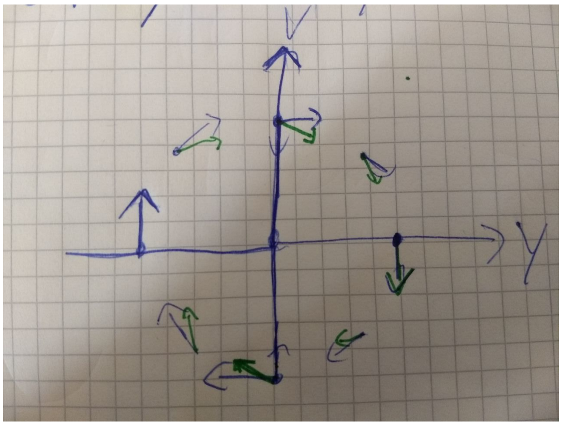

Abbildung 1: Skizze des Phasenportraits von 9.1a), blau: linearisiert, grün: nichtlinear

9.1. **a)** DGL als System:

$$\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\varepsilon v^3 - y \end{pmatrix}$$

Linearisiert ist der 0 punkt ein Zentrum. Der nichtlineare Anteil hilft zusäzlich die Lösung beschränkt zu halten. Sieht man in der Skizze vom Phasenportrait in Abb. 1.

b) Mehrskalenansatz:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(t, T), \quad \text{mit } T = \varepsilon t$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_1 y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_2 y_i$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_{11} y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_{12} y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_{21} y_i + \varepsilon^{i+2} \partial_{22} y_i$$

Die DGL für den ε^0 Term ist:

$$\partial_{11} y_0 + y_0 = 0$$

Wie in der Vorlesung schreiben wir die allgemeine Lösung dafür als:

$$y_0 = r(T) \cos(t + \varphi(T))$$

Die DGL für den ε^1 Term ist:

$$\partial_{11} y_1 + y_1 = -(\partial_1 y_0)^3 - 2\partial_{12} y_0$$

$$\partial_1 y_0 = r(T)\sin(t+\varphi(T)), \quad (\partial_1 y_0)^3 = r^3(T)\frac{3\sin(t+\varphi(T)) - \sin(3(t+\varphi(T))}{4}$$

$$\partial_{12} y_0 = r'(T)\sin(t+\varphi(T)) - r(T)\cos(t+\varphi(T))\varphi'(T)$$

Daher ist die rechte Seite der ε^1-Gleichung:

$$\left(2r'(T) + \frac{3}{4}r^3(T)\right)\sin(t+\varphi(T)) - r(T)\varphi'(T)\cos(t+\varphi(T)) - 2r^3(T)\sin(3(t+\varphi(T)))$$

Damit y_1 kein Wachstum in t hat setzen wir die Terme vor den Lösungen der homogenen Gleichung auf 0. ($\sin(t), \cos(t)$ würden die homogene Gleichung lösen; $\sin(3t)$ nicht).

$$2r'(T) + \frac{3}{4}r^3(T) = 0, \quad -r(T)\varphi'(T) = 0$$

Die erste Gleichung kann mittels Variablenseparation gelöst werden und die

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{8}T + c_1}}$$

Aus der zweiten Gleichungt folgt $\varphi'(T) = 0 \Rightarrow \varphi(T) \equiv c_2$.

Also

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1}}\cos(t + c_2)$$

Die Konstanten können aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden:

$$a = y_0(0) = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\cos(c_2) \Rightarrow (c_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(c_2)}$$

$$y_0'(t) = -\frac{3}{8}\varepsilon\left(\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1\right)^{-\frac{3}{2}}\cos(t+c_2) - \left(\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1\right)^{-\frac{1}{2}}\sin(t+c_2)$$

$$0 = y_0'(0) = -\frac{3}{8}\varepsilon\,(c_1)^{-\frac{3}{2}}\cos(c_2) - (c_1)^{-\frac{1}{2}}\sin(c_2) = -\frac{3}{8}\varepsilon\frac{a^3}{\cos^3(c_2)}\cos(c_2) - \frac{a\sin(c_2)}{\cos(c_2)}$$

$$-\frac{3}{8}\varepsilon a^2 = \sin(c_2)\cos(c_2) = \frac{1}{2}\sin(2c_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{-3}{8}\varepsilon a^2\right)$$

9.2. a)

b)

9.3.

9.4.

9.5. **a)** In jedem Punkt ist $\nabla\varphi(x)$ eine orthogonale Matrix $Q(x)$, da $\nabla\varphi(x)^{-1} = (\nabla\varphi(x))^\top$. Außerdem gilt auch $C_{\varphi^{-1}} \equiv I$, da $\nabla\varphi^{-1} = (\nabla\varphi)^{-1}$.

Aus dem Angleitner Skript S. 29:

$$\frac{\left\|\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\right\|^2}{\left\|(x+\Delta x) - x\right\|^2} = \frac{\left\|\nabla\varphi(x)\cdot\Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^2)\right\|^2}{\|\Delta x\|^2}$$

$$= \frac{(\Delta x)^\top \cdot (\nabla\varphi(x))^\top \cdot (\nabla\varphi(x)) \cdot \Delta x}{\|\Delta x\|^2} + \mathcal{O}(\|\Delta x\|) \overset{C=I}{=} 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Wählt man nun $x + \Delta x = y$ erhält man:

$$\frac{\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|^2}{\|y-x\|^2} = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Und das ganze für φ^{-1}:

$$\frac{\|y-x\|^2}{\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|^2} = 1 + \mathcal{O}(\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|) = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|)$$

Also

$$\frac{\left\|\varphi(y) - \varphi(x)\right\|^2}{\|y-x\|^2} = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|) = 1 + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^{-1})$$

Kann man daraus schließen, dass die $\|\Delta x\|$ Terme wegfallen?

Offene Frage: Wo geht Konvexität von B ein?

b) Aus **a)** gilt $G(x,y) = 0$.

Zuerst nach y_i und dann nach x_j differenzieren führt zur gesuchten Identität:

$$G(x,y) = \sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_k(y))^2 - (x_k - y_k)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G(x,y) = -2\sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_k(y)) \frac{\partial\varphi_k(y)}{\partial y_i} + 2(x_i - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_i} G(x,y) = -2\sum_k \frac{\partial\varphi_k(y)}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_j} + 2\delta_{ij} = 0$$

Also $(\nabla\varphi(y))^\top \nabla\varphi(x) = I$ auch für verschiedene Punkte $y, x \in B$.

c) Es folgt, dass in konvexen Umgebungen von $x \in \Omega$ gilt: $(\nabla\varphi(y))^\top = \nabla\varphi(x)^{-1}$ und damit $\nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(y)$. $\nabla\varphi$ ist lokal eine konstante orthogonale Matrix Q. Damit $\varphi(x) = Qx + a$.