10.1. Wir werden folgende Eigenschaft des Frobenius-Produkts brauchen (wir verwenden hier die Einstein'sche Summenkonvention):

$$A : (BC) = A_{ij}(BC)_{ij} = A_{ij}B_{ik}C_{kj} = A_{ij}B^\top_{ki}C_{kj} = B^\top_{ki}A_{ij}C_{kj} = (B^\top A)_{kj}C_{kj} = (B^\top A) : C$$

Außerdem gilt $A : B = B : A = A^\top : B^\top$ und aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{\partial W(C)}{\partial C}$ symmetrisch ist.

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(F+\Delta) &= W((F+\Delta)^\top(F+\Delta)) = W(F^\top F + F^\top\Delta + F\Delta^\top + \Delta^T\Delta) \\
&= W(F^\top F) + \frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : (F^\top\Delta + \Delta^\top F + \Delta^T\Delta) + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2) \\
&= W(F^\top F) + F\frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : \Delta + \frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : (\Delta^T F) + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2) \\
&= W(F^\top F) + 2F\frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : \Delta + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \widehat{W}(F)}{\partial F} = 2F\frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C}$$

10.2.

10.3. Man wähle die zwei folgenden Matrizen mit positiver Determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Konvexkombination $(1-t)A + tB$ hat für $t = \frac{1}{2}$ Determinante gleich 0. Die Aussage lässt sich für alle $d \geq 2$ verallgemeinern, indem man die ersten zwei Diagonaleinträge wie oben wählt und die restliche Diagonale mit Einsern füllt.

10.4. **a)**

b)

10.5.

10.6. Zuerst mit der Definition von ε, τ symmetrisch und $A : B = A^\top : B^\top$

$$\tau : \varepsilon(v) = \tau : \frac{1}{2}((\nabla v)^\top + \nabla v) = \tau : \nabla v$$

Wir wenden partielle Integration auf jede Zeile von τ an ($\tau_{i,\cdot}$ bezeichnet die i-te Zeile von τ):

$$\int_\Omega v_i \operatorname{div} \tau_{i,\cdot} \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla v_i \cdot \tau_{i,\cdot} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v_i(\tau_{i,\cdot} \cdot n) \,\mathrm{d}s_x$$

Nun wird das für jede Zeile gemacht, die Zeilen addiert und man erhält die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tau : \varepsilon(v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \tau : \nabla v\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \tau_{i,\cdot}\cdot\nabla v_i\,\mathrm{d}x\\ &= -\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega v_i\cdot\operatorname{div}\tau_{i,\cdot}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v_i(\tau_{i,\cdot}\cdot n)\,\mathrm{d}s_x\\ &= -\int_\Omega v\cdot\operatorname{div}\tau\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\cdot(\tau\cdot n)\,\mathrm{d}s_x\end{aligned}$$