Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst** **2004**	**46113**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Informatik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Theoretische Informatik**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 2

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

Sämtliche Teilaufgaben sind zu bearbeiten!

Teilaufgabe I

Gegeben sei der nicht-deterministische endliche Automat *M* mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, der Zustandsmenge $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ Anfangszustand q_0, Endzustand q_3 und der Übergangsfunktion δ mit:

$$\begin{aligned}
&(q_0, a) \mapsto \{q_1\}, \\
&(q_1, a) \mapsto \{q_1\}, \\
&(q_1, b) \mapsto \{q_1, q_2\}, \\
&(q_2, a) \mapsto \{q_3\}, \\
&(q_2, b) \mapsto \{q_3\}, \\
&(q, x) \mapsto \emptyset \qquad \text{für alle übrigen } (q, x) \in Q \times \Sigma.
\end{aligned}$$

L(M) sei die von *M* akzeptierte Sprache.

a) Beweisen oder widerlegen Sie:

   a1) $aababb \in L(M)$.
   a2) Jedes $w \in L(M)$ enthält das Teilwort *bb*.
   a3) Das dritte Zeichen jedes $w \in L(M)$ ist ein *b*.
   a4) Das vorletzte Zeichen jedes $w \in L(M)$ ist ein *b*.

b) Geben Sie eine reguläre (Typ-3-) Grammatik an, die *L(M)* erzeugt.

c) Konstruieren Sie aus *M* einen deterministischen endlichen Automaten, der *L(M)* akzeptiert.

d) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der *L(M)* beschreibt.

Fortsetzung nächste Seite!

Teilaufgabe 2

Die Sprache L über dem Alphabet $\{a,b,c\}$ sei gegeben durch $L = \{a^i bc^j \mid j > i \geq 0\}$.

a) Beweisen Sie: L ist nicht regulär.

b) Die Grammatik G mit den Terminalzeichen a, b, c, den Variablen S, A, C und dem Startzeichen S enthalte die Regeln

$$S \to bC \mid aACc$$
$$A \to \ldots$$
$$C \to \ldots$$

Vervollständigen Sie die Regeln für A und C so, dass G die Sprache L erzeugt!

c) Überführen Sie die Grammatik aus Teil b) in Chomsky-Normalform.

d) Ist die Sprache L mit einer deterministischen Turing-Maschine mit einer Zeitkomplexität $O(n^2)$ entscheidbar (n ist die Länge der jeweiligen Eingabe)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Teilaufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet.

a) Was bedeutet es, dass eine totale Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit einer Turing-Maschine berechenbar ist?

b) Für fest gewählte $u, v_1, v_2 \in \Sigma^*$ und eine totale Funktion $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ sei $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch

$$h(w) = \begin{cases} v_1 & \text{falls } g(w) = u \\ v_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie: Ist g mit einer Turing-Maschine berechenbar, so gilt dies auch für h.

Thema Nr. 2

1. Automatentheorie

Es sei $\mathrm{bin}(n)$ die Binärdarstellung der natürlichen Zahl n (ohne führende Nullen).
Weiter sei $D =_{\text{def}} \{\mathrm{bin}(n) : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \equiv 5 \pmod 8\}$.

a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der D akzeptiert!
b) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der D beschreibt!

2. Formale Sprachen

Es seien $M =_{\text{def}} \{wuw^R v : w, u, v \in \{a,b\}^*\}$ und $N =_{\text{def}} \{wcuw^R v : w, u, v \in \{a,b\}^*\}$.
Dabei sei das Zeichen $c \notin \{a,b\}$ und $(a_1 a_2 \ldots a_n)^R =_{\text{def}} a_n \ldots a_2 a_1$ für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{a,b\}$.

a) Geben Sie kontextfreie Grammatiken an, die M und N erzeugen.
b) Sind M und N regulär? (Begründung!)

Fortsetzung nächste Seite!

3. Endliche Automaten

Gegeben sei folgender nichtdeterministischer endlicher Automat A_a.

$$\begin{aligned}
A_a &= (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_3\}) \\
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \\
\delta &= \{((q_0,a),q_2),((q_0,a),q_1), \\
&\quad ((q_1,b),q_1),((q_1,b),q_2),((q_1,c),q_3), \\
&\quad ((q_2,a),q_2),((q_2,a),q_1),((q_2,c),q_3)\}
\end{aligned}$$

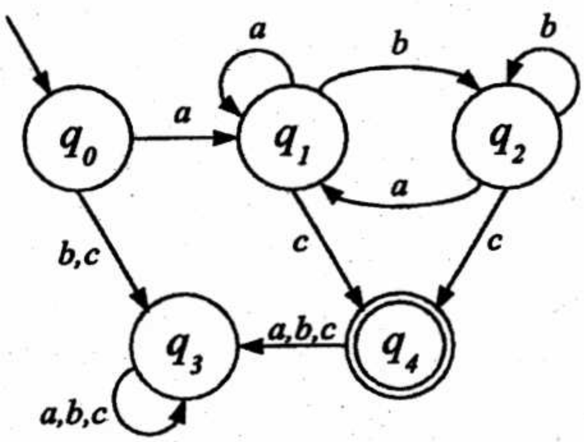
3.1 Stellen Sie den Automaten A_a graphisch dar!

3.2 Konstruieren Sie aus A_a einen per Konstruktion zu A_a äquivalenten deterministischen endlichen Automaten A_b! Stellen Sie den Automaten A_b graphisch dar!

3.3 Welche Sprache wird von A_b bzw. A_a akzeptiert (ohne Beweis)? Beschreiben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck!

3.4 Geben Sie einen per Konstruktion minimalen und äquivalenten deterministischen endlichen Automaten $A_{c,\min}$ aus folgendem endlichen Automaten A_c! Stellen Sie den Automaten $A_{c,\min}$ graphisch dar!

$$\begin{aligned}
&A_c = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_4\}) \\
&Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\
&\Sigma = \{a, b, c\} \\
&\delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times Q, \\
&\delta = \{((q_0,a),q_1),((q_0,b),q_3),((q_0,c),q_3), \\
&\quad ((q_1,a),q_1),((q_1,b),q_2),((q_1,c),q_4), \\
&\quad ((q_2,a),q_1),((q_2,b),q_2),((q_2,c),q_4), \\
&\quad ((q_3,a),q_3),((q_3,b),q_3),((q_3,c),q_3), \\
&\quad ((q_4,a),q_3),((q_4,b),q_3),((q_4,c),q_3)\}
\end{aligned}$$



Fortsetzung nächste Seite!

4. Turing-Maschinen

Eine deterministische Turingmaschine ist ein Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$. Dabei ist Q die endliche Zustandsmenge, Σ das endliche Eingabealphabet, Γ das endliche Bandalphabet, $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ die Übergangsfunktion, q_0 der Startzustand, B das Blanksymbol und F eine Menge von Endzuständen. Eine solche deterministische Turingmaschine liest also in jedem Schritt das aktuelle Zeichen unter dem Schreib-/Lesekopf, entscheidet abhängig vom aktuellen Zustand und dem gelesenen Zeichen, welches neue Zeichen geschrieben, in welchen Folgezustand übergegangen und ob dabei der Schreib-/Lesekopf nach rechts *(R)*, nach links *(L)* oder gar nicht *(N)* bewegt werden soll.

Sei nun $\Sigma = \{a, 0, 1\}$ und $\Gamma = \{a, 0, 1, B\}$. Konstruieren Sie eine Turingmaschine, welche eine Zahl in Binärdarstellung inkrementiert. Beachten Sie dabei die folgenden Vorgaben:

Auf dem Band steht als Eingabe ein a und rechts davon die gegebene Zahl in Binärdarstellung mit dem niederwertigsten Bit ganz rechts. Beispiel für die Dezimalzahl 13: $BBBa1101BBBBB$. Der Schreib-/Lesekopf steht zu Beginn der Verarbeitung auf dem Zeichen a und soll auch am Ende wieder auf diesem Zeichen a stehen. Das Zeichen a darf während einer ganzen Verarbeitung in keinem Fall überschrieben werden! Es darf auch kein weiteres Zeichen a geschrieben werden.

Schreiben Sie die Übergangsfunktion δ in Tabellenform nieder, pro Zustand eine Spalte, pro Zeile ein Bandsymbol und dann in jeder Zelle den Folgezustand, das zu schreibende Zeichen sowie die Kopfbewegung.