

# Pumping-Lemma

(w c wR)

**Stichwörter:** Pumping-Lemma (Reguläre Sprache)

1

## Exkurs: Pumping-Lemma für Reguläre Sprachen

Es sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl  $j$ , sodass für alle Wörter  $\omega \in L$  mit  $|\omega| \geq j$  (jedes Wort  $\omega$  in  $L$  mit Mindestlänge  $j$ ) jeweils eine Zerlegung  $\omega = uvw$  existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a)  $|v| \geq 1$  (Das Wort  $v$  ist nicht leer.)
- (b)  $|uv| \leq j$  (Die beiden Wörter  $u$  und  $v$  haben zusammen höchstens die Länge  $j$ .)
- (c) Für alle  $i = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $uv^i w \in L$  (Für jede natürliche Zahl (mit 0)  $i$  ist das Wort  $uv^i w$  in der Sprache  $L$ )

Die kleinste Zahl  $j$ , die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache  $L$  genannt.

$$L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Erläuterung:  $w^R$  ist die Spiegelung von  $w$ , d. h. es enthält die Zeichen von  $w$  in umgekehrter Reihenfolge. Worte von  $L_1$  sind also z. B.  $c$ ,  $abcba$ ,  $bbbaabacabaabbb$

Lösungsvorschlag

$L_1$  ist kontextfrei.

### Beweis, dass $L_1$ nicht regulär ist, durch das Pumping Lemma:

Wir nehmen an  $L_1$  wäre regulär. Dann gibt es einen endlichen Automaten, der  $L_1$  erkennt. Die Anzahl der Zustände dieses Automaten sei  $j$ . Wir wählen jetzt das Wort  $\omega = a^j c a^j$ .  $\omega$  liegt in  $L_1$ , und ist offensichtlich länger als  $j$ . Dieses Wort muss irgendwo eine Schleife, also einen aufpumpbaren Teil enthalten, d. h. man kann es so in  $uvw$  zerlegen, dass für jede natürliche Zahl  $i$  auch  $uv^i w$  zu  $L_1$  gehört. Wo könnte dieser aufpumpbare Teil liegen?

**Fall 1:** Der aufpumpbare Teil  $v$  liegt komplett im Bereich des ersten  $a^j$ -Blocks. Dann würde aber  $uv^2 w = a^{j+|v|} c a^j$  mehr  $a$ 's im ersten Teil als im zweiten Teil enthalten und läge nicht mehr in  $L_1$ .

**Fall 2:**  $v$  enthält das  $c$ . Dann würde aber  $uv^2 w$  zwei  $c$ 's enthalten und läge damit nicht mehr in  $L_1$ .

**Fall 3:** Der aufpumpbare Teil liegt komplett im Bereich des zweiten  $a^j$ -Blocks. Dann liegt analog zu Fall 1  $uv^2 w$  nicht mehr in  $L_1$ . Unser Wort lässt sich also nicht so zerlegen, dass man den Mittelteil aufpumpen kann, also ist die Annahme, dass  $L_1$  regulär ist, falsch.

Beweis, dass  $L_1$  kontextfrei ist, durch Angabe einer kontextfreien Grammatik:

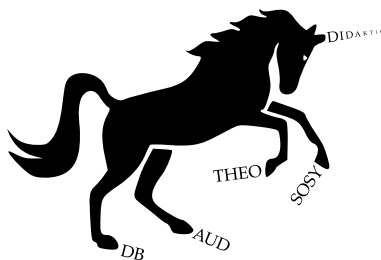
<sup>1</sup><http://www.coli.uni-saarland.de/courses/I2CL-10/material/Uebungsblaetter/Musterloesung4.4.pdf>

$P = \{$ 

$$S \rightarrow aSa$$

$$S \rightarrow bSb$$

$$S \rightarrow c$$

 $\}$ 

## Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an [hermine.bschlangaul@gmx.net](mailto:hermine.bschlangaul@gmx.net). Der  $\text{\LaTeX}$ -Quelltext dieser Aufgabe kann unter folgender URL aufgerufen werden: [https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Module/70\\_THEO/10\\_Formale-Sprachen/10\\_Typ-3\\_Regulaer/Pumping-Lemma/Aufgabe\\_Saarland-Pinkal.tex](https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Module/70_THEO/10_Formale-Sprachen/10_Typ-3_Regulaer/Pumping-Lemma/Aufgabe_Saarland-Pinkal.tex)