теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201

Домашнее задание 13. Сурова София

свойства статистических оценок

① Доказать, что выборочные начальные моменты являются несмещёнными оценками соответствующих теоретических начальных моментов.
Найти математическое ожидание выборочной дисперсии. Доказать асимптотическую несмещённость выборочной дисперсии.

→ выборочный начальный момент $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

$E\hat{\mu}_k = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i^k = \mu_k$

$E\hat{\mu}_k = \mu_k$ => оценка несмещенная

→ выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$ES^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right) = E(x_1-\bar{x})^2 = D(x_1-\bar{x}) = Dx_1 + D\bar{x} - 2cov(x_1,\bar{x}) =$

$= \sigma^2 + \sigma^2/n - 2cov(x_1, \frac{1}{n}\sum_i^n x_i) = \sigma^2 + \sigma^2/n - \frac{2}{n}\sigma^2 = \sigma^2(1-\frac{1}{n}) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$

$\lim_{n\to\infty} ES^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\sigma^2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-1/n}{1}\sigma^2 = \sigma^2$ => оценка асимптотически несмещ.

② Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R(0; θ). Пусть $\hat{\theta} = 2\bar{X}$. Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещённой и состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

$E\hat{\theta} = E(2\bar{x}) = E\left(\frac{2}{n}\sum_i^n x_i\right) = \frac{2}{n}\sum_i^n Ex_i = \frac{2}{n}\sum_i^n \frac{\theta+0}{2} = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta+0}{2} = \theta$

$E\hat{\theta} = \theta$ => оценка несмещенная

$D\hat{\theta} = D(2\bar{x}) = 4D(\bar{x}) = 4D\left(\frac{1}{n}\sum_i^n x_i\right) = \frac{4}{n^2}D\left(\sum_i^n x_i\right) = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$E\hat{\theta} = \theta$ и $D\hat{\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ => оценка состоятельная

Метод максимального правдоподобия и метод моментов

③ Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует гауссовскому распределению $N(\theta_1, \theta_2^2)$. Построить оценку вектора параметров (θ_1, θ_2^2) по методу МП и по методу моментов.

④ Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению R(0; θ). Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

⑤ Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует геометрическому распределению $G(\theta)$. Построить оценку МП и оценку по ММ для неизвестного параметра θ.

③ $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$ $\quad \theta = (\theta_1, \theta_2^2)$

функция правдоподобия

ММП $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}\exp\left[-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right]$

$\ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - n\ln\theta_2 - \frac{\sum^n (x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}$

$\frac{\partial \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial\theta_1} = \frac{\sum^n(x_i - \hat{\theta}_1)}{\theta_2^2} = 0$

$\sum^n(x_i - \hat{\theta}_1) = 0 \Rightarrow \sum^n x_i - n\hat{\theta}_1 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum^n x_i = \bar{x}$

$\frac{\partial \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial\theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{\sum^n(x_i-\hat{\theta}_1)^2}{\theta_2^3} = 0$

$-n\hat{\theta}_2 + \sum^n(x_i - \hat{\theta}_1)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum^n(x_i - \hat{\theta}_1)^2 = S^2$

ММ $\begin{cases}\hat{\mu}_1 = \mu_1 \\ \hat{\mu}_2 = \mu_2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum\limits^n X_i & \mu_1 = EX = \theta_1 \\ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum\limits^n X_i^2 & \mu_2 = EX^2 = (EX)^2 + DX = \theta_1^2 + \theta_2^2\end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\hat{\theta}_1 = \overline{X} \\ \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \overline{X}^2 = S^2\end{cases}$

4) $X_1, \dots, X_n \sim R(0, \theta)$

ММП $L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \begin{cases}\prod\limits_{i=1}^n \frac{1}{\theta}, \text{ если } X_1, \dots, X_n \in (0, \theta) \\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$

Функция правдоподобия достигает максимума при $\hat{\theta} = X_{(n)}$

$X_{(n)}$ – последний элемент вариационного ряда, т.е. самый большой

ММ $\hat{\mu}_1 = \mu_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum\limits^n X_i = \overline{X} \\ \mu_1 = EX = \frac{0+\theta}{2}\end{array}\right] \Leftrightarrow \overline{X} = \frac{0+\hat{\theta}}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$

5) $X_1, \dots, X_n \sim G(\theta), \ \theta > 0$

ММП $L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod\limits_{i=1}^n \theta(1-\theta)^{X_i - 1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum X_i - n}$

$\ln L(\theta, X_1, \dots, X_n) = n\ln\theta + (\sum X_i - n)\ln(1-\theta)$

$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{(\sum X_i - n)}{1-\theta} = 0$

$n(1-\hat{\theta}) - (\sum X_i - n)\hat{\theta} = 0$

$n - n\hat{\theta} - \hat{\theta}\sum X_i + n\hat{\theta} = 0$

$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$

ММ $\hat{\mu}_1 = \mu_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum X_i = \overline{X} \\ \mu_1 = EX = \frac{1}{\theta}\end{array}\right] \Leftrightarrow \overline{X} = \frac{1}{\hat{\theta}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$

6) **13.** Пусть $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \dots, X_n)$ — выборка, соответствующая распределению с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases}\frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0.\end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod\limits_{i=1}^n f(X_i, \theta) = \prod\limits_{i=1}^n \frac{2}{\theta} X_i e^{-\frac{X_i^2}{\theta}}, \ X_i \geq 0$

$\ln L(\theta, X_1, \dots, X_n) = n\ln 2 - n\ln\theta + \sum\limits^n \ln X_i - \frac{\sum\limits^n X_i^2}{\theta}$

$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum X_i^2}{\theta^2} = 0$

$-n\hat{\theta} + \sum X_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum X_i^2}{n}$

7) **14.** Пусть $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \dots, X_n)$ — выборка, соответствующая биномиальному распределению $\mathbf{Bi}(10; \theta)$. Оценить неизвестный параметр θ методом максимального правдоподобия.

$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod\limits_{i=1}^n C_{10}^{X_i} \theta^{X_i} (1-\theta)^{10 - X_i}$

$\ln L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \sum\limits^n \ln C_{10}^{X_i} + \sum X_i \cdot \ln\theta + (10n - \sum X_i)\ln(1-\theta)$

$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial\theta} = \sum X_i \cdot \frac{1}{\theta} - (10n - \sum X_i) \cdot \frac{1}{1-\theta} = 0$

$$\sum x_i \cdot (1-\hat{\theta}) - (10n - \sum x_i) \cdot \hat{\theta} = 0$$

$$\sum x_i - \hat{\theta} \sum x_i - 10 \hat{\theta} n + \hat{\theta} \sum x_i = 0$$

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i / 10n$$