Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen / Datenstrukturen (nicht vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 46115 / 2015 / Herbst

Thema 2 / Aufgabe 4 (*Methode function: Formale Verifikation - Induktionsbeweis*)

Stichwörter: Vollständige Induktion

Gegeben sei die folgende Methode `function`:

```
double function(int n) {
  if (n == 1)
    return 0.5 * n;
  else
    return 1.0 / (n * (n + 1)) + function(n - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/Induktion.java`

Beweisen Sie folgenden Zusammenhang mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \geq 1 \colon \text{function}(n) = f(n) \text{ mit } f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$$

Hinweis: Eventuelle Rechenungenauigkeiten, wie z. B. in Java, bei der Behandlung von Fließkommazahlen (z. B. `double`) sollen beim Beweis nicht berücksichtigt werden - Sie dürfen also annehmen, Fließkommazahlen würden mathematische Genauigkeit aufweisen.

Lösungsvorschlag

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

$f(1) := 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

$f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

zu zeigen:

$f(n+1) := 1 - \frac{1}{(n+1)+1} = f(n)$

Vorarbeiten (Java in Mathe umwandeln):

$\text{function}(n) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} + f(n-1)$

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} + f((n+1)-1) && n+1 \text{ eingesetzt} \\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + f(\text{n}) && \text{vereinfacht} \\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + 1 - \frac{1}{n+1} && \text{für } f(n) \text{ Formel eingesetzt} \\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1}{n+1} && \text{1. Bruch an 2. Stelle geschrieben} \\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{2. Bruch mit } (n+2) \text{ erweitert} \\
&= 1 + \frac{1-(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{die 2 Brüche subtrahiert} \\
&= 1 + \frac{1-n-2}{(n+1)\cdot(n+2)} && -+2=-2 \\
&= 1 + \frac{-1-n}{(n+1)\cdot(n+2)} && 1-2=-1 \\
&= 1 + \frac{-1\cdot(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)} && (n+1) \text{ ausgeklammert} \\
&= 1 + \left(-1\cdot\frac{(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) && \text{minus vor den Bruch bringen} \\
&= 1 - \frac{(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{plus minus ist minus} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} && (n+1) \text{ gekürzt} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)+1} && \text{Umformen zur Verdeutlichung}
\end{aligned}
$$

Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net.Der TEX-Quelltext dieser Aufgabe kann unter folgender URL aufgerufen werden: `https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Examen/46115/2015/09/Thema-2/Aufgabe-4.tex`