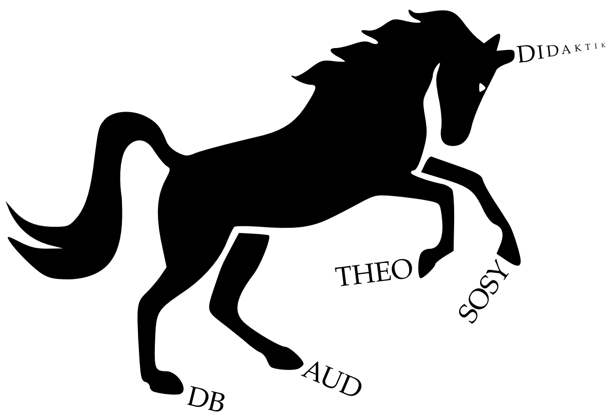
46115
Herbst
2015

Theoretische Informatik / Algorithmen / Datenstrukturen (nicht vertieft)

Aufgabenstellungen mit Lösungsvorschlägen



Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Aufgabenübersicht

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Thema Nr. 1

Aufgabe 3 [Unimodale Zahlenfolge]

Aufgabe 3

Eine Folge von Zahlen $a_1, \dots, a_n$ heiße unimodal, wenn sie bis zu einem bestimmten Punkt echt ansteigt und dann echt fällt. Zum Beispiel ist die Folge $1, 3, 5, 6, 5, 2, 1$ unimodal, die Folgen $1, 3, 5, 4, 7, 2, 1$ und $1, 2, 3, 3, 4, 3, 2, 1$ aber nicht.

> **Exkurs: Unimodale Abbildung**
> Eine unimodale Abbildung oder unimodale Funktion ist in der Mathematik eine Funktion mit einem eindeutigen (lokalen und globalen) Maximum wie zum Beispiel $f(x) = -x^2$. [a]
>
> [a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Unimodale_Abbildung`

(a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der zu (als Array) gegebener unimodaler Folge $a_1, \dots, a_n$ in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ das Maximum $\max a_i$ berechnet. Ist die Folge nicht unimodal, so kann Ihr Algorithmus ein beliebiges Ergebnis liefern. Größenvergleiche, arithmetische Operationen und Arrayzugriffe können wie üblich in konstanter Zeit ($\mathcal{O}(1)$) getätigt werden. Hinweise: binäre Suche, divide-and-conquer.

Lösungsvorschlag

> Wir wählen einen Wert in der Mitte der Folge aus. Ist der direkte linke und der direkte rechte Nachbar dieses Wertes kleiner, dann ist das Maximum gefunden. Ist nur linke Nachbar größer, setzen wir die Suche wie oben beschrieben in der linken Hälfte, sonst in der rechten Hälfte fort.

(b) Begründen Sie, dass Ihr Algorithmus tatsächlich in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ läuft.

Lösungsvorschlag

> Da der beschriebene Algorithmus nach jedem Bearbeitungsschritt nur auf der Hälfte der Feld-Element zu arbeiten hat, muss im schlechtesten Fall nicht die gesamte Folge durchsucht werden. Nach dem ersten Teilen der Folge bleiben nur noch $\frac{n}{2}$ Elemente, nach dem zweiten Schritt $\frac{n}{4}$, nach dem dritten $\frac{n}{8}$ usw. Allgemein bedeutet dies, dass im i-ten Durchlauf maximal $\frac{n}{2^i}$ Elemente zu durchsuchen sind. Entsprechend werden $\log_2 n$ Schritte benötigt. Somit hat der Algorithmus zum Finden des Maximums in einer unimodalen Folge in der Landau-Notation ausgedrückt die Zeitkomplexität $\mathcal{O}(\log n)$.

(c) Schreiben Sie Ihren Algorithmus in Pseudocode oder in einer Programmiersprache Ihrer Wahl, z. B. Java, auf. Sie dürfen voraussetzen, dass die Eingabe in Form eines Arrays der Größe n vorliegt.

Lösungsvorschlag

Rekursiver Ansatz

```java
public static int findeMaxRekursiv(int feld[], int links, int rechts) {
  if (links == rechts - 1) {
    return feld[links];
  }
  //    bedeutet aufrunden
  // https://stackoverflow.com/a/17149572
  int mitte = (int) Math.ceil((double) (links + rechts) / 2);
  if (feld[mitte - 1] < feld[mitte]) {
    return findeMaxRekursiv(feld, mitte, rechts);
  } else {
    return findeMaxRekursiv(feld, links, mitte);
  }
}

public static int findeMaxRekursiv(int feld[]) {
  return findeMaxRekursiv(feld, 0, feld.length - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/UnimodalFinder.java`

Iterativer Ansatz

```java
public static int findeMaxIterativ(int[] feld) {
  int links = 0;
  int rechts = feld.length - 1;
  int mitte;

  while (links < rechts) {
    mitte = links + (rechts - links) / 2;
    if (feld[mitte] > feld[mitte - 1] && feld[mitte] > feld[mitte + 1]) {
      return feld[mitte];
    } else if (feld[mitte] > feld[mitte - 1]) {
      links = mitte + 1;
    } else {
      rechts = mitte - 1;
    }
  }
  return KEIN_MAX;
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/UnimodalFinder.java`

(d) Beschreiben Sie in Worten ein Verfahren, welches in Zeit $\mathcal{O}(n)$ feststellt, ob eine vorgelegte Folge unimodal ist oder nicht.

Lösungsvorschlag

```
public static boolean testeUnimodalität(int[] feld) {
  if (feld.length < 2) {
```

```java
      // Die Reihe braucht mindestens 3 Einträge
      return false;
    }

    if (feld[0] > feld[1]) {
      // Die Reihe muss zuerst ansteigen
      return false;
    }

    boolean maxErreicht = false;
    for (int i = 0; i < feld.length - 1; i++) {
      if (feld[i] > feld[i + 1] && !maxErreicht) {
        maxErreicht = true;
      }

      if (maxErreicht && feld[i] < feld[i + 1]) {
        // Das Maximum wurde bereichts erreicht und die nächste Zahl ist größer
        return false;
      }
    }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/UnimodalFinder.java`

(e) Begründen Sie, dass es kein solches Verfahren (Test auf Unimodalität) geben kann, welches in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ läuft.

Lösungsvorschlag

Da die Unimodalität nur durch einen Werte an einer beliebigen Stelle der Folge verletzt werden kann, müssen alle Elemente durchsucht und überprüft werden.

Lösungsvorschlag

Komplette Klasse

```java
public static int findeMaxRekursiv(int feld[], int links, int rechts) {
  if (links == rechts - 1) {
    return feld[links];
  }
  //    bedeutet aufrunden
  // https://stackoverflow.com/a/17149572
  int mitte = (int) Math.ceil((double) (links + rechts) / 2);
  if (feld[mitte - 1] < feld[mitte]) {
    return findeMaxRekursiv(feld, mitte, rechts);
  } else {
    return findeMaxRekursiv(feld, links, mitte);
  }
}

public static int findeMaxRekursiv(int feld[]) {
  return findeMaxRekursiv(feld, 0, feld.length - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/UnimodalFinder.java`

Test

```java
import static org.junit.Assert.assertEquals;

import org.junit.Test;

public class UnimodalFinderTest {

  private void testeMaxItertiv(int[] feld, int max) {
    assertEquals(max, UnimodalFinder.findeMaxIterativ(feld));
  }

  private void testeMaxRekursiv(int[] feld, int max) {
    assertEquals(max, UnimodalFinder.findeMaxRekursiv(feld));
  }

  private void testeMax(int[] feld, int max) {
    testeMaxItertiv(feld, max);
    testeMaxRekursiv(feld, max);
  }

  @Test
  public void findeMax() {
    testeMax(new int[] { 1, 2, 3, 1 }, 3);
  }

  @Test
  public void findeMaxLaengeresFeld() {
    testeMax(new int[] { 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 6, 5, 4, 3, 2 }, 11);
  }

  @Test
  public void keinMaxAufsteigend() {
    testeMaxItertiv(new int[] { 1, 2, 3 }, UnimodalFinder.KEIN_MAX);
  }

  @Test
  public void keinMaxAbsteigend() {
    testeMaxItertiv(new int[] { 3, 2, 1 }, UnimodalFinder.KEIN_MAX);
  }

  @Test
  public void maxNegativeZahlen() {
    testeMax(new int[] { -2, -1, 3, 1 }, 3);
  }

  private void testeUnimodalität(int[] feld, boolean wahr) {
    assertEquals(wahr, UnimodalFinder.testeUnimodalität(feld));
  }

  @Test
  public void unimodalität() {
    testeUnimodalität(new int[] { 1, 2, 3, 1 }, true);
  }
```

```
  @Test
  public void unimodalitätFalsch() {
    testeUnimodalität(new int[] { 1, -2, 3, 1, 2 }, false);
    testeUnimodalität(new int[] { 1, 2, 3, 1, 2 }, false);
    testeUnimodalität(new int[] { 3, 2, 1 }, false);
  }

}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/test/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/UnimodalFinderTest.java`

Thema Nr. 2

Aufgabe 8 [Hashing mit Modulo 8]

Fügen Sie die folgenden Werte in der gegebenen Reihenfolge in eine Streutabelle der Größe 8 (mit den Indizes 0 bis 7) und der Streufunktion $h(x) = x \mod 8$ ein. Verwenden Sie die jeweils angegebene Hash-Variante bzw. Kollisionsauflösung: 15, 3, 9, 23, 1, 8, 17, 4

(a) **Offenes Hashing**

Zur Kollisionsauflösung wird Verkettung verwendet.

Beispiel

Für die beiden Werte 8 und 16 würde die Lösung wie folgt aussehen:

Bucket	0	1	2	···
Inhalt	8			
	16			

Lösungsvorschlag

$$
\begin{aligned}
h(15) &= 15 \mod 8 &= 7\\
h(3) &= 3 \mod 8 &= 3\\
h(9) &= 9 \mod 8 &= 1\\
h(23) &= 23 \mod 8 &= 7\\
h(1) &= 1 \mod 8 &= 1\\
h(8) &= 8 \mod 8 &= 0\\
h(17) &= 17 \mod 8 &= 1\\
h(4) &= 4 \mod 8 &= 4
\end{aligned}
$$

Bucket	0	1	2	3	4	5	6	7
Inhalt	8	9		3	4			15
		1						23
		17						

(b) **Geschlossenes Hashing**

Zur Kollisionsauflösung wird lineares Sondieren (nur hochzählend) mit Schrittweite +5 verwendet.

Treten beim Einfügen Kollisionen auf, dann notieren Sie die Anzahl der Versuche zum Ablegen des Wertes im Subskript (z. B. das Einfügen des Wertes 8 gelingt im 5. Versuch: 8_5).

Beispiel

Für die beiden Werte 8 und 16 würde die Lösung wie folgt aussehen:

Bucket	0	1	2	3	4	5	...
Inhalt	8					16_1	

Lösungsvorschlag

$h'(x) = x \mod 8$

$h(x,i) = (h'(x) + i \cdot 5) \mod 8$

17 einfügen

Bucket	0	1	2	3	4	5	6	7
Inhalt	8	9		3	23_2		1_2	15

1. Versuch: $h(17,0) = (h'(17) + 0 \cdot 5) \mod 8 = (1+0) \mod 8 = 1 \mod 8 = 1$ (belegt von 9)
2. Versuch: $h(17,1) = (h'(17) + 1 \cdot 5) \mod 8 = (1+5) \mod 8 = 6 \mod 8 = 6$ (belegt von 1)
3. Versuch: $h(17,2) = (h'(17) + 2 \cdot 5) \mod 8 = (1+10) \mod 8 = 11 \mod 8 = 3$ (belegt von 3)
4. Versuch: $h(17,3) = (h'(17) + 3 \cdot 5) \mod 8 = (1+15) \mod 8 = 16 \mod 8 = 0$ (belegt von 8)
5. Versuch: $h(17,4) = (h'(17) + 4 \cdot 5) \mod 8 = (1+20) \mod 8 = 21 \mod 8 = 5$

4 einfügen

Bucket	0	1	2	3	4	5	6	7
Inhalt	8	9		3	23_2	17_5	1_2	15

1. Versuch: $h(4,0) = (h'(4) + 0 \cdot 5) \mod 8 = (4+0) \mod 8 = 4$ (belegt von 23)
2. Versuch: $h(4,1) = (h'(4) + 1 \cdot 5) \mod 8 = (4+5) \mod 8 = 1$ (belegt von 9)
3. Versuch: $h(4,2) = (h'(4) + 2 \cdot 5) \mod 8 = (4+10) \mod 8 = 6$ (belegt von 1)
4. Versuch: $h(4,3) = (h'(4) + 3 \cdot 5) \mod 8 = (4+15) \mod 8 = 3$ (belegt von 3)
5. Versuch: $h(4,4) = (h'(4) + 4 \cdot 5) \mod 8 = (4+20) \mod 8 = 0$ (belegt von 8)
6. Versuch: $h(4,5) = (h'(4) + 5 \cdot 5) \mod 8 = (4+25) \mod 8 = 5$ (belegt von 17)
7. Versuch: $h(4,6) = (h'(4) + 6 \cdot 5) \mod 8 = (4+30) \mod 8 = 2$

Bucket	0	1	2	3	4	5	6	7
Inhalt	8	9	4_7	3	23_2	17_5	1_2	15

(c) Welches Problem tritt auf, wenn zur Kollisionsauflösung lineares Sondieren mit Schrittweite 4 verwendet wird? Warum ist 5 eine bessere Wahl?

Lösungsvorschlag

Beim linearen Sondieren mit der Schrittweite 4 werden nur zwei verschiedene Buckets erreicht, beispielsweise: 1, 5, 1, 5, etc.

Beim linearen Sondieren mit der Schrittweite 5 werden nacheinander alle möglichen Buckets erreicht, beispielsweise: 1, 6, 3, 0, 5, 2, 7, 4.

Aufgabe 4 [Methode function: Formale Verifikation - Induktionsbeweis]

Gegeben sei die folgende Methode `function`:

```java
double function(int n) {
  if (n == 1)
    return 0.5 * n;
  else
    return 1.0 / (n * (n + 1)) + function(n - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/Induktion.java`

Beweisen Sie folgenden Zusammenhang mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \geq 1\colon \text{function}(n) = f(n) \text{ mit } f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$$

Hinweis: Eventuelle Rechenungenauigkeiten, wie z. B. in Java, bei der Behandlung von Fließkommazahlen (z. B. `double`) sollen beim Beweis nicht berücksichtigt werden - Sie dürfen also annehmen, Fließkommazahlen würden mathematische Genauigkeit aufweisen.

Lösungsvorschlag

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

$f(1) := 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

$f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

zu zeigen:

$f(n+1) := 1 - \frac{1}{(n+1)+1} = f(n)$

Vorarbeiten (Java in Mathe umwandeln):

$\text{function}(n) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} + f(n-1)$

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} + f((n+1)-1) && \text{$n+1$ eingesetzt} \\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + f(\mathrm{n}) && \text{vereinfacht} \\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + 1 - \frac{1}{n+1} && \text{für $f(n)$ Formel eingesetzt} \\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1}{n+1} && \text{1. Bruch an 2. Stelle geschrieben} \\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{2. Bruch mit $(n+2)$ erweitert} \\
&= 1 + \frac{1-(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{die 2 Brüche subtrahiert} \\
&= 1 + \frac{1-n-2}{(n+1)\cdot(n+2)} && -+2=-2 \\
&= 1 + \frac{-1-n}{(n+1)\cdot(n+2)} && 1-2=-1 \\
&= 1 + \frac{-1\cdot(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{$(n+1)$ ausgeklammert} \\
&= 1 + \left(-1\cdot\frac{(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) && \text{minus vor den Bruch bringen} \\
&= 1 - \frac{(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{plus minus ist minus} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} && \text{$(n+1)$ gekürzt} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)+1} && \text{Umformen zur Verdeutlichung}
\end{aligned}
$$