Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**HERBST 1990**	**66110**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Informatik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Automatentheorie, Algorithm. Sprachen**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 1

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 3

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

Teilaufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $A=\{a,b,c\}$. Die Mengen M_a, M_b, M_c und M von Zeichenreihen über A seien definiert durch

$$M_x = \{w \in A^* \mid w = uxxv \text{ mit } u,v \in A^*\} \qquad \text{für } x = a, b \text{ bzw. } c,$$
$$M = M_a \cup M_b \cup M_c.$$

a) Beschreiben Sie M durch einen regulären Ausdruck!

b) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der genau die Zeichenreihen von M akzeptiert!

c) Geben Sie eine reguläre Grammatik an, die M als Sprachschatz hat!

Fortsetzung nächste Seite

Teilaufgabe 2

Gegeben sei die Grammatik Γ mit $\{a,b\}$ als Menge der Terminalzeichen, den Nichtterminalzeichen **Z**,**A**,**B**, dem Axiom **Z** und den Produktionsregeln

$$\begin{aligned}
Z &\rightarrow AB\\
A &\rightarrow ZA\\
A &\rightarrow a\\
B &\rightarrow ZB\\
B &\rightarrow b
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß die Zeichenreihe **aabbabab** zum Sprachschatz von Γ gehört!

b) Überführen Sie Γ in die Greibach-Normalform!

c) Geben Sie einen (gegebenenfalls nicht-deterministischen) Kellerautomaten an, der genau den Sprachschatz von Γ akzeptiert!

Teilaufgabe 3

Durch die Funktionsvereinbarung

function $h(m,n$:**nat**)**nat**:
  if $m=0$ **then** n **else** $2 \cdot h(m-1,n)$ **endif**

ist eine Funktion $h: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert.

Beweisen Sie

a) durch Berechnungsinduktion,

b) durch Parameterinduktion (nach m),

daß für alle $m,n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$h(m,2 \cdot n) = 2 \cdot h(m,n).$$

Fortsetzung nächste Seite!

Teilaufgabe 4

Durch die Funktionsvereinbarung

function $f(n\text{:nat})$**nat:**
if $n \leq 2$ **then** n **else** $2 \cdot f(n-1) + f(n-3)$ **endif**

ist eine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert.

a) Beweisen Sie, daß f für alle $n \in \mathbb{N}_0$ terminiert!

b) Die Funktion $g: \mathbb{N}_0^4 \to \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch

$$g(n,x,y,z) = x \cdot f(n+2) + y \cdot f(n+1) + z \cdot f(n).$$

Beweisen Sie:

$$g(n,x,y,z) = \begin{cases} 2 \cdot x + y, & \text{falls } n=0 \\ g(n-1, 2 \cdot x + y, z, x), & \text{falls } n>0. \end{cases}$$

c) Entwickeln Sie mit Hilfe von b) zunächst einen repetetiv rekursiven Algorithmus zur Berechnung von $g(n,x,y,z)$ für gegebene $n,x,y,z \in \mathbb{N}_0$ und daraus einen iterativen Algorithmus zur Berechnung von $f(n)$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$!

Hinweis: Formulieren Sie die Algorithmen in einer Programmiersprache wie PASCAL, MODULA o.ä. oder in einem "Pseudocode", wie er in obiger Funktionsvereinbarung verwendet ist!

Teilaufgabe 5

Für $r \in \mathbb{R}$ bezeichne $[r]$ die (eindeutig bestimmte) ganze Zahl z mit $z \leq r < z+1$. Die Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei gegeben durch

$$f(x) = [3 \cdot \sqrt{x}].$$

Beweisen Sie, daß f primitiv-rekursiv ist!

Hinweis: Die üblichen arithmetischen und Booleschen Operationen wie $+, \cdot, \leq, <, \wedge, \vee$ u.ä. dürfen als primitiv-rekursiv vorausgesetzt werden.

Teilaufgabe 6

A und B seien zwei rekursiv aufzählbare Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ mit $A \cup B = \mathbb{N}_0$.

Beweisen Sie: Falls $A \cap B$ rekursiv ist, so sind A und B rekursiv!

Hinweis: Für $M, N \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt:
a) M ist genau dann rekursiv, wenn M und $\mathbb{N}_0 \setminus M$ rekursiv aufzählbar ist.
b) Falls M und N rekursiv aufzählbar sind, so ist $M \cap N$ rekursiv aufzählbar.