Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Frühjahr 2000**	**46113**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Informatik (nicht vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 3

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

Teilaufgabe 1:

Gegeben sei die Grammatik Γ mit der Menge $\{a,b,c\}$ von Terminalzeichen, der Menge $\{S,A,B,C\}$ von Nicht-Terminalzeichen, dem Startsymbol S und den Produktionsregeln

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \mid aA \mid bB \mid cb \\ A &\to \varepsilon \mid aC \mid bB \mid cB \mid ccb \\ B &\to \varepsilon \mid bB \\ C &\to \varepsilon \mid aC \mid bB \mid cb \end{aligned}$$

(ε bezeichne das leere Wort.) $\mathscr{L}(\Gamma)$ sei die von Γ erzeugte Sprache.

a) Beweisen Sie:

   a1) $aaabb \in \mathscr{L}(\Gamma)$.

   a2) c kommt in jedem Wort von $\mathscr{L}(\Gamma)$ höchstens zweimal vor.

   a3) Ist $w \in \mathscr{L}(\Gamma)$ ein Wort, das genau ein c enthält, so enthält w genau ein a oder genau ein b.

b) Geben Sie einen nicht-deterministischen endlichen Automaten an, der genau die Elemente von $\mathscr{L}(\Gamma)$ akzeptiert!

Teilaufgabe 2:

Sei $L = \{a^n b c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\{a,b,c\}$. Beweisen Sie:

a) L ist nicht regulär.

b) L ist kontext-frei.

Teilaufgabe 3:

Die Funktionen $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ seien definiert durch:

$$f(n,m) = \begin{cases} n-m, & \text{falls } n \geq m \\ m-n & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{falls } \sqrt{n} \in \mathbb{N}_0 \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

a) f ist primitiv-rekursiv.

b) g ist partiell-rekursiv.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis voraussetzen, dass die arithmetischen Grundfunktionen Addition, Subtraktion und Multiplikation primitiv-rekursiv sind!

Thema Nr. 2

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

Teilaufgabe 1:

a) Gegeben ist eine formale Grammatik $\mathcal{G} = (S, \Sigma, P, s_0)$. Welche Bedingungen müssen die Produktionen P erfüllen, damit die Grammatik

i) rechtslinear, ii) kontextfrei, iii) kontextsensitiv ist?

Die von $\mathcal{G}$ erzeugte Sprache wird mit $L(\mathcal{G})$ bezeichnet. $L(\mathcal{G})$ heißt "vom Typ 3", wenn $\mathcal{G}$ rechtslinear ist, "vom Typ 2", wenn $\mathcal{G}$ kontextfrei ist und "vom Typ 1", wenn $\mathcal{G}$ kontextsensitiv ist.

b) Charakterisieren Sie Sprachen vom Typ 3 und vom Typ 2 mit Hilfe von Automatentypen!

c) Gegeben sei die Grammatik $\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{0, 1\}, P, A)$ mit
$P = \{ A \rightarrow 0B, B \rightarrow 01B, B \rightarrow 10B, B \rightarrow 1 \}$.

i) Geben Sie einen regulären Ausdruck mit Sprache $L(\mathcal{G})$ an!
ii) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L(\mathcal{G})$ akzeptiert!
iii) Konstruieren Sie einen minimalen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L(\mathcal{G})$ akzeptiert!

d) Geben Sie eine Typ 2-Sprache $\mathcal{L}2$ an, die nicht vom Typ 3 ist, zusammen mit einer kontextfreien Grammatik, die $\mathcal{L}2$ erzeugt!

e) Geben Sie eine Typ 1-Sprache $\mathcal{L}1$ an, die nicht vom Typ 2 ist, zusammen mit einer kontextfreien Grammatik, die $\mathcal{L}1$ erzeugt!

Teilaufgabe 2:

Gegeben sei die folgende Funktionsdefinition:

```
function f (n: Nat) : Nat;
if n = 0 then 0 else n+f(n-1) end;
```

a) Wie lautet das zur obigen Definition gehörige Funktional $\Phi: [N^\perp \rightarrow N^\perp] \rightarrow [N^\perp \rightarrow N^\perp]$?
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g: N^\perp \rightarrow N^\perp \quad \text{mit } g(n) = n*(n+1)/2 \text{ falls } n \neq \perp,\ g(\perp) = \perp,$$

ein Fixpunkt von Φ ist! (Hierbei bezeichnet $N^\perp$ die Menge der natürlichen Zahlen erweitert um das Element $\perp$.)

b) Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $f(n) = n*(n+1)/2$.