Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________	Herbst 2013	66115
Kennwort: ____________		
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Informatik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Theoret. Informatik, Algorithmen**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

Teilaufgabe I Es sei $\Sigma = \{1,2\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter $x_1x_2\dots x_n$, derart, dass $\sum x_i$ ein Vielfaches von drei ist. So ist, z.B. $12112 \notin L$, denn $1+2+1+1+2=7$, aber $1221 \in L$, denn $1+2+2+1=6$. Definitionsgemäß ist auch das leere Wort $\epsilon \in L$.

1. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten für L.
2. Minimieren Sie Ihren Automaten oder begründen Sie, dass er bereits minimal ist.
3. Leiten Sie aus diesem Automaten einen regulären Ausdruck für L ab. Dokumentieren Sie Ihre Arbeitsschritte geeignet.
4. Geben Sie zwei unterschiedliche Wörter an, die im Sinne der Myhill-Nerode Äquivalenz $\sim_L$ äquivalent sind. Erinnerung: $u \sim_L v \iff \forall w. uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: $L(a(a+b)^*) = L((ab^*)^*ab^*)$, wobei $L(\alpha)$ die durch den regulären Ausdruck α definierte Sprache bezeichnet.

   Ist die Aussage falsch, so müssen Sie ein konkretes Wort angeben, welches auf einen der beiden regulären Ausdrücke passt und auf den anderen nicht. Ist sie wahr, so müssen Sie beide Richtungen $\subseteq$ und $\supseteq$ zeigen.

Teilaufgabe II Wie man weiß ist die Sprache $L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ nicht kontextfrei. Dies dürfen Sie im folgenden ohne Begründung voraussetzen.

1. Finden Sie zwei kontextfreie Sprachen L_1 und L_2, sodass $L = L_1 \cap L_2$. Geben Sie jeweils Grammatiken für diese Sprachen an. Hinweis: L_1 sorgt dafür, dass die Zahlen der a's und b's übereinstimmen.
2. Warum folgt daraus, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen ist?
3. Bekanntlich ist der Schnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache wieder kontextfrei. Folgern Sie, dass die Sprache $L' = \{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ nicht kontextfrei ist (hier bezeichnet $|w|_x$ die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben x in w).

Fortsetzung nächste Seite!

Teilaufgabe III Wir betrachten das wie folgt definierte Problem DOPP:
GEGEBEN: Eine deterministische Turingmaschine M, eine Eingabe x (für M), ein Zustand q (von M).
GEFRAGT: Wird der Zustand q bei der Berechnung von M auf x mindestens zweimal besucht?

1. Zeigen Sie durch Angabe einer Reduktion vom Halteproblem, dass DOPP unentscheidbar ist.

2. Begründen Sie, dass DOPP rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar) ist.

Teilaufgabe IV Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, wenn je zwei Knoten in G durch einen Pfad verbunden sind.

1. Der Graph $G = (V, E)$ sei durch Adjazenzlisten gegeben. Beschreiben Sie, wie man in Zeit $O(|E| + |V|)$ prüfen kann, ob G zusammenhängend ist.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: Hat jeder Knoten mindestens $|V|/2$ Nachbarn(ganzzahlige Division), so ist G zusammenhängend.

Thema Nr. 2

1. Aufgabe: Endliche Automaten

Zeigen Sie durch Angabe eines regulären Ausdrucks, dass die Sprache L regulär ist.

L besteht aus der Menge aller natürlichen Zahlen in Dezimalzahldarstellung ohne führende Nullen, die durch zwei oder durch fünf teilbar sind.

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten A mit $L(A) = L$.

2. Aufgabe: Reguläre Sprachen

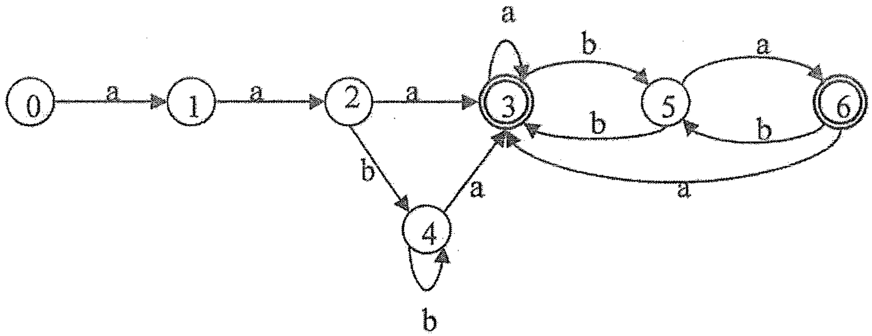
Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Sprache L regulär ist.

$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1,\ m = 2^n\}$.

Hinweis: Um zu zeigen, dass L regulär ist, geben Sie einen endlichen Automaten oder einen regulären Ausdruck an. Soll dies widerlegt werden, verwenden Sie das Pumping Lemma.

3. Aufgabe: Minimierung DFA

Minimieren Sie den folgenden deterministischen Automaten mit den Zuständen $\{0,1,2,3,4,5, 6\}$, dem Startzustand 0 und den Endzuständen $\{3,6\}$.
Geben Sie z.B. durch die Bezeichnung an, welche Zustände zusammengefasst wurden.



Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe: Berechenbarkeit und Komplexität

Gegeben sei die Sprache $L = \{ a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 1, n{=}m \text{ und } n \neq k\}$.

a) Geben Sie eine Turingmachine M an, die L erkennt.
Beschreiben Sie in Worten, wie ihre Turingmachine arbeitet.

b) Welche Zeitkomplexität in O-Notation hat ihre Turingmaschine?
Erläutern Sie dies anhand Ihrer in a) gegebenen Beschreibung.

5. Aufgabe: Komplexität

Beim BIN PACKING Problem hat man eine Menge von Elementen $\{x_1, ..., x_n\}$.
Jedes Element x hat ein nicht negatives Gewicht w(x).
Außerdem gibt es Kisten, die je höchstens mit dem Gewicht G beladen werden dürfen.
Das Problem ist, die Elemente so in Kisten zu packen, dass keine Kiste überladen wird.
Reichen dafür k Kisten?

1) Geben Sie eine formale Beschreibung dieses Problems an (mit Mengen, Summen, etc.).

2) Warum ist dieses Problem in NP?

Fortsetzung nächste Seite!

6. Aufgabe: O-Notation

Gegeben seien die Funktionen f:N -> N und g:N -> N, wobei

$f(n) = 2(n-1)^2 + 3n - 1$ und

$g(n) = 10\, n \log n + 20\, n + 30$

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen gelten. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

a) $f(n) \in O(g(n))$

b) $g(n) \in O(f(n))$

7. Aufgabe: Heap und binärer Suchbaum

a)

(i) Fügen Sie nacheinander die Zahlen 7, 1, 12, 8, 10, 3, 5 in einen leeren binären Suchbaum ein und zeichnen Sie den Suchbaum nach „8“ und nach „5“.

(ii) Löschen Sie die „1“ aus dem in (i) erstellten Suchbaum und zeichnen Sie den Suchbaum.

(iii) Fügen Sie 7, 1, 12, 8, 10, 3, 5 in einen leeren MIN-Heap ein, der bzgl. „≤“ angeordnet ist. Geben Sie den Heap nach jedem Element an.

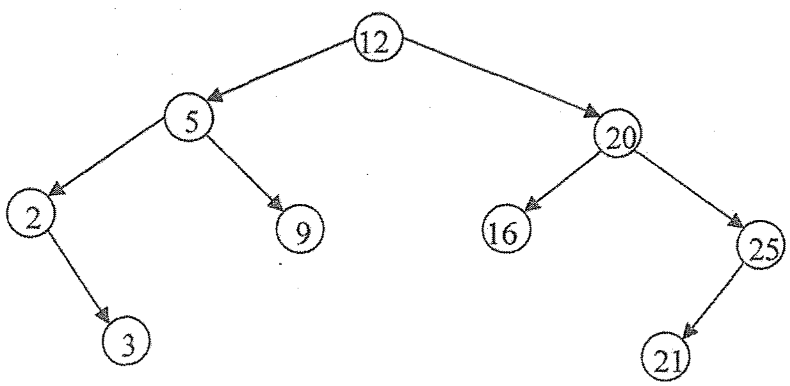
b) Was ist die worst-case Laufzeit in O-Notation für das Einfügen eines Elements in einen Heap der Größe n ? Begründen Sie ihre Antwort.

8. Aufgabe: AVL-Bäume

Gegeben sei der folgende AVL-Baum T. Führen Sie auf T folgende Operationen durch.

(a) Fügen Sie den Wert 22 in T ein. Balancieren Sie falls nötig und geben Sie den entstandenen Baum (als Zeichnung) an.

(b) Löschen Sie danach die 5. Balancieren Sie T falls nötig und geben Sie den entstandenen Baum (als Zeichnung) an.



Fortsetzung nächste Seite!

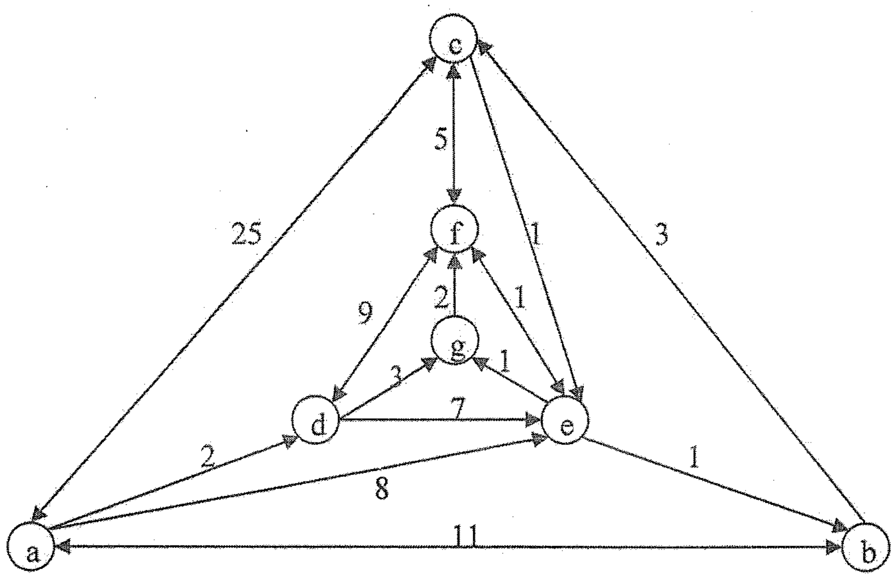
9. Aufgabe: Dijkstra

Gegeben sei der unten stehende gerichtete Graph G=(V, E) mit positiven Kantenlängen l(e) für jede Kante $e \in E$. Kanten mit Doppelspitzen können in beide Richtungen durchlaufen werden.

In welcher Reihenfolge werden die Knoten von G ab dem Knoten a durch den Dijkstra-Algorithmus bei der Berechnung der kürzesten Wege endgültig bearbeitet?

Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von a zu jedem Knoten.

Geben Sie einen kürzesten Weg von a nach c an.



10. Aufgabe: Minimaler Spannbaum

a) Betrachten Sie den obigen Graphen ohne die Kantenrichtung.
Konstruieren Sie dann einen minimalen Spannbaum für G.

b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass ein minimaler Spannbaum eines ungerichteten Graphen nicht eindeutig ist.