Pumping-Lemma („$w\ w$“)

Stichwörter: Pumping-Lemma (Reguläre Sprache)

Zeigen oder widerlegen Sie: Die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sind regulär. [1]

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Reguläre Sprachen**
> Es sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass für alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ (jedes Wort ω in L mit Mindestlänge j) jeweils eine Zerlegung $\omega = uvw$ existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (a) $|v| \geq 1$ (Das Wort v ist nicht leer.)
>
> (b) $|uv| \leq j$ (Die beiden Wörter u und v haben zusammen höchstens die Länge j.)
>
> (c) Für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $uv^iw \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iw in der Sprache L)
>
> Die kleinste Zahl j, die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache L genannt.

$$L_1 = \{ww | w \in \{a, b\}^*\}$$

Lösungsvorschlag

Angenommen L_1 sei regulär, dann müsste L_1 die Bedingungen der stärkeren Variante des Pumping-Lemmas erfüllen.

Beweis durch Widerspruch:

Sei $j \in \mathbb{N}$ die Konstante aus dem Pumping-Lemma und $\omega = a^j b a^j b$ ein Wort aus L_1 ($|\omega| > j$ gilt offensichtlich).

Dann müsste ω nach dem Pumping-Lemma zerlegbar sein in $\omega = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| < j$. uv kann wegen $|uv| < j$ kein b enthalten und liegt komplett im ersten a^j. Also:

$$a^j b a^j b = uvw \text{ mit } u = a^x, v = a^y, w = a^{n-x-y} b a^j b (n \geq x + y, x > 0)$$

Dann gilt

$$uv^0w = a^x a^{j-x-y} b a^j b = a^{j-y} b a^j b \notin L_1$$

Wir haben gezeigt, dass es keine gültige Zerlegung für ω gibt. Also gilt für L_1 die stärkere Variante des Pumping-Lemmas nicht. Somit kann L_1 nicht regulär sein.

[1] `https://userpages.uni-koblenz.de/~dpeuter/teaching/17ss_gti/blatt04_loesung.pdf`

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net.Der TEX-Quelltext dieser Aufgabe kann unter folgender URL aufgerufen werden: `https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Module/70_THEO/10_Formale-Sprachen/10_Typ-3_Regulaer/Pumping-Lemma/Aufgabe_Koblenz.tex`