5.1. **a)** Partiell integrieren pro Zeile i von σ:

$$\int_{\Omega(t)} (a \times x) \nabla \cdot \sigma_i \,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega(t)} \nabla (a \times x) \cdot \sigma_i \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega(t)} (a \times x) \sigma_i n \,\mathrm{d}s_x$$

b)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(t)} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_t (a \times x)_i \sigma_{ij} \,\mathrm{d}x \\
&= a \cdot \int_{\partial\Omega(t)} x \times (\sigma n) \,\mathrm{d}s_x - \int_{\Omega(t)} (a \times x) \cdot (\nabla \cdot \sigma) \,\mathrm{d}x \\
&= a \cdot \int_{\partial\Omega(t)} x \times \left(\partial_t \rho v + \nabla \cdot (\rho v v^T)\right) - x \times (\rho f) \,\mathrm{d}s_x - \int_{\Omega(t)} (a \times x) \cdot (\nabla \cdot \sigma) \,\mathrm{d}x \\
&= 0 \quad \forall a, \forall \Omega
\end{aligned}$$

c) Aus der Gleichung $\sum_{i,j=1}^{3} \partial_j (a \times x)_i \sigma_{ij}$ wollen wir die Regeln $\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 0$ für $i \neq j$ folgern.

Wir sehen aus

$$(a \times x) = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix}$$

, dass $\partial_j (a \times x)_i = \pm a_k$ für $i \neq j \neq k$ und dass es sich mit den Vorzeichen auch ausgeht.

5.2.

$$\nabla \cdot (pv) = \nabla p \cdot v + p \underbrace{(\nabla \cdot v)}_{=0}$$

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho |v|^2 = \frac{1}{2} \rho_t |v|^2 + \rho v \cdot v_t$$

$$\mathrm{Div}(\rho v v^T) \cdot v = v \nabla \cdot (\rho v) \cdot v + \rho (v \cdot \nabla) v \cdot v = -|v|^2 \rho_t + \rho (v \cdot \nabla) |v|^2$$

$$\partial_t (\rho v) \cdot v = \rho_t |v|^2 + \rho v_t \cdot v$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |v|^2 v\right) &= \frac{1}{2} \nabla \rho \cdot |v|^2 v + \rho \frac{1}{2} \nabla \cdot (|v|^2 v) \\
&= \frac{1}{2} \nabla \rho \cdot |v|^2 v + \rho \frac{1}{2} (\nabla |v|^2 \cdot v + |v|^2 \underbrace{\nabla \cdot v}_{=0}) \\
&= \frac{1}{2} \nabla \rho \cdot |v|^2 v + \rho (v \cdot \nabla) v \cdot v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t (\rho v) + \mathrm{Div}(\rho v v^T) + \nabla p &= \rho f \\
\partial_t (\rho v) \cdot v + \mathrm{Div}(\rho v v^T) \cdot v + \nabla p \cdot v &= \rho f \cdot v \\
\partial_t (\rho v) \cdot v + \mathrm{Div}(\rho v v^T) \cdot v + \nabla \cdot (pv) &= \rho f \cdot v
\end{aligned}$$

5.3.

$$Q(t)^T = (e^{-tW})^T = e^{-tW^T} = e^{tW} \Rightarrow Q(t)Q(t)^T = I$$

Da schiefsymmetrische Matrizen auf der Diagonale nur 0 Einträge haben gilt:

$$\det Q(t) = \det e^{-tW} = e^{\mathrm{spur}(-tW)} = e^0 = 1$$

$$\partial_t Q(t) = -WQ(t)$$

Aus

$$\widehat{\sigma}(-WQ(t)Q(t)^T + Q(t)AQ(t)^T) = Q(t)\widehat{\sigma}(A)Q(t)^T$$

folgt für $t = 0$:

$$\widehat{\sigma}(-W + A) = \widehat{\sigma}(A)$$

Wählt man nun den schiefsymmetrischen Anteil von A für $W = \frac{1}{2}(A - A^T)$ folgt die Behauptung.

5.4.