теория вероятностей и математическая статистика. БПИ 201

домашнее задание 10

плотность распределения функции СВ

① СВ $\xi \sim R(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. найти плотность распределения $y = \sin\xi$

$y = \varphi(x) = \sin x$ монотонна на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и дифференцируема =>

$f_y(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'|$

$\varphi^{-1}(y) = \arcsin y \qquad (\varphi^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y \in (-1, 1)$

тогда $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1,1) \\ 0, & y \notin (-1,1) \end{cases}$

② СВ $\xi \sim R(0, \pi)$. найти плотность распределения $y = \sin\xi$

$y = \varphi(x) = \sin x$ не монотонна на $(0, \pi)$ => разбиваем на интервалы

1) $(0, \frac{\pi}{2}) \quad \varphi_1^{-1}(y) = \arcsin y \quad (\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (0,1)$

2) $(\frac{\pi}{2}, \pi) \quad \varphi_2^{-1}(y) = \pi - \arcsin y \quad (\varphi_2^{-1}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (0,1)$

тогда $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi} \cdot \left|-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$

суммируем по интервалам

неравенство чебышева

③ Пусть СВ ξ – скорость ветра в некоторой точке Земли. Оцените вероятность того, что скорость ветра в этой точке превысит 80 км/час, если в результате многолетних наблюдений измерений установлено: а) среднее значение скорости = 16км/час; б) среднее значение скорости = 16км/час, а среднеквадратическое отклонение = 4 км/час.

- $\xi \geq 0 \quad E\xi < \infty \qquad P(\xi \geq \varepsilon) \leq E\xi/\varepsilon$ — 1 форма или неравенство маркова
- $E\xi^2 < \infty \qquad P(\xi \geq \varepsilon) \leq E\xi^2/\varepsilon^2$
- $D\xi < \infty \qquad P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq D\xi/\varepsilon^2$ — 2 форма

пусть ξ – скорость ветра, тогда ξ неотрицательна

а) $P(\xi \geq 80) \leq \frac{16}{80} = 0{,}2$

по первой форме $P(\xi \geq 80) \in [0; 0{,}2]$

б) $P(|\xi - 16| \geq 64) = P(\xi \geq 80) + \cancel{P(\xi \leq -48)} \leq \frac{4}{64^2} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}00098$

по второй форме $P(\xi \geq 80) \in [0; 0{,}00098]$

Ответ: а) $P(\xi \geq 80) \in [0; 0{,}2]$ б) $P(\xi \geq 80) \in [0; 0{,}00098]$

④ Пусть СВ ξ имеет конечный второй момент. Оцените с помощью неравенства Чебышёва $P(|\xi - m| < 3\sigma)$. Сравните полученный результат с точным значением вероятности, если известно, что СВ ξ имеет распределение: а) $N(m, \sigma^2)$, б) $E(\lambda)$, в) $R(a, b)$.

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 1 - P(|\xi - m| \geq 3\sigma) \geq 1 - \frac{D\xi}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$$

а) $\xi \sim N(m, \sigma^2)$

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

правило 3 сигм

оценка $[0{,}89; 1]$

реальное значение $0{,}9973 \in [0{,}89; 1]$

б) $\xi \sim E(\lambda)$ $\quad E\xi = m = 1/\lambda \quad D\xi = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma = 1/\lambda \quad \lambda > 0$

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = P(-3\sigma + m < \xi < 3\sigma + m) = F(3\sigma + m) - F(-3\sigma + m) =$$
$$= F(4/\lambda) - F(-2/\lambda) = (1 - e^{-4}) - 0 = 1 - e^{-4} \approx 0{,}9817$$

оценка $[0{,}89; 1]$

реальное значение $0{,}9817 \in [0{,}89; 1]$

в) $\xi \sim R(a, b)$ $\quad E\xi = m = \frac{b+a}{2} \quad D\xi = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad a \leq b$

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = P(-3\sigma + m < \xi \leq 3\sigma + m) = F(3\sigma + m) - F(-3\sigma + m) =$$
$$= F\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}a\right) - F\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{\sqrt{3}+1}{2}a\right) = 1 - 0 = 1$$

$\sqrt{3}b + b - \sqrt{3}a + a \leq 2b$ $\qquad -\sqrt{3}b + b + \sqrt{3}a + a \geq 2a$

$\sqrt{3}(b-a) \leq b - a$ $\qquad b - a \geq \sqrt{3}(b-a)$

$\sqrt{3} \leq 1$ неверно $\qquad 1 \geq \sqrt{3}$ неверно

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}a > b$ $\qquad \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}+1}{2}b + \frac{\sqrt{3}+1}{2}a < a$

оценка $[0{,}89; 1]$

реальное значение $1 \in [0{,}89; 1]$

гауссовский вектор

⑤ случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$ имеет гауссовское распределение $N(m, K)$

$m = (E\xi, E\eta) = (1, -1)$

$$K = \begin{pmatrix} cov(\xi,\xi) & cov(\xi,\eta) \\ cov(\eta,\xi) & cov(\eta,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\xi & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & D\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 26 \end{pmatrix}$$

найти $P(2\xi - 3\eta > 4)$.

ξ и η имеют нормальное распределение $\Rightarrow$ $2\xi - 3\eta$ также имеет нормальное распределение как их линейная комбинация

$$E(2\xi - 3\eta) = E(2\xi) + E(-3\eta) = 2E\xi - 3E\eta = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5$$

$$D(2\xi - 3\eta) = D(2\xi) + D(-3\eta) + 2cov(2\xi, -3\eta) = 4D\xi + 9D\eta - 12cov(\xi, \eta) =$$
$$= 4 \cdot 2 + 9 \cdot 26 - 12 \cdot (-5) = 302$$

$$P(2\xi - 3\eta > 4) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{4-5}{\sqrt{302}}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(-0{,}058) = 0{,}5 + \Phi_0(0{,}058) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}0231 = 0{,}5231$$

Ответ: 0,5231

⑥ Известно, что случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)$, где СВ ξ – рост наугад взятого взрослого мужчины и СВ η - его вес, удовлетворительно описываются двумерным нормальным законом распределения с математическим ожиданием $m_\zeta = (175, 74)$ и ковариационной матрицей $K_\zeta = \begin{pmatrix} 49 & 26 \\ 26 & 36 \end{pmatrix}$. Считается, что человек страдает избыточным весом, выполняется неравенство $\xi - \eta \leq 90$. Найдите: а) математическое ожидание и дисперсию характеристики избыточного веса $\xi - \eta$; б) вероятность того, что наугад выбранный мужчина страдает избыточным весом.

а) $\zeta = \xi - \eta$ имеет нормальное распределение как линейная комбинация нормально распределенных величин ξ и η

$$E(\xi-\eta) = E\xi + E(-\eta) = E\xi - E\eta = 175 - 74 = 101$$

$$D(\xi-\eta) = D\xi + D(-\eta) + 2\operatorname{cov}(\xi, -\eta) = D\xi + D\eta - 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 49+36-2\cdot 26 = 33$$

$$\zeta \sim N(101, 33)$$

б) $$P(\xi - \eta \leq 90) = \Phi\left(\frac{90-101}{\sqrt{33}}\right) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{90-101}{\sqrt{33}}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(1{,}915) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4722 = 0{,}0278$$

Ответ: а) $\xi - \eta \sim N(101, 33)$ б) $0{,}0278$

⑦ СВ $\xi, \eta \sim N(0,1)$ и являются независимыми.

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в круг радиуса 2 с центром в начале координат

$P((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ $\quad \xi, \eta$ независимы $\Leftrightarrow f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$

$$P((\xi,\eta)\in C) = \iint\limits_C \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx\,dy = \left\{\begin{array}{l} \text{полярные коорд.} \\ x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho^2 = x^2+y^2 \\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{array}\right\} = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^2 2\pi e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\,d\rho = \int_0^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\,d\rho = \left\{\rho\,d\rho = -d\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)\right\} =$$

$$= -\int_0^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) = -\left(e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Big|_0^2\right) = -\left(e^{-2} - e^0\right) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$$

Ответ: 0,8647