Теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201

Домашнее задание 12 Сурова София

Непрерывный случайный вектор

1

8. Случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет совместную плотность вероятности $f(x, y) = \dfrac{a}{(1 + x^2 + x^2y^2 + y^2)}$. Требуется:

а) найти неизвестную константу a;

б) исследовать величины X и Y на независимость и некоррелированность.

а) условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dy = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{arctg}(y)}{1+x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right)dx =$$

$$= a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{1+x^2}\,dx = a\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = a\pi\left(\mathrm{arctg}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) = a\pi^2 = 1$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\pi^2}$

б) ξ и η независимые $\Leftrightarrow$ $f_\xi(x) f_\eta(y) = f(x,y)$

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = a\cdot\frac{\pi}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = a\cdot\frac{\pi}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} = f(x,y)$$

$\Rightarrow X, Y$ независимые

$\not\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, т.е. X, Y некоррелированные

тут проблема в том, что $EX^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \infty$, т.е. $\mathrm{cov}(X,Y)$ неопределен!

Ответ: а) $a = \frac{1}{\pi^2}$ б) X, Y независимые; $\mathrm{cov}(X,Y)$ неопределен

2

9. Случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 + e^{-(\lambda x + \mu y)} - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти частные распределения СВ X и Y. Исследовать эти величины на независимость и некоррелированность.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$t(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} -\mu e^{-(\lambda x+\mu y)} + \mu e^{-\mu y}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \frac{\partial t(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^{+\infty} \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dy = \lambda\mu e^{-\lambda x}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\mu y}\,dy = \lambda\mu e^{-\lambda x}\cdot\frac{1}{-\mu}\cdot\int\limits_0^{+\infty} e^{-\mu y}\,d(-\mu y)$$

$$= -\lambda e^{-\lambda x}\left(e^{-\mu y}\Big|_0^{+\infty}\right) = -\lambda e^{-\lambda x}(0-1) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lambda\mu e^{-\mu y}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = -\mu e^{-\mu y}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,d(-\lambda x) = \mu e^{-\mu y},\ y \geq 0$$

$f_X(x) f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x}\cdot \mu e^{-\mu y} = \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)} = f(x,y) \Rightarrow X, Y$ независимы

$\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0$, т.е. X, Y некоррелированные

③ **21.** Найти вероятность того, что случайно брошенная точка с координатами (X, Y) попадет на область D, определенную неравенствами $\{1 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, если функция распределения координат этой точки равна

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x^2} - 2^{-2y^2} + 2^{-x^2-2y^2}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$P(a_1 < X \leqslant b_1,\ a_2 < Y \leqslant b_2) = (F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2)) - (F(a_1,b_2) - F(a_1,a_2))$$

$$P(1 < x \leqslant 2,\ 1 < y \leqslant 2) = F(2,2) - F(2,1) - F(1,2) + F(1,1) =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{2^{-4}} - \cancel{2^{-8}} + 2^{-12} - \cancel{1} + \cancel{2^{-4}} + \cancel{2^{-2}} - 2^{-6} - \cancel{1} + 2^{-1} + \cancel{2^{-8}} - 2^{-9} + \cancel{1} - 2^{-1} - \cancel{2^{-2}} + 2^{-3} =$$

$$= 2^{-12} - 2^{-6} - 2^{-9} + 2^{-3} \approx 0,1077$$

Ответ: 0,1077

④ **22.** Случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет плотность вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти корреляционную матрицу случайного вектора Z.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 4xe^{-x^2}\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}dy = \left\{-\tfrac{1}{2}d(-y^2) = y\,dy\right\} = -2xe^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}d(-y^2) =$$

$$= -2xe^{-x^2}\left(e^{-y^2}\Big|_0^{+\infty}\right) = 2xe^{-x^2},\ x \geq 0$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 4ye^{-y^2}\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -2ye^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}d(-x^2) = -2ye^{-y^2}\left(e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}\right) = 2ye^{-y^2}$$

$$f_X(x) f_Y(y) = 2xe^{-x^2}\cdot 2ye^{-y^2} = 4xye^{-(x^2+y^2)} = f(x,y) \Rightarrow X, Y \text{ независимы}$$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = 0$$

$$R = \begin{pmatrix} \rho(X,X) & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & \rho(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

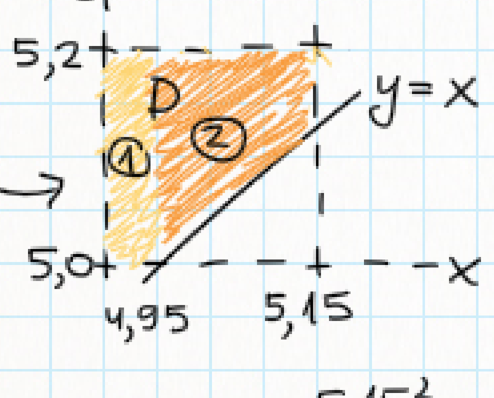
⑤ Диаметр вала и диаметр отверстия – независимые случайные величины, распределённые равномерно в интервалах (4.95; 5.15) и (5.0; 5.2) соответственно. Найдите вероятность того, что вал войдёт в отверстие.

$X \sim R(4{,}95,\ 5{,}15)$ — диаметр вала

$Y \sim R(5{,}0,\ 5{,}2)$ — диаметр отверстия

$$P(X \leqslant Y) = P(X - Y \leqslant 0) = *$$

надо найти вероятность попадания случайного вектора в область D



$$* = \int_{4,95}^{5,0} dx \int_{5,0}^{5,2} dy + \int_{5,0}^{5,15} dx \int_{x}^{5,2} dy = 0{,}2\cdot 0{,}05 + 5{,}2\cdot 0{,}2 - \frac{5{,}15^2 - 5{,}0^2}{2} = 0{,}28875$$

Ответ: 0,28875

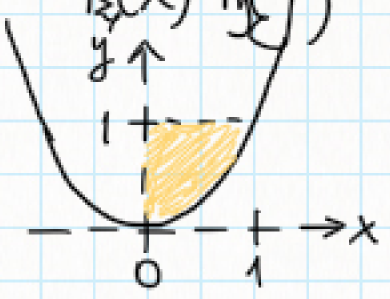
СВ ξ и η независимы и имеют распределение R(0,1). Найдите вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2\xi x + \eta = 0$ являются вещественными

корни вещественные $\Rightarrow D = 4\xi^2 - 4y \geq 0 \iff \xi^2 - y \geq 0$

пусть $\zeta = \xi^2 - y \Rightarrow F_\zeta(z) = \iint\limits_{x-y\leq z} f(x,y)\,dx\,dy$

$$P(\xi^2 - y \geq 0) = P(\zeta \geq 0) = 1 - P(\zeta < 0) = 1 - F_\zeta(0) = 1 - \iint\limits_{\substack{x^2-y\leq 0\\ 0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1}} f(x,y)\,dx\,dy = *$$

- ξ и y независимы $\Rightarrow f(x,y) = f_\xi(x)\, f_y(y)$
- $\begin{cases} x^2 - y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$



- $\xi, y \sim R(0,1)$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/1-0, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases} \qquad f_y(y) \text{ аналогично}$$

$$* = 1 - \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy = 1 - \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = 1 - \left(x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3} - 0 + \frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$