UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA

Introduzione al ragionamento scientifico // 1

A.A. 2024/2025 [Lettere A-K]
Lezione 6

Prof. Bernardino Sassoli de' Bianchi

La definizione classica di probabilità

Definizione classica

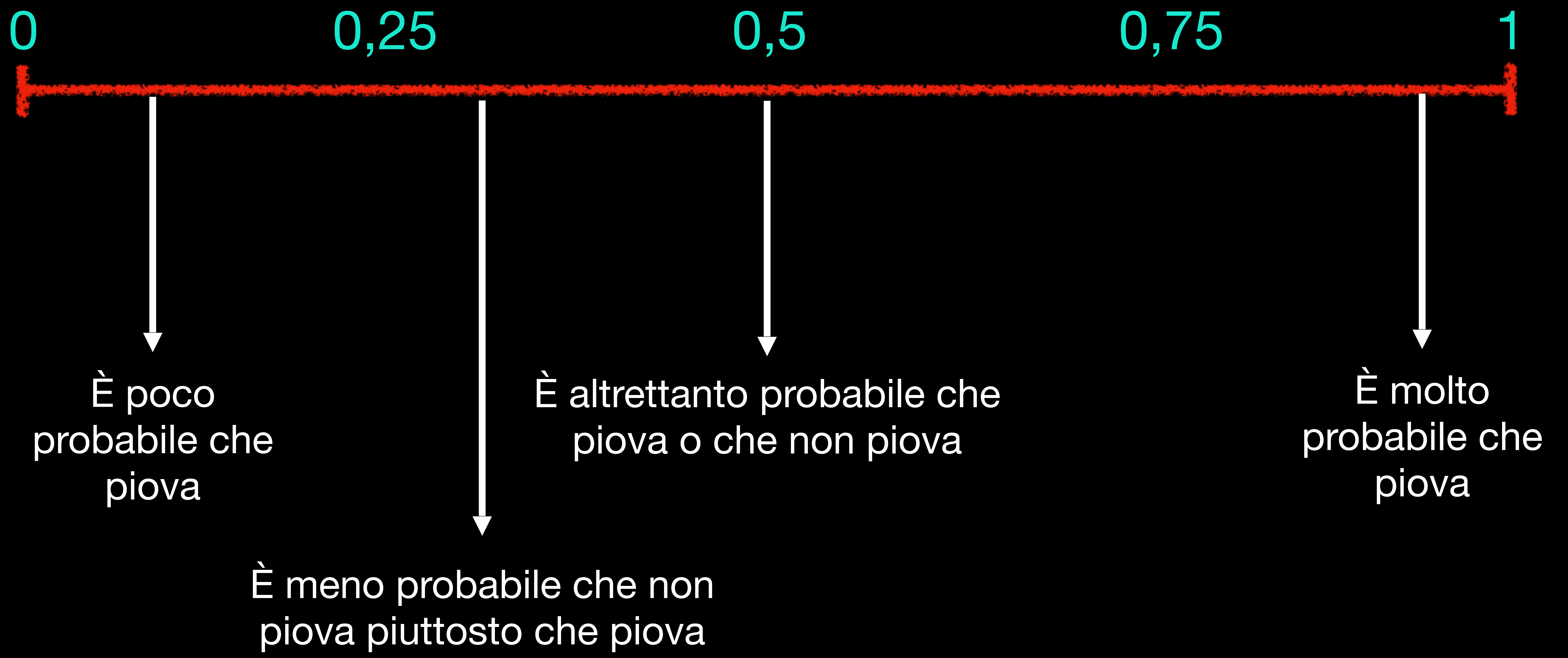
- La probabilità di un evento *E* è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili

- Se i casi possibili sono n e i casi favorevoli sono n_E, secondo la definizione classica la probabilità P(E) che accada l'evento *E* è:

$$P(E) = \frac{n_E}{n}$$

Rappresentazione numerica della probabilità

Pioverà domenica prossima?



Proprietà della probabilità

Notate che secondo la definizione classica (numero di casi favorevoli diviso numero di casi possibili) la probabilità di un evento *E* è sempre compresa fra 0 e 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Probabilità complementari

- Se lancio un dado, la probabilità che NON esca un 6 è chiaramente di 5/6
- Infatti ci sono 5 casi su 6 che verificano la previsione “NON uscirà un 6”
- In generale, se ci sono N casi possibili e i casi favorevoli a E sono n_E, ci saranno N-n_E casi favorevoli a non-E.
- Dunque:

$$P(non\ E) = 1 - P(E)$$

$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

Simbolo logico della negazione «non»

Unione di eventi disgiunti

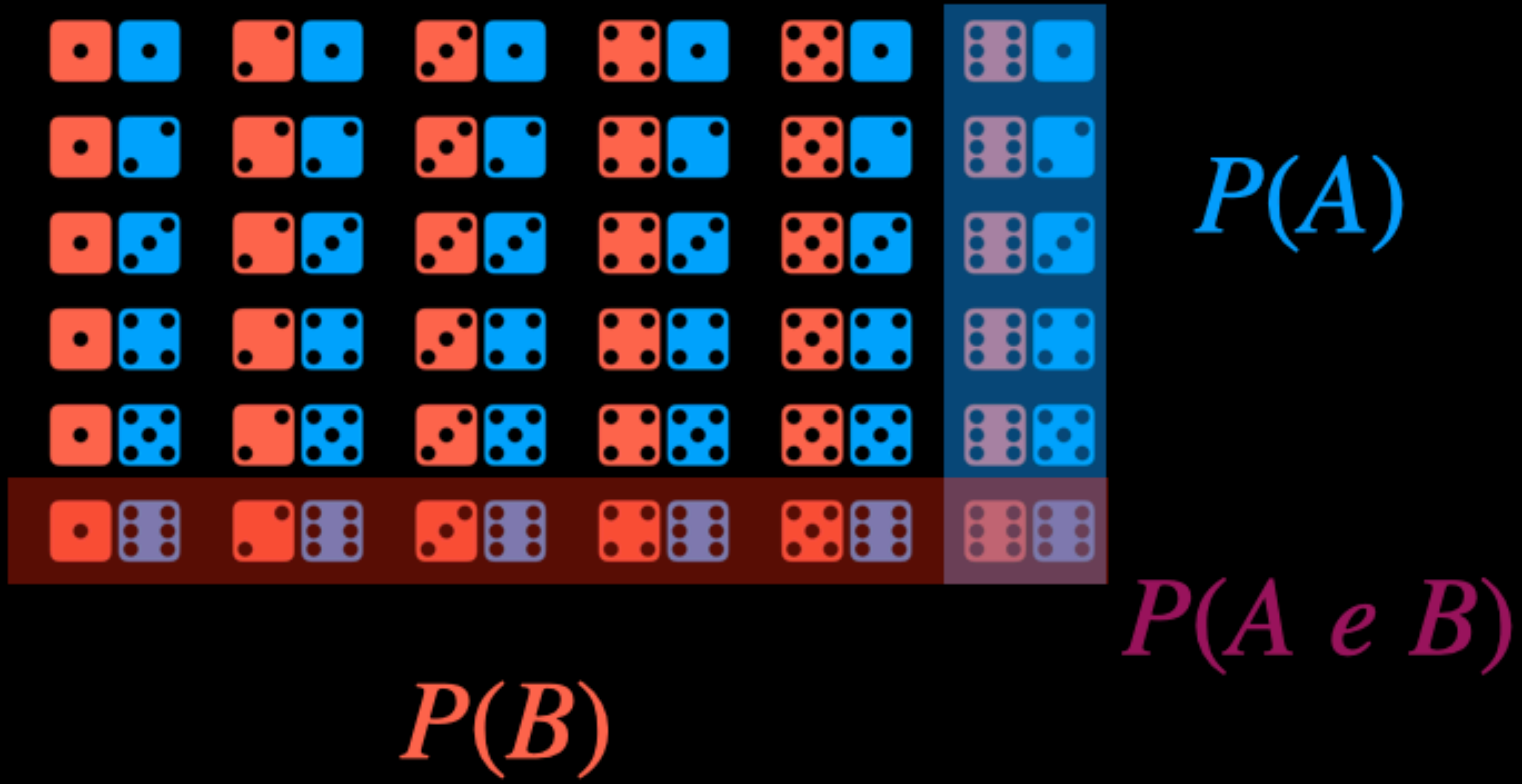
- Due eventi si dicono **disgiunti** se non è possibile che si verifichino contemporaneamente
- Dalla definizione classica segue che se due eventi *A* e B sono **disgiunti**, allora la probabilità che si verifichi uno dei due è data dalla somma delle probabilità degli eventi presi separatamente
- Per esempio, la probabilità che, lanciando un dado, esca 1 oppure 6 è 1/6 + 1/6 = 2/6

$$P(A \ oppure \ B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

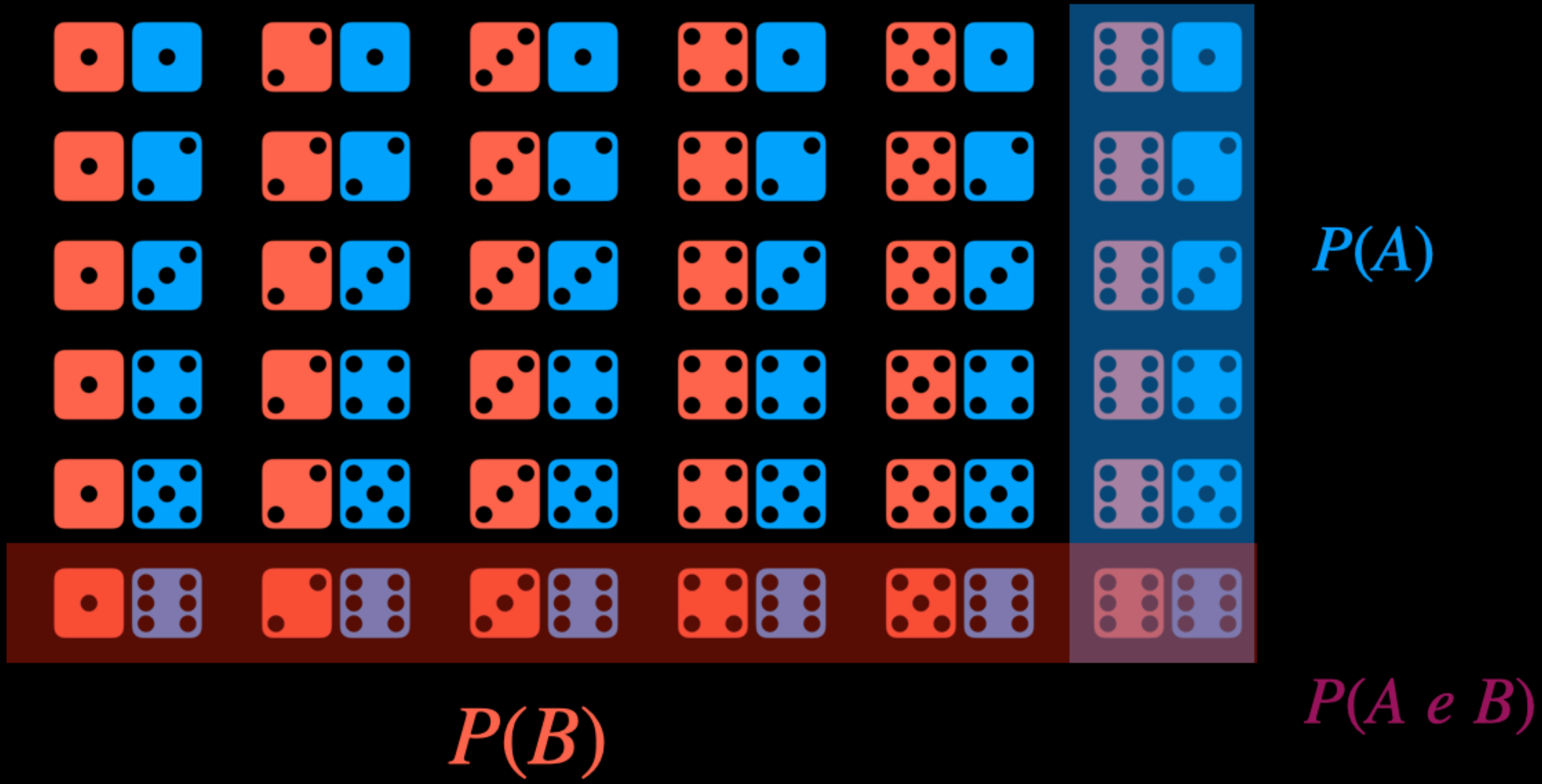
Probabilità di eventi non disgiunti

- Cosa succede se gli eventi non sono disgiunti?
- Lanciando due dadi corretti, qual è la probabilità che uno dei due dia 6? Cioè se
  - A = esce 6 con il primo dado
  - B = esce 6 con il secondo dado
- Qual è la probabilità di E = A oppure B?
- Qui i casi possibili sono 36. I casi favorevoli ad A sono 6 e altrettanti sono i casi favorevoli a B. Se facciamo la somma delle due probabilità dovremmo concludere che la probabilità di E è uguale a 12/36.
- Ma in questo caso staremmo contando due volte il caso in cui entrambi i dadi danno 6

Unione di eventi non disgiunti



Legge generale della somma



$$P(A\ oppure\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ e\ B)$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Legge generale della somma

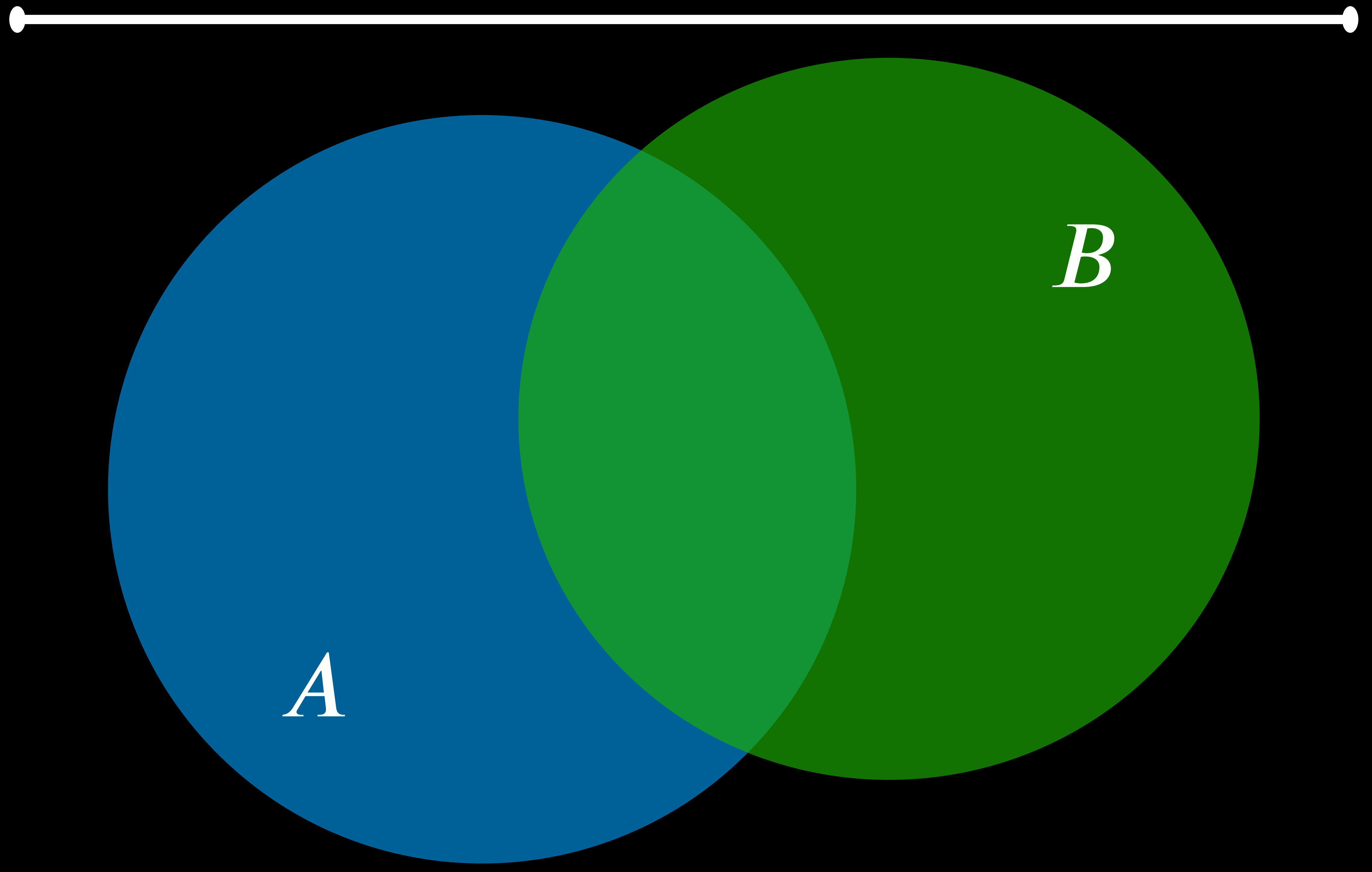
La probabilità che si verifichi almeno uno fra due eventi è la somma delle loro probabilità <u>meno</u> la probabilità che si verifichino entrambi

$$P(A \ oppure \ B) = P(A) + P(B) - P(A \ e \ B)$$
$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Notate che il caso degli eventi disgiunti è un caso specifico di questa legge

Unione di eventi non disgiunti

$$A \cup B$$



$$P(A oppure B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Eventi indipendenti

- Se lanciamo due volte un dado non truccato, la probabilità che esca un certo numero al secondo lancio non è minimamente influenzata dal numero che è uscito al primo lancio (il dado non ha “memoria”).
- Dunque la probabilità di ottenere un 6 al secondo lancio, è indipendente dal risultato che è stato ottenuto al primo lancio.
- In questo caso si dice che i due eventi, il primo lancio e il secondo lancio, sono indipendenti

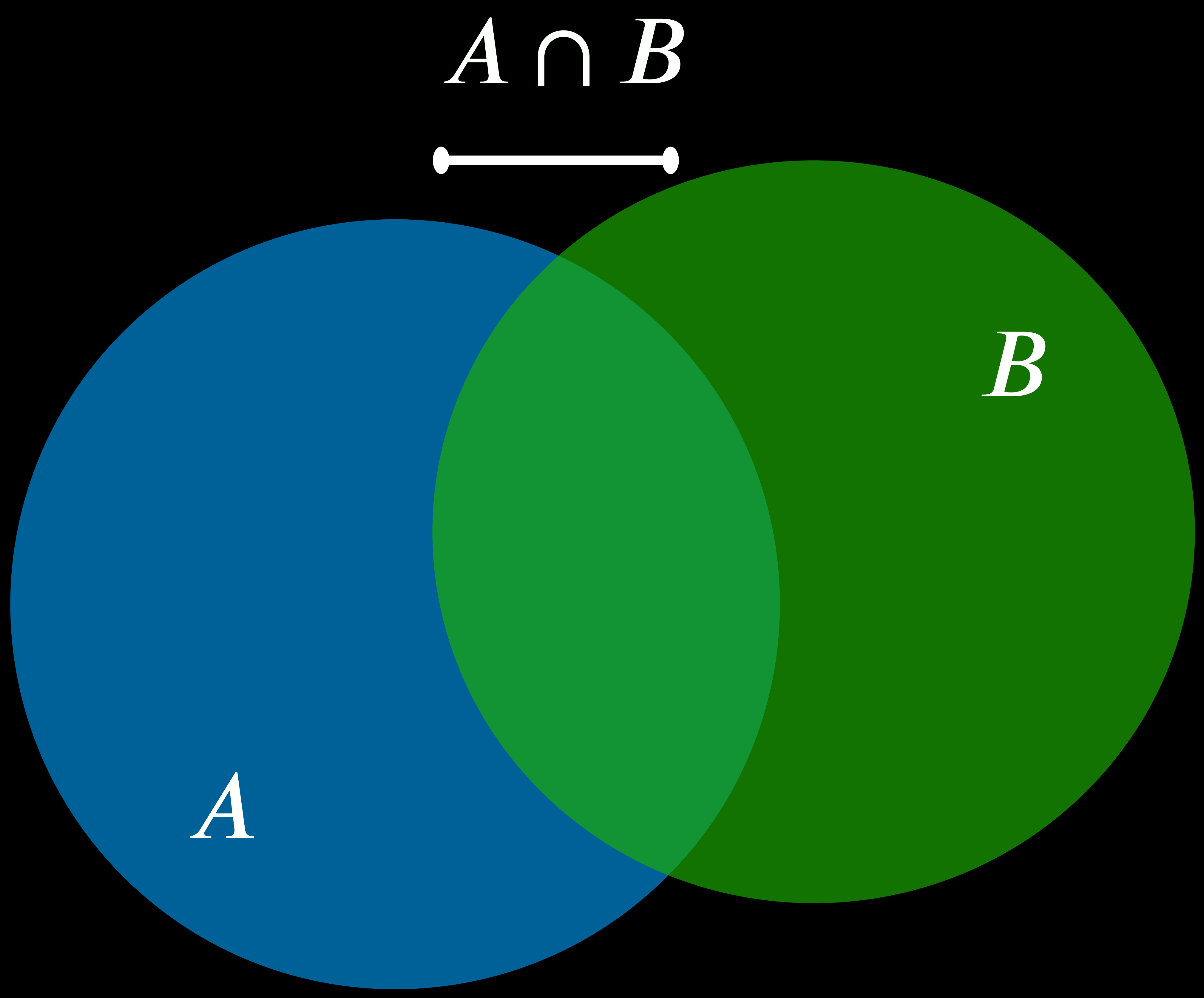
Congiunzione di eventi indipendenti

- La probabilità che si verifichino insieme due eventi indipendenti è uguale al prodotto delle probabilità dei due eventi separati.
- La probabilità che lanciando due volte un dado esca 6 entrambe le volte è 1/6x1/6=1/36.
- Se A ed B sono eventi indipendenti:

$$P(A e B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$$

Congiunzione di eventi indipendenti

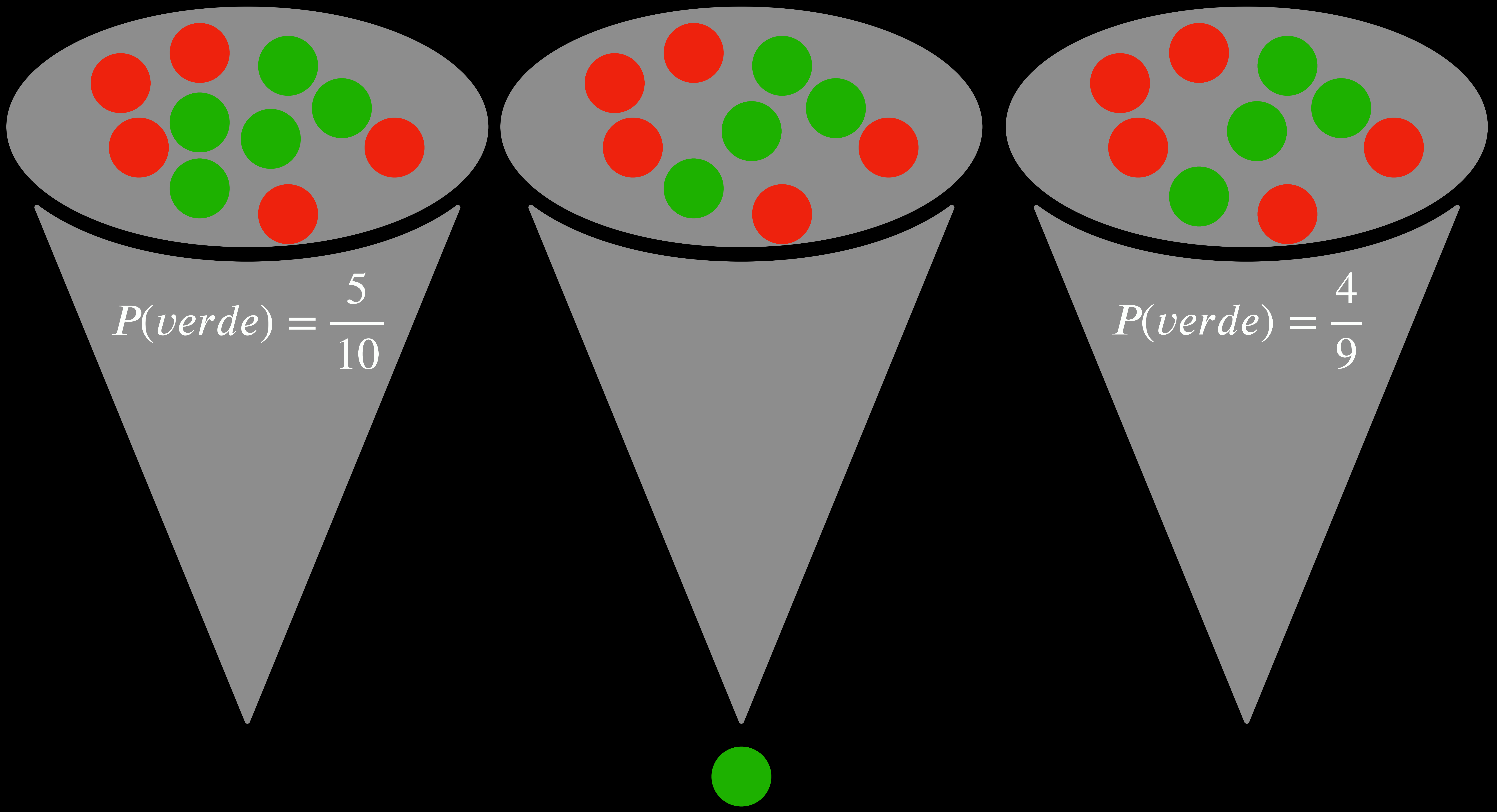


$$P(A e B) = P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$$

Congiunzione di eventi non indipendenti

- Supponete che in un’urna ci siano 10 palline, 5 rosse e 5 verdi
- Qual è la probabilità che in due estrazioni consecutive in cui non reinserisco la pallina, la pallina estratta sia in entrambi i casi verde?
  - A = la prima pallina estratta è verde
  - B = la seconda pallina estratta è verde
- A e B **non** sono indipendenti
- La probabilità di A è 5/10. Ma la probabilità di B, *dato che A si è verificato*, è 4/9

Congiunzione di eventi non indipendenti



Probabilità e definizione classica

Problemi

- Cosa vuol dire che i casi sono “ugualmente possibili”?
- Se “ugualmente possibili” significa “ugualmente probabili” c’è un sospetto di circolarità.
- Come si fa a stabilire che i casi sono ugualmente probabili?
- Cosa si fa nel caso in cui gli esiti palesemente non sono “ugualmente possibili”? Qual è la probabilità che esca un 6 se il dado è truccato? O la probabilità che la Juventus vinca domenica prossima?

La definizione frequentista di probabilità

Definizione frequentista

La probabilità di un evento E è il limite della frequenza (relativa) dei successi, cioè del verificarsi dell'evento, quando il numero delle prove tende all'infinito:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n}.$$

Definizione frequentista

Esempio

- Se lancio una moneta un gran numero di volte, la frequenza del risultato Testa (o Croce), cioè il rapporto fra il numero di volte in cui esce Testa (o Croce) e il numero di lanci effettuati, tende a stabilizzarsi intorno a un valore P ben definito (per esempio il 50% se la moneta è corretta).
- Secondo la concezione frequentista la probabilità che lanciando quella moneta esca Testa (o Croce) non è altro che questo valore verso il quale tenderebbe a stabilizzarsi la frequenza.

Leggi fondamentali della probabilità

Legge generale del prodotto

$$P(A\ e\ B) = P(A) \times P(B\,|\,A)$$
$$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B\,|\,A)$$

Legge generale della somma

$$P(A\ oppure\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ e\ B)$$
$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Legge delle probabilità complementari

$$P(non\ E) = 1 - P(E)$$
$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

Probabilità condizionata

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\ e\ B)}{P(A)}$$

Leggi fondamentali della probabilità

Le leggi fondamentali della probabilità sono valide **sia** per l’interpretazione frequentista **sia** per quella classica

Probabilità e definizione frequentista

Problemi // 1

- La definizione è abbastanza oscura
- Perché la definizione abbia senso è necessario che gli esperimenti casuali siano ripetuti esattamente nelle stesse condizioni.
- Ma come si fa a sapere che le condizioni sono le stesse?
- Quali sono le variazioni che possono influire sul risultato?
- Come distinguiamo le variazioni che influiscono sul risultato da quelle che non influiscono sul risultato?

Probabilità e definizione frequentista

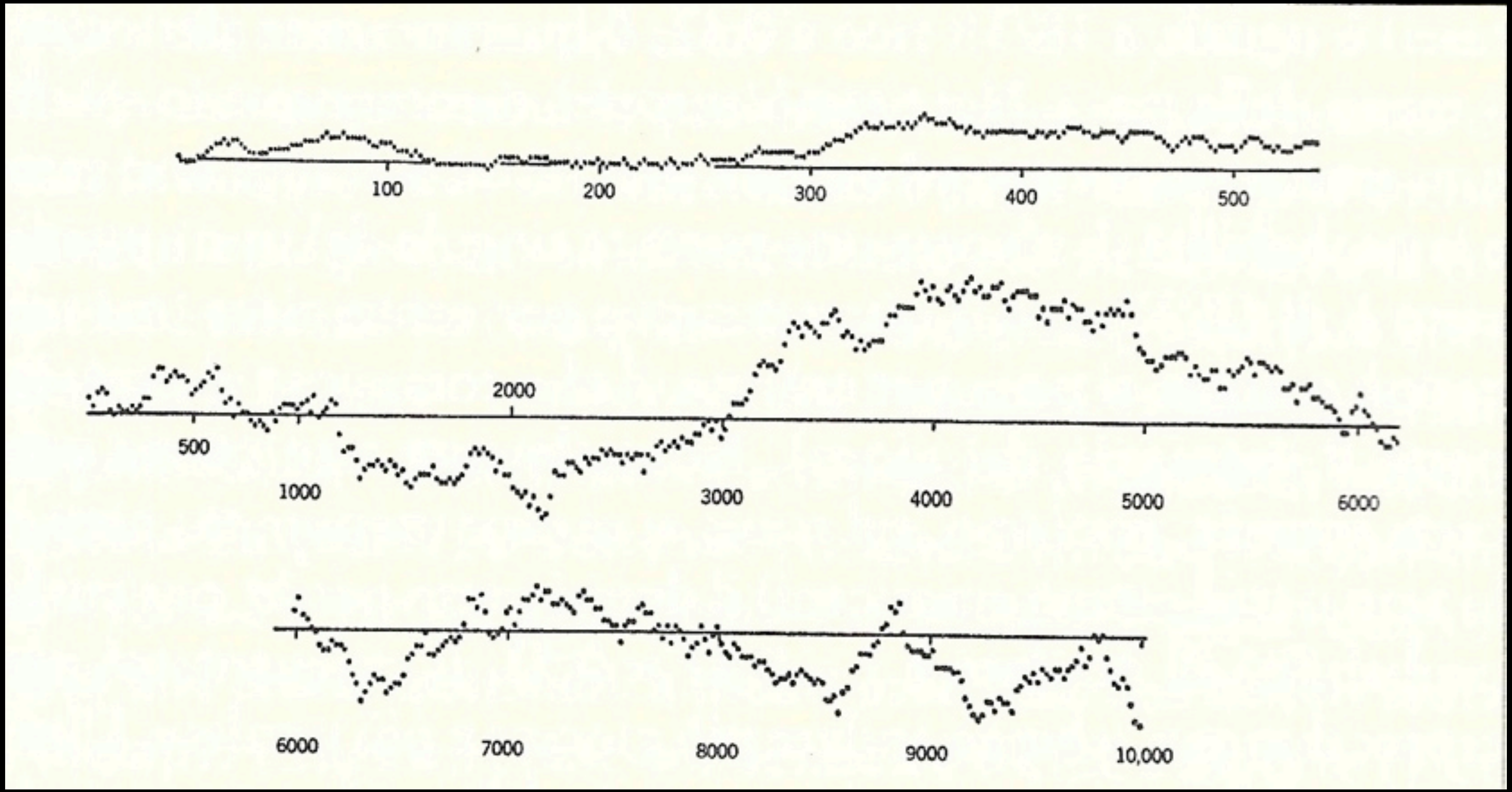
Problemi // 2

- Come facciamo a sapere che la frequenza effettivamente tende a un limite?

- Ma anche se così fosse, perché la definizione sia operativa dovremmo saperne di più sul modo in cui converge verso questo presunto limite

Probabilità e definizione frequentista

Simulazione di 10.000 lanci una moneta corretta



Probabilità e definizione frequentista

Problemi // 3

- Ma il problema principale della definizione frequentista è forse che essa non è in grado di spiegare l'assegnazione di probabilità a eventi singoli, che ovviamente non sono ripetibili indefinitamente nelle stesse condizioni
    - Qual è la probabilità che la Juventus vinca il campionato 2023/2024?
    - Qual è la probabilità lo studente X passi l'esame?
    - Qual è la probabilità che esploda la centrale nucleare di ultima generazione appena costruita?
    - Qual è la probabilità che Mr. X vinca le prossime elezioni presidenziali negli Stati Uniti?

La definizione soggettivista di probabilità

- Secondo la concezione soggettivista della probabilità, la probabilità misura il grado di credenza di un individuo nel verificarsi o meno di un evento
- Le probabilità sono dunque soggettive (addirittura personali) per definizione e si rivelano nella disponibilità o meno ad accettare determinate scommesse

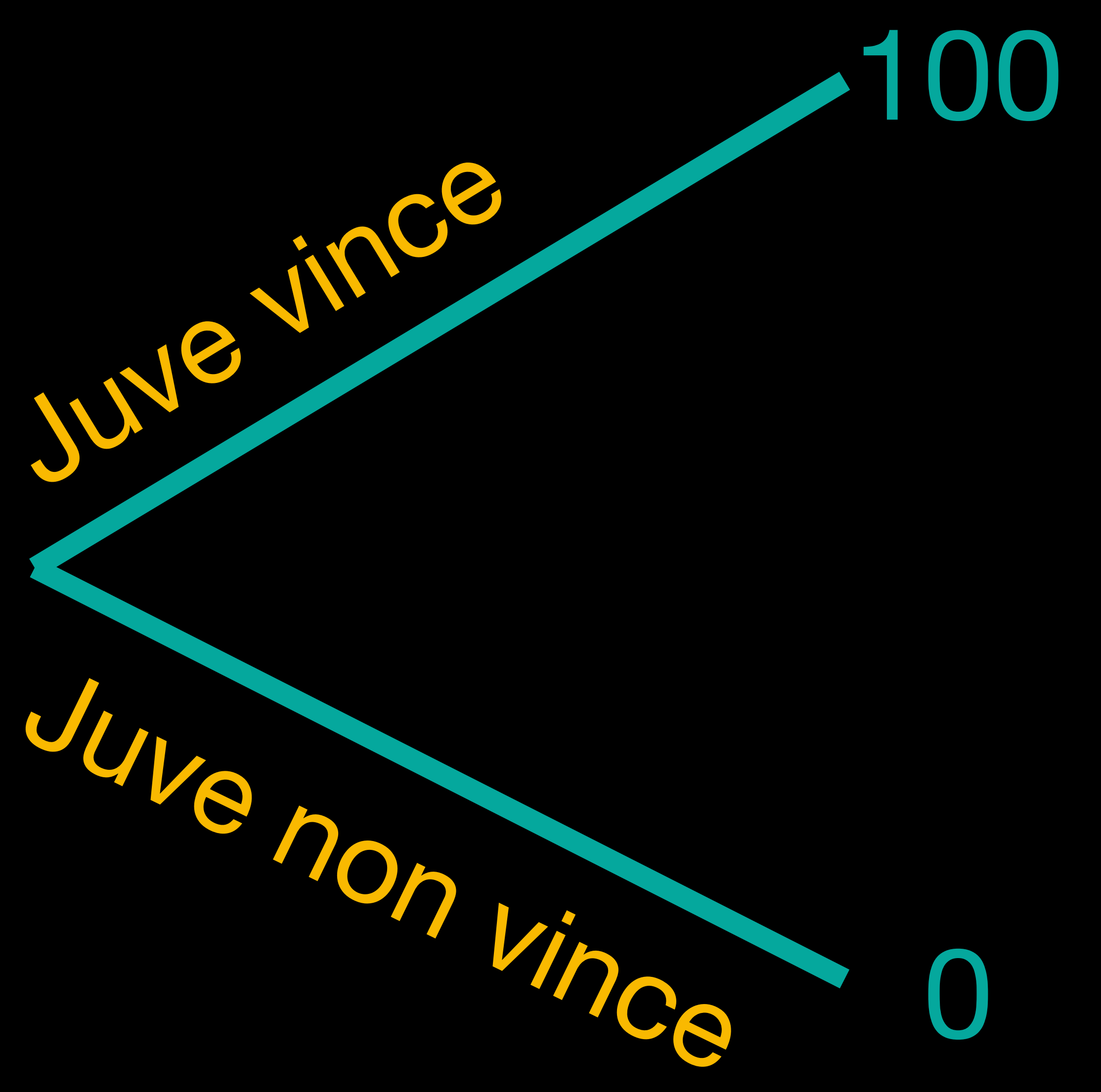
Il gioco di Bruno De Finetti

- Un vostro amico vi dice di essere sicuro “al 99%” che la Juventus vincerà il campionato
- Voi potete chiedergli: preferisci avere 1000 euro se la Juventus vince oppure se estrai una pallina bianca da un’urna che ne contiene 98 bianche e 2 nere?
- Se accetta la seconda alternativa, vuol dire che la sua “vera” probabilità soggettiva è inferiore al 99%
- Continuando il gioco si arriverà a un punto in cui il vostro amico è indifferente fra le due alternative.
- Se per esempio questo punto è raggiunto quando l’urna contiene 80 palline bianche e 20 nere, vuol dire che la sua vera probabilità soggettiva è dell’80%

Prezzo equo // 1

- Supponete che vi venga offerto un biglietto di una lotteria che vi dà 100 euro se la Juventus vince il campionato e nulla se la Juventus non vince il campionato

- Il prezzo che siete disposti a pagare per questo biglietto dipende dal vostro grado di fiducia nel fatto che la Juventus vinca il campionato

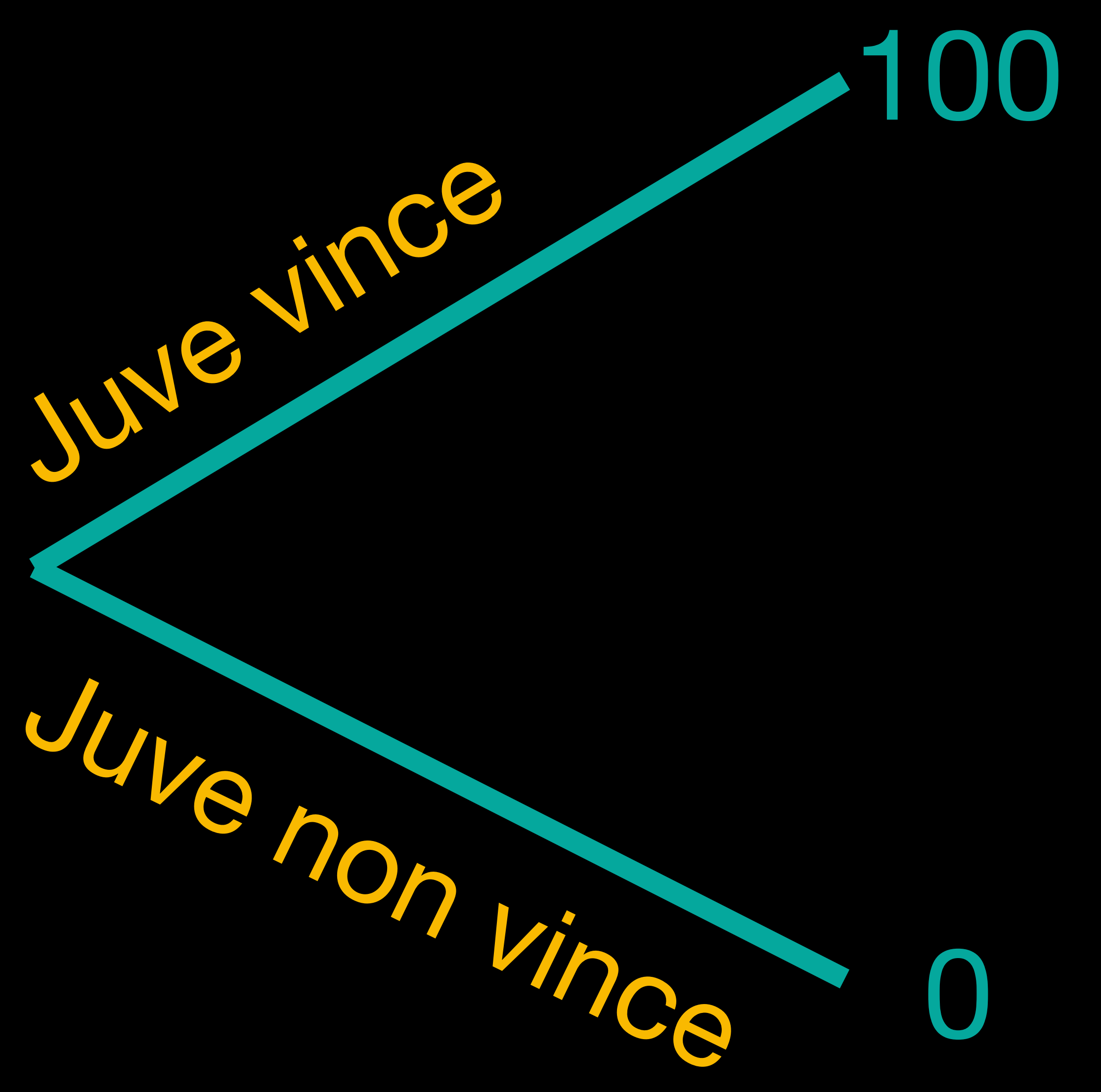


Prezzo equo // 2

- Se siete sicuri al 100% che la Juventus vincerà il campionato, sarete disposti a pagare qualsiasi prezzo (fino a 100 euro) per un biglietto di questa lotteria.

- Se siete sicuri al 100% che la Juventus non vincerà, non sarete disposti a pagare nulla

- In tutti i casi intermedi ci sarà sempre un prezzo massimo che sarete disposti a pagare per comprare un biglietto e un prezzo minimo per il quale sareste disposti a venderlo.



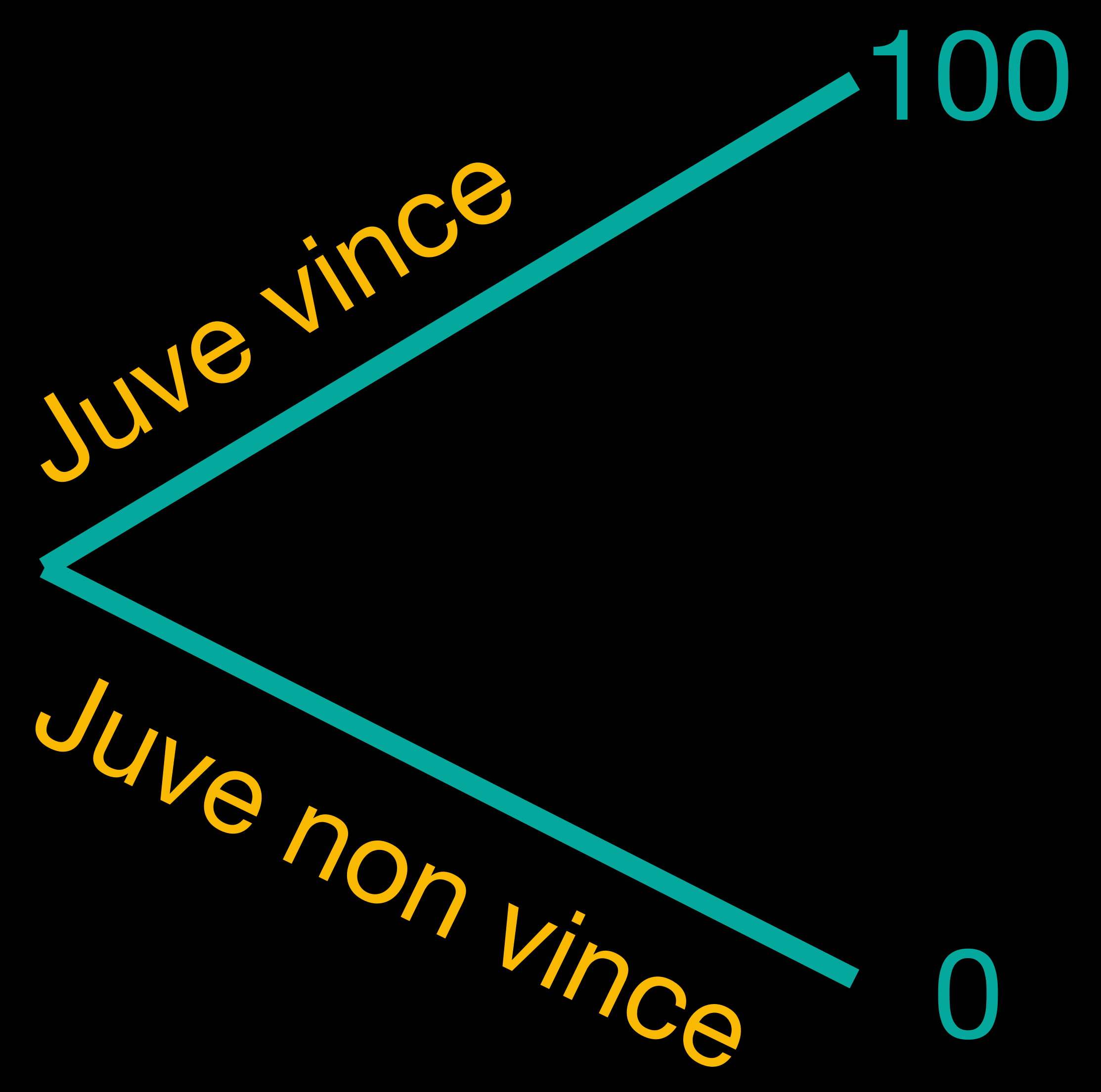
Prezzo equo // 3

- C’è sempre un prezzo P per il quale vi è indifferente comprare un biglietto per P euro, vendere un biglietto per P euro o non giocare affatto

- Questo prezzo P è il prezzo equo della lotteria.

- In tal caso la vostra probabilità soggettiva che la Juventus vinca il campionato è P/100

- Per esempio, se il prezzo equo per voi è 70 euro, la vostra probabilità soggettiva che la Juventus vinca il campionato è del 70%

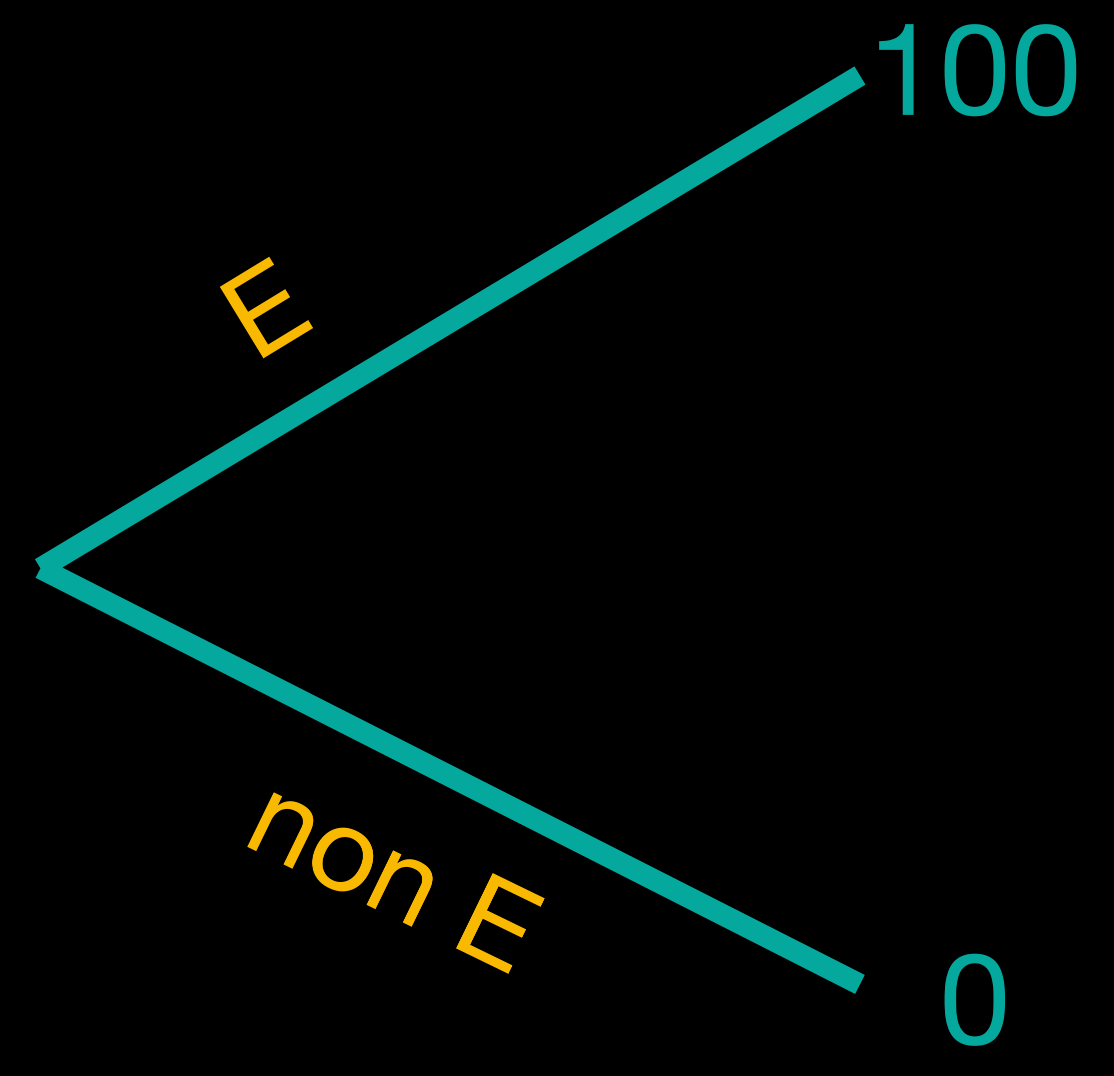


Valutazione della probabilità soggettiva

In generale, la probabilità soggettiva di un evento *E* per un dato individuo x è

$$\frac{P}{100}$$

dove *P* è il prezzo equo per x della scommessa:



Valutazione della probabilità soggettiva // 2

- Il prezzo per voi equo di una lotteria è ovviamente influenzato dalle informazioni che avete a disposizione (nel caso di una partita di calcio: giocatori disponibili, stato di forma delle squadre, etc.)

- Dunque le probabilità soggettive (diverse da individuo a individuo) dipendono dalle informazioni che sono disponibili all'individuo che le assegna e si rivelano nella disponibilità o meno ad accettare certe scommesse

Argomento della scommessa olandese

- Supponiamo che, pur valutando 0,6 la probabilità di vittoria dell'Inter e 0,2 la probabilità di vittoria dell'Empoli io valutassi 0,75 la probabilità di vittoria di una delle due squadre, contro le regole del calcolo delle probabilità.
- Allora io dovrei essere contemporaneamente disposto a:
  - ✓ Comprare per 25 euro la promessa di ricevere 100 se Inter ed Empoli pareggiano
  - ✓ Comprare per 60 euro la promessa di ricevere 100 euro se vince l'Inter
  - ✓ Comprare per 20 euro la promessa di ricevere 100 euro se vince l'Empoli

Argomento della scommessa olandese

- Devo essere contemporaneamente disposto a:
    - ✓ Comprare per 25 euro la promessa di ricevere 100 se Inter ed Empoli pareggiano
    - ✓ Comprare per 60 euro la promessa di ricevere 100 euro se vince l’Inter
    - ✓ Comprare per 20 euro la promessa di ricevere 100 euro se vince l’Empoli

- In ciascun caso perdo 5 euro

Probabilità soggettiva e vincoli di razionalità

- L’argomento della scommessa olandese mostra che un individuo razionale, per quanto sia libero di assegnare le probabilità iniziali agli eventi elementari nel modo che corrisponde al proprio “stato d’animo”, è obbligato ad essere coerente nell’assegnare le probabilità agli eventi complessi.

- In generale l’argomento della scommessa olandese viene usato per dimostrare che per un individuo razionale è inevitabile rispettare le leggi della probabilità.

Vantaggi della concezione soggettivista

- E’ una definizione chiara e coerente
- Ha un ambito di applicazione praticamente illimitato.
- Può essere applicata in tutti i casi in cui possono essere applicate la definizione classica e quella frequentista.
- Ma può essere applicata anche a eventi unici e irripetibili (ai quali non può essere applicata la definizione frequentista) in cui i casi possibili non sono ugualmente probabili (per cui non può essere applicata neanche quella classica)
    - Qual è la probabilità che vi sia un incidente nella centrale nucleare appena costruita?
    - Qual è la probabilità che il Barcellona vinca la Champions League?