3.1. Die schwache Formulierung lautet:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty -f(u)\Phi_x - u\Phi_t \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} u_0\Phi_0\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty g(u)\Phi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

Sei nun u eine klassische Lösung mit Schock in $\psi(t)$.
Wobei wie gewohnt $u_l(t) = \lim_{x\nearrow\psi(t)} u(x,t)$, $u_r(t) = \lim_{x\searrow\psi(t)} u(x,t)$.
Führt man die Herleitung der RH-Bedingung wie im Skript durch, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty g(u)\Phi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty f(u)_x\Phi + u_t\Phi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &\quad+[\psi'(t)(u_l(t)-u_r(t)) - f(u_l(t)+f(u_r(t))]\int_0^\infty \Phi(\psi(t),t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Damit sich alles auf 0 ergibt, muss also wieder gelten:

$$\psi'(t) = \frac{f(u_l(t)) - f(u_r(t))}{u_l(t)-u_r(t)}$$

3.2.

3.3. **a)** Damit u eine Entropielösung ist, muss sie zunächst eine schwache Lösung sein, also die RH-Bedingung erfüllen. Zusätzlich:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} \eta(u)\Phi_t + \psi(u)\Phi_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \left[\partial_t\int_{-\infty}^{st}\eta(u)\Psi\,\mathrm{d}x - s\eta(u_l)\Phi(st,t) + \partial_t\int_{st}^\infty \eta(u)\Phi + s\eta(u_r)\Phi(st,t)\right]\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_0^\infty \psi(u_l)\Phi(st,t) - \psi(u_r)\Phi(st,t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{\mathbb{R}}\eta(u_0)\Phi(x,0)\,\mathrm{d}x - \big(s(\eta(u_l)-\eta(u_r)) + \psi(u_l)-\psi(u_r)\big)\int_0^\infty \underbrace{\Phi(st,t)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

u erfüllt also Entropiebedingung wenn der zweite Term negativ ist, was äquivalent ist zu:

$$s(\eta(u_r)-\eta(u_l)) \geq \psi(u_r)-\psi(u_l)$$

für alle Entropie-Entropiefluss-Paare.

b)

$$f(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = u \Rightarrow \psi' = f'\eta' = u\eta'$$

$$s = \frac{u_l+u_r}{2} \Rightarrow s-u_r = \frac{u_l-u_r}{2},\; u_l - s = \frac{u_l-u_r}{2}$$

$$
\begin{aligned}
s(\eta(u_r) - \eta(u_l) + \psi(u_l) - \psi(u_r)) &= \int_{u_l}^{u_r} s\eta'(u)\,\mathrm{d}u + \int_{u_r}^{u_l} \psi'(u)\,\mathrm{d}u \\
= \int_{u_r}^{s} (u-s)\eta'(u)\,\mathrm{d}u + \int_{s}^{u_l} (u-s)\eta'(u)\,\mathrm{d}u \\
= \int_0^{s-u_r} -u\eta'(s-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{u_l - s} u\eta'(s+u)\,\mathrm{d}u \\
= \int_0^{\frac{u_l-u_r}{2}} u(\eta'(s-u) + \eta'(s+u))\,\mathrm{d}u \geq 0
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt folgt weil $u > 0$ in den Integrationsgrenzen und weil η konvex ist.

c) Schwache Lösung wissen wir aus der Vorlesung mit $s = \frac{u_l+u_r}{2}$. Setze in die Ungleichung von **a)** ein: $\eta(u) = u^2, \psi' = f'\eta' = 2u^2 \Rightarrow \psi(u) = \frac{2}{3}u^3$

$$
\begin{aligned}
s(u_r^2 - u_l^2) = \frac{u_r^3 + u_l u_r^2 - u_r u_l^2 - u_l^3}{2} &\geq \frac{2(u_r^3 - u_l^3)}{3} \\
3u_r^3 + 3u_l u_r^2 - 3u_r u_l^2 - 3u_l^3 &\geq 4(u_r^3 - u_l^3) \\
-u_r^3 + 3u_l u_r^2 - 3u_r u_l^2 + u_l^3 &\geq 0 \\
(u_l - u_r)^3 \geq 0 &\iff u_l \geq u_r
\end{aligned}
$$

3.4. **a)**

$$
f(u) = \eta(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = \eta'(u) = u
$$

$$
\psi' = f'\eta' \Rightarrow \psi' = u^2 \Rightarrow \psi = \frac{u^3}{3}
$$

b) Start bei der Entropiebedingung (1.20):

$$
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(u)\Phi_t + \psi(u)\Phi_x]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq -\int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\Phi(x,0)\,\mathrm{d}x
$$

mit η, ψ aus **a)**.

Analog zu den Kruzkov-notes nehmen wir:

$$
\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \psi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix}
$$

und als Testfunktion die Indikatorfunktion χ_K, wobei K das Trapez mit den Eckpunkten $(-R, t_1), (R, t_1), (R - M(t_2 - t_1), t_2), (-R + M(t_2 - t_1), t_2)$ ist.

$$
\Gamma_L = \{(x,t) | t_1 < t < t_2, |x| = R - M(t - t_1)\}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} \cdot \nabla_{x,t} \chi_K = -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{x,t} \cdot F \chi_K = \int_K \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} = -\int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_K \\
&= -\left[\int_{|x| \leq R - M(t_2 - t_1)} \frac{u^2(x,t_2)}{2} \,\mathrm{d}x - \int_{|x| \leq R} \frac{u^2(x,t_1)}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_L} \frac{u^3}{3} \frac{x}{|x|} + M \frac{u^2}{2} \right]
\end{aligned}
$$

Weil $u \in L^\infty$ wählen wir

$$
M := \sup \frac{2\|u\|_\infty}{3}
$$

und so wird das Integral über Γ_L sicher positiv. Mit $R \to \infty$ und $t_1 \to 0$ folgt dann die Behauptung.

Haben angenommen, dass die rechte Seite der Entropiebedingung immer 0 ist. Das ergibt sich aus der speziellen Wahl unserer Testfunktionen, die sind für $t_1 > 0$ immer 0 in $t = 0$ und mit richtiger Reihenfolge der Grenzwertbildung sollte das passen.

3.5.

1. Gilt für alle schwachen Lösungen.
2.
$$
\Phi(u) = |u| + u \Rightarrow \Phi'(u) = \operatorname{sgn}(u) + 1
$$
$$
\Psi' = \Phi' f' = f'(\operatorname{sgn}(u) + 1) \Rightarrow \Psi = f(u)(\operatorname{sgn}(u) + 1)
$$
3.