

3.1. Die schwache Formulierung lautet:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty -f(u) \Phi_x - u \Phi_t \, dt \, dx - \int_{\mathbb{R}} u_0 \Phi_0 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty g(u) \Phi \, dt \, dx$$

3.2.

3.3. a) Damit u eine Entropielösung ist, muss sie zunächst eine schwache Lösung sein, also die RH-Bedingung erfüllen. Zusätzlich:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \eta(u) \Phi_t + \psi(u) \Phi_x \, dx \, dt \\ &= \int_0^\infty \left[\partial_t \int_{-\infty}^{st} \eta(u) \Phi \, dx - s \eta(u_l) \Phi(st, t) + \partial_t \int_{st}^\infty \eta(u) \Phi + s \eta(u_r) \Phi(st, t) \right] dt \\ & \quad + \int_0^\infty \psi(u_l) \Phi(st, t) - \psi(u_r) \Phi(st, t) \, dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \Phi(x, 0) \, dx - (s(\eta(u_l) - \eta(u_r)) + \psi(u_l) - \psi(u_r)) \int_0^\infty \underbrace{\Phi(st, t)}_{\geq 0} \, dt \end{aligned}$$

u erfüllt also Entropiebedingung wenn der zweite Term negativ ist, was äquivalent ist zu:

$$s(\eta(u_r) - \eta(u_l)) \geq \psi(u_r) - \psi(u_l)$$

für alle Entropie-Entropiefluss-Paare.

b)

$$f(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = u \Rightarrow \psi' = f' \eta' = u \eta'$$

$$s = \frac{u_l + u_r}{2} \Rightarrow s - u_r = \frac{u_l - u_r}{2}, \quad u_l - s = \frac{u_l - u_r}{2}$$

$$\begin{aligned} s(\eta(u_r) - \eta(u_l) + \psi(u_l) - \psi(u_r)) &= \int_{u_l}^{u_r} s \eta'(u) \, du + \int_{u_r}^{u_l} \psi'(u) \, du \\ &= \int_{u_r}^s (u - s) \eta'(u) \, du + \int_s^{u_l} (u - s) \eta'(u) \, du \\ &= \int_0^{s-u_r} -u \eta'(s - u) \, du + \int_0^{u_l-s} u \eta'(s + u) \, du \\ &= \int_0^{\frac{u_l-u_r}{2}} u(\eta'(s - u) + \eta'(s + u)) \, du \geq 0 \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt weil $u > 0$ in den Integrationsgrenzen und weil η konvex ist.

- c) Schwache Lösung wissen wir aus der Vorlesung mit $s = \frac{u_l + u_r}{2}$. Setze in die Ungleichung von **a)** ein: $\eta(u) = u^2, \psi' = f'\eta' = 2u^2 \Rightarrow \psi(u) = \frac{2}{3}u^3$

$$\begin{aligned} s(u_r^2 - u_l^2) &= \frac{u_r^3 + u_l u_r^2 - u_r u_l^2 - u_l^3}{2} \geq \frac{2(u_r^3 - u_l^3)}{3} \\ 3u_r^3 + 3u_l u_r^2 - 3u_r u_l^2 - 3u_l^3 &\geq 4(u_r^3 - u_l^3) \\ -u_r^3 + 3u_l u_r^2 - 3u_r u_l^2 + u_l^3 &\geq 0 \\ (u_l - u_r)^3 &\geq 0 \iff u_l \geq u_r \end{aligned}$$

3.4. a)

$$\begin{aligned} f(u) &= \eta(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = \eta'(u) = u \\ \psi' &= f'\eta' \Rightarrow \psi' = u^2 \Rightarrow \psi = \frac{u^3}{3} \end{aligned}$$

- b) Start bei der Entropiebedingung (1.20):

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(u)\Phi_t + \psi(u)\Phi_x] dx dt \geq - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\Phi(x, 0) dx$$

mit η, ψ aus **a)**.

Analog zu den Kruzkov-notes nehmen wir:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \psi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix}$$

und als Testfunktion die Indikatorfunktion χ_K , wobei K das Trapez mit den Eckpunkten $(-R, t_1), (R, t_1), (R - M(t_2 - t_1), t_2), (-R + M(t_2 - t_1), t_2)$ ist.

$$\Gamma_L = \{(x, t) | t_1 < t < t_2, |x| = R - M(t - t_1)\}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} \cdot \nabla_{x,t} \chi_K = - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} \chi_K = \int_K \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} = - \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_K \\ &= - \left[\int_{|x| \leq R - M(t_2 - t_1)} \frac{u^2(x, t_2)}{2} dx - \int_{|x| \leq R} \frac{u^2(x, t_1)}{2} dx + \int_{\Gamma_L} \frac{u^3}{3} \frac{x}{|x|} + M \frac{u^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Weil $u \in L^\infty$ wählen wir

$$M := \sup \frac{2\|u\|_\infty}{3}$$

und so wird das Integral über Γ_L sicher positiv. Mit $R \rightarrow \infty$ und $t_1 \rightarrow 0$ folgt dann die Behauptung.

Haben angenommen, dass die rechte Seite der Entropiebedingung immer 0 ist. Das ergibt sich aus der speziellen Wahl unserer Testfunktionen, die sind für $t_1 > 0$ immer 0 in $t = 0$. und mit richtiger Reihenfolge der Grenzwertbildung sollte das passen.

3.5. 1. Gilt eh für alle schwachen Lösungen.

2.

$$\begin{aligned}\Phi(u) = |u| + u &\Rightarrow \Phi'(u) = \operatorname{sgn}(u) + 1 \\ \Psi' = \Phi' f' &= f'(\operatorname{sgn}(u) + 1) \Rightarrow \Psi = f(u)(\operatorname{sgn}(u) + 1)\end{aligned}$$

3.