UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA

# Introduzione al ragionamento scientifico

## A.A. 2024/2025 [Lettere A-K]
## Lezione 5

Prof. Bernardino Sassoli de' Bianchi

# Giocatori e filosofi

- Lo studio matematico della probabilità nasce nel XVII secolo (1654) da uno scambio fra Blaise Pascal e il Cavalier de Méré, accanito giocatore d'azzardo: Qual è la probabilità di vincere in un gioco il cui scopo è ottenere almeno un 6 in 4 lanci di un unico dado?

- Il cavaliere riteneva che bastasse moltiplicare la probabilità di ottenere un 6 (1/6) per il numero di lanci (4) e che dunque questa probabilità fosse uguale a 4/6 = 2/3 = 66%

- Pascal (con il contributo di Fermat) gli fece osservare che in base a una più precisa analisi la probabilità di vincere è di poco superiore al 50%

- Per stabilirlo, bisogna considerare tutti i possibili esiti dei quattro lanci:
  - <1,1,1,1>, <1,1,1,2>, … ,<6,6,6,5>, <6,6,6,6>
  - ci sono 1296 disposizioni possibili
  - di queste 671 sono favorevoli e 625 sfavorevoli
  - dunque la probabilità è 671/1296 = 0.52 = 52% circa

# Le trappole dell’intuizione // 1

- Nella vita quotidiana tutti usiamo il concetto di probabilità in modo intuitivo
- Un giudizio intuitivo viene spesso smentito da un’analisi più accurata della situazione.
- In generale, in individui non sufficientemente addestrati a fare previsioni probabilistiche, l’intuizione conduce a risposte incoerenti
- Un noto esempio è quello dei “numeri ritardatari” nel gioco del lotto

# Le trappole dell’intuizione // 2

- “Il 90 non esce da un anno sulla ruota di Napoli, dunque c’è una buona probabilità che esca in una delle prossime estrazioni”
- L’intuizione che guida questo ragionamento è:
  - la probabilità che esca il 90 in una singola estrazione è 1/90
  - il 90 dovrebbe quindi  uscire in media una volta ogni 90 estrazioni;
  - dunque se non è uscito per un anno (circa 150 estrazioni) c’è una buona probabilità che esca in una delle prossime
- Ma se consideriamo che ciascuna estrazione è indipendente da quelle precedenti (l’urna non ha “memoria”), possiamo anche pensare che si svolgano contemporaneamente
- In questo caso non c’è una “storia precedente” e la probabilità che esca il 90 in ciascuna singola estrazione è sempre la stessa!

**Linda ha 31 anni, non è sposata, è estroversa e brillante. Ha studiato filosofia. Quando era studentessa era molto impegnata politicamente e partecipava a manifestazioni contro il razzismo. Quale delle due opzioni seguenti è la più probabile?**

**(A) Linda lavora in una libreria indipendente e vota a sinistra**
**(B) Linda lavora in una libreria indipendente**

**SLIDO**
**# 2935909**

https://app.sli.do/event/sqHpLwf9kE9f1P6D8oFp2f

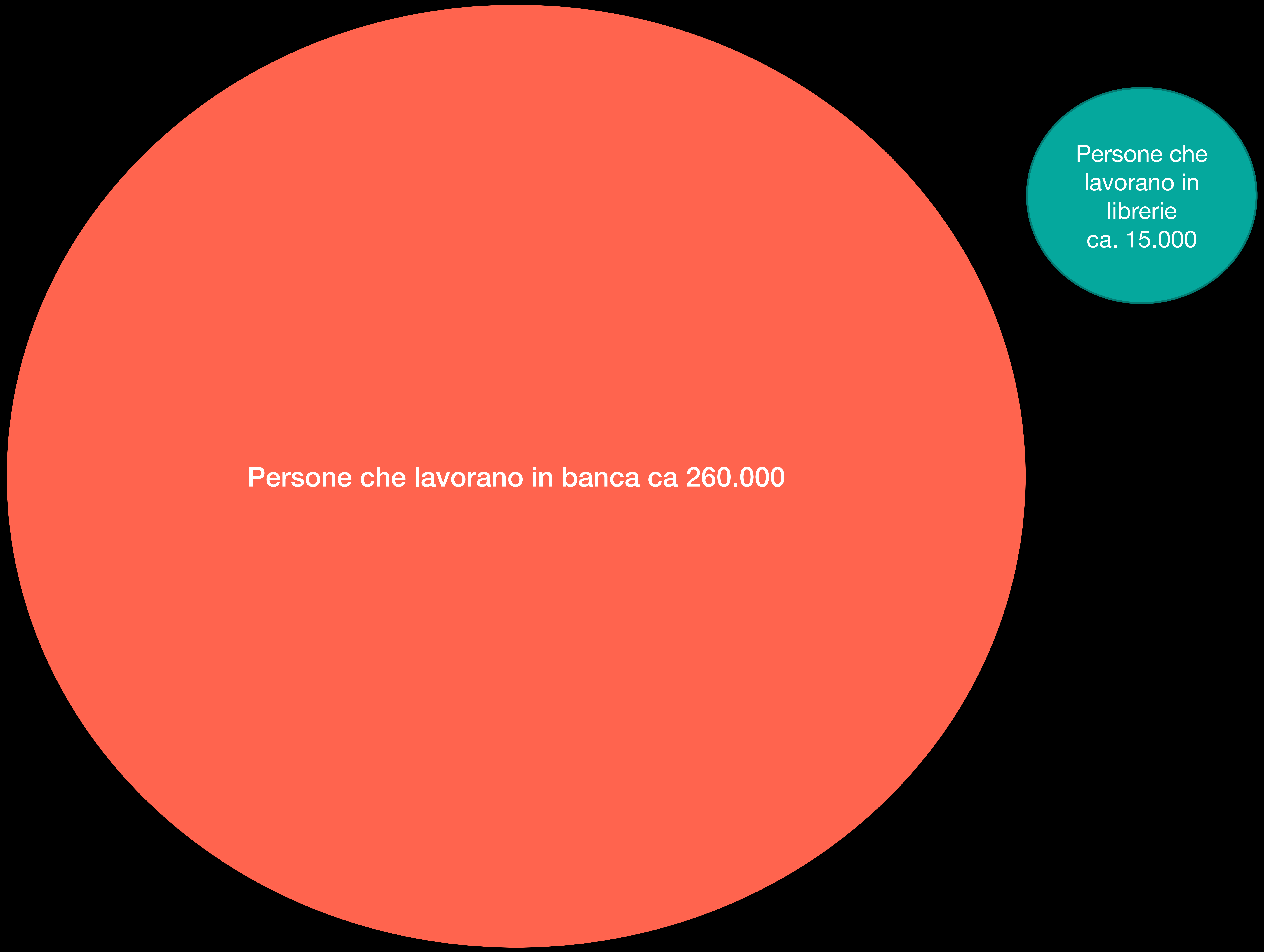

Persone che lavorano in librerie
Persone che lavorano in librerie e votano a sx

Linda ha 31 anni, non è sposata, è estroversa e brillante. Ha studiato filosofia. Quando era studentessa era molto impegnata politicamente e partecipava a manifestazioni contro il razzismo. Cos’è più probabile?

(A) Linda lavora in una libreria indipendente
(B) Linda lavora in banca
(C) Non ci sono informazioni sufficienti

**SLIDO**
**# 1618907**

https://app.sli.do/event/jMEQQGYzA2hfcLaJiMayJt


Persone che lavorano in banca ca 260.000
Persone che lavorano in librerie ca. 15.000

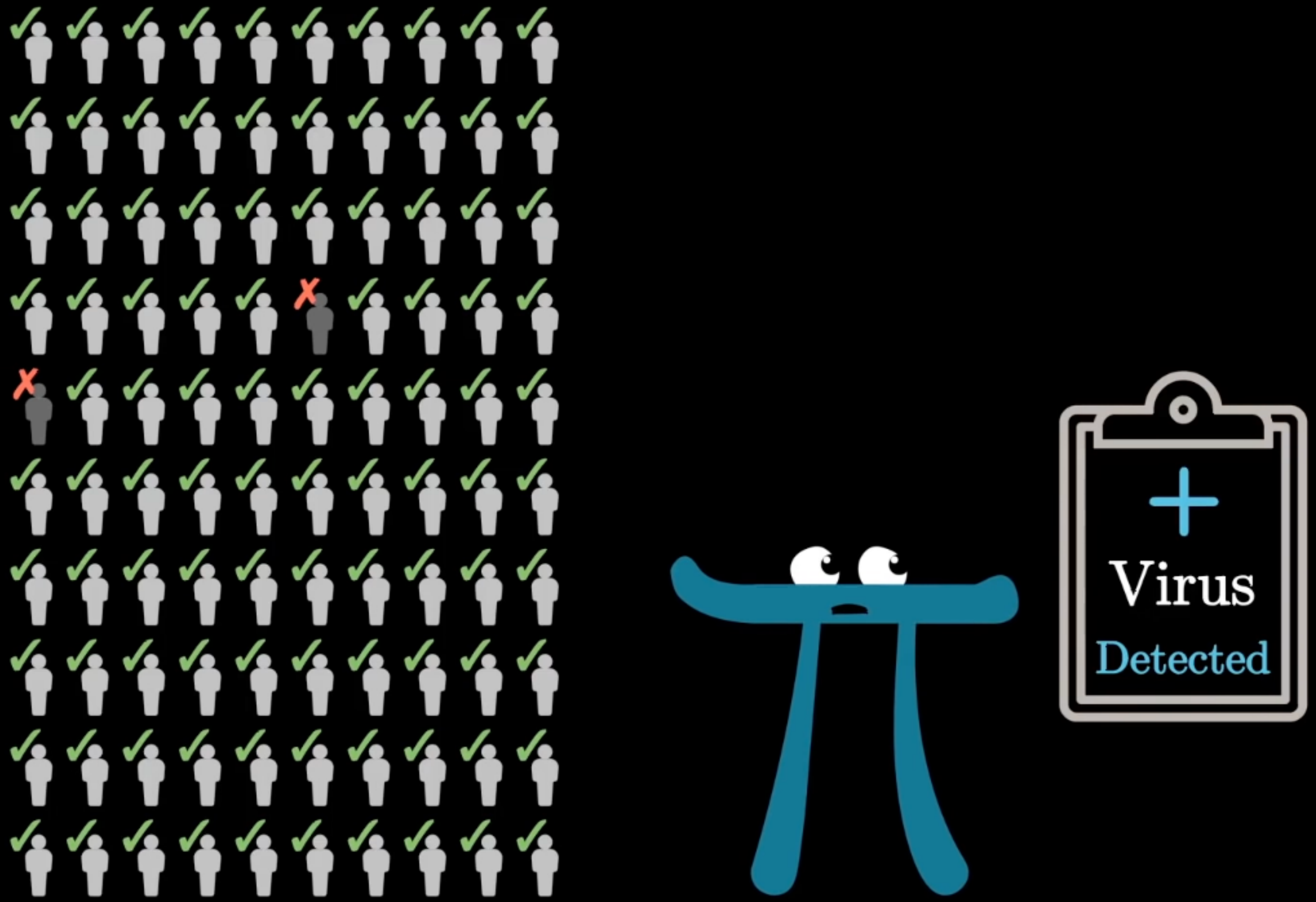
Gianni è risultato positivo al test per una malattia che colpisce l'1% della popolazione. Il test ha un’affidabilità del 99% (il 99% dei malati risultano positivi e il 1% dei sani risultano negativi). Qual è la probabilità che Gianni abbia la malattia?

**SLIDO**
**# 2724811**

https://app.sli.do/event/3WsikMaC14huQXhMygm5rc

## Medical Test Paradox

High accuracy




## Bayes' rule

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}$$

La probabilità che Gianni sia malato dato che è risultato positivo al test è del 50%

# Risposta

- Questa probabilità può essere facilmente calcolata usando il **teorema di Bayes**, uno degli strumenti fondamentali della teoria della probabilità di cui parleremo in seguito.

- Possiamo però spiegare questa probabilità in modo **intuitivo**. E in questo caso l’intuizione dà una risposta completamente inattesa

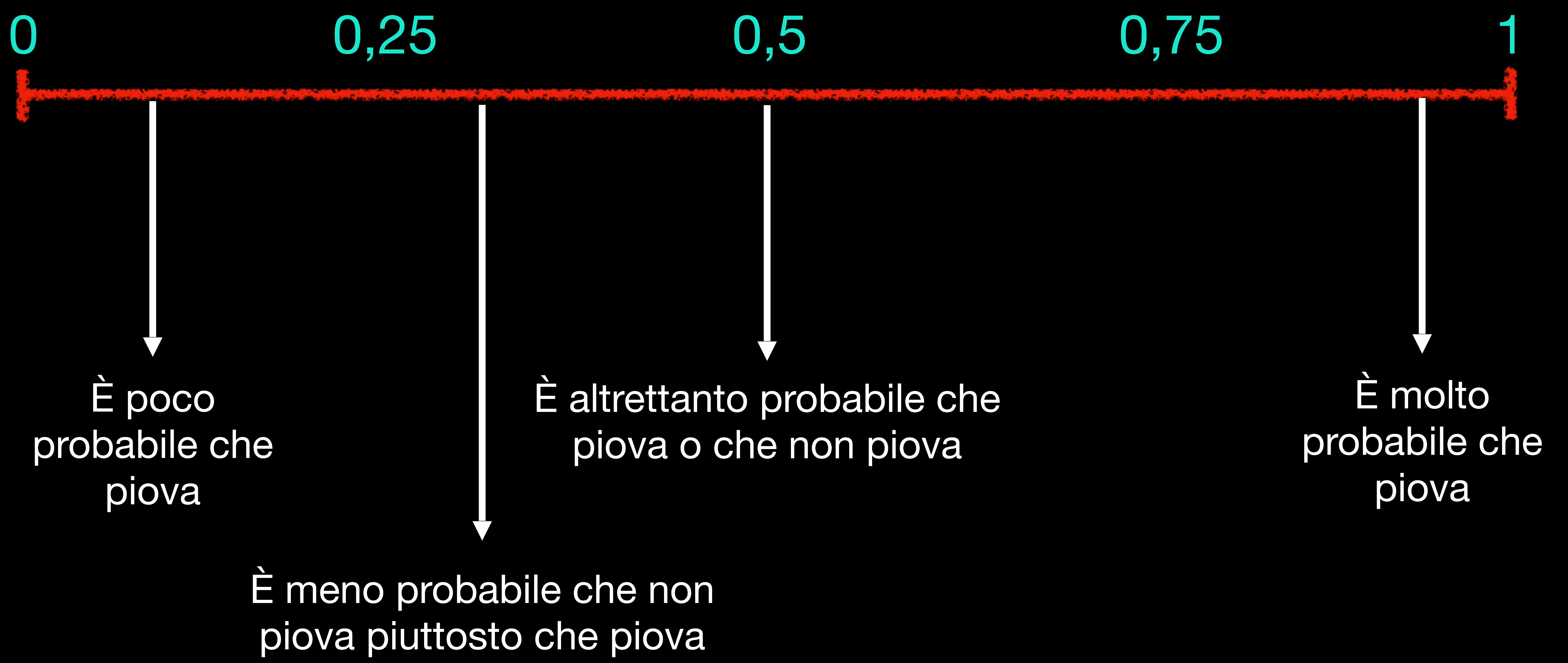
  - Dato che la malattia colpisce l’1% della popolazione, in un villaggio di 10.000 persone possiamo aspettarci che 100 persone siano malate e 9.900 sane

  - Dato che l’affidabilità del test è il 99%, possiamo aspettarci che risultino positivi 99 malati, ma anche 99 persone sane (l’1% di 9.900)

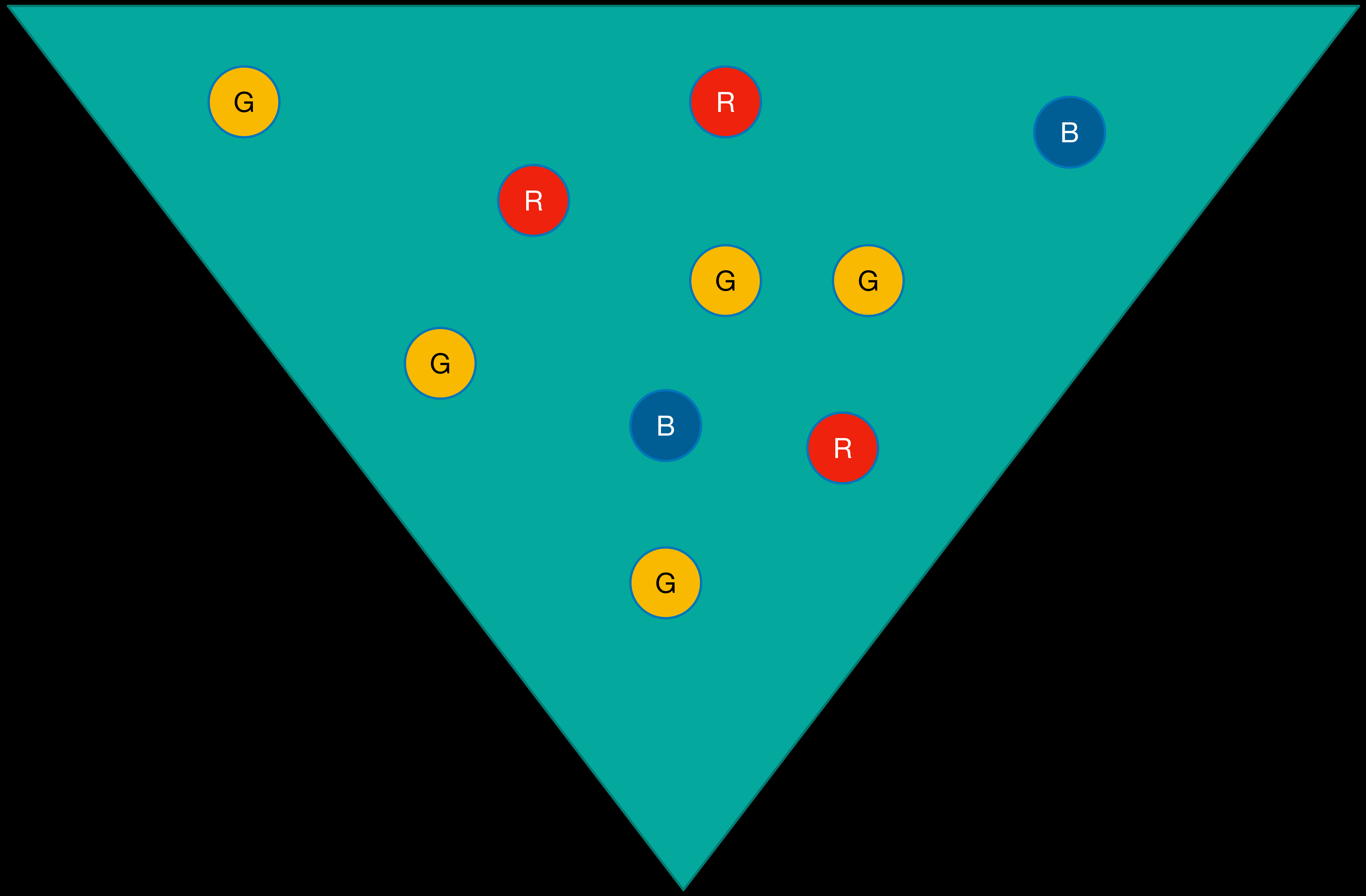
  - Dunque solo la **metà** (50%) delle 198 persone che sono risultate positive al test è effettivamente malata

# Rappresentazione numerica della probabilità

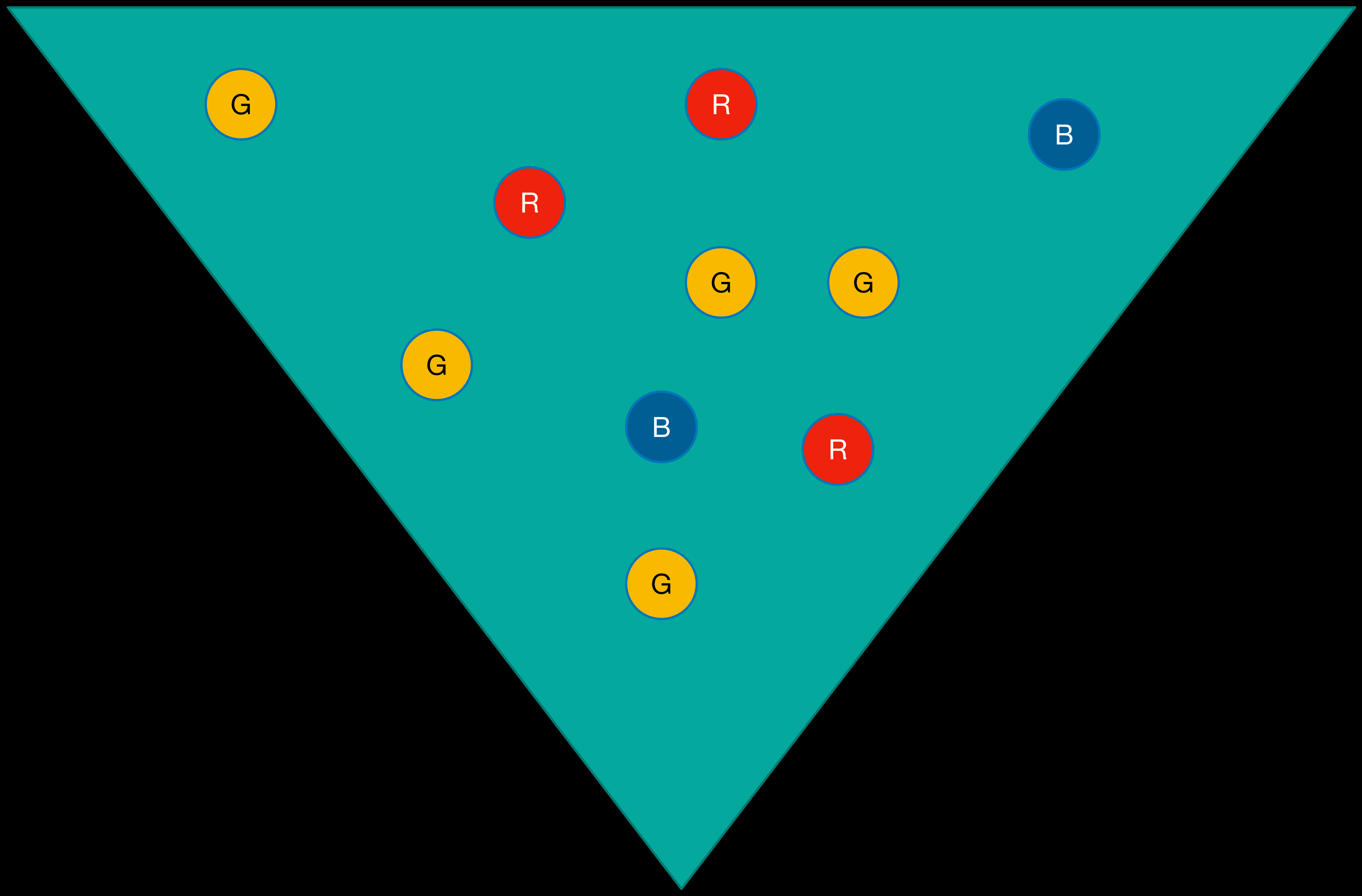
Pioverà domenica prossima?



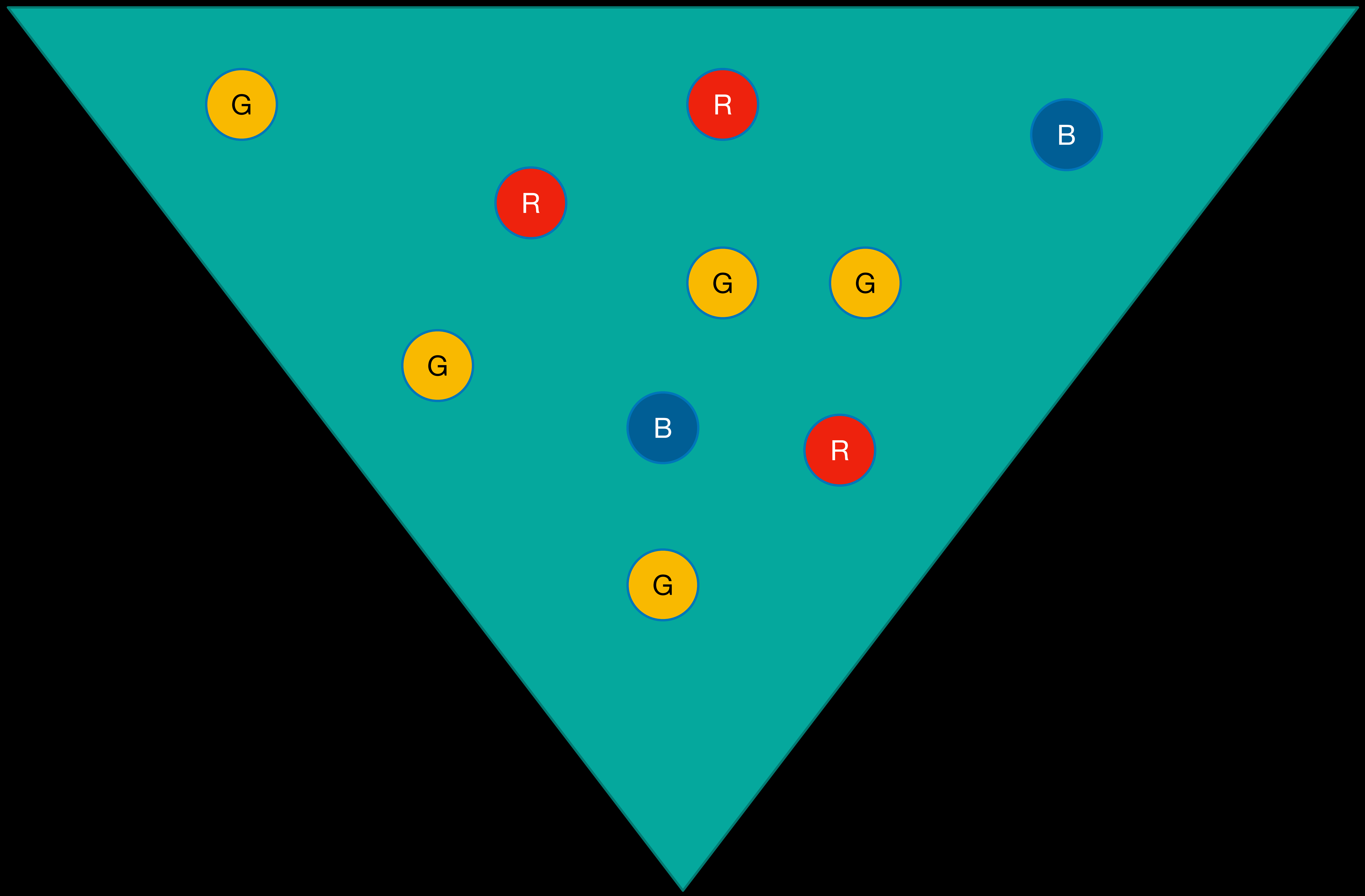
Qual è la probabilità di estrarre una biglia gialla?



Qual è la probabilità di estrarre una biglia rossa?



Qual è la probabilità di estrarre una biglia blu?



# La definizione classica di probabilità

### Definizione classica

- La probabilità di un evento *E* è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili
- Se i casi possibili sono *n* e i casi favorevoli sono $n_E$, secondo la definizione classica la probabilità P(E) che accada l'evento *E* è:

$$P(E) = \frac{n_E}{n}$$

# Probabilità classica

## Esempio 1

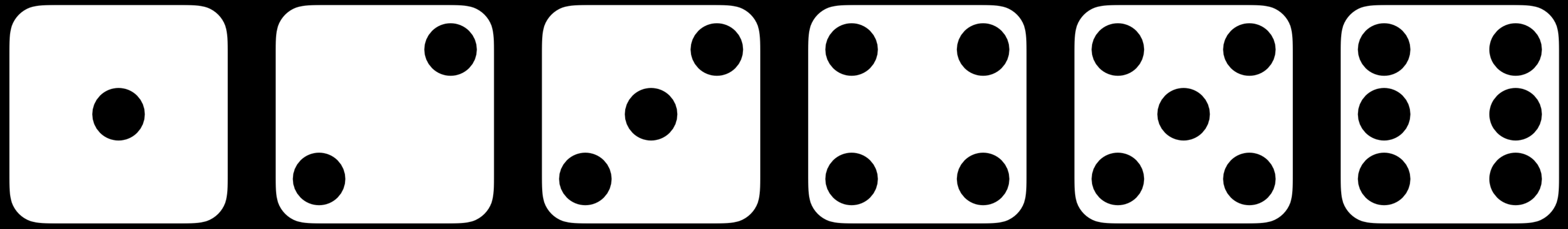
- Se lancio una moneta (corretta) i casi possibili sono 2 e si tratta di casi "ugualmente possibili"

- Dunque la probabilità che esca testa (o croce) è 1/2

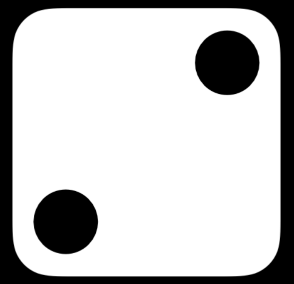
$P($  $) = \frac{1}{2}$

# Probabilità classica

## Esempio 2



$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

$P($  $) = \dfrac{1}{6}$

- Se lancio un dado (corretto) i casi possibili sono 6 e si tratta di casi “ugualmente possibili”
- Dunque la probabilità che esca 2 (oppure un altro qualunque dei 6 risultati possibili) è 1/6

# Probabilità classica

## Esempio 3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$$P(somma = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

# Probabilità classica

## Esempio 4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | **12** |

$$P(somma = 12) = \frac{1}{36}$$

# Proprietà della probabilità

Notate che secondo la definizione classica (numero di casi favorevoli diviso numero di casi possibili) la probabilità di un evento *E* è sempre compresa fra 0 e 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

# Probabilità complementari

- Se lancio un dado, la probabilità che NON esca un 6 è chiaramente di 5/6
- Infatti ci sono 5 casi su 6 che verificano la previsione “NON uscirà un 6”
- In generale, se ci sono $N$ casi possibili e i casi favorevoli a $E$ sono $n_E$, ci saranno $N$-$n_E$ casi favorevoli a non-$E$.
- Dunque:

$$P(non\ E) = 1 - P(E)$$

$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

Simbolo
logico della
negazione
«non»

# Probabilità complementari - Dimostrazione

$$P(non\ E) = \frac{N - n_E}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n_E}{N} = 1 - P(E)$$

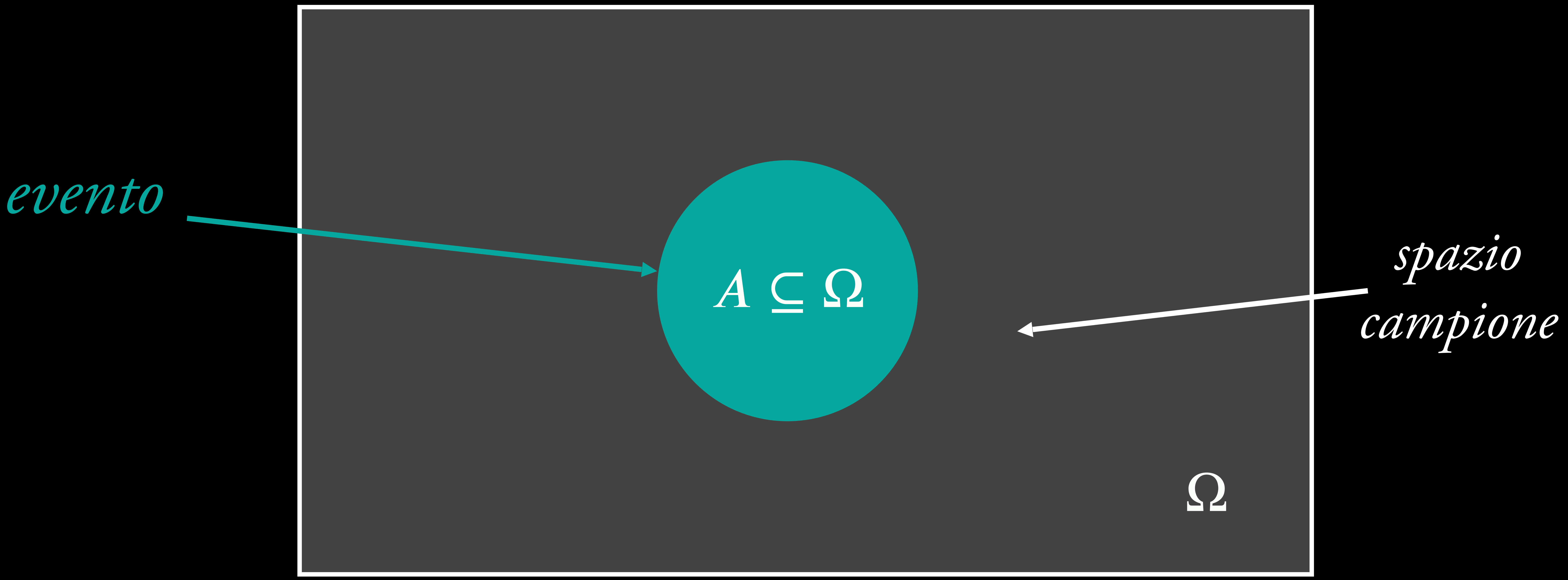
# Unione di eventi disgiunti

- Due eventi si dicono **disgiunti** se non è possibile che si verifichino contemporaneamente
- Dalla definizione classica segue che se due eventi $E_1$ ed $E_2$ sono **disgiunti**, allora la probabilità che si verifichi uno dei due è data dalla somma delle probabilità degli eventi presi separatamente
- Per esempio, la probabilità che, lanciando un dado, esca 1 oppure 6 è 1/6 + 1/6 = 2/6

$$P(A \text{ } oppure \text{ } B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

Simbolo logico della disgiunzione ("oppure")

# Probabilità



# Unione di eventi disgiunti

- Due eventi si dicono **disgiunti** se non è possibile che si verifichino contemporaneamente
- Dalla definizione classica segue che se due eventi *A* e B sono **disgiunti**, allora la probabilità che si verifichi uno dei due è data dalla somma delle probabilità degli eventi presi separatamente
- Per esempio, la probabilità che, lanciando un dado, esca 1 oppure 6 è 1/6 + 1/6 = 2/6

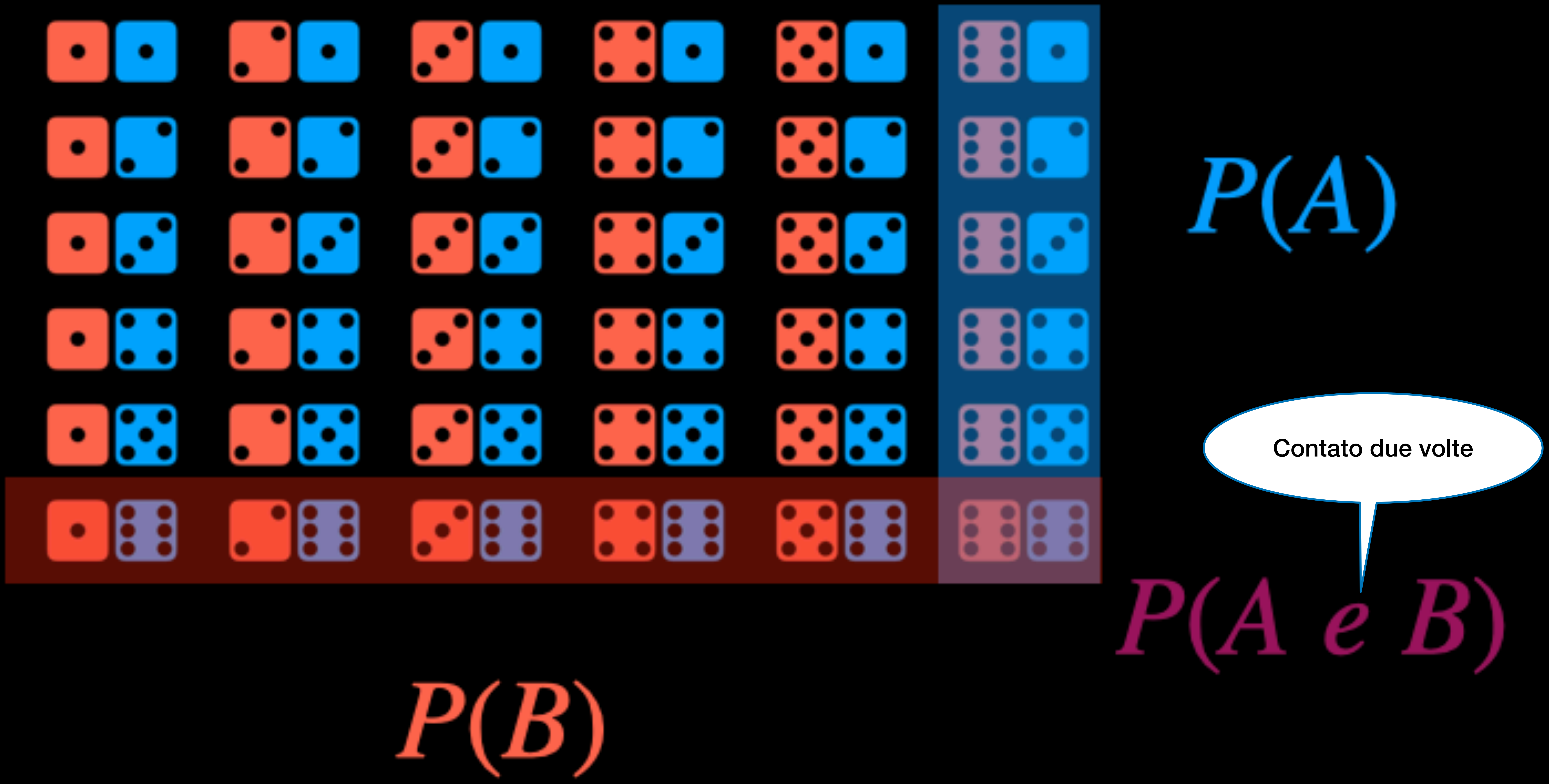
$$P(A \text{ } oppure \text{ } B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

# Probabilità di eventi non disgiunti

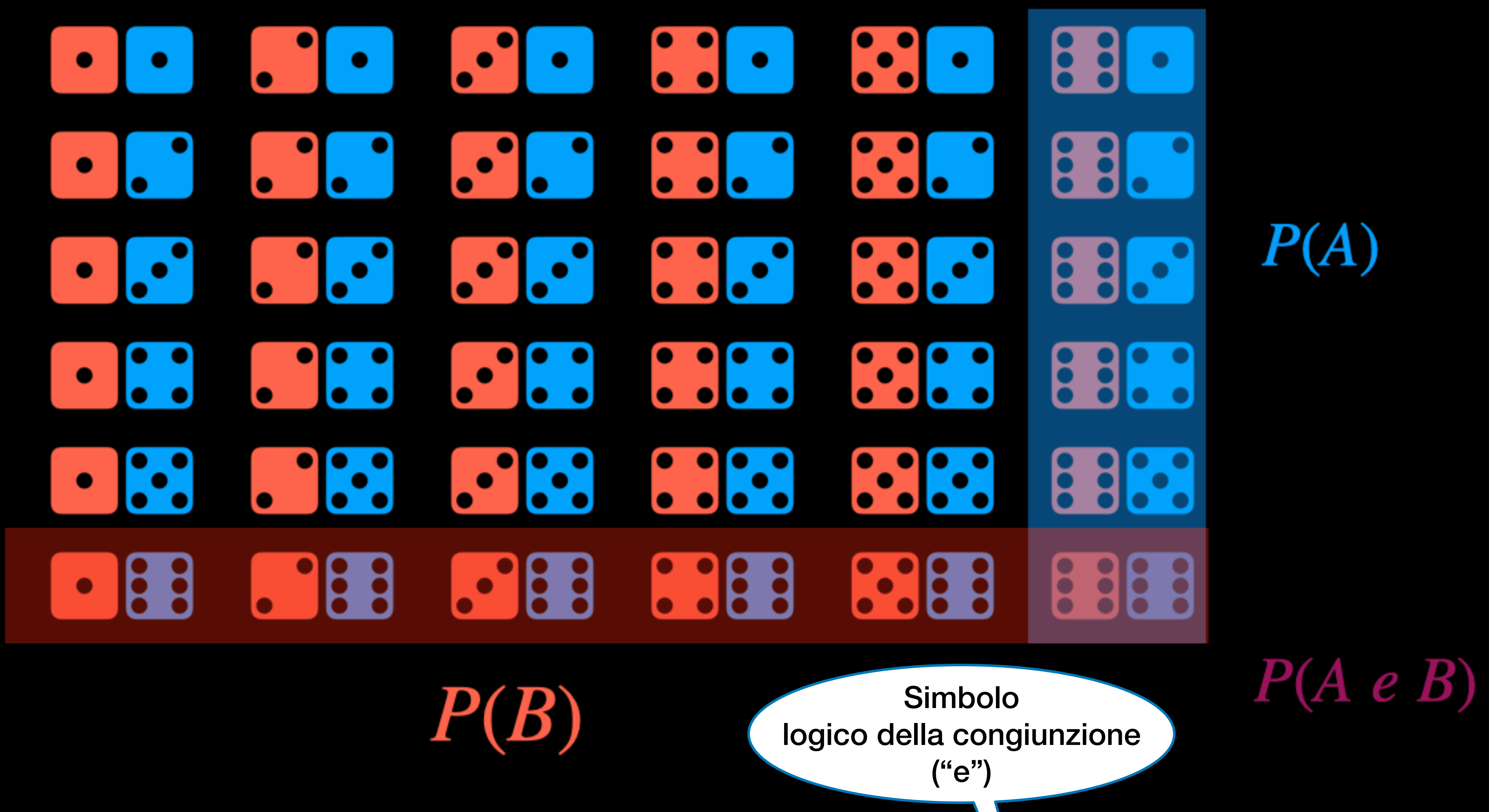
- Cosa succede se gli eventi non sono disgiunti?
- Lanciando due dadi corretti, qual è la probabilità che uno dei due dia 6? Cioè se
  - $A$ = esce 6 con il primo dado
  - $B$ = esce 6 con il secondo dado
- Qual è la probabilità di E = A oppure B?
- Qui i casi possibili sono 36. I casi favorevoli ad A sono 6 e altrettanti sono i casi favorevoli a B. Se facciamo la somma delle due probabilità dovremmo concludere che la probabilità di E è uguale a 12/36.
- Ma in questo caso staremmo contando due volte il caso in cui entrambi i dadi danno 6

# Unione di eventi non disgiunti

Probabilità che esca un 6 in un lancio di due dadi



# Legge generale della somma




$$P(A\ oppure\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ e\ B)$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

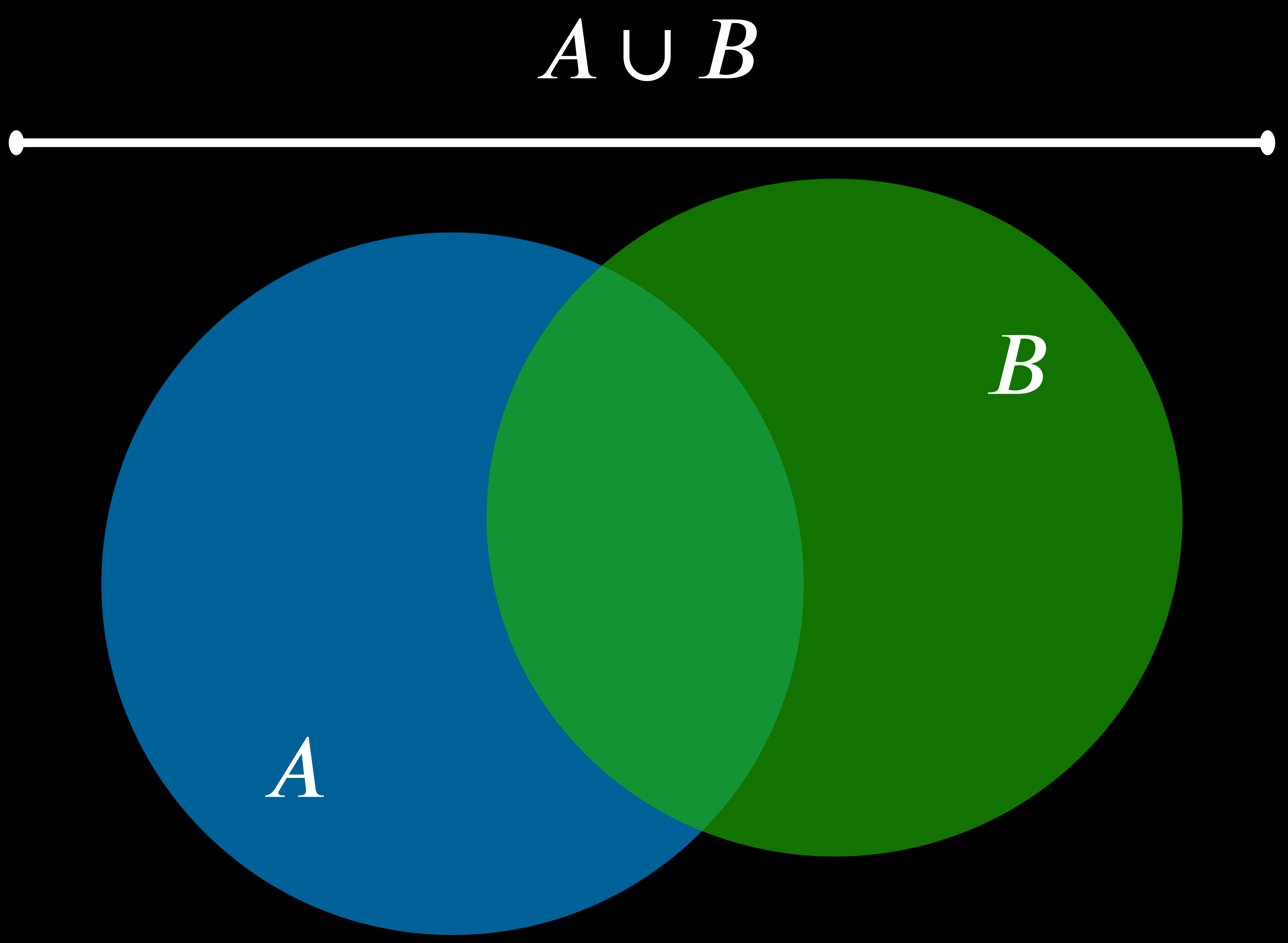
# Legge generale della somma

**La probabilità che si verifichi almeno uno fra due eventi è la somma delle loro probabilità <u>meno</u> la probabilità che si verifichino entrambi**

$$P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$
$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Notate che il caso degli eventi disgiunti è un caso specifico di questa legge

# Unione di eventi non disgiunti




$$P(AoppureB) = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

# Eventi indipendenti

- Se lanciamo due volte un dado non truccato, la probabilità che esca un certo numero al secondo lancio non è minimamente influenzata dal numero che è uscito al primo lancio (il dado non ha "memoria").
- Dunque la probabilità di ottenere un 6 al secondo lancio, è indipendente dal risultato che è stato ottenuto al primo lancio.
- In questo caso si dice che i due eventi, il primo lancio e il secondo lancio, sono indipendenti

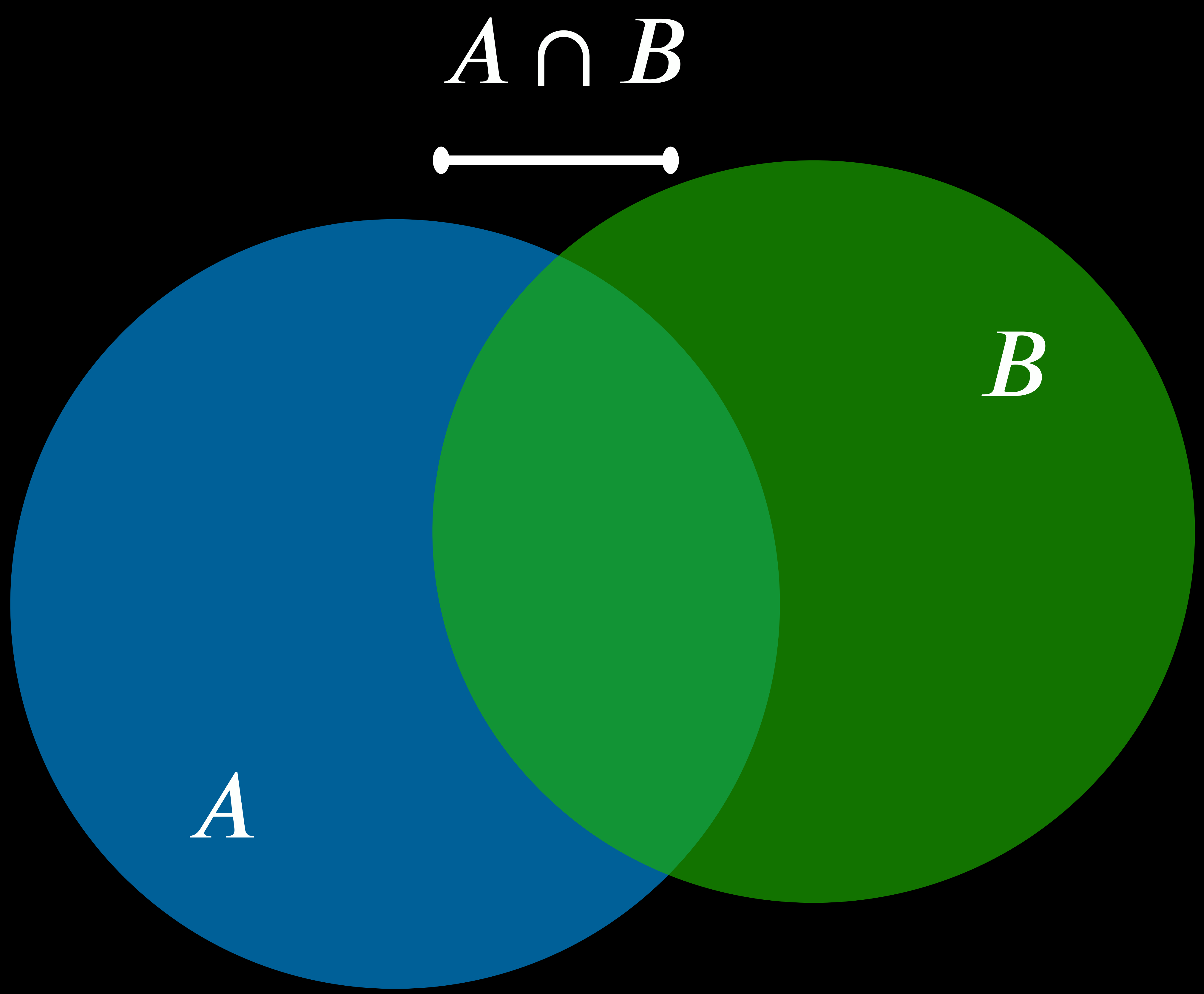
# Congiunzione di eventi indipendenti

- La probabilità che si verifichino insieme due eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei due eventi separati.
- La probabilità che lanciando due volte un dado esca 6 entrambe le volte è 1/6x1/6=1/36.
- Se A ed B sono eventi indipendenti:

$$P(A e B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$$

# Congiunzione di eventi indipendenti

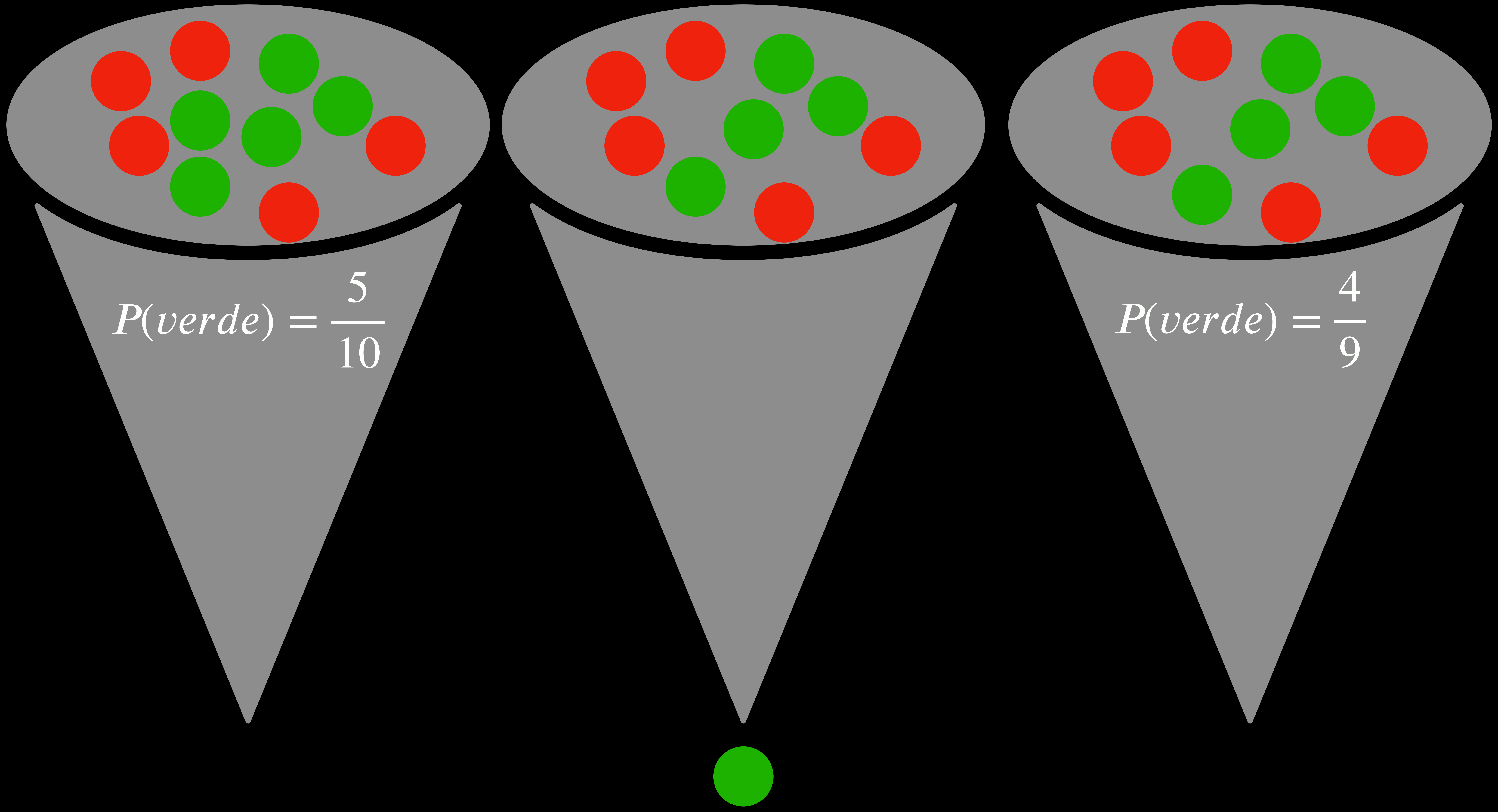



$$P(A e B) = P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$$

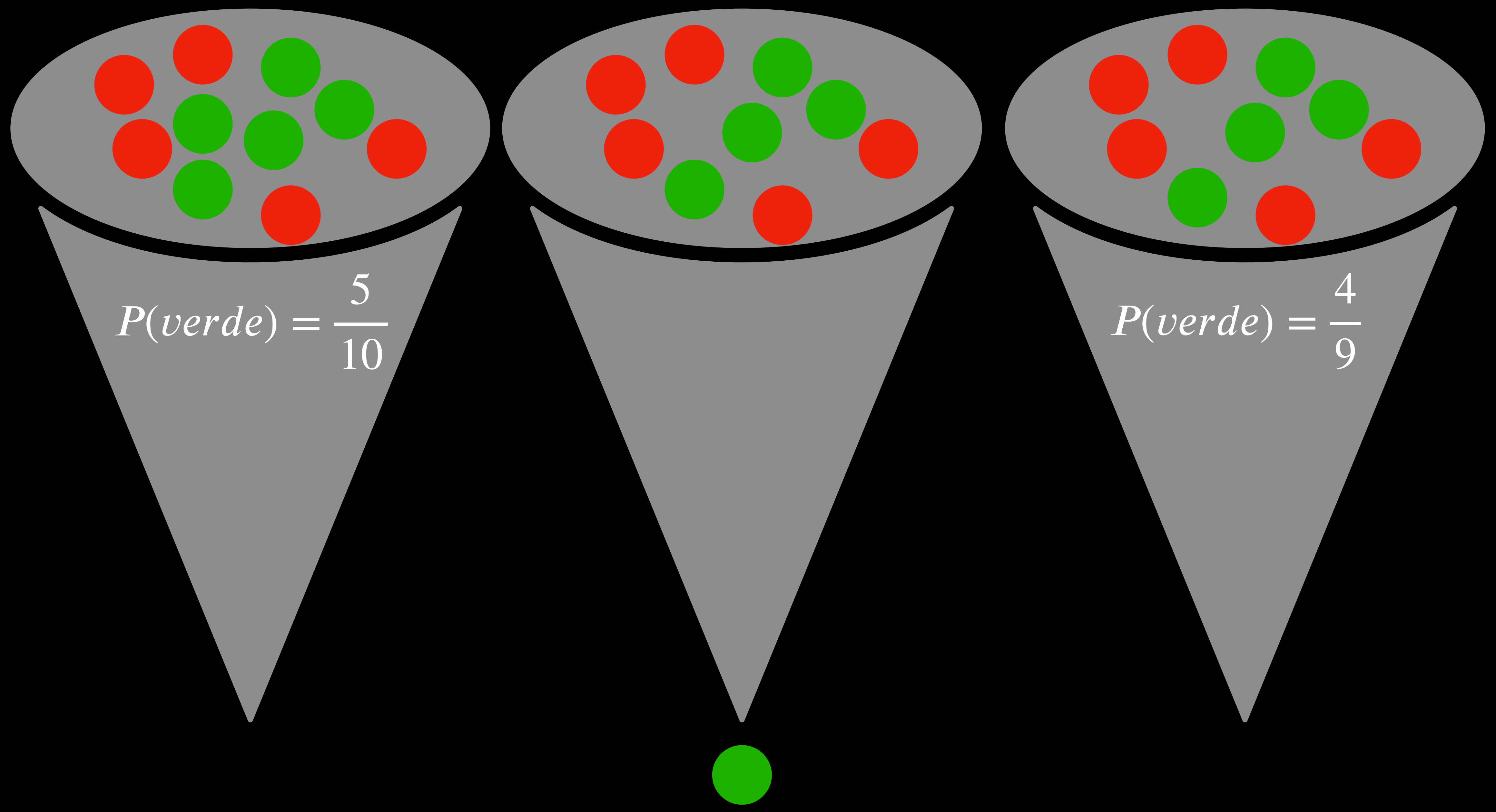
# Congiunzione di eventi non indipendenti

- Supponete che in un'urna ci siano 10 palline, 5 rosse e 5 verdi
- Qual è la probabilità che in due estrazioni consecutive in cui non reinserisco la pallina, la pallina estratta sia in entrambi i casi verde?
  - A = la prima pallina estratta è verde
  - B = la seconda pallina estratta è verde
- A e B **non** sono indipendenti
- La probabilità di A è 5/10. Ma la probabilità di B, *dato che A si è verificato*, è 4/9

# Congiunzione di eventi non indipendenti



# Congiunzione di eventi non indipendenti




Chiamiamo V1 ,…, V5 le palline verdi e R1, …, R5 le palline rosse.

I casi possibili sono 90. Di questi quelli favorevoli sono

<V1,V2>, <V1,V3>, <V1,V4>, <V1,V5>

<V2,V1>, <V2,V3>, <V2,V4>, <V2,V5>

<V3,V1>, <V3,V2>, <V3,V4>, <V3,V5>

<V4,V1>, <V4,V2>, <V4,V3>, <V4,V5>

<V5,V1>, <V5,V2>, <V5,V3>, <V5,V4>

Quindi la probabilità è 20/90 = 5/10 x 4/9 = 0.222

# Legge generale del prodotto

**La probabilità che due eventi si verifichino insieme è uguale al prodotto della probabilità del primo per la probabilità del secondo dato che il primo si è verificato**

- **P(B|A) è la *probabilità condizionata* che si verifichi B dato che A si è verificato**
- **N.B.: se A e B sono indipendenti Pr(B|A) = Pr(B)**

**EVENTI NON INDIPENDENTI**

$$P(A e B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

$$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

**EVENTI INDIPENDENTI**

$$P(A e B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$$

# Probabilità condizionale

- Qual è la probabilità che piova *dato che* c'è stato un tuono?

- Qual è la probabilità che io abbia il Covid *dato che* sono positivo?

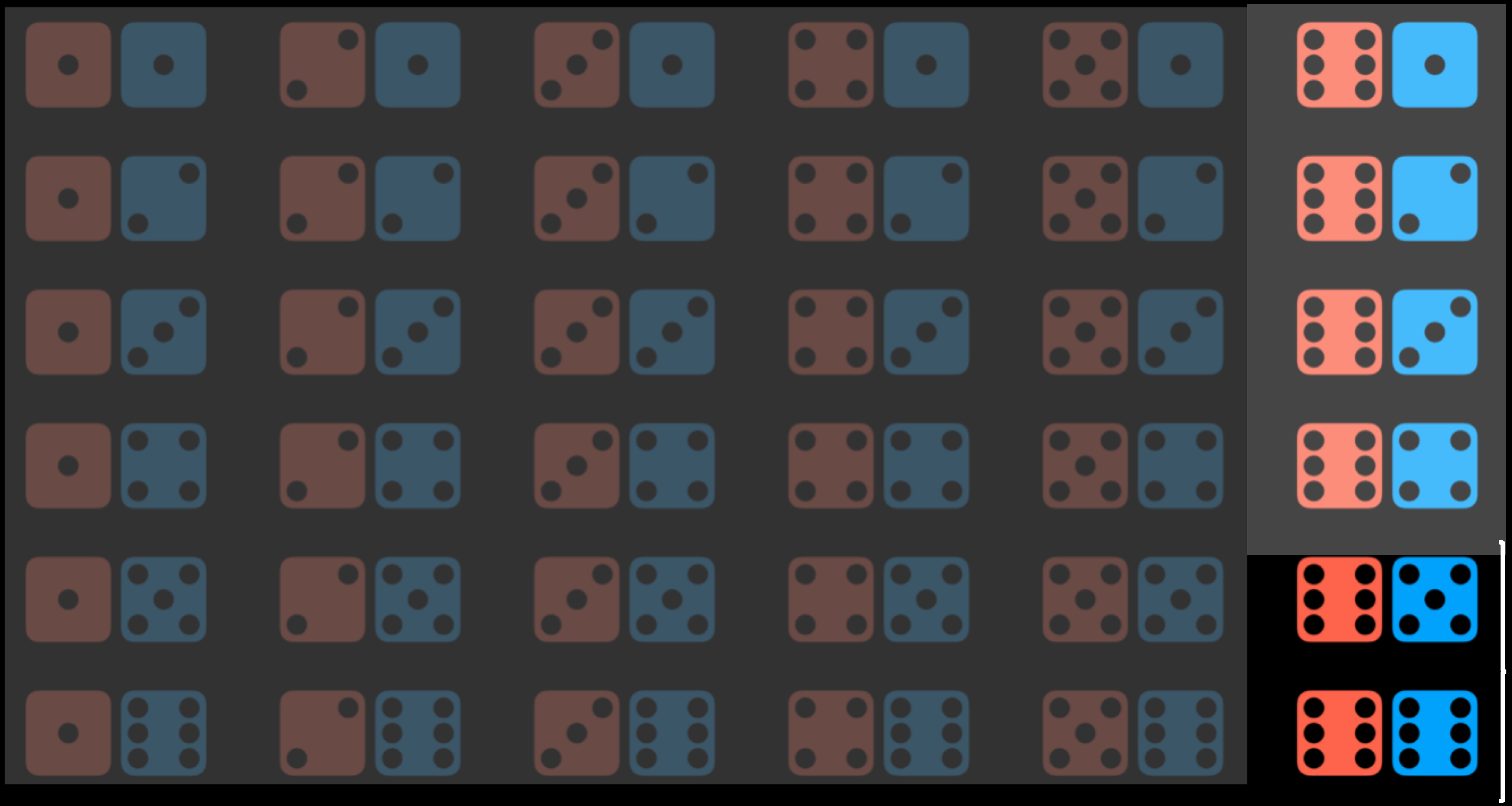
- Qual è la probabilità che la prossima parola sia "abbaia" *dato che* le prime due sono "Il cane"?

# Probabilità condizionale

La probabilità che si verifichi un evento *B* dato che si è verificato l'evento *A* è uguale alla probabilità che si verifichino entrambi gli eventi diviso la probabilità che si verifichi *A*

$$P(B|A) = \frac{P(A\ e\ B)}{P(A)} = \frac{P(B\ e\ A)}{P(A)}$$

# Probabilità condizionale



$$P(somma > 10 \mid ⚅) = \frac{2}{6}$$