Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	HERBST 1989	66110

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: Informatik (vertieft studiert)

Einzelprüfung: Automatentheorie, Algorithmische Sprachen

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 1

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

bitte wenden!

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

Teilaufgabe 1

Hinweis: Verwenden Sie zur Beschreibung der in dieser Aufgabe zu entwickelnden Algorithmen eine konkrete Programmiersprache wie PASCAL, MODULA o.ä. oder einen diesen Sprachen verwandten, in einschlägigen Vorlesungen oder Büchern üblicherweise benutzten "Pseudocode".

Gegeben sei der Zeichenvorrat $A = \{a, b, c\}$. M sei die Menge aller Zeichenreihen x über A mit der Eigenschaft, daß die Anzahl, wie oft das Zeichen **a** in **x** vorkommt, eine gerade Zahl ist.

a) Die Grammatik Γ habe A als Menge der Terminalzeichen, die Nichtterminalzeichen G und U, das Axiom G und die Produktionsregeln

$$G \rightarrow \varepsilon$$
$$G \rightarrow bG$$
$$G \rightarrow cG$$
$$G \rightarrow aU$$
$$U \rightarrow bU$$
$$U \rightarrow cU$$
$$U \rightarrow aG$$

(ε bezeichne die leere Zeichenreihe.)

Beweisen Sie, daß für den Sprachschatz $\mathcal{L}(\Gamma)$ von Γ gilt: $\mathcal{L}(\Gamma) = M$.

b) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der genau die Zeichenreihen von M akzeptiert.

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $\overline{\Gamma}$ an, für die ebenfalls $\mathcal{L}(\overline{\Gamma}) = M$ gilt, die jedoch weniger Produktionsregeln als Γ hat.

d) Formulieren Sie in Anlehnung an Γ einen rekursiven Algorithmus

function TESTM(string s):boolean;
...

der testet, ob eine Zeichenreihe s aus M ist oder nicht. Beweisen Sie, daß der Algorithmus für alle Eingaben s der Sorte string terminiert.

Hinweis: Nehmen Sie dabei an, daß die Datenstruktur string (der Zeichenreihen über einem Zeichenvorrat, der die Zeichen von A enthält) mit den Grundoperationen *isempty*, *first* und *rest* zur Verfügung steht. Dabei ist für eine Zeichenreihe $x = x_1 x_2 \ldots x_n$:

$$isempty(x) = true \Leftrightarrow x = \varepsilon$$

und, falls $x \neq \varepsilon$:

$$first(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1,$$
$$rest(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_2 \ldots x_n.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei nun M_n die Menge aller Zeichenreihen der Länge n aus M. Die Abbildung $h: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei definiert als:

$$h(n) = \text{Anzahl der Elemente von } M_n.$$

e) **Beweisen Sie, daß für h gilt:**

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 3^{n-1} + h(n-1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Es gibt genau 3^n Zeichenreihen der Länge n über A.

f) **Formulieren Sie anhand von e) einen rekursiven Algorithmus zur Berechnung von $h(n)$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$. Nehmen Sie dabei an, daß Addition, Subtraktion und Multiplikation, nicht jedoch die Potenzierung als arithmetische Grundoperationen zur Verfügung stehen. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von n) die Anzahl der Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, die gemäß diesem Algorithmus bei der Berechnung von $h(n)$ durchgeführt werden.**

g) **Beweisen Sie, daß für $n > 0$ auch gilt:**

$$h(n) = 3 * h(n-1) - 1.$$

Was bedeutet diese Beziehung im Hinblick auf die Komplexität der Berechnung von h gemäß f) ?

h) **Für die Entrekursivierung der Berechnung von h wird durch die Beziehung aus g) eine Einbettung von h in die Abbildung $g: \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{Z}$ mit**

$$g(n,k,m) = k * h(n) - m$$

nahegelegt.

Entwickeln Sie zunächst einen repetetiv rekursiven Algorithmus zur Berechnung **von $g(n,k,m)$ für gegebene $n,k,m \in \mathbb{N}_0$ und daraus einen iterativen** Algorithmus **zur Berechnung von $h(n)$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$.**

Teilaufgabe 2

Die Abbildungen $null: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $succ: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ seien definiert durch:

$$null(x) = 0,$$
$$succ(x) = x + 1.$$

Zu einer Abbildung $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ seien $f^0: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $f^1: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch:

$$f^0(0) = 0, \quad f^0(x+1) = f(f^0(x)),$$
$$f^1(0) = 1, \quad f^1(x+1) = f(f^1(x)).$$

Die Menge F von Abbildungen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei induktiv definiert wie folgt:

- **i)** **$null$ und $succ$ sind in F enthalten.**
- **ii)** **Ist $f \in F$, so ist auch f^0 und f^1 in F enthalten.**
- **iii)** **Sind $f,g \in F$, so ist auch h mit $h(x) = f(g(x))$ in F enthalten.**

a) **Bestimmen Sie $null^0$, $null^1$, $succ^0$ und $succ^1$ (in rekursionsfreier Darstellung).**

Fortsetzung nächste Seite!

b) **Beweisen Sie, daß die Abbildungen**

$$\begin{array}{ll} \mathit{eins}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, & \mathit{eins}(x) = 1, \\ \mathit{add2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, & \mathit{add2}(x) = 2+x, \\ \mathit{mult2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, & \mathit{mult2}(x) = 2*x, \\ \mathit{pot2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, & \mathit{pot2}(x) = 2^x \end{array}$$

in F enthalten sind.

c) **Beweisen Sie: Ist $f \in F$, so ist auch die Abbildung $r\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit**

$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 2^{f(x)}+2 > 3, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in F enthalten.

Zu einer Abbildung $h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei nun die Abbildung $ack_h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ("verallgemeinerte Ackermann-Funktion") definiert durch:

$$\begin{aligned} ack_h(0,y) &= h(y), \\ ack_h(x+1,0) &= ack_h(x,1), \\ ack_h(x+1,y+1) &= ack_h(x, ack_h(x+1,y)). \end{aligned}$$

Die unendliche Folge $h_0, h_1, h_2, \ldots$ von Abbildungen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch:

$$h_i(y) = ack_h(i,y) \qquad \text{für } i = 0,1,2,\ldots$$

d) **Beweisen Sie: Falls $h(0) \neq 0$ und $h(y+1) > h(y)$ für alle $y \in \mathbb{N}_0$, so gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $y \in \mathbb{N}_0$:**

- **d1)** $h_i(y) > y$,
- **d2)** $h_i(y+1) > h_i(y)$,
- **d3)** $h_{i+1}(y) \geq h_i(y+1)$,
- **d4)** $h_{i+1}(y) > h_i(y)$.

e) **Beweisen Sie: Falls $h \in F$, so gilt $h_i \in F$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.**

f) **Sei $h \in F$. Sind die Abbildungen h_i ($i \in \mathbb{N}_0$) dann primitiv-rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.**