

Kennzahl: _____**Kennwort:** _____**Arbeitsplatz-Nr.:** _____**Herbst
2008****46113**

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Informatik (Unterrichtsfach)****Einzelprüfung:** **Theoretische Informatik****Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben):** **2****Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage:** **4**

Thema Nr. 1**Aufgabe 1**

Ein Bauer will mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf einen Fluss überqueren. Das Boot ist klein, so dass er auf einer Überfahrt jeweils nur eines der Tiere oder den Kohlkopf mitnehmen kann. Ohne die Aufsicht des Bauern verschlänge der Wolf die Ziege und die Ziege fräße den Kohlkopf.

Modellieren Sie das Problem durch einen endlichen Automaten, der nur die Lösungen akzeptiert. Die Zustände beschreiben die Situationen auf beiden Seiten des Flusses, z. B. die Anfangssituation „{ BZWK } ~ { }“, wobei B den Bauern, W den Wolf, Z die Ziege, K den Kohlkopf und ~ den Fluss bezeichne. Die Eingaben stellen die Überfahrten dar; b, bw, bz, bk bezeichnen die Überfahrten des Bauern allein, mit dem Wolf, mit der Ziege, dem Kohlkopf.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2

Gegeben ist die Grammatik G mit der Variablen S , dem Startzeichen S , den Terminalzeichen a, b und c sowie Regeln

$$S \rightarrow aS|Sa|bSb|c$$

- Geben Sie die Sprache $L(G)$ in Mengenschreibweise an.
- Bringen Sie G in Chomsky-Normalform.
- Überprüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $abacab$ in der Sprache $L(G)$ liegt. Geben Sie die Tabelle an.

Aufgabe 3

- Definieren Sie das Halteproblem für Turing-Maschinen als Sprache H über dem Alphabet $\{0,1,\#\}$.
- Gegeben sei das folgende Problem E :

Entscheiden Sie, ob die deterministische Turing-Maschine codiert durch n auf genau den Eingaben 10 und 01 hält.

Zeigen Sie, dass E nicht entscheidbar ist. Benutzen Sie, dass H aus a) nicht entscheidbar ist.

- Angenommen, es wurde gezeigt, dass $P = NP$ ist. Zeigen Sie, dass dann *jede* Sprache $L \in P$ sogar NP-vollständig ist.

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{0,1\}$, und sei $w \in \Sigma^*$. $\#_0(w)$ gibt an, wie oft die 0 in w vorkommt. Z. B. ist $\#_0(0110100) = 4$. Analog zählt $\#_1(w)$, die Anzahl der Ziffern 1 in w .

- Sei

$$L_1 = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, \#_0(w) = \#_1(w)\}.$$

Beispiele: $010110 \in L_1$, $1001 \in L_1$.

Zeigen Sie, dass L_1 kontextfrei ist, indem Sie die Arbeitsweise eines deterministischen Kellerautomaten M genau beschreiben, der L_1 akzeptiert. (Zu „genau“ gehört auch die Begründung dafür, warum M Wörter, die nicht in L_1 sind, verwirft.)

- Formulieren Sie das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:

„Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ . Dann gibt ...“

- Zeigen Sie mittels Pumping-Lemma für reguläre Sprachen, dass die Sprache L_1 aus a) nicht regulär ist.

Thema Nr. 2

Aufgabe 1 (reguläre Ausdrücke und endliche Automaten)

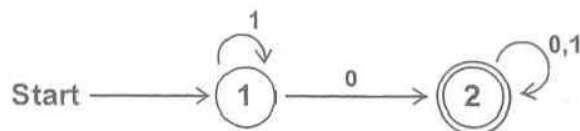
Die Elemente einer regulären Sprache können durch endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke beschrieben werden.

- (a) Leiten Sie einen regulären Ausdruck her, der alle Worte über $\Sigma = \{0, 1\}$ beschreibt, die abwechselnd 0 oder 1 enthalten. Die Sprache sei L .

Beispiel: $0101 \in L, 1010 \in L, 0110 \notin L$

Berücksichtigen Sie alle Möglichkeiten, die Worte aus L zu bilden. Begründen Sie, warum der von Ihnen hergeleitete reguläre Ausdruck die Sprache L beschreibt.

- (b) Betrachten Sie folgenden deterministischen endlichen Automaten



Welche reguläre Sprache wird von dem Automaten erkannt? Leiten Sie einen regulären Ausdruck ab, der die gleiche Sprache wie der angegebene Automat beschreibt. Bestimmen Sie dazu die regulären Ausdrücke $R_{ij}^{(k)}$, wobei $R_{ij}^{(k)}$ die Menge aller Worte w beschreibt, die der Beschriftung der Kanten auf einem Pfad zwischen Zustand q_i und q_j des Automaten entsprechen, wobei für keinen der Zwischenknoten q_l auf dem Pfad $l > k$ gelten darf. Vereinfachen Sie in den Zwischenschritten die erhaltenen regulären Ausdrücke so weit wie möglich. Welcher der Ausdrücke $R_{ij}^{(k)}$ beschreibt das Verhalten des gesamten Automaten? Begründen Sie, warum der von Ihnen hergeleitete reguläre Ausdruck die gleiche Sprache wie der angegebene Automat beschreibt.

- (c) Geben Sie die Aussage des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen wieder.

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $L = \{0^n 1^n ; n \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 2 (Grammatiken)

- (a) Ein Palindrom ist eine Zeichenkette, die von vorn und von hinten gelesen gleich bleibt. Beispiele sind *otto* oder *madamimadam* ("Madam, I'm Adam"). Wir betrachten Palindrome über dem Alphabet $\{0, 1\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit Terminalsymbolen, Nichtterminalsymbolen und Produktionen an, die alle Palindrome über $\{0, 1\}$ erzeugt. Begründen Sie, warum die von Ihnen angegebene Grammatik nur Palindrome erzeugt. Geben Sie die Ableitung des Palindroms 11011 mit Ihrer Grammatik an.
- (b) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{E\}, \{0, 1, \dots, 9\}, P, E)$ mit $P = \{E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\}$ zur Beschreibung arithmetischer Ausdrücke mit den Operatoren $\{+, -, *, /\}$ über den Ziffern $\{0, \dots, 9\}$. Beweisen Sie, dass diese Grammatik mehrdeutig ist.
- (c) Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik zur Beschreibung arithmetischer Ausdrücke mit den Operatoren $\{+, -, *, /\}$ über den Ziffern $\{0, \dots, 9\}$ an, vgl. Aufgabenteil (b). Beschreiben Sie die Arbeitsweise der Produktionen. Begründen Sie, warum die von Ihnen angegebene Grammatik eindeutig ist.
- (d) Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n; n \geq 1\}$ kann nicht durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben werden. Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik zur Beschreibung von L an. Beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihrer Grammatik. Leiten Sie das Wort $aaabbbccc \in L$ mit Hilfe Ihrer Grammatik ab.

Aufgabe 3 (kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten)

- (a) Betrachten Sie die kontextfreie Sprache $L = \{a^n 1 b^n; n \geq 1\}$ über dem Alphabet $\{a, b, 1\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit Terminalsymbolen, Nichtterminalsymbolen und Produktionen an, die L erzeugt.
- (b) Konstruieren Sie einen deterministischen Kellerautomaten $K = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, f)$, der L erkennt, d.h. $L = L(K)$. Geben Sie eine genaue Definition aller Elemente des Kellerautomaten mit einer mathematisch exakten Definition der Übergangsrelation δ . Erläutern Sie die Arbeitsweise des Kellerautomaten und begründen Sie, warum K alle Worte aus L erkennt.
- (c) Erläutern Sie den Unterschied zwischen nichtdeterministischen und deterministischen Kellerautomaten durch Angabe der exakten Definitionen. Welche Unterschiede in den Verarbeitungsschritten gibt es?
- (d) Kann die Sprache $L' = \{a^n b^n; n \geq 1\}$ durch einen deterministischen Kellerautomaten erkannt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.