

Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

(Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575))

Stichwörter: Vollständige Induktion

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ ist gleich dem Quadrat von n :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Folgende Java-Methode berechnet die Summer aller ungeraden Zahlen:

```
public static int oddSum(int n) {
    if (n <= 1) {
        return 1;
    }
    return 2 * n - 1 + oddSum(n - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: <src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Maurolicus.java>

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `oddSum(n)` die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis zur n -ten ungeraden Zahl berechnet, wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

Lösungsvorschlag

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. _____

$$\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

$$\text{oddSum}(1) = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. _____

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

$$\text{oddSum}(n) = 2n - 1 + (n - 1)^2$$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —

$$\begin{aligned}
 \text{oddSum}(n) &= 2(n+1) - 1 + ((n+1) - 1)^2 \\
 &= 2(n+1) - 1 + n^2 \\
 &= 2n + 2 + n^2 - 1 && \text{ausmultiplizieren} \\
 &= 2n + 1 + n^2 && 2 - 1 = 1 \\
 &= n^2 + 2n + 1 && \text{Kommutativgesetz} \\
 &= (n+1)^2 && \text{mit erster Binomischer Formel: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

```

import static org.junit.Assert.assertEquals;

import org.junit.Test;

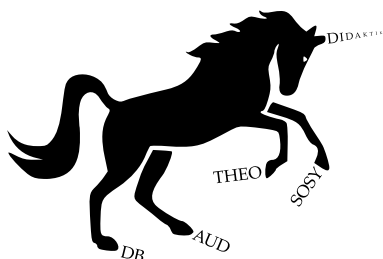
public class MaurolicusTest {

    private void teste(int n, int erwartet) {
        assertEquals(Maurolicus.oddSum(n), erwartet);
    }

    @Test
    public void teste() {
        teste(1, 1);
        teste(2, 4);
        teste(3, 9);
        teste(4, 16);
        teste(5, 25);
        teste(6, 36);
        teste(7, 49);
        teste(8, 64);
        teste(9, 81);
        teste(10, 100);
        teste(11, 121);
    }
}

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/MaurolicusTest.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/MaurolicusTest.java)



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bsclangaul@gmx.net. Der \LaTeX -Quelltext dieser Aufgabe kann unter folgender URL aufgerufen werden: https://github.com/bsclangaul-sammlung/examens-aufgaben-tex/blob/main/Module/30_AUD/20_Vollstaendige-Induktion/Aufgabe_Summe-ungerader-Zahlen.tex