| Prüfungsteilnehmer | Prüfungstermin | Einzelprüfungsnummer |
|---|---|---|
| Kennzahl: ____________ | **Frühjahr** | **66112** |
| Kennwort: ____________ | **2001** | |
| Arbeitsplatz-Nr.: ________ | | |

# Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

## - Prüfungsaufgaben -

Fach: **Informatik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Automatentheorie,Komplexität,Algorith.**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

**Thema Nr. 1**

**Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!**

**Aufgabe 1**

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ und die Sprache

$$L = \{1\,0^i\,1^j\,0 \mid i \text{ und } j \text{ sind gerade, } i, j \geq 0\}.$$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck mit Sprache L an.

b) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik an, die L erzeugt.

c) Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen Automaten <u>ohne</u> Leerübergänge, der die Sprache L akzeptiert.

d) Konstruieren Sie einen minimalen deterministischen Automaten, der L akzeptiert.

**Aufgabe 2**

Gegeben sei die folgende Grammatik G zur Erzeugung arithmetischer Ausdrücke:

$G = (\{E\}, \{a, b, +, *, (,)\}, P, E\}$ wobei
$P = \{E \to E+E,\ E \to E*E,\ E \to (E),\ E \to a,\ E \to b\}.$

a) Geben Sie eine Ableitung für den Ausdruck (a+b)*(a*b) an.

b) Zeigen Sie, dass die Grammatik G nicht eindeutig (dh. ambig) ist.

c) Gesucht ist eine eindeutige Grammatik G‘, die dieselbe Sprache wie G hat.
Vervollständigen Sie dazu den folgenden Ansatz durch Hinzunahme weiterer Produktionsregeln:

$G' = (\{E, F, G\}, \{a, b, +, *, (,)\}, P', E\}$ wobei
$P' = \{E \to E+F,\ E \to F,\ \ldots\ldots\}.$

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3**

Beim Beweis der folgenden Aufgaben ist jeweils das Schema der primitiven Rekursion mit geeigneten primitiv rekursiven Funktionen g: $N^n \to N$ und h: $N^{n+2} \to N$ anzuwenden.
(N bezeichnet dabei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.)

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

iszero: $N \to N$, iszero(0) = 1, iszero(x) = 0 falls $x \neq 0$.

even: $N \to N$, even(x) = 1 falls x gerade, even(x) = 0 falls x ungerade.

case: $N^3 \to N$, case(x, y, z) = y falls x = 0, case(x, y, z) = z falls $x \neq 0$.

b) Zeigen Sie:

Ist f: $N \to N$ primitiv rekursiv, dann ist auch r: $N^2 \to N$ mit $r(x, i) = f^i(x)$ primitiv rekursiv.
Dabei bezeichnet $f^0$ die Identität und für $i > 0$ bezeichnet $f^i$ die i-malige Hintereinanderausführung f(....f(x)...) von f.

**Aufgabe 4**

Beweisen Sie mit Hilfe der Zusicherungsmethode, dass das folgende Programm bezüglich der eingefügten Zusicherungen partiell korrekt ist.

```
{n ≥ 0}
x:=n; z:=1;
{x ≥ 0 ∧ z = 2^(n-x)}
WHILE x>0 DO
      z:=2*z; x:=x-1;
END;
{z = 2^n}
```

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5**

Die folgenden Aufgaben können in Pascal, Modula-2, C, C++ oder Java gelöst werden.

a) Definieren Sie einen Datentyp (oder eine Klasse) mit Namen „Bin Tree“ zur Darstellung binärer Bäume mit ganzen Zahlen als Knotenmarkierungen.

b) Ein binärer Baum t ist sortiert wenn t leer ist, oder wenn seine Wurzel n größer als alle im linken Teilbaum l von t vorkommenden Knoten und kleiner gleich allen im rechten Teilbaum r von t vorkommenden Knoten ist und wenn l und t ebenfalls sortiert sind. Implementieren Sie eine Operation mit Namen „isSorted“, die für einen gegebenen binären Baum feststellt, ob er sortiert ist.

c) Implementieren Sie eine Operation mit Namen „insert“, die eine ganze Zahl x so in einen binären Baum einfügt, dass dieser nach Ausführung der Operation wieder sortiert ist.

## Thema Nr. 2

**Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!**

*Hinweis: Verwenden Sie zur Formulierung von Algorithmen bzw. Datentypen eine gängige höhere Programmiersprache oder einen entsprechenden Pseudocode. Erläutern Sie alle anzugebenden Algorithmen und Automaten ausgiebig durch Kommentare.*

### Aufgabe 1

Für eine nicht-leere Menge von Personen sei gegeben, wer mit wem

- eng verwandt,
- weitläufig verwandt,
- bekannt (aber nicht verwandt),
- weder verwandt noch bekannt

ist. Davon ausgehend sollen folgende Aufgaben gelöst werden:

a) Für eine beliebige Person soll bestimmt werden, mit wie vielen anderen Personen sie eng verwandt ist.

b) Es soll(en) diejenige(n) Person(en) mit den meisten Bekannten und weitläufig Verwandten bestimmt werden.

c) Es soll festgestellt werden, ob es drei Personen gibt, die untereinander weder verwandt noch bekannt sind.

Geben Sie einen geeigneten Datentyp zur Darstellung der gegebenen Personenbeziehungen sowie Algorithmen zur Lösung der Aufgaben a), b) und c) an.

### Aufgabe 2

Gegeben sei die Grammatik $\Gamma$ mit der Menge $\{a, b\}$ von Terminalzeichen, dem Startsymbol S als einzigem Nicht-Terminalzeichen und den 4 Produktionsregeln

$S \rightarrow a$
$S \rightarrow aS$
$S \rightarrow aSb$
$S \rightarrow bSa$

sowie der reguläre Ausdruck

$$R = a(aa^*b + baaa^*).$$

Fortsetzung nächste Seite!

$L(\Gamma)$ sei die von $\Gamma$ erzeugte Sprache, $L(R)$ die durch $R$ beschriebene Sprache. Schließlich sei $L$ die Menge aller nicht-leeren Zeichenreihen über {a, b}, in denen a öfter als b vorkommt.

a) Geben Sie eine Ableitung der Zeichenreihe

aababaaab

in $\Gamma$ an.

b) Beweisen Sie: $L(R) \subsetneqq L(\Gamma) \subsetneqq L$.

c) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache $L(R)$ akzeptiert.

d) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik (Typ 2) mit höchstens 5 Produktionsregeln an, die $L(R)$ erzeugt.

e) Beweisen Sie, dass $L$ keine reguläre Sprache ist.

f) Geben Sie einen nichtdeterministischen Kellerautomaten an, der die Sprache $L(\Gamma)$ akzeptiert.

g) Geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, die die Sprache $L$ akzeptiert.

**Aufgabe 3**

Durch den rekursiven Algorithmus

$F \equiv$ **function** $f$ ($n$, $m$: nat)nat:
**if** $n < m$ **then** $n$ **else** $f(n - m, m + 1)$ **endif**

ist eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert.

a) Bestimmen Sie den Wert von $f(31, 3)$.

b) Beweisen Sie: Der Algorithmus $F$ terminiert für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$.

c) Geben Sie einen iterativen Algorithmus an, der $f(n, m)$ für beliebige $n, m \in \mathbb{N}_0$ berechnet.

d) Beweisen Sie: Zu jedem Paar $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gibt es $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$k * m \leq n$ und
$2 * f(n,m) + k^2 + k * (2 * m - 1) = 2 * n$.

Fortsetzung nächste Seite!

e) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

e1) Die Zeitkomplexität von $F$ ist $O(n)$.

e2) Die Zeitkomplexität von $F$ ist $O(m)$.

e3) Die Zeitkomplexität von F ist $O(n/m)$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

f) Ist die Funktion $f$ primitiv-rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.