Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2014**	**46113**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Informatik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Wir fixieren das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und definieren $L \subseteq \Sigma^*$ durch

$$L = \{w \mid \text{in } w \text{ kommt das Teilwort 0010 vor}\}$$

a) Zeigen Sie, dass L regulär ist.

b) Vervollständigen Sie durch Hinzufügen von Kanten und Angabe der Endzustände folgendes Diagramm zu einem deterministischen Automaten für L. Bitte das Diagramm auf Ihrem Arbeitspapier noch einmal abschreiben.

$$\to q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{0} q_4$$

c) Zeigen Sie durch Ausführung des Minimierungsalgorithmus, dass dieser Automat minimal ist.

d) Geben Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Äquivalenz von L durch Repräsentanten an. (Diese Äquivalenz ist definiert durch $x \sim_L y \iff \forall u : xu \in L \Leftrightarrow yu \in L$.)

Geben Sie zu zwei Klassen Ihrer Wahl neben dem gewählten Repräsentanten noch ein weiteres Element an.

Geben Sie für die Klasse, in der sich das leere Wort befindet, einen regulären Ausdruck an. Hilfe: Diese Klasse ist identisch mit $\{w \mid 10001w \in L\}$.

Aufgabe 2:
Ordnen Sie die folgenden formalen Sprachen bestmöglich in die Chomsky-Hierarchie ein und geben Sie eine ausreichende Begründung an:

a) $L_1 = \{\, a^n b a^n \mid n \geq 1 \,\}$

b) $L_2 = \{\, a^n b^n c^n \mid n \geq 1 \,\}$

c) L_3 sei die Menge aller syntaktisch korrekten Java-Programme, die ohne Eingabe terminieren.

Aufgabe 3:
Bekanntlich sind beim SUBSET-SUM Problem natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und eine Zielzahl b gegeben und es ist gefragt, ob eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ existiert, sodass $\sum_{i \in I} a_i = b$. Dieses Problem ist bekanntermaßen NP-vollständig.

a) Zeigen Sie, dass die Variante GSUBSET, bei der die Zahlen a_i und b allesamt gerade sein müssen, ebenfalls NP-vollständig ist.

b) In welche Komplexitätsklasse fällt die Variante ZSUBSET, bei der die a_i paarweise verschieden und Zweierpotenzen sind? Hilfe: Betrachten Sie die Binärdarstellung von b.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

a) Sei

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0, n > m \geq 0\} \ .$$

Beispiele: $aab \in L_1$, $aaaabb \in L_1$, $a \in L_1$.

i) Zeigen Sie, dass L_1 kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik G angeben mit $L(G) = L_1$, und

ii) begründen Sie, warum Ihre Grammatik *genau* die Sprache L_1 erzeugt.

b) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:

„Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Dann gibt es ...“

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache L_1 nicht regulär ist.

Aufgabe 2:

a) Definieren Sie die zum Halteproblem für Turing-Maschinen bei fester Eingabe $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gehörende Menge H_m.
Es geht hier also um die Turing-Maschinen, die mit fest vorgegebener Eingabe m gestartet werden.

b) Gegeben sei das folgende Problem E:
Entscheide, ob es für die deterministische Turing-Maschine M_n mit der Gödelnummer n mindestens eine Eingabe $w \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass w eine *Primzahl* ist und die Maschine M_n gestartet mit w hält.

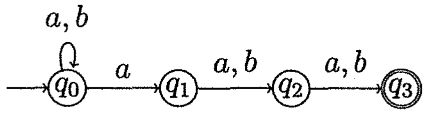
Zeigen Sie, dass E nicht entscheidbar ist. Benutzen Sie, dass H_m aus (a) für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ nicht entscheidbar ist.

c) Zeigen Sie, dass das Problem E aus (b) partiell-entscheidbar (= rekursiv aufzählbar) ist.

Aufgabe 3:

a) Konstruieren Sie aus dem NEA $\mathcal{A}$ mit der Potenzmengenkonstruktion einen (deterministischen) EA, der dieselbe Sprache akzeptiert.

$\mathcal{A}$:



b) Welche Sprache wird von dem regulären Ausdruck $(a + b)^* a(a + b)$ beschrieben?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Produktionen:

$$S \rightarrow A \mid aB \mid aC \qquad B \rightarrow S \mid Ba \qquad D \rightarrow b \mid bDD$$

$$A \rightarrow B \mid C \mid cAd \qquad C \rightarrow D \mid c$$

Konstruieren Sie eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' ohne Kettenregeln, so dass $L(G') = L(G)$ gilt.

Hinweis: Eine Produktion heißt Kettenregel, wenn sie von der Form $A \rightarrow B$ für Variablen A und B ist.

b) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ folgende kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform:

$$S \rightarrow AB \mid BC \qquad B \rightarrow CC \mid b$$

$$A \rightarrow BA \mid a \qquad C \rightarrow AB \mid a$$

Sei $w = ababa$. Folgende Tabelle entsteht durch Anwendung des CYK-Algorithmus. Geben Sie die drei fehlenden Einträge $V(1,4)$, $V(2,5)$ und $V(1,5)$ an. Wie entnehmen Sie dieser Tabelle, dass $w \in L(G)$ ist?

a	b	a	b	a
{A,C}	{B}	{A,C}	{B}	{A,C}
{S,C}	{S,A}	{S,C}	{S,A}	
{B}	{S,C}	{B}		
V(1,4)	V(2,5)			
V(1,5)				