UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA

Introduzione al ragionamento scientifico

A.A. 2024/2025 [Lettere A-K]
Lezione 14

Prof. Bernardino Sassoli de' Bianchi

Forma logica

- Ci interessa la *forma* di un'inferenza, non il suo contenuto. Le tre inferenze che abbiamo visto sono tutt'e tre corrette. Lo sono perché condividono una certa forma logica, che garantisce la conservazione della verità indipendentemente dal contenuto. Come facciamo a vedere che hanno la stessa forma logica?
    - Teniamo "ferme" - cioè non cambiamo - certe specifiche parole, che chiamiamo parole logiche o connettivi. Nel nostro esempio le parole logiche sono "o … o" e "non".
    - Sostituiamo invece il resto con variabili proposizionali come P, Q, R, S. Alla stessa proposizione, ovviamente, dovrà corrispondere la stessa variabile all'interno di un'inferenza.
- Quando un'inferenza ha (tra altre) la forma logica:
    - P o Q
    - non P
    - Quindi Q

la sua correttezza è garantita dalla forma logica. (Vedremo poi altri esempi di forme logiche che conservano la verità perché garantiscono la correttezza.)

Le parole logiche o connettivi // 1

- Consideriamo come parole logiche o connettivi le seguenti:
    - “e” (congiunzione)
    - “o … o”, “oppure" (disgiunzione)
    - “non” (negazione)
    - “se..., allora —" (condizionale)
    - “… se e solo se —" (bicondizionale)
- Naturalmente sono possibili altri modi di esprimere tali connettivi; per esempio:
    - “Non si dà il caso che Giulia arrivi puntuale” equivale a “Giulia non arriva puntuale”
    - “Dora è un’informatica anche se è laureata in Fisica” è equivalente a “Dora è un’informatica ed è laureata in Fisica”
    - ….

Le parole logiche o connettivi // 2

- In logica utilizziamo dei simboli per rappresentare i connettivi

“e” (congiunzione)	$\wedge$
“o … o”, “oppure" (disgiunzione)	$\vee$
“non” (negazione)	$\neg$
“se…, allora —" (condizionale)	$\rightarrow$
“… se e solo se —" (bicondizionale)	$\leftrightarrow$

- Notate che questi simboli a volte variano da autore o testo: per es., potreste trovare & al posto di $\wedge$ oppure ~ al posto di $\neg$

Le parole logiche o connettivi // 3

- La funzione dei connettivi è creare *proposizioni complesse a partire da proposizioni semplici (atomiche)*
- In logica generalmente si usano i cinque connettivi proposizionali menzionati, anche se è possibile dimostrare che la negazione e la disgiunzione sono sufficienti per esprimere gli altri
- Uno dei nostri connettivi, la negazione è **unario** (ha un solo posto: intuitivamente, si applica a una sola proposizione) e gli altri sono **binari**
- (Curiosità: In realtà è possibile costruire sistemi con un solo connettivo, ma qui non ne parleremo)

Un linguaggio logico: $\mathscr{L}$ e la sua sintassi // 1

- Armati delle variabili proposizionali e dei connettivi possiamo definire ora un linguaggio molto semplice $\mathscr{L}$

- La *sintassi* di un linguaggio è l'insieme delle regole che definiscono quali proposizioni appartengono a quel linguaggio (perché "corrette" e quali no).

- (In Italiano, "Dorme non Giulio" non è ammessa perché l'italiano non ammette enunciati della forma "Verbo Connettivo Nome")

- Le regole sintattiche di $\mathscr{L}$ definiscono cos'è una formula ben formata di $\mathscr{L}$ a partire da un *alfabeto*

- L'alfabeto di $\mathscr{L}$ è un insieme (infinito) di variabili proposizionali: $\{P, Q, R, \ldots, P', Q', R', \ldots, P'', \ldots\}$

Un linguaggio logico: $\mathscr{L}$ e la sua sintassi // 2

- Definiamo l'insieme delle formule ben formate (proposizioni) di $\mathscr{L}$ come segue:

  1. Una variabile proposizionale è una fbf ("proposizioni atomiche")
  2. Se P è una fbf allora $\neg P$ è una fbf
  3. Se P e Q sono fbf allora $P \wedge Q$ è una fbf
  4. Se P e Q sono fbf allora $P \vee Q$ è una fbf
  5. Se P e Q sono fbf allora $P \rightarrow Q$ è una fbf
  6. Se P e Q sono fbf allora $P \leftrightarrow Q$ è una fbf
  7. Niente altro è una fbf

Un linguaggio logico: $\mathscr{L}$ e la sua sintassi // 3

- Per finire, introduciamo nel nostro alfabeto (più che altro per questioni di chiarezza) le parentesi “(“ e “)”
- Questo perché se non diamo ulteriori specifiche una proposizione complessa potrebbe dare adito ad ambiguità
- Per esempio, come leggere: $P \vee Q \rightarrow R$?
  - Opzione 1: $(P \vee Q) \rightarrow R$
  - Opzione 1: $P \vee (Q \rightarrow R)$

$$(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg\neg P \rightarrow (P \wedge R))$$

DIMOSTRIAMO CHE È UNA FORMULA BEN FORMATA:
PER FARLO DEVO USARE LA REGOLA 6.
DEVO CIOÈ DIMOSTRARE SIA LA FORMULA A DESTRA
CHE QUELLA A SINISTRA
DEL BICONDIZIONALE SONO FBF

DIMOSTRIAMO CHE È UNA FBF:
PER FARLO DEVO USARE LA REGOLA 4.
DEVO DIMOSTRARE SIA LA FORMULA A
DESTRA CHE QUELLA A SINISTRA
DELLA DISGIUNZIONE SONO FBF

$$(\neg P \vee Q)$$

$$(\neg\neg P \rightarrow (P \wedge R))$$

$$\neg P$$

$$P \checkmark$$

PER LA REGOLA 1
QUESTA È UNA FBF

$$Q \checkmark$$

PER LA REGOLA 1
QUESTA È UNA FBF

$$\neg\neg P$$

PER LA REGOLA 2 QUESTA È
UNA FBF SE E SOLO SE LO È
QUELLO CHE VIENE DOPO LA
NEGAZIONE

$$\neg P$$

IDEM

$$P \checkmark$$

PER LA REGOLA 1
QUESTA È UNA FBF

$$P \wedge R$$

PER LA REGOLA 3 SE SONO FBF SIA
QUELLA A SINISTRA CHE QUELLA A
DESTRA DELLA CONGIUNZIONE

$$P \checkmark$$

PER LA REGOLA 1
QUESTA È UNA FBF

$$R \checkmark$$

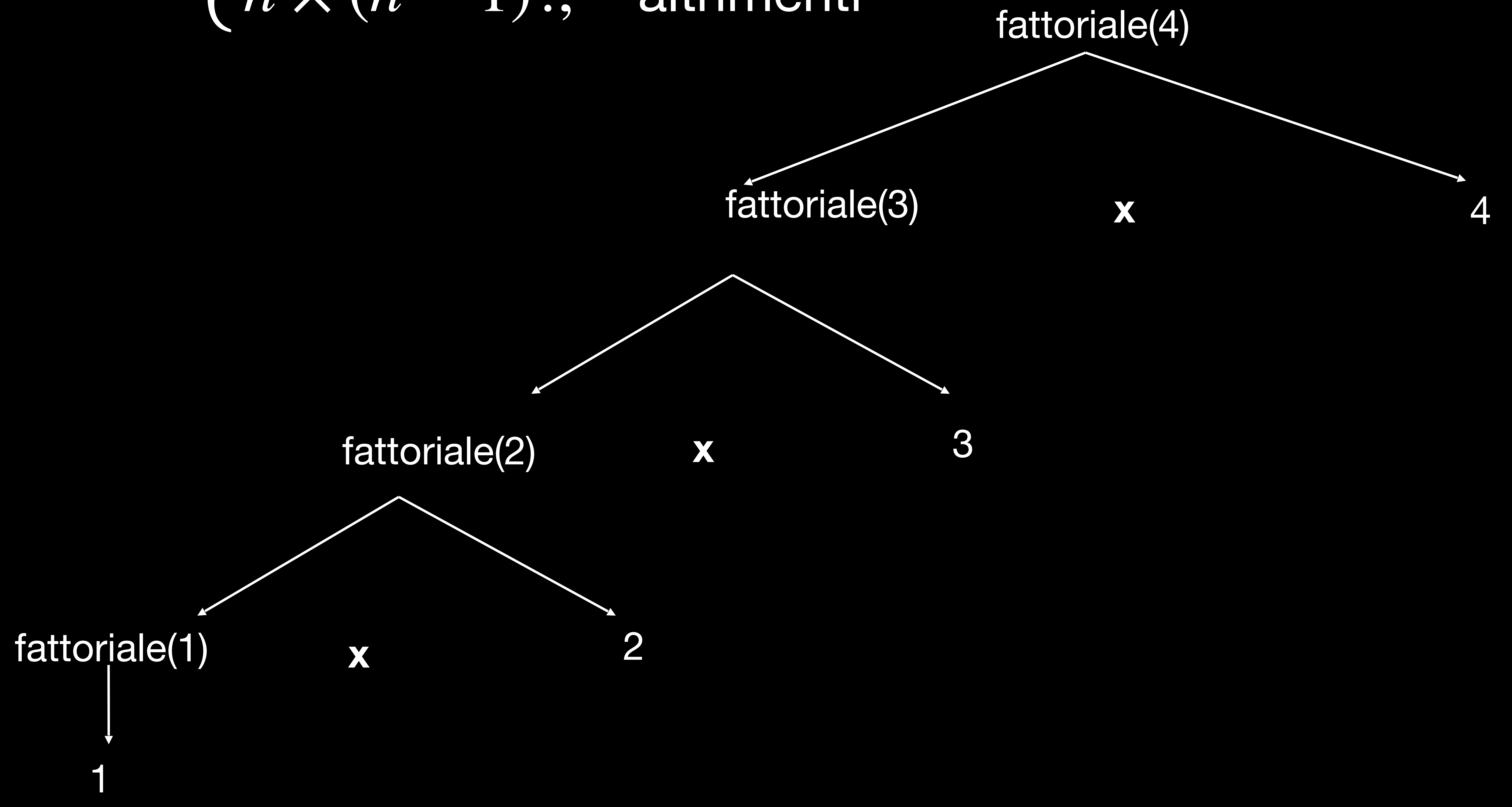
PER LA REGOLA 1
QUESTA È UNA FBF

È una fbf? (Esercitazione)

$$(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg\neg\neg P \rightarrow (P \wedge (\neg PR)))$$

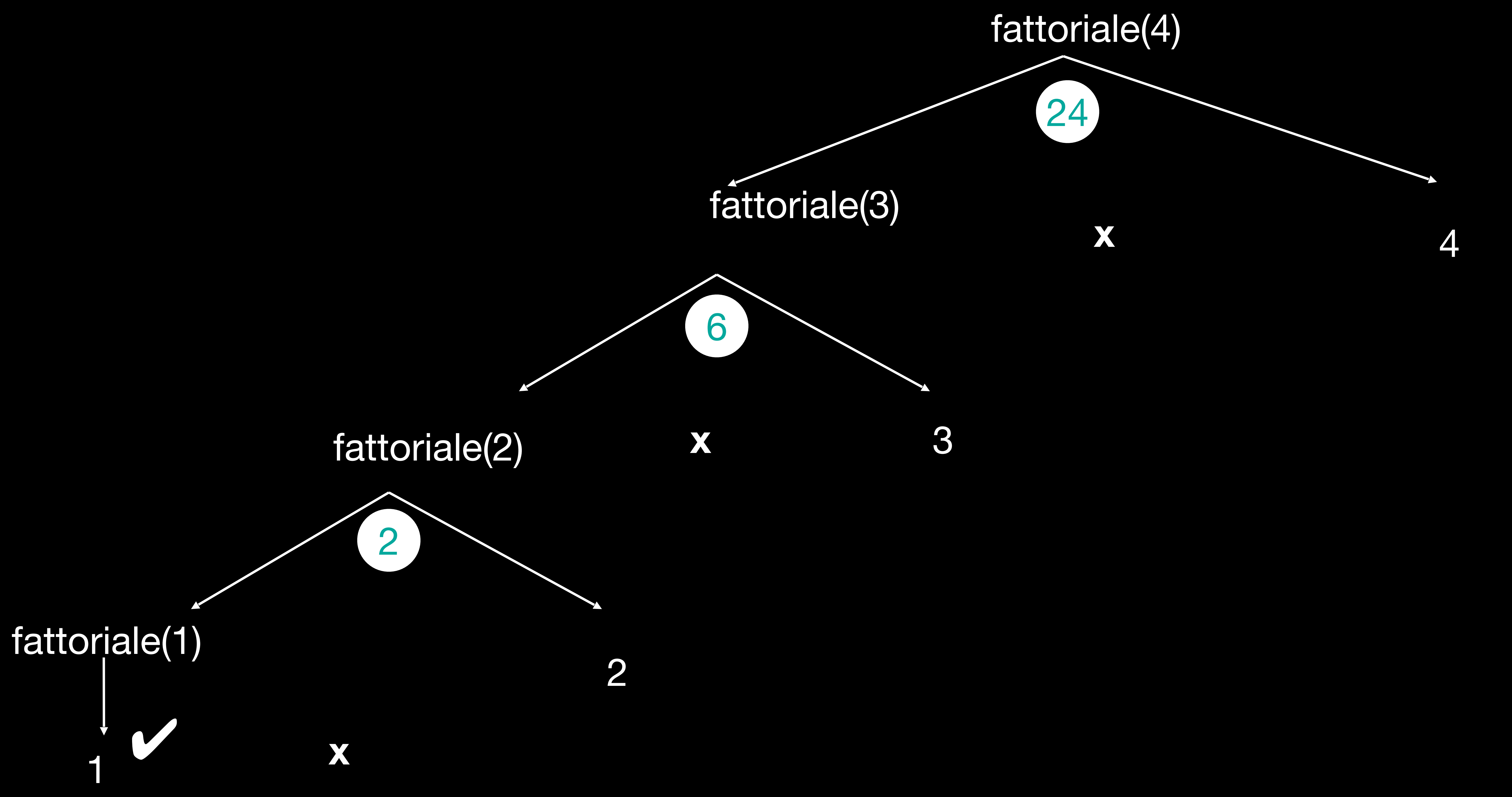
Definizioni ricorsive / induttive

- $n! =$ fattoriale(n) $= 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ n \times (n-1)!, & \text{altrimenti} \end{cases}$



Definizioni ricorsive / induttive

- fattoriale(n) = 1 x 2 x 3 x 5 x 6 …. X n
- fattoriale(n) = 1 se n = 1 altrimenti = n x fattoriale(n-1)



Definizioni ricorsive / induttive

Fibonacci(1) = 1

Fibonacci(2) = 1

Fibonacci(3) = 2

Fibonacci(4) = 3

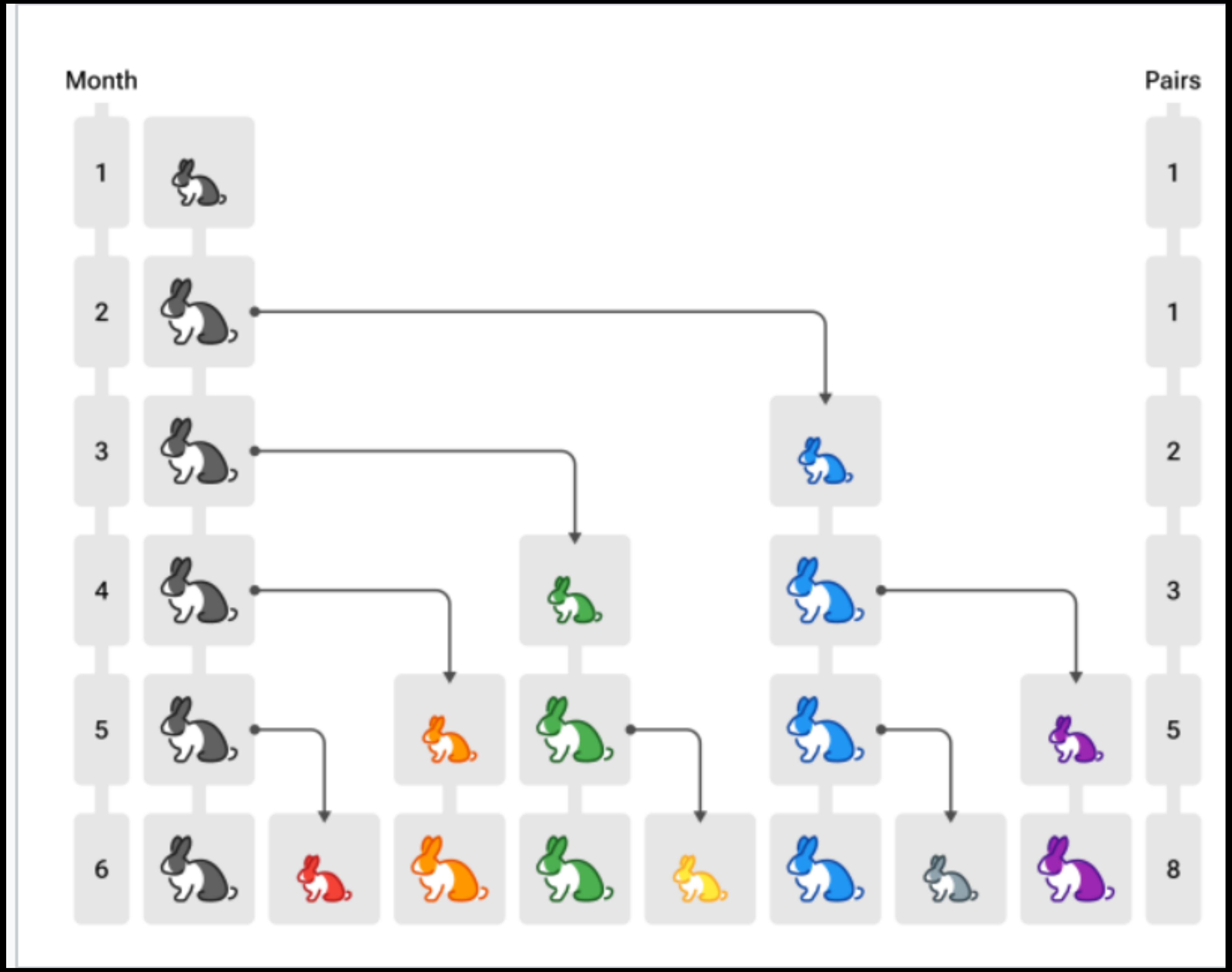
Fibonacci(5) = 5

…

Fibonacci(1) = 1

Fibonacci(2)= 1

Fibonacci(n) = Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)



Dalla sintassi alla semantica // 1

- La nozione di formula ben formata è una nozione sintattica: la sintassi di un linguaggio specifica quali “frammenti” fanno parte di quel linguaggio
- Per esempio, una regola sintattica per l’Italiano specifica che una frase non può iniziare con un segno di interpunzione (come il punto esclamativo). Mentre in Spagnolo questa è una mossa legittima in alcuni casi
- Quei frammenti che sono formati secondo le regole sintattiche del linguaggio possono avere di conseguenza un significato. Mentre quelli che non seguono la sintassi non hanno alcun significato (“??Cane ? morde+”)
- La semantica di un linguaggio stabilisce le regole grazie alle quali possiamo attribuire un significato alle sue formule ben formate

Dalla sintassi alla semantica // 2

- Abbiamo detto che una proposizione è caratterizzata dall’essere o vera o falsa, cioè dall’avere un valore di verità
- Grazie all’introduzione dei connettivi possiamo costruire proposizioni complesse a partire da proposizioni semplici (o atomiche): anche le proposizioni complesse avranno un valore di verità, cioè saranno o vere o false
- Il valore di verità di una proporzione complessa è una funzione del valore di verità delle proposizioni atomiche da cui è composta (principio di composizionalità)
- Possiamo stabilire il valore di verità (il significato) di una proposizione complessa in funzione dei connettivi se sappiamo i valori di verità delle proposizioni atomiche utilizzando le tavole di verità dei connettivi

Dalla sintassi alla semantica // 3

- In questo modo possiamo dire se è vera o falsa non solo una singola proposizione atomica A, B… (attribuire a essa un «valore di verità» V/F), ma catene di proposizioni legate insieme da connettivi (enunciati composti)
- Possiamo studiare i vari modi in cui due proposizioni qualunque A, B possono venire “legate” insieme, e come cambia il valore di verità dell’enunciato composto a seconda dell’operatore che le lega
- Più precisamente, dovremmo dire che la semantica di un connettivo/operatore logico (cioè «il modo in cui un operatore contribuisce a dare significato») viene fissata da una regola che determina univocamente il valore di verità di qualsiasi proposizione composta nel quale quell’operatore compare come operatore principale, una volta che siano dati i valori di verità delle proposizioni componenti
- Stiamo però facendo due assunzioni:
  - Principio di bivalenza: ogni asserzione è o vera o falsa
  - Principio di non contraddizione: nessuna asserzione è sia vera sia falsa

Tavole di verità - Negazione

P	$\neg P$
V	F
F	V

- La negazione cattura (o cerca di catturare) il significato italiano di “non”, “non si dà il caso che”, “non è vero che”, eccetera.
- Attenzione: spesso la negazione in Italiano è implicita: “Nessun filosofo è intelligente” è equivalente a “Non c’è un filosofo intelligente” - ne riparleremo quanto introdurremo i quantificatori)
- Potete vedere la negazione logica come un “interruttore” che fa passare da Vero a Falso e viceversa

Tavole di verità - Come funzionano?

p	q	$p \diamond q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Questa è la tavola di verità per un connettivo “inventato” che chiamo “diamante”
- Si tratta di un connettivo binario: cioè collega due proposizioni, *p* e *q*
- Nelle prime 2 colonne si elencano tutte le possibili combinazioni di stati di cose, cioè tutti i mondi possibili.
- Dato che ho 2 proposizioni ingredienti e due valori di verità avrò $2^2 = 4$ mondi possibili, le righe della tavola di verità
- L’ultima colonna mi dice il valore di verità della proposizione complessa che corrisponde a quella combinazione di valori di verità / stato di cose / mondo possibile

“p diamante q” è vera solo quando sono vere sia p sia q.

Riuscite a pensare a cosa corrisponde “diamante”?

Tavole di verità - Congiunzione

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- La congiunzione cattura (o cerca di catturare) il significato italiano di "e", ma anche "ma" e altri casi in cui la proposizione complessa è vera quando e solo quando lo sono tutte le proposizioni ingredienti, altrimenti è falsa (per via del principio di bivalenza!)
- Quindi la congiunzione di due (o più) proposizioni può esser vera in un solo stato di cose (c'è una sola riga in cui la proposizione complessa riceve il valore di verità "vero")

Tavole di verità - Disgiunzione

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- La disgiunzione cattura (o cerca di catturare) il significato italiano di “o”, “oppure”, “o…o”.
- È falsa se e solo se lo sono tutte le proposizioni ingredienti, altrimenti è vera.
- Quindi la disgiunzione di due (o più) proposizioni può esser falsa in un solo stato di cose (c’è una sola riga in cui la proposizione complessa riceve il valore di verità “falso”)
- Potete pensare alla disgiunzione come al “duale” della congiunzione - una congiunzione invertita
- È importante notare che in logica la disgiunzione è sempre inclusiva - mentre in Italiano sembra esserci anche un uso esclusivo (“o studio o esco con gli amici”).

Come posso formulare la disgiunzione esclusiva in termini degli altri connettivi?

Tavole di verità - Condizionale

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

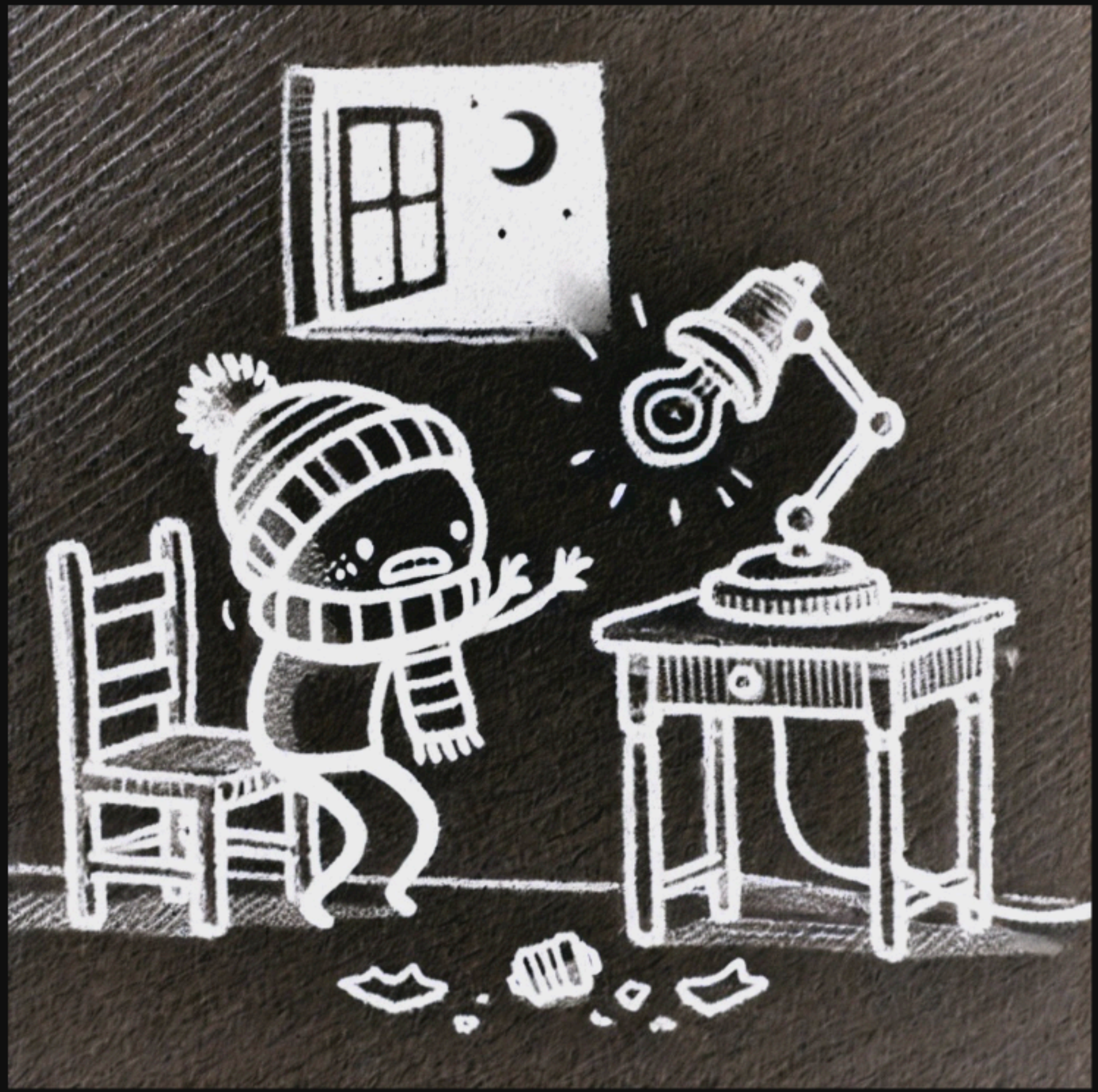
- Il condizionale corrisponde all'Italiano "se…allora…". La prima proposizione è detta antecedente, la seconda conseguente
- Un condizionale è vero:
  - quando è falso l'antecendente
  - quando è vero il conseguente
- Notate che se l'antecedente è falso il condizionale è vero indipendentemente dal fatto che sia vero il conseguente. Alcuni trovano ciò controintuitivo

Tavole di verità - Bicondizionale

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Il bicondizionale corrisponde all'Italiano "… se…e solo se…"
- Un bicondizionale è vero solo se sono vere entrambe le proposizioni ingredienti, falso altrimenti.
- Potete pensare a un bicondizionale come alla congiunzione di due condizionali

Tavole di verità - Esempio // 1



O fa freddo e si è fulminata la lampadina oppure non funziona il riscaldamento ed è saltata la corrente

P = fa freddo

Q = si è fulminata la lampadina

R = il riscaldamento va

S = la corrente funziona regolarmente

$$(P \land Q) \lor (\neg R \land \neg S)$$

Tavole di verità - Esempio // 2

P	Q	R	S	$(P \wedge Q)$	$(\neg R \wedge \neg S)$	$((P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg S))$
F	F	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	F	V

Tautologie e contraddizioni

- Una tautologia è una proposizione vera in tutti i mondi possibili (in tutte le righe di una sua tavola di verità c'è il valore «V»)
- Una contraddizione è una proposizione falsa in tutti i mondi possibili (in tutte le righe di una sua tavola di verità c'è il valore «F»)
- Possiamo concepire una tautologia come una proposizione che è vera indipendentemente da qualsiasi premessa (e simmetricamente una contraddizione come una proposizione che è falsa indipendentemente da qualsiasi premessa)

Tavole di verità - Esempio // 3

P	Q	R	S	$((P$	$\&$	$Q)$	$\&$	$(R$	$\&$	$S))$	$\rightarrow$	P
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	V	F

Tavole di verità e correttezza

- Posso utilizzare le tavole di verità per decidere se un'inferenza deduttiva sia o meno corretta
- Consideriamo quest'inferenza: "Se non studio logica o passo l'esame con un voto basso oppure vengo bocciato. Per prendere la lode non posso prendere voti bassi. Ho preso la lode. Quindi studio logica." :
  1. $\neg L \rightarrow (B \vee F)$ *Se non studio logica o passo l'esame con un voto basso o vengo bocciato*
  2. $B \rightarrow \neg P$ *Se prendo un voto basso non ottengo la lode*
  3. P *Prendo la lode*
  4. Quindi L *Studio logica*
- Per controllare la correttezza dell'argomentazione costruisco una tavola di verità per tutte le combinazioni possibili dei valori di verità di L , B , F e P, più:
  - una colonna per ognuna delle premesse
  - una colonna per la conclusione
- Se la colonna "Conclusione" è vera per tutte le righe in cui tutte le premesse sono vere, allora l'argomentazione è corretta. Se ci sono righe in cui tutte le premesse sono vere ma la conclusione è falsa, l'argomentazione non è corretta.

Tavole di verità - Esempio // 4

L	B	F	P	$\neg L \to (B \lor F)$	$B \to \neg P$	P	L
V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	V	F
V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F	F

- Dato che ho 4 proposizioni atomiche $L, B, F, P,$ avrò $2^4 = 16$ combinazioni possibili
- Stabilisco per ognuna delle premesse il valore di verità di ogni possibile combinazione
    1. $\neg L \to (B \lor F)$ *Se non studio logica o passo l'esame con un voto basso o vengo bocciato*
    2. $B \to \neg P$ *Se prendo un voto basso non ottengo la lode*
    3. P *Prendo la lode*
- Riporto la conclusione *L*
- *Considero le righe in cui le premesse sono vere (3,4,7)*
- *Visto che alla riga 7 la conclusione è falsa, l'inferenza* ***non*** *è corretta*