6.1. **a)** Dass $\operatorname{div} v = 0$ erfüllt ist, folgt aus der Annahme der Gestalt von v. Weiters gilt

$$(v \cdot \nabla)v = \begin{pmatrix} v_1\partial_1 v_1 + v_2\partial_2 v_1 + v_3\partial_3 v_1 \\ v_1\partial_1 v_2 + v_2\partial_2 v_2 + v_3\partial_3 v_2 \\ v_1\partial_1 v_3 + v_2\partial_2 v_3 + v_3\partial_3 v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{22} v_1 = \partial_2 \left(v_1' \frac{x_2}{r} \right) = v_1'' \frac{x_2^2}{r^2} + v_1' \left(\frac{1}{r} - \frac{x_2^2}{r^3} \right) \Rightarrow \Delta v_1 = v_1'' + v_1' \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) = v_1'' + \frac{1}{r} v_1'$$

Also

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \partial_1 p \\ \partial_2 p \\ \partial_3 p \end{pmatrix} = \eta \Delta v = \begin{pmatrix} \eta(v_1'' + \frac{1}{r}v_1') \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher $p = p(x_1)$ und die linke Seite hängt nur von x_1 ab, während die rechte Seite nur von x_2 und x_3 abhängt. Also müssen beide Seiten konstant sein.

$$p' = c \Rightarrow p = cx_1 + d$$

$$p_1 = p(0) = d, \quad p_2 = p(L) = cL + p_1 \Rightarrow c = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

Mit Ansatz $v_1 = ar^2 + b$ gilt

$$\frac{c}{\eta} = v_1'' + \frac{1}{r} v_1' = 2a + 2a = 4a \Rightarrow a = \frac{c}{4\eta} = \frac{p_2 - p_1}{4\eta L}$$

Weiters gilt:

$$0 = v(R) \Rightarrow 0 = v_1(R) = aR^2 + b \Rightarrow b = -aR^2$$

$$v_1(r) = a(r^2 - R^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

b)

$$\int_\Omega v_1 \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^R v_1(r) r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^R = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L} \frac{R^4}{4}$$

6.2. **a)**

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3\phi - \partial_3\partial_2\phi \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = 0$$

b)

$$0 = \nabla \cdot v = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi$$

c) Wir starten bei der Impulserhaltung:

$$\partial_t(\rho v) + v\,\mathrm{div}(\rho v) + \rho(v\cdot\nabla)v + \nabla p = \rho f$$
$$\Rightarrow \nabla p = -\partial_t(\rho v) - v\,\mathrm{div}(\rho v) - \rho(v\cdot\nabla)v$$
$$\nabla p = -\partial_t\rho v - \rho\partial_t v - v\,\mathrm{div}(\rho v) - \rho(v\cdot\nabla)v$$

Aus der Massenerhaltung $\rho_t + \mathrm{div}(\rho v) = 0$ folgt:

$$\nabla p = -\rho\partial_t v - \rho(v\cdot\nabla)v$$
$$\Rightarrow \int_C \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot \mathrm{d}s = \int_C -\partial_t v - (v\cdot\nabla)v\cdot\mathrm{d}s = \int_C -\partial_t\nabla\varphi - (\nabla\varphi\cdot\nabla)\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}s$$
$$= \int_C -\partial_t\nabla\varphi - \nabla\left(\frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2\right)\cdot\mathrm{d}s = \left[-\partial_t\varphi - \frac{1}{2}\|v\|^2\right]_{x_0}^{x_1}$$

d) Inkompressible Navier-Stokes Gleichungen für homogenes Fluid:

$$\rho[v_t + (v\cdot\nabla)v] + \nabla p = \Delta v + \rho f$$
$$\mathrm{div}\,v = 0$$

Annahmen: stationär, $f = 0$ und Potentialströmung

$$\Delta v_i = \Delta\partial_i\varphi = \partial_i\Delta\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \nabla p = -\rho(v\cdot\nabla)v$$
$$\Rightarrow p = -\rho\frac{1}{2}\|v\|^2 + c$$

6.3. Transformation der NS-Gleichungen auf Zylinderkoordinaten:

$$(u1, u2, u3) = u_r(\cos\theta, \sin\theta, 0) + u_\theta(-sin\theta, cos\theta, 0) + u_z(0,0,1)$$
$$\rho\left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right]$$
$$\rho\left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r}\right) = \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left(\Delta u_0 + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_0}{r^2}\right)$$
$$\rho\frac{Du_z}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\Delta u_z$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$
$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$