Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2016**	**46113**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Informatik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

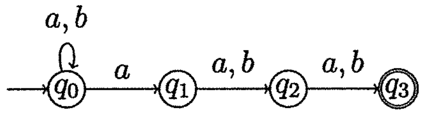
Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Reguläre Sprachen

a) Konstruieren Sie aus dem NEA $\mathcal{A}$ mit der Potenzmengenkonstruktion einen (deterministischen) EA, der dieselbe Sprache akzeptiert.

$\mathcal{A}$:



b) Beschreiben Sie möglichst einfach, welche Sprachen von den folgenden regulären Ausdrücken beschrieben werden:

1. $(a \mid b)^*a$
2. $(a \mid b)^*a(a \mid b)^*a(a \mid b)^*$
3. $(a \mid b)^*a(bb)^*a(a \mid b)^*$

Aufgabe 2:

Kontextfreie Grammatiken

Betrachten Sie die folgende kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit den Produktionen:

$$S \to AB \mid C$$

$$A \to a \mid \varepsilon$$

$$B \to BC$$

$$C \to c$$

a) Beschreiben Sie in Worten möglichst genau die von G erzeugte Sprache $L(G)$.

b) Geben Sie ohne Begründung an, welche Variablen in der Grammatik

- nützlich,
- erzeugend oder
- erreichbar

sind!

c) Ist die Grammatik in Chomsky-Normalform? Begründen Sie Ihre Antwort.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Klassifizierung von Sprachen

Welche der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ sind

a) regulär?

b) kontextfrei, aber nicht regulär?

c) nicht kontextfrei?

1. $L_1 = \{w \in \{a\}^* \mid \text{die Länge von } w \text{ ist } 2^n \text{ für eine natürliche Zahl } n\}$
2. $L_2 = \{a^k b^\ell \mid k \leq \ell\} \cup \{a^k b^\ell \mid k \geq \ell\}$
3. $L_3 = \{a^k b^\ell \mid k < \ell\} \cup \{a^k b^\ell \mid k > \ell\}$

Geben Sie zu Ihrer Antwort jeweils einen Beweis an. Ein Beweis durch Angabe eines Automaten oder eines regulären Ausdruckes ist erlaubt. Wird der Beweis durch die Angabe einer Grammatik geführt, so ist die Bedeutung der Variablen zu erläutern.

Aufgabe 4:

Probleme und Komplexität

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

VERTEXCOVER
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$, so dass für jede Kante (u, v) aus E mindestens einer der Knoten u und v in C ist?

VERTEXCOVER3
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.
Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$, so dass für jede Kante (u, v) aus E mindestens einer der Knoten u und v in C ist?

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von VERTEXCOVER auf VERTEXCOVER3 an und begründen Sie anschließend, dass Ihre Reduktion korrekt ist.

Aufgabe 5:

Kurze Begründungen

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie jeweils kurz.

a) Für jede reguläre Sprache R gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = R$.

b) Falls $L = L_1 \cap L_2$ mit L_1 und L_2 kontextfrei, dann ist L eine unentscheidbare Sprache.

c) Falls r ein regulärer Ausdruck ist, so definiert r^* immer eine unendliche Sprache.

d) Eine entscheidbare Sprache ist niemals leer.

e) Alle Sprachen in NP sind entscheidbar.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$, sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

a) Sei

$$L_1 = \{0^n 1^m 0^m 1^n \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \ .$$

Beispiele: $001011 \in L_1$, $1100 \in L_1$, $0101 \in L_1$.

(a1) Zeigen Sie, dass L_1 kontextfrei ist, indem Sie eine kontextfreie Grammatik G angeben mit $L(G) = L_1$, und (a2) begründen Sie, warum Ihre Grammatik *genau* die Sprache L_1 erzeugt.

b) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:

„Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Dann gibt es ...“

c) Sei $L_2 = \{0^n 1^m 0^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0, n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1\}$. Zeigen Sie, dass L_2 die Eigenschaft des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen (vgl. (b)) besitzt.

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache L_1 aus (a) nicht regulär ist.

Aufgabe 2:

Im Nachfolgenden bezeichne M immer eine deterministische Turingmaschine, die als Eingabe eine natürliche Zahl bekommt, und $\langle M \rangle$ sei Gödelnummer von M.

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$L_1 = \{\langle M \rangle \mid \text{es gibt } \textbf{mindestens} \text{ eine Zahl } n, \text{ so dass } M \text{ gestartet mit } n \text{ hält}\}$$

rekursiv aufzählbar (= partiell-entscheidbar) ist.

Geben Sie dazu einen Algorithmus A an, der als Eingabe eine Gödelnummer $\langle M \rangle$ bekommt und damit gestartet genau dann hält, wenn $\langle M \rangle \in L_1$ ist.

b) Sei Co-$H_0 = \{\langle M \rangle \mid M$ gestartet mit 0 hält nicht$\}$. Es ist bekannt, dass Co-H_0 nicht rekursiv aufzählbar (= partiell-entscheidbar) ist.

Zeigen Sie durch Reduktion von Co-H_0, dass die Menge

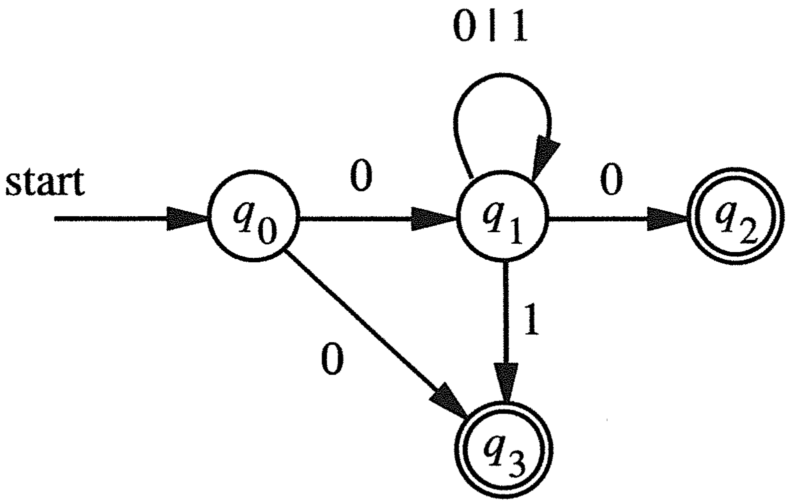
$$L_2 = \{\langle M \rangle \mid \text{es gibt } \textbf{genau} \text{ eine Zahl } n, \text{ so dass } M \text{ gestartet mit } n \text{ hält}\}$$

nicht rekursiv aufzählbar (= partiell-entscheidbar) ist. Zeigen Sie also konkret: Co-$H_0 \leq L_2$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat N:



Konstruieren Sie zu N mit der Potenzmengen-Konstruktion einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten A. Zeichnen Sie nur die vom Startzustand aus erreichbaren Zustände ein, die aber *alle*. Die Zustandsnamen von A müssen erkennen lassen, wie sie zustande gekommen sind. Führen Sie *keine* „Vereinfachungen" durch!

Hinweis: In einem deterministischen endlichen Automaten muss es an jedem Zustand für jedes Zeichen einen Übergang geben.

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck $\alpha(N)$ für die Sprache an, die der nichtdeterministische endliche Automat N aus (a) akzeptiert.

c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

Beh.: Es gibt reguläre Sprachen L, so dass es eine Teilmenge U von L gibt, die nicht regulär ist.

Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und den Produktionen:

$$S \to A \mid B \mid a \qquad A \to C \mid aBb \qquad B \to Aa \mid b \qquad C \to S \mid bA$$

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G', in der es keine Ketten-Produktionen mehr gibt, mit $L(G') = L(G)$.

Hinweis: Eine Kettenproduktion ist eine Produktion der Form $A \to B$ für $A, B \in V$.

b) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform, und sei $w = w_1 \dots w_n$ ein Wort aus n Zeichen aus dem Alphabet Σ. Der Algorithmus von Cocke/Younger/Kasami (CYK-Algorithmus) berechnet für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \leq j$, die Variablenmenge $V(i,j) = \{A \in V \mid A \xrightarrow{*} w_i \dots w_j\}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und den folgenden Produktionen:

$$
\begin{array}{lllllll}
S & \to & AB \mid BC & \quad & B & \to & CC \mid b \\
A & \to & BA \mid a & \quad & C & \to & AB \mid a
\end{array}
$$

Sei $w = baaba$.

Folgende Tabelle entsteht durch Anwendung des CYK-Algorithmus. Z. B. bedeutet $B \in V(3,5)$, dass aus der Variablen B das Teilwort $w_3 w_4 w_5 = aba$ hergeleitet werden kann.

Tragen Sie in der Tabelle die drei fehlenden Einträge $V(1,2)$, $V(1,4)$ und $V(1,5)$ ein. Wie entnehmen Sie dieser Tabelle, dass $w \in L(G)$ ist?

b	*a*	*a*	*b*	*a*
V(1,1) $\{B\}$	V(2,2) $\{A,C\}$	V(3,3) $\{A,C\}$	V(4,4) $\{B\}$	V(5,5) $\{A,C\}$
V(1,2)	V(2,3) $\{B\}$	V(3,4) $\{S,C\}$	V(4,5) $\{S,A\}$	
V(1,3) $\varnothing$	V(2,4) $\{B\}$	V(3,5) $\{B\}$		
V(1,4)	V(2,5) $\{S,A,C\}$			
V(1,5)				