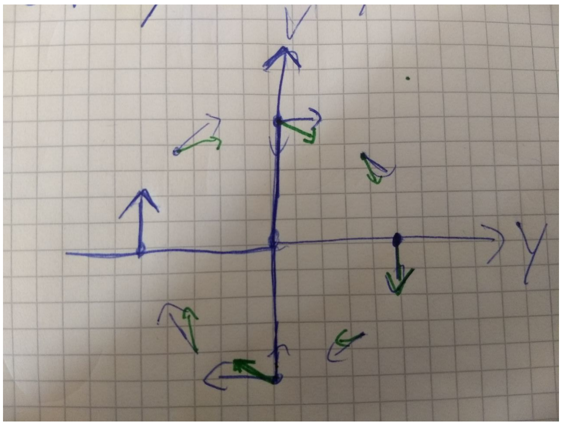

Abbildung 1: Skizze des Phasenportraits von 9.1a), blau: linearisiert, grün: nichtlinear

9.1. **a)** DGL als System:

$$\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\varepsilon v^3 - y \end{pmatrix}$$

Linearisiert ist der 0 punkt ein Zentrum. Der nichtlineare Anteil hilft zusäzlich die Lösung beschränkt zu halten. Sieht man in der Skizze vom Phasenportrait in Abb. 1.

b) Mehrskalenansatz:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(t, T), \quad \text{mit } T = \varepsilon t$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_1 y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_2 y_i$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_{11} y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_{12} y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_{21} y_i + \varepsilon^{i+2} \partial_{22} y_i$$

Die DGL für den ε^0 Term ist:

$$\partial_{11} y_0 + y_0 = 0$$

Wie in der Vorlesung schreiben wir die allgemeine Lösung dafür als:

$$y_0 = r(T) \cos(t + \varphi(T))$$

Die DGL für den ε^1 Term ist:

$$\partial_{11} y_1 + y_1 = -(\partial_1 y_0)^3 - 2\partial_{12} y_0$$

$$\partial_1 y_0 = -r(T)\sin(t+\varphi(T)), \quad (\partial_1 y_0)^3 = -r^3(T)\frac{3\sin(t+\varphi(T)) - \sin(3(t+\varphi(T))}{4}$$

$$\partial_{12} y_0 = -r'(T)\sin(t+\varphi(T)) - r(T)\cos(t+\varphi(T))\varphi'(T)$$

Daher ist die rechte Seite der ε^1-Gleichung:

$$\left(2r'(T) + \frac{3}{4}r^3(T)\right)\sin(t+\varphi(T)) + 2r(T)\varphi'(T)\cos(t+\varphi(T)) - \frac{1}{4}r^3(T)\sin(3(t+\varphi(T)))$$

Damit y_1 kein Wachstum in t hat setzen wir die Terme vor den Lösungen der homogenen Gleichung auf 0. ($\sin(t), \cos(t)$ würden die homogene Gleichung lösen; $\sin(3t)$ nicht).

$$2r'(T) + \frac{3}{4}r^3(T) = 0, \quad 2r(T)\varphi'(T) = 0$$

Die erste Gleichung kann mittels Variablenseparation gelöst werden und die

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{8}T + c_1}}$$

Aus der zweiten Gleichungt folgt $\varphi'(T) = 0 \Rightarrow \varphi(T) \equiv c_2$.

Also

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1}}\cos(t + c_2)$$

Die Konstanten können aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden:

$$a = y_0(0) = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\cos(c_2) \Rightarrow (c_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(c_2)}$$

$$y_0'(t) = -\frac{3}{8}\varepsilon\left(\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1\right)^{-\frac{3}{2}}\cos(t+c_2) - \left(\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1\right)^{-\frac{1}{2}}\sin(t+c_2)$$

$$0 = y_0'(0) = -\frac{3}{8}\varepsilon\,(c_1)^{-\frac{3}{2}}\cos(c_2) - (c_1)^{-\frac{1}{2}}\sin(c_2) = -\frac{3}{8}\varepsilon\frac{a^3}{\cos^3(c_2)}\cos(c_2) - \frac{a\sin(c_2)}{\cos(c_2)}$$

$$-\frac{3}{8}\varepsilon a^2 = \sin(c_2)\cos(c_2) = \frac{1}{2}\sin(2c_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{-3}{8}\varepsilon a^2\right)$$

9.2. **a)** Für die Energie multipliziert man die Gleichung mit y' und integriert:

$$\frac{(y')^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \varepsilon\frac{y^4}{4} = c$$

System:

$$\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\varepsilon y^3 - y \end{pmatrix}$$

Das Phasenportrait sieht ähnlich aus wie das Phasenportrait in **9.1a)**. Nur der nichtlineare Anteil wird durch y verstärkt anstatt durch v.

b)

9.3.

$$\tilde{y}(\tau) = \tilde{y}\left(\frac{t}{\omega}\right) = y(t)$$

$$\frac{1}{\omega^2}\tilde{y}'' = y''$$

$$\tilde{y}'' + \omega^2\tilde{y} + \varepsilon\tilde{y}^3 = 0$$

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' + (1 + 2\varepsilon\omega_1)(y_0 + \varepsilon y_1) + \varepsilon(1 + 2\varepsilon\omega_1)y_0^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

$$\varepsilon^0 : y_0'' + y_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 : y_1'' + y_1 + 2\omega_1 y_0 + y_0^3 = 0$$

$$y_0 = a\cos(t)$$

$$y_1'' + y_1 = -2\omega_1 a\cos(t) - a^3\frac{3\cos(t) + \cos(3t)}{4}$$

Die Rezonanzterme werden unterdrückt so wie in **9.1a)**:

$$-2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = -\frac{3}{8}a^2$$

9.4.

$$\tilde{y}'' + \varepsilon(\tilde{y}^2 - 1)\omega\tilde{y}' + \tilde{y} = 0$$

$$(y_0''+\varepsilon y_1''+\varepsilon^2 y_2'')+\varepsilon(y_0^2+2\varepsilon y_0 y_1-1)(1+\varepsilon\omega_1)(y_0'+\varepsilon y_1')+(1+2\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_1^2+2\varepsilon^2\omega_2)(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\varepsilon^0 : y_0'' + y_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 : y_1'' + (y_0^2 - 1)y_0' + y_1 + 2\omega_1 y_0 = 0$$

$$\varepsilon^2 : y_2'' + (y_0^2 - 1)y_1' + y_0'(y_0^2\omega_1 - \omega_1 + 2y_0 y_1) + y_2 + 2\omega_1 y_1 + \omega_1^2 y_0 + 2\omega_2 y_0 = 0$$

Aus ε^0 folgt: $y_0 = Asin(t) + Bcos(t)$. Die Inhomogenität für ε^1 ist:

9.5. **a)** In jedem Punkt ist $\nabla\varphi(x)$ eine orthogonale Matrix $Q(x)$, da $\nabla\varphi(x)^{-1} = (\nabla\varphi(x))^\top$. Außerdem gilt auch $C_{\varphi^{-1}} \equiv I$, da $\nabla\varphi^{-1} = (\nabla\varphi)^{-1}$.

Aus dem Angleitner Skript S. 29:

$$\frac{\left\|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\right\|^2}{\left\|(x+\Delta x)-x\right\|^2} = \frac{\left\|\nabla\varphi(x)\cdot\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^2)\right\|^2}{\|\Delta x\|^2}$$

$$= \frac{(\Delta x)^\top\cdot(\nabla\varphi(x))^\top\cdot(\nabla\varphi(x))\cdot\Delta x}{\|\Delta x\|^2} + \mathcal{O}(\|\Delta x\|) \overset{C\equiv I}{=} 1+\mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Wählt man nun $x+\Delta x = y$ erhält man:

$$\frac{\left\|\varphi(y)-\varphi(x)\right\|^2}{\|y-x\|^2} = 1+\mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Und das ganze für φ^{-1}:

$$\frac{\|y-x\|^2}{\left\|\varphi(y)-\varphi(x)\right\|^2} = 1+\mathcal{O}(\left\|\varphi(y)-\varphi(x)\right\|) = 1+\mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Also

$$\frac{\left\|\varphi(y)-\varphi(x)\right\|^2}{\|y-x\|^2} = 1+\mathcal{O}(\|\Delta x\|) = 1+\mathcal{O}(\|\Delta x\|^{-1})$$

Kann man daraus schließen, dass die $\|\Delta x\|$ Terme wegfallen?

Offene Frage: Wo geht Konvexität von B ein?

b) Aus **a)** gilt $G(x,y)=0$.

Zuerst nach y_i und dann nach x_j differenzieren führt zur gesuchten Identität:

$$G(x,y) = \sum_k (\varphi_k(x)-\varphi_k(y))^2 - (x_k-y_k)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}G(x,y) = -2\sum_k(\varphi_k(x)-\varphi_k(y))\frac{\partial\varphi_k(y)}{\partial y_i} + 2(x_i-y_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_i}G(x,y) = -2\sum_k \frac{\partial\varphi_k(y)}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_j} + 2\delta_{ij} = 0$$

Also $(\nabla\varphi(y))^\top\nabla\varphi(x) = I$ auch für verschiedene Punkte $y, x \in B$.

c) Es folgt, dass in konvexen Umgebungen von $x\in\Omega$ gilt: $(\nabla\varphi(y))^\top = \nabla\varphi(x)^{-1}$ und damit $\nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(y)$. $\nabla\varphi$ ist lokal eine konstante orthogonale Matrix Q. Damit $\varphi(x) = Qx + a$.