autores [32] [33] não consideram o terceiro termo, já que quando o ponto quântico começa a ficar muito pequeno essa equação começa a desviar da realidade por conta de ser levado também em consideração a forma do nanocristal, os efeitos da estrutura cristalina nas bandas de valência e interação quântica entre o elétron e o buraco. Porém esses tópicos são de mecânica quântica avançada e fogem do escopo deste trabalho¹.

A equação (3.20) descreve importantíssimas consequências do efeito de confinamento. Primeiramente, observa-se que o *gap* de energia entre as bandas de valência e condução aumenta num fator R^{-2} conforme o tamanho do nanocristal diminui se os dois últimos termos da equação forem desconsiderados. Além disso, em um nanocristal as bandas contínuas de energia perdem a sua característica de continuidade e se tornam níveis discretos de energia com diferentes números quânticos. Os valores de *gap* de energia entre as bandas são dados pela soma da energia do *gap* na forma *bulk* mais a contribuição dada pela equação (3.20). Esses são os resultados centrais deste trabalho e a partir dele serão estudadas algumas propriedades ópticas.

¹E do domínio de Mecânica Quântica dos autores.

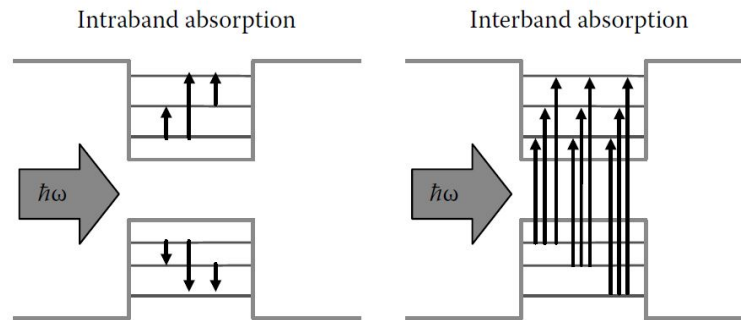
3.4 Propriedades Ópticas

A interação eletromagnética de radiação com a matéria condensada é uma das áreas mais estudadas na física do estado sólido. Sabe-se que a radiação eletromagnética é composta de pequenos pacotes de energia, os fótons [28].

Devido ao caráter discreto dos níveis de energia dos elétrons e buracos do nosso sistema, a absorção do fóton pode ocorrer através de diferentes mecanismos dependendo da faixa de energia do fóton incidente. De modo geral a transição eletrônica causada pelos fótons absorvidos pode ser dividida em transição interbanda e transição intrabanda [28].

A transição intrabanda ocorre somente entre os estados presentes dentro da banda de valência ou de condução. Neste caso, a energia incidente dos fótons é muito baixa, onde os comprimentos de onda são grandes (espectro próximo ao infravermelho). Já no caso das transições interbandas, as transições ocorrem entre a banda de condução e a banda de valência, seus valores são consideravelmente maiores que os da transição intrabanda e são somente possíveis quando a energia do fóton incidente é maior que a energia do *gap* de energia do material [28]. Estas duas formas de transição estão melhores representadas na figura abaixo.

Figura 13: Diferentes tipos de absorção de fóton para uma fonte de energia $E = \hbar\omega$, a esquerda ocorre interação intrabanda e a direita interação interbanda [28].



Nos materiais semicondutores, quando o elétron volta a seu estado original ele pode emitir a energia do éxciton na forma de radiação eletromagnética, efeito conhecido como fluorescência. A criação do éxciton em um ponto quântico tem um raio de éxciton de Bohr consideravelmente menor que o tamanho do ponto quântico em si, como já fora visto anteriormente, caracterizando um confinamento quântico. [34] [28]. As propriedades ópticas dos pontos quânticos ocorrem devido ao efeito de confinamento e a equação de Brus apresenta um modelo quantitativo do efeito de confinamento em partículas semicondutoras. A relação abaixo é obtida através da equação de Brus relaciona a energia de transição e com o tamanho do ponto quântico:

$$\Delta E(R) = E_g + \frac{h^2}{8R^2} \left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right) - \frac{1.8e^2}{4\pi\epsilon_b\epsilon_0 R}, \quad (3.21)$$

onde $\Delta E(R)$ é a energia de transição e E_g , o *gap* da banda do material *bulk*

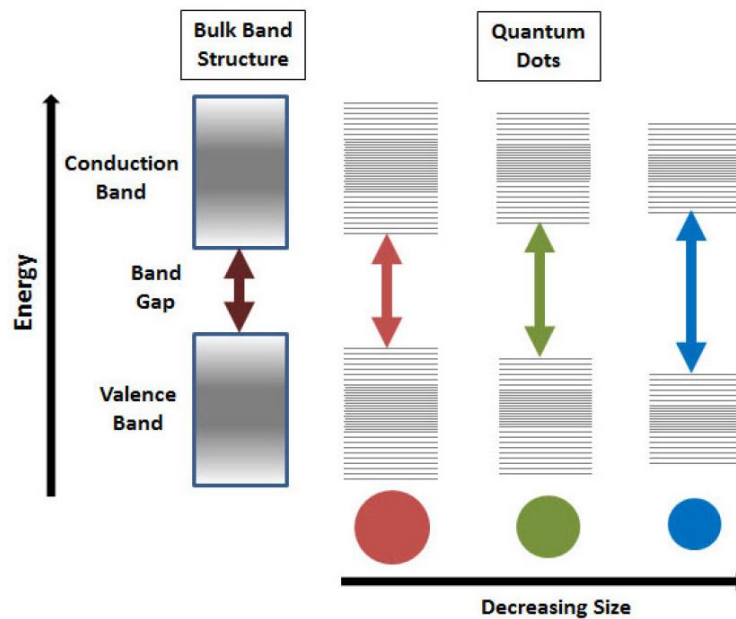
A equação acima é um modelo relativamente simples com diversas limitações, mas apesar disso, permite analisar a magnitude de energia do confinamento [?] [28]. Deste modo a energia de transição também pode ser escrita como:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3.22)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo ($3 \cdot 10^8 m/s$) e λ é o comprimento de onda.

Assim, é possível relacionar o tamanho do ponto quântico com o comprimento de onda emitido quando ele for excitado. Observa-se das equações (3.21) e (3.22) acima que o *gap* de energia fica maior conforme se diminui o tamanho da partícula. Isso justifica o comprimento de onda azul, que é mais energético, ser emitido por partículas de menor diâmetro. Partículas de maior diâmetro exibirão cores no espectro visível associadas a maiores comprimentos de onda, que são menos energéticos. O efeito do tamanho do ponto sobre o comprimento de onda emitido pode ser melhor observado na figura abaixo.

Figura 14: Estrutura eletrônica variando de acordo com o tamanho do ponto quântico [34].



4 Aplicação

4.1 Síntese de pontos quânticos

A síntese de pontos quânticos pode ser realizada de diversas maneiras, dependendo da aplicação final e do próprio material. Neste capítulo serão apontados alguns dos métodos mais relevantes.

4.1.1 Síntese de Pontos Quânticos Feitos de Carbono (CQDs)

Os CQDs foram descobertos em 2004, e tem chamado atenção devido à sua ótima biocompatibilidade e propriedades de emissão de luz. Podem ser utilizados para produção de LEDs e bioimagens [36].

Antes de iniciar a síntese de CQDs, é necessário saber que normalmente os procedimentos possuem três dificuldades [37]: junção de carboníferos durante a carbonização, controle do tamanho e uniformização dos CQDs e propriedades do meio de reação para a aplicação desejada. A junção de carboníferos pode ser evitada com tratamento químico e os outros dois problemas podem ser resolvidos tomando cuidado no preparo do meio de reação e no pós-tratamento – que não será estudado neste trabalho.

A síntese de CQDs pode ser feita por cinco principais métodos [37]. O primeiro, por separação química, consiste, basicamente, em uma sequência de tratamentos químicos com ácidos fortes. Suas vantagens são o preço acessível e a grande variabilidade de ácidos possíveis, enquanto que as desvantagens são principalmente a necessidade de várias etapas e o pouco controle do tamanho dos CQDs.

Um segundo processo é a síntese por carbonização eletroquímica. Nesse processo, lâminas de platina (Pt) podem ser usadas como eletrodos principal e auxiliares, enquanto um eletrodo saturado de calomelano (cloreto de mercúrio – Hg_2Cl_2) pode ser o eletrodo de referência. Os eletrodos são embebidos em uma solução que contém materiais de carbono *bulk*. Nesse processo o tamanho dos CQDs é controlado pela diferença de potencial aplicada, contudo há poucos materiais de carbono *bulk* disponíveis.

O outro processo possível é a separação à laser, que consiste em um alvo a base de carbono, suspenso em um solvente orgânico, vapor d'água e gás argônio (Ar), que é bombeado por uma irradiação a laser para que sejam formados os pontos quânticos. Nesse processo é fácil controlar as características do meio de reação, escolhendo o solvente orgânico correto. Contudo, o controle do tamanho dos pontos quânticos é mínimo.

Além dos processos já citados, há o procedimento de fabricação de CQDs a partir de irradiação de microondas. Nesse processo, a sacarose ($C_{12}H_{22}O_{11}$) é usada como fonte de carbonos e o dietilenoglicol como meio de reação. Apesar de ser um processo rápido (após apenas um minuto de irradiação já surgem CQDs que emitem ondas no comprimento da cor verde), há pouco controle do tamanho dos pontos quânticos.

O último processo é o de síntese por tratamento hidrotérmico. Nele uma solução orgânica, fornecedora de carbonos, como a glicose ($C_6H_{12}O_6$), o ácido cítrico ($C_6H_8O_7$), a quitosana, proteínas, ou até mesmo suco de banana, é colocada em um reator de alta temperatura, onde são formados os CQDs. Mesmo sendo um processo economicamente viável, possui baixo controle do tamanho dos CQDs criados.

4.1.2 Síntese dos *Core-Shell Quantum Dots* em Poros de Estruturas Metal-Orgânicas

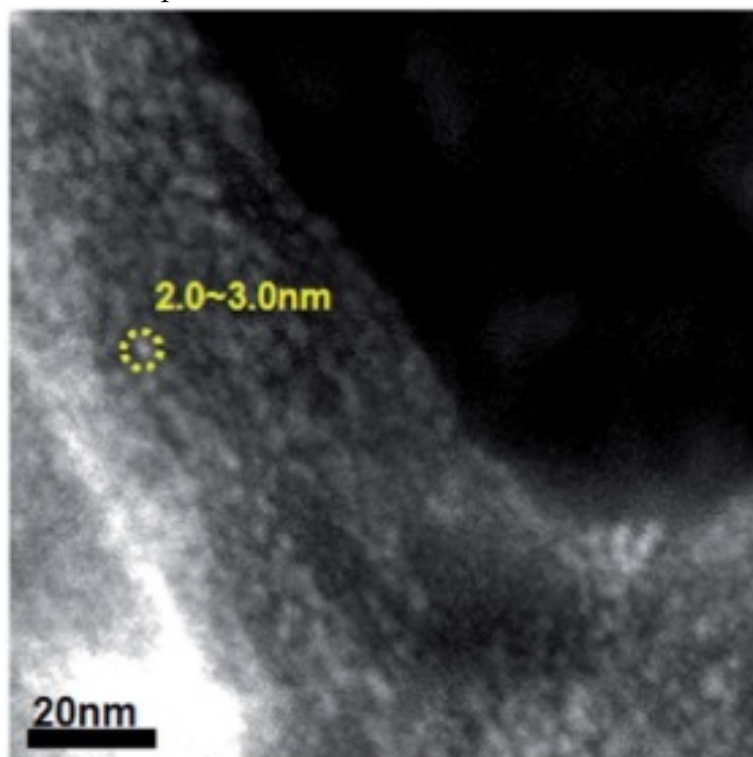
Os pontos quânticos core-shell não são nada mais do que pontos quânticos revestidos por um outro material semicondutor que forma uma casca. Eles possuem inúmeras aplicações em diversas áreas, principalmente na biomedicina e em áreas com intensa

utilização de propriedades fotovoltaicas. Seu estudo e aplicações obtiveram certa atenção na última década devido à sua relativa simplicidade de síntese e por possuírem um processo de fabricação barato [KLAUS]. Ademais, suas propriedades físicas podem ser facilmente ajustadas, variando o tamanho e a forma dos pontos quânticos.

Um dos métodos de produção desses nanocristais semicondutores é por síntese confinada de CdSe em poros de estruturas metal-orgânicas (MOF) [38]. Tal método é ideal para uma síntese com grande densidade de pontos quânticos. Além disso, fazendo a escolha correta dos íons metálicos usados em junção com a liga orgânica mais adequada, é possível obter uma quantidade de poros razoável, com o tamanho e forma desejados. Além disso, as propriedades químicas dos poros podem ser ajustadas a fim de facilitar a nucleação dos pontos quânticos.

Após o procedimento ser concluído, um escaneamento com o microscópio eletrônico de varredura (MEV) pode confirmar a síntese, como mostrado no exemplo da figura 15.

Figura 15: Microscopia no MEV de QDs de CdSe sintetizados em MOF [38]



4.1.3 Método de Caracterização

A seguir será apresentado três métodos não destrutivos de caracterização de pontos quânticos.

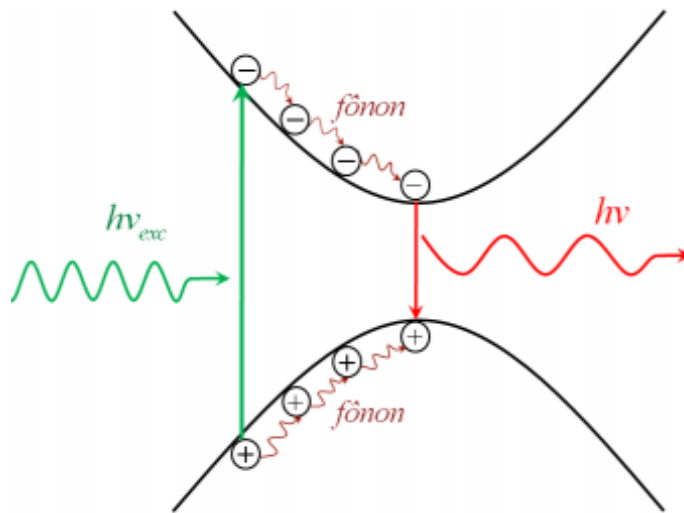
- Espectroscopia de Fotoluminescência

A espectroscopia de fotoluminescência [39] (PL) é uma técnica que utiliza a onda eletromagnética no espectro visível emitida por um material para sua caracterização, ou seja, para que se obtenham informações sobre determinadas propriedades de materiais.

A radiação eletromagnética é incidida em geral por lasers sobre o material, o que excita os elétrons e os promove para a banda de condução, como visto anteriormente. Também foi visto que para que haja excitação é necessário que a energia do fóton incidente seja igual ou maior que a energia de *gap*, o que faz com que o material absorva esse fóton. Quando os elétrons voltam ao seu estado normal pode haver uma emissão de radiação eletromagnética, o que é chamado de processo radiativo. Somente o processo radiativo será computado no espectro de emissão, pois as recombinações não radiativas serão dissipadas dentro da superfície do material [39].

A energia emitida através de um fóton numa transição direta é dada por $h\nu$, como ilustrado na figura 16.

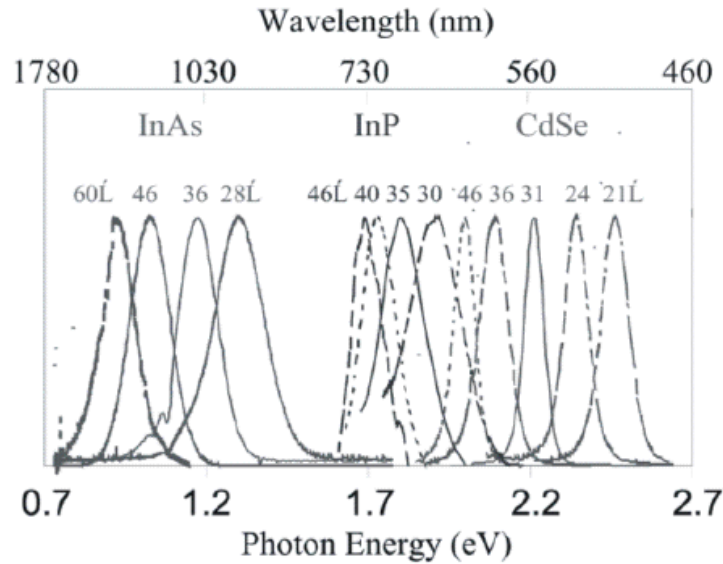
Figura 16: Representação a absorção do fóton para a criação do éxciton. [40]



Com a espectroscopia de fotoluminescência, algumas variáveis podem ser tiradas de uma espectroscopia de PL dos pontos quânticos coloidais, tais como: o comprimento de onda do máximo de emissão, a largura a meia altura do espectro e a intensidade de emissão. Esses espectros, após análise de dados, remetem a informação sobre os tamanhos dos pontos quânticos, suas distribuições de tamanhos e sua eficiência de emissão de luz, respectivamente.

A figura 17 mostra espectro de PL de pontos quânticos coloidais de três materiais e com tamanhos diferentes.

Figura 17: Microscopia no MEV de QDs de CdSe sintetizados em MOF [38]



Nota-se ao ver os espectros de PL que o tamanho dos pontos quânticos modifica comprimento máximo de emissão e a energia associada. Como foi visto teoricamente em propriedades ópticas.

- Absorção Óptica

A absorção óptica é uma análise que se dá pela quantidade de luz absorvida pelo material. A quantidade de luz incidente é diferente da transmitida, seguindo a lei de Lambert-Beer.

$$A = L\beta d = \log\left(\frac{I_0}{I}\right), \quad (4.1)$$

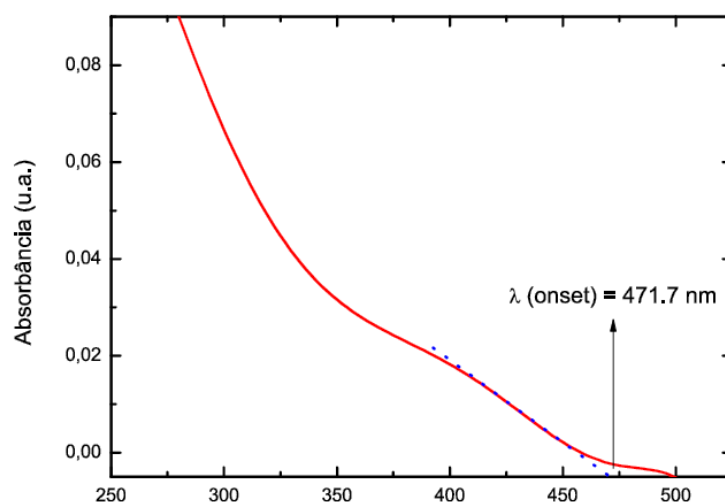
onde L é o tamanho óptico que a luz percorre, β é o coeficiente de absortividade e d é a concentração da amostra.

O principal motivo para que se analise os espectros de absorção é obter experimentalmente a energia de *gap* das nanoestruturas, a qual pode ser obtida traçando uma reta tangente à borda de absorção fundamental na região do limiar de absorção (onset absorption). O intercepto desta reta tangente com o eixo dos comprimentos de onda nos leva ao comprimento de onda do limiar de absorção (λ), chegando na equação:

$$E_{onset} = \frac{hc}{\lambda_{onset}} = E_{gap}. \quad (4.2)$$

Esse conceito é visto no espectro de absorção abaixo:

Figura 18: Obtenção do comprimento de onda do limiar de absorção de uma amostra [33].

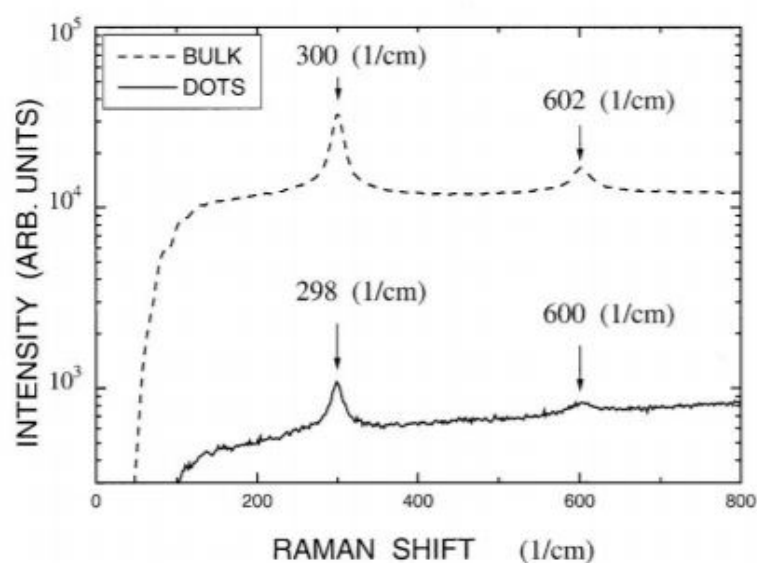


Outra análise que se obtém pela absorção óptica é o confinamento em alguma direção. O espectro da absorção é deslocado para o azul caso haja esse confinamento. Esse deslocamento dos espectros está relacionado ao tamanho dos pontos quânticos, de modo que quanto menor for o comprimento de onda menor será o tamanho os pontos quânticos [40].

- Espectroscopia Raman

A espectroscopia dispersão de polarização de Raman caracteriza os pontos quânticos sintetizados pelo método eletroquímico. O método de Raman possibilita a sondagem de estruturas eletrônicas confinadas de pontos quânticos [42].

Figura 19: Exemplo de espectroscopia Raman [42]



No exemplo da figura 19, todo o espectro está sendo excitado com um feixe de laser de 514 nm de Argônio que corresponde a uma energia de 2.4eV , enquanto a energia do *gap* de banda do CdS é aproximadamente 3eV . Essa proximidade de energias provoca uma ressonância no sistema que afeta a onda emitida pelo ponto quântico. Parte da energia inserida é refletida, parte é absorvida pelo sistema e parte sofre um espalhamento dentro do material [42].

A radiação, ao atingir a amostra, é espalhada e adquire uma nova energia. Esse efeito é chamado de espalhamento inelástico e é conhecido como efeito Raman. A partir da análise dessa energia é que se obtém informações sobre o material, tais como definição da orientação cristalográfica. Com o gráfico obtido pela análise Raman é possível analisar a estrutura dos materiais, e isso é útil no caso dos pontos quânticos para que se analisem os efeitos da mudança de tamanho nesse tipo de material [40].

4.1.4 Aplicações de pontos quânticos

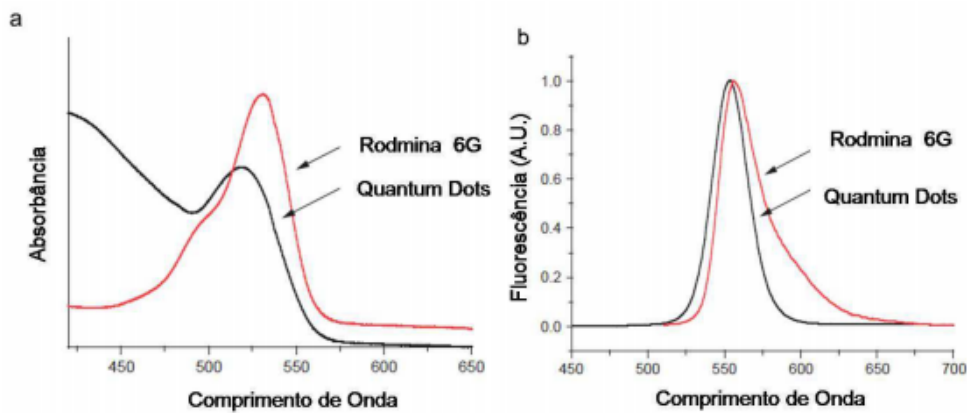
Os pontos quânticos possuem diversas aplicações em muitas áreas devido às suas propriedades. Algumas dessas áreas são: biomedicina, energia sustentável, eletrônica e óptica. Neste trabalho, apresentaremos de forma breve algumas dessas aplicações.

- Biomedicina

O fenômeno de fluorescência dos pontos quânticos pode ser utilizado na área de biomedicina como marcadores fluorescentes em moléculas e células biológicas, como proteínas e DNA, já que podem se ligar facilmente à essas moléculas. Os marcadores servem nesse sentido para observar o comportamento dessas moléculas dentro de uma amostra, através da irradiação de luz pelo ponto quântico [28]. Os marcadores fluorescentes de pontos quânticos apresentam muitas vantagens quando comparados com marcadores de corantes orgânicos, como por exemplo, são cerca de vinte vezes mais brilhantes e possuem mais fotoestabilidade, sendo cem vezes mais resistente a fotobranqueamento [43].

Um exemplo da eficiência dos pontos quânticos na área médica é analisado a seguir. Na figura 20a apresenta os espectros de absorção e em 20b de emissão das substâncias Rodoamina 6G e de um ponto quântico de CdSe. Observa-se que o espectro de emissão do QD é mais estreito que o da Rodoamina 6G e que seu perfil de absorção é mais amplo e contínuo, o que significa que o ponto quântico consegue ser melhor excitado em qualquer comprimento de onda inferior à aproximadamente 530nm e emite radiação eletromagnética de maneira mais precisa.

Figura 20: Espectro da Rodamina 6G, onde (a) é o espectro de absorção e (b) de emissão. [44]



- Televisões de ponto quântico

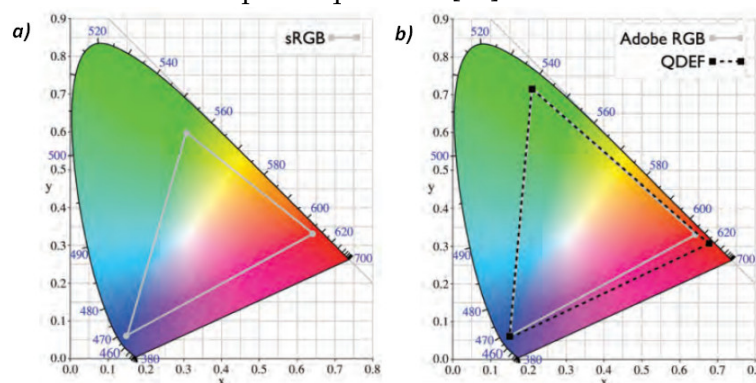
O que faz a televisão de ponto quântico ser tão atraente são as propriedades ópticas devido ao confinamento quântico. Como visto, ao fornecer energia num comprimento de onda na faixa do ultravioleta, os elétrons nos pontos quânticos são excitados, saltam de banda e quando retornam emitem um fóton. Esse fóton tem um comprimento de onda bem definido devido à discretização do elétron, e o comprimento de onda é determinado pelo tamanho do ponto quântico [28]. A característica de ter um comprimento de onda bem definido é uma das características mais importantes para gerar uma imagem de boa qualidade.

A televisão de ponto quântico é LCD (Liquid Crystal Display) e, sucintamente, pode-se dizer que a televisão é composta de duas partes principais que são uma luz de fundo, denominada backlight, e um display de cristal líquido, também conhecido como LCM (liquid-crystal module) [45]. O backlight é responsável por gerar uma luz branca que passará no LCM. O LCM é composto por milhões de pixels, sendo que um pixel é composto por subpixels de cores azul, vermelho e verde [45]. O pixel determina a tonalidade da cor que se deseja reproduzir através da combinação das três cores primárias, e quando a luz branca passa pelo pixel, ele reproduz a tonalidade e é possível ver, através do conjunto de todos os pixels, a imagem na televisão [45].

Os pontos quânticos compõem o backlight gerando luz branca pela combinação de três pontos quânticos de tamanhos diferentes e que emitem luz em comprimentos de onda na faixa do vermelho, azul e verde [46]. Para que os pontos quânticos emitam fótons é necessário que eles absorvam fótons de uma fonte de LED no comprimento de onda ultravioleta. A luz branca possui uma pureza muito maior comparada a televisões que possuem backlight de LED de materiais *bulk*, porque esta é formada através da combinação de LED azul com fósforo YAG (yttrium-aluminum-garnet), criando um conjunto de espectros que contém mais comprimentos de onda na faixa no azul e no amarelo, e bem pouco na faixa do vermelho e verde [45]. Como consequência, a luz de fundo de LED de material *bulk*, quando em contato com os pixels, não gera tons de cores como geraria se fosse uma luz essencialmente branca, como é criado pelos pontos quânticos.

Um comparativo pode ser feito entre a televisão de LED e de ponto quântico. Uma das formas de quantificar o espectro de cores que uma televisão consegue atingir é através do diagrama de cromaticidade, criado pela CIE (Comissão Internacional de Iluminação), no qual é apresentado um diagrama com todas as cores que podem ser detectadas pelo olho humano. Como mencionado, no LMC se utiliza o sistema RGB, que é uma combinação das cores vermelho, verde e azul para gerar as cores que aparecem na televisão [46]. Essas cores estão contidas dentro de um triângulo, e os vértices do triângulo são as cores RGB. A Figura 1 apresenta o triângulo correspondente à televisão de LED e a Figura 21, da televisão de ponto quântico [47]. Quanto maior o triângulo, mais cores podem ser reproduzidas pelo display. A televisão de ponto quântico apresenta um triângulo maior comparada a televisões de LED já presentes no mercado, pois os pontos quânticos liberam fótons com um espectro de largura bem pequena, entre 20e35nm, que corresponde a espectros próximos de cores saturadas, que ficam na borda do diagrama de cromaticidade [46].

Figura 21: a) Triângulo que representa a escala de cores em televisões de LED. b) Triângulo em linha contínua representa escala de cores dada por Adobe RGB e o triângulo pontilhado é a escala de cores da televisão de ponto quântico. [47]



Referências

- [1] de Figueiredo Oliveira, André Rezende. *Caracterização Óptica de Pontos Quânticos Semicondutores de CdS em Matrizes Poliméricas*.
- [2] Ekimov, Alexey I., and Alexei A. Onushchenko. *Quantum size effect in three-dimensional microscopic semiconductor crystals*. *Jetp Lett* 34.6 (1981): 345-349.
- [3] Brus, Louis E. *Electron-electron and electron-hole interactions in small semiconductor crystallites: The size dependence of the lowest excited electronic state*. *The Journal of chemical physics* 80.9 (1984): 4403-4409.
- [4] Murray, CBea, David J. Norris, and Mouni G. Bawendi. *Synthesis and characterization of nearly monodisperse CdE (E= sulfur, selenium, tellurium) semiconductor nanocrystallites*. *Journal of the American Chemical Society* 115.19 (1993): 8706-8715.

- [5] Zhu, Jun-Jie, et al. *Quantum dots for DNA biosensing*. Vol. 165. Springer, 2013.
- [6] Koole, Rolf, et al. *Size effects on semiconductor nanoparticles*. Nanoparticles. Springer Berlin Heidelberg, 2014. 13-51.
- [7] Band, Yehuda B., and Yshai Avishai. *Quantum mechanics with applications to nanotechnology and information science*. Academic Press, 2013.
- [8] Oliveira, Ivan S., and Vitor LB De Jesus. *Introdução à física do estado sólido*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [9] Margaritondo, Giorgio, ed. *Electronic structure of semiconductor heterojunctions*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] Eisberg, Robert Martin; Resnick, Robert - *Física Quântica*
- [11] C.W. Sherwin- *Introduction to quantum mechanics* - Holt, Rinehart & Winston of Canada Ltd (1959).
- [12] Ashcroft, Neil W., and N. David Mermin. *Física do estado sólido*. Cengage Learning, 2011.
- [13] Kittel, Charles. *Introdução à física do estado sólido*. Grupo Gen-LTC, 2006.
- [14] Thompson, D. *The reciprocal lattice as the Fourier transform of the direct lattice*. American Journal of Physics 64.3 (1996): 333-334.
- [15] Wang, Gwo-Ching, and Toh-Ming Lu. *RHEED Transmission Mode and Pole Figures: Thin Film and Nanostructure Texture Analysis*. Cap. 2. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] I. Prigogine, Stuart A. Rice. *Advances in Chemical Physics, Volume 57*. Wiley Interscience, 2007.
- [17] Dagotto, Elbio. *Nanoscale Phase Separation and Colossal Magnetoresistance: The Physics of Manganites and Related Compounds*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003
- [18] Rodrigues, Rafael de Lima. *Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 19, n 1, p.68-83, 1997
- [19] Eisberg, Robert Martin Resnick, and Cota Araiza Robert. *Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas*. 1994.
- [20] Atkins, Peter, and Loretta Jones. *Chemical principles: The quest for insight*. Macmillan, 2007.
- [21] Peter, Y. U., and Manuel Cardona. *Fundamentals of semiconductors: physics and materials properties*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [22] Dagotto, Elbio. *Nanoscale phase separation and colossal magnetoresistance: the physics of manganites and related compounds*. Vol. 136. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] de Lima Rodrigues, Rafael. *Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger*. Revista Brasileira de Ensino de Física 19.1, 1997.
- [24] Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. *Differential Equations With Boundary-Value Problems*. Thomson Brooks/Cole, 1996.

- [25] Silva, Jusciane da Costa e. *Confinamento Quântico em Hetero-estruturas Semicondutoras de Baixa Dimensionalidade*. Universidade Federal do Ceará, 2008.
- [26] H. Ibach and Hans Lüth, *Solid-State Physics: An Introduction to Principles of Materials Science*, Springer-Verlag, 2nd Ed., 1995
- [27] Averill, B. A., and P. Eldredge. *Principles of General Chemistry (v. 1.0)*. Creative Commons licensed (2012): 2991.
- [28] Sattler, Klaus D. *Handbook of Nanophysics: Nanoparticles and Quantum Dots*. CRC Press, 2016.
- [29] Yoffe, A. D. *Low-dimensional systems: quantum size effects and electronic properties of semiconductor microcrystallites (zero-dimensional systems) and some quasi-two-dimensional systems*. Advances in Physics, vol. 42, Issue 2, p.173-262, 1993
- [30] Dick, Rainer. *Advanced Quantum Mechanics: Materials and Photons*. Springer-Verlag New York, 2012
- [31] Harrison, Paul *Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures*. Wiley, 2005
- [32] Ephrem O. Chukwuocha, Michael C. Onyeaju, Taylor S. T. Harry. *Theoretical Studies on the Effect of Confinement on Quantum Dots Using the Brus Equation*. World Journal of Condensed Matter Physics, 2012, 2, 96-100.
- [33] Maronesi, Ray Nascimento. *Nova técnica para síntese de pontos quânticos coloidais de CdS em meio puramente aquoso*. Universidade Federal de Viçosa, 2016
- [34] Melville, Jonathan. *Optical Properties of Quantum Dots*. UC Berkeley College Of Chemistry, 2015
- [35] Jones, Aaron, and Nick Verlinden. *Optical Properties of Quantum Dots: An Undergraduate Physics Laboratory*. 2007.
- [36] Machado, Claudia Emanuele, et al. *Pontos Quânticos de Carbono: Síntese Química, Propriedades e Aplicações*. Revista Virtual de Química 7.4 (2015): 1306-1346.
- [37] Wang, Youfu, and Aiguo Hu. *Carbon quantum dots: synthesis, properties and applications*. Journal of Materials Chemistry C 2.34 (2014): 6921-6939.
- [38] Wakaoka, Takuo, et al. *Confined synthesis of CdSe quantum dots in the pores of metal-organic frameworks*. Journal of Materials Chemistry C 2.35 (2014): 7173-7175.
- [39] da Silva, Isaías Ferreira. *Medidas de Caracterização e Análise de Materiais: Espectroscopia De Fotoluminescência*. 2000.
- [40] Neto, Ernesto Soares de Freitas. *Estudo de Pontos Quânticos Semicondutores e Semimagnéticos*. Universidade Federal de Uberlândia, 2013.
- [41] Rodrigues, Ariano De Giovanni., José Cláudio Galzerani. *Espectroscopias de infravermelho, Raman e de fotoluminescência: potencialidades e complementaridades*. Rev. Bras. Ensino Fís. vol.34 no.4 São Paulo out. 2012.
- [42] A. Balandin, K. L. Wang, N. Kouklin, S. Bandyopadhyay. *Raman spectroscopy of electrochemically self-assembled CdS quantum dots*. Applied Physics Letter Volume76, Number 2, 2000.

-
- [43] Fontes, Adriana, and Beate Saegesser Santos, eds. *Quantum dots: applications in biology*. Springer New York, 2014.
 - [44] Raele, Renata Almeida. *AVALIAÇÃO DA CITOTOXICIDADE DE QUANTUM DOTS, IN VITRO, EM CÉLULAS RAW 264.7*. Universidade Federal de Pernambuco, 2013.
 - [45] Chen, Jian, Veeral Hardev, and Jeff Yurek. *Quantum Dot Displays: Giving LCDs a Competitive Edge Through Color*. Nanotech. L. & Bus. 11 (2014): 4.
 - [46] Talapin, Dmitri V., and Jonathan Steckel. *Quantum dot light-emitting devices*. Mrs Bulletin 38.09 (2013): 685-691.
 - [47] Han, Hau-Vei, et al. *Resonant-enhanced full-color emission of quantum-dot-based micro LED display technology*. Optics express 23.25 (2015): 32504-32515.