

Проверка гипотез

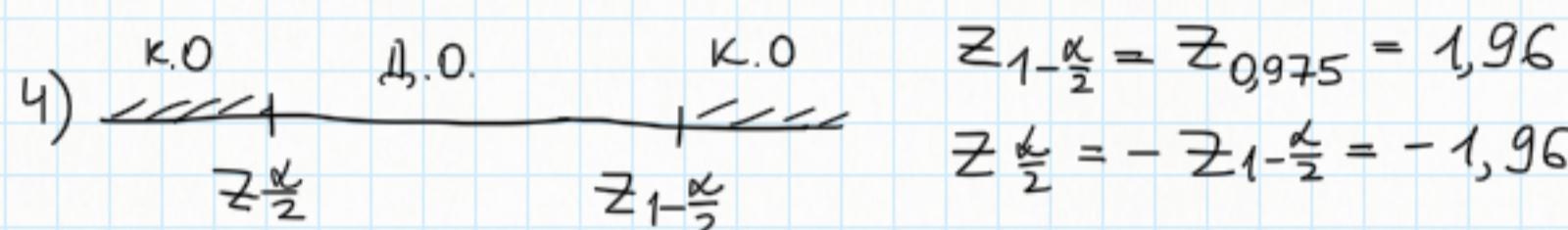
- ① Импортёр упаковывает чай в пакеты с номинальным весом 125 граммов. Известно, что упаковывающая машина работает с известным среднеквадратическим отклонением равным 10 г. Случайным образом для проверки было выбрано 50 пакетов чая. Выборочное среднее этих пакетов составило 125,8 г. Проверьте на уровне значимости 0.05 гипотезу о том, что средний вес пакета чая соответствует номиналу.

$$1) H_0: \mu = 125$$

$$H_A: \mu \neq 125$$

$$2) T = \frac{(\bar{x} - 125)}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$3) T|_{H_0} \sim N(0,1)$$



$$5) T_{\text{набл.}} = \frac{(125,8 - 125)}{10} \sqrt{50} \approx 0,5657$$

$$6) T_{\text{набл.}} = 0,5657 \in [-1,96; 1,96] \leftarrow \text{доверительная область}$$

\Rightarrow нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной

Ответ: можно считать, что средний вес пакета чая соответствует номиналу

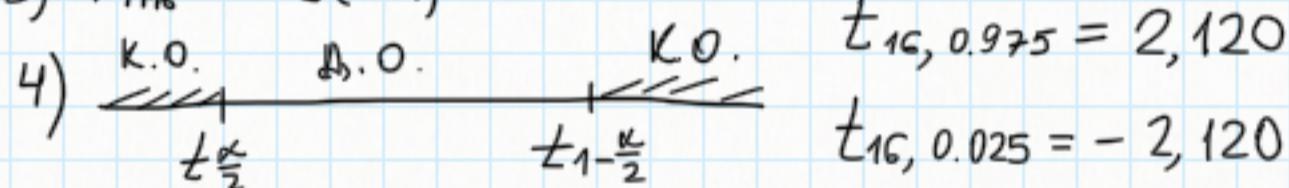
- ② Станок-автомат штампует валики. По выборке объёма $n=17$ вычислено выборочное среднее $\bar{X}=20,5$ мм и выборочная дисперсия $s^2=16$ (мм)² диаметра валиков. Проверьте на уровне значимости 0.05 гипотезу о том, что среднее значение диаметра валика равно 20.

$$1) H_0: \mu = 20$$

$$H_A: \mu \neq 20$$

$$2) T = \frac{(\bar{x} - 20)}{\sqrt{s^2 / n-1}}$$

$$3) T|_{H_0} \sim t(n-1)$$



$$5) T_{\text{набл.}} = \frac{(20,5 - 20)}{\sqrt{16 / 16}} = 0,5$$

$$6) T_{\text{набл.}} = 0,5 \in [-2,120; 2,120] \leftarrow \text{Д.О.}$$

\Rightarrow нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной

Ответ: можно считать, что среднее значение диаметра валика равно 20

3) Среднее время сборки изделия составляет 90 минут. Инженер предложил новый метод сборки изделий. В результате сборки 10 изделий новым способом время сборки составило 79,74, 112, 95, 83, 96, 77, 84, 70, 90 минут. Можно ли считать, что время сборки в среднем сократилось. Уровень значимости считать равным 0.05.

$$1) H_0: \mu = 90$$

$$H_A: \mu < 90$$

$$2) T = \frac{(\bar{x} - 90)}{\sqrt{s^2}}$$

$$3) T|_{H_0} \sim t(n-1)$$

$$4) \begin{array}{c} \text{K.O.} \\ \text{---} \\ t_\alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{A.O.} \\ \text{---} \\ t_{9,0.05} = -t_{9,0.95} = -1,833 \end{array}$$

$$5) \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = 860/10 = 86$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 1416/10 = 141.6 \quad \sqrt{s^2} \approx 11.9$$

$$T_{\text{набл.}} = \frac{(86-90)}{11.9} \sqrt{9} \approx -1,0084$$

$$6) T_{\text{набл.}} = -1,0084 \in [-1,833; +\infty) \leftarrow \text{A.O.}$$

\Rightarrow нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной

Ответ: нет оснований считать, что время сборки сократилось

4) Используя данные задачи 16.1 на стр. 163–164, проверьте гипотезу о равенстве средних значений январских температур в г. Саратове и Алатыре. Уровень значимости считать равным 0.05. Будем считать, что дисперсия температуры неизвестна, но одинакова для г. Саратова и г. Алатыре

$$1) H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$2) T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_{xy}^2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$3) T|_{H_0} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$4) \begin{array}{c} \text{K.O.} \\ \text{---} \\ t_{\frac{\alpha}{2}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{A.O.} \\ \text{---} \\ t_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{K.O.} \\ \text{---} \\ t_{24,0.975} = 2,064 \end{array}$$

$$5) \bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum x_i \approx -11,69$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n_1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \approx 22,1449$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum y_i \approx -13,7538$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n_2} \sum (y_i - \bar{y})^2 \approx 20,0902$$

$$s_{xy}^2 = \frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2} \approx 22,8773 \quad \sqrt{s_{xy}^2} \approx 4,7830$$

$$\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{13}} \approx 0,3922$$

$$T_{\text{набл.}} = \frac{-11,69 + 13,7538}{4,7830 \cdot 0,3922} \approx 1,1002$$

$$6) T_{\text{набл.}} = 1,1002 \in [-2,064; 2,064] \leftarrow \text{A.O.}$$

\Rightarrow нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной

Ответ: можно считать, что средние значения температур в январе в Саратове и Алатыре равны

Таблица 16.2							
Год	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897
Саратов	-19,2	-14,8	-19,6	-11,1	-9,4	-16,9	-13,7
Алатырь	-21,8	-15,4	-20,8	-11,3	-11,6	-19,2	-13,0
Год	1899	1911	1912	1913	1914	1915	
Саратов	-4,9	-13,9	-9,4	-8,3	-7,9	-5,3	
Алатырь	-7,4	-15,1	-14,4	-11,1	-10,5	-7,2	

⑤ Изучается зависимость между показателями X (оценка студента за контрольную работу по теории вероятностей) и Y (оценка студента за экзамен по программированию). Используя данные о показателях X и Y для группы 182, в которой обучается 30 человек, студент Кристиан Бенуа вычислил выборочный коэффициент корреляции и получил значение 0.45. Можно ли, опираясь на эти данные, считать, что показатели X и Y являются положительно коррелированными? Уровень значимости принять равным 0.05

$$1) H_0: \rho_{XY} = 0$$

$$H_A: \rho_{XY} > 0$$

$$2) T = \frac{\sqrt{n-2} \hat{\rho}_{XY}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_{XY}^2}}$$

$$3) T|_{H_0} \sim t(n-2)$$

$$4) \xrightarrow[\text{A.O.}]{\text{K.O.}} t_{28, 0.95} = 1,701$$

$$5) T_{\text{набл.}} = \frac{\sqrt{28} \cdot 0,45}{\sqrt{1 - 0,45^2}} \approx 2,6664$$

$$6) T_{\text{набл.}} = 2,6664 \notin (-\infty, 1,701] \xleftarrow[\text{A.O.}]{\text{K.O.}}$$

\Rightarrow есть основания отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной

Ответ: есть основания считать, что оценки положительно коррелированы

⑥ Влияние прививки на холерную инфекцию (данные Macmillan Publishing Company). Среди 1630 человек, сделавших прививку против холеры, оказалось 5 заболевших. В контрольной группе из 1033 человек, не сделавших прививку, заболевших оказалось 11. Имеется ли зависимость между наличием прививки и заболеваемостью?

$$1) H_0: \text{величины независимы}$$

$$H_A: \text{величины зависимы}$$

$$2) T = n \left(\sum_i^s \sum_j^r \frac{n_{ij}^2}{n_{i \cdot} \cdot n_{\cdot j}} - 1 \right)$$

B_1	B_2		
A_1	n_{11}	n_{12}	$n_{1 \cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2 \cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	n

$$3) T|_{H_0} \sim \chi^2((2-1)(2-1))$$

$$4) \xrightarrow[\text{A.O.}]{\text{K.O.}} \chi^2_{1, 0.95} = 3,84$$

	заболел	не заболел	
привился	5	1625	1630
не привился	11	1022	1033
	16	2647	2663

$$T_{\text{набл.}} = 2663 \left(\frac{5^2}{1630 \cdot 16} + \frac{1625^2}{1630 \cdot 2647} + \frac{11^2}{1033 \cdot 16} + \frac{1022^2}{1033 \cdot 2647} - 1 \right) \approx 6,0849$$

$$6) T_{\text{набл.}} = 6,0849 \notin (-\infty, 3,84] \xleftarrow[\text{A.O.}]{\text{K.O.}}$$

\Rightarrow есть основания отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной

Ответ: можно считать, что есть зависимость между наличием прививки и заболеваемостью