**3.1.** Die schwache Formulierung lautet:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty -f(u)\Phi_x - u\Phi_t \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} u_0\Phi_0 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty g(u)\Phi \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

Sei nun $u$ eine klassische Lösung mit Schock in $\psi(t)$.
Wobei wie gewohnt $u_l(t) = \lim_{x\nearrow\psi(t)} u(x,t)$, $u_r(t) = \lim_{x\searrow\psi(t)} u(x,t)$.
Führt man die Herleitung der RH-Bedingung wie im Skript durch, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty g(u)\Phi \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = &\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty f(u)_x\Phi + u_t\Phi \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &+[\psi'(t)(u_l(t) - u_r(t)) - f(u_l(t) + f(u_r(t))] \int_0^\infty \Phi(\psi(t),t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Damit sich alles auf 0 ergibt, muss also wieder gelten:

$$\psi'(t) = \frac{f(u_l(t)) - f(u_r(t))}{u_l(t) - u_r(t)}$$

**3.2.** **a)**

- $$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi * \rho_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \geq 0$$
- Glattheit wird vom Mollifier vererbt, wenn $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ Ableitung ins Faltungsintegral reinziehen und abschätzen.
- Sei $g \in L^\infty$ beliebig:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} (\varphi - \varphi * \rho_\varepsilon) g \,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - \varphi(x-y))\rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y\; g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - \varphi(x-y))g(x)\,\mathrm{d}x\; \rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left\|\varphi - \tau_y\varphi\right\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}\, \rho_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \sup_{|y|\leq\varepsilon} \left\|\varphi - \tau_y\varphi\right\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq \delta\|g\|_{L^\infty} \quad \text{für } \delta(\varepsilon)\end{aligned}$$

Daher ist $g \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi - \varphi * \rho_\varepsilon g \,\mathrm{d}x$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^\infty$ mit Norm $\leq \delta$. Aus dem Darstellungssatz von Ritz folgt, dass $(\varphi - \varphi * \rho_\varepsilon) \in L^1$ und da laut Vorraussetzungen $\varphi \in Ł^1$ folgt auch, dass $\varphi * \rho_\varepsilon \in Ł^1$.

$$\Rightarrow \|\varphi - \varphi * \rho_\varepsilon\|_{L^1} \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$

**b)** Schreibe $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$.

$$\Lambda^+_{(\eta,\psi)}(\varphi^+_\varepsilon) = \int u(\varphi^+_\epsilon)_t + f(u)(\varphi^+_\varepsilon)_x + \int u_0\varphi^+_\epsilon(\cdot,0) \geq 0$$

$$\Lambda^-_{(\eta,\psi)}(\varphi^+_\varepsilon) = \int -u(\varphi^+_\epsilon)_t + -f(u)(\varphi^+_\varepsilon)_x + \int -u_0\varphi^+_\epsilon(\cdot,0) = -\Lambda^+(\varphi^+\varepsilon) \geq 0$$

$$\Rightarrow \Lambda^+ = \Lambda^- = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \Lambda^+(\varphi^+_\varepsilon - \varphi^-_\epsilon) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(\varphi_\varepsilon)_t + f(u)(\varphi_\epsilon)_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi_\epsilon \,\mathrm{d}x$$

Wenn $\varphi_\varepsilon$ glatt genug ist gilt: $\varphi'_\varepsilon = \varphi * \rho'_\epsilon = \varphi' * \rho_\epsilon$

Also mit $\varepsilon \to 0$ is gezeigt, dass $\varphi$ eine schwache Lösung ist.

**3.3.** **a)** Damit $u$ eine Entropielösung ist, muss sie zunächst eine schwache Lösung sein, also die RH-Bedingung erfüllen. Zusätzlich:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \eta(u)\Phi_t + \psi(u)\Phi_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left[\partial_t \int_{-\infty}^{st} \eta(u)\Psi \,\mathrm{d}x - s\eta(u_l)\Phi(st,t) + \partial_t \int_{st}^\infty \eta(u)\Phi + s\eta(u_r)\Phi(st,t)\right] \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\infty \psi(u_l)\Phi(st,t) - \psi(u_r)\Phi(st,t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \eta(u_0)\Phi(x,0)\,\mathrm{d}x - \big(s(\eta(u_l) - \eta(u_r)) + \psi(u_l) - \psi(u_r)\big) \int_0^\infty \underbrace{\Phi(st,t)}_{\geq 0} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$u$ erfüllt also Entropiebedingung wenn der zweite Term negativ ist, was äquivalent ist zu:

$$s(\eta(u_r) - \eta(u_l)) \geq \psi(u_r) - \psi(u_l)$$

für alle Entropie-Entropiefluss-Paare.

**b)**

$$f(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = u \Rightarrow \psi' = f'\eta' = u\eta'$$

$$s = \frac{u_l + u_r}{2} \Rightarrow s - u_r = \frac{u_l - u_r}{2},\ u_l - s = \frac{u_l - u_r}{2}$$

$$
\begin{aligned}
s(\eta(u_r) - \eta(u_l) + \psi(u_l) - \psi(u_r)) &= \int_{u_l}^{u_r} s\eta'(u)\,\mathrm{d}u + \int_{u_r}^{u_l} \psi'(u)\,\mathrm{d}u \\
= \int_{u_r}^{s} (u-s)\eta'(u)\,\mathrm{d}u + \int_{s}^{u_l} (u-s)\eta'(u)\,\mathrm{d}u \\
= \int_0^{s-u_r} -u\eta'(s-u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{u_l-s} u\eta'(s+u)\,\mathrm{d}u \\
= \int_0^{\frac{u_l-u_r}{2}} u(\eta'(s-u) + \eta'(s+u))\,\mathrm{d}u \geq 0
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt folgt weil $u > 0$ in den Integrationsgrenzen und weil $\eta$ konvex ist.

**c)** Schwache Lösung wissen wir aus der Vorlesung mit $s = \frac{u_l+u_r}{2}$. Setze in die Ungleichung von **a)** ein: $\eta(u) = u^2, \psi' = f'\eta' = 2u^2 \Rightarrow \psi(u) = \frac{2}{3}u^3$

$$
\begin{aligned}
s(u_r^2 - u_l^2) = \frac{u_r^3 + u_l u_r^2 - u_r u_l^2 - u_l^3}{2} &\geq \frac{2(u_r^3 - u_l^3)}{3} \\
3u_r^3 + 3u_l u_r^2 - 3u_r u_l^2 - 3u_l^3 &\geq 4(u_r^3 - u_l^3) \\
-u_r^3 + 3u_l u_r^2 - 3u_r u_l^2 + u_l^3 &\geq 0 \\
(u_l - u_r)^3 \geq 0 &\iff u_l \geq u_r
\end{aligned}
$$

**3.4. a)**

$$f(u) = \eta(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = \eta'(u) = u$$

$$\psi' = f'\eta' \Rightarrow \psi' = u^2 \Rightarrow \psi = \frac{u^3}{3}$$

**b)** Start bei der Entropiebedingung (1.20):

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(u)\Phi_t + \psi(u)\Phi_x]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq -\int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\Phi(x,0)\,\mathrm{d}x$$

mit $\eta, \psi$ aus **a)**.

Analog zu den Kruzkov-notes nehmen wir:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \psi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix}$$

und als Testfunktion die Indikatorfunktion $\chi_K$, wobei $K$ das Trapez mit den Eckpunkten $(-R, t_1), (R, t_1), (R - M(t_2 - t_1), t_2), (-R + M(t_2 - t_1), t_2)$ ist.

$$\Gamma_L = \{(x,t) | t_1 < t < t_2, |x| = R - M(t - t_1)\}$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} \cdot \nabla_{x,t} \chi_K = -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{x,t} \cdot F \chi_K = \int_K \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} = -\int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_K \\
&= -\left[ \int_{|x| \leq R - M(t_2 - t_1)} \frac{u^2(x,t_2)}{2} \,\mathrm{d}x - \int_{|x| \leq R} \frac{u^2(x,t_1)}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_L} \frac{u^3}{3} \frac{x}{|x|} + M \frac{u^2}{2} \right]
\end{aligned}
$$

Weil $u \in L^\infty$ wählen wir

$$M := \sup \frac{2\|u\|_\infty}{3}$$

und so wird das Integral über $\Gamma_L$ sicher positiv. Mit $R \to \infty$ und $t_1 \to 0$ folgt dann die Behauptung.

Haben angenommen, dass die rechte Seite der Entropiebedingung immer 0 ist. Das ergibt sich aus der speziellen Wahl unserer Testfunktionen, die sind für $t_1 > 0$ immer 0 in $t = 0$ und mit richtiger Reihenfolge der Grenzwertbildung sollte das passen.

**3.5.**

1. Gilt für alle schwachen Lösungen.
2. $$\Phi(u) = |u| + u \Rightarrow \Phi'(u) = \operatorname{sgn}(u) + 1$$
   $$\Psi' = \Phi' f' = f'(\operatorname{sgn}(u) + 1) \Rightarrow \Psi = f(u)(\operatorname{sgn}(u) + 1)$$
3. 