Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Frühjahr 2013**	**46113**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Informatik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

Aufgabe 1: Reguläre Sprachen I

1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für ein $w \in \Sigma^*$ und $x \in \Sigma$ bezeichnen wir mit $|w|_x$ die Anzahl der x in w. Sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ gerade}\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$ an.

2. Eine Grammatik heißt *rechts-linear*, wenn es für jede Produktion Nichtterminale A, B und ein Terminalsymbol x gibt, so dass die Produktion die Form $A \to xB$ oder $A \to \epsilon$ hat. Geben Sie eine rechtslineare Grammatik für die Sprache L aus Teilaufgabe 1 an.

3. Geben Sie einen endlichen Automaten (gegebenenfalls mit ε-Transitionen) an, der die Sprache $L(c(a|b^*c)^*c)$ erkennt.

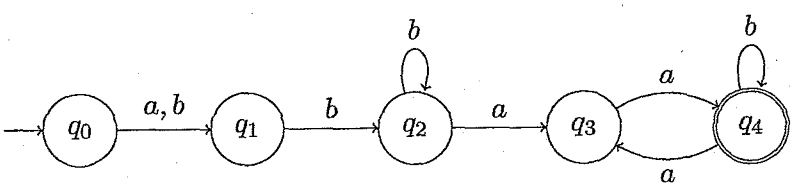
Aufgabe 2: Reguläre Sprachen II

Sei Σ ein Alphabet. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ nennen wir

$$\mathit{zieh}(L) = \{a_1^{\ell_1} a_2^{\ell_2} \cdots a_n^{\ell_n} \mid a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} \in L \wedge a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma \\ \wedge 1 \leq \ell_1 \leq k_1 \wedge 1 \leq \ell_2 \leq k_2 \wedge \cdots \wedge 1 \leq \ell_n \leq k_n\}$$

die Zusammenziehsprache von L.
Beispiel: Ist $L = \{aabbca, cc\}$, so ist $\mathit{zieh}(L) = \{abca, aabca, abbca, aabbca, c, cc\}$.

1. Sei L die Sprache, die durch den folgenden endlichen Automaten akzeptiert wird. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten für $\mathit{zieh}(L)$ an.



2. Zeigen Sie: Ist L regulär, so ist $\mathit{zieh}(L)$ ebenfalls eine reguläre Sprache. Hinweis: Starten Sie mit einem endlichen Automaten für L und fügen Sie zusätzliche Übergänge ein. Erläutern Sie Ihre Konstruktion.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3: Kontextfreie Sprachen

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgende Sprache an:

$$L = \{(abb)^n b^m (ab)^n \mid n \geq 0, m \text{ gerade}\}$$

2. Bringen Sie die Grammatik $G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S)$ in Chomsky-Normalform. Dabei sei $N_1 = \{S, T, U\}$, $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und P_1 bestehe aus den folgenden Produktionen:

$$S \to aT \qquad T \to aTU \mid \varepsilon \qquad U \to bc$$

3. Betrachten Sie die Grammatik $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S)$ mit $N_2 = \{S, T, U, A, B, C\}$ und $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$, wobei P_2 aus den folgenden Produktionen besteht:

$$\begin{array}{lll} S \to AU \mid SS & T \to AB \mid BT \mid TC & U \to BA \mid BC \mid UB \\ A \to a & B \to b & C \to c \end{array}$$

   Verwenden Sie den CYK-Algorithmus um zu zeigen, dass das Wort *babc* nicht in $L(G_2)$ liegt.

4. Für ein $X \in N_2$ sei $G_X = (N_2, \Sigma_2, P_2, X)$ mit N_2, Σ_2 und P_2 aus der vorherigen Teilaufgabe. Geben Sie ein $X \in N_2$ an, so dass $babc \in L(G_X)$ gilt.

Aufgabe 4: Komplexitätstheorie

Mit *EX* bezeichnen wir die Menge aller aussagenlogischen Formeln, die ausschließlich aus den Konstanten 0 und $\uparrow$ und logischen Variablen aufgebaut sind (Klammern sind erlaubt). Dabei ist $x \uparrow y$ so definiert, dass es die gleiche Wahrheitstafel wie $x \to \neg y$ hat.

Wir betrachten das Problem EXSAT:

Gegeben: $F \in EX$

Problem: Ist F erfüllbar, d.h., gibt es eine Belegung der Variablen mit 0 oder 1, so dass F den Wert 1 annimmt?

1. Begründen Sie: EXSAT liegt in NP.

2. Finden Sie eine Formel $F(x)$ in *EX*, die äquivalent zu $\neg x$ ist und x nur einmal enthält.

3. Zeigen Sie: EXSAT ist NP-hart. Sie dürfen dazu benutzen, dass das SAT-Problem NP-hart ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5: Entscheidbarkeit

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Wir nehmen an, dass jedes $w \in \Sigma$ eine Turingmaschine kodiert und bezeichnen diese TM mit M_w. Die von M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.

1. Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie kurz.
   a) $L_1 := \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(x) = \varepsilon$ für alle Eingaben $x\}$.
   b) $L_2 := \{w \in \Sigma^* \mid \exists w'$, so dass $\varphi_w(x) = \varphi_{w'}(x)$ für mindestens ein $x\}$.
   c) $L_3 := \{w \in \Sigma^* \mid M_w$ hat mindestens 12 Zustände$\}$
2. Semientscheidbarkeit
   a) Eine Sprache ist *semientscheidbar* genau dann, wenn sie *rekursiv aufzählbar* ist. Definieren Sie einen dieser beiden Begriffe.
   b) Geben Sie eine semientscheidbare Sprache an, die nicht entscheidbar ist. Begründen Sie, dass die Sprache diese beiden Eigenschaften besitzt.
3. Konstruieren Sie eine Turingmaschine M mit Eingabealphabet Σ, die alle 0-en aus dem Eingabewort entfernt. Das heißt, M berechnet die folgende Funktion $\Sigma^* \to \Sigma^*$:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon \qquad f(1w) = 1f(w) \qquad f(0w) = f(w)$$

Beispiel: Für die Eingabe 0110001 soll M die Ausgabe 111 liefern.

Thema Nr. 2

Aufgabe 1: regulär

Sei L die Menge aller Worte über dem Alphabet {a,b,c}, bei denen der zweite und der zweitletzte Buchstabe übereinstimmen.

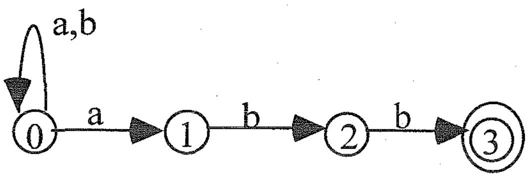
a) Listen Sie alle Worte aus L der Länge 3 auf.

b) Beschreiben Sie L durch einen regulären Ausdruck.

c) Geben Sie für L einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an.

Aufgabe 2 : endliche Automaten

a) Konstruieren Sie zum nachfolgenden nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) A einen äquivalenten DFA.
A hat die Zustände {0,1,2,3}, den Anfangszustand 0, den Endzustand 3 und die angegebenen Zustandsübergänge



b) Minimieren Sie Ihren DFA oder, falls er bereits minimal ist, begründen Sie warum.

Aufgabe 3 : regulär

Sei $L = \{ a^n b^{2n} \mid n > 0\}$

a) Zeigen Sie, dass L kontextfrei ist.
b) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: kontextfrei

Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit den Produktionen

$S \rightarrow aaSb$, $S \rightarrow A$, $A \rightarrow aAb$, $A \rightarrow ab$.

a) Konstruieren Sie eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' in Chomsky-Normalform.

b) Beschreiben Sie L in Worten in der Form:

L besteht aus der Menge aller Worte w über dem Alphabet $\{a,b\}$ mit $w = ...$

Aufgabe 5: Turingmaschinen

Konstruktion von Turingmaschinen

a) Konstruieren Sie eine (k-Band) Turingmaschine M für die Sprache

$PAL = \{a^n \; c \; a^n \; c \; a^n \mid n > 0\}$

b) Welche Zeit-Komplexität hat Ihre Turingmaschine M.

Aufgabe 6:

Was ist mit dem P – NP – Problem gemeint?
Definieren Sie P und NP und beschreiben Sie, was mit P versus NP gemeint ist.