Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2017 / Frühjahr

Thema 1 / Aufgabe 4

(*Methode „sumOfSquares()“*)

Stichwörter: Vollständige Induktion

Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass keinerlei Under- oder Overflows auftreten.

Gegeben sei folgende rekursive Methode für $n \geq 0$:

```
long sumOfSquares (long n) {
  if (n == 0)
    return 0;
  else
    return n * n + sumOfSquares(n - 1);
}
```

(a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \texttt{sumOfSquares(n)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lösungsvorschlag

Sei $f(n) : \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

Für $n = 0$ gilt:

$\texttt{sumOfSquares(0)} \overset{\text{if}}{=} 0 = f(0)$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$\texttt{sumOfSquares(n)} = f(n)$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —

$n \to n + 1$

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= \texttt{sumOfSquares(n+1)} && \text{Java-Methode eingesetzt}\\
&\overset{\texttt{else}}{=} \texttt{(n+1)*(n+1) + sumOfSquares(n)} && \text{Java-Code der else-Verzweigung verwendet}\\
&\overset{\texttt{I.H.}}{=} (n+1)(n+1) + f(n) && \text{mathematisch notiert}\\
&= (n+1)(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Formel eingesetzt}\\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{potenziert}\\
&= \frac{6(n+1)^2}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && (n+1)^2 \text{ in Bruch umgewandelt}\\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Addition gleichnamiger Brüche}\\
&= \frac{(n+1)6(n+1) + (n+1)n(2n+1)}{6} && n+1 \text{ ausklammern vorbereitet}\\
&= \frac{(n+1)(6(n+1) + n(2n+1))}{6} && n+1 \text{ ausgeklammert}\\
&= \frac{(n+1)(6n+6+2n^2+n))}{6} && \text{Klammern ausmultipliziert / aufgelöst}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} && \text{umsortiert, addiert } 6n+n=7n\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} && \text{Ausklammern vorbereitet}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && (n+2) \text{ ausgeklammert}\\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1))}{6} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
\end{aligned}
$$

[a]

[a] https://mathcs.org/analysis/reals/infinity/answers/sm_sq_cb.html

(b) Beweisen Sie die Terminierung von `sumOfSquares(n)` für alle $n \geq 0$.

Lösungsvorschlag

Sei $T(n) = n$. Die Funktion $T(n)$ ist offenbar ganzzahlig. In jedem Rekursionsschritt wird n um eins verringert, somit ist $T(n)$ streng monoton fallend. Durch die Abbruchbedingung `n==0` ist $T(n)$ insbesondere nach unten beschränkt. Somit ist T eine gültige Terminierungsfunktion.

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net.Der TEX-Quelltext dieser Aufgabe kann unter folgender URL aufgerufen werden: `https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Examen/66115/2017/03/Thema-1/Aufgabe-4.tex`