Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______		
Kennwort: ______	**Herbst 2001**	**66112**
Arbeitsplatz-Nr.: ______		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Informatik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Automatentheorie,Komplexität,Algorith.**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

1. Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n b^m c^n \mid n > 0, m > 0\}$ über $\Sigma = \{a, b, c\}$.

   a) Ist L regulär? (Begründung!)

   b) Ist L kontextfrei? (Begründung!)

   c) Ist L kontextsensitiv? (Begründung!)

   d) Ist L entscheidbar? (Begründung!)

2. Konstruieren Sie einen vollständigen deterministischen erkennenden Automaten, der genau die Wörter der Form a^n mit "n ist weder durch 4 noch durch 6 teilbar" akzeptiert.

3. Diskutieren Sie die Frage, ob die Menge

   $M = \{x \in \mathbb{N} \mid$ Die Ziffernfolge der Dezimaldarstellung von x kommt (als Teilwort) in der Dezimaldarstellung der Zahl π vor $\}$

   entscheidbar ist. (Beispiel: $\pi = 3{,}141592...$ enthält 159, also $159 \in M$)

4. Für die Simulation der Stapelalgebra mit WHILE-Programmen benötigt man eine Funktion code : $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, die endliche Folgen natürlicher Zahlen codiert. Sei durch stapel = $[x_1, ..., x_k]$ ein Stapel natürlicher Zahlen mit oberstem Element x_1 gegeben.

   a) Definieren Sie eine geeignete Funktion code und erläutern Sie code(stapel) (Hinweis: Eine Paarungsfunktion ist nützlich!).

   b) Berechnen Sie code([2,4]).

   c) Geben Sie WHILE-Programme an, die die Stapel-Operationen *empty, push, pop, top, isempty* implementieren.

5. Neben der Turingmaschine mit einem beidseitig unendlichen Band gibt es auch eine Variante, die nur ein einseitig (nach rechts) unendliches Band zur Verfügung hat.

   a) Präzisieren Sie die Definition einer solchen "einseitigen" Turingmaschine.

   b) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Varianten von Turingmaschinen.

6. Sei F die Formel $(\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(\neg A \vee C)) \wedge \neg A$

   a) Ist F erfüllbar? (Begründung!)

   b) Ist F eine Tautologie? (Begründung!)

Thema Nr. 2

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

Hinweis: *Verwenden Sie zur Formulierung von Algorithmen bzw. Datentypen eine gängige höhere Programmiersprache oder einen entsprechenden Pseudocode. Erläutern Sie alle anzugebenden Algorithmen und Automaten ausgiebig durch Kommentare.*

Teilaufgabe 1

Für eine Klasse $\mathcal{N}$ von "Nimm"-Spielen gelten folgende gemeinsame Spielregeln: Jedes Spiel wird von 2 Spielern A und B mit Spielsteinen auf einem Spielbrett gespielt und beginnt in einer Anfangsstellung, in der $n > 0$ Spielsteine auf dem Brett stehen. A und B machen der Reihe nach abwechselnd jeweils einen Spielzug, wodurch sich eine Folge von Nachfolge-Stellungen als Spielablauf ergibt. A macht den ersten Spielzug. In jeder Stellung stehen jedem Spieler höchstens 3 verschiedene Spielzüge zur Verfügung. Jeder Spielzug verringert die Anzahl der Spielsteine auf dem Brett. Jede Stellung ist charakterisiert durch die Angaben,

- welcher Spieler am Zug ist,
- wieviele Spielsteine auf dem Brett stehen,
- ob A oder B gewonnen hat oder ob noch kein Spieler gewonnen hat.

Ein Spielablauf endet, wenn ein Spieler gewonnen hat oder wenn keine Spielsteine mehr auf dem Brett stehen. Die Länge eines Spielablaufs ist die Anzahl der dabei durchgeführten Spielzüge.

Jedes Spiel der Klasse $\mathcal{N}$ definiert durch seine zusätzlichen Regeln (über Art der Spielzüge, Art der Gewinnstellungen u.a.) eine Menge S aller seiner möglichen Spielabläufe.

Geben Sie einen geeigneten Datentyp zur Darstellung derartiger Mengen S sowie Algorithmen an, die für eine derartige Darstellung eines Spiels folgende Aufgaben lösen:

a) Bestimmung der maximal auftretenden Länge eines Spielablaufs.

b) Bestimmung der Anzahl der Spielabläufe, in denen der Spieler A gewinnt.

c) Klärung der Frage, ob es einen Spielablauf gibt, in dem eine Stellung erreicht wird, in der alle möglichen Spielfortsetzungen irgendwann zum Gewinn des Spielers führen, der gerade nicht am Zug ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Teilaufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und

$$Z = \{w \in \Sigma^+ \mid w = 0 \text{ oder } w \text{ beginnt mit dem Zeichen } 1\}.$$

Jedes $w = w_m \dots w_2 w_1 w_0 \in Z$ kann als Binärdarstellung der natürlichen Zahl

$$N(w) = w_m 2^m + \dots + w_2 2^2 + w_1 2 + w_0$$

aufgefasst werden. Umgekehrt gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine derartige Binärdarstellung $W(n) \in Z$ (d.h.: $N(W(n)) = n$.)

Weiter sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{\mathsf{S},\mathsf{A}\}$ und der Menge P der Produktionen

$$\mathsf{S} \to 1 \mid 1\mathsf{A}$$

$$\mathsf{A} \to 1 \mid 1\mathsf{A} \mid 0\mathsf{S}$$

gegeben. $\mathcal{L}(G)$ sei die von G erzeugte Sprache.

a) Geben Sie eine reguläre Grammatik (Typ 3) an, die Z erzeugt.

b) Geben Sie eine Ableitung der Zeichenreihe

11101011011

in G an.

c) Beweisen Sie: $\mathcal{L}(G) \subseteq Z$.

d) Beweisen Sie: Für jedes $w \in \mathcal{L}(G)$ ist $N(w)$ ungerade.

e) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache $\mathcal{L}(G)$ akzeptiert.

f) Ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid W(n) \in \mathcal{L}(G)\}$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei nun $N \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge aller natürlichen Zahlen

$$n = 2^p - 2^q - 1 \text{ mit } p \geq 3 \text{ und } 0 < q < p - 1$$

(Beispiele: $23 = 2^5 - 2^3 - 1$, $59 = 2^6 - 2^2 - 1$, also: $23{,}59 \in N$) und

$$Z_N = \{w \in Z \mid w = W(n), n \in N\}.$$

g) Beweisen Sie: $W(23) \in \mathcal{L}(G)$ und $W(59) \in \mathcal{L}(G)$.

h) Beweisen Sie: $Z_N \subsetneq \mathcal{L}(G)$.

i) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der Z_N beschreibt.

j) Beweisen Sie: Es gibt eine Teilmenge M von N derart, dass die Menge

$$Z_M = \{w \in Z \mid w = W(n), n \in M\}$$

keine reguläre, jedoch eine kontextfreie (Typ 2-) Sprache ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Teilaufgabe 3

Mit deterministischen Turingmaschinen (DTM) lassen sich Funktionen $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ berechnen.

a) Präzisieren Sie formal, was es bedeutet, dass eine DTM eine derartige Funktion berechnet mit der Vorgabe, dass alle auftretenden natürlichen Zahlen m in Binärdarstellung $W(m)$ (wie in Teilaufgabe 2) dargestellt sein sollen.

b) Geben Sie eine DTM an, die in der unter a) angegebenen Weise die Funktion

$$s(n) = n + 1$$

berechnet.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei n_b die Länge der Zeichenreihe $W(n)$. Welche der folgenden Aussagen über die Zeitkomplexität der Berechnung von $s(n)$ ist richtig?

b1) Die Zeitkomplexität der Berechnung ist $O(n_b)$.

b2) Die Zeitkomplexität der Berechnung ist $O(\log n_b)$.

b3) Die Zeitkomplexität der Berechnung ist $O(\log n)$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Gibt es eine andere Zahldarstellung als die Binärdarstellung, mit der die Berechnung von $s(n)$ konstante Zeitkomplexität hat? Begründen Sie Ihre Antwort.