7.1. **a)**

$$[E] = \mathrm{J} = \mathrm{m}^2\mathrm{kg}/\mathrm{s}^2, [t] = \mathrm{s}, [\rho] = \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3, [R] = \mathrm{m}$$

$$R = C \cdot E^{\alpha_1} \cdot t^{\alpha_2} \cdot \rho^{\alpha_3}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{kg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = C \sqrt[5]{\frac{Et^2}{\rho}}$$

Aus der Beobachtung in der Angabe folgt $C = 1$.

b) Luftdichte wird angenommen als $1.2\,\mathrm{kg/m^3}$.

$$E = \frac{R^5 \rho}{t^2}$$

t [ms]	R [m]	E [J]
6	75	79×10^{12}
16	100	47×10^{12}
25	120	48×10^{12}
90	160	16×10^{12}

Schätzung der Explosion auf 50 MJ.

c)

$$E = 1 \times 10^{44}\,\mathrm{J}, \rho = 2 \times 10^{-21}\,\mathrm{kg/m^3}, R = 315.4 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$$

$$t = \sqrt{\frac{R^5 \rho}{E}} = 2.5 \times 10^{11}\,\mathrm{s} \approx 7900 \text{ years}$$

7.2. **a)**

$$h_r = C h_0^{\alpha_1} R^{\alpha_2} E^{\alpha_3} \rho^{\alpha_4} g^{\alpha_5}$$

Größe	Einheiten
h_r	m
h_0	m
R	m
ρ	$\mathrm{kg/m^3}$
E	$\mathrm{kgm/s^2m^2}$
g	$\mathrm{m/s^2}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{kg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ -c \\ c \end{pmatrix}$$

b)

$$\Rightarrow h_r = \frac{h_0 R \rho g}{E}$$

c) E auch verdoppeln.

7.3. **a)**

$$-y'' + \varepsilon y' + y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i \Rightarrow -\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i'' + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} y_i' + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i = f(x), \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(1) = 0$$

ε^i Koeffizientenvergleich führt zu:

$$-y_0'' + y_0 = f(x), \quad y_0(0) = y_0(1) = 0$$

$$-y_i'' + y_i = -y_{i-1}, \quad y_i(0) = y_i(1) = 0 \quad \forall i \geq 1$$

b)

$$\left\|y_0'\right\|^2_{L^2(0,1)} + \|y_0\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|f\|^2_{L^2(0,1)}$$

$$\left\|y_i'\right\|^2_{L^2(0,1)} + \|y_i\|^2_{L^2(0,1)} \leq \left\|y_{i-1}'\right\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|f\|^2_{L^2(0,1)}$$

Also Stabilität der (endlichen) Reihe folgt.

$$-\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y_i'' + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y = f - \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{i+1} y_i'$$

Daher erfüllt die endliche Reihe die Gleichung bis auf einen Fehlerterm von:

$$\varepsilon^n y_{n-1}'$$

c) Sobolev Einbettungssatz: $\gamma = k - \frac{n}{p} > m$, $n = 1, k = 1, p = 2, m = 0$

d)

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i\right\|^2_{H_1(0,1)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \|y_i\|^2_{H_1(0,1)} = \frac{1}{1-\varepsilon} \|f\|^2_{L^2(0,1)}$$

Konvergiert wieder gleichmäßig in C^0 wegen dem Einbettungssatz also konvergiert die Reihe.

7.4. **a)**

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = -1 - \varepsilon(y_0' + \varepsilon y_1')^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow y_0'' = -1, \quad y_0(0) = 0,\ y_0'(0) = 1$$

$$y_1'' = -(y_0')^2, \quad y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 0$$

$$
\begin{aligned}
y_0' &= -t + c = -t + 1 \\
y_0 &= -\frac{t^2}{2} + t + d = -\frac{t^2}{2} + t \\
y_1'' &= -(y_0')^2 = t^2 - 2t + 1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow y_1' = \frac{t^3}{3} - t^2 + t, \quad y_1 = \frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$$

b) Summe aufschreiben.

c) $v_0(t) = y(t, 0)$ erfüllt die Gleichung:

$$v_0'' = -1, \quad v_0(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow v_0' = -t + c = t + 1 \Rightarrow v_0 &= \frac{-t^2}{2} + t + d, \quad d = 0 \\
\partial_\varepsilon y''(t, \varepsilon) = \partial_\varepsilon(1 - \varepsilon(y'(t,\varepsilon))^2) &= -(y'(t,\varepsilon))^2 - \varepsilon 2(y'(t,\varepsilon))\partial_\varepsilon y'(t,\varepsilon) \\
v_1 &= \partial_\varepsilon y(t,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \\
v_1'' &= -(v_0')^2
\end{aligned}
$$

Also wie in **a)**.