9.1. **a)**

b)

9.2. **a)**

b)

9.3.

9.4.

9.5. **a)** In jedem Punkt ist $\nabla\varphi(x)$ eine orthogonale Matrix $Q(x)$, da $\nabla\varphi(x)^{-1} = (\nabla\varphi(x))^\top$. Außerdem gilt auch $C_{\varphi^{-1}} \equiv I$, da $\nabla\varphi^{-1} = (\nabla\varphi)^{-1}$.

Aus dem Angleitner Skript S. 29:

$$\frac{\left\|\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\right\|^2}{\left\|(x+\Delta x) - x\right\|^2} = \frac{\left\|\nabla\varphi(x)\cdot\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^2)\right\|^2}{\|\Delta x\|^2}$$

$$= \frac{(\Delta x)^\top \cdot (\nabla\varphi(x))^\top \cdot (\nabla\varphi(x)) \cdot \Delta x}{\|\Delta x\|^2} + \mathcal{O}(\|\Delta x\|) \overset{C\equiv I}{=} 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Wählt man nun $x + \Delta x = y$ erhält man:

$$\frac{\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|^2}{\|y - x\|^2} = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Und das ganze für φ^{-1}:

$$\frac{\|y - x\|^2}{\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|^2} = 1 + \mathcal{O}(\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|) = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Also

$$\frac{\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|^2}{\|y - x\|^2} = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|) = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^{-1})$$

Kann man daraus schließen, dass die $\|\Delta x\|$ Terme wegfallen?

Offene Frage: Wo geht Konvexität von B ein?

b) Aus **a)** gilt $G(x, y) = 0$.

Zuerst nach y_i und dann nach x_j differenzieren führt zur gesuchten Identität:

$$G(x, y) = \sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_k(y))^2 - (x_k - y_k)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) = -2 \sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_k(y)) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y_i} + 2(x_i - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_i}G(x,y) = -2\sum_k \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y_i}\frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_j} + 2\delta_{ij} = 0$$

Also $(\nabla\varphi(y))^\top \nabla\varphi(x) = I$ auch für verschiedene Punkte $y, x \in B$.

c) Es folgt, dass in konvexen Umgebungen von $x \in \Omega$ gilt: $(\nabla\varphi(y))^\top = \nabla\varphi(x)^{-1}$ und damit $\nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(y)$. $\nabla\varphi$ ist lokal eine konstante orthogonale Matrix Q. Damit $\varphi(x) = Qx + a$.