



Abbildung 1: Skizze des Phasenportraits von 9.1a), blau: linearisiert, grün: nichtlinear

9.1. a) DGL als System:

$$\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\varepsilon v^3 - y \end{pmatrix}$$

Linearisiert ist der 0 punkt ein Zentrum. Der nichtlineare Anteil hilft zusätzlich die Lösung beschränkt zu halten. Sieht man in der Skizze vom Phasenportrait in Abb. 1.

b) Mehrskalensatz:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(t, T), \quad \text{mit } T = \varepsilon t$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_1 y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_2 y_i$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \partial_{11} y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_{12} y_i + \varepsilon^{i+1} \partial_{21} y_i + \varepsilon^{i+2} \partial_{22} y_i$$

Die DGL für den ε^0 Term ist:

$$\partial_{11} y_0 + y_0 = 0$$

Wie in der Vorlesung schreiben wir die allgemeine Lösung dafür als:

$$y_0 = r(T) \cos(t + \varphi(T))$$

Die DGL für den ε^1 Term ist:

$$\partial_{11} y_1 + y_1 = -(\partial_1 y_0)^3 - 2\partial_{12} y_0$$

$$\begin{aligned}\partial_1 y_0 &= -r(T) \sin(t+\varphi(T)), \quad (\partial_1 y_0)^3 = -r^3(T) \frac{3 \sin(t+\varphi(T)) - \sin(3(t+\varphi(T)))}{4} \\ \partial_{12} y_0 &= -r'(T) \sin(t+\varphi(T)) - r(T) \cos(t+\varphi(T)) \varphi'(T)\end{aligned}$$

Daher ist die rechte Seite der ε^1 -Gleichung:

$$\left(2r'(T) + \frac{3}{4}r^3(T)\right) \sin(t+\varphi(T)) + 2r(T)\varphi'(T) \cos(t+\varphi(T)) - \frac{1}{4}r^3(T) \sin(3(t+\varphi(T)))$$

Damit y_1 kein Wachstum in t hat setzen wir die Terme vor den Lösungen der homogenen Gleichung auf 0. ($\sin(t), \cos(t)$ würden die homogene Gleichung lösen; $\sin(3t)$ nicht).

$$2r'(T) + \frac{3}{4}r^3(T) = 0, \quad 2r(T)\varphi'(T) = 0$$

Die erste Gleichung kann mittels Variablenseparation gelöst werden und die

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{8}T + c_1}}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\varphi'(T) = 0 \Rightarrow \varphi(T) \equiv c_2$.

Also

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1}} \cos(t + c_2)$$

Die Konstanten können aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden:

$$\begin{aligned}a = y_0(0) &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cos(c_2) \Rightarrow (c_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(c_2)} \\ y_0'(t) &= -\frac{3}{8}\varepsilon \left(\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1\right)^{-\frac{3}{2}} \cos(t + c_2) - \left(\frac{6}{8}\varepsilon t + c_1\right)^{-\frac{1}{2}} \sin(t + c_2) \\ 0 = y_0'(0) &= -\frac{3}{8}\varepsilon (c_1)^{-\frac{3}{2}} \cos(c_2) - (c_1)^{-\frac{1}{2}} \sin(c_2) = -\frac{3}{8}\varepsilon \frac{a^3}{\cos^3(c_2)} \cos(c_2) - \frac{a \sin(c_2)}{\cos(c_2)} \\ -\frac{3}{8}\varepsilon a^2 &= \sin(c_2) \cos(c_2) = \frac{1}{2} \sin(2c_2) \\ c_2 &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{-3}{8}\varepsilon a^2\right)\end{aligned}$$

9.2. a) Für die Energie multipliziert man die Gleichung mit y' und integriert:

$$\frac{(y')^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \varepsilon \frac{y^4}{4} = E$$

System:

$$\begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\varepsilon y^3 - y \end{pmatrix}$$

Das Phasenportrait sieht ähnlich aus wie das Phasenportrait in **9.1a**). Nur der nichtlineare Anteil wird durch y verstärkt anstatt durch v .

Auf jedem Orbit ist die Energie konstant, also auch im dem Punkt wo $y(t) = a$ und $y'(t) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \frac{a^2}{2} + \varepsilon \frac{a^4}{4} \\ \Rightarrow y'(t) &= \sqrt{-y^2 - \varepsilon \frac{y^4}{2} + a^2 + \varepsilon \frac{a^4}{2}} \\ \Rightarrow t'(y) &= \frac{1}{\sqrt{-y^2 - \varepsilon \frac{y^4}{2} + a^2 + \varepsilon \frac{a^4}{2}}} \end{aligned}$$

Integral der Zeitableitung entlang eines Orbits ergibt die Periodendauer und t' ist gerade:

$$T(\varepsilon, a) = \int_a^0 t'(y) dy + \int_0^{-a} t'(y) dy + \int_{-a}^0 t'(y) dy + \int_0^a t'(y) dy = 4 \int_0^a t'(y) dy$$

Als nächstes kommt die Taylor-Entwicklung von $T(\varepsilon, a)$ in ε um 0:

$$\partial_\varepsilon t'(y) = -\frac{1}{2} \left(-y^2 - \varepsilon \frac{y^4}{2} + a^2 + \varepsilon \frac{a^4}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{y^4}{2} + \frac{a^4}{2} \right)$$

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon} t'(y) = \frac{3}{4} \left(-y^2 - \varepsilon \frac{y^4}{2} + a^2 + \varepsilon \frac{a^4}{2} \right)^{-\frac{5}{2}} \left(-\frac{y^4}{2} + \frac{a^4}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} T(\varepsilon, a) &= 4 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \varepsilon \frac{1}{2} (a^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{y^4}{2} - \frac{a^4}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) dy \\ &= 4 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \varepsilon \frac{1}{4} (a^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} (y^2 + a^2)(y^2 - a^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) dy \\ &= 4 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \varepsilon \frac{-1}{4} \sqrt{\frac{(a^2 + y^2)^2}{a^2 - y^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= 2\pi - \varepsilon \frac{3\pi a^2}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

b) Einsetzen der Reihenentwicklung von \sin führt zu:

$$y'' + y - \frac{1}{6}y^3 = 0$$

Das ist genau die Gleichung von a) mit $\varepsilon = -\frac{1}{6}$.

$$\Rightarrow T(a) = 2\pi + \frac{1}{8}\pi a^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Und mit Taylor für $\frac{1}{x}$ erhält man:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \approx 1 - \frac{1}{16}a^2$$

9.3.

$$\tilde{y}(\tau) = \tilde{y}\left(\frac{t}{\omega}\right) = y(t)$$

$$\frac{1}{\omega^2}\tilde{y}'' = y''$$

In die DGL einsetzen und mit ω^2 multiplizieren.

$$\tilde{y}'' + \omega^2\tilde{y} + \varepsilon\tilde{y}^3 = 0$$

Jetzt führen wir die Entwicklungen durch wie in der Aufgabenstellung gegeben. 1 als erster Term für die Entwicklung von Omega macht Sinn, da die Gleichung für $\varepsilon = 0$ eine Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega = 1$ ist.

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' + (1 + 2\varepsilon\omega_1)(y_0 + \varepsilon y_1) + \varepsilon(1 + 2\varepsilon\omega_1)y_0^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

$$\varepsilon^0 : y_0'' + y_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 : y_1'' + y_1 + 2\omega_1 y_0 + y_0^3 = 0$$

Aus der ε^0 Gleichung folgt mit den Anfangswerten:

$$y_0 = a \cos(t)$$

Aus der ε^1 Gleichung folgt mit der Identität $\cos^3(\theta) = \frac{3\cos(\theta) + \cos(3\theta)}{4}$:

$$y_1'' + y_1 = -2\omega_1 a \cos(t) - a^3 \frac{3\cos(t) + \cos(3t)}{4}$$

Aus **9.2a)** wissen wir das die Lösungen Orbits und somit beschränkt sind. Deshalb macht es Sinn die Resonanzterme zu unterdrücken so wie in **9.1a)**.

$$-2\omega_1 a - \frac{3}{4}a^3 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = -\frac{3}{8}a^2$$

9.4.

$$\tilde{y}'' + \varepsilon(\tilde{y}^2 - 1)\omega\tilde{y}' + \tilde{y} = 0$$

$$(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'') + \varepsilon(y_0^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 - 1)(1 + \varepsilon\omega_1)(y_0' + \varepsilon y_1') + (1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_1^2 + 2\varepsilon^2\omega_2)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\varepsilon^0 : y_0'' + y_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 : y_1'' + (y_0^2 - 1)y_0' + y_1 + 2\omega_1 y_0 = 0$$

$$\varepsilon^2 : y_2'' + (y_0^2 - 1)y_1' + y_0'(y_0^2\omega_1 - \omega_1 + 2y_0 y_1) + y_2 + 2\omega_1 y_1 + \omega_1^2 y_0 + 2\omega_2 y_0 = 0$$

Aus ε^0 folgt: $y_0 = a \cos(\tau)$.

$$2 \sin \theta \cos \psi = \sin(\theta + \psi) + \sin(\theta - \psi)$$

Die Inhomogenität für ε^1 ist:

$$\begin{aligned} & -(a^2 \cos(\tau)^2 - 1)(-a \sin(\tau)) - 2\omega_1 a \cos(\tau) \\ &= \frac{a^3}{4} \sin(\tau) + \frac{a^3}{4} \sin(3\tau) - a \sin(\tau) - 2\omega_1 a \cos(\tau) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \omega_1 = 0$ und $a = 0$ oder $a^2 = 4$.

Also ist die ε^1 Gleichung:

$$y_1'' + y_1 = \frac{a^3}{4} \sin(3\tau)$$

Ansatz dafür $y_p = C \sin(3\tau)$

$$-9C \sin(3\tau) + C \sin(3\tau) = \pm 2 \sin(3\tau) \Rightarrow C = \mp \frac{1}{4}$$

$$y_1 = A \sin(\tau) + B \sin(\tau) \mp \frac{1}{4} \sin(3\tau)$$

$$0 = y_1(0) \Rightarrow B = 0$$

$$0 = y_1'(0) \Rightarrow -A \pm \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow A = \pm \frac{3}{4}$$

$$y_1 = \pm \frac{3}{4} \sin(\tau) \mp \frac{1}{4} \sin(3\tau)$$

Inhomogenität der ε^2 Gleichung:

$$(1 - 4 \cos^2(\tau)) \left(\pm \frac{3}{4} \cos(\tau) \mp \frac{3}{4} \cos(3\tau) \right) + 8 \sin(\tau) \cos(\tau) \left(\pm \frac{3}{4} \sin(\tau) \mp \frac{1}{4} \sin(3\tau) \right) \mp 4\omega_2 \cos(\tau)$$

$$= \frac{1}{4} (\mp 16\omega_2 \cos(\tau) \pm \cos(\tau) \mp 6 \cos(3\tau) \pm 5 \cos(5\tau))$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{16}$$

- 9.5. a)** In jedem Punkt ist $\nabla\varphi(x)$ eine orthogonale Matrix $Q(x)$, da $\nabla\varphi(x)^{-1} = (\nabla\varphi(x))^{\top}$. Außerdem gilt auch $C_{\varphi^{-1}} \equiv I$, da $\nabla\varphi^{-1} = (\nabla\varphi)^{-1}$.

Taylor-Restglied:

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \int_0^1 \nabla\varphi((1-t)y + tx) \cdot (x - y) dt$$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2 \leq \max_{w \in B} \|\nabla\varphi(w)\| \|x - y\|_2$$

und $\|\nabla\varphi\| = 1$, weil $\nabla\phi$ in jedem Punkt eine orthogonale Matrix ist. Das gleiche Argument gilt für $\nabla\phi^{-1}$ und somit gilt die Aussage.

- b)** Aus **a)** gilt $G(x, y) = 0$.

Zuerst nach y_i und dann nach x_j differenzieren führt zur gesuchten Identität:

$$G(x, y) = \sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_k(y))^2 - (x_k - y_k)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) = -2 \sum_k (\varphi_k(x) - \varphi_k(y)) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y_i} + 2(x_i - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) = -2 \sum_k \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_j} + 2\delta_{ij} = 0$$

Also $(\nabla\varphi(y))^{\top} \nabla\varphi(x) = I$ auch für verschiedene Punkte $y, x \in B$.

- c)** Es folgt, dass in konvexen Umgebungen von $x \in \Omega$ gilt: $(\nabla\varphi(y))^{\top} = \nabla\varphi(x)^{-1}$ und damit $\nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(y)$. $\nabla\varphi$ ist lokal eine konstante orthogonale Matrix Q . Damit $\varphi(x) = Qx + a$.