



Simulación de Sistemas

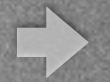
Clase Teórica 5:
Medios Granulares



Medios Granulares

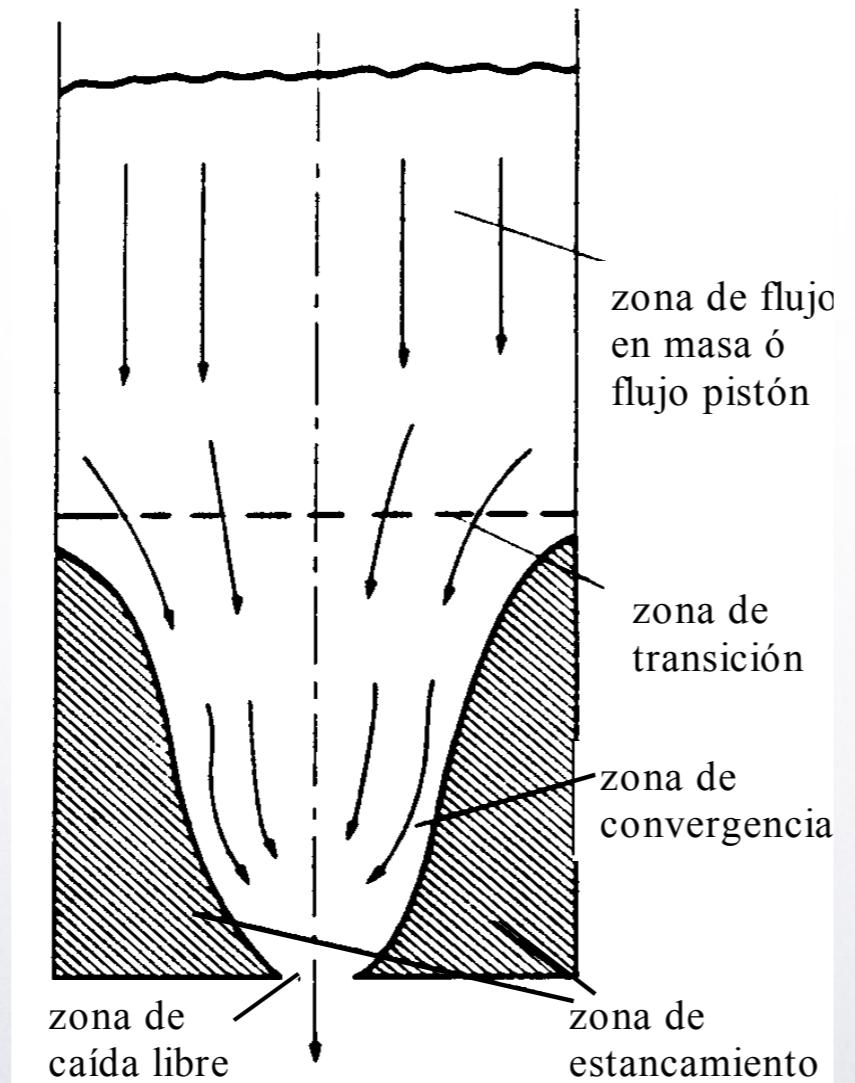
Definición

- Sistema constituido por muchas partículas macroscópicas (granos, pellets, arena, polvo, etc).
- Interacciones a través de fuerzas de contacto normales (deformación viscoelástica) y tangenciales (rozamiento).
- Interacciones altamente disipativas, el sistema llegue al reposo si no recibe energía del exterior (gravitatoria, vibración del contenedor, etc) o propias (autopropulsión).
- Las características muy particulares. Comportamiento distinto al de sólidos, líquidos y gases (¿nuevo estado de la materia?). Ejemplo la presión NO depende de la altura de la columna.



Medios Granulares

Ejemplo flujo granular gravitatorio en Silos

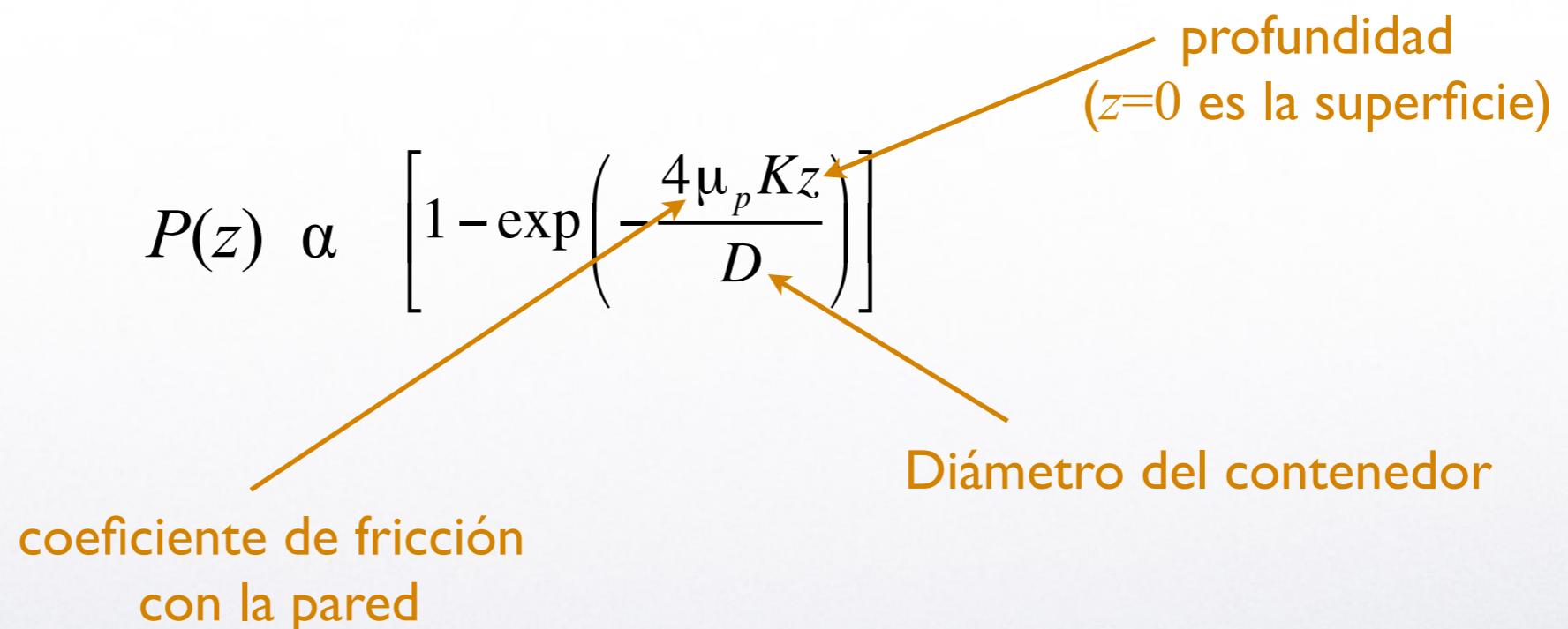




Medios Granulares

Propiedades

Ley de Janssen (1895): La presión dentro del medio granular crece asintóticamente con la profundidad.





Medios Granulares

Propiedades

Ley de Beverloo (1961): Caudal (Q) constante de un silo que se obtiene por análisis dimensional.

$$Q \approx n_p \sqrt{g} (d - cr)^{2.5} = B (d - cr)^{2.5}$$

Nro. de partículas por unidad de volumen

Diámetro apertura de salida

radio medio partículas

Exponente para silo 3D (para 2D es 1.5)



Medios Granulares

Simulaciones de Medios Granulares



Medios Granulares

Simulaciones

- Sistemas densos: $t_{choque} \gg t_{vuelo}$
- Método de Elemento Discreto: Dinámica molecular para granulares.
- Uno de los modelos pioneros: Cundall y Strack (1979).



Medios Granulares

Simulaciones

Notación:

\mathbf{g} Fuerza de Gravedad que apunta en ($\hat{-y}$)

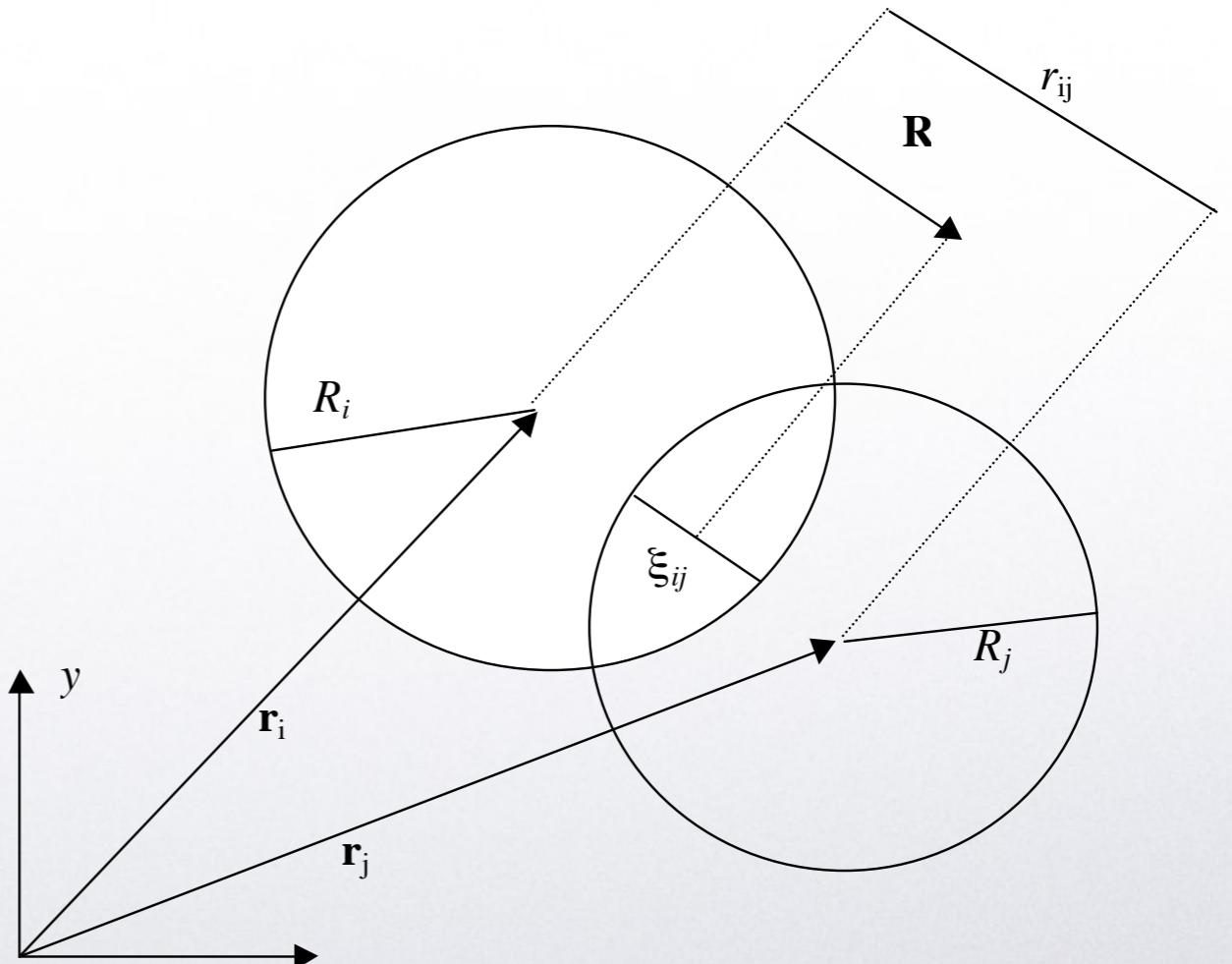
$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ velocidad

$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ aceleración

$\dot{\mathbf{r}}_{rel}^c = (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j)$ velocidad relativa entre partículas.

$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ Superposición

Definición variables geométricas





Medios Granulares

Simulaciones

Notación:

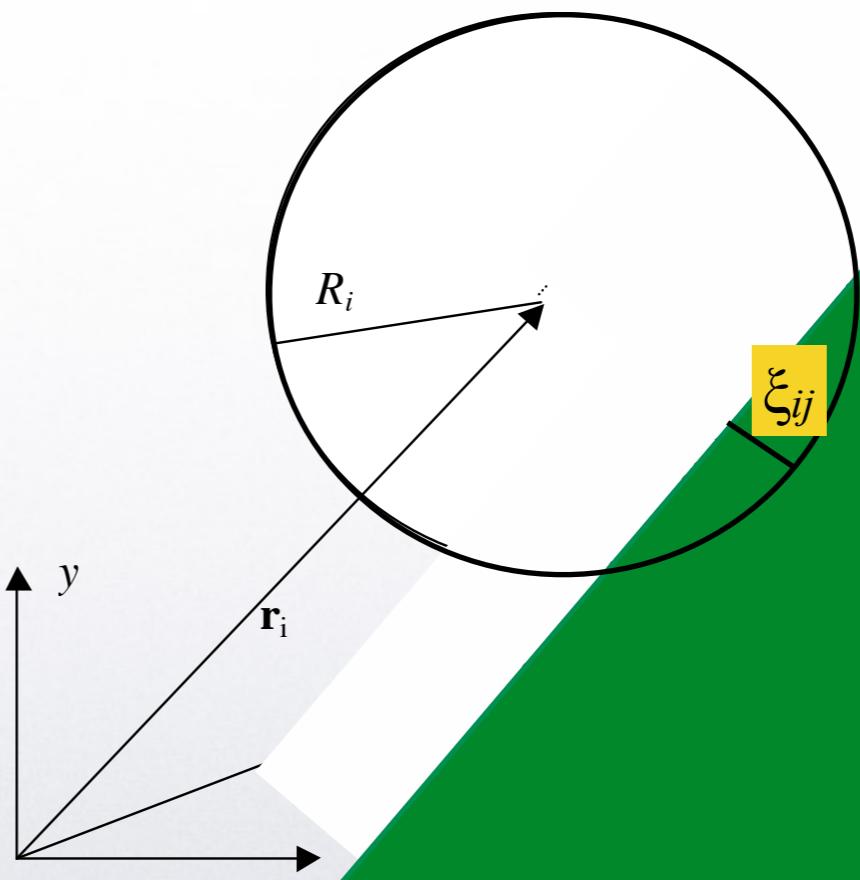
$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_i)$$

velocidad relativa entre
partícula pared.

$$\xi_{ij} = R_i - |\mathbf{r}_{ip}|$$

Superposición

Definición variables geométricas





Medios Granulares

Simulaciones

Se integran numéricamente las ecuaciones de movimiento acopladas,

Traslaciones

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=\text{vecinas en contacto}} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_g \quad i = 1, \dots, N$$

Rotaciones

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum_{j=\text{vecinas en contacto}} \mathbf{M}_{ij}$$

donde I es el momento de inercia y M es el torque definido como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

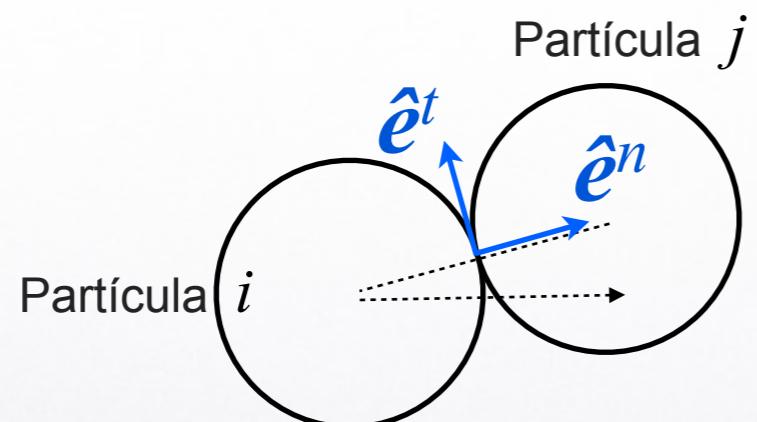


Medios Granulares

Simulaciones

Definición variables geométricas

Durante la Colisión “Partícula - Partícula”



\hat{e}^t versor tangencial al contacto

\hat{e}^n versor normal al contacto

$$\hat{e}^n = (e_x^n, e_y^n)$$

$$\hat{e}^t = (-e_y^n, e_x^n)$$

Donde:

$$e_x^n = (x_j - x_i) / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$$

$$e_y^n = (y_j - y_i) / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$$

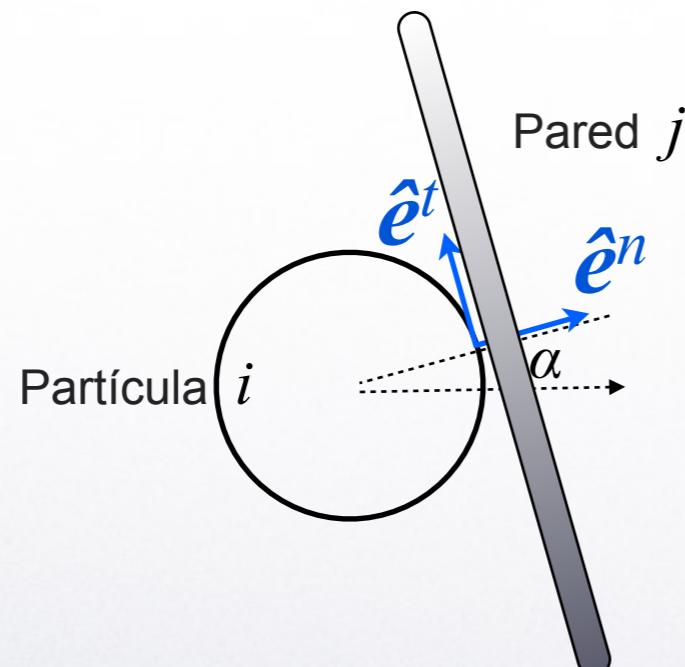


Medios Granulares

Simulaciones

Definición variables geométricas

Durante la Colisión “Partícula - Pared”



Versores Constantes para cada Pared !

\hat{e}^t versor tangencial la pared

\hat{e}^n versor normal la pared

$$\hat{e}^n = (e_x^n, e_y^n)$$

$$\hat{e}^t = (-e_y^n, e_x^n)$$

α es el ángulo entre el versor normal y el eje x.



Medios Granulares

Simulaciones

Fuerzas de Contacto

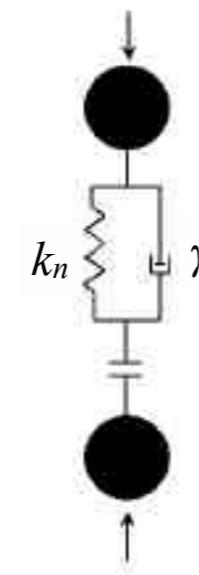


Medios Granulares

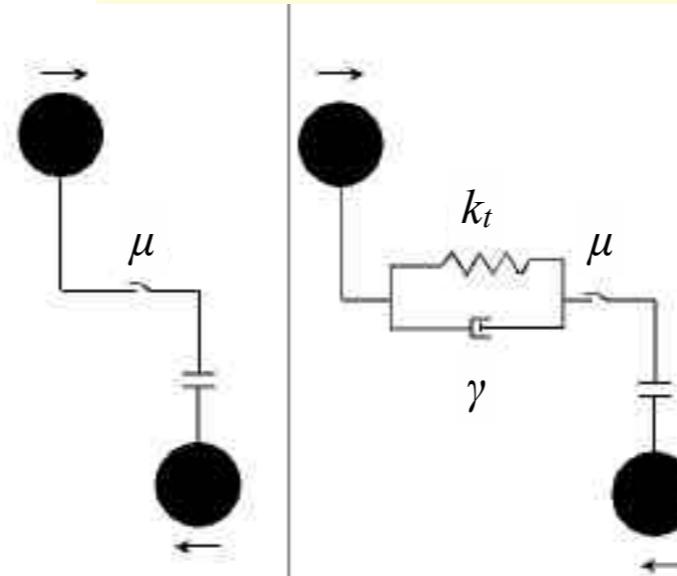
Simulaciones

Fuerzas de Contacto (Esquemas)

Ejemplo en la dirección normal (\hat{e}^n)



Ejemplos en la dirección tangencial (\hat{e}^t)





Medios Granulares

Simulaciones

Fuerzas de Contacto

Opciones en la dirección normal (\hat{e}^n)

$$N.1) \quad \mathbf{F}_N = [-k_n \xi - \gamma \dot{\xi}] \hat{\mathbf{n}}$$

$$N.2) \quad \mathbf{F}_N = -k_n \xi \hat{\mathbf{n}}$$



F_N

Opciones en la dirección tangencial (\hat{e}^t)

$$T.1) \quad \mathbf{F}_T = \min \begin{cases} -\mu |\mathbf{F}_N| \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{r}}_{rel}^c) \hat{\mathbf{t}} \\ -k_T \xi_T \hat{\mathbf{t}} \end{cases}$$

donde
 $\xi_T = \sum_t \Delta t \dot{\mathbf{r}}_{rel}^c(t)$

$$T.2) \quad \mathbf{F}_T = -\mu |\mathbf{F}_N| \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{r}}_{rel}) \hat{\mathbf{t}}$$

$$T.3) \quad \mathbf{F}_T = -k_T \xi [\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \hat{\mathbf{t}}] \hat{\mathbf{t}}$$



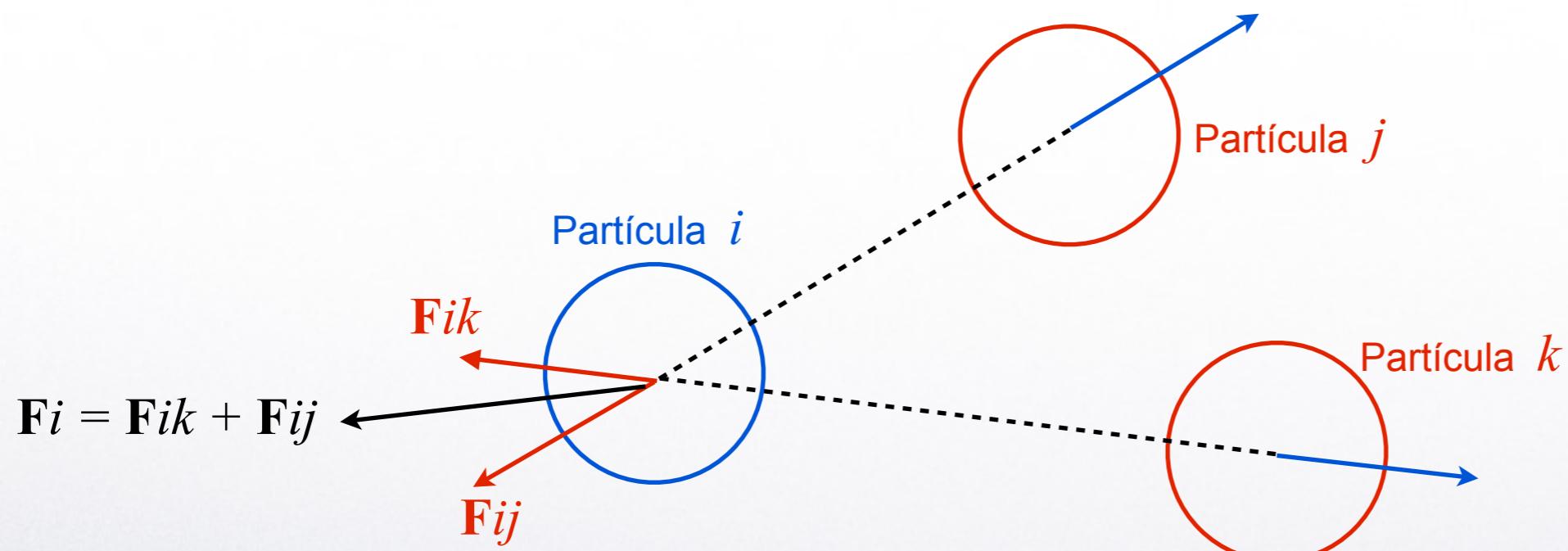
F_T



Medios Granulares

Simulaciones

Suma de Fuerzas





Medios Granulares

Simulaciones

Suma de Fuerzas

Antes de sumar Fuerzas, para cada partícula, conviene proyectar las Fzas. normal y tangencial (generadas por cada una de las demás partículas en contacto) en las componentes cartesianas (x, y)

$$F_x = F_N e^n_x + F_T (-e^n_y)$$

$$F_y = F_N e^n_y + F_T (e^n_x)$$

Dado que:

$$\hat{e}^n = (e^n_x, e^n_y)$$

$$\hat{e}^t = (-e^n_y, e^n_x)$$



Medios Granulares

Simulaciones

Suma de Fuerzas

Finalmente la fuerza sobre cada partícula i debido al contacto con las demás partículas, paredes u obstáculos (j) resulta:

$$\mathbf{F}_i^{Tot} = m_i \mathbf{g} + \sum_j \mathbf{F}_{Nij} + \sum_j \mathbf{F}_{Tij}$$

$$F_{i\ x}^{Tot} = \sum_j F_{Nij} e_x^n \ ij + \sum_j F_{Tij} (-e_y^n \ ij)$$

$$F_{i\ y}^{Tot} = m_i \mathbf{g} + \sum_j F_{Nij} e_y^n \ ij + \sum_j F_{Tij} e_x^n \ ij$$



Medios Granulares

Simulaciones

Criterio para elegir el paso temporal

- Dependerá del método de integración, pero como referencia puede tomarse:

$$\Delta t \approx 0.1 \sqrt{\frac{m}{k_n}}$$



Medios Granulares

Simulaciones

Diferenciar entre:

Paso Δt de la simulación

Paso Δt_2 para guardar el estado del sistema

$$\Delta t_2 = k \Delta t, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$t = \sum \Delta t \quad (\text{El tiempo total})$$

if $(t / \Delta t_2) = \text{round}(t / \Delta t_2)$

 guardo estado sistema.

end



Medios Granulares

Partículas de Formas Arbitrarias:
“Esferopolígonos”



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

F. Alonso-Marroquín

“Spheropolygons: A new method to simulate conservative and dissipative interactions between 2D complex-shaped rigid bodies”,

EPL, 83 (2008) 14001.



Medios Granulares

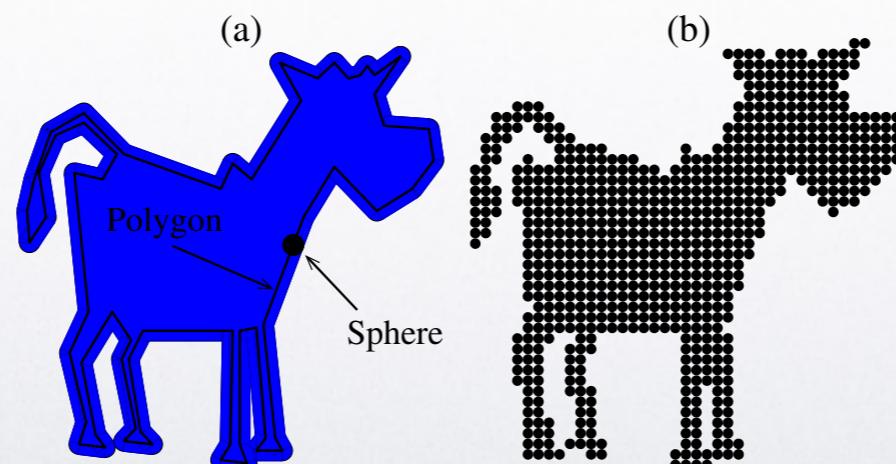
“Esferopolígonos”

Suma de Minkowski:

Dados dos conjuntos de puntos P y Q en un espacio Euclídeo, su suma de Minkowski está dada por $P+Q=\{x+y \mid x \in P, y \in Q\}$.

Lo cual es equivalente a arrastrar un conjunto alrededor del perfil del otro.

Ejemplo: un disco alrededor de un polígono de 62 caras.



Otra forma de representarlo seria con 726 discos.



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

La Fuerza de interacción entre dos partículas $i j$ considera los solapamientos entre Vértices (V_i) de un polígono y Lados del otro (E_j) y viceversa (V_j y E_i):

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = \sum_{V_i E_j} \vec{F}(V_i, E_j) + \sum_{V_j E_i} \vec{F}(V_j, E_i),$$



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Para calcular el solapamiento se usan los esferopolígonos:

$$\delta(V, E) = \langle r_i + r_j - d(V, E) \rangle,$$

Donde r_i y r_j son los radios de los discos y $d(V, E)$ es la distancia euclídea entre el vértice V y el segmento E :

La función $\langle x \rangle$ es x si $x > 0$ y cero en otro caso.



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Fuerza de contacto con fricción:

$$\vec{F}(V, E) = k_n \delta \vec{N} + k_t \delta_t \vec{T},$$

Donde \vec{N} y \vec{T} son los versores normal y tangencial al contacto.

y δ_t es el desplazamiento elástico calculado como en la diapositiva 15:

$$\delta_t = \delta [\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \vec{T}]$$



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Dado que estas partículas no son esféricas es necesario considerar rotaciones. El torque que la partícula j hace sobre la i es:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} = & \sum_{V_i E_j} (\vec{R}(V_i, E_j) - \vec{r}_i) \times \vec{F}(V_i, E_j) \\ & + \sum_{V_j E_i} (\vec{R}(V_j, E_i) - \vec{r}_i) \times \vec{F}(V_j, E_i),\end{aligned}$$

Donde \vec{r}_i es el centro de masa de la partícula i y \vec{R} es el punto donde se aplica la fuerza (el punto medio del solapamiento).



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Finalmente se integran las ecuaciones de movimiento:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} - m_i g \hat{y}, \quad I_i \ddot{\varphi}_i = \sum_j \tau_{ij}.$$

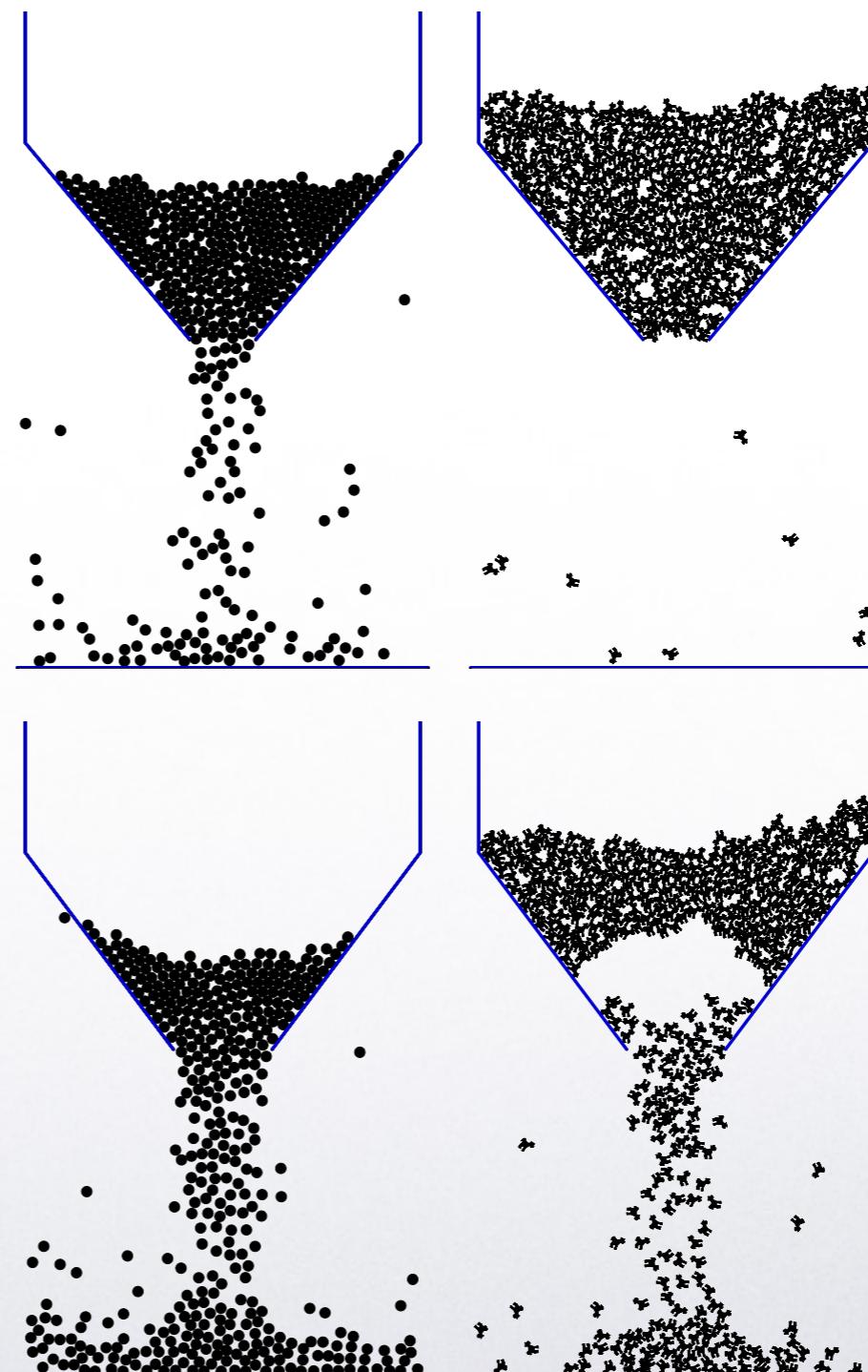
donde I_i es el momento de inercia de la partícula i



Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Comparación de simulaciones de un silo 2D con círculos y con vacas de Minkowski.





Medios Granulares

FIN