| Prüfungsteilnehmer | Prüfungstermin | Einzelprüfungsnummer |
| --- | --- | --- |
| Kennzahl: ____________ | | |
| Kennwort: ____________ | **Herbst 2010** | **46113** |
| Arbeitsplatz-Nr.: ________ | | |

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen**

**— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Informatik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): **2**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: **5**

**Bitte wenden!**

# Thema Nr. 1

**Aufgabe 1** **Chomsky-Hierarchie**

a) Zeigen Sie jeweils durch Angabe einer Sprache, dass die Typ 3-Sprachen echt in der Menge der Typ 2-Sprachen, sowie die Typ 2-Sprachen echt in der Menge der Typ 1-Sprachen enthalten sind.

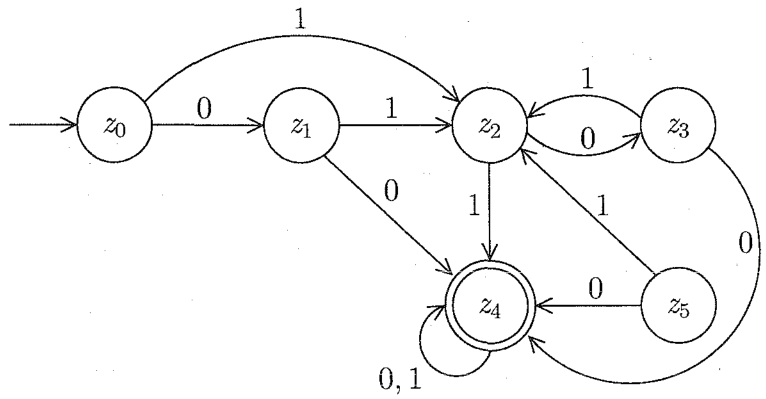
b) Gegeben sei die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1,2,3\}^* \setminus \{\varepsilon\} \mid x \text{ (als Zahl im Dezimalsystem gelesen) ist } \textit{nicht} \text{ durch 3 teilbar}\}.$$

Ordnen Sie die Sprache $L$ in die Chomsky-Hierarchie ein und beweisen Sie Ihre Aussage durch Angabe eines akzeptierenden Automaten.

**Aufgabe 2** **Endliche Automaten**

Gegeben sei der folgende deterministische, endliche Automat $D$:




a) Konstruieren Sie aus $D$ einen Minimalautomaten $D_{min}$.

b) Geben Sie explizit die Sprache an, die der Automat $D$ bzw. $D_{min}$ akzeptiert.

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck für diese Sprache an.

**Aufgabe 3** **Pumping Lemma und Satz von Myhill-Nerode**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und seien die folgenden beiden kontextfreien, nicht-regulären Sprachen über $\Sigma$ gegeben:

$$L_1 = \{a^m b^n c^n \mid m \geq 0, n \geq 1\}$$
$$L_2 = L_1 \cup \{b, c\}^*$$

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $L_1$ an.

b) Zeigen Sie, dass $L_2$ die Behauptung des Pumping Lemma für reguläre Sprachen erfüllt.

c) Geben Sie den Satz von Myhill-Nerode an.

d) $L_2$ ist eine nicht-reguläre Sprache. Dies kann nach Teil b) dieser Aufgabe nicht mit dem Pumping Lemma gezeigt werden. Beweisen Sie nun mit Hilfe des Satzes von Myhill-Nerode, dass $L_2$ nicht-regulär ist. [Hinweis: Es reicht, unendlich viele nicht-äquivalente Wörter $z \in \Sigma^*$ zu finden.]

**Fortsetzung nächste Seite!**

**Aufgabe 4** **Berechenbarkeit**

Sei eine Funktion $f$ gegeben, die für jede Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ das Wort $w' \in \{0,1\}^*$ berechnet, das aus $w$ entsteht, indem man jedes Vorkommen von 0 durch 00 ersetzt.

Beispiel: $f(00101) = 00001001$

a) Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine $M$ an, die $f$ berechnet. Beschreiben Sie dabei die Bedeutung der Zustände bzw. Übergänge Ihrer Turing-Maschine informell.

b) Geben Sie den Ablauf von $M$ für die Eingabe 01 an.

c) Bestimmen Sie Laufzeit- und Speicherplatzkomplexität von $M$ in $O$-Notation.

# Thema Nr. 2

**Annahmen:**
Sie dürfen als bekannt und bewiesen voraussetzen:
Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär.
Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.
Um zu zeigen, dass eine Sprache L regulär (kontextfrei) ist, reicht die Angabe einer entsprechenden Beschreibung (Automat, Grammatik, regulärer Ausdruck). Sie müssen nicht mehr zeigen, dass Ihre Beschreibung korrekt ist und genau die vorgegebene Sprache beschreibt.

**Aufgabe 1: reguläre Mengen**

Sei L die Menge aller Worte über dem Alphabet $\{a,b\}$, bei denen das zweite und das zweitletzte Zeichen gleich sind.
Beachten Sie auch die kurzen Worte.

Beschreiben Sie L
a) durch einen regulären Ausdruck
b) durch einen deterministischen endlichen Automaten A.

**Aufgabe 2: regulär oder nicht**

L besteht aus der Menge aller Worte über dem Alphabet $\{a,b\}$, bei denen die Anzahl von a's gerade und die Anzahl der b's ungerade ist.

Ist die Sprache L regulär oder nicht?
Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3:**

Sei PAL = $\{w \mid w = w^{rev},\ w \in \{a,b\}^*\}$, $w^{rev}$ ist w gespiegelt oder rückwärts gelesen.

a) Geben Sie alle Worte bis zur Länge 5 von PAL an.

b) Klassifizieren Sie PAL:
Ist PAL regulär? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Ist PAL kontextfrei? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Ist PAL rekursiv aufzählbar (positiv semi-entscheidbar)? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**Fortsetzung nächste Seite!**

**Aufgabe 4:**

Konstruieren Sie eine Turingmaschine M für die Sprache
$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

Welche Zeit-Komplexität hat Ihre Turingmaschine M?
Welche Speicher-Komplexität hat Ihre Turingmaschine M?

**Aufgabe 5:**

Das Feedback-Arc-Set Problem (FAS)
Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E und eine Zahl k.
Problem: Gibt es eine Teilmenge von höchstens k Kanten F, $F \subseteq E$, $|F| \leq k$,
so dass der Graph $G' = (V, E \setminus F)$ keinen Zyklus mehr enthält?
Warum ist dieses Problem in NP? Erläutern Sie dies.

Hinweis: Es ist **nicht** gefragt, dass FAS NP-hart ist. Das hat R. Karp 1970 gezeigt.