

Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2018 / Frühjahr

## Thema 2 / Aufgabe 6

(Methode „m()“)

**Stichwörter:** Master-Theorem

Der Hauptsatz der Laufzeitfunktionen ist bekanntlich folgendermaßen definiert:

### Exkurs: Master-Theorem

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$a$  = Anzahl der rekursiven Aufrufe, Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion ( $a \geq 1$ ).

$\frac{1}{b}$  = Teil des Originalproblems, welches wiederum durch alle Unterprobleme repräsentiert wird, Anteil an der Verkleinerung des Problems ( $b > 1$ ).

$f(n)$  = Kosten (Aufwand, Nebenkosten), die durch die Division des Problems und die Kombination der Teillösungen entstehen. Eine von  $T(n)$  unabhängige und nicht negative Funktion.

Dann gilt:

**1. Fall:**  $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

falls  $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$  für  $\varepsilon > 0$

**2. Fall:**  $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$

falls  $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

**3. Fall:**  $T(n) \in \Theta(f(n))$

falls  $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$  für  $\varepsilon > 0$  und ebenfalls für ein  $c$  mit  $0 < c < 1$  und alle hinreichend großen  $n$  gilt:  $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$

- (a) Betrachten Sie die folgende Methode `m` in Java, die initial mit `m(r, 0, r.length)` für das Array `r` aufgerufen wird. Geben Sie dazu eine Rekursionsgleichung  $T(n)$  an, welche die Anzahl an Rechenschritten von `m` in Abhängigkeit von der Länge  $n = \text{r.length}$  berechnet.

```
public static int m(int[] r, int lo, int hi) {
    if (lo < 8 || hi <= 10 || lo >= r.length || hi > r.length) {
        throw new IllegalArgumentException();
    }

    if (hi - lo == 1) {
        return r[lo];
    } else if (hi - lo == 2) {
        return Math.max(r[lo], r[lo + 1]); // O(1)
    } else {
        int s = (hi - lo) / 3;
        int x = m(r, lo, lo + s);
```

```

int y = m(r, lo + s, lo + 2 * s);
int z = m(r, lo + 2 * s, hi);
return Math.max(Math.max(x, y), 2); // O(1)
}
}

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen\\_66115/jahr\\_2018/fruehjahr/MasterTheorem.java](https://github.com/src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2018/fruehjahr/MasterTheorem.java)

#### Lösungsvorschlag

##### Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

##### Anzahl der rekursiven Aufrufe ( $a$ ):

3

##### Anteil Verkleinerung des Problems ( $b$ ):

um  $\frac{1}{3}$  also  $b = 3$

##### Laufzeit der rekursiven Funktion ( $f(n)$ ):

$\mathcal{O}(1)$

##### Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \mathcal{O}(1)$$

- (b) Ordnen Sie die rekursive Funktion  $T(n)$  aus (a) einem der drei Fälle des Mastertheorems zu und geben Sie die resultierende Zeitkomplexität an. Zeigen Sie dabei, dass die Voraussetzung des Falles erfüllt ist.

#### Lösungsvorschlag

##### 1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ :

$$f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_3 3 - \varepsilon}) = \mathcal{O}(n^{1 - \varepsilon}) = \mathcal{O}(1) \text{ für } \varepsilon = 1$$

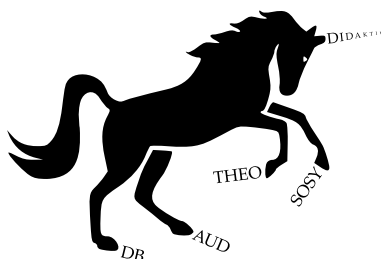
##### 2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ :

$$f(n) \notin \Theta(n^{\log_3 3}) = \Theta(n^1)$$

##### 3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ :

$$f(n) \notin \Omega(n^{\log_3 3 + \varepsilon}) = \Omega(n^{1 + \varepsilon})$$

Also:  $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$



## Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an [hermine.bsclangaul@gmx.net](mailto:hermine.bsclangaul@gmx.net). Der  $\text{\LaTeX}$ -Quelltext dieser Aufgabe kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/bsclangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Examen/66115/2018/03/Thema-2/Aufgabe-6.tex>