Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______________ Kennwort: ______________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2003**	**66112**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Informatik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Automatentheorie,Komplexität,Algorith.**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

1. Beweisen Sie: $L((\alpha\beta)^*\alpha) = L(\alpha(\beta\alpha)^*)$ für beliebige reguläre Ausdrücke α, β!

2. Betrachten Sie folgende kontextfreie Grammatik G:

   $$S \to AB \mid AaBb$$
   $$A \to aaA \mid \varepsilon$$
   $$B \to bbB \mid \varepsilon$$

   a) Bestimmen Sie die durch G erzeugte Sprache!

   b) Ist L(G) regulär? (Begründung!)

3. Ist die Menge der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen (jeweils mit Begründung)

   a) entscheidbar?

   b) semi-entscheidbar?

   c) primitiv-rekursiv?

   d) regulär?

   e) rekursiv aufzählbar?

4. Geben Sie ein WHILE- oder LOOP-Programm für die Fakultätsfunktion an! Makros für $x := y + z$ und $x := y \cdot z$ können Sie benutzen.

5. Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation (x *teilt* $y \leftrightarrow \exists z : x \cdot z = y$) primitiv-rekursiv ist.

6. Sei F die Formel $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \to B \vee C$.

   a) Ist F eine Tautologie? (Begründung!)

   b) Ist F erfüllbar? (Begründung!)

7. Sei F die Formel $\exists\, x\ \forall\, y\ P(x,y) \to \forall\, x\ \exists\, y\ P(y,x)$

   Ist F allgemeingültig? (Begründung!)

Thema Nr. 2

Aufgabe 1: (Zahlendarstellung zur Basis p)

Führen Sie die Subtraktion 342 — 173 für zwei Darstellungen durch, nämlich zur Basis 8 und 16! D. h. betrachten Sie die beiden Zahlen einmal als Oktalzahlen und einmal als Hexadezimalzahlen, und rechnen Sie jeweils das entsprechende Ergebnis aus! Geben Sie neben dem Oktal- bzw. Hexadezimalwert des Ergebnisses auch dessen Dezimalwert an!

Aufgabe 2: (Mengendarstellungen)

Betrachten Sie folgende Darstellungen von Integer-wertigen Mengen:

i) eine einfach verkettete Liste ohne Mehrfachvorkommen von Elementen,

ii) ein balancierter binärer Suchbaum.

Bearbeiten Sie nun folgende Teilaufgaben:

a) Programmieren Sie für beide Darstellungen in einer funktionalen Programmiersprache Ihrer Wahl die *Suche* nach einem Element! Für ii) müssen Sie dazu einen Datentyp für einen Binärbaum definieren.

b) Ausgehend von Ihren Lösungen zu a): welche *worst-case* Komplexität (in der Elementezahl der Menge) haben Ihre beiden Suchprogramme?

c) Kennen Sie eine weitere Darstellungsweise mit einer noch besseren Suchkomplexität? Wenn ja, beschreiben Sie diese kurz!

d) In welcher der beiden Darstellungen i) und ii) ist das *Einfügen* eines Elements rechnerisch aufwändiger und warum?

Aufgabe 3: (Verifikation)

Betrachten Sie die folgende Schleife: WHILE i $\neq$ 100 D0 i:=i+1.

a) Beweisen Sie die partielle Korrektheit der Schleife bezüglich der Vorbedingung true und der Nachbedingung i =100!

b) Totale Korrektheit ist nicht gegeben. Wie lautet die schwächste Vorbedingung, für die totale Korrektheit besteht?

c) Die von Ihnen in b) vorgeschlagene Veränderung der Vorbedingung erfordert einen neuen Beweis der partiellen Korrektheit. Führen Sie diesen durch, und geben Sie auch eine Abstiegsfunktion zur Termination des Programms an! Weisen Sie die geforderten Eigenschaften der Abstiegsfunktion explizit nach!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: (Formale Sprachen)

Ordnen Sie die folgenden formalen Sprachen in die Chomsky-Hierarchie ein!

a) $i) \{a^n \mid n \geq 0\}$

$ii) \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$iii) \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

$iv) \{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 0\}$

b) Beweisen Sie Ihre Aussage für ii)! Dazu müssen Sie nachweisen, dass die Sprache in der von Ihnen angegebenen Klasse liegt (etwa durch Angabe einer Grammatik), nicht aber in der nächst kleineren Klasse.

Aufgabe 5: (Abzählbarkeit)

$\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen.

a) Definieren Sie präzise den Begriff der *Abzählbarkeit* einer Menge und stellen Sie ihn einer präzisen Definition des Begriffs der *rekursiven Aufzählbarkeit* einer Menge gegenüber!

b) Skizzieren Sie den Beweis der Abzählbarkeit der Menge $\mathbb{N}^n$ aller Folgen mit maximal n Elementen (für festes n)!

c) Skizzieren Sie den Beweis der Überabzählbarkeit der Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ aller unendlichen Folgen!

Aufgabe 6: (Turing-Maschinen)

Ein Turing-Maschinen-Programm ist eine Folge von Quintupeln:

(Zustand, gelesenes Bandsymbol,
Folgezustand, geschriebenes Bandsymbol,
Kopfbewegungsrichtung)

Geben Sie ein Programm an, das zwei beliebige positive, ganze Zahlen addiert! Sie dürfen sich die Repräsentation der Zahlen und ihre Anordnung auf dem Band aussuchen. Wählen Sie weise; Ihre Wahl bestimmt die Komplexität des Programms erheblich! Beschreiben Sie die von Ihnen gewählte Darstellung und das Programm hinreichend!