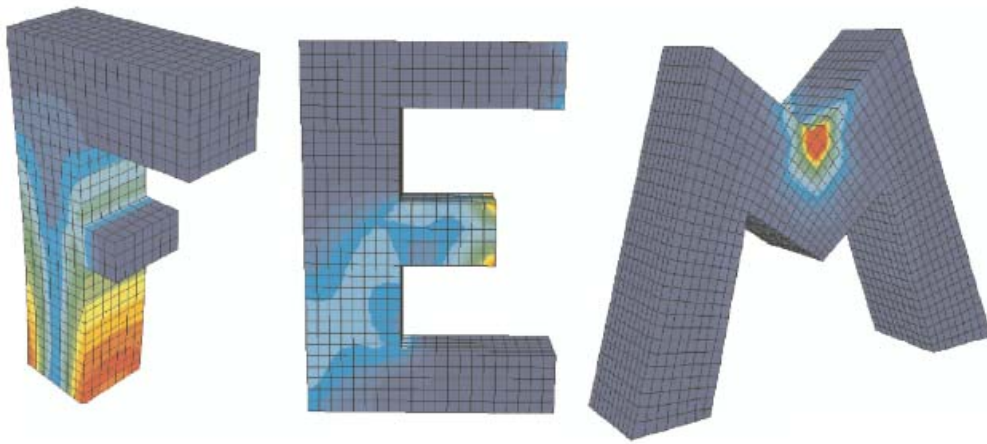


Gymnasium Ottobrunn
Seminarfach Informatik im Schuljahr
2006/2008

Thema: Die Methode der Finiten Elemente



Vorgelegt von
Stefan Deml
Joh.-Seb.-Bach Str. 8a
85521 Ottobrunn

am 17.08.2007

Prüfer: Hr. Brichzin

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Prinzip der Methode der Finiten Elemente (FEM) vorgestellt. Bei dieser Methode handelt es sich um ein computergestütztes Berechnungsverfahren, mit dem in der Regel alle in der Ingenieurswelt auftretenden Problemfälle, von der Belastung einer Feder bis zur Lebensdauervorhersage eines Flugzeugtriebwerks, simuliert werden können.

Dabei lässt sich diese allgemeine Einführung in zwei große Themenbereiche einteilen. Zuerst steht vor allem die Theorie dieser Berechnungsmethode im Vordergrund. Es wird die Grundidee aufgezeigt und der mathematische Hintergrund für einfache Simulationen hergeleitet.

Danach überwiegt die praktische Anwendung der FEM. Es wird unter anderem die Application „Calculix“ anhand eines kleinen Workshops vorgestellt, welche es ermöglicht, selbst diverse Bauteilanalysen durchzuführen, und ein industrienahes Verwendungsbeispiel gezeigt. An dieser Stelle wird ein realistisches Bauteil von einem Flugzeugtriebwerk der Firma MTU AeroEngines auf Haltbarkeit überprüft.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Einführung in die FEM	2
1.1. Entwicklung.....	2
1.2. Generelles Prinzip der FEM.....	2
1.3. Anwendungsgebiete.....	3
2. Formulierung von FEM-Modellen	4
2.1. Differentialgleichung.....	4
2.2. Prinzip der virtuellen Verschiebungen.....	5
2.3. Das Ritz'sche Verfahren.....	8
3. Herleitung des Finiten Stabmodells	11
3.1. Näherung der Verschiebungen.....	12
3.2. Dehnung.....	14
3.3. Spannung.....	14
3.4. Anwenden des Prinzips der virtuellen Verschiebungen.....	14
3.5. Berechnung eines Beispiels.....	16
4. Gleichungslöser	20
5. Anwendung der Software Calculix	23
5.1. Erstellung eines Objektes.....	23
5.2. Gleichungslöser.....	28
5.3. Auswertung der Ergebnisse.....	30
6. Genauigkeit der FEM-Berechnung	35
7. Berechnung der Haltbarkeit einer Verdichterschaukel	37
Schluss	43
Literaturverzeichnis	44
Abbildungsverzeichnis	46
Anhang	47
A. Exkurs „von Mises Spannungen“.....	47
B. DVD zur Facharbeit.....	

Einleitung

Das Aufkommen und die rasante Weiterentwicklung der elektronischen Datenverarbeitung in den letzten Jahrzehnten eröffneten in vielen Ingenieursdisziplinen völlig neue Möglichkeiten. So lassen sich heute höchst komplizierte physikalische Vorgänge, wie zum Beispiel ein PKW–Crash, die früher ausschließlich in aufwändigen Versuchen nachgebildet werden konnten, auf einem Computer immer exakter simulieren. Während ein Versuch normalerweise ein fertiges Modell oder einen Prototypen verlangt, kann eine Simulation schon im Frühstadium der Entwicklung Aufschluss über bestimmte Verhaltensmuster geben.

Ein solches Näherungsverfahren, das sich in den letzten Jahren zu einem unverzichtbaren Werkzeug im Bereich des Ingenieurwesens entwickelt hat, ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Sie ist heute „das am weitesten verbreitete Verfahren zur Berechnung komplexer Strukturen im Maschinenbau, im Bauwesen sowie der Fahrzeugs-, Luft- und Raumfahrttechnik“. [WI06 S.3]

1. Einführung in die FEM

1.1. Entwicklung

Die Methode der Finiten Elemente entstand zeitgleich mit dem Auftreten der ersten Digitalrechner in Deutschland und in den Vereinigten Staaten während des zweiten Weltkriegs. Diese Computer dienten jedoch nur der Berechnung von Geschossbahnen für die Artillerie. So war es nicht die Erfindung des Computers, die die Entwicklung der FEM vorantrieb, sondern eine andere zeitgleiche Errungenschaft der Technik, der Düsenjet. Die Hersteller standen vor dem Problem, dass sie für derartig hohe Geschwindigkeiten keine Tragflügel zur Verfügung hatten und die Erprobung neuer Konzepte extrem aufwändig war. So kam es dazu, dass in den 50er Jahren bei Boeing in Seattle die zwei Ingenieure J. Turner und R. Clough erste Versuche unternahmen, die Verformung von Tragflügeln unter starker Strömung durch eine statische Berechnung am Großrechner durchzuführen. Somit gilt 1956 als die Geburtsstunde der FEM, als bei Boeing die heutzutage bekannten Pfeilflügel für Düsenjets entwickelt wurden. [vgl. RH00 S.1]

1.2. Generelles Prinzip der FEM

Das übliche Vorgehen [vgl. WI06 S.4] beim Lösen von komplexen mathematischen Problemen besteht in der Regel darin, die vorliegende Aufgabenstellung so zu vereinfachen, dass bekannte Rechenansätze und Methoden darauf angewendet werden können. Für die Mechanik bedeutet das, einen Weg zu suchen, durch den es gelingt, ein diffiziles Bauteil so zu vereinfachen, dass man die gesuchten Größen problemlos berechnen kann. Genau hier setzt die Grundidee der FEM an: Das meist sehr komplizierte Objekt wird in eine große Anzahl endlich kleiner, analytisch lösbarer Teile, die Finiten Elemente, zerlegt. Dies kann man sich wie ein Baukastenspiel vorstellen, wo man versucht, sein gewünschtes Objekt durch eine Vielzahl von kleinen vorhandenen Teilstücken zusammenzusetzen. Dieser Vorgang wird in der Fachliteratur meist als *Diskretisierung* bezeichnet. Die Geometrie der Finiten Elemente ist durch Knoten, also Eck- bzw. Endpunkte des Teilchens definiert. Für diese einfachen Elemente können Beziehungen, zum Beispiel zwischen den Kräften und den Verformungen an den Randknoten, formuliert werden. Durch die Verknüpfungsbedingung an den jeweiligen Knoten zwischen zwei Elementen – hier muss die Verschiebung gleich sein – kann die Verformung der Gesamtstruktur an jedem Knotenpunkt berechnet werden. So erhält man für jeden Knoten die Verschiebung und kann daraus die Knotenkräfte, Elementverformungen und Spannungen im jeweiligen Element bestimmen. Das Gesamtverhalten eines Bauteils wird dann durch die Gesamtheit der Elemente ausgedrückt. Es handelt sich folglich um eine Näherung mit Abweichung von der exakten Lösung, da man von den einzelnen Elementen auf die gesamte Konstruktion rückschließt. Dafür können komplexe Probleme berechnet werden, die einer exakten Lösung nicht mehr offen stehen.

So ergibt sich folgendes Ablaufschema [vgl. MM89 26] einer typischen FEM Berechnung:

1. Preprocessing (Vorlauf)
 - a) Erzeugen der Knotengeometrie der Konstruktion
 - b) Festlegen des Finiten-Element-Typs
 - c) Vernetzen (Beschreiben der Konstruktion durch eine Summe von Finiten Elementen)
2. Solver (Aufbau und Lösen des FE-Systems)
 - a) Aussagen über die verwendeten Werkstoffe
 - b) Anwenden der Elementsteifigkeitsbeziehung der Elemente (Vorgeben der Verknüpfungsbedingungen)
 - c) Zusammenbau zum Gesamtsystem für das komplette Modell
 - d) Definition der Randbedingungen und Belastungen
 - e) Lösen des Gleichungssystems
 - f) Berechnen der unbekannten Knotenverschiebungen
3. Postprocessing (Nachlauf)
 - a) Nachlaufrechnung (z.B. Rückrechnung der Spannungen in jedem einzelnen Element)
 - b) Bilden der Durchschnittswerte und graphische Darstellung
 - c) Ergebnisbewertung und -auswertung

1.3. Anwendungsgebiete

Die Methode der Finiten Elemente findet in folgenden Gebieten Verwendung:[vgl. WI06 S.7]

1. Statik (Verformungen, Spannungen, thermische Belastungen, ..)
2. Dynamik (Eigenfrequenzen, Eigenformen, Ermüdung,...)
3. Stabilitätsprobleme (Lastenberechnung,..)
4. Crash-Verhalten (Verformungen, Aufprallsimulationen,..)
5. Umformvorgänge (Schmieden, Ziehen, Biegen..)

Dabei sind die Erwartungen an die FEM Simulation einerseits die Senkung der Entwicklungszeit und -kosten sowie andererseits die Minimierung von Versuchsreihen, der Produktionskosten und des Materialeinsatzes. Die Hauptaufgabe besteht somit in dem frühzeitigen Erkennen von Schwachstellen der Konstruktion.

2. Formulierung von FEM-Modellen

Bei der FEM-Methode werden Verschiebungsmodelle behandelt (siehe Kapitel 1.2). Es wird also die Verschiebung von jedem Knotenpunkt des Elements errechnet. Dies macht Sinn, denn man kann von der Verschiebung direkt auf alle anderen interessanten Größen schließen, was die Formeln der allgemeinen Elementsteifigkeit deutlich machen:

1. Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung [vgl. RH00 S. 24 f.]

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad \text{die Ableitung der Verschiebung } u \text{ ist die Verzerrung } \epsilon$$

2. Stoffgesetz [vgl. HA03 S. 11]

$$\sigma = \epsilon E \quad \text{die Spannung } \sigma \text{ ist das Produkt aus Verzerrung und dem Elastizitätsmodul } E$$

3. Gleichgewichtsbedingung [vgl. FÖ S.1]

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{die Spannung ist der Bruch aus der wirkenden Kraft } F \text{ und der dazu gehörenden Fläche } A$$

Um nun von der auf das Element wirkenden Kraft auf ihre Verschiebung zu gelangen, gibt es drei Wege.

2.1. Differentialgleichung

Aus dem Physikunterricht ist das Hooke'sche Gesetz bekannt:

$$F = Ku$$

Es gibt folglich eine lineare Beziehung zwischen der Kraft F , die auf die Feder wirkt, und dem Weg, um den sie ausgelenkt wird u .

Wenn man nun die Federsteifigkeit K mit $\frac{EA}{l}$ ersetzt [vgl. HE S. 4], erhält man die allgemeine Elementsteifigkeitsbeziehung:

$$F = \frac{EA}{l} u$$

Dabei steht E für das Elastizitätsmodul, das den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei der Belastung F beschreibt und A für die Fläche bzw. l für die Länge des Objektes.

Diese Gleichung kann nun nach der gesuchten Verschiebung aufgelöst werden:

$$u(x=l) = \frac{Fl}{EA}$$

Dieser Term lässt sich auch durch das Einsetzen der oben genannten Formeln herleiten. Dies wird nun an einem einfachen Beispiel gezeigt:

Ein Stab ist auf seiner linken Seite fest eingespannt, diese Seite ist somit unbeweglich fixiert. Auf der gegenüberliegenden Seite greift eine Kraft F an. Der Stab be-

sitzt eine Länge l , mit einem Querschnitt der Größe A , sowie einem Elastizitätsmodul der konstanten Größe E . Gesucht ist nun die Verformung an der Kraftangriffsstelle.

Die drei Gleichungen werden wie folgt verknüpft:

a) Gleichung 1 in 2 einsetzen:

$$\sigma = \frac{du}{dx} \epsilon$$

b) mit Gleichung 3 erhält man:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{F}{EA}$$

Diese Gleichung beschreibt das Ergebnis über die Ableitung der gesuchte Größe. Mit dem Schulstoff der 12. Jahrgangsstufe kann man diese Differentialgleichung durch Integration in eine nützlichere Gleichung überführen:

$$u = \frac{F}{EA} x + C$$

Aus der Randbedingung der Aufgabenstellung, dass eine feste Einspannung auf der linken Seite vorliegt, folgt $u(0)=0$. Die Konstante C muss somit verschwinden und es ergibt sich folgende Gleichung für $u(x)$:

$$u = \frac{F}{EA} x$$

bzw. für die gesuchte Stelle am rechten Rand:

$$u(l) = \frac{Fl}{EA}$$

Diese Herleitungsmethode ermöglicht aber nur für Sonderfälle eine analytische Lösung, denn sie stößt schnell an ihre Grenzen. Zum Beispiel ist eine korrekte Lösung nicht mehr möglich, wenn die Verteilung der Lasten auf einem Balken nicht konstant ist oder wenn sich der Querschnitt A ständig ändert (vgl. einen Nagelspitze,...). Das Ziel liegt aber darin, jedes noch so komplizierte Bauteil berechnen zu können, weshalb sich die Differentialmethode als ungeeignet herausstellt.

2.2. Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Um auch kompliziertere Verschiebungsprobleme lösen zu können, geht die FEM einen Weg, der von der analytischen Lösung abweicht: Sie geht von einer energetischen Formulierung des Problems, also von Aussagen über die vorliegenden Arbeiten des gesamten Modells, aus.

Dabei versucht man die Kurve der Verschiebung $u(x)$ über das Gesamtpotential des elastischen Körpers, auch II-Potential genannt, zu errechnen. Dies ist durch die Differenz der inneren und äußeren Arbeit definiert:

$$II = W_i - W_a$$

Aussage des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PvV):

Für das Gesamtpotential eines elastischen Körpers lässt sich sagen, dass es für die wirkliche Verschiebung, die dem Gleichgewichtszustand entspricht, einen stationären Wert aufweist. [vgl. MM89 S. 136 ff. / S. 161 ff. und GB S.9/1.6 ff.]¹

Dies soll im folgenden an einem Beispiel verdeutlicht werden:



Abbildung 2.1:
Versuchsbeschreibung

Man nehme ein 30cm Lineal und fixiere einen Teil davon auf einem Tisch. Wenn man nun ein Gewicht auf die freie Seite des Lineals stellt, fängt das Objekt an zu schwingen, bis sich irgendwann ein Gleichgewichtszustand einstellt. Dabei lässt sich der Potentialverlauf des Balkens in einem II-Diagramm darstellen:

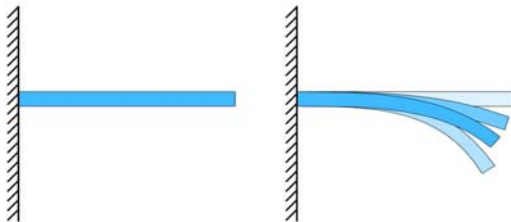


Abbildung 2.3: Schwingender Balken

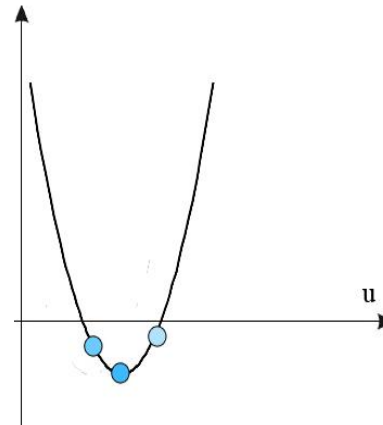


Abbildung 2.2: Schwingung graphisch dargestellt

Bei dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen sucht man die Lösung des Problems also über Extremalaussagen:

Die Funktion des Gesamtpotentials Π muss an der Stelle ihrer wirklichen Verschiebung ein Minimum besitzen. Diese Aufgabenstellung lässt sich leicht mit dem Stoff der 11. Klasse lösen, nämlich dem Nullsetzen der ersten Ableitung von Π nach der unbekannten Verschiebung.

Die Anwendung des PvV soll nun an einem alternativen Lösungsweg für das Eingangsbeispiel gezeigt werden:

Für das vorliegende Stabproblem ergibt sich das Gesamtpotential in Form des folgenden Terms:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma(u) \epsilon(u) dV - Fu$$

¹ für weitere energetische Hintergründe vgl. [SL]

Dieser setzt sich aus der Verformungsarbeit:[vgl. HA03 S. 192 und TU S. 15]

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma(u) \epsilon(u) dV$$

und der allgemeinen Arbeitsdefinition (Kraft mal Weg) [HH05 S. 13]

$$W_a = Fu \quad \text{zusammen.}$$

Um von dieser Funktion das Minimum suchen zu können, muss sie erst erfolgreich integriert werden. Dies gelingt wegen den vorhandenen Unbekannten erst nach einer Vereinfachung,

1. Die Verzerrung ϵ für einen Stab mit konstantem Durchmesser ist laut Hooke durch $\frac{\Delta l}{l}$ definiert. [vgl. HA03 S. 7]

$$\text{In diesem Fall ergibt sich somit } \epsilon = \frac{\bar{l}}{l}$$

wobei \bar{l} für die Länge steht, um die sich der Stab durch die Belastung streckt.

2. Eingesetzt in das Stoffgesetz führt dies zu:

$$\sigma = \epsilon E = \frac{\bar{l}}{l} E$$

3. Da die Verschiebungslänge am rechten Rand mit \bar{l} abgekürzt wird, folgt für die äußere Arbeit:

$$W_a = F \bar{l}$$

Das Gesamtpotential wird so zu:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \frac{\bar{l}}{l} E \frac{\bar{l}}{l} dV - F \bar{l} \quad \text{mit } dV = A dx, \text{ da es sich nur um eine ein-}$$

eindimensionale Problemstellung handelt:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\bar{l}}{l} A E \frac{\bar{l}}{l} dx - F \bar{l} \quad \text{und ausmultipliziert:}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l A E \frac{\bar{l}^2}{l^2} dx - F \bar{l} \quad \text{nach dem Ausklammern aller Konstanten:}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} A E \frac{\bar{l}^2}{l^2} \int_0^l dx - F \bar{l}$$

Diese Gleichung lässt sich nun problemlos integrieren und führt zu folgendem Ergebnis:

$$\Pi = \frac{1}{2} A E \frac{\bar{l}^2 l}{l^2} - F \bar{l}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi = \frac{1}{2} A E \frac{\bar{l}^2}{l} - F \bar{l}$$

Wie schon oben beschrieben, muss nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Ableitung dieser Funktion an ihrer Nullstelle die gesuchte Verschiebung zum Ergebnis haben.

$$\frac{d \Pi}{d \bar{l}} = 0 = \frac{A E \bar{l}}{l} - F$$

Dieser Term nach der wirklichen Verschiebung aufgelöst, ergibt die gesuchte Verschiebung \bar{l} an der Kraftangriffsstelle:

$$\bar{l} = u(l) = \frac{F l}{E A}$$

Das Ergebnis aus dem Ansatz der virtuellen Verschiebungen entspricht also genau der Gleichung, die man per Einsetzen der Differentialgleichungen aus Kapitel 2.1 erhält. Der große Unterschied ist jedoch, dass dieses Ergebnis auf Grund der Berechnung über das Gesamtpotential nur noch im integralen Sinne, also für den gesamten Stab gilt, und nicht mehr in jedem einzelnen Punkt des Modells. Das Aufstellen der Gesamtpotentialgleichung stellt den Ausgangspunkt jeder Herleitung eines Finiten-Elements dar und macht sie zum Gegenteil der Finiten-Differenzen-Methode.

Bei dem hier betrachteten Beispiel ließ sich die Dehnung ϵ und damit auch die Spannung σ einfach über die Verformung ausdrücken. Nur auf diese Weise war es möglich, die Gleichung II zu integrieren. In der Regel ist die Dehnungsverteilung im betrachteten Körper jedoch unbekannt. Man kann sie nicht einfach wie bei dem Stabmodell durch $\epsilon = \frac{\bar{l}}{l}$ ersetzen und aus dem Integral herausziehen.

Um trotzdem die Berechnung komplexer Modelle zu ermöglichen, muss ein allgemeiner Ansatz entwickelt werden, mit Hilfe dessen sich die Lösungsfunktion $u(x)$ beschreiben lässt.

2.3. Das Ritz'sche Verfahren

Bei der Methode von Ritz [vgl. WI06 S. 13 und MM89 S. 42 und RH00 S. 51ff.] löst man sich komplett von der natürlichen Struktur des Modells und nähert die gesuchte Verschiebungsfunktion mittels einer Ansatzfunktion an. Folglich wird versucht die Verformung durch eine einfache Funktion mit unbekannten Variablen zu beschreiben. Damit gelingt es, das Problem von der Lösung einer Differentialgleichung auf die Lösung eines algebraischen Gleichungssystems überzuführen und den Integrationsprozess für die Lösung der Potentialgleichung stark zu vereinfachen.

Um dieses Vorgehen zu verdeutlichen, wird wiederum das Beispiel aus den vorangegangenen Herleitungen herangezogen: Das einfache Stabmodell.

Demzufolge wird eine Funktion gesucht, die von anderen Unbekannten, wie Verzerrung oder Spannung, komplett unabhängig ist und die Verschiebung näherungsweise beschreibt. Eine Betrachtung der letzten Ergebnisse lässt auf eine lineare Funktion schließen:

$$u(x) = a_2 x + a_1$$

Da die Funktion den geometrischen Randbedingungen genügen muss, lässt sie sich weiter vereinfachen: Der Stab ist auf der linken Seite fest mit der Wand verbunden, somit kann dort keine Verschiebung auftreten. Dadurch gilt $u(x=0)=0$.

$$\Rightarrow 0 = a_2 \cdot 0 + a_1 \rightarrow a_1 = 0$$

$$\Rightarrow u = a_2 x \Rightarrow W_a = F a_2 x$$

Der nun verbleibenden Koeffizient a_2 lässt sich, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bestimmen:

Zunächst kann man nun die benötigten Variablen für die Funktion des Gesamtpotentials durch die Ansatzfunktion ausdrücken, es ist keine Spezialfall wie beim Stab nötig:

1. Nach der Verträglichkeitsbedingung ergibt sich:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(a_2 x) = a_2$$

2. Eingesetzt in das Stoffgesetz erhält man für die Spannung:

$$\sigma = \epsilon E = a_2 E$$

Nun lassen sich diese Werte in Π einsetzen:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V a_2 E a_2 dV - F a_2 x$$

Mit $dV = A dx$ und $x = l$ führt

dies zu folgender Gleichung:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l A E a_2^2 dx - F a_2 l$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} A E a_2^2 \int_0^l dx - F a_2 l$$

Die man problemlos integrieren kann:

$$\Pi = \frac{1}{2} A E l a_2^2 - F l a_2$$

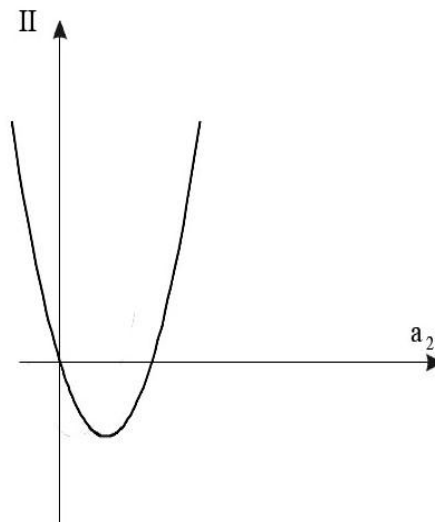


Abbildung 2.4: Graphische Darstellung des Potentialverlaufs

Man stellt fest, dass das Gesamtpotential eine herkömmliche Parabel darstellt, welche nur von einem unbekannten Koeffizienten, nämlich a_2 , abhängt.

Zum Lösen dieser Gleichung lässt sich wieder das Prinzip der virtuellen Verschiebungen anwenden, womit das Potential im Gleichgewichtszustand einen stationären Wert annehmen muss. Die unbekannte Größe a_2 lässt sich daher durch das Nullsetzen der ersten Ableitung leicht bestimmen:

$$\frac{d\Pi}{da_2} = 0$$

Somit ergibt sich aus der Potentialgleichung:

$$\frac{d\Pi}{da_2} = AEla_2 - Fl = 0$$

Und nach dem Kürzen der Konstanten l lautet das Ergebnis:

$$a_2 = \frac{F}{AE}$$

Durch Einsetzen in die Ansatzfunktion gelangt man zu folgendem Ausdruck:

$$u = \frac{F}{AE} x$$

So erhält man einen Term, der mit der exakten Lösung der Differentialgleichung aus Kapitel 2.1 übereinstimmt. Doch das Verfahren von Ritz ist auf Grund der Annäherung der Verschiebung durch eine Ansatzfunktion ein Näherungsverfahren, so dass das angeführte Beispiel wiederum einen Sonderfall darstellt.

Der Nachteil des Verfahrens von Ritz liegt folglich darin, dass man erst eine Ansatzfunktion für das Modell suchen muss. Dabei wird klar, dass sich das Ritz'sche Verfahren auf einfache Konstruktionen beschränkt, denn bei komplizierten Körpern zum Beispiel mit wellenförmigen Verschiebungen oder dreidimensionalen Objekten ist es kaum möglich die Verschiebung des gesamten Körpers mit einer Funktion zu beschreiben. Hier setzt nun die Methode der Finiten Elemente ein. Wie schon in Kapitel 1.2 vorweggenommen, wird bei der FEM das Bauteil in einzelne Teilgebiete zerlegt, auf denen sich Verschiebungsfunktionen bereichsweise definieren lassen. So wird der gesamte Verschiebungsverlauf einfach durch eine Kombination von vielen Einzelverschiebungen der Elemente angenähert. Dieses Vorgehen hat zwei entscheidenden Vorteile. Einerseits kann man durch eine dementsprechend große Anzahl von begrenzten Ansatzfunktionen, also den Finiten Elementen, jede noch so komplizierte Verschiebung, ohne zu starke Ungenauigkeiten in Kauf zu nehmen, beschreiben. Andererseits wird die Berechnung durch die Aufteilung der Struktur in andere, bekannte Elemente weitgehend unabhängig von dem eigentlichen Ausgangsobjekt. Deshalb ist es möglich, innerhalb jeder noch so komplexen Konstruktion, eine identische Elementart zu verwenden, mit gleichen Ansatzfunktionen. So muss der Ingenieur nicht mehr für jede Simulation neue Verschiebungsfunktionen suchen, sondern benötigt nur eine kleine Anzahl von Elementen mit deren Kombination sich jedes Problem beschreiben lässt. Außerdem lässt sich so der Rechenprozess schematisieren und kann automatisch von einem Computer bearbeitet werden.

Ziel ist es somit, ein kleines Repertoire an Elementen, zum Beispiel Stab, zweidimensionale Fläche und dreidimensionalen Hexaeder, zu entwickeln, mit denen sich kompliziertere Modelle abbilden lassen. Dies wird im nächsten Kapitel gezeigt.

3. Herleitung des Finiten Stabmodells

Im folgenden wird das einfachste dieser elementaren Bausteine hergeleitet – das Finite Stabelement² [vgl. WI06 S. 14 und MM89 S. 77]. Es handelt sich um einen klassischen geraden Zug-Druck-Stab, der nur in Richtung seiner Achse, also seiner Länge, verformt werden kann.

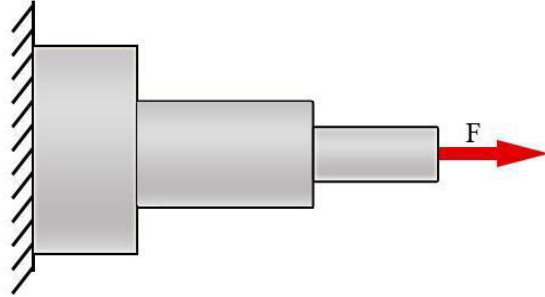


Abbildung 3.1: Stabmodell

Der zu berechnende Stab besteht aus drei Abschnitten mit jeweils unterschiedlicher Länge und verändertem Durchmesser. Außerdem wird das Modell durch eine in Längsrichtung wirkende Kraft belastet. Bei dem Versuch dieses triviale Problem mit einer Differenzialgleichung zu beschreiben, stößt man schon an die Grenzen dieser Methode. Denn der Durchmesser des Stabes ist nicht konstant, man kann die Gleichung nicht eindeutig bestimmen. Auch die Methode aus 2.2 kann nicht weiterhelfen, da man die Verzerrung nicht wie beim Eingangsbeispiel ersetzen kann. Somit wird es unmöglich, die Potentialgleichung zu integrieren. Selbst mit der Methode von Ritz steht man vor der Aufgabe, für diesen Stab eine Ansatzfunktion zu finden. Auch dies ist, wegen den unterschiedlichen Eigenschaften des Stabes, nahezu unmöglich. Der Teil mit geringerem Durchmesser wird voraussichtlich eine größere Verschiebung erfahren als der dickere Teil.

Doch wie schon erwähnt ist der Grundgedanke der FEM den ganzen Körper in endliche Teilgebiete zu zerlegen. Auch in diesem Fall wird durch eine Drei-Teilung des Stabes die Berechnung erst möglich.

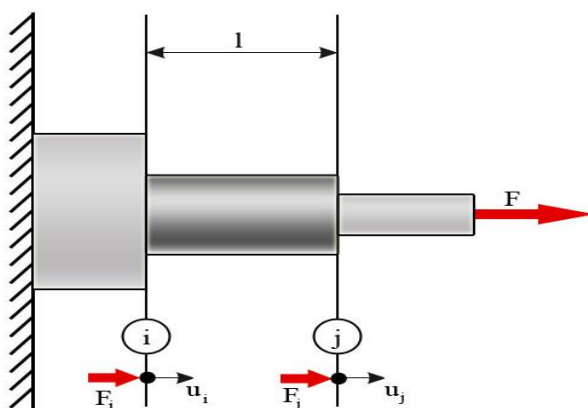


Abbildung 3.2: Vereinfachtes Stabmodell

² Vgl. für eine alternative Herleitung, auf Basis der Physik [vgl. RH00 S. 6ff.]

Von dem gesamten Stab wird nun zunächst nur der mittlere Teil betrachtet. Denn es genügt für dieses Teilstück das Finite Stabelement herzuleiten und es dann für die Berechnung auf alle drei Bereiche anzuwenden. Die Enden des Stabes sind begrenzt durch die Knoten i und j , an denen die Verschiebungen u_i bzw. u_j auftreten. Die Länge des Elements sei l und ihm wird die Querschnittsfläche A und der Elastizitätsmodul E zugewiesen. Auch die auftretenden Schnittkräfte werden den Knoten zugeordnet. Kraft F_i wirkt an Knoten i und Kraft F_j an Knoten j . Wie üblich bei der FEM hat die x -Koordinate ihren Ursprung im Anfangsknoten und zeigt Richtung Endknoten.

Da nun alle mechanischen Eigenschaften bekannt sind, kann analog zu dem Eingangsbeispiel aus 2.2 die Gleichung für das Gesamtpotential aufgestellt werden, um das Prinzip der virtuellen Verschiebungen anzuwenden.

Für dieses Stabmodell setzt sie sich aus der Verformungsarbeit des Körpers und den beiden Arbeit verrichtenden Kräften F_i und F_j zusammen, denn in diesem Fall ist nicht eine Seite des Elementes fixiert und somit müssen beiden Kräfte in die Gleichung einfließen.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma(u) \epsilon(u) dV - F_i u_i - F_j u_j$$

Um diese jedoch erfolgreich zu integrieren, um dann letztendlich die Nullstellen der Ableitung zu bestimmen, muss erst wieder die Verzerrung ϵ und Spannung σ ersetzt werden.

Dazu bedient man sich ähnlich dem Verfahren von Ritz einer Ansatzfunktion für die Verschiebungen. Statt dem Ritz'schen Ansatz wird hier ein Finite Element Ansatz gewählt, der um den vorgegebenen Zweck zu erfüllen, für alle einzelnen Stabelemente gelten soll. Dieser Ansatz bezieht sich somit nicht mehr alleine auf das Eingangsproblem, sondern auf alle erdenklichen Problemfälle, die in Form eines Stabes auftreten können.

3.1. Näherung der Verschiebungen

Es ergibt sich wie in Kapitel 2.3 folgender linearer Verschiebungsansatz:

$$u = a_1 + a_2 x$$

Um die beiden unbekannten Koeffizienten a_1 und a_2 der Ansatzfunktion bestimmen zu können, werden sie durch die gesuchten Knotenverschiebungen u_i und u_j ausgedrückt.

Durch Einsetzen der Grenzwerte des Elements erhält man zwei Bedingungsgleichungen:

$$u(x=0) = u_i = a_1 + a_2 \cdot 0 \rightarrow a_1 = u_i$$

$$u(x=l) = u_j = a_1 + a_2 l \rightarrow a_2 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

Somit ergibt sich für die Ansatzfunktion diese Beziehung:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l} x \quad \text{mit } u_j \text{ und } u_i \text{ ausgeklammert:}$$

$$\Rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j \quad \text{dargestellt in Matrizenform:}$$

$$\Rightarrow u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad \text{mit Variablen vereinfachte Form des Terms:}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

Zum besseren Verständnis lässt sich der Zusammenhang der Funktionen auch graphisch darstellen:

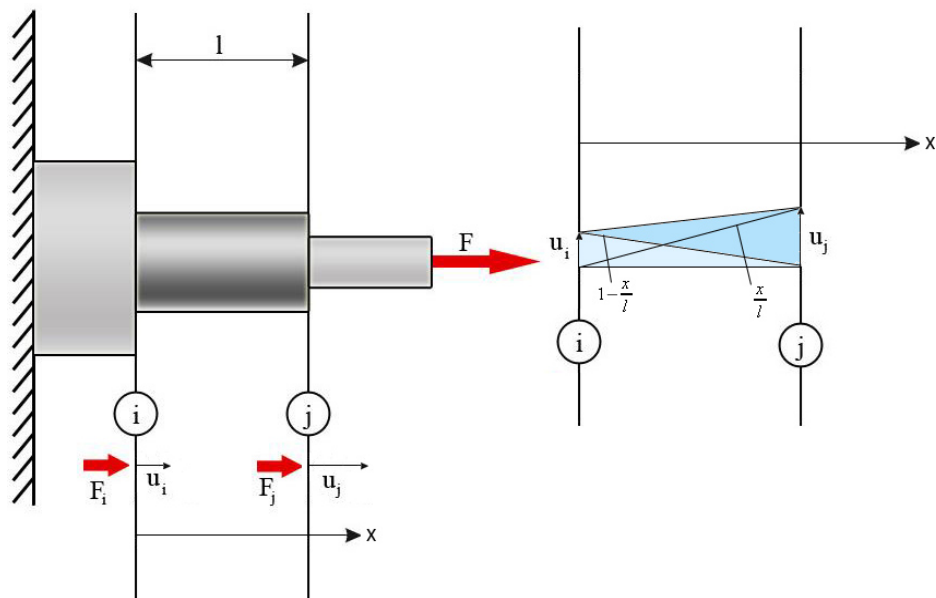


Abbildung 3.3: Darstellung der Formfunktionen

Nun ist dem Bild zu entnehmen, dass die Verschiebung des Stabes an dem Knoten i , wenn folglich $x=0$ gilt, genau dem Wert u_i entspricht:

$$u(0) = \left(1 - \frac{0}{l}\right) u_i + \frac{0}{l} u_j$$

$$\Rightarrow u(0) = u_i$$

Und an der Stelle des Knoten j entspricht der Wert der Ansatzfunktion ($x=l$) ebenso des wahren Wertes u_j :

$$u(l) = \left(1 - \frac{l}{l}\right) u_i + \frac{l}{l} u_j$$

$$\Rightarrow u(l) = u_j$$

Die Verteilung der Verformung im Element wird entsprechend über die zwei

Formfunktionen N_1 und N_2 beschrieben und ist damit komplett unabhängig von den geometrischen Eigenschaften der Struktur.

3.2. Dehnung

Damit kann nun die Dehnung im Element durch Ableiten der Verschiebung nach l berechnet werden:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_i}{l}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

3.3. Spannung

Außerdem lassen sich mit dem Hook'sche Gesetz wieder Dehnungen und Spannungen verknüpfen:

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{u_j - u_i}{l}$$

$$\Rightarrow \sigma = E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ l & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

3.4. Anwenden des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

Eingesetzt in die Potentialgleichung erhält man folgenden vereinfachten Term:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V E \left(\frac{u_j - u_i}{l} \right) \left(\frac{u_j - u_i}{l} \right) dx - F_i u_i - F_j u_j$$

Und mit der Voraussetzung, dass das Element selbst eine konstante Querschnittsfläche besitzt, ergibt sich mit $dV = A dx$:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l A E \left(\frac{u_j - u_i}{l} \right)^2 dx - F_i u_i - F_j u_j$$

Somit waren die Umformungen erfolgreich, denn die Potentialgleichung lässt sich nun integrieren, mit folgendem Ergebnis:

$$\Pi = \frac{1}{2} A E \left(\frac{u_j - u_i}{l} \right)^2 l - F_i u_i - F_j u_j$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} A E \frac{u_j^2 - 2u_j u_i + u_i^2}{l} - F_i u_i - F_j u_j$$

Um die Bedingungen für die Stationarität zu erfüllen, muss gelten:

$$\frac{d\Pi}{du_i} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Pi}{du_j} = 0$$

Diese Bedingungen auf die Potentialgleichung angewendet, führen zu diesen Gleichungen:

chungen:

$$\frac{d\Pi}{du_i} = \frac{1}{2}AE \frac{-2u_j + 2u_i}{l} - F_i = -AE \frac{u_j - u_i}{l} - F_i = 0$$

$$\frac{d\Pi}{du_j} = \frac{1}{2}AE \frac{2u_j - 2u_i}{l} - F_j = AE \frac{u_j - u_i}{l} - F_j = 0$$

Umformungen führen zu:

$$AE \frac{1}{l} (u_i - u_j) = F_i$$

$$AE \frac{1}{l} (-u_i + u_j) = F_j$$

Die sich durch die Matrixschreibweise in einer Gleichung zusammenfassen lassen, die gleichzeitig die finale Steifigkeitsbeziehung für das Stabelement der FEM darstellt:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ -\frac{AE}{l} & \frac{AE}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}$$

Die Kurzform dafür lautet:

$$K u = F$$

Diese Gleichung stellt die Grundbeziehung der FEM dar. Sie verknüpft die Knotenverformung u mit den Knotenkräften F und beschreibt das Gleichgewicht im Element. Die Elemente der Matrix K wirken demzufolge wie die Steifigkeitskonstante aus dem bekannten Hook'schen Gesetz. K wird deshalb auch als Steifigkeitsmatrix bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich folglich durch die Anwendung dieser Gleichung auf alle drei Elemente und die Auflösung nach u eindeutig die Verschiebungen an den Knotenpunkten bestimmen, die die Knotenkräfte F erzeugen. Außerdem können, wie schon in Kapitel 2.1 erwähnt, durch die Verschiebung alle weiteren interessanten Größen wie die Verzerrung oder die Spannung an dem Knotenpunkt berechnet werden. Das Lösung des Eingangsproblems ist also eindeutig bestimmbar.

3.5. Berechnung eines Beispiels

Um nun das generelle Vorgehen bei der Anwendung der FEM zu verdeutlichen, wird im folgenden ein Beispiel mit konkreten Werten und auf Basis der Herleitung aus 3.4 berechnet.

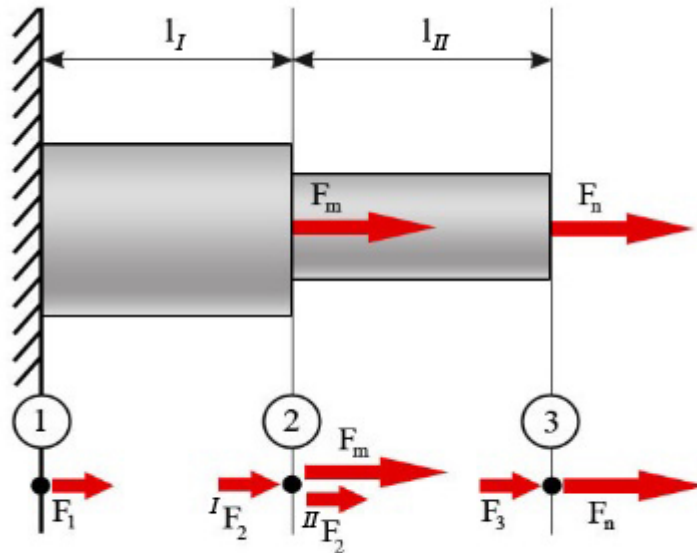


Abbildung 3.4: Modellbalken des Rechenbeispiels

Am linken Ende ist der Stab fest eingespannt, diese Seite ist somit unbeweglich fixiert. Er besteht aus zwei Teilstücken mit unterschiedlicher Länge l_I , l_{II} verschiedenen Durchmessern A_I , A_{II} und Steifigkeitsmatrizen E_I , E_{II} . Auch die Belastung setzt sich aus zwei Kräften zusammen. Die Kraft F_m , die am Absatz zwischen den Teilstücken angreift, und F_n welche am rechten Ende wirkt. Gesucht ist nun die Verformung an den Kraftangriffsstellen F_n und F_m .

Der Grundidee der FEM liegt, wie gesagt, in der Aufspaltung des Objekts in kleinere Teile. Für jedes dieser Teile kann dann im folgenden die gleiche Formel benutzt werden. Es muss also jedes Finite Element nur ein einziges mal hergeleitet werden und kann dann öfters angewandt werden. So verfährt man auch bei dem Stabproblem. Das gesamte Stabmodell wird so unterteilt, dass man jedes einzelne Element mit der eben hergeleiteten Formel berechnen kann. Dazu muss die Querschnittsfläche im Element konstant sein, also kommt man auf zwei Finite Stabelemente mit insgesamt drei Knoten.

Die Zuordnung von Knoten zu Element lässt sich auch übersichtlich in einer Tabelle darstellen:

Element	Knoten 1	Knoten 2	Kraft 1	Kraft 2	Länge	Fläche	E-Modul
1	1	2	F_1	$I F_2$	l_I	A_I	E_I
2	2	3	$II F_2$	F_3	l_{II}	A_{II}	E_{II}

Tabelle 1: Einteilung der Elemente

Dies lässt sich nun auf die Steifigkeitsbeziehung des Stabmodells aus 3.4 auf jedes Element anwenden:

Element 1:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_I E_I}{l_I} & -\frac{A_I E_I}{l_I} \\ -\frac{A_I E_I}{l_I} & \frac{A_I E_I}{l_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ {}^I F_2 \end{bmatrix}$$

mit $K_1 = \frac{A_I E_I}{l_I}$

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ {}^I F_2 \end{bmatrix}$$

ergibt sich ausmultipliziert:

1. $K_1 u_1 - K_1 u_2 = F_1$

2. $-K_1 u_1 + K_1 u_2 = {}^I F_2$

Element 2:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{II} E_{II}}{l_{II}} & -\frac{A_{II} E_{II}}{l_{II}} \\ -\frac{A_{II} E_{II}}{l_{II}} & \frac{A_{II} E_{II}}{l_{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{II} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

und $K_2 = \frac{A_{II} E_{II}}{l_{II}}$

$$\begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{II} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

3. $K_2 u_2 - K_2 u_3 = {}^{II} F_2$

4. $-K_2 u_2 + K_2 u_3 = F_3$

Insgesamt ergeben sich aus den Steifigkeitsbeziehungen der einzelnen Elemente vier Gleichungen mit drei unbekannten Verformungen ($u_1; u_2; u_3$) sowie vier unbekannten Kräften ($F_1; {}^I F_2; {}^{II} F_2; F_3$). Der nächste Schritt besteht nun in der Verknüpfung dieser Beziehungen, um ein Gleichungssystem zu erhalten, das für den gesamten Stab gilt. Das geschieht über das Gleichgewicht der Kräfte an den gemeinsamen Knoten der Elemente, in diesem Fall Knoten 2.

Für Knoten 2 muss daher gelten: ${}^I F_2 + {}^{II} F_2 = F_m$ (3.5.1)

Die restlichen fehlenden Beziehungen zur eindeutigen Bestimmung der Verschiebungen, ergeben sich aus den Randbedingungen:

1. Für den äußersten Knoten 3 gilt aufgrund der Belastung durch F_n

$$\rightarrow F_n = F_3 \quad (3.5.2)$$

2. Durch die Fixierung der rechten Seite ergibt sich für die Verschiebung des ersten Knotens

$$\rightarrow u_1 = 0 \quad (3.5.3)$$

Damit stehen nun den sieben Unbekannten sieben Gleichungen gegenüber, das Stabproblem ist also eindeutig lösbar.

Eine Addition der Gleichungen 1 und 3 führt zu:

$$\begin{aligned} & -K_1 u_1 + K_1 u_2 = {}^I F_2 \\ + & K_2 u_2 - K_2 u_3 = {}^{II} F_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -K_1 u_1 + K_1 u_2 + K_2 u_2 - K_2 u_3 = {}^I F_2 + {}^II F_2$$

$$\Rightarrow -K_1 u_1 + (K_1 + K_2) u_2 - K_2 u_3 = {}^I F_2 + {}^II F_2$$

Die geometrische Randbedingung für Knoten 1 (3.5.3) und die natürliche Randbedingung für Knoten 2 (3.5.1) eingesetzt, ergibt:

$$(K_1 + K_2) u_2 - K_2 u_3 = F_m$$

mit der Bedingung (3.5.2) erhält man für Knoten 3 folgende Gleichung:

$$-K_2 u_2 + K_2 u_3 = F_n$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich in folgende Matrixform überführen, auch Gesamtsteifigkeitsmatrix genannt:

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m \\ F_n \end{bmatrix}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix setzt sich aus den Anteilen aller verwendeten Finiten Elemente zusammen.

Um die Aufgabe lösen zu können, werden noch die entsprechenden Werte für die Ausgangsgrößen benötigt. Diese sind wie folgt gegeben:

$$A_I = 2 \text{ mm}^2; E_I = 1 \frac{N}{\text{mm}^2}; l_I = 2 \text{ m} \Rightarrow K_I = \frac{A_I E_I}{l_I} = \frac{2 * 1}{2} \frac{N}{m} = 1 \frac{N}{m}$$

$$A_{II} = 1 \text{ mm}^2; E_{II} = 4 \frac{N}{\text{mm}^2}; l_{II} = 2 \text{ m} \Rightarrow K_{II} = \frac{A_{II} E_{II}}{l_{II}} = \frac{1 * 4}{2} \frac{N}{m} = 2 \frac{N}{m}$$

Setzt man nun die Werte in die Gesamtsteifigkeitsmatrix ein, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dieses System kann nun zu Lösung ausmultipliziert werden:

$$\text{I:} \quad 3 u_2 - 2 u_3 = 1 \quad \rightarrow u_3 = \frac{3}{2} u_2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{II:} \quad -2 u_2 + 2 u_3 = 3$$

I in II eingesetzt:

$$-2 u_2 + 3 u_2 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow u_2 = 4$$

u_2 in I eingesetzt:

$$u_3 = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{11}{2} = 5,5$$

Insgesamt wird der Stab also um $5,5\text{ m}$ gestreckt und an der Stelle des Absatzes erfolgt eine Verformung von 4 m . Die Aufgabe konnte folglich mit der Finite Elemente Methode einfach gelöst werden.

4. Gleichungslöser

Wie schon in den oben aufgeführten Beispielen gezeigt, läuft die FEM-Berechnung immer auf ein Gleichungssystem mit sehr vielen Unbekannten heraus. Selbst eine für heutige Verhältnisse sehr einfache FE-Struktur aus 1000 dreidimensionalen Elementen enthält mit 4 Eckknoten, die sich in alle drei Achsen verschieben können, insgesamt 12000 Freiheitsgrade. Es muss folglich ein Gleichungssystem mit 12000 Gleichungen und eben so vielen Unbekannten gelöst werden. Bei diesen Ausmaßen wird vermutlich auch dem größten Anhänger der zu-Fuß-Rechnung klar, dass solche Gleichungssysteme ausschließlich mit Hilfe der EDV gelöst werden können. So hängt die Effizienz von aufwändigen FEM-Analysen hauptsächlich von dem verwendeten Lösungsverfahren des eingesetzten Programms und dessen Effektivität ab. Das macht die Gleichungslöser [vgl. MM89 S. 108 f. und RH00 S.110ff.] oder Solver, wie sie im Englischen genannt werden, zum wichtigsten Instrument der FEM-Berechnung. Neben einer hohen Effizienz müssen Gleichungslöser auch eine hohe numerische Stabilität aufweisen, damit es nicht zu falschen Ergebnissen kommt. Der ständige Entwicklungsfortschritt und vor allem die aufwändige Verteilung auf mehrere Prozessoren für den Einsatz in Rechenzentren sorgen bei kommerziellen Systemen für enorme Leistungsergebnisse, bei immensen Kosten. Zu den bekanntesten kommerziellen Solvern gehören NASTRAN, MARC, ABAQUS und Pro/MATHEMATICA.

Im folgenden wird nun ein kleiner Überblick geschaffen, welche Theorie sich hinter diesen Programmen verbirgt.

Im wesentlichen unterscheidet man zwischen zwei Verfahren:

1. direkte Lösungsmethoden
2. iterative Lösungsmethoden

Unter einem direkten Verfahren zur Lösung eines Gleichungssystems versteht man grundsätzlich die Ermittlung der exakten Lösung, abgesehen von Rundungsfehlern, in endlich vielen Schritten. Dazu zählt auch das Gauß'sche Eliminationsverfahren³, das im folgenden vorgestellt wird, da es auf dem aus der Schule bekannten Gauß-Verfahren basiert und sich in den meisten Anwendungen als effizient herausstellt.

Vorstellung des Gauß-Verfahrens

Unter dem Gauß-Verfahren versteht man im allgemeinen den Gauß'schen Algorithmus, der das Ziel verfolgt, ein Gleichungssystem schrittweise in eine Dreiecksform überzuführen.

So wird das Gleichungssystem

$$Ax=b \quad \text{bzw} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

durch Anwendung elementarer Operationen wie:

3 Vgl. für genauere Zusammenhänge [MI93]

- Multiplikation einer gesamten Zeile mit einem Faktor $\neq 0$
- Addition oder Subtraktion eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen
- Vertauschen von Zeilen

in folgende Matrix umgeformt:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Jetzt kann durch einfache, sukzessive Rückrechnung, beginnend bei der n-ten Zeile, das System aufgelöst und die unbekannten Variablen x_1 bis x_n können bestimmt werden.

Vorgehen bei der FEM

Wie in Kapitel 3.4 beschrieben, weist die Gleichung einer FEM-Berechnung immer folgenden Form auf:

$$K u = F$$

Nun liegt die Idee nahe, die Steifigkeitsmatrix K einfach zu invertieren, um die Gleichung direkt nach den Verschiebungen u aufzulösen. Die Invertierung von Matrizen ist jedoch mit einem sehr hohen Aufwand verbunden und in den Größenordnungen in der sie bei der FEM-Berechnung auftritt, nahezu unmöglich.

Um trotzdem eine Lösung zu finden, machen sich die Solver, die in der FEM Einsatz finden, den Algorithmus von Gauß zu Nutze. Und zwar wird eine große Ausgangsmatrix A in ein Produkt aus zwei einzelnen Matrizen L und R mit einer linken und einer rechten Dreiecksmatrix zerlegt. Es werden folglich zwei Matrizen erstellt, die miteinander multipliziert wieder die Ausgangsmatrix A ergeben, aber die von Gauß verlangte Dreiecksform aufweisen:

$$A = LR$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Dieser Vorgang, der in der Fachliteratur bildlich als LR – Zerlegung (Links-Rechts) bezeichnet wird, stellt keine neue direkte Lösungsmethode für Gleichungssysteme dar. Es handelt sich nur um eine effektivere Anwendung des bekannten Gaußschen Algorithmus.

Damit lässt sich das Lösen eines linearen Gleichungssystems einer FEM-Berechnung in folgenden Ablauf einteilen:

1. Zerlegung der Ausgangsmatrix K

$$K u = L R u = F$$

2. Lösen des 1. Gleichungssystems durch Vorwärtsrechnung

$$L c = F \quad \text{mit } c = R u \text{ als Hilfsvektor}$$

3. Lösen des 2. Gleichungssystems durch Rückwärtsrechnung

$$Ru=c$$

Dabei ist es in der FEM-Rechenpraxis so, dass ca. 90% des Aufwands auf Arbeitsschritt 1 fallen und nur jeweils 5% auf die Schritte 2 und 3.

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren benötigt mit aktueller Hardware für das Lösen einer Matrix mit n Unbekannten die in Tabelle 1 angeführten Rechenzeiten⁴.

n	Rechendauer
10 000	52 Sekunden
100 000	14,5 Stunden
1 000 000	602 Tage

Tabelle 2: Rechenzeiten

Für nähere Details sei auf die Fachliteratur [MA] verwiesen.

4 Ein aktueller PC Prozessor mit 3,2 Ghz kann bis zu zwei Operationen pro Takt ausführen (Pentium 4).[vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/FLOPS>]
Das entspricht somit $6,4 * 10^9$ Rechenoperationen pro Sekunde. Das Gauß'sche Verfahren hingegen benötigt ca. $1/3 n^3$ Operationen. [vgl. MA S. 190]

5. Anwendung der Software Calculix

Bei Calculix [vgl. DW07] handelt es sich um ein kostenloses Programmpaket zur Berechnung von 3D-Strukturen per FEM. Dabei wird zwischen zwei Anwendungen unterschieden. Einerseits CalculiX GraphiX (CGX), das sowohl die Aufgaben des Preprocessings als auch die des Postprocessings übernimmt. Andererseits fungiert die zweite Anwendung, namens Calculix CrunchiX (CCX), als Gleichungslöser.

Im folgenden wird anhand eines einfachen Beispiels die Durchführung einer FEM-Analyse unter Verwendung von Calculix gezeigt. Dazu sollen an einem Balken aus Stahl mit den Maßen 30 cm x 5 cm x 0,5 cm ($l \times b \times h$) und einer Fixierung an der linken Seite die ersten zehn Eigenfrequenzen berechnet werden.

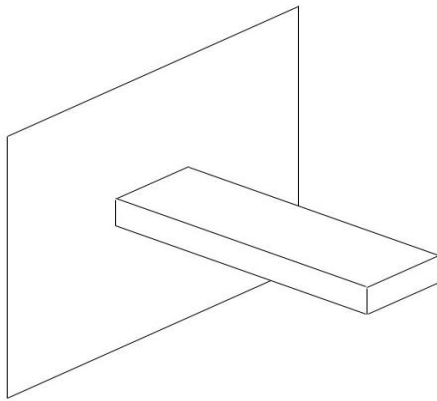


Abbildung 5.2: 3D-Ansicht des Beispielsbalkens

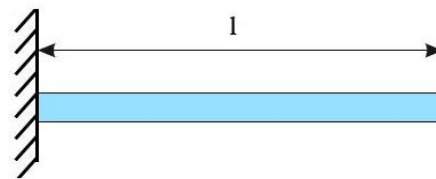


Abbildung 5.1: Seitenansicht des Beispielsbalkens

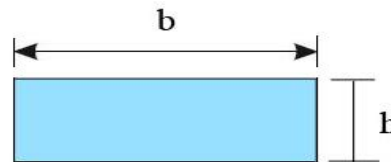


Abbildung 5.3: Frontansicht des Beispielsbalkens

5.1. Erstellung eines Objektes

Wie schon erwähnt, ist CGX bei Calculix für das Erstellen und Darstellen von Finite-Element-Strukturen zuständig. Um CGX zu starten, öffnen Windowsbenutzer die Calculix-Kommandozeile (Start -> Programme -> Calculix-> Calculix Commad) und Linuxbenutzer einfach ihr Terminal (Start -> Terminal). Ab jetzt läuft die Bedienung für beide Betriebssysteme gleich ab.

Zuerst erstellt man durch die Eingabe des folgenden Befehls ein neues Objekt mit dem Namen Balken:

```
cgx -b Balken.fbd
```

In Folge dessen öffnet sich ein neues Fenster mit dem Namen Calculix GraphiX. Dies ist die graphische Oberfläche von CGX und wie folgt aufgeteilt:

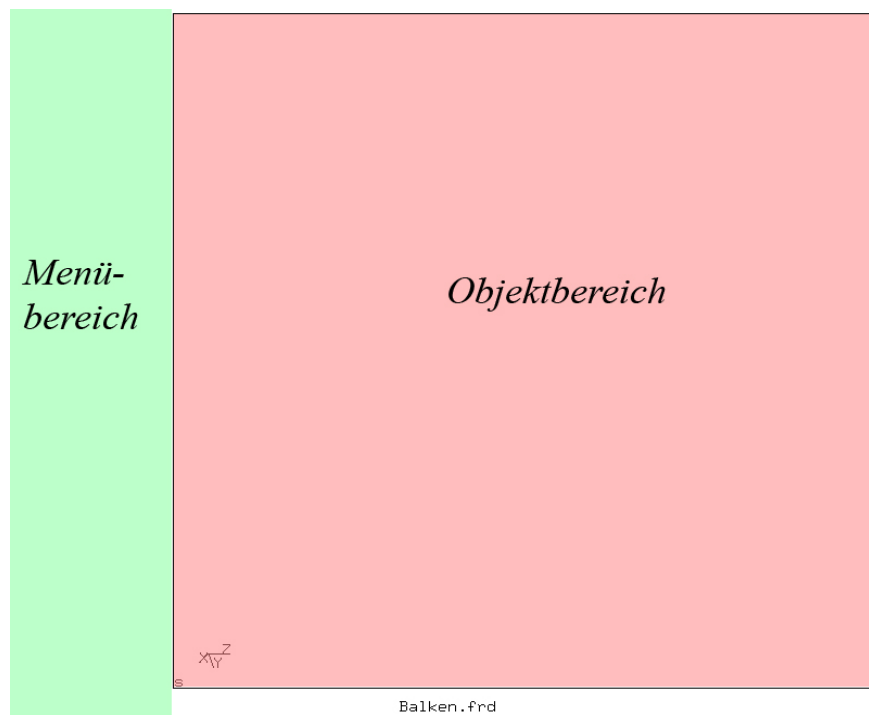


Abbildung 5.4: Aufteilung der CGX Oberfläche

Das Menü auf der linken Programmseite wird einfach durch einen Klick in die grün eingefärbte Zone geöffnet.

Im Objektbereich kann die virtuelle Kamera, zur Erstellung oder Betrachtung eines Objektes, mit der linken Maustaste um den Koordinatenursprung gedreht werden, mit der rechten Maustaste kann die Kamera parallel zu dem Ursprung verschoben werden und mit der mittleren Maustaste, falls vorhanden, kann der jeweilige Bildausschnitt vergrößert bzw. verkleinert werden.

Im Vorfeld soll kurz auf einige Grundbefehle von CGX eingegangen werden:

Objekte im Programmfenster anzeigen:

Um eine korrekte Darstellung des Objektes zu ermöglichen, muss der Nutzer CGX mitteilen, welche Teile der Struktur überhaupt eingeblendet werden sollen. Das geschieht über die Eingabe des Befehls:

```
'plus' 'pa'/'la'/'sa'/'ba' 'all'
```

Bei der Ausführung von Commados gilt es generell darauf zu achten, dass Calculix GraphiX die aktive⁵ Anwendung auf dem Computer darstellt und nicht die Calculix Kommandoprompt, denn sonst werden die Textzeichen nicht erkannt. Hier bietet es sich an, die Prompt neben die CGX-Anwendung zu schieben, damit die Eingabe sichtbar ist. Bei dem Befehl steht jede der Abkürzungen für ein Element-

⁵ Leicht an der Taskleiste des Betriebssystems zu erkennen, hier muss die CGX Anwendung dunkel hinterlegt sein

teil: 'pa' ist Platzhalter für „points“ und somit werden alle Punkte eingeblendet; 'la' – Linien (lines); 'sa' – Oberflächen (surfaces); 'ba' – Körper (bodies). Sprich, um zum Beispiel zusätzlich alle Linien darstellen zu lassen, muss bei aktivem CGX Fenster das Kommando *plus la all* eingegeben werden. Außerdem wird mit Hilfe des Befehls „Frame“, der sich über das Menü aufrufen lässt, automatisch soweit heraus-/ herein- gezoomt, dass alle Objektteile im sichtbaren Bereich der virtuellen Kamera liegen.

Punkt erstellen:

```
'pnt' <name> [<x> <y> <z>]
```

<name> steht für den Namen des Punktes, der neun Buchstaben nicht überschreiten darf, und <x>, <y> und <z> für dessen Achsenkoordinaten.

Punkte mit einer Linie verbinden:

```
'qlin' ENTER 'b'/'g'/'q'
```

Bei 'qlin' handelt es sich um einen der wenigen Befehle, der interaktiv per Maus im Programmfenster ausgeführt wird. Um nun einen oder mehrere Punkte mit einer Linie zu verbinden, fährt man mit dem Mauszeiger auf den ersten Punkt und drückt 'b' für „begin“. Jetzt wird, in entsprechender Reihenfolge, jeweils der nächste, zur Linie gehörende, Punkt mit der Maus angefahren und per 'g' für „generate“ zur Linie hinzugefügt. Wenn alle Linien erstellt wurden, muss der interaktive Modus unbedingt mit 'q' beendet werden.

Oberflächen aus vier Linien erstellen:

```
'surf' <name> <line1> <line2> <line3> <line4>
```

Dabei steht <name> wiederum für den Namen der Oberfläche und für <line> werden die Namen der vorhandenen Linien eingesetzt, aus denen die zukünftige Oberfläche bestehen soll. Auch hier ist zu beachten, dass der Liniennamen nur aus maximal neun Buchstaben bestehen darf.

Arbeiten mit Sets:

In Sets lassen sich mehrere Punkte, Linien oder Oberflächen zusammenfügen.

Objekte zu einem Set hinzufügen:

```
'qadd' <set> ENTER 'p'/'l'/'s'/'q'
```

Auch der Befehl 'qadd' reagiert auf interaktive Anweisungen per Mauszeiger. Um nun Punkte('p'), Linien('l') oder Oberflächen('s') zu einem Set hinzuzufügen, tippt man für <set> den Namen des Sets ein und bestätigt per ENTER-Taste auf der Tastatur. Nun kann man durch Drücken der jeweiligen Objektaste 'p', 'l' oder 's' das aktuell, unter dem Mauszeiger befindliche Objekt, dem Set unterstellen. Wenn man zum Beispiel eine Linie hinzufügen will, fährt man mit der Maus die gesuchte Linie an und drückt 'l'. Auch hier ist darauf zu achten, dass man am Ende der Arbeit den Modus per 'q' beendet.

Zur Erstellung des Balkens:

Erstellen der vier Eckpunkte der rechten Seite:

```
pnt p0 0. 0. 0.
pnt p1 5. 0. 0.
pnt p2 5. 0.5 0.
pnt p3 0. 0.5 0.
```




Abbildung 5.5: Punkte

Falls die Punkte nicht mit Namen angezeigt werden, den Befehl „*plus pa all*“ eingeben und sollten nicht alle Punkte auf Bildschirm dargestellt werden, per mittlerer Maustaste herauszoomen oder „*Start*“ -> „*Frame*“ betätigen.

Verbinden der Punkte durch Linien:

Den Modus *qlin* starten und mit dem Mauszeiger zum Beispiel Punkt p0 anfahren. Dann 'b' drücken, den Zeiger zu p1 bewegen und 'g' drücken, danach zu p2 und wiederum per 'g' bestätigen usw., bis alle vier Punkte mit Linien verbunden sind. Am Ende per 'q' den *qlin* Modus beenden. Danach zum Anzeigen der Linien den Befehl „*plus la all*“ verwenden.

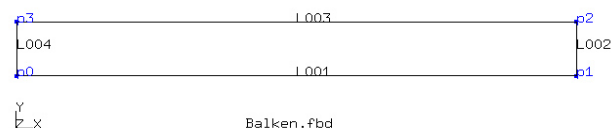


Abbildung 5.6: Linien

Erstellen der rechten Oberfläche

```
surf v1 L001 L002 L003 L004
```

```
plus sa all
```

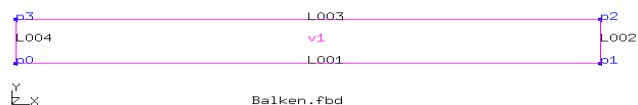


Abbildung 5.7: Oberfläche

Hinzufügen aller Objekte der linken Balkenseite

```
qadd links
```

Nun die Maus auf eine der vier Linien, die die Oberfläche bilden, bewegen und dann 's' drücken. Die Farbänderung in Orange signalisiert dem Nutzer, dass dieses Objekt ausgewählt wurde. Am Ende per 'q' den *qadd* Modus beenden.

Den fertigen Balken erzeugen

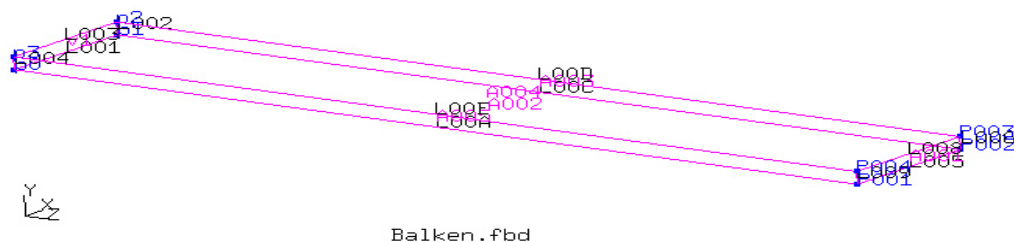
Im Moment ist nur eine Seitenfläche des geplanten Balkens fertiggestellt. Damit man nicht die gleiche Fläche auf der anderen Seite noch einmal modellieren muss, kann man in diesem Fall den speziellen Befehl '*swep*' benutzen. Dieser führt zu einer Erleichterung, weil man mit seiner Hilfe ein Set zu einem anderen Ort kopieren kann und diese zudem gleich verbunden werden. In diesem Fall „*swep't*“ man einfach das linke Set um 30 Einheiten in die Z-Achse und der Balken ist fertig erstellt. Der allgemeine Befehl für einen Swepvorgang lautet:

```
'swept' <set1> <set2> 'tra' <dx> <dy> <dz> <div>
```

<set1> bezeichnet dabei den Namen des Sets der Kopiervorlage und <set2> steht für den Namen des neu erstellten Sets. Die Wortfolge 'tra' bedeutet „Translation“ und gibt somit an, dass eine Verschiebung stattfinden soll. Für <dx>, <dy> und <dz> setzt man jeweils die Werte der zu verschiebenden Strecke in X,Y, und Z-Achse ein. Mit dem abschließenden Parameter <div> teilt man CGX noch mit, in wie viele Stücke (Elemente) die Verbindung der zwei Sets unterteilt werden soll. Auf das Beispiel angewandt kommt man somit zu diesem Befehl:

```
swept links rechts tra 0 0 30 30
```

Die Struktur des Balkens ist damit fertiggestellt:



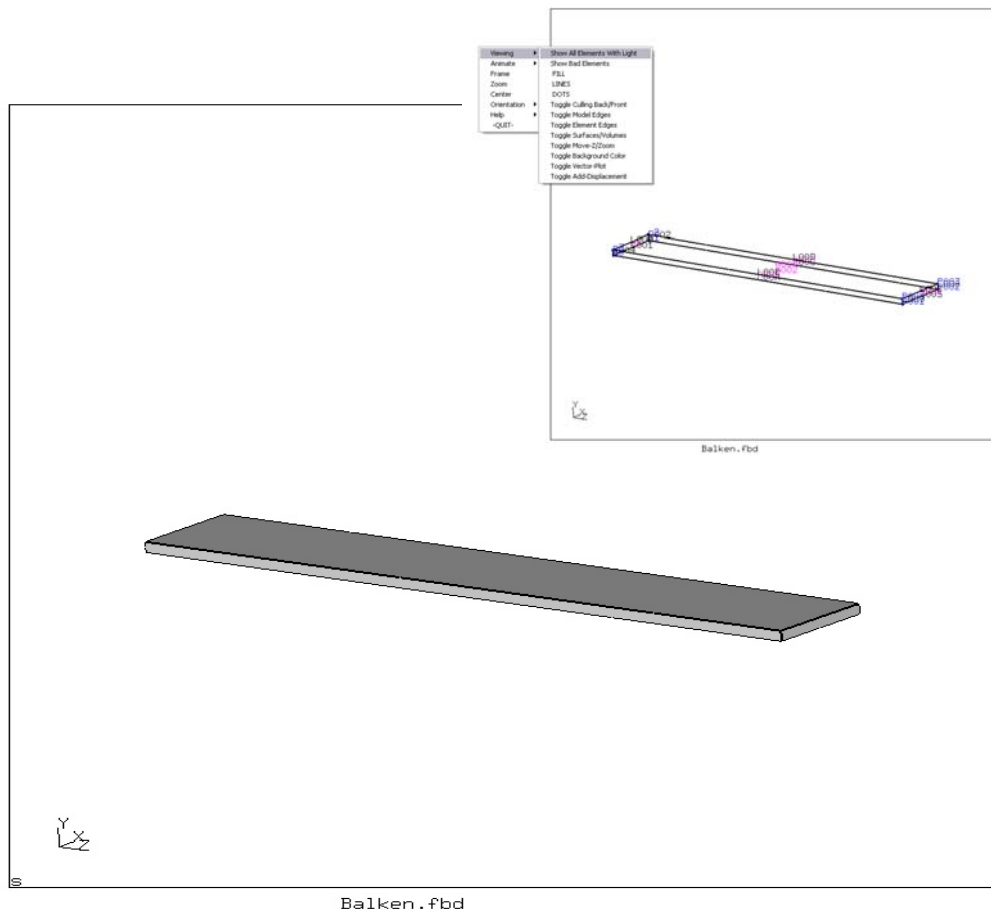


Abbildung 5.9: Modell in 3D gerendert

Nun muss noch die Einspannbedingung (*single point constraints*) der linken Seite erzeugt werden. Dazu werden all diese Randpunkte getrennt exportieren, was mit dem Befehl `send <set> abq spc 123456` zu realisieren ist. `<set>` steht hier wieder für das ausgewählte Set. 'abq' legt fest, dass der Datensatz im ABAQUS-Format erzeugt wird. In diesem Fall beinhaltet das Set „links“ ohnehin schon alle verlangten Informationen, der Ausführung steht folglich nichts mehr im Weg:

```
send links abq spc 123456
```

Abschließend wird noch das gesamte Balkenmodell in ein kompatibles Format exportiert:

```
send all abq
```

Damit ist die Preprocessingarbeit erledigt und das Programm kann per 'exit' geschlossen werden

5.2. Gleichungslöser

Auch ein Gleichungslöser für FEM-Berechnungen liegt bei Calculix bei, und zwar Calculix Cruchix – CCX. CCX ist nicht nur für das reine Lösen der Gleichungen verantwortlich, sondern wird auch zum Integrieren der Randbedingungen verwendet.

Da CCX komplett textbasiert arbeitet, beginnt man mit dem Erstellen⁶ eines „balken.txt“ Dokuments, in dem Stammverzeichnis⁷ von Calculix. In diesem werden nach einer bestimmten, an ABAQUS orientierten, Nomenklatur die Ausgangs- sowie die Randbedingungen beschrieben und die zu berechnende Aufgabenstellung definiert.

Dieser Textaufbau soll nun anhand des Balkenbeispiels aufgeschlüsselt werden, dabei sind Kommentare, die nicht in die Textdatei eingegeben werden sollen, grau eingefärbt.

Angaben über die Randbedingungen

*include, input=all.msh

Einlesen des Modellkörpers, wobei „all.msh“ die von CGX erzeugte FEM-Gitterstruktur beinhaltet.

*BOUNDARY

*include, input=links.bou

Einfügen der Einspannbedingung auf der linken Seite, wobei „links.bou“ die exportierten Knotenpunkte des Sets „links“ beinhaltet.

Erzeugen von Werkstoffinformationen

*MATERIAL, NAME=STEEL

Name des im Folgenden definierten Werkstoffes.

*ELASTIC

210.e5, 0.3

Angaben über das Elastizitätsmodul und Querdehnzahl des Werkstoffes.

*DENSITY

7.9e-9

Aufnehmen der Dichte des Werkstoffes.

*SOLID SECTION, ELSET=Eall, MATERIAL=STEEL

Übertragen der in dem Material „STEEL“ definierten Werte auf das gesamte Modell („Eall“).

Definieren der Berechnungsart

**

*STEP

*FREQUENCY

10

Es wird eine Eigenfrequenzberechnung („FREQUENCY“) mit „10“ Durchläufen definiert. Es werden somit die ersten zehn Eigenfrequenzen berechnet.

*NODE FILE

U

*EL FILE

S

*END STEP

6 Dazu öffnet man den Dateimanager (bei Windows Explorer) und klickt in dem jeweiligen Ordner per Rechtsklick auf den Hintergrund. Nun wird über „Neu“ -> „Textdokument“ eine neue Textdatei erstellt, die anschließend gleich umbenannt werden kann.

7 Der Pfad zu diesem Verzeichnis steht nach dem Öffnen der Calculix-Kommandoprompt in der untersten Zeile

Die letzten vier Zeilen beinhalten keinerlei Anweisungen und dienen nur der CCX-Nomenklatur.

Dieses Dokument wird nun gespeichert und in die CCX typische Dateierdung „*.inp“ umbenannt. Die damit erstellte „balken.inp“ Aufgabaufforderung lässt sich nun ausführen. Dazu begeben sich Anwender im Betriebssystem Windows wieder in die Kommandozeile und im Betriebssystem Linux in ihr Terminal und starten die FEM-Berechnung durch folgenden Befehl:

```
ccx balken
```

Diese Berechnung kann nun, je nach verwendeter PC-Hardware, einige Zeit in Anspruch nehmen.

5.3. Auswertung der Ergebnisse

Während der Ausführung des CCX-Solvers werden diverse Dateien erstellt. Darunter befindet sich unter anderem eine „balken.frd“ Ergebnisdatei, welche sich mit CGX visuell darstellen lässt. Das Öffnen erfolgt diesmal über dem Befehl:

```
cgx -v balken.frd
```

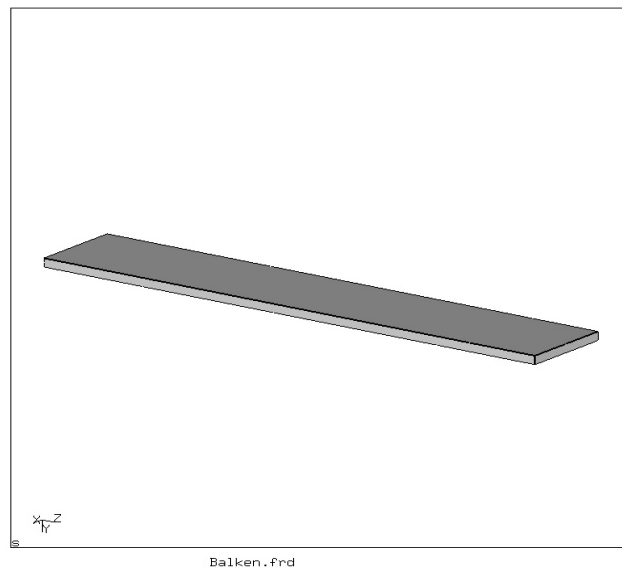


Abbildung 5.10: Modell in 3D-Ansicht

Nun können über den Menüpunkt „Datasets“ die Ergebnisse der FEM-Analyse aufgerufen werden.

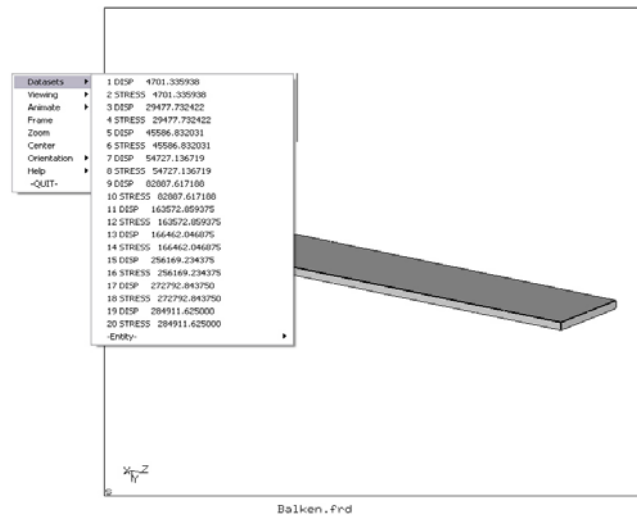


Abbildung 5.11: Auswahl der Datensätze

Zum einen die jeweiligen Verschiebungen, die sich unter dem mit „DISP“ (Displacement) beginnenden Register befinden und zum anderen die verschiedenen Spannungen, die unter „STRESS“ ausgewählt werden können.

Um nun exemplarisch die Verschiebung der vierten Eigenfrequenz anzuzeigen, lädt der Nutzer den Datensatz sieben ($7 DISP 54727.136719^8$), da es sich um den vierten Register mit dem Anfang „DISP“ handelt.

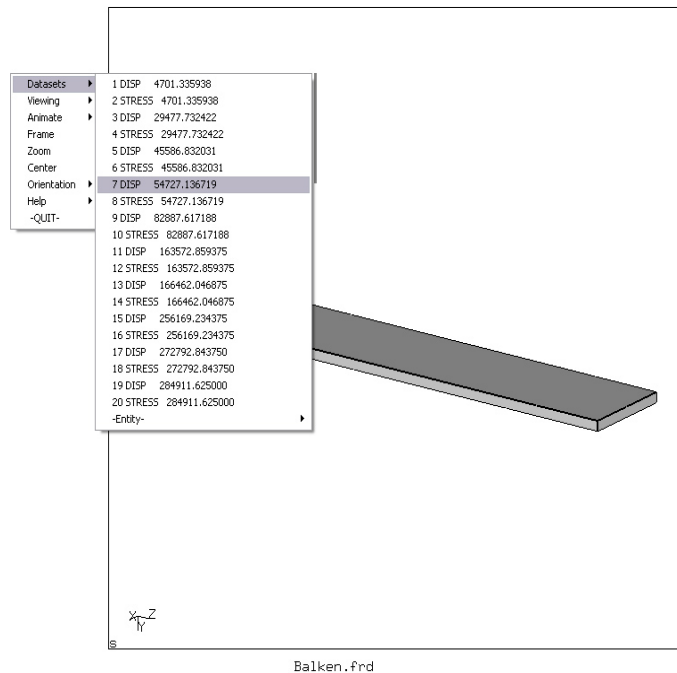


Abbildung 5.12: Auswahl eines Verschiebungsdatsatzes

8 Die genauen Zahlenwerte können abweichen

Daraufhin könnten unter dem Menüpunkt „Datasets“ -> „Entity“ die verschiedenen Verschiebungen für diesen Belastungsfall ausgewählt werden. Im Regelfall interessiert hier nur der das Ergebnis „D4“, da hier die realistische dreidimensionale Verschiebung dargestellt wird. Die Werte aus „D1“ bis „D3“ beschränken sich auf eine Koordinatenachse.

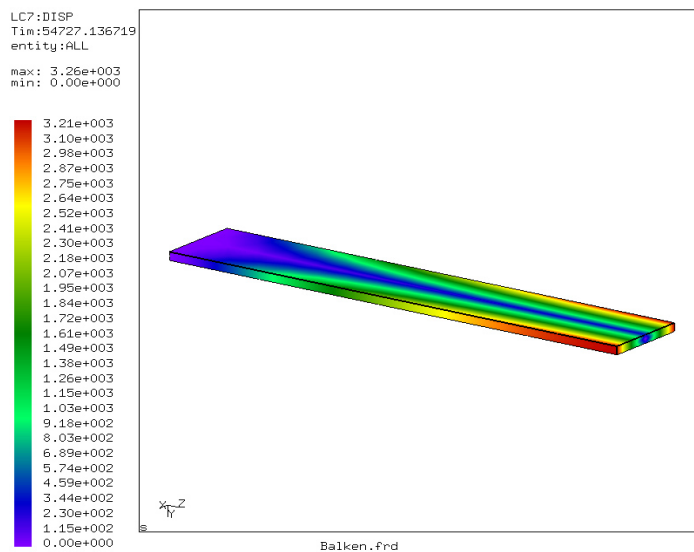


Abbildung 5.13: Darstellung der Verschiebung

Zur Interpretation der Daten, erzeugt CGX einen farblichen Verlauf je nach Intensität des Wertes und blendet am linken Bildschirmrand eine Legende ein.

Für eine noch deutlichere Visualisierung bietet CGX auch die Möglichkeit einer animierten Darstellung der ausgewählten Verschiebung. Dazu wählt der Anwender den Button „Start“ im Menü „Animate“.

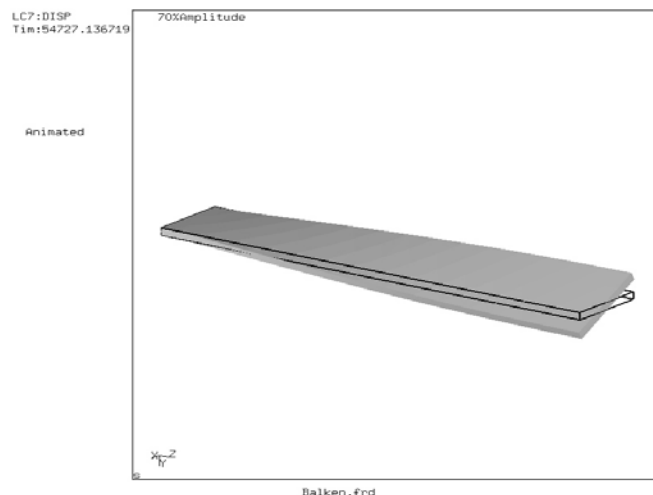


Abbildung 5.14: Visualisierung der Verschiebung

Die Auswertung der Spannung läuft ähnlich ab. Um die zur vierten Eigenfrequenz zugehörigen Spannung abzurufen, öffnet man den Datensatz unter der zuvor betrachteten Spannung:

8 STRESS 54727.136719

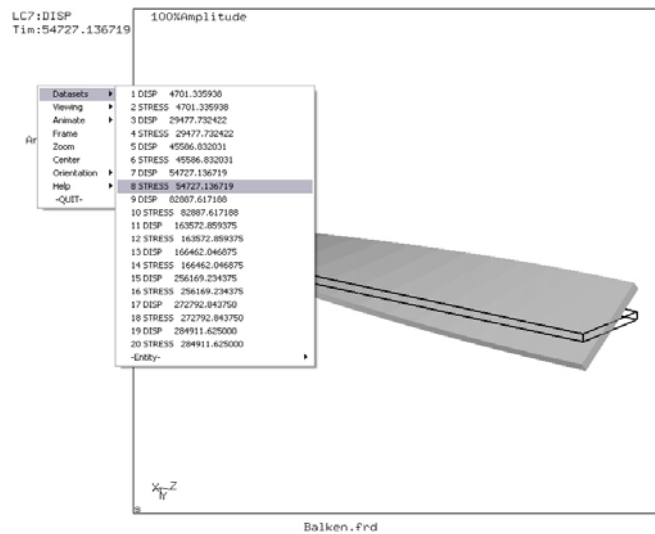


Abbildung 5.15: Auswählen der zugehörigen Spannungen

Auch hier finden sich unter dem Menüpunkt „Entity“ eine Reihe von Ergebnissen. Hier stellt die üblicherweise mit „7“ bezeichnet „Mises“- Spannung die aussagekräftigste dar, denn sie besteht aus einem aufwändigen Vergleich der Spannungen in alle Koordinatenachsen und beschreibt so die wirkliche Spannung, die durch die dreidimensionale Verschiebung entsteht. Für weitere Informationen sei an dieser Stelle auf den Exkurs „von Mises Spannungen“ im Anhang A verwiesen.

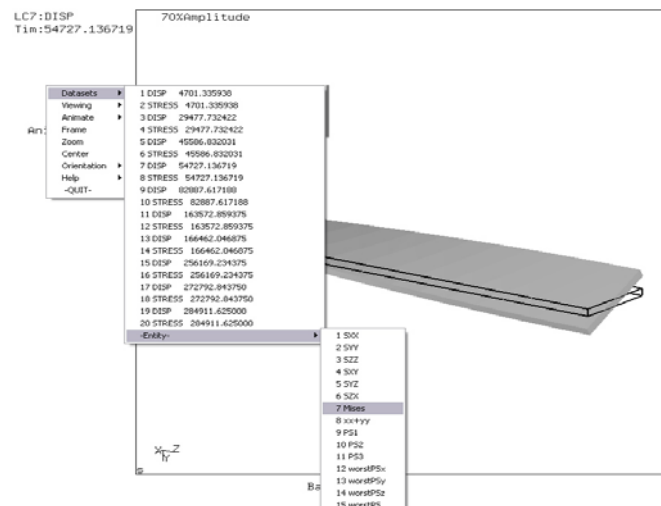


Abbildung 5.16: Auswählen der MISES Spannungen

LC8:STRESS
 Tim:54727.136719
 entity:Mises
 max: 4.95e+008
 min: 3.55e+002

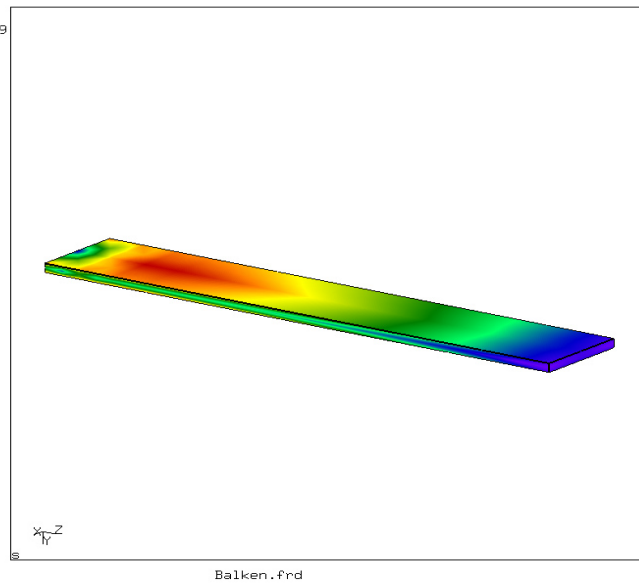
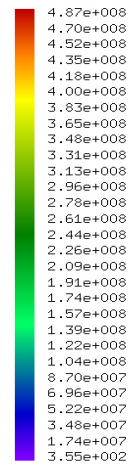


Abbildung 5.17: Darstellung der Spannungen

6. Genauigkeit der FEM-Berechnung

Bei der Methode der Finiten Elemente handelt es sich nur um eine Näherungsverfahren [vgl. GB S. 39/ 4.5 ff.], was vor allem an der Diskretisierung (s. Kapitel 1.2) liegt. Hier wird das Bauteil nach dem Baukastenprinzip in einzelne, endliche Elemente aufgeteilt. Das führt dazu, dass die gesuchten Spannungen auch nur durch eine bestimmte Anzahl von Knoten der Elemente ausgedrückt werden kann. Dies soll folgendes Bild verdeutlichen:

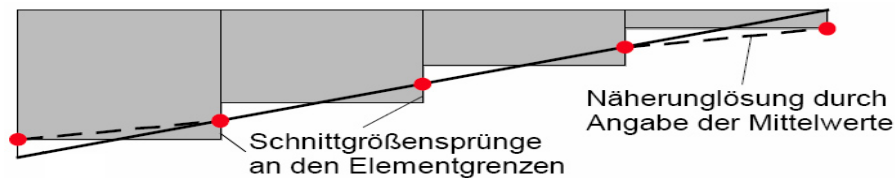


Abbildung 6.1: Veranschaulichung der Spannungen bei grobem Netz

Die Finiten Elemente nehmen immer einen Mittelwert an, durch den es an den Elementübergängen zu besonders starken Spannungsunterschieden und Abweichungen von der exakten Lösung kommt. Dieses Problem lässt sich auch mathematisch begründen. Durch den in Kapitel 2.2 behandelten Ansatz der virtuellen Verschiebungen gilt das Gleichgewicht der Kräfte nur noch im integralen Sinne, über das gesamte Bauteil. Es ist daher nicht mehr wie bei der Differenzialmethode in jedem Punkt des Bauteils erfüllt, es kann somit zu keiner exakten Lösung kommen. Denn für eine punktgenaue, exakte Lösung wäre eine unendliche Anzahl von Finiten Elementen von Nöten, was sich schon durch deren Definition (finit = endlich) ausschließt.

Die zweite Ursache für die Ungenauigkeit liegt an der anderen Näherung - der Ansatzfunktion. Wie in Kapitel 2.3 gezeigt, ist sie normalerweise linear. Ein linearer Verschiebungsansatz bedeutet konstante Verzerrungen (1. Ableitung der Verschiebung) und erzeugt folglich Spannungen, die für das ganze Element konstant sind. Dies führt zu den im Bild markierten Spannungsunterschieden an Elementübergängen und zu einer weiteren Verfälschung des genauen Spannungsverlaufs. Der Spannungssprung zwischen zwei Elementen kann somit als ein Maß für die Genauigkeit der betreffenden Stelle gedeutet werden.

Um genauere Ergebnisse zu erzielen, bieten sich im allgemeinen zwei Möglichkeiten an:

Einerseits kann man das Gitternetz der FEM weiter verfeinern. So stehen mehrere Knoten für die Berechnung der Verschiebungen zu Verfügung und es entsteht ein sich an die exakte Lösung annäherndes Ergebnis. Dazu folgendes Bild:

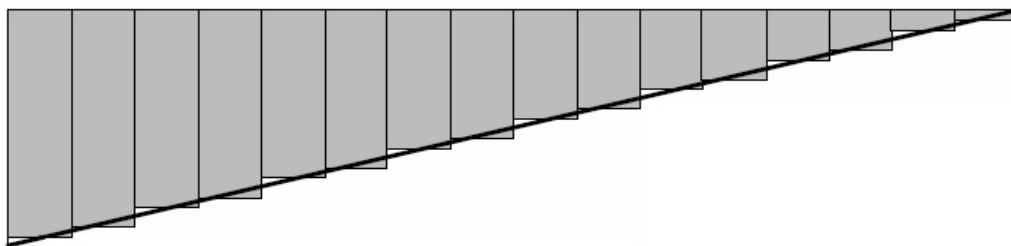


Abbildung 6.2: Veranschaulichung der Verschiebungen bei feinem Netz

Es wird somit deutlich, dass die Anzahl der Elemente maßgeblich für die Genauigkeit der Berechnung verantwortlich ist. Dennoch darf man das Gitternetz nicht beliebig verfeinern, denn dadurch wird die Berechnung aufwändiger und somit steigt auch der Ressourcenverbrauch. So erhöht sich die Rechenzeit bei einer Verdoppelung der Elemente um das ca. 512-fache.⁹

Andererseits kann es auch sinnvoll sein, eine Ansatzfunktion höherer Ordnung zu wählen. Denn mit einer quadratischen Ansatzfunktion für die Verschiebungen wären auch linear verlaufende Spannungen möglich, die ein deutlich exakteres Ergebnis zur Folge haben. So hat man die Option, durch quadratische oder kubische Funktionen vor allem Biegeverformungen im Bauteil mit nur einem Element wesentlich besser zu beschreiben als mit einer Fülle von Linear-Modellen. Jedoch steigt auch hier der Arbeitsaufwand. So kann die Rechenzeit, je nach Modell, bei einer Steigerung der Ordnung bis auf das 1000-fache anwachsen.

Somit stellt sich heraus, dass man mit aktueller Hardware nie auch nur annähernd exakte Lösungen erhalten wird. Daher bleibt der Ingenieur auch weiterhin der wichtigste Faktor bei Statikberechnungen, denn er muss den Unterschied zwischen Realität und FE-Modell bewerten können. Die wichtigste Aufgabe besteht dabei vor allem darin, aus langer Erfahrung zu wissen, wo eventuell Spannungsspitzen auftreten könnten und dort das Gitternetz stellenweise zu verfeinern. Denn durch ein zu grob aufgeteiltes Netz kann es wegen der oben beschriebene Mittelung der Werte für das gesamte Modell an eventuellen Schlüsselstellen zu sehr ungenauen Durchschnittswerten kommen und somit zu einer Fehlinterpretation der gesamten Berechnung (vgl. folgende Grafik)

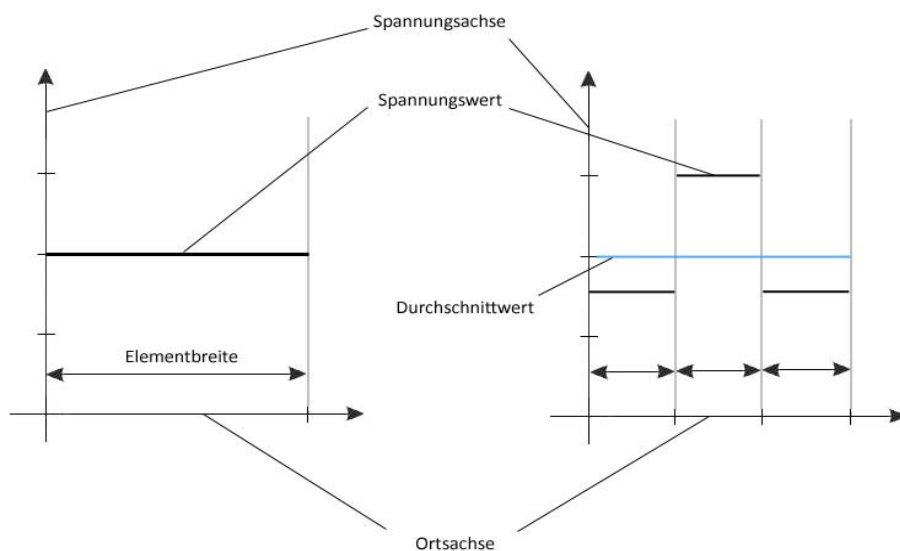


Abbildung 6.3: Veranschaulichung von Spannungsspitzen

⁹ Eine Verdoppelung des Gitters führt zu einer Verdoppelung der Elemente in X,Y und Z-Achse. So entsteht die $2 \times 2 \times 2 = 8$ -fache Matrix. Nimmt man an, dass sich Rechenzeit kubisch zur Elementanzahl verhält [MA S. 190], wird eine 8^3 -fachen Zeit benötigt.

7. Berechnung der Haltbarkeit einer Verdichterschaufel

Für einen sicheren Betrieb von Bauteilen über die gesamte Lebensdauer sind zuverlässige Vorhersagen über die Ermüdungserscheinungen nötig. Auch bei Deutschlands größtem Hersteller für Triebwerksteile, der MTU, versucht man das Verhalten der Triebwerke im Dauereinsatz deshalb so gut wie möglich am Computer vorherzusagen. Im folgenden wird für die Verdichterschaufel eines Gasturbinentriebwerks die Haltbarkeit anhand einer FEM-Simulation bewertet. Diese Schaufel befindet sich noch vor der Verbrennungskammer und sorgt für eine Verdichtung der Luft, um eine bessere Verbrennung zu ermöglichen.

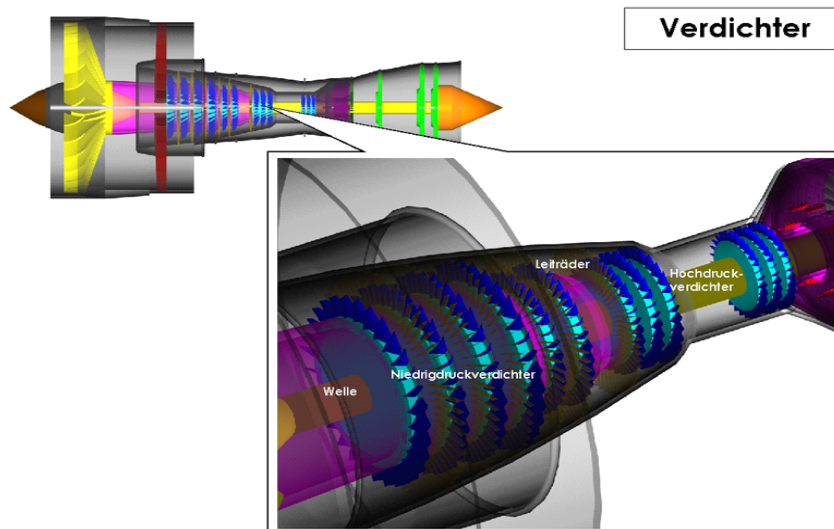


Abbildung 7.1: Gasturbinentriebwerk

Die Betriebslasten einer Verdichterschaufel lassen sich in zwei Bereiche aufteilen. Einerseits entsteht durch die Rotation der Schaufel eine Fliehkraftbelastung, andererseits bilden sich durch das Durchlaufen der Resonanzfrequenzen bei Hoch- und Runterfahrt des Triebwerks Auslenkungen bzw. Schwingbelastungen. [vgl SF S.2]

Um nun die Betriebsfähigkeit zu bewerten, behilft man sich mit einem so genannten „Goodman- Diagramm“ [vgl SF S. 8]. In diesem Diagramm wird auf der Abszisse die Spannung für die statische Festigkeit, in diesem Fall die Rotation, und auf der Ordinate die Spannung für die dynamische Festigkeit, hier die Schwingfestigkeit, eingetragen. Da die Werte für die „dauerfesten“ Spannungen natürlich material- und formabhängig sind, werden sie im Vorfeld durch eine Reihe von Versuchen ermittelt. „Dauerfest“ bedeutet, dass das Objekt dieser Belastung 10^6 mal ausgesetzt wird und stellt in der Mechanik die höchste Belastungsgrenze dar. Wenn die Schaufel also in diesem Fall einen Versuch 10^6 mal besteht, geht man davon aus, dass das Bauteil diese Belastung auf Dauer aushält.

Für die Fliehkraftbelastung bietet es sich an, die Bruchlast in einem Schleuderversuch zu bestimmen. Dazu wird die Schaufel auf einen Motor gespannt und so lange konstant beschleunigt bis sie versagt (s. Bild 7.2)

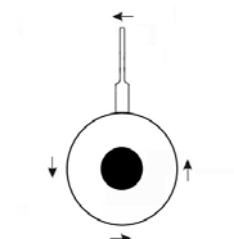


Abbildung 7.2: Schleuderversuch

Ähnlich ist das Vorgehen bei der zulässigen Grenzspannung für die Ermüdung durch Schwingungen. Hier wird das Bauteil im „Biegschwingversuch“ auf einem elektronischen Rüttler (s. Bild 7.3) in der ersten Eigenfrequenz zu Schwingungen angeregt. Dann wird durch Erhöhen der Schwingungsamplitude bis zur Beschädigung, die maximale Spannung, die die Schaufel verträgt, ermittelt.

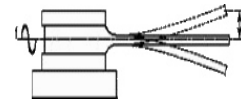


Abbildung 7.3:
Biegschwingversuch

Die gemessenen Daten belaufen sich auf $500 \frac{N}{mm^2}$ für die statische Belastung und $300 \frac{N}{mm^2}$ für die dynamische Belastung¹⁰. Damit lässt sich nun ein Goodman-Diagramm erstellen:

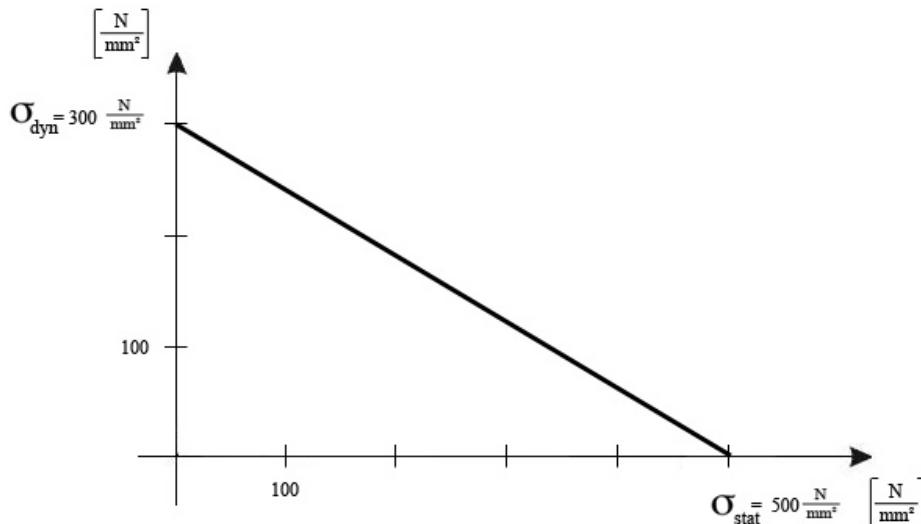


Abbildung 7.4: Goodmandiagramm von Stahl

Dazu werden die Messdaten wie oben beschrieben in das Diagramm eingetragen und mit einer Linie verbunden. Der sichere Betrieb der Bauteile ist dann gewährleistet, wenn die auftretenden Betriebsspannungen in der Schaufel unterhalb der Verbindungsgeraden liegen.

¹⁰ Keine Quellenangabe möglich, da Werte aus internen Tests der MTU stammen

Um nun eine Aussage über die tatsächliche Bauteilbelastung zu machen, müssen die auftretenden Spannungen im Dauerbetrieb des Triebwerks dazu in Relation gesetzt werden. Diese können, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt, mit Calculix berechnet werden. Dazu wird zuerst das Schaufelblatt so genau wie möglich in CGX nachgebaut. Das Ergebnis ist ein Modell mit mehr als 500 000 Knoten:

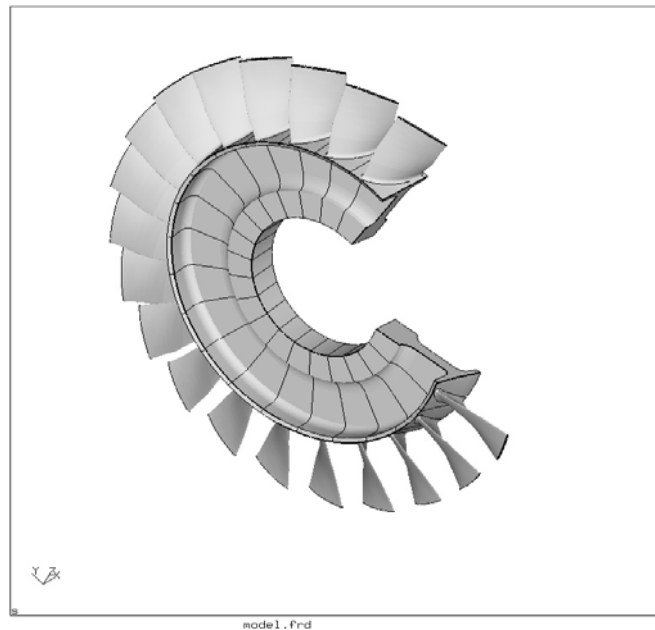


Abbildung 7.5: Fertiges Verdichterschaufelmodell

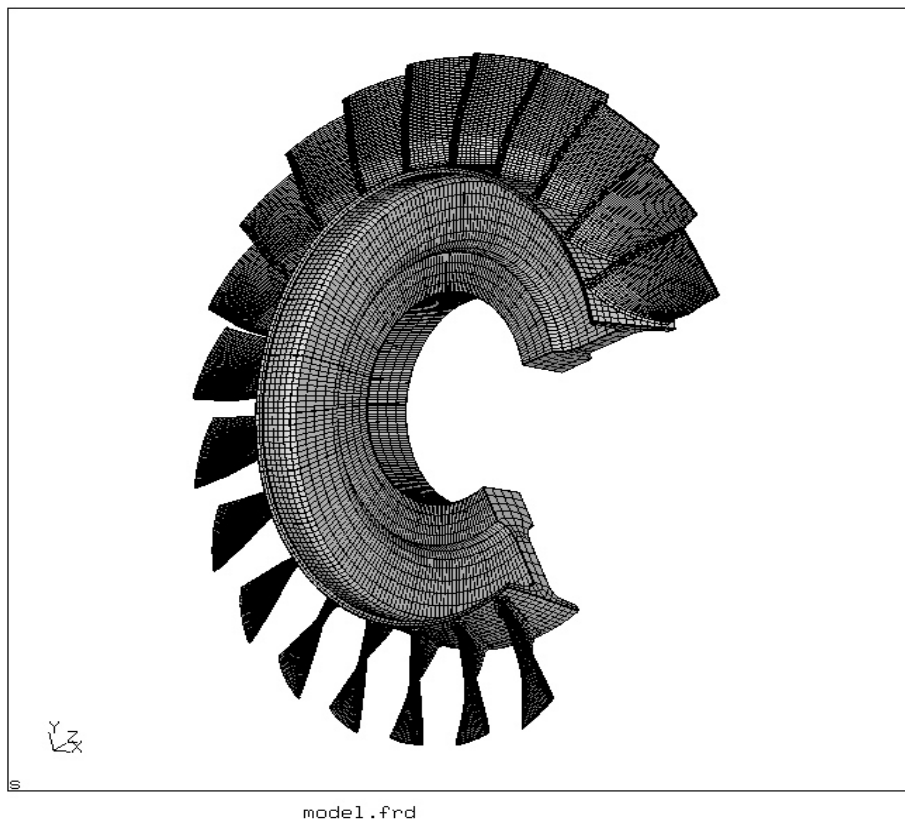


Abbildung 7.6: Fertiges Verdichterschaufelmodell mit eingeblendeten Finiten Elementen

Dann wird zur Ermittlung der Fliehkraftbelastung, die bei einer üblichen Drehzahl von 9550 Umdrehungen/Minute auftretenden Spannungen des Bauteils errechnet:

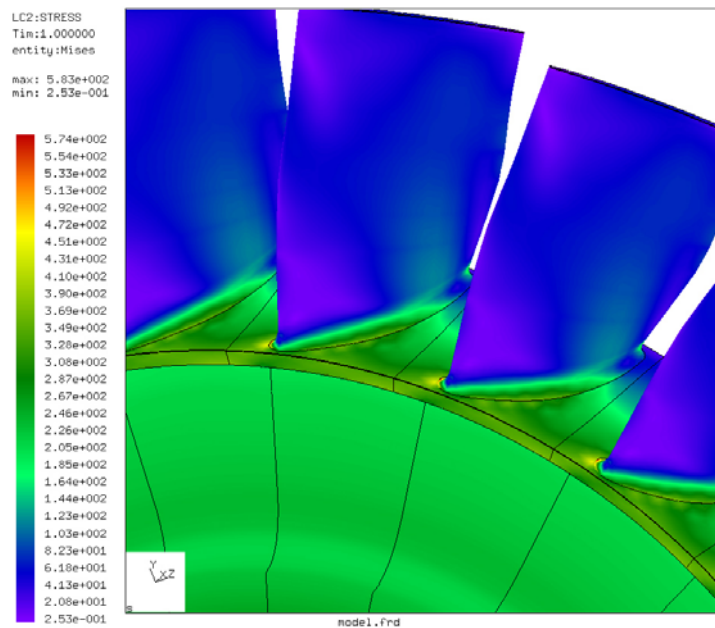


Abbildung 7.7: Spannungen bei Rotation

Die wirkliche statische Belastung beläuft sich auf $250 \frac{N}{mm}$.

Der nächste Schritt ist die Berechnung der auftretenden Eigenfrequenzen unter dieser Drehzahl. Auch diese wird per CCX berechnet und es ergibt sich für die Spannung folgendes Bild:

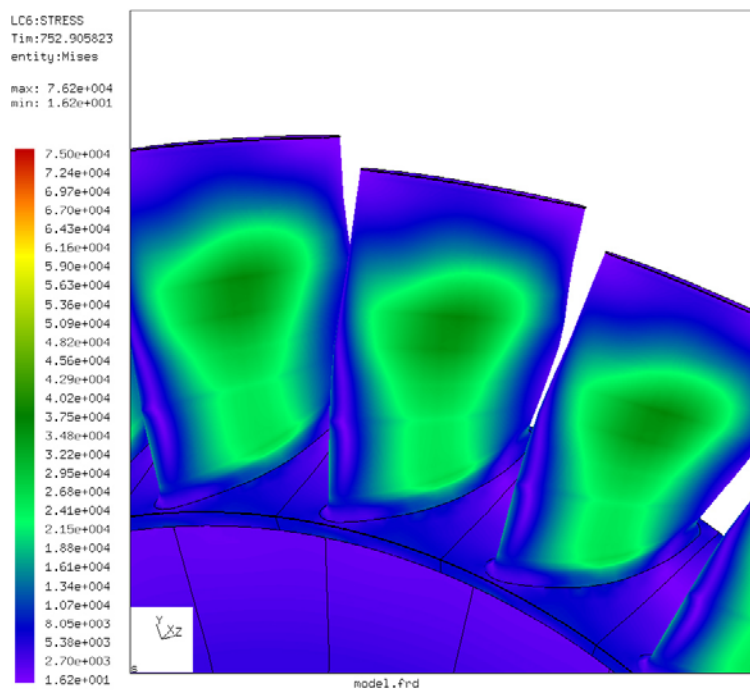


Abbildung 7.8: Spannungen unter Eigenfrequenz

Die berechnete maximale Schwingungsspannung beträgt $35000 \frac{N}{mm^2}$. Bei einem Blick auf das oben erstellte Goodman-Diagramm fällt auf, dass dieser Wert utopisch hoch ist. Erst ein Blick auf die berechnete Verschiebung schafft Klarheit:

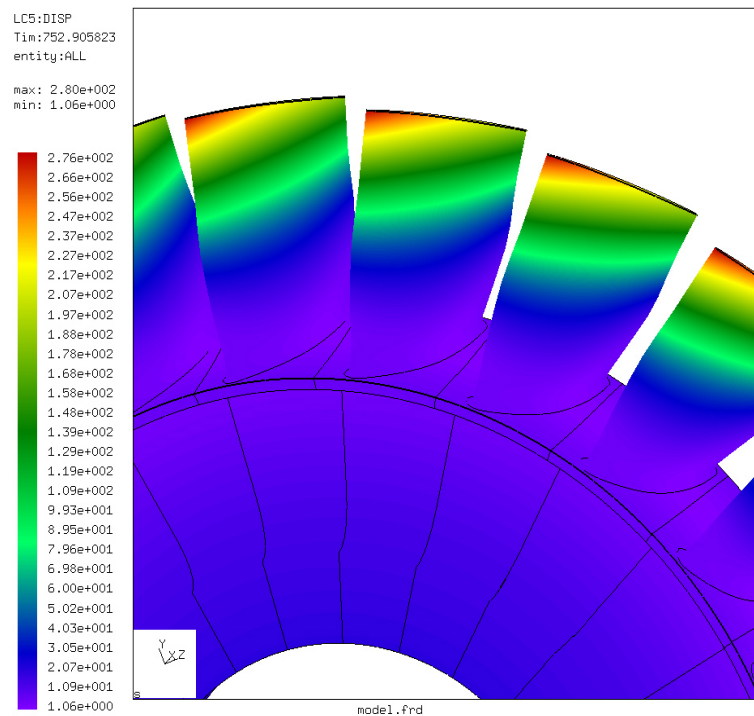


Abbildung 7.9: Verschiebungen unter Eigenfrequenz

Die zur berechneten Spannungsverteilung gehörende maximale Verschiebung beträgt 280mm. Tatsächlich wurde aber durch ein optisches Verfahren für die Amplitude der Verdichterschaukel beim Betrieb des Triebwerks eine Verschiebung von 1mm gemessen.¹¹

So lässt sich die dynamische Belastung über einen Dreisatz errechnen:

$$35000 \frac{N}{mm^2} \cong 280 \text{ mm}$$

$$xN \cong 1\text{mm}$$

$$\Rightarrow x = 35000 \frac{\frac{N}{mm}}{280\text{mm}}$$

Sie beläuft sich damit auf $125 \frac{N}{mm^2}$.

¹¹ Keine Quellenangabe möglich, da Werte aus internen Tests der MTU stammen

Aus dem nun vollständigen Goodman-Diagramm lässt sich ablesen, dass die Schaufel in beiden Belastungsrichtungen noch reichlich Puffer zu Verfügung hat.

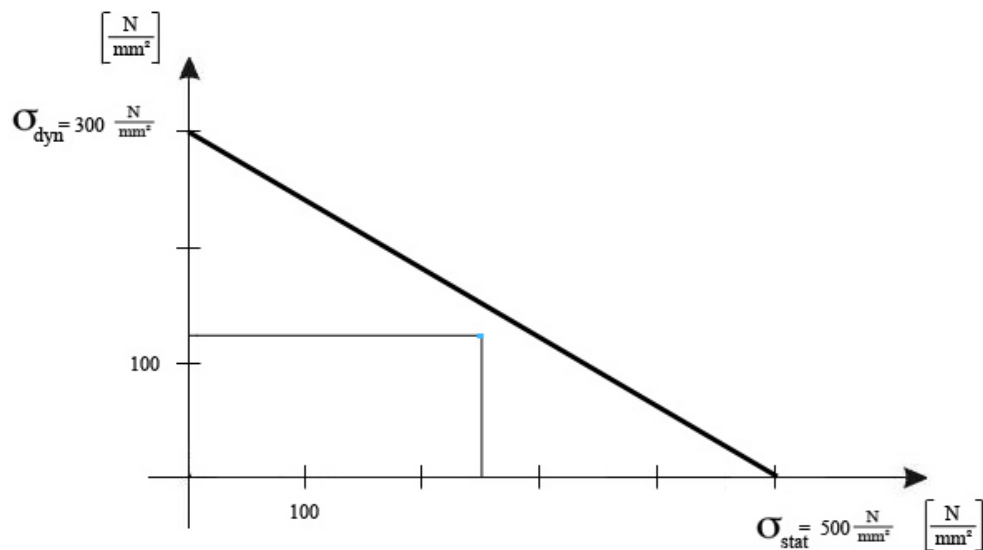


Abbildung 7.10: Goodmandiagramm mit tatsächlicher Belastung

Diese Reserven sind für kurzzeitige Spannungsspitzen oder andere unvorhersehbare Probleme nötig und sorgen außerdem für eine lange Lauffähigkeit. Wie dem Diagramm zu entnehmen ist, befindet sich auch der Wert für die dynamische Spannung deutlich im Bereich der Dauerfestigkeit. Hier geht man davon aus, dass das Bauteil mehr als 10^6 Lastwechsel verträgt, also dauerhaft ist. [vgl. NW99 S. 45]¹²

Eine genaue Aussage über die Haltbarkeit, zum Beispiel die Anzahl der möglichen Flugzeugflüge, ist an dieser Stelle nicht möglich, da es unklar ist, wie oft das Teil bei einem Triebwerkstart dynamisch belastet wird. Dazu ist es nötig, das gesamte Triebwerk zu modellieren, weil dieser Wert stark von den weiteren Verdichterschaufeln in der unmittelbaren Umgebung abhängt.

¹² Für weitere Informationen zu Berechnung der Lebensdauer siehe [NW99 S. 51]

Schluss

Diese Facharbeit war als Einführung in die Methode der Finiten Elemente gedacht, so wurde von den mathematischen Hintergründen, über die Probleme dieser Berechnungsweise, bis zu einer konkreten Anwendung mit industrienaheem Beispiel, vieles angesprochen. Doch die FEM hört an dieser Stelle nicht auf, sondern bietet in jedem dieser Themenbereiche eine Fülle von Möglichkeiten diese Arbeit weiter fortzusetzen. So könnte man beispielsweise noch weitere Finite Elemente herleiten. Hier hat man die Möglichkeit erst das Balkenelement [vgl. BI1] zu bearbeiten oder sich gleich in den dreidimensionalen Raum [vgl. BI2] zu begeben. Auch bei dem Verfahren zur Lösung von großen Gleichungssystem eröffnet sich mit den interaktiven Lösungsmethode, die in dieser Arbeit überhaupt nicht angesprochen wurde. Außerdem sind die Grenzen von Calculix ebenso beinahe endlos und es lassen sich viele umfangreichere Berechnungen durchführen und Objekte erstellen. Bei der vorgestellten Verdichterschaukel wäre es eventuell möglich, das Bauteil selbst auf mögliche Spannungsspitzen zu überprüfen oder mehrere Schaukeln in die Rechnung einzubeziehen. Eine weitere Idee wäre auch die Simulation von Extremsituationen, zum Beispiel bei zu großer Drehzahl.

Mir persönlich hat diese Arbeit mit der FEM als praktische Anwendung aber auch gezeigt, was man heutzutage schon alles per Computer machen kann, wo aber auch die Grenzen der EDV liegen. Außerdem sehe ich die FEM als ideales Beispiel, wie selbst relativ einfache Mathematik in der heutigen Welt großen Einsatz findet. Abgesehen davon habe ich einen sehr guten Einblick in den Arbeitsalltag eines Ingenieurs bekommen.

Literaturverzeichnis

- [MA] Andreas Malcherek: Numerische Methoden der Strömungsmechanik, Uni Hannover, <http://www.hydromech.uni-hannover.de/Mitarbeiter/HABBAR/Malcherek/numerik.pdf>, 15.8.2007
- [GB] J. Götsche; D. Born: Baupraktische Anwendung der Finite-Element-Methode, Fachhochschule Nordostniedersachsen, <http://www.buxhawk.de/fbb/lehre/goettsche/qs fem.pdf>, 15.8.2007
- [WI06] Falk K. Wittel: Eine kurze Einführung in die Finite Elemente Methode, 2006, ETH Zürich, Institut für Baustoffe <http://www.ifb.ethz.ch/education/comphys/finiteelemente/scripts/fem-in-4h.pdf>, 15.8.2007
- [NW99] H. Naubereit, J. Weihert: Einführung in die Ermüdungsfestigkeit, 1999, HANSER Verlag, 3-446-21028-8
- [HA03] P. Hagedorn: Technische Mechanik - Festigkeitslehre, 2003, Band 2, Verlag Harri, 3-8171-1711-6
- [BR97] D. Braess: Finite Elemente, 1997, Springer Verlag, 3-540-61905-4
- [MM89] U. Meißner, A. Menzel: Die Methode der finiten Elemente, 1989, 3-540-50162-2
- [RH00] F. Rieg, R. Hackenschmidt: Finite Elemente Analyse für Ingenieure, 2000, HANSER Verlag 3-446-21315-5
- [SF] Dipl.-Ing. Siegfried Sikorski, Dr. Jörg Frischbier: BETRIEBSFESTIGKEIT VON LEICHTBAUVERDICHTERSCHAUFELNAUS, CFK, <http://www.mtu.de/de/technologien/technikberichte/betriebsfestigkeit.pdf>, 15.8.2007
- [HH05] Hammer, Hammer: Physikalische Formeln und Tabellen, 2005, J. Lindauer Verlag
- [FÖ] H. Föll: Einführung in die Materialwissenschaft, http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/index.html, 15.8.2007
- [HE] D. Heidorn: Kraft und Verformung, <http://www.dieterheidorn.de/Physik/VS/Kraft/KraftUndVerformung/KraftUndVerformung.html>, 15.8.2007
- [MI93] Florian Michahelles: Das Gaußsche Eliminationsverfahren, Werner-von-Siemens-Gymnasium Weißenburg, 1993-1994, <http://www.inf.ethz.ch/personal/michahel/Mathe/fach.pdf>
- [SL] Mirko Slavik: Spannung und Verformung in der Bau-

- mechanik,http://www.bau.htw-dresden.de/baumech/slavik/a16_44.pdf,15.8.2007
- [DW07] Guido Dhondt, Klaus Wittig:
<http://www.calculix.de/>,2007
- [BI1] Manfred Bischoff:Finite Balken- und Plattenelemente, Universität Stuttgart,
http://www.ibb.uni-stuttgart.de/teaching/vorlesung/fe_1/skript/06_Balkelemente.pdf,15.8.2007
- [BI2] Manfred Bischoff:Finite Element für Kontinua, Universität Stuttgart,http://www.ibb.uni-stuttgart.de/teaching/vorlesung/fe_1/skript/04_FE_fuer_Kontinua.pdf,15.8.2007
- [OT] W. Ott: Technische Mechanik II
-Festigkeithypothesen auf der Grundlage einer Vergleichsspannung,
http://www2.gm.fh-koeln.de/~ott/ott/tm2/kap4_sigmapv.pdf,15.8.2007
- [TU] TU Wien:
Eigenschaften fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe
http://www.ifp.tuwien.ac.at/institut/lva/skripten/138.040%20Physik%20fuer%20UF%20Chemie/VO_CH_200307.ppt.pdf,15.8.2007

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 0.1: Titelbild [vgl. WI06 S. 1]	i
Abbildung 2.1: Versuchsbeschreibung	6
Abbildung 2.2: Schwingung graphisch dargestellt	6
Abbildung 2.3: Schwingender Balken	6
Abbildung 2.4: Graphische Darstellung des Potentialverlaufs	9
Abbildung 3.1: Stabmodell	11
Abbildung 3.2: Vereinfachtes Stabmodell	11
Abbildung 3.3: Darstellung der Formfunktionen	13
Abbildung 3.4: Modellbalken des Rechenbeispiels	16
Abbildung 5.1: Seitenansicht des Beispielbalkens	23
Abbildung 5.2: 3D-Ansicht des Beispielbalkens	23
Abbildung 5.3: Frontansicht des Beispielbalkens	23
Abbildung 5.4: Aufteilung der CGX Oberfläche	24
Abbildung 5.5: Punkte	26
Abbildung 5.6: Linien	26
Abbildung 5.7: Oberfläche	26
Abbildung 5.8: fertiges Modell	27
Abbildung 5.9: Modell in 3D gerendert	28
Abbildung 5.10: Modell in 3D Ansicht	30
Abbildung 5.11: Auswahl der Datensätze	31
Abbildung 5.12: Auswahl eines Verschiebungsdatensatzes	31
Abbildung 5.13: Darstellung der Verschiebung	32
Abbildung 5.14: Visualisierung der Verschiebung	32
Abbildung 5.15: Auswählen der zugehörigen Spannungen	33
Abbildung 5.16: Auswählen der MISES Spannungen	33
Abbildung 5.17: Darstellung der Spannungen	34
Abbildung 6.1: Veranschaulichung der Spannungen bei grobem Netz [GB S.39]	35
Abbildung 6.2: Veranschaulichung der Verschiebungen bei feinem Netz [GB S.40]	35
Abbildung 6.3: Veranschaulichung von Spannungsspitzen	36
Abbildung 7.1: Gasturbinenriebwerk [http://de.wikipedia.org/wiki/Gasturbine]	37
Abbildung 7.2: Schleuderversuch	37
Abbildung 7.3: Biegschwing-versuch [vgl. SF S.4]	38
Abbildung 7.4: Goodmandiagramm von Stahl	38
Abbildung 7.5: Fertiges Verdichterschaukelmodell	39
Abbildung 7.6: Fertiges Verdichterschaukelmodell mit eingeblendeten Finiten Elementen	39
Abbildung 7.7: Spannungen bei Rotation	40
Abbildung 7.8: Spannungen unter Eigenfrequenz	40
Abbildung 7.9: Verschiebungen unter Eigenfrequenz	41
Abbildung 7.10: Goodmandiagramm mit tatsächlicher Belastung	42
Abbildung A1: Balken bei einfacher Belastung	46
Abbildung A2: Balken unter zusätzlicher Zugbelastung	46
Abbildung A3: Balken unter zusätzlicher Druckbelastung	46

Anhang

A. Exkurs „von Mises Spannungen“

Warum eine simple Betrachtung der stärksten Spannung für zutreffende Aussagen über die Belastung eines Bauteils nicht ausreicht [vgl. OT], wird an einem Beispiel schnell deutlich:



Abbildung 1: Balken bei einfacher Belastung

Setzt man den aus Kapitel 5 bekannten Balken entlang seiner Achse unter Zugspannung, wird er sich in diese Richtung ausdehnen.

Die Folge davon ist, dass der Balken zwar länger wird, aber an Dicke verliert (siehe Skizze). Dieses Verhalten dürfte jedem, der schon mal an einem Gummi gezogen hat, bekannt sein und wird in der Fachliteratur als *Querkontraktion* bezeichnet.

Im dreidimensionalen Raum treten aber in der aller Regel Spannungen in verschiedenen Richtungen auf und nicht nur, wie das obige Beispiel zeigt, entlang einer Achse.

Um zu zeigen, was folglich passiert, wenn zusätzlich zu der starken Zugspannung noch eine weitere, diesmal aber senkrecht orientierte Spannung anliegt, werden beide Möglichkeiten exemplarisch veranschaulicht.

In Fall 1 wirkt eine Zugspannung senkrecht zu seiner Achse und in Fall 2 eine Druckspannung:

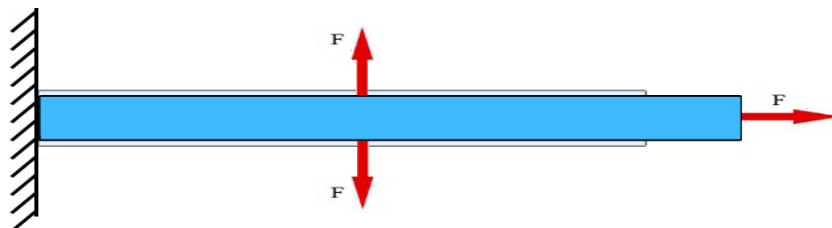


Abbildung 2: Balken unter zusätzlicher Zugbelastung

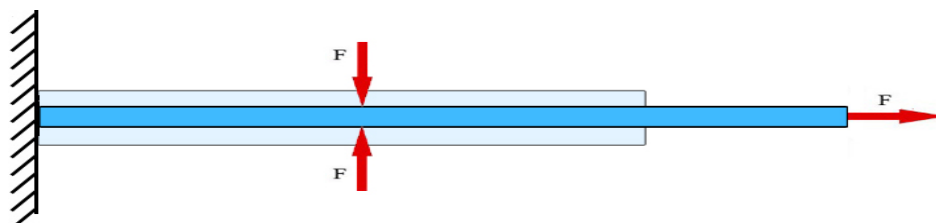


Abbildung 3: Balken unter zusätzlicher Druckbelastung

Wie den Bildern zu entnehmen ist, hat die zweite Spannung einen entscheidenden Einfluss auf die Verformung des Balken und somit natürlich auch auf die wirkliche Spannungsbelastung. Während die Gestaltänderung in Fall 1 wesentlich geringer als in dem Eingangsbeispiel ausfällt, zeigt Fall 2 genau das Gegenteil. Hier hat die Verformung stark zugenommen.

Es wird also klar, dass die tatsächliche, auf das Bauteil wirkende Spannung immer aus einer Kombination von den Spannungen in alle Koordinatenachsen und deren Vorzeichen darstellt. Genau das versucht die von Mises Vergleichsspannung wiederzugeben.