
Prüfungsteilnehmer**Prüfungstermin****Einzelprüfungsnummer**

Kennzahl: _____**Kennwort:** _____**Arbeitsplatz-Nr.:** _____**Herbst
2012****66115**

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Informatik (vertieft studiert)****Einzelprüfung:** **Theoret. Informatik, Algorithmen****Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben):** 2**Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage:** 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1 (Aufabengruppe)

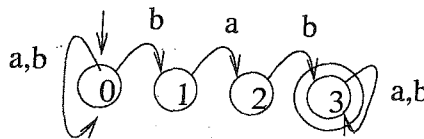
Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Wir fixieren das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und definieren $L \subseteq \Sigma^*$ durch

$$L = \{w \mid \text{in } w \text{ kommt das Teilwort } bab \text{ vor}\}$$

Z.B. ist $babaabb \in L$, aber $baabaabb \notin L$. Der folgende nichtdeterministische Automat A erkennt L :



- Wenden Sie die Potenzmengenkonstruktion auf A an und geben Sie den resultierenden deterministischen Automaten an. Nicht erreichbare Zustände sollen nicht dargestellt werden.
- Konstruieren Sie aus dem so erhaltenen deterministischen Automaten den Minimalautomaten für L . Beschreiben Sie dabei die Arbeitsschritte des verwendeten Algorithmus in nachvollziehbarer Weise.
- Geben Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode Äquivalenz von L durch Repräsentanten an. (Diese Äquivalenz ist definiert durch $x \sim_L y \iff \forall u. xu \in L \iff yu \in L$.)

Tipp: Die Vereinigung aller Klassen muss $\{a, b\}^*$ ergeben und ihre Anzahl entspricht der Zustandszahl des Minimalautomaten.

Aufgabe 2:

Wir fixieren wieder das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und betrachten die Sprache $L = \{(aba)^n a (baa)^n \mid n \geq 1\}$.

- Obwohl es auf den ersten Blick nicht so aussieht, ist diese Sprache regulär. Begründen Sie das durch Angabe eines regulären Ausdrucks für L .
- Professor Plem versucht fälschlicherweise mithilfe des Pumpinglemmas nachzuweisen, dass L nicht regulär sei. Er schreibt:

Nehmen wir widerspruchshalber an, L sei regulär. Dann gäbe es eine Pumpingzahl n . Wir betrachten $w = (aba)^n a (baa)^n$. Sei jetzt $w = xyz$ eine Zerlegung derart, dass $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$. Laut Pumpinglemma wäre nun aber xz auch in L . Das ist ein Widerspruch, da xy nach Annahme vollständig im $(aba)^n$ -Block von w liegt und somit xz nicht in L sein kann.

Begründen Sie detailliert, an welcher Stelle Professor Plem irrt und geben Sie eine Pumpingzahl n für L an. Legen Sie konkret dar, wie jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ so zerlegt werden kann, wie es vom Pumpinglemma garantiert wird.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Das 0-1-Integer Linear Programming Problem (0-1ILP) ist wie folgt definiert:

- a) GEGEBEN: Eine Liste V von Variablen x_1, \dots, x_m und eine Liste U von Ungleichungen $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$, wobei die t_i lineare Terme mit den Variablen x_1, \dots, x_n sind. Eine konkrete Instanz wäre zum Beispiel $V : x, y, z$ und $U : x + y + z - 1 \geq 0, x + (1 - y) - 2 \geq 0$.
- b) GESUCHT: Eine Belegung der Variablen mit Werten aus $\{0, 1\}$ (jede Variable ist entweder 0 oder 1), sodass alle Ungleichungen erfüllt sind.

Weisen Sie nach, dass 0-1-ILP NP-vollständig ist. Für die eine Richtung bietet sich eine Reduktion von 3SAT an.

Aufgabe 4:

Gegeben ist ein Array a von ganzen Zahlen der Länge n , z.B.:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i	5	-6	4	2	-5	7	-2	-7	3	5

Im Beispiel ist also $n = 10$. Es soll die maximale Teilsumme berechnet werden, also der Wert des Ausdrucks

$$\max_{i,j \leq n} \sum_{k=i}^{j-1} a_k$$

Im Beispiel ist dieser Wert 8 und wird für $i = 8, j = 10$ erreicht. Entwerfen Sie ein Divide-And-Conquer Verfahren, welches diese Aufgabenstellung in Zeit $\mathcal{O}(n \log n)$ löst. Skizzieren Sie Ihre Lösung hinreichend detailliert.

Tipp: Sie sollten ein geringfügig allgemeineres Problem lösen, welches neben der maximalen Teilsumme auch noch die beiden "maximalen Randsummen" berechnet. Die werden dann bei der Endausgabe verworfen.

Thema Nr. 2 (Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1: endliche Automaten

Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) A
(durch Angabe von A oder eines Diagramms für A)
für die folgende Sprache L:

L besteht aus der Menge aller Binärzahlen ohne führende Nullen
bei denen die Anzahl der Einsen ungerade und die Anzahl der Nullen gerade ist.

Aufgabe 2: reguläre Sprachen

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Sprache L regulär ist.

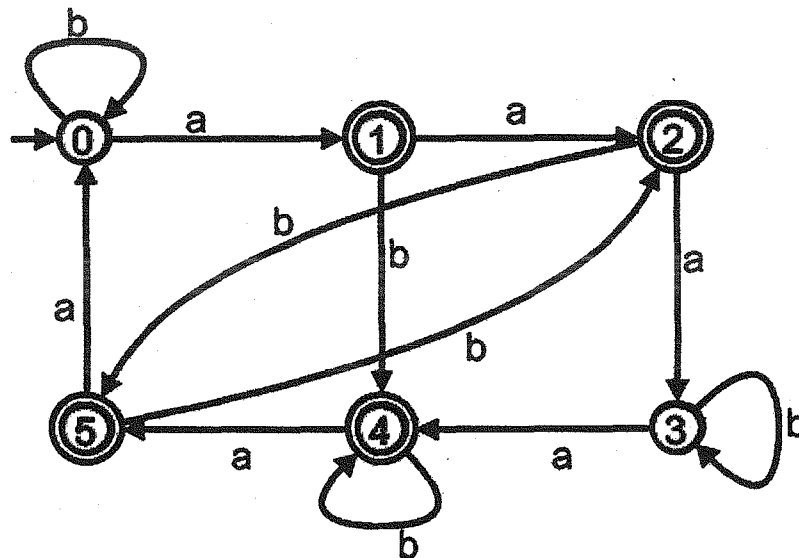
Zeigen: durch Angabe eines endlichen Automaten oder eines regulären Ausdrucks

Widerlegen: mit dem Pumping Lemma

$L = \{w c w^{\text{rev}} \mid w \in \{a,b\}^*, w^{\text{rev}} \text{ ist die Spiegelung von } w\}$
L ist die Menge der Palindrome mit der Markierung c.

Aufgabe 3: Minimierung DFA

Minimieren Sie den folgenden deterministischen Automaten mit den Zuständen $\{0,1,2,3,4,5\}$
und den Endzuständen $\{1,2,4,5\}$. 0 ist der Startzustand.



Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: Berechenbarkeit und Komplexität

Gegeben sei die Sprache $L = \{w c w \mid w \in \{a,b\}^*\}$ (Duplikate von Worten)

- a) Geben Sie eine Turingmaschine M mit $L(M) = L$ an.
Beschreiben Sie in Worten, wie Ihre Turingmaschine arbeitet.
- b) Welche Zeit- und welche Speicherkomplexität in O -Notation hat Ihre Turingmaschine?
Erläutern Sie dies anhand Ihrer in a) gegebenen Beschreibung
- c) Skizzieren Sie, warum L eine $O(\log n)$ speicher-beschränkte Sprache ist.

Aufgabe 5: Komplexität

Die Kinder in einem Kindergarten sollen einen Kreis bilden, bei dem sich nebeneinander stehende Kinder die Hand reichen. Es gibt aber Kinder, die sich nicht mögen und sich nicht die Hand reichen wollen. Diese dürfen im Kreis nicht nebeneinander stehen. Nur dann ist der Kreis zulässig.

Formal:

Gegeben sei eine Menge von n Kindern $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ und eine symmetrische binäre Relation E bestehend aus allen Paaren $\{k, k'\}$ mit der Eigenschaft dass sich k und k' nicht mögen.

Problem:

Kann man einen zulässigen Kreis bilden?

Begründen Sie warum dieses Problem NP-vollständig ist.

Hinweis:

Das Hamilton Problem ist NP-vollständig. Dies können Sie bei Ihrer Begründung verwenden. Das Hamilton (genauer Hamilton Kreis) Problem in einem ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist die Frage, ob es einen Weg w (Rundreise) genau einmal durch jeden Knoten gibt, so dass Anfangs- und Endknoten zusammenfallen, siehe auch Informatik Duden unter den Stichworten NP und Königsberger Brückenproblem

Aufgabe 6: O-Notation

Gegeben seien die Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, wobei $f(n) = (n-1)^3$ und $g(n) = (2n+3)(3n+2)$. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen gelten. Beweisen Sie Ihre Angaben.

- a) $f(n) \in O(g(n))$
- b) $g(n) \in O(f(n))$

Fortsetzung nächste Seite!

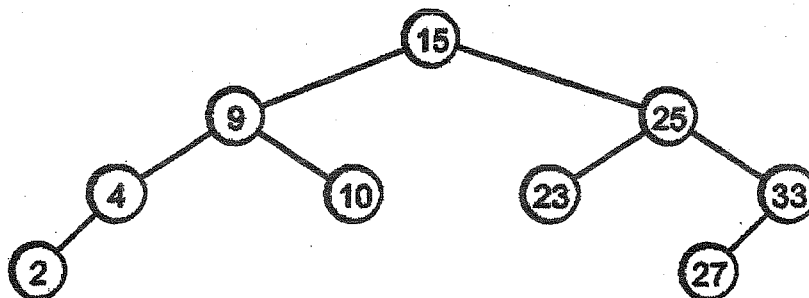
Aufgabe 7: Heap und binärer Suchbaum

- a) Fügen Sie nacheinander die Zahlen 3,5,1,2,4
- (i) in einen leeren binären Suchbaum ein
 - (ii) in einen leeren Heap ein
- Geben Sie die Ergebnisse an (Zeichnung)
- b) Geben Sie zwei Merkmale an, bei denen sich Heaps und binäre Suchbäume wesentlich unterscheiden. Ein wesentlicher Unterschied zwischen Bubblesort und Mergesort ist z.B. die worst case Laufzeit mit $O(n^2)$ für Bubblesort und $O(n \log n)$ für Mergesort.

Aufgabe 8: AVL-Bäume

Gegeben sei der folgende AVL-Baum T. Führen Sie auf T folgende Operationen durch.

- (a) Fügen Sie den Wert 1 in T ein. Balancieren Sie falls nötig und geben Sie den entstandenen Baum (als Zeichnung) an.
Fügen Sie nun den Wert 28 in T ein. Balancieren Sie falls nötig und geben Sie den entstandenen Baum (als Zeichnung) an.
- (b) Löschen Sie aus T den Wert 15. Balancieren Sie falls nötig und geben Sie den entstandenen Baum (als Zeichnung) an.



Aufgabe 9: Dijkstra

Gegeben sei der unten stehende gerichtete Graph $G=(V, E)$ mit positiven Kantenlängen $l(e)$ für jede Kante $e \in E$.

In welcher Reihenfolge werden die Knoten von G durch den Dijkstra-Algorithmus bei der Berechnung der kürzesten Wege von Knoten s ausgehend endgültig bearbeitet?

