

**3.1.** Die schwache Formulierung lautet:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty -f(u) \Phi_x - u \Phi_t \, dt \, dx - \int_{\mathbb{R}} u_0 \Phi_0 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty g(u) \Phi \, dt \, dx$$

**3.2.**

**3.3.** a) Der Beweis sollte wieder so funktionieren wie die RH-Bedingung.

b) Bsp. 1.11 durchführen mit  $\eta, \psi$  allgemein?

c)

**3.4.** a)

$$f(u) = \eta(u) = \frac{u^2}{2} \Rightarrow f'(u) = \eta'(u) = u$$

$$\psi' = f' \eta' \Rightarrow \psi' = u^2 \Rightarrow \psi = \frac{u^3}{3}$$

b) Start bei der Entropiebedingung (1.20):

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(u) \Phi_t + \psi(u) \Phi_x] \, dx \, dt \geq - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \Phi(x, 0) \, dx$$

mit  $\eta, \psi$  aus a).

Analog zu den Kruzkov-notes nehmen wir:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \psi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix}$$

und als Testfunktion die Indikatorfunktion  $\chi_K$ , wobei  $K$  das Trapez mit den Eckpunkten  $(-R, t_1), (R, t_1), (R - M(t_2 - t_1), t_2), (-R + M(t_2 - t_1), t_2)$  ist.

$$\Gamma_L = \{(x, t) | t_1 < t < t_2, |x| = R - M(t - t_1)\}$$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} \cdot \nabla_{x,t} \chi_K = - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} \chi_K = \int_K \nabla_{x,t} \cdot \mathbf{F} = - \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_K$$

$$= - \left[ \int_{|x| \leq R - M(t_2 - t_1)} \frac{u^2(x, t_2)}{2} \, dx - \int_{|x| \leq R} \frac{u^2(x, t_1)}{2} \, dx + \int_{\Gamma_L} \frac{u^3}{3} \frac{x}{|x|} + M \frac{u^2}{2} \right]$$

Weil  $u \in L^\infty$  wählen wir

$$M := \sup \frac{2\|u\|_\infty}{3}$$

und so wird das Integral über  $\Gamma_L$  sicher positiv. Mit  $R \rightarrow \infty$  und  $t_1 \rightarrow 0$  folgt dann die Behauptung.

Haben angenommen, dass die rechte Seite der Entropiebedingung immer 0 ist. Das ergibt sich aus der speziellen Wahl unserer Testfunktionen, die sind für  $t_1 > 0$  immer 0 in  $t = 0$ . und mit richtiger Reihenfolge der Grenzwertbildung sollte das passen.

**3.5.** 1. Gilt eh für alle schwachen Lösungen.

2.

$$\begin{aligned}\Phi(u) = |u| + u &\Rightarrow \Phi'(u) = \operatorname{sgn}(u) + 1 \\ \Psi' = \Phi' f' &= f'(\operatorname{sgn}(u) + 1) \Rightarrow \Psi = f(u)(\operatorname{sgn}(u) + 1)\end{aligned}$$

3.