3.1. Die schwache Formulierung lautet:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty -f(u)\Phi_x - u\Phi_t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} u_0 \Phi_0 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty g(u)\Phi \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x$$

3.2.

3.3. **a)** Der Beweis sollte wieder so funktionieren wie die RH-Bedingung.

b) Bsp. 1.11 durchführen mit η, ψ allgemein?

c)

3.4. **a)**

$$f(u) = \eta(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = \eta'(u) = u$$

$$\psi' = f'\eta' \Rightarrow \psi' = u^2 \Rightarrow \psi = \frac{u^3}{3}$$

b) Start bei der Entropiebedingung (1.20):

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(u)\Phi_t + \psi(u)\Phi_x] \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \geq - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\Phi(x,0) \,\mathrm{d}x$$

mit η, ψ aus **a)**.

Analog zu den Kruzkov-notes nehmen wir:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \psi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix}$$

und als Testfunktion die Indikatorfunktion χ_K, wobei K das Trapez mit den Eckpunkten $(-R, t_1), (R, t_1), (R - M(t_2 - t_1), t_2), (-R + M(t_2 - t_1), t_2)$ ist.

$$\Gamma_L = \{(x,t) | t_1 < t < t_2, |x| = R - M(t - t_1)\}$$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} \cdot \nabla_{x,t}\chi_K = - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{x,t} \cdot F\chi_K = \int_K \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} = - \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_K$$
$$= - \left[\int_{|x| \leq R - M(t_2 - t_1)} \frac{u^2(x,t_2)}{2} \,\mathrm{d}x - \int_{|x| \leq R} \frac{u^2(x,t_1)}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_L} \frac{u^3}{3}\frac{x}{|x|} + M\frac{u^2}{2} \right]$$

Weil $u \in L^\infty$ wählen wir

$$M := \sup \frac{2\|u\|_\infty}{3}$$

und so wird das Integral über Γ_L sicher positiv. Mit $R \to \infty$ und $t_1 \to 0$ folgt dann die Behauptung.

Haben angenommen, das die rechte Seite der Entropiebedingung immer 0 ist. Das ergibt sich aus der speziellen Wahl unserer Testfunktionen, die sind für $t_1 > 0$ immer 0 in $t = 0$. und mit richtiger Reihenfolge der Grenzwertbildung sollte das passen.

3.5. 1.

2.

3.