4.1.

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{2u(u^2+(1-u)^2) - u^2(2u - 2(1-u))}{(u^2+(1-u)^2)^2} \\ &= \frac{2u^3 + 2u - 4u^2 + 2u^3 - 2u^3 + 2u^2 - 2u^3}{(u^2+(1-u)^2)^2} \\ &= \frac{2u(1-u)}{(u^2+(1-u)^2)^2} \end{aligned}$$

$$(f')^{-1}(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{\xi}\left(\sqrt{4\xi+1} - 1\right) - 1}\right)$$

Wir verwenden den Hinweis, dass die Lösung ein Verdünnungsfächer gefolgt von einem Schock der Form $x = st$ ist:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 & x < f'(u_1)t \\ (f')^{-1}(\frac{x}{t}) & f'(u_1)t \leq x \leq st \\ u_2 & st < x \end{cases}$$

Damit die Anfangsbedingungen erfüllt sind, muss also $u_1 = 0$ und $u_2 = 1$ sein.

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (f')^{-1}(\frac{x}{t}) & 0 \leq x \leq st \\ 1 & st < x \end{cases}$$

4.2.

$$v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Stromlinien sind die Integralkurven vom Geschwindigkeitsfeld v, also die Lösungen von $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v(x;t)$ für eine feste Zeit t. Das gegeben Geschwindigkeitsfeld ist stationär, also sind die DGL für Bahnlinien und Stromlinien gleich.

Die Lösungen dieser DGL sind von der Form:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} \sinh(s) + c_1 \\ \cosh(s) + c_2 \end{pmatrix}$$

4.3.

$$\det(B + \varepsilon CB) - \det(B) = \left[\det(I + \varepsilon C) - 1\right]\det(B)$$

Mit der Leibniz Formel für Determinanten erhalten wir:

$$= \left[\prod_{i=1}^{n} (1 + \varepsilon c_{ii}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - 1 \right] \det(B) = \left[1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} c_{ii} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - 1 \right] \det(B)$$
$$= \varepsilon \det(B) \operatorname{spur}(C) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Gleicher Beweis, wenn B und C vertauscht sind, deshalb

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det A(t+\varepsilon) - \det A(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(A(t) + \varepsilon A(t) A^{-1}(t) A'(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) - \det A(t)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

mit wähle $C = A^{-1} A'$.

4.4. Partiell integrieren und dann Transformationssatz.

$$\nabla_x \eta(t,x) = \nabla_X \bar{\eta}(X(t,x)) \cdot \mathbf{A}^{-1}(X(t,x))$$

$$\Rightarrow \nabla_x \eta(t,x) \cdot \mathbf{A}(X(t,x)) = \nabla_X \bar{\eta}(X(t,x))$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla_X \cdot (J(t,X)\mathbf{A}^{-T}(t,X)) \bar{\eta}(X) \,\mathrm{d}X \\ &= -\int_\Omega (J(t,X)\mathbf{A}^{-T}(t,X)) \cdot \nabla_X \bar{\eta}(X) \,\mathrm{d}X + \underbrace{\int_{\partial\Omega} J(t,X)\mathbf{A}^{-T} \bar{\eta}(t,s) \cdot \mathrm{d}S}_{=0 \text{ weil } \bar{\eta} \in C_0^\infty(\Omega)} \\ &= -\int_{\Omega(t) = x(t,\Omega)} (J(t,X(t,x))\mathbf{A}^{-T}(t,X(t,x))) \cdot \nabla_X \bar{\eta}(X(t,x)) (\underbrace{|\det \mathrm{D}x|}_{\det \mathbf{A} = J})^{-1} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega(t)} (J(t,x)\mathbf{A}^{-T}(t,x)) \cdot \nabla_x \eta(t,x) \cdot \mathbf{A}(t,x) (\underbrace{|\det \mathrm{D}x|}_{\det \mathbf{A} = J})^{-1} \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega(t)} \nabla_x \eta(t,x) \,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$