10.1. Wir werden folgende Eigenschaft des Frobenius-Produkts brauchen (wir verwenden hier die Einstein'sche Summenkonvention):

$$A:(BC) = A_{ij}(BC)_{ij} = A_{ij}B_{ik}C_{kj} = A_{ij}B^\top_{ki}C_{kj} = B^\top_{ki}A_{ij}C_{kj} = (B^\top A)_{kj}C_{kj} = (B^\top A):C$$

Außerdem gilt $A:B = B:A = A^\top : B^\top$ und aus der Vorlesung wissen wir, dass $\frac{\partial W(C)}{\partial C}$ symmetrisch ist.

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(F+\Delta) &= W((F+\Delta)^\top(F+\Delta)) = W(F^\top F + F^\top\Delta + F\Delta^\top + \Delta^T\Delta) \\
&= W(F^\top F) + \frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : (F^\top\Delta + \Delta^\top F + \Delta^T\Delta) + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2) \\
&= W(F^\top F) + F\frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : \Delta + \frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : (\Delta^T F) + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2) \\
&= W(F^\top F) + 2F\frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C} : \Delta + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \widehat{W}(F)}{\partial F} = 2F\frac{\partial W(F^\top F)}{\partial C}$$

10.2. Mit $E = \frac{1}{2}(C - I)$ erhalten wir für $\tilde{W}(E) : \tilde{W}(0) = 0$.

Zunächst wird die Hilfsaussage laut Angabe bewiesen:

$$\begin{aligned}
\det(C) = \det(I + 2E) &= \det\begin{pmatrix} 1+2e_{11} & 2e_{12} & 2e_{13} \\ 2e_{12} & 1+2e_{22} & 2e_{23} \\ 2e_{13} & 2e_{23} & 1+2e_{33} \end{pmatrix} \\
&= (1+2e_{11})(1+2e_{22})(1+2e_{33}) + 16e_{12}e_{23}e_{13} \\
&\quad -(1+2e_{11})4e_{23}^2 - (1+2e_{22})4e_{13}^2 - (1+2e_{33})4e_{12}^2 \\
&= 1 + 2\operatorname{tr}E + 2(\operatorname{tr}E)^2 - 2E:E + 8\det(E)
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von E gilt außerdem: $E : E = \operatorname{tr}E^2$. Mit der Taylorentwicklung

$$(1+x)^{-\frac{\beta}{2}} = 1 - \frac{\beta}{2}x + \frac{\beta}{2}\frac{\beta+2}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\tilde{W}(E) &= \operatorname{tr}E + \frac{1}{\beta}\left\{\det(C)^{-\frac{\beta}{2}} - 1\right\} \\
&= \operatorname{tr}E - \operatorname{tr}E - (\operatorname{tr}E)^2 + \operatorname{tr}E^2 + \frac{\beta+2}{2}(\operatorname{tr}E)^2 + \mathcal{O}(E^3) \\
&= \operatorname{tr}E^2 + \frac{\beta}{2}(\operatorname{tr}E)^2 + \mathcal{O}(E^3)
\end{aligned}$$

Daher sind die Lamé-Parameter $\mu = \mu, \lambda = \mu\beta$.

10.3. Man wähle die zwei folgenden Matrizen mit positiver Determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Konvexkombination $(1-t)A + tB$ hat für $t = \frac{1}{2}$ Determinante gleich 0. Die Aussage lässt sich für alle $d \geq 2$ verallgemeinern, indem man die ersten zwei Diagonaleinträge wie oben wählt und die restliche Diagonale mit Einsern füllt.

10.4. **a)**

b)

10.5.

10.6. Zuerst mit der Definition von ε, τ symmetrisch und $A : B = A^\top : B^\top$

$$\tau : \varepsilon(v) = \tau : \frac{1}{2}((\nabla v)^\top + \nabla v) = \tau : \nabla v$$

Wir wenden partielle Integration auf jede Zeile von τ an ($\tau_{i,\cdot}$ bezeichnet die i-te Zeile von τ):

$$\int_\Omega v_i \operatorname{div} \tau_{i,\cdot} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla v_i \cdot \tau_{i,\cdot} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v_i (\tau_{i,\cdot} \cdot n) \, \mathrm{d}s_x$$

Nun wird das für jede Zeile gemacht, die Zeilen addiert und man erhält die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \tau : \varepsilon(v) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \tau : \nabla v \, \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \tau_{i,\cdot} \cdot \nabla v_i \, \mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \cdot \operatorname{div} \tau_{i,\cdot} \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v_i (\tau_{i,\cdot} \cdot n) \, \mathrm{d}s_x \\
&= -\int_\Omega v \cdot \operatorname{div} \tau \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v \cdot (\tau \cdot n) \, \mathrm{d}s_x
\end{aligned}$$