UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA

# Introduzione al ragionamento scientifico

## A.A. 2024/2025 [Lettere A-K]
## Lezione 9

Prof. Bernardino Sassoli de' Bianchi

# Assiomi della probabilità

**Tutto quello che "serve" è quanto segue (il resto si può dimostrare):**

1. Per ogni evento $e$, $0 \leq P(e) \leq 1$
2. La probabilità di un evento inevitabile è 1: $P(\top) = 1$
3. Se $a$ e $b$ sono incompatibili, $P(a \vee b) = P(a) + P(b)$

Definizione:

4. $P(a \mid b) = \dfrac{P(a \wedge b)}{P(b)}$

# Il teorema di Bayes

## Dimostrazione

$$P(A \wedge B) = P(B) \times P(A \mid B)$$

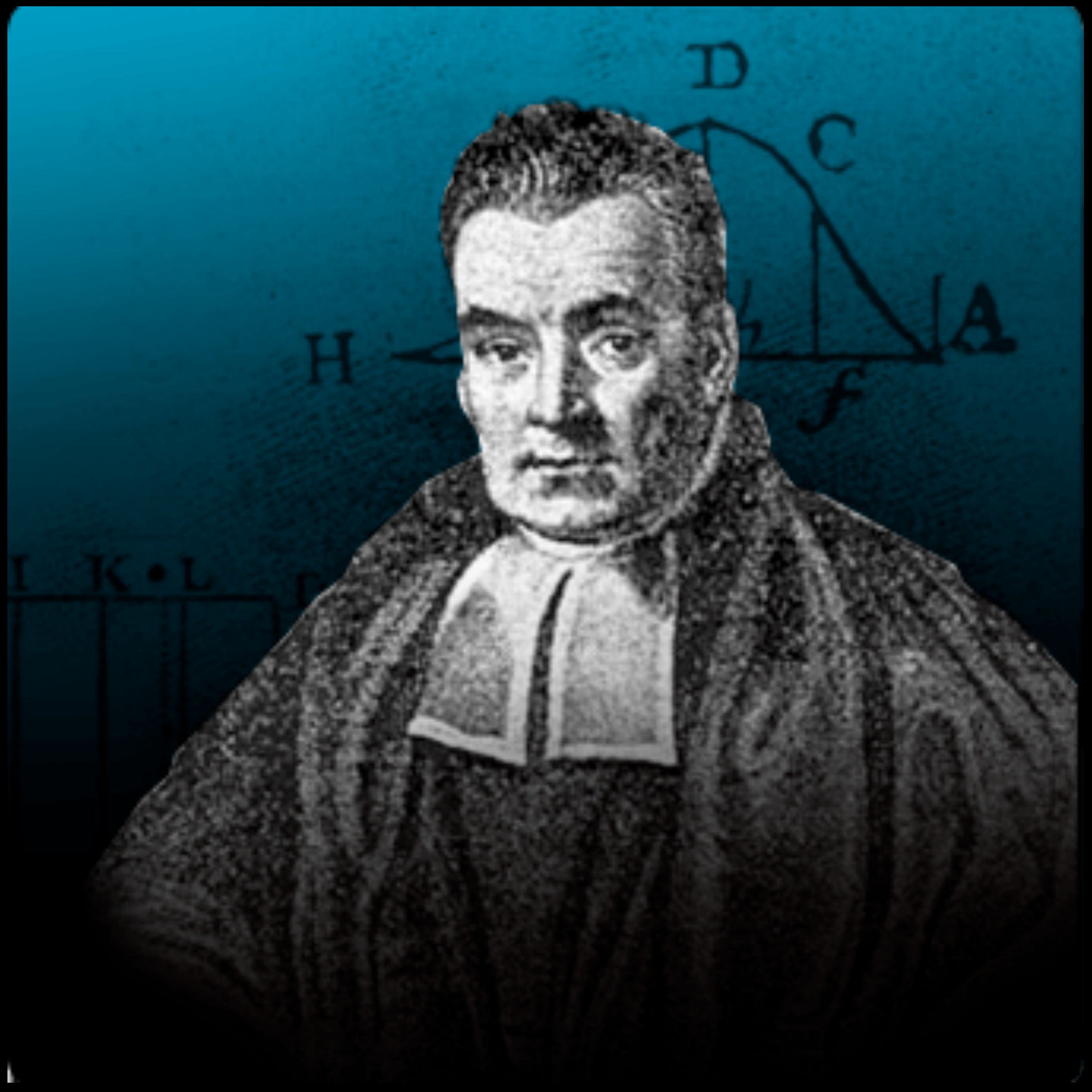
$$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

$$P(B) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(A)}$$

# Il teorema di Bayes // 1

- Uno dei cardini della teoria della probabilità soggettiva è il Teorema di Bayes, così chiamato dal nome suo inventore, il reverendo Thomas Bayes (1702-1761)




$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \times P(H)}{P(E)}$$

# Il teorema di Bayes // 2

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \times P(H)}{P(E)}$$

- $P(H \mid E)$ = probabilità a posteriori dell'ipotesi *H* data l'evidenza *E*
- $P(H)$ = probabilità a priori dell'ipotesi *H*
- $P(E \mid H)$ = probabilità condizionata che *E* si verifichi assumendo che l'ipotesi *H* sia vera
- $P(E)$ = probabilità che *E* si verifichi (conoscenza di sfondo)

# Il teorema di Bayes

## Esempio

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \times P(H)}{P(E)}$$

- H = il paziente ha la malattia M
- E = il paziente ha il sintomo S
- $P(H \mid E)$ = probabilità che il paziente sia malato di M dato che presenta S
- $P(H)$ = probabilità a priori che un individuo abbia M
- $P(E \mid H)$ = probabilità condizionata che un individuo presenti S dato che ha M
- $P(E)$ = probabilità a priori che un individuo presenti S (indipendentemente che abbia o meno M)

# Teorema della probabilità totale

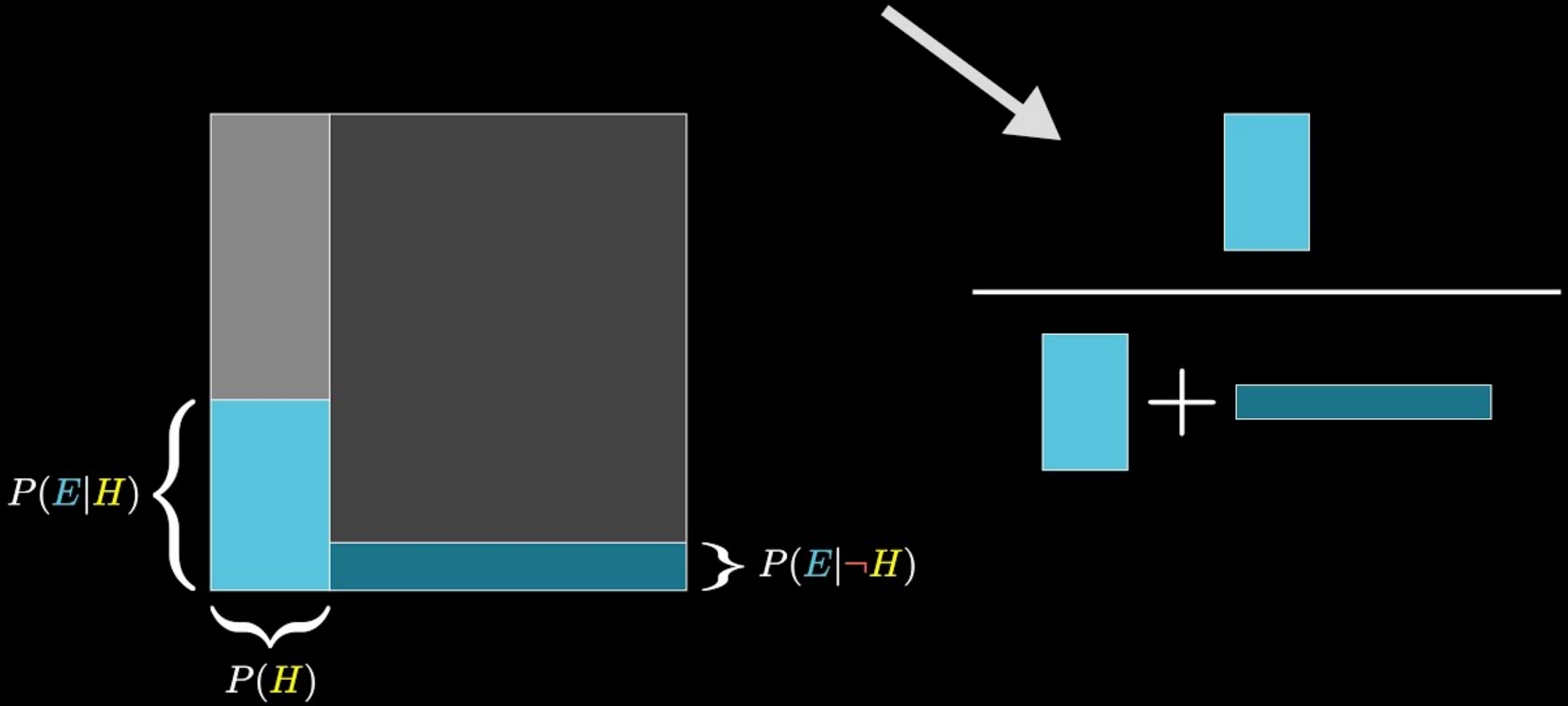
- Dato un evento qualsiasi $a$ e una serie di eventi **incompatibili** $b_1, \ldots, b_n$ vale il seguente teorema $P(a) = P(a \wedge b_1) + P(a \wedge b_2) + P(a \wedge b_3) + \ldots + P(a \wedge b_n)$
- Possiamo esprimere il teorema in modo equivalente tramite la definizione di probabilità condizionata: $P(a \mid b) = \dfrac{P(a \wedge b)}{Pb}$ e dunque $P(a \wedge b) = P(a \mid b) \times Pb$ nel modo seguente:

$$P(a) = P(a \mid b_1)P(b_1) + P(a \mid b_2)P(b_2) + \ldots + P(a \mid b_n)P(b_n)$$

$$P(e) = P(e \mid h_1)P(h_1) + P(e \mid h_2)P(h_2) + \ldots + P(e \mid h_n)P(h_n)$$

$$P(e) = P(e \mid h)P(h) + P(e \mid \neg h)P(\neg h)$$

# This is Bayes' rule



# La regola di condizionalizzazione

- Giorgio crede che la probabilità che piova dato che la temperatura scende sotto 15 gradi è dell'80% e che la probabilità che piova se la temperatura non scende è del 30%
- La temperatura scende sotto i 15 gradi
- Quale dovrebbe essere il grado di credenza di Giorgio? Quale è la probabilità che Giorgio dovrebbe assegnare all'evento "pioggia"?
- Intuitivamente, l'80%

- $C^+(pioggia) = C(pioggia \,|\, temperatura < 15)$
- $C^+(d) = C(d \,|\, e_1, e_2, \ldots, e_n)$
- $C^+(d) = C(d \,|\, e)$

# La regola di condizionalizzazione

- Giorgio crede che la probabilità che piova dato che la temperatura scende sotto 15 gradi è dell'80% e che la probabilità che piova se la temperatura non scende è del 30%
- La temperatura scende sotto i 15 gradi
- Quale dovrebbe essere il grado di credenza di Giorgio?

# Corvi e Bayes

- Supponiamo di avere tre ipotesi riguardanti la probabilità fisica che un dato corvo sia nero:
  - $h_1$: La probabilità che un dato corvo sia nero è uno (quindi, tutti i corvi sono neri).
  - $h_2$: La probabilità che un dato corvo sia nero è uno su due (quindi, è estremamente probabile che circa la metà di tutti i corvi siano neri).
  - $h_3$: La probabilità che un dato corvo sia nero è zero (quindi, nessun corvo è nero).
- Non abbiamo ancora osservato alcun corvo. Assegniamo quindi probabilità a priori uguali a queste tre ipotesi di $\frac{1}{3}$ ciascuna.
- Ora osserviamo un corvo nero.

# Il teorema di Bayes

## Esempio - segue

- H = Gianni ha la malattia M
- E = Gianni è risultato positivo al test
- P(H|E) = probabilità che Gianni sia malato dato che è risultato positivo al test = ???
- P(H) = probabilità a priori che Gianni sia malato = 0.01
- P(E|H) = prob. che Gianni risulti positivo al test dato che ha la malattia M = 0.99.
- P(E|non-H) = prob. che Gianni risulti positivo dato che non ha la malattia = 0.01
- Pr(E) = probabilità che Gianni risulti positivo al test indipendentemente dal fatto che abbia o meno la malattia M

  = Pr(H e E) + Pr(non-H e E) = Pr(H) x Pr(E|H) + Pr(non-H) x Pr(E|non-H) = (0.01 x 0.99) + (0.99 x 0.01) = 0.0198

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \times P(H)}{P(E)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}99}{0{,}0198} = \frac{0{,}0099}{0{,}0198} \cong 0.5$$

«Quando… scorriamo i libri di una biblioteca, di cosa dobbiamo disfarci? Se prendiamo… qualche volume metafisico… chiediamoci: «Contiene forse ragionamenti astratti su quantità e numero?». No. «Contiene ragionamenti basati sull’esperienza e relativi a dati di fatto o all’esistenza delle cose?». No. Allora diamolo alle fiamme perché non può contenere che sofisticheria e inganno … » David Hume

# Analiticità

- Una proposizione *p* è analiticamente vera (falsa) – in breve analitica – se la sua verità dipende unicamente dal significato dei suoi termini
- Una proposizione che non è analitica si dice sintetica
    - «Uno scapolo è un maschio adulto non sposato»
    - «Un punto non ha lunghezza»
    - «Se *n* è numero primo maggiore di 2 allora *n* è dispari»

# A priori *vs* a posteriori

- La giustificazione per una proposizione *p* è a priori se è indipendente dall'esperienza
    - «Se un oggetto è completamente rosso allora non è completamente verde»
    - «Io sono qui adesso»

# La definizione kantiana di analiticità

- «In tutti i giudizi, nei quali è pensato il rapporto di un soggetto col predicato (considero qui soltanto quelli affermativi, perché poi sarà facile l'applicazione a quelli negativi), cotesto rapporto è possibile in due modi. O il predicato B appartiene al soggetto A come qualcosa che è contenuto (implicitamente) in questo concetto A; o B si trova interamente al di fuori del concetto A, sebbene stia in connessione col medesimo. Nel primo caso chiamo il giudizio analitico, nel secondo sintetico.» (Kant, *Critica della ragion pura*, 1781-87)

- E giudizi (cioè proposizioni) che non hanno la forma soggetto-predicato?

- Inoltre, cosa dobbiamo pensare della metafora del «contenimento»?

- Considerate:

    - «Se Giorgio è sposato con Anna, allora Anna è sposata con Giorgio»

    - «Se Laura è un’antenata di un’antenata di Linda, allora Laura è un’antenata di Linda»

    - «Se un oggetto è rosso allora è colorato»