66115
Frühjahr
2012

Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)

Aufgabenstellungen mit Lösungsvorschlägen

Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Aufgabenübersicht

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Thema Nr. 1

Aufgabe 3 [Kontextfrei aber nicht regulär]

Beweisen Sie, dass folgende Sprache kontextfrei, aber nicht regulär ist.

$$C = \{ a^n b^m \mid n \geq m \geq 1 \}$$

Nachweis Kontextfrei über Grammatik

$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$$P = \left\{ S \rightarrow aSb \mid aS \mid ab \right\}$$

- Regel 1: aSb
- Regel 2: aS
- Regel 3: ab

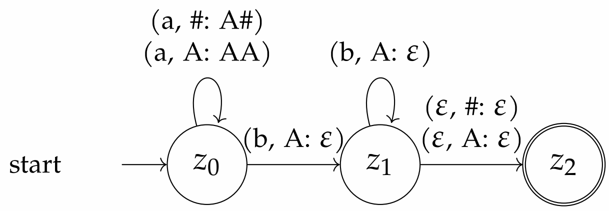
ab**:** $S \xrightarrow{3} ab$

$a^n b$**:** $S \xrightarrow[n-1]{2} a^{n-1}S \xrightarrow{3} a^{n-1}ab$

$a^n b^m$**:** $S \xrightarrow[m-1]{1} a^{m-1}Sb^{m-1} \xrightarrow[n-(m-1)]{2} a^{n-1}Sb^{m-1} \xrightarrow{3} a^n b^m$

$\Rightarrow L(G) = C$

Nachweis Kontextfrei über Kellerautomat



Der Automat auf flaci.com (FLACI: Formale Sprachen, abstrakte Automaten, Compiler und Interpreter) Ein Projekt der Hochschule Zittau/Görlitz und der Pädagogischen Hochschule Schwyz: flaci.com/Aji151myg

Nachweis: C nicht regulär

C sei regulär

$\Rightarrow$ Pumping-Lemma für C erfüllt
j sei die Pumping-Zahl ($j \in \mathbb{N}$)
$\omega \in C$: $\omega = a^j b^j$
$\omega = uvw$
Dann gilt:

- $|v| \geq 1$
- $|uv| \leq j$
- $uv^i w \in C$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$

In uv können nur a's vorkommen
$\Rightarrow$ In v muss mindestens ein a vorkommen
$\Rightarrow uv^0 w = a^l (a^{j-l})^0 b^j$ $((a^{j-l})^0 = \varepsilon)$
$\Rightarrow$ In ω' sind nur l viele a's, Da $l < j$, $\omega' \notin C$,
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme
$\Rightarrow$ C nicht regulär

Aufgabe 4 [Nonterminale: SAB, Terminale: ab]

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A, B\}$ und
P = $\{$

$$S \rightarrow A$$
$$S \rightarrow B$$
$$A \rightarrow aAb$$
$$B \rightarrow AA$$
$$B \rightarrow bBa$$
$$A \rightarrow a$$

$\}$

Der Automat auf flaci.com (FLACI: Formale Sprachen, abstrakte Automaten, Compiler und Interpreter) Ein Projekt der Hochschule Zittau/Görlitz und der Pädagogischen Hochschule Schwyz: flaci.com/Gr3rgt2vg

Geben Sie eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform an.

Lösungsvorschlag

Kann auch so geschrieben werden:

P = $\{$

$$S \rightarrow A \mid B$$
$$A \rightarrow aAb \mid a$$
$$B \rightarrow AA \mid bBa$$

$\}$

(a) **Elimination der ε-Regeln**

— *Alle Regeln der Form $A \to \varepsilon$ werden eliminiert. Die Ersetzung von A wird durch ε in allen anderen Regeln vorweggenommen.*

$\varnothing$ Nichts zu tun

(b) **Elimination von Kettenregeln**

— *Jede Produktion der Form $A \to B$ mit $A, B \in S$ wird als Kettenregel bezeichnet. Diese tragen nicht zur Produktion von Terminalzeichen bei und lassen sich ebenfalls eliminieren.*

$\mathrm{P} = \{$

$$\begin{aligned} S &\to aAb \mid a \mid AA \mid bBa \\ A &\to aAb \mid a \\ B &\to AA \mid bBa \end{aligned}$$

$\}$

(c) **Separation von Terminalzeichen**

— *Jedes Terminalzeichen σ, das in Kombination mit anderen Symbolen auftaucht, wird durch ein neues Nonterminal S_σ ersetzt und die Menge der Produktionen durch die Regel $S_\sigma \to \sigma$ ergänzt.*

$\mathrm{P} = \{$

$$\begin{aligned} S &\to T_aAT_b \mid a \mid AA \mid T_bBT_a \\ A &\to T_aAT_b \mid a \\ B &\to AA \mid T_bBT_a \\ T_a &\to a \\ T_b &\to b \end{aligned}$$

$\}$

(d) **Elimination von mehrelementigen Nonterminalketten**

— *Alle Produktionen der Form $A \to B_1B_2 \ldots B_n$ werden in die Produktionen $A \to A_{n-1}B_n, A_{n-1} \to A_{n-2}B_{n-1}, \ldots, A_2 \to B_1B_2$ zerteilt. Nach der Ersetzung sind alle längeren Nonterminalketten vollständig heruntergebrochen und die Chomsky-Normalform erreicht.*

$\mathrm{P} = \{$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow T_aC \mid a \mid AA \mid T_bD \\
A &\rightarrow T_aC \mid a \\
B &\rightarrow AA \mid T_bD \\
T_a &\rightarrow a \\
T_b &\rightarrow b \\
C &\rightarrow AT_b \\
D &\rightarrow BT_a
\end{aligned}
$$

$\}$