

66115 Herbst 2017

Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)

Aufgabenstellungen mit Lösungsvorschlägen



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Aufgabenübersicht

Thema Nr. 1	3
Aufgabe 2 [Kontextfreie Sprachen]	3
 Thema Nr. 2	5
Aufgabe 5 [CYK mit fehlenden Zellen (T: SABC N: ab)]	5
Aufgabe 8 [Binärbaum, Halde, AVL]	5



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Thema Nr. 1

Aufgabe 2 [Kontextfreie Sprachen]

Betrachten Sie die Sprache $L_1 = L_a \cup L_b$.

- $L_a = \{ a^n b c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$
- $L_b = \{ a b^m c^m \mid m \in \mathbb{N} \}$

(a) Geben Sie für L_1 eine kontextfreie Grammatik an.

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned} P = \{ & \\ & S \rightarrow S_a \mid S_b \\ & S_a \rightarrow a S_a c \mid b \\ & S_b \rightarrow a \mid a B_b \\ & B_b \rightarrow b B_b c \mid bc \\ & \} \end{aligned}$$

(b) Ist Ihre Grammatik aus a) eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Nein. Die Sprache ist nicht eindeutig. Für das Wort abc gibt es zwei Ableitungen, nämlich $S \vdash S_a \vdash a S_a c \vdash abc$ und $S \vdash S_b \vdash a B_b \vdash abc$.

(c) Betrachten Sie die Sprache $L_2 = \{ a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$. Zeigen Sie, dass L_2 nicht kontextfrei ist.

Lösungsvorschlag

Annahme: L_2 ist kontextfrei
→ Pumping-Lemma gilt für L_2
→ $j \in \mathbb{N}$ als Pumping-Zahl
 $\omega \in L_2: |\omega| \geq j$
Konsequenz: $\omega = uvwxy$

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq j$
- $uv^iwx^iy \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$

Wir wählen: $\omega = a^{2^i}: |\omega| \geq j$

p $a \dots a$

r $a \dots a$

s $a \dots a$

t $a \dots a$

q $a \dots a$

$$q + r + s + t + q = 2^j$$

$$\Rightarrow r + t \geq 1$$

$$r + s + t \leq j$$

1. Fall

$$r + t = 2^{j-1}$$

$$2^{j-1} + 2^{j-1} = 2 \cdot 2^{j-1} = 2^1 \cdot 2^{j-1} = 2^{1+j-1} = 2^j$$

$$\omega' = uv^2wx^2y$$

$$p + 2 \cdot r + s + 2 \cdot t + q$$

$$p + s + q + 2 \cdot (r + t)$$

$$2^{j-1} + 2 \cdot 2^{j-1} = 3 \cdot 2^{j-1} = 2^{j-1} + 2^i \leq 2^{j+1}$$

keine Zweierpotenz

$$\Rightarrow \omega \notin L_2$$

\Rightarrow Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow L_2$ nicht kontextfrei

2. Fall

$$r + t \neq 2^{j-1}$$

$$\omega' = uv^0wx^0y$$

$$\Rightarrow p + s + q = 2^j - (r + t)$$

$$(r + t) \neq 2^{j-i}$$

ist keine Zweierpotenz

$$\Rightarrow \omega \notin L_2$$

$\Rightarrow L_2$ nicht kontextfrei

Thema Nr. 2

Aufgabe 5 [CYK mit fehlenden Zellen (T: SABC N: ab)]

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ die kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform und der Menge P der Produktionen:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \mid BC \\ A \rightarrow BA \mid a \\ C \rightarrow AB \mid a \\ B \rightarrow CC \mid b \end{array} \right\}$$

Sei $\omega = baaab$. Folgende Tabelle entsteht durch Anwendung des CYK-Algorithmus. Z. B. bedeutet $B \in V(3, 5)$, dass aus der Variablen B das Teilwort $\omega_3\omega_4\omega_5 = aab$ hergeleitet werden kann. Drei Einträge wurden weggelassen.

- (a) Bestimmen Sie die Mengen $V(1, 2)$, $V(1, 3)$ und $V(1, 5)$.

Lösungsvorschlag

b	a	a	a	b
B	A,C	A,C	A,C	B
A,S	B	B	S,C	
-	S,C,A	B		
S,A,C	S,C			
S,C				

- (b) Wie entnehmen Sie dieser Tabelle, dass $\omega \in L(G)$ ist?

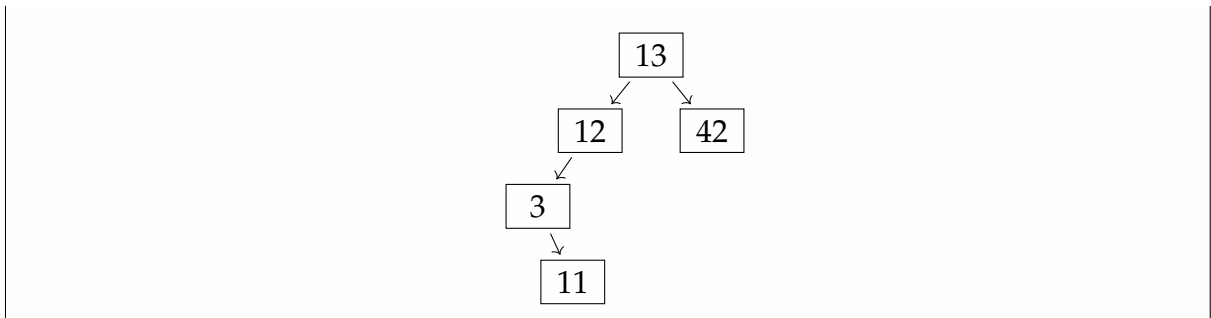
Lösungsvorschlag

In der Menge $V(1, 5)$ ist das Startsymbol S der Sprache $L(G)$ enthalten.

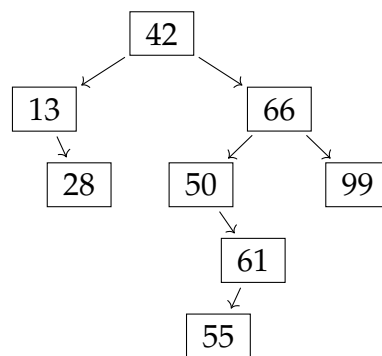
Aufgabe 8 [Binärbaum, Halde, AVL]

- (a) Fügen Sie die Zahlen 13, 12, 42, 3, 11 in der gegebenen Reihenfolge in einen zunächst leeren binären Suchbaum mit aufsteigender Sortierung ein. Stellen Sie nur das Endergebnis dar.

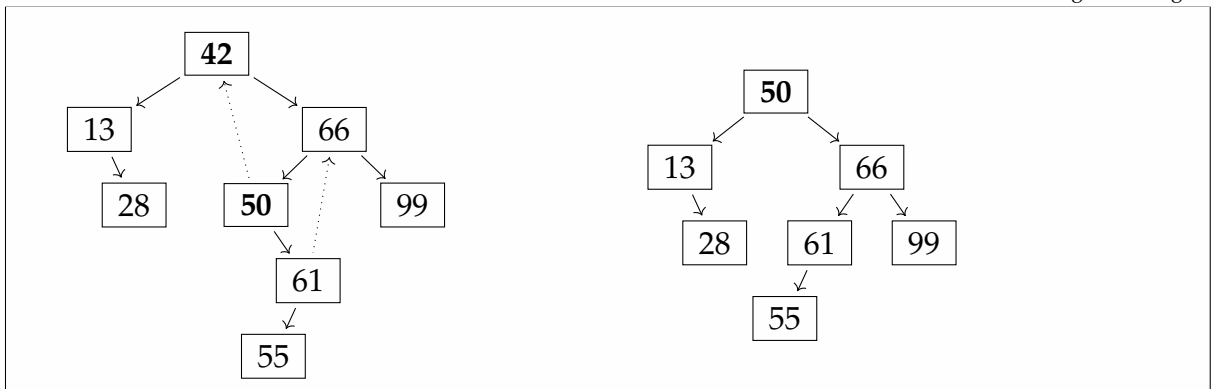
Lösungsvorschlag



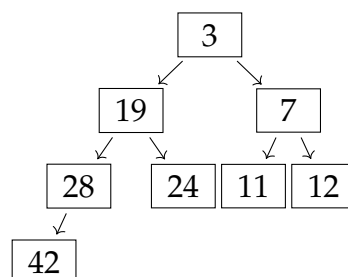
- (b) Löschen Sie den Wurzelknoten mit Wert 42 aus dem folgenden *binären* Suchbaum mit aufsteigender Sortierung und ersetzen Sie ihn dabei durch einen geeigneten Wert aus dem *rechten* Teilbaum. Lassen Sie möglichst viele Teilbäume unverändert und erhalten Sie die Suchbaumeigenschaft.



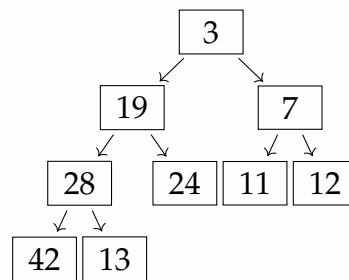
Lösungsvorschlag



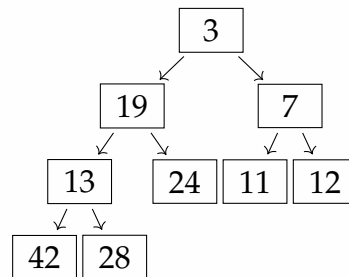
- (c) Fügen Sie einen neuen Knoten mit dem Wert 13 in die folgende Min-Halde ein und stellen Sie anschließend die Halden-Eigenschaft vom neuen Blatt aus beginnend wieder her, wobei möglichst viele Knoten der Halde unverändert bleiben und die Halde zu jedem Zeitpunkt links-vollständig sein soll. Geben Sie nur das Endergebnis an.



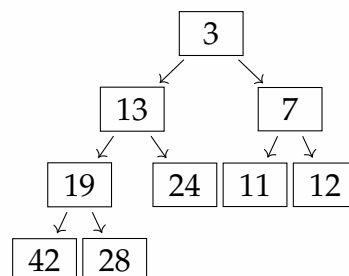
Nach dem Einfügen von „13“:



Nach dem Vertauschen von „13“ und „28“:



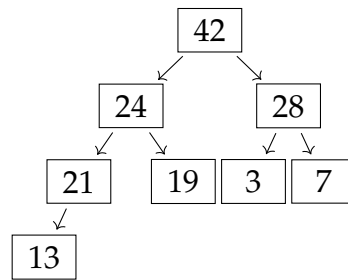
Nach dem Vertauschen von „13“ und „19“:



- (d) Geben Sie für die ursprüngliche Min-Halbe aus Teilaufgabe c) (ohne den neu eingefügten Knoten mit dem Wert 13) die Feld-Einbettung (Array-Darstellung) an.

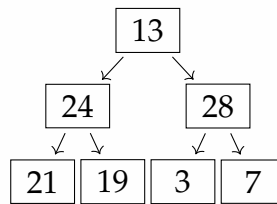
0	1	2	3	4	5	6	7
3	19	7	28	24	11	12	42

- (e) Löschen Sie den Wurzelknoten mit Wert 42 aus der folgenden Max-Halbe und stellen Sie anschließend die Halden-Eigenschaft ausgehend von einer neuen Wurzel wieder her, wobei möglichst viele Knoten der Halbe unverändert bleiben und die Halbe zu jedem Zeitpunkt links-vollständig sein soll. Geben Sie nur das Endergebnis an.

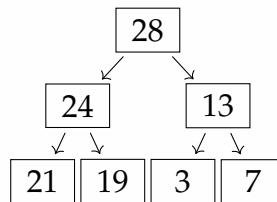


Lösungsvorschlag

Nach dem Ersetzen von „42“ mit „13“:

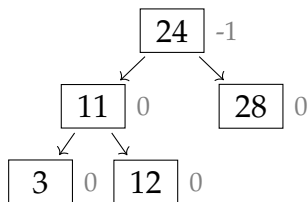


Nach dem Vertauschen von „13“ und „28“:



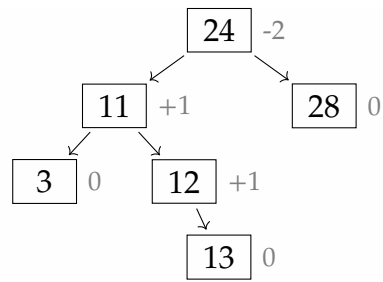
- (f) Fügen Sie in jeden der folgenden AVL-Bäume mit aufsteigender Sortierung jeweils einen neuen Knoten mit dem Wert 13 ein und führen Sie anschließend bei Bedarf die erforderliche(n) Rotation(en) durch. Zeichnen Sie den Baum vor und nach den Rotationen.

(i) AVL-Baum A

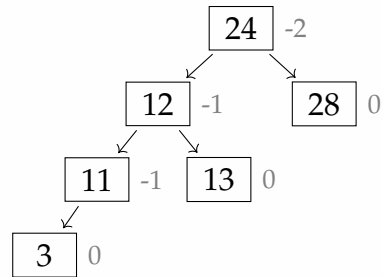


Lösungsvorschlag

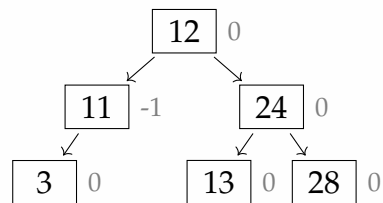
Nach dem Einfügen von „13“:



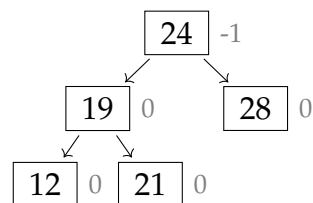
Nach der Linksrotation:



Nach der Rechtsrotation:

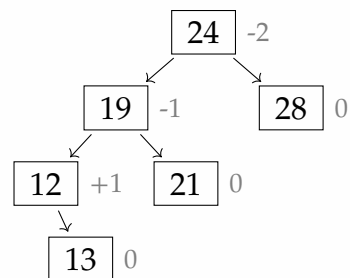


(ii) AVL-Baum B



Lösungsvorschlag

Nach dem Einfügen von „13“:



Nach der Rechtsrotation:

