ĐẶNG THÀNH NAM
AUDIT51A, NATIONAL ECONOMICS UNIVERSITY, HA NOI, VIET NAM

CÁC CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC

MÔN TOÁN

- Tài liệu bao gồm 15 chuyên đề soạn theo cấu trúc đề thi TSĐH của bộ giáo dục và đào tạo
- Phân dạng các bài toán kèm theo hệ thống bài tập mẫu và bài tập đề nghị phong phú, đa dạng

HÀ NỘI, 05/ 2012

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn **CÁC CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC** *được viết dựa trên tinh thần mong muốn có một cuốn tài liệu ôn thi hữu ích tổng hợp và đầy đủ các phương pháp giải các dạng toán trong cấu trúc đề thi TSĐH của Bộ giáo dục và đào tào đồng thời phát triển tư duy giải toán của học sinh. Đây là tâm huyết của tác giả và là mong muốn thời học sinh của tác giả. Mục tiêu của cuốn tài liệu là cung cấp các dạng toán thông qua các chuyên đề, mỗi dạng toán sẽ được tác giả tóm lược phương pháp giải kèm theo hệ thống bài tập mẫu và bài tập đề nghị hay và phong phú , mỗi bài toán đều chứa tính sáng tạo chắc chắn sẽ làm bạn đọc thấy thú vị và đam mê. Vì thế không đòi hỏi các bạn phải nhớ phương pháp giải mỗi dạng toán mà phát triển tư duy toán học của bạn đọc, với bài toán cụ thể bạn đọc sẽ tìm được cách giải nào. Mong muốn đây sẽ là tài liệu hữu ích cho bạn đọc những ai thực sự đang ước mơ bước chân vào cánh cửa giảng đường đại học. Cuốn tài liệu này được viết theo 15 chuyên đề:*

Chuyên đề 1: *Khảo sát hàm số và các bài toán liên quan.*

Chuyên đề 2: *Điều kiện để phương trình – hệ phương trình có nghiệm.*

Chuyên đề 3: *Phương trình lượng giác.*

Chuyên đề 4: *Phương trình, bất phương trình vô tỷ.*

Chuyên đề 5: *Hệ phương trình.*

Chuyên đề 6: *Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình mũ, logarit.*

Chuyên đề 7: *Tích phân và ứng dụng.*

Chuyên đề 8: *Hình học không gian.*

Chuyên đề 9: *Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và chứng minh bất đẳng thức.*

Chuyên đề 10: *Hình học giải tích trong mặt phẳng.*

Chuyên đề 11: *Hình học giải tích trong không gian.*

Chuyên đề 12: *Ba đường Cônic.*

Chuyên đề 13: *Các bài toán về số phức.*

Chuyên đề 14: *Nhị thức Newton và ứng dụng.*

Chuyên đề 15: *Các bài toán đếm và số cách chọn tổ hợp.*

Xin được bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới sự giúp đỡ và động viên tinh thần của thầy cô, bạn bè và gia đình trong thời gian hoàn thiện cuốn sách.

Dù đã rất cố gắng nhưng do hạn chế về thời gian và kiến thức hạn chế của tác giả, cộng với phạm vi rộng của cuốn sách nên thật khó tránh khỏi các thiếu sót, tác giả rất mong nhận *được những ý kiến đóng góp của bạn đọc để trong thời gian tới có thể hoàn thiện cuốn tài liệu một cách tổng hợp và đầy đủ, dễ hiểu nhất.*

Hà nội, ngày 31 tháng 5 năm 2012

ĐẶNG THÀNH NAM

MỤC LỤC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 1:

KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
www.VNMATH.com

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Bài toán hàm số và các vấn đề liên quan thuộc loại cơ bản, để giải quyết tốt phần này các em nên lưu ý đến các bước của một bài toán khảo sát và vẽ đồ thị hàm số. Trong chương trình thi Tuyển Sinh đại học chỉ đề cập đến ba dạng hàm số cơ bản đó là hàm số bậc ba, hàm trùng phương và phân thức bậc nhất trên bậc nhất. Cuốn tài liệu này trình bày mẫu các bước của một bài toán khảo sát, ngoài ra các bài toán liên quan được phân theo từng dạng. Đó là các bài toán:

- *Bài toán khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số*
- *Bài toán về tính đơn điệu của hàm số*
- *Bài toán về điều kiện nghiệm của phương trình, hệ phương trình(được trình bày chi tiết trong chương 2)*
- *Bài toán về sự tương giao của đồ thị hàm số*
- *Bài toán về cực trị hàm số*
- *Bài toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm số*
- *Bài toán về các điểm đặc biệt*

BÀI TOÁN KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dưới đây trình bày mẫu cách khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số của ba dạng hàm số là hàm đa thức bậc ba, hàm trùng phương và hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.

<u>Hàm đa thức bậc ba</u>

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$, m là tham số thực.
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

<u>Trình bày:</u>

Khi $m = 1$ ta có hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
+ Tập xác định: $\mathbb{R}$
+ Sự biến thiên:

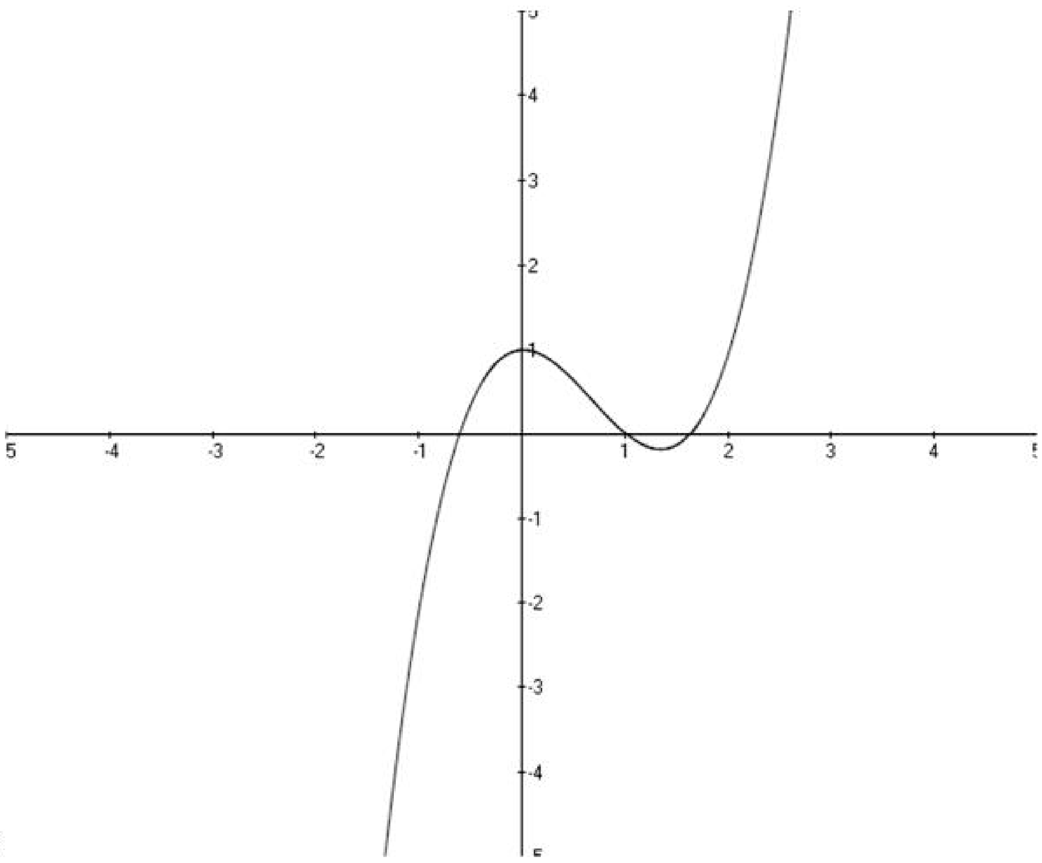
- Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 4x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \dfrac{4}{3}$.

  Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $\left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{4}{3}\right)$.
- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CĐ} = 1$, đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{4}{3}; y_{CT} = -\dfrac{5}{27}$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		4/3		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	0	-	0	+	$+\infty$
y			1				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-5/27	↗	

+ Đồ thị:



$\left(1;0\right)$ $\left(0;1\right)$.

<u>Hàm trùng phương</u>

Cho hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + m$, m là tham số thực.
Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

<u>Trình bày:</u>

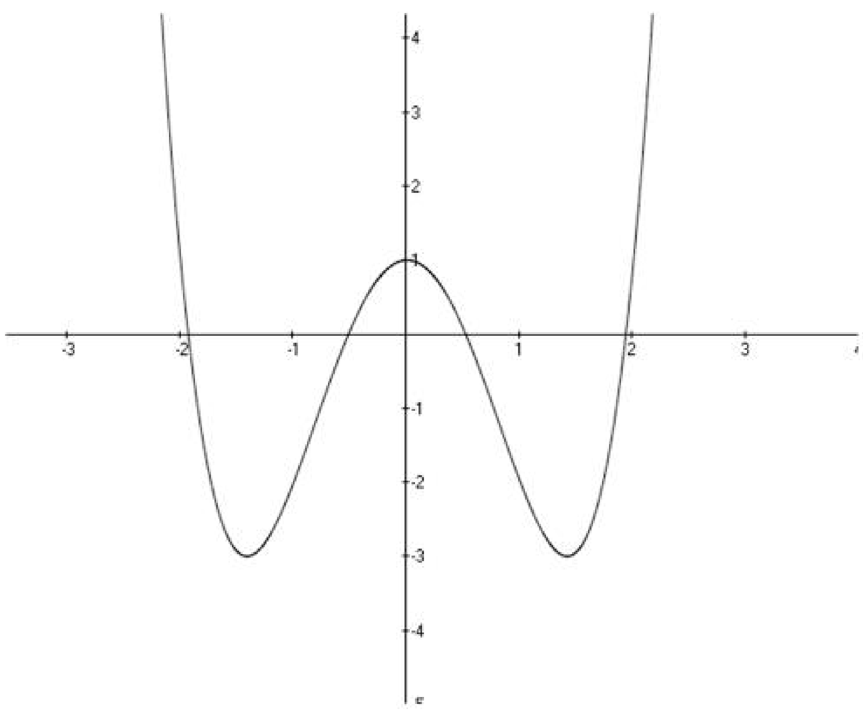
Khi $m = 1$, ta có hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$.
+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$
+ Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$; đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

- Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm\sqrt{2}; y_{CT}=-3$, đạt cực đại tại $x=0; y_{CĐ}=1$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	-∞		-[2]2		0		[2]2		+∞
y'	-∞	-	0	+	0	-	0	+	+∞
y	+∞	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	+∞



+ Đồ thị:

Đ $(0;1)$ $\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}};0\right);\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}};0\right)$.

<u>Hàm bậc nhất trên bậc nhất</u>

Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

<u>Trình bày:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

+ Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

  Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

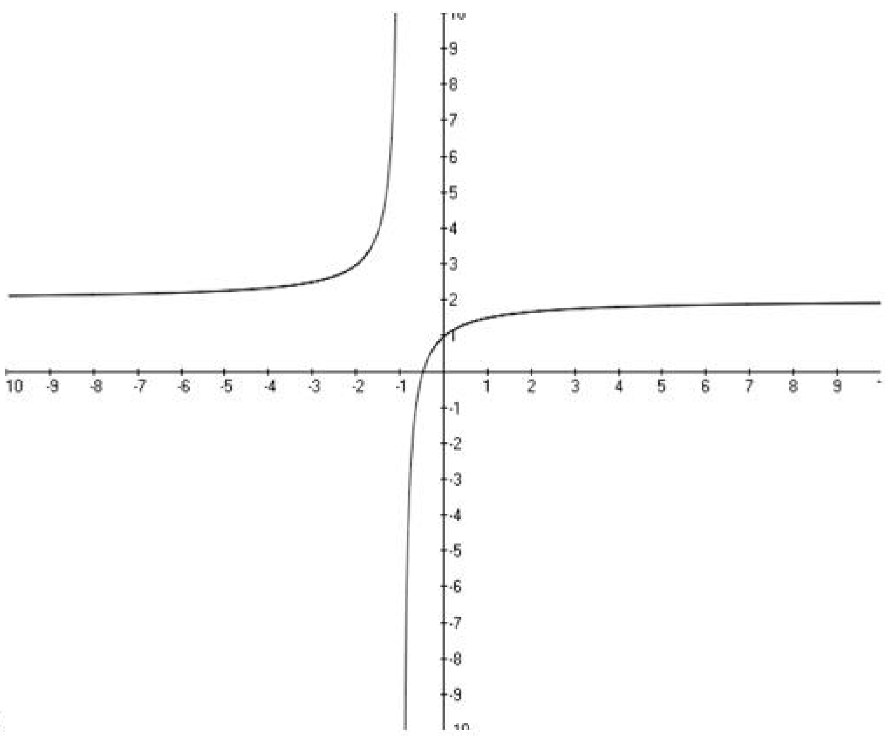
- Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2;$ tiệm cận ngang $y = 2$.

  $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty;$ tiệm cận đứng $x = -1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	0	+	‖	+	0
y	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

+ Đồ thị:



$\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ $\qquad\qquad$ $(0;1)$.

BÀI TOÁN VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

<u>Phương pháp:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \ge 0, \forall x \in (a;b)$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$.

Ta thường biến đổi bất phương trình $f'(x) \ge 0$ thành hai vế một vế là hàm của x còn một vế chứa tham số m.

Có hai dạng bất phương trình sau

$f(x) \ge g(m), \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

$f(x) \le g(m), \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{x\in(a;b)} f(x)$.

Trong đó $g(m)$ là hàm số theo tham số m.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

<u>Lời giải:</u>

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$

Vậy hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta' = m^2 - (m-1)(3m-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (2-m)(1+2m) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$.

Vậy $m \ge 2$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

<u>Lời giải:</u>

+ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $y' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ thì ta phải có $-m \ge 1 \Leftrightarrow m \le 1$

Kết hợp 2 điều kiện trên suy ra $-2 < m \le 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi
$y' \ge 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \le f(x) = 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x)$
Ta có $f'(x) = 6x + 6, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-1) = -3$.
Vậy giá trị cần tìm của m là $m \le -3$.

Bài 4. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$ có $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1$
$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$. Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m+1; +\infty)$.
Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $m + 1 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$.
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.
+ Nếu $m \le 0 \Rightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1; 2) \Rightarrow m \le 0$ thỏa mãn.
+ Nếu $m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.
Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{m}; 0), (\sqrt{m}; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi $\sqrt{m} \le 1 \Leftrightarrow m \le 1$.
Vậy giá trị cần tìm của m là $(-\infty; 1]$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 - m(1+4x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3x^2+2x+2}{1+4x} \ge m, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)$

Ta có $f'(x) = \dfrac{2(6x^2+x-3)}{(4x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{73}}{12} > 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f\left(\dfrac{-1+\sqrt{73}}{12}\right) = \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}$.

Vậy $m \le \dfrac{3+\sqrt{73}}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 2$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 4x + m$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' = x^2 - 4x + m \ge 0, \forall x \in (-\infty;1)$

$\Leftrightarrow m \ge f(x) = -x^2 + 4x, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x\in(-\infty;1)} f(x)$

Ta có $f'(x) = 4 - 2x > 0, \forall x \in (-\infty;1) \Rightarrow \max\limits_{x\in(-\infty;1)} f(x) = f(1) = 3$.

Vậy $m \ge 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 3m - 4$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 1.

Lời giải:

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $y'=3\left(x^2-2mx+1\right)$

Vậy hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 1 khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=1$.

Điều này tương đương với $\begin{cases}\Delta'=m^2-1>0\\ \left|x_1-x_2\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>1\\ \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=1\end{cases}$ (*)

Theo định lý Vi – ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=1\end{cases}$, thay vào (*) ta được

$\begin{cases}m^2>1\\ 4m^2-4=1\end{cases}\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $m\in\left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Cho hàm số $y=x^3-\left(m+1\right)x^2-\left(2m^2-3m+2\right)x+m\left(2m-1\right)$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$

Lời giải:

\+ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-2\left(m+1\right)x-\left(2m^2-3m+2\right)$.

Hàm số đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0,\forall x\geq 2$.

$\Leftrightarrow f(x)=3x^2-2\left(m+1\right)x-\left(2m^2-3m+2\right)\geq 0,\forall x\in\left[2;+\infty\right)$

Vì tam thức $f(x)$ có $\Delta'=7m^2-7m+7>0,\forall m$

Nên $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{m+1-\sqrt{\Delta'}}{3};x_2=\dfrac{m+1+\sqrt{\Delta'}}{3}$.

Vậy $f(x)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq x_2\\ x\leq x_1\end{array}\right.$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;x_1\right),\left(x_2;+\infty\right)$. Vậy hàm số đồng biến trên đoạn $\left[2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$x_2\leq 2\Leftrightarrow\sqrt{\Delta'}\leq 5-m\Leftrightarrow\begin{cases}5-m\geq 0\\ \Delta'\leq\left(5-m\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 5\\ 2m^2+m-6\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m\leq\dfrac{3}{2}$.

Vậy $m\in\left[-2;\dfrac{3}{2}\right]$ là giá trị cần tìm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 10. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+1$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải:

+ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)\ge 0, \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge \dfrac{6-2x}{x^2-2x+3}=f(x), \forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x\in(2;+\infty)} f(x)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-6x+3\right)}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow x^2-6x+3=0\Leftrightarrow x=3+\sqrt{6}>2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(2;+\infty)$ ta suy ra $\max\limits_{x\in(2;+\infty)} f(x)=f(2)=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $m\ge\dfrac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m+2)x^3-(m+2)x^2-(3m-1)x+m^2$.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

1.2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+4m}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

1.3. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2-4x+3$ nghịch biến trên tập xác định.

1.4. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

1.5. Cho hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên cả hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

1.6. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

1.7. Cho hàm số $y=4x^3+(m+3)x^2+mx$. Tìm m để

a. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

b. Hàm số đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

c. Hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

d. Hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

1.8. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đồng biến trên khoảng $\left[2,+\infty\right)$

1.9. Tìm để hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1,1)$.

1.10. Tìm m để hàm số $y=\frac{m-1}{3}x^3+mx^2+(3m-2)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

1.11. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+2(m-1)x^2+(m-1)x+m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup\left[2,+\infty\right)$

1.12. Cho hàm số $y=-x^4+2mx^2-m^2$. Tìm m để

a. Hàm số nghịch biến trên $(1,+\infty)$

b. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1,0)\cup(2,3)$

1.13. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x-m}$. Tìm m để

a. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0,+\infty)$

KHẢO SÁT SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PT, HPT

Phương pháp:

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên miền D

- Nếu $f(x)$ đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm trên D khi đó phương trình $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.
- Nếu tồn tại $a,b\in D$ thỏa mãn $f(a)f(b)<0$ khi đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(a,b)$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5-x^2-2x-1=0$ có đúng 1 nghiệm thực.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phương trình tương đương với : $x^5 = (x+1)^2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$. Với $x \ge 0 \Rightarrow (x+1)^2 \ge 1$. Khi đó để phương trình có nghiệm thì $x^5 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1$.
Vậy ta xét nghiệm của phương trình trên khoảng $[1,+\infty)$.
Ta xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = (2x^4 - 2x) + (3x^4 - 2) > 0, \forall x \in [1,+\infty)$
Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên $[1,+\infty)$. Do đó nếu có nghiệm thì phương trình đã cho sẽ có nghiệm duy nhất.
Mặt khác ta lại có
$f(1) = -3; f(2) = 23 \Rightarrow f(1)f(2) < 0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm thực duy nhất. □

Bài 2. Chứng minh rằng phương trình $x.2^x = 1$ có nghiệm thực duy nhất trong khoảng $(0,1)$.

Lời giải :

Xét hàm số $f(x) = x.2^x - 1$ trên khoảng $(0,1)$
Ta có $f'(x) = 2^x + x2^x \ln 2 = 2^x(1 + x\ln 2) > 0, \forall x \in (0,1)$. Nên hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trong khoảng $(0,1)$.
Mặt khác ta lại có $f(0) = -1; f(1) = 1 \Rightarrow f(0).f(1) = -1 < 0$. Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất trên khoảng $(0,1)$.

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình $\frac{e^x}{(x+1)^2} = x$ có nghiệm thực duy nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Lời giải :

Phương trình tương đương với : $e^x = x(x+1)^2$
Với $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ ta lấy logarit tự nhiên hai vế của phương trình trên ta được
$x - \ln x - 2\ln(x+1) = 0$ (*).
Ta xét hàm số $f(x) = x - \ln x - 2\ln(x+1)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2},1\right]$
Ta có $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x(x+1)} < 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$. Nên $f(x)$ đơn điệu giảm trên đoạn $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Mặt khác ta có $f(1) = 1 - 2\ln 2 < 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2 - 2\ln\frac{3}{2} > 0$
Từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình $x^{x+1}=(x+1)^x$ có nghiệm thực dương duy nhất.

Lời giải :

Điều kiện : $x>0$.

Lấy logarit tự nhiên hai vế của phương trình ta được : $(x+1)\ln x - x\ln(x+1)=0$.

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x - x\ln(x+1)$ trên khoảng $(0,+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

Xét hàm số $g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+\dfrac{2x+1}{x(x+1)}, x\in(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0$, nên hàm số $g(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng $(0,+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+\dfrac{2x+1}{x(x+1)}\right)=0$. Vậy $g(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$. Từ đó suy ra $f'(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$. Vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $(0,+\infty)$.

Mặt khác ta có $f(1)=-\ln 2<0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x .x\right]=+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(1,+\infty)$. Ta có đpcm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Chứng minh rằng phương trình $x^5-10x^3+9x-1=0$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

1.2. Chứng minh rằng phương trình $4^x(4x^2+1)=1$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

1.3. Chứng minh rằng với mỗi nguyên dương n thì phương trình
$x+x^2+x^3+...+x^{2n}+2012x^{2n+1}=2004$ có nghiệm thực duy nhất.

1.4. Chứng minh rằng phương trình :
$\left(\sqrt{x+1}\right)^{2011}-2(x+1)\sqrt{x+1}-x^3-3x^2-3x-2=0$ có nghiệm thực duy nhất.

1.5. Chứng minh rằng phương trình :
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-2}+...+\dfrac{1}{x^n-n}=0, n\in\mathbb{N}^*$ luôn có nghiệm thực duy nhất thuộc khoảng $(0,1)$.

1.6. Chứng minh rằng phương trình : $\lg x=\sin x$ có đúng một nghiệm thực trên đoạn $\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

1.7. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, $n\geq 2$ thì phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{2^2}\right)+...+\tan\left(x+\frac{\pi}{2^n}\right)=0$ có nghiệm thực duy nhất trong khoảng $(0,4)$.

1.8. Cho $n=2k, k\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng phương trình :
$(n+1)x^{n+2}-3(n+2)x^{n+1}+2012^{n+2}=0$.

1.9. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất
$x^3+3(m+1)x^2+3(m^2+1)x+m^3+1=0$.

1.10. Chứng minh rằng phương trình $x^3-3x^2+1=0$ có ba nghiệm phân biệt
$x_1<x_2<x_3$ thỏa mãn $\begin{cases}|x_1|<x_2\\(2-x_1)(2+x_2)(2+x_3)>27\end{cases}$

1.11. Chứng minh rằng với A,B,C là ba góc của một tam giác thì phương trình sau luôn có 4 nghiệm phân biệt
$3^{|x^2-2x|}=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

1.12. Chứng minh rằng với mọi m thì hệ sau luôn có nghiệm
$\begin{cases}f^{(2008)}(x)+f^{(2008)}(y)=0\\x^2-4=m(y-1)\end{cases}$, trong đó $f(x)=(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-2x+3}$

BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong $y=f(x)$ và $y=g(x)$
$f(x)-g(x)=0$ (*)

Khi đó số giao điểm của hai đường cong chính là số nghiệm của phương trình (*).
Trong kì thi Tuyển sinh Đại học và Cao đẳng chỉ xét bài toán giao điểm của đường thẳng với đồ thị của hàm số bậc ba, hàm trùng phương và đồ thị của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.

Kiến thức cần vận dụng:
Hai đường cong tiếp xúc nhau:

Hai đường cong $(C): y=f(x)$ và $(C'): y=g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình:
$\begin{cases}f(x_0)=g(x_0)\\f'(x_0)=g'(x_0)\end{cases}$ có nghiệm x_0.

Tương giao với hàm đa thức bậc ba:

(i). Xét phương trình: $y=ax^3+bx^2+cx+d=0$ (*), $a\neq 0$.
Khi đó phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có hai điểm cực trị thỏa mãn $y_{CD}y_{CT} < 0$.

i.1- Nếu phân tích phương trình (*) thành

$$a(x-x_1)(x^2+px+q)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ g(x) = x^2+px+q \ \ (1) \end{array}\right.$$

Khi đó phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác x_1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = p^2 - 4q > 0 \\ g(x_1) \neq 0 \end{cases}$$

i.2- Định lý Vi-ét

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{b}{a} & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = \dfrac{c}{a} & (2) \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{d}{a} & (3) \end{cases}$$

Một số biến đổi thường dùng:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = (x_1+x_2+x_3)^3 - 3x_3(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)$$

i.3- Phương trình (*) có ba nghiệm lập thành cấp cố cộng khi $x_1+x_3 = 2x_2$ thay vào (1) suy ra $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$, lúc này thay ngược vào phương trình (*) ban đầu sẽ tìm ra giá trị của tham số cần tìm. Tuy nhiên đây chưa phải là điều kiện cần và đủ do đó với mỗi giá trị của tham số tìm được cần giải lại phương trình xem phương trình có ba nghiệm lập thành cấp số cộng hay không. Lúc đó mới chấp nhận giá trị của tham số đó hay không.

i.4- Một cách tương tự phương trình (*) có ba nghiệm lập thành cấp số nhân thì $x_1x_3 = x_2^{\ 2}$, lúc này ta thay vào (3),…

(ii). Xét với $a > 0$ ***, ta có:***

ii.1- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt biệt có hoành độ $> \alpha$, khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\alpha < x_1 < x_2$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} y(\alpha) < 0 \\ y(x_1).y(x_2) < 0 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ii.2- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt biệt có hoành độ $<\alpha$, khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < \alpha$ và thỏa mãn

$$\begin{cases} y(\alpha) > 0 \\ y(x_1).y(x_2) < 0 \end{cases}$$

Với $a<0$, ta biến đổi phương trình hoành độ giao điểm về phương trình có hệ số a dương và áp dụng với trường hợp $a>0$.

<u>Tương giao với hàm trùng phương :</u>

(i). Xét phương trình: $ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$ (*)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, khi đó phương trình trở thành

$$g(t) = at^2 + bt + c = 0 \ (1)$$

i.1- Phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm $0 < t_1 < t_2$. Lúc này phương trình (*) sẽ có bốn nghiệm là:

$$x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$$

i.2- Vậy phương trình (*) có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Định lí Vi-ét với phương trình (1) ta lại có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} \\ t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

<u>Lưu ý:</u> Dạng toán này luôn cần thiết sử dụng đến định lí Vi-ét.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ (1), m là tham số thực

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow x\left(x^2+3x+m\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2+3x+m=0(*)$

Kí hiệu $g(x)=x^2+3x+m$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9-4m>0 \\ g(0)=m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}, m\neq 0.$

Khi đó hoành độ của B,C là nghiệm của phương trình (*)

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B,C lần lượt là

$k_1=3{x_B}^2+6x_B+m;\ k_2=3{x_C}^2+6x_C+m$

Tiếp tuyến tại B,C vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \left(3{x_B}^2+6x_B+m\right)\left(3{x_C}^2+6x_C+m\right)=-1$

$\Leftrightarrow \left(3\left({x_B}^2+3x_B+m\right)-2m-3x_B\right)\left(3\left({x_C}^2+3x_C+m\right)-2m-3x_C\right)=-1$

$\Leftrightarrow \left(2m+3x_B\right)\left(2m+3x_C\right)=-1 \Leftrightarrow 4m^2+6m\left(x_B+x_C\right)+9x_Bx_C=-1(2)$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_B+x_C=-3 \\ x_Bx_C=m \end{cases}$, khi đó (2) trở thành

$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{9\pm\sqrt{65}}{8}$

Bài 4. Cho hàm số $y=x^3-3m^2x+2m$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại đúng 2 điểm phân biệt.

Lời giải:

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt thì đồ thị hàm số (1) phải có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=3x^2-3m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\neq 0$ (*)

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm m$

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại đúng hai điểm khi và chỉ khi hoặc $y_{CT}=0$ hoặc $y_{CD}=0$

$+y(m)=2m-2m^3=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=\pm 1$

$+y(-m)=2m+2m^3=0 \Leftrightarrow m=0$

Chỉ có $m=\pm 1$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-1$ hoặc $m=1$

Bài 5. Cho hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$

Đặt $t = x^2 \geq 0$, khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (*)

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0 \ (2).$$

Khi đó (*) có hai nghiệm là $0 < t_1 < t_2$. Suy ra hoành độ bốn giao điểm lần lượt là $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$. Bốn điểm này lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

$$\Leftrightarrow m + 1 + |m| = 9(m + 1 - |m|) \Leftrightarrow 5|m| = 4(m+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{array}\right. \text{thỏa mãn (2)}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \in \left\{-\frac{4}{9}; 4\right\}$

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6\,(C)$.

Tìm m để đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = mx - 2m - 4$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x^2 - 4x + 1 - m = 0$ (*)

Kí hiệu $g(x) = x^2 - 4x + 1 - m$. Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ -3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$$

Bài 7. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2\,(C_m)$.

Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3-3(m+1)x^2+6mx-2=0$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2-2=3m\left(x^2-2x\right)$ (*)

Nhận thấy $x=0, x=2$ không là nghiệm của phương trình (*), khi đó phương trình (*) tương đương với: $3m=\dfrac{2x^3-3x^2-2}{x^2-2x}$ (1)

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-2}{x^2-2x}$, ta có bảng biến thiên:

x	-∞		1-[2]3		0		1		2		1+[2]3		+∞
y'	2	+	0	-	‖	-	0	-	‖	-	0	+	2
y			3-3*[2]3		‖ +∞		3		‖ +∞				+∞
		↗		↘	‖	↘		↘	‖	↘		↗	
	-∞				-∞ ‖				-∞ ‖		3+3*[2]3		

Từ bảng biến thiên suy ra để phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $3-3\sqrt{3}\le 3m\le 3+3\sqrt{3}\Leftrightarrow 1-\sqrt{3}\le m\le 1+\sqrt{3}$.

Vậy $m\in\left[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right]$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm thì xảy ra một trong hai khả năng

1. Hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến.
2. Hàm số có cực đại, cực tiểu nhưng $y_{CĐ}y_{CT}>0$.

Bạn đọc tự làm theo hướng này và so sánh với kết quả trên.

Bài 8. Cho hàm số $y=x^3+mx+2\left(C_m\right)$.
Tìm m để đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+mx+2=0$

$\Leftrightarrow m=-x^2-\dfrac{2}{x}\ (x\ne 0)$, do $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Xét hàm số $f(x)=-x^2-\dfrac{2}{x}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{2-2x^3}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	+	‖	+	0	-	$-\infty$
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-3	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra để phương trình có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m > -3$

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4\left(C\right)$.
Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A\left(-1;0\right)$ với hệ số góc là k. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

<u>Lời giải:</u>

+ Phương trình đường thẳng $d: y = k\left(x+1\right)$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 4 = k\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2 - 4x + 4 - k\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $\left(x-2\right)^2 = k$ (*)

+ Đường thẳng d cắt $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < k \neq 9$(**)

Khi đó các giao điểm của d và $\left(C\right)$ là

$A\left(-1;0\right), B\left(2-\sqrt{k}; 3k - k\sqrt{k}\right), C\left(2+\sqrt{k}; 3k + k\sqrt{k}\right)$

Ta có $BC = 2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}, d\left(O;BC\right) = d\left(O;d\right) = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

+ Diện tích tam giác OBC là $S_{OBC} = \dfrac{1}{2}BC.d\left(O;BC\right) = k\sqrt{k} = 1 \Leftrightarrow k = 1$ (thỏa mãn điều kiện **).

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + \left(m+3\right)x + 4\left(C_m\right)$
Tìm giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ của hàm số tại ba điểm phân biệt $A\left(0;4\right), B, C$ sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$, biết $K\left(1;3\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+2mx+m+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2+2mx+m+2=0(*)$

Kí hiệu $g(x)=x^2+2mx+m+2$. Khi đó đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\ g(0)=m+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\geq 2\vee m\leq -1\\ m\neq -2\end{cases}(1)$

$B,C\in d \Rightarrow y_B=x_B+4; y_C=x_C+4$ và ta có $d(K;BC)=d(K;d)=\sqrt{2}$.

Vậy $S_{KBC}=\dfrac{1}{2}BC.d(K;BC)=8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC=16 \Leftrightarrow BC^2=256$

$\Leftrightarrow (x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=256 \Leftrightarrow 2(x_B-x_C)^2=256 \Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_Bx_C=128(2)$ Theo định lí Vi-ét ta có: $x_B+x_C=-2m; x_Bx_C=m+2$.

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 4m^2-4(m+2)=128 \Leftrightarrow m^2-m-34=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ thỏa mãn (1).

Vậy $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-(m^2-1)(1)$

Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải:

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m-1=x_{CD}\\ x=m+1=x_{CT}\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi

$\begin{cases}y_{CD}y_{CT<0}\\ x_{CD}>0, x_{CT}>0\\ a.y(0)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-1>0\\ m+1>0\\ (m^2-1)(m^2-3)(m^2-2m-1)<0\\ -(m^2-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4\left(C\right)$

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A\left(2;0\right)$ có hệ số góc k. Tìm k để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại B,C vuông góc với nhau.

Lời giải:

+ Phương trình đường thẳng $d: y = k\left(x-2\right)$

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 4 = k\left(x-2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2 - x - k - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x^2 - x - k - 2 = 0(*)$

Kí hiệu $g(x) = x^2 - x - k - 2$. d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 + 4k > 0 \\ g(2) = -k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < k \neq 0 \ (1)$$

Các tiếp tuyến tại B,C vuông góc với nhau khi và chỉ khi $y'\left(x_B\right).y'\left(x_C\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \left(3x_B{}^2 - 6x_B\right)\left(3x_C{}^2 - 6x_C\right) = -1 \ (2)$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_B + x_C = 1 \\ x_B x_C = -k - 2 \end{cases}$$

Kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

$(2) \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy $k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x\left(C\right)$

Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng $d: y = m\left(x+1\right) + 2$ luôn cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại một điểm cố định M và xác định các giá trị m để d cắt $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt M,N,P sao cho tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại N,P vuông góc với nhau.

Lời giải:

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x = m\left(x+1\right) + 2$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2 - x - 2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x^2 - x - 2 - m = 0(*)$

Do đó d luôn cắt $\left(C\right)$ tại điểm $M\left(-1;2\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

+ d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9+4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m \neq 0 \ (1)$$

Tiếp tuyến tại N, P vuông góc với nhau khi và chỉ khi $y'(x_N).y'(x_P) = -1$

$$\Leftrightarrow \left(3x_N{}^2 - 3\right)\left(3x_P{}^2 - 3\right) = -1 \ (2)$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_B + x_C = 1 \\ x_B x_C = -m-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3} \text{(thỏa (1))}.$$

Vậy $k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 14. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \dfrac{2}{3}\left(C_m\right)$

Tìm m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

Bài 15. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1\left(C_m\right)$

Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị $\left(C_m\right)$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

<u>Lời giải:</u>

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 3m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ hoặc } x^2 = 3m + 1 (*)$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right) \backslash \{0\}$

Bài 16. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m\left(C_m\right)$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ luôn cắt trục hoành tại ít nhất 2 điểm phân biệt với mọi $m < 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m = 0(*)$

Đặt $t = x^2 \geq 0$, khi đó phương trình (*) trở thành $t^2 - 2m^2t + m^4 + 2m = 0(1)$

Ta có $\begin{cases} \Delta' = -2m > 0 \\ S = 2m^2 > 0 \end{cases}$ $\forall m < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm dương

Từ đó suy ra phương trình (*) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.Đó là đpcm.

Bài 17. Tìm m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m\left(C\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$ và trục hoành có phần trên bằng phần dưới trục hoành.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 4x^2 + m = 0$

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow$ phương trình trở thành $t^2 - 4t + m = 0(1)$

Vậy $\left(C\right)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ S = 4 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4 \ (i)$$

Khi đó hoành độ 4 giao điểm của $\left(C\right)$ và Ox là

$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\int_{x_2}^{3}\left(x^4 - 4x^2 + m\right)dx = -2\int_{x_3}^{x_4}\left(x^4 - 4x^2 + m\right)dx \Leftrightarrow 2\int_{0}^{x_3}\left(x^4 - 4x^2 + m\right)dx = -2\int_{x_3}^{x_4}\left(x^4 - 4x^2 + m\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}x_4^{\ 5} - \frac{4}{3}x_4^{\ 3} + mx_4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x_4^{\ 4} - \frac{4}{3}x_4^{\ 2} + m = 0(2)$$

Ta lại có $x_4^{\ 4} - 4x_4^{\ 2} + m = 0(3)$. Từ (2) và (3) suy ra $\frac{9}{4}m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (loại)

Hoặc $m = \frac{20}{9}$(thỏa (i)).

Vậy $m = \frac{20}{9}$ là giá trị cần tìm.

Bài 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + 2m + 1\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D có hoành độ lần lượt là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sao cho tam giác ACK có diện tích bằng 4. Biết rằng $K\left(3, -2\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Phương trình hoành độ giao điểm : $x^4-2\left(m+1\right)x^2+2m+1=0$, đặt $t=x^2\left(t\ge 0\right)$ khi đó phương trình trở thành :

$t^2-2\left(m+1\right)t+2m+1=0(*)$. Để đồ thị $\left(C_m\right)$cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $t_2>t_1>0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2>0\\ S=2\left(m+1\right)>0\\ P=2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\ne 0\ (i)$$

Khi đó hoành độ bốn giao điểm lần lượt là $-\sqrt{t_2},-\sqrt{t_1},\sqrt{t_1},\sqrt{t_2}$.

Ta có $S_{ACK}=\frac{1}{2}d\left(K,AC\right).AC=\frac{1}{2}\left|-2\right|\left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}\right)=4\Leftrightarrow\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=4\Leftrightarrow t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}=16$

Theo định lý Viét ta có : $t_1+t_2=2\left(m+1\right);t_1t_2=\sqrt{2m+1}$, từ đó suy ra :

$2\left(m+1\right)+2\sqrt{2m+1}=16\Leftrightarrow\sqrt{2m+1}=7-m\Leftrightarrow\begin{cases}7-m\ge 0\\ 2m+1=\left(7-m\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow m=4$ thỏa mãn điều kiện *(i)*.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

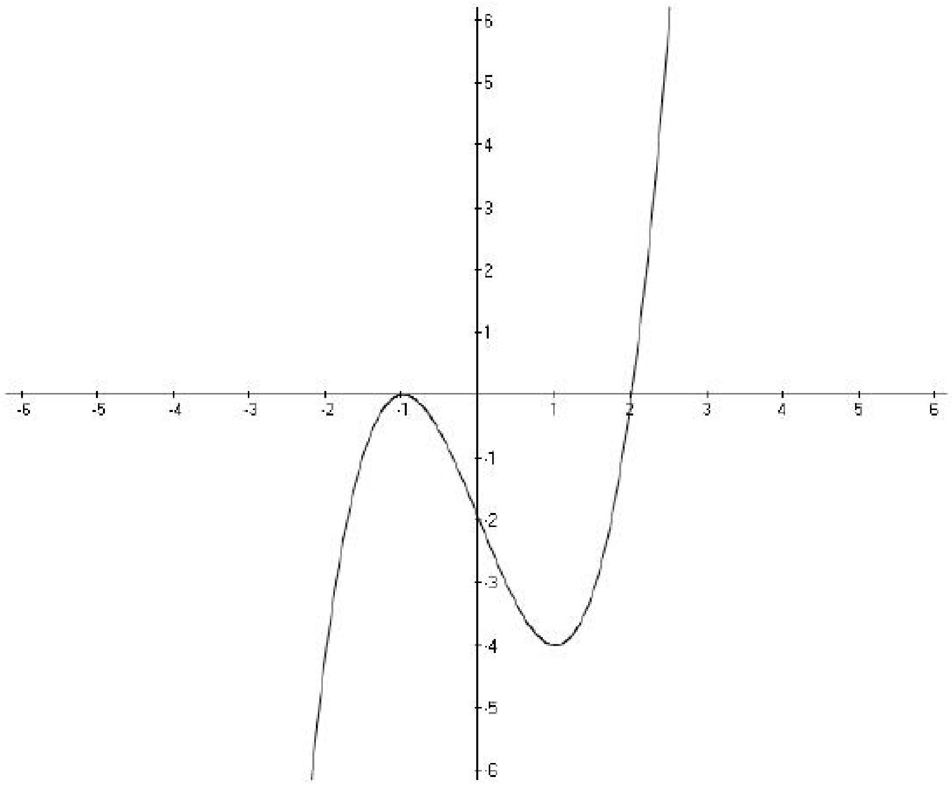
Bài 19. Biết rằng đường thẳng d đi qua điểm $M\left(2;0\right)$ và có hệ số góc k cắt đồ thị hàm số $y=\left|x\right|^3-3\left|x\right|-2$ tại bốn điểm phân biệt. Tìm giá trị của k.

Lời giải:

Đường thẳng $d:y=k\left(x-2\right)$, ta dùng trực quan đồ thị để biện luận số giao điểm của đường thẳng d và đồ thị hàm số $y=\left|x\right|^3-3\left|x\right|-2\ \left(C_1\right)$.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x-2\ \left(C\right)$ có đồ thị như sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

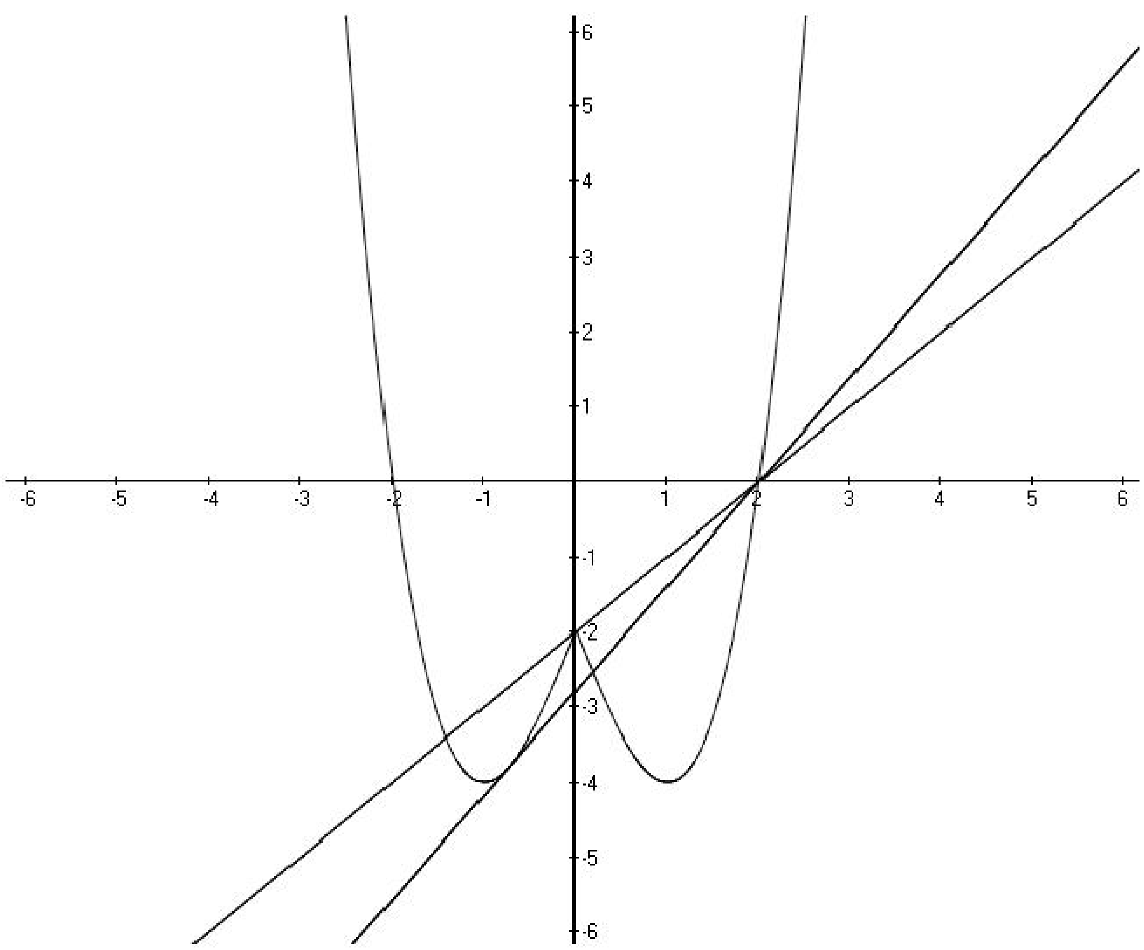


Ta có $y = |x|^3 - 3|x| - 2 = \begin{cases} f(x) = x^3 - 3x - 2, x \ge 0 \\ f(-x) = -x^3 + 3x - 2, x < 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.



Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Để đường thẳng d cắt (C_1) tại bốn điểm phân biệt thì d phải nằm trong miền giới hạn bởi hai đường thẳng trên.

- Đường thẳng thứ nhất đi qua điểm $M(2;0)$ và $A(0;-2)$ có hệ số góc là $k_1 = 1$
- Đường thẳng thứ hai là tiếp tuyến với (C_1) ứng với $x < 0$, ta xác định k_2

Ta có $\begin{cases} -x^3 + 3x - 2 = k_2(x-2) \\ -3x^2 + 3 = k_2 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ k_2 = 6\sqrt{3} - 9 \end{cases}$

Vậy để d cắt (C_1) tại bốn điểm phân biệt, khi và chỉ khi

$k_1 < k < k_2 \Leftrightarrow 1 < k < 6\sqrt{3} - 9$.

Vậy $k \in (1; 6\sqrt{3} - 9)$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4 \ (C_m)$.

2. $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1) \ (C_m)$

3. $y = mx^3 + (m+1)x^2 - (4m-3)x + 6m \ (C_m)$

1.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-3)$ tiếp xúc với đường cong $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

1.3. Tìm những giá trị của tham số m để hai đường cong sau tiếp xúc nhau
$(C_1): y = mx^3 - (m-1)x^2 + (m+1)x + 1$ và $(C_2): y = -mx^2 + (m-1)x - m$

1.4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3(m^2+1)x + m^3 + 1 = 0$ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm.

1.5. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2.

1.6. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$ và $BC = 2\sqrt{2}$.

1.7. Viết phương trình đường thẳng d song song với trục hoành và cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$ và trục hoành có phần nằm phía trên trục hoành bằng phần nằm phía dưới trục hoành.

1.9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \frac{1}{3}$ (C_m) tại giao điểm A của (C_m) với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

1.10. Tìm m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt M, N, P, Q có hoành độ lần lượt $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sao cho MN, NP, PQ là độ dài ba cạnh tam giác.

1.11. Giả sử đồ thị hàm số $y = x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt, khi $m > 0$ gọi A là giao điểm có hoành độ lớn nhất ; tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A cắt trục tung tại B . Tìm m để tam giác OAB có diện tích bằng 24.

1.12. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

1.13. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ thỏa mãn $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_4 < 4$.

1.14. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2(m+2)x^2 + 7(m+1)x - 3(m+4)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 hỏa mãn ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 3x_1x_2x_3 > 53$.

1.15. Chứng minh rằng khi m thay đổi đường thẳng $d_m: y = mx - m^2$ luôn cắt $(C_m): y = x^3 - (3m-1)x^2 + 2m(m-1)x + m^2$ tại một điểm A có hoành độ không đổi. Tìm m để d_m cắt (C_m) tại một điểm nữa khác A mà tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm đó song song với nhau.

1.16. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt $(C_m): y = 4x^3 - 6mx^2 + 1$ tại 3 điểm $A(0;1), B, C$ biết B, C đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

1.17. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^4 - 4x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần trên bằng phần dưới.

1.18. Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3\ (C_m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm cách đều nhau.

1.19. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 3.

1.20. Chứng minh rằng với $m < 0$ thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + m^4$ luôn cắt trục hoành tại ít nhất hai điểm phân biệt.

1.21. Tìm tất cả các giá trị củ tham số m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ tại ba điểm phân biệt.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.22. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A, B, C bằng 3.

1.23. Tìm tất cả các cặp số (m, n) sao cho trong các giao điểm của đồ thị hàm số $y = mx^3 - nx^2 - mx + n$ (C) có hai điểm cách nhau 2011 và khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến trục hoành bằng 2012.

1.24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 3 - x$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 4 - m$ (C) tại ba điểm phân biệt $A(1;2), B, C$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại B, C lần lượt cắt (C) tại M, N và tứ giác $BMNC$ là hình thoi.

1.25. Tìm tất cả các cặp giá trị (m, n) để đường thẳng $d: y = mx + n$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D có hoành độ lần lượt là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sao cho $AB = CD = \frac{1}{2}BC$

1.26. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (2-m)x^2 + 3(2m-3)x + m$ (C_m). Tìm những giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0, m), B, C$, đồng thời OA là phân giác trong góc $\widehat{BOC}$.

1.27. Tìm những giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt A, B, C có hoành độ tương ứng thỏa mãn $(x_A - 2)^3 + (x_B - 2)^3 + (x_C - 2)^3 = 3$.

1.28. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m - 1$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

<u>Tương giao với hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất :</u>

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}(C)$

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ lớn nhất.

<u>Lời giải:</u>

Hoành độ giao điểm của $d: y = x + m$ và (C) là nghiệm phương trình: $x + m = \frac{-x+1}{2x-1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow (x+m)(2x-1) = -x+1$ (do $x = \dfrac{1}{2}$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0(*)$

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*), ta có

$$k_1 + k_2 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{(4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1)^2}.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -m; x_1x_2 = -\dfrac{m+1}{2}$.

Từ đó suy ra $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6 = -4(m+1)^2 - 2 \le -2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $k_1 + k_2 = -2$ khi và chỉ khi $m = -1$

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}(C)$

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = -x - m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của $d: y = -x - m$ và (C) là nghiệm phương trình: $-x - m = \dfrac{x-1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(2x-1) = -x+1$ (do $x = \dfrac{1}{2}$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0(*)$

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*), ta có

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{(2x_1-1)^2} + \frac{1}{(2x_2-1)^2} = \frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{(4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1)^2}$$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -m; x_1x_2 = -\dfrac{m+1}{2}$.

Từ đó suy ra $k_1 + k_2 = 4m^2 + 8m + 6 = 4(m+1)^2 + 2 \ge 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $k_1 + k_2 = 2$ khi và chỉ khi $m = -1$

Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ (C)

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Chứng minh rằng đường thẳng $d: y=-x+m$ luôn cắt đồ thị hàm số (C) tại 2 điểm phân biệt A và B. Tìm m để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $-x+m=\dfrac{2x+1}{x+2}$

$\Leftrightarrow (-x+m)(x+2)=2x+1$

(do $x=-2$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2+(4-m)x+1-2m=0$ (*)

Ta có $\Delta=(4-m)^2-4(1-2m)=m^2+12>0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

Do $A, B \in d \Rightarrow y_A=-x_A+m; y_B=-x_B+m$. Từ đó suy ra

$AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=2(x_A-x_B)^2=2(x_A+x_B)^2-8x_Ax_B$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_A+x_B=m-4; x_Ax_B=1-2m$. Từ đó suy ra

$AB^2=2(m^2+12)\geq 2 \Rightarrow AB\geq\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AB=\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $m=0$

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C)

Đường thẳng d có hệ số góc k đi qua điểm $I(-1;1)$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho I là trung điểm của MN. Tìm k.

Lời giải:

+ Phương trình đường thẳng $d: y=k(x+1)+1$.

+ Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $\dfrac{x-3}{x+1}=k(x+1)+1$

$\Leftrightarrow kx^2+2kx+k+4=0(*)$ (do $x=-1$ không là nghiệm).

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta'=-4k>0 \\ x_1+x_2=-2=2x_I \end{cases} \Leftrightarrow k<0$$

Vậy giá trị cần tìm của k là $(-\infty;0)$

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+4}{1-x}(C)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1;1)$ có hệ số góc k. Tìm k để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho độ dài MN bằng $3\sqrt{10}$

Lời giải:

+ Phương trình đường thẳng $d: y = k(x-1)+1$

+ Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $\frac{2x+4}{1-x} = k(x-1)+1$

Do $x=1$ không là nghiệm nên phương trình tương đương với

$kx^2-(2k-3)x+k+3=0(*)$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = 9-24k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq k < \frac{3}{8}(1)$

Do $M,N \in d \Rightarrow y_M = k(x_M-1)+1; y_N = k(x_N-1)+1$. Suy ra

$MN^2 = (x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2 = (1+k^2)(x_M-x_N)^2 = (1+k^2)\left[(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N\right] = 90$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_M+x_N = \frac{2k-3}{k}; x_Mx_N = \frac{k+3}{k}$. Từ đó suy ra

$8k^3+27k^2+8k-3=0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2+3k-1)=0 \Leftrightarrow k=-3$ hoặc $k = \frac{-3\pm\sqrt{41}}{16}$ (thỏa mãn (1)).

Vậy giá trị cần tìm của k là $\left\{-3; \frac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}(C)$

Tìm m để đường thẳng $d: y = x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho A và B cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Lời giải:

+ Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình: $x+m = \frac{2x-1}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x+m)(x+1) = 2x-1$ (do $x=-1$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2+(m-3)x+1-m=0(*)$. Ta có $\Delta = m^2-2m+5>0, \forall m$. Từ đó suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B.

Do hai điểm $A,B \in d \Rightarrow y_A = x_A+m; y_B = x_B+m$.

Suy ra tọa độ của $A(x_A; x_A+m), B(x_B; x_B+m)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Và $\overrightarrow{OA}=\left(x_A;x_A+m\right),\overrightarrow{OB}=\left(x_B;x_B+m\right)$ Tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_Ax_B+\left(x_A+m\right)\left(x_B+m\right)=0\Leftrightarrow 2x_Ax_B+m\left(x_A+x_B\right)+m^2=0(1)$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_A+x_B=3-m;x_Ax_B=1-m$. Khi đó (1) trở thành

$m^2+m\left(3-m\right)+2\left(1-m\right)=0\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}\left(C\right)$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì trên $\left(C\right)$ luôn có các cặp điểm A và B nằm về hai nhánh của $\left(C\right)$ và thỏa mãn $\begin{cases}x_A-y_A+m=0\\x_B-y_B+m=0\end{cases}$

Lời giải:

+ Ta có $\begin{cases}x_A-y_A+m=0\\x_B-y_B+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_A=x_A+m\\y_B=x_B+m\end{cases}\Rightarrow A,B\in d:y=x+m$

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành chứng minh d luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm thuộc về hai nhánh của $\left(C\right)$.

+ Hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$ là nghiệm phương trình: $x+m=\dfrac{x+2}{x-2}$

$\Leftrightarrow\left(x+m\right)\left(x-2\right)=x+2$ (do $x=2$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow x^2+\left(m-3\right)x-\left(2m+2\right)=0(*)$. Ta có $\Delta=m^2+2m+17>0,\forall m$. Từ đó suy ra d luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt với mọi m .

Mặt khác, kí hiệu $g(x)=x^2+\left(m-3\right)x-\left(2m+2\right)\Rightarrow 1.g\left(2\right)=-4<0\Rightarrow 2$ nằm giữa hai nghiệm của (*). Ta có đpcm.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-2}\left(C\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $\left(d\right):y=x+m$ cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $OA^2+OB^2=\dfrac{37}{2}$.

Lời giải :

Hoành độ giao điểm của $\left(d\right),\left(C\right)$ là nghiệm của phương trình : $\dfrac{x+2}{2x-2}=x+m$

Do $x=1$, không là nghiệm của phương trình nên phương trình tương đương với

$x+2=\left(2x-2\right)\left(x+m\right)\Leftrightarrow 2x^2+\left(2m-3\right)x-2\left(m+1\right)=0(*)$.

Do $\Delta=4m^2+4m+25=\left(2m+1\right)^2+24>0,\forall m\in\mathbb{R}$. Nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Gọi $A\left(x_1, x_1+m\right); B\left(x_2, x_2+m\right)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (C), khi đó theo định lý viét, ta có : $x_1+x_2=-\dfrac{2m-3}{2}; x_1x_2=-(m+1)$

Từ đó suy ra :

$OA^2+OB^2=x_1^{\,2}+\left(x_1+m\right)^2+x_2^{\,2}+\left(x_2+m\right)^2$

$=2\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2+2m\left(x_1+x_2\right)+2m^2$

$=2\left(-\dfrac{2m-3}{2}\right)^2+4(m+1)-2m\left(\dfrac{2m-3}{2}\right)+2m^2$

$=\dfrac{1}{2}\left(4m^2+2m+17\right)$

Vậy $OA^2+OB^2=\dfrac{37}{2}\Leftrightarrow=\dfrac{1}{2}\left(4m^2+2m+17\right)=\dfrac{37}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{2}\vee m=2$.

Vậy $m=-\dfrac{5}{2}; m=2$ là hai giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m}{mx+1}$ $\left(C_m\right)$. Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$, $\left(C_m\right)$ cắt đường thẳng $d: y=2(x-m)$ tại hai điểm phân biệt A, B thuộc một đường (H) cố định. Dường thẳng d cắt trục hoành tại hai điểm M, N. Tìm những giá trị của m để $S_{OAB}=3S_{OMN}$.

1.2. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{1-x}(C)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=mx-m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất, biết điểm $M(-1,1)$.

1.3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=\sqrt{5}$

1.4. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+m}$ $\left(C_m\right)$. Tìm m để đường thẳng $y=x+2$ cắt $\left(C_m\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AB=2\sqrt{2}$

1.5. Với mỗi giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N và cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng $MA=NB$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.6. Cho đường thẳng $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (C) và điểm $A(-2;4)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm phân biệt B,C sao cho tam giác ABC đều.

1.7. Tìm m để đường thẳng $d: y=x+2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\le 4\sqrt{2}$.

1.8. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2(x-1)}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $OA^2+OB^2=\dfrac{37}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ HÀM SỐ

Loại 1 : Điều kiện hàm số $y=f(x)$ có cực trị .

Phương trình $f'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt trở lên.

Loại 2 : Điều kiện để một điểm là cực trị của hàm số.

Cho hàm số $y=f(x)$ điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ là điểm cực trị của hàm số khi đó $f'(x_0)=0$.

(i). Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số

(ii). Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

Loại 3 : Đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số.

Xét với hàm số đa thức bậc 3 : $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$.

Lấy y chia cho y' ta được

$$y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{b}{9a}\right)y'+\left(\frac{2c}{3}-2\frac{b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 thì khi đó $y'(x_1)=y'(x_2)=0$ nên

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\begin{cases} y(x_1) = \left(\dfrac{2c}{3} - 2\dfrac{b^2}{9a}\right)x_1 + d - \dfrac{bc}{9a} \\ y(x_2) = \left(\dfrac{2c}{3} - 2\dfrac{b^2}{9a}\right)x_2 + d - \dfrac{bc}{9a} \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của hàm số nằm trên đường thẳng

$$y = \left(\frac{2c}{3} - 2\frac{b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$$

Lưu ý : Với các hoành độ cực trị không phụ thuộc tham số thì ta không cần thiết phải làm theo cách này, nhưng có chứa tham số thì đây là lựa chọn khôn ngoan.

Loại 4 : Các điểm cực trị thỏa mãn một điều kiện chẳng hạn lập thành tam giác vuông, tam giác đều,…Lúc này chúng ta dựa vào tính chất của tam giác.

Dạng toán : Liên quan đến điều kiện tồn tại cực, cực tiểu- tọa độ cực trị.

Phương pháp :

- Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- Một điểm x_0 là điểm cực tiểu của hàm số thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$ cần phải thử lại xem y' có đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0 hay không.
- Một điểm x_0 là điểm cực đại của hàm số thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$ cần phải thử lại xem y' có đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 hay không.
- Cho hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ hoặc đường tròn $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Xét $\begin{cases} T = (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) \\ V = \left((x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - R^2\right)\left((x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 - R^2\right) \end{cases}$

Khi đó hai điểm A, B nằm cùng phía với d hoặc (C) khi và chỉ khi $T > 0$ hoặc $V > 0$.

Hai điểm A, B nằm khác phía đối với d hoặc (C) khi và chỉ khi $T < 0$ hoặc $V < 0$.

Đặc biệt :

Hai điểm cực trị nằm khác phía với trục tung thì pt $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục hoành thì $y_{CĐ}y_{CT} < 0$ hoặc phương trình $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để hàm số sau có cực trị $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(2m^2 - 3m + 2\right)x + 8$.

Lời giải :

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m^2 - 3m + 2$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 9\right)x^2 + 10$ có 3 cực trị.

Lời giải :

Ta có $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 9\right)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9)$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, điều này tương đương với

$$\begin{cases} -\dfrac{m^2 - 9}{m} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3 \vee m < -3$$

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải :

Ta có $y' = x^3 - 2mx = x\left(x^2 - 2m\right)$

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu tại $x = 0$.

+ Nếu $m < 0$ thì hàm số chỉ có cực tiểu tại $x = 0$.

+ Nếu $m > 0$ thì hàm số có 3 cực trị, nên không thỏa mãn.

Vậy $m \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4. Tìm m để hàm số $y = \left(x - m\right)^3 - 3x$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Lời giải :

Ta có $y' = 3\left(x - m\right)^2 - 3; y'' = 6\left(x - m\right)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3 = 0 \\ -6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Thử lại với $m = -1$ thì hàm số $y = \left(x + 1\right)^3 - 3x$ có $y' = 3\left(x + 1\right)^2 - 3 = 3x\left(x + 2\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua 0. Vậy nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Bình luận : Rất nhiều học sinh cũng như cả các thầy cô không hiểu rõ điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm ; và tất nhiên như trên khi nói điều kiện để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì học sinh lại viết :

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y''(0)>0 \end{cases}$

Lưu ý : Sẽ không có điều tương đương trên, mà chỉ có là nếu đạt cực tiểu tại $x=0$ thì $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y''(0)>0 \end{cases}$ chứ không có điều ngược lại

Do đó khi tìm được giá trị của tham số m thì ta phải thử lại xem có thỏa mãn điều kiện đổi dấu của y' hay không.

Bài 5. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\left(m^2-m+2\right)x^2+\left(3m^2+1\right)x+m-5$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Lời giải :

Ta có $\begin{cases} y'=x^2+2\left(m^2-m+2\right)x+3m^2+1 \\ y''=2x+2\left(m^2-m+2\right) \end{cases}$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ thì $\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-2m>0 \\ 4m-m^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Thử lại với $m=4$ thỏa mãn.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Tìm m để hàm số $y=(x-m)\left(x^2-3x-m-1\right)$ có cực đại và cực tiểu thỏa mãn $\left|x_{CD}.x_{CT}\right|=1$.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-2(m+3)x+2m-1$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa mãn $\left|x_{CD}.x_{CT}\right|=1$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1x_2\right|=1$, điều này tương đương với

$\begin{cases} \Delta'=m^2+7>0 \\ x_1^2x_2^2=\left(\dfrac{2m-1}{3}\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+3)x^2+2(m+1)x+1$ có hai điểm cực trị với hoành độ lớn hơn 1.

Lời giải :

Ta có $y'=x^2-(m+3)x+2(m+1)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-(m+3)x+2(m+1)=0(*)$

Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=m^2-2m+1>0 \Leftrightarrow m\neq 1(i)$

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases}x_1>1\\x_2>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2>2\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m+3>2\\2(m+1)-m-3+1>0\end{cases} \Leftrightarrow m>0$$

Kết hợp với điều kiện (i) suy ra $0<m\neq 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y=2x^3+mx^2-12x-13\,(C_m)$.

Tìm m để (C_m) có cực đại và cực tiểu và các điểm này cách đều trục tung.

Lời giải :

Ta có $y'=2(3x^2+mx-6)$

Phương trình $y'=0$ có $\Delta=m^2+72>0$ nên hàm số luôn đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số cách đều trục tung khi và chỉ khi $|x_1|=|x_2| \Leftrightarrow x_1=-x_2 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-m}{3}=0 \Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+(m^2-3)x$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $x_{CĐ},x_{CT}$ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Lời giải :

Ta có $y'=x^2-mx+m^2-3$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2 và thỏa mãn $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=\frac{5}{2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4 - m^2 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m^2 - 3 > 0 \\ S^2 - 2P = m^2 - 2\left(m^2 - 3\right) = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m > 0 \\ m > \sqrt{3} \vee m < -\sqrt{3} \\ m = \pm \dfrac{\sqrt{14}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Vậy $m = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + \left(2m+1\right)x^2 - \left(m^2 - 3m + 2\right)x - 4$ nằm về hai phía trục tung.

Lời giải :

Để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về hai phía đối với trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow -3x^2 + 2\left(2m+1\right)x - \left(m^2 - 3m + 2\right)$ có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow 3\left(m^2 - 3m + 2\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Vậy $m \in \left(1;2\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có cực đại, cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ phương trình $y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(x_1; y_1\right); B\left(x_2; y_2\right)$

Lấy y chia cho y' ta được : $y = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right)y' - \left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x + 2 - \dfrac{m}{3}$

Do $y'\left(x_1\right) = y'\left(x_2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x_1 + 2 - \dfrac{m}{3} \\ y_2 = -\left(\dfrac{2m}{3} + 2\right)x_2 + 2 - \dfrac{m}{3} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d: y = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x + 2 - \frac{m}{3}$.

Vậy để hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $y = x - 1$ thì hoặc d song song với đường thẳng $y = x - 1$ hoặc trung điểm của AB thuộc đường thẳng $y = x - 1$.

Trường hợp 1 : $-\left(\frac{2m}{3}+2\right) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

Trường hợp 2 : $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} - 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{3}+2\right)\left(x_1+x_2\right) + 2 - \frac{m}{3} = \frac{x_1+x_2}{2} - 1$

Theo định lý vi-ét ta có : $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow -\left(\frac{2m}{3}+2\right) + 2 - \frac{m}{3} = 1 - 1 \Leftrightarrow m = 0$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện

Vậy $m \in \left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm m để cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Lời giải :

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$, vậy để hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;4m^3\right); B\left(2m;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(2m;-4m^3\right)$ và trung điểm của AB là $I\left(m;2m^3\right)$.

Vậy A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ do } m \neq 0.$$

Vậy $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 12. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2-1\right)x - m^3 + m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu đến gốc tọa độ.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi pt $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0,\forall m$.

Từ đó suy ra tọa độ các điểm cực trị là điểm cực đại $A\left(m-1;2-2m\right)$ và điểm cực tiểu $B\left(m+1;-2-2m\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow m=-3\pm 2\sqrt{2}$.

Bài 13. Tìm m để hàm số $y=x^3+\left(1-2m\right)x^2+\left(2-m\right)x+m+2$ có cực trị đồng thời hoành độ cực tiểu nhỏ hơn 1.

Lời giải :

Yêu cầu bài toán tương đương với pt $y'=3x^2+2\left(1-2m\right)x+2-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2<1$.

Cách 1 :

ycbt tương đương với : $\begin{cases}\Delta'=4m^2-m-5>0\\ x_{CT}=\dfrac{2m-1+\sqrt{4m^2-m-5}}{3}<1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5}$

Cách 2 :

Đặt $g(x)=3x^2+2\left(1-2m\right)x+2-m$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\begin{cases}\Delta'=4m^2-m-5>0\\ g(1)=-5m+7>0\\ \dfrac{S}{2}=\dfrac{2m-1}{3}<1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<m<\dfrac{7}{5}$$

Vậy $m\in\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{5}\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 14. Tìm m để hàm số $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+3m\left(m+2\right)x-2+m$ có cực trị, đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại đến trục hoành bằng khoảng cách từ điểm cực tiểu đến trục tung.

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $y' = 3x^2 + 6(m+1)x + 3m(m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+2 \end{array}\right.$

Suy ra hàm số luôn có cực trị

Khi đó tọa độ điểm cực đại $A\left(m; m^3 + 3m^2 + m - 2\right)$ và điểm cực tiểu $B\left(m+2; m^3 + 3m^2 + m - 6\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$\left|m^3 + 3m^2 + m - 2\right| = |m+2| \Leftrightarrow \left|(m+2)\left(m^2 + m - 1\right)\right| = |m+2|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m^2+m-1=1 \\ m^2+m-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-1 \\ m=1 \\ m=0 \end{array}\right.$

Vậy có 4 giá trị cần tìm của m là $\{-2;-1;0;1\}$

Bài 15. Tìm các giá trị thực của tham số m để điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + \frac{4}{3}(m+1)^3$ nằm khác phía với đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

Lời giải:

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2(m+1) \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq -1$

Khi đó tọa độc hai điểm cực trị là $A\left(0; \frac{4}{3}(m+1)^3\right); B\left(2(m+1); 0\right)$

Đường tròn (T) có tâm $I(2;0)$ bán kính $\mathbb{R} = 1$

Hai điểm A, B nằm khác phía với đường tròn (T) khi và chỉ khi $\left(IA^2 - R^2\right)\left(IB^2 - R^2\right) < 0 \Leftrightarrow \left(3 + \frac{16}{9}(m+1)^6\right)\left(4m^2 - 1\right) < 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là những giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ có cực trị.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.2. Tìm m để hàm số $y = x^4 + 3mx^2 + m^2 + m$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

1.3. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3(m-2)x^2 + (m-4)x + 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = -1$.

1.4. Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Với giá trị nào của tham số m để hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

1.5. Cho hàm số $y = x^4 + (m+3)x^3 + 2(m+1)x^2$. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$ hàm số luôn có cực đại mà hoành độ không dương.

1.6. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{1}{2}$. Xác định m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

1.7. Chứng minh rằng với mọi tham số m hàm số $y = x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1$ không đồng thời có cực đại và cực tiểu.

1.8. Tìm m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có đúng 1 cực trị.

1.9. Tìm m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có cực đại x_1 và cực tiểu x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2{}^3 = 26$.

Đáp số : $m = -1$.

1.10. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ luôn có cực đại, cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa cực đại, cực tiểu không đổi.

1.11. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 9x - m - 1$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

1.12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(5m+1)x - (4m^3 + 2)$. Tìm những giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_0 \in (1;2]$.

Đáp số: $m \in \left[-\frac{1}{3};0\right)$.

1.13. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Đáp số : $m \in (-\infty;3)$.

1.14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $x_{CĐ}, x_{CT}$ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

1.15. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + m$ có cực đại, cực tiểu nằm vế hai phía đối với đường thẳng $x - y = 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.16. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$.

1.17. Tìm điểm M trên đường thẳng $y = x - 2$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hoành độ các đểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ là các số dương.

1.19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hoành độ các điểm cực trị x_1, x_2 của đồ thị hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$ thỏa mãn $x_1 = -4x_2$.

1.20. Xác định m để hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.

1.21. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m + 1$ đạt cực tại $x_1 < x_2$ sao cho $x_1 < 2 < x_2$.

1.22. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

1.23. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

1.24. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x + 1$ có cực đại, cực tiểu đồng thời ${x_{CĐ}}^2 - x_{CT} = 0$.

1.25. Tìm m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

1.26. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5m}{2}x^2 - 4mx - 4$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \frac{m^2}{{x_1}^2 + 5mx_2 + 12m} + \frac{{x_2}^2 + 5mx_1 + 12m}{m^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.27. Tìm m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có cực trị, khi đó tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng nối điểm cực đại và cực tiểu.

1.28. Tìm m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ nằm về hai phía đối với đường tròn $x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.29. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - 12m + 8$ có hai điểm cực trị $A; B$ sao cho tổng độ dài $MA + MB$ nhỏ nhất với $M(3;2)$.

1.30. Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2) + m^3 + 3m^2$ luôn có hai điểm cực trị ; đồng thời khoảng cách giữa hai điểm cực trị không đổi.

Dạng toán : Đường thẳng đi qua điểm cực đại cực tiểu

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để điểm $A(3;5)$ nằm trên đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+6)x + 1$

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -2 \end{array}\right.$ (*)

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$

Lấy y chia cho y' ta được : $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{m}{3}\right)y' + 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$

Do $y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2(-m^2 + m + 6)x_1 + m^2 + 6m + 1 \\ y_2 = 2(-m^2 + m + 6)x_2 + m^2 + 6m + 1 \end{cases}$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là

$d : y = 2(-m^2 + m + 6)x + m^2 + 6m + 1$, theo đề bài $A(3;5) \in d$ nên

$5 = 6(-m^2 + m + 6) + m^2 + 6m + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\frac{8}{5} \end{array}\right.$ đối chiếu với điều kiện (*) suy ra chỉ nhận giá trị $m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+mx$. Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: 72x-12y-35=0$.

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi pt $y'=x^2-(m+1)x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=(m+1)^2-4m>0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{m+1}{6}\right)y'-\frac{1}{6}(m-1)^2x+\frac{1}{6}m(m+1)$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=-\frac{1}{6}(m-1)^2x_1+\frac{1}{6}m(m+1) \\ y_2=-\frac{1}{6}(m-1)^2x_2+\frac{1}{6}m(m+1) \end{cases}$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d: y=-\frac{1}{6}(m-1)^2x+\frac{1}{6}m(m+1)$

Để M,N đối xứng nhau qua Δ thì trước tiên phải có

$d\perp\Delta \Leftrightarrow -\frac{1}{6}(m-1)^2.6=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

❖ Với $m=0 \Rightarrow M(0;0);N\left(1;-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$ trung điểm của MN là $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{12}\right)\notin\Delta$. Nên loại $m=0$.

❖ Với $m=2 \Rightarrow M\left(1;\frac{5}{6}\right);N\left(2;\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ trung điểm của MN là $I\left(\frac{3}{2};\frac{9}{12}\right)\notin\Delta$. Nên loại $m=2$.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ luôn có cực đại, cực tiểu đồng thời gọi $(x;y)$ là hoành độ, tung độ các điểm cực trị thì ta luôn có $2x-y+\frac{1}{4}\geq 0$.

Lời giải :

Ta có $y'=-3x^2+6mx+3(1-m^2)=0$, có $\Delta=1\ \forall$m . Nên luôn có hai nghiệm phân biệt hay hàm số luôn có cực trị với mọi m.

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{m}{3}\right)y'+2x-m^2+m$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=2x_1-m^2+m\\ y_2=2x_2-m^2+m\end{cases}$

Nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=2x-m^2+m$

Từ đó suy ra hoành độ, tung độ các điểm cực trị thỏa mãn $2x-y+\frac{1}{4}=m^2-m+\frac{1}{4}=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$. Từ đó ta có đpcm.

Bài 4. Chứng minh rằng với những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}(m+1)x^2+3mx-\frac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu thì ta luôn có $(x^3-y)x\geq 0$.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-3(m+1)x+3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=1\end{array}\right.$

Để hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m\neq 1$.

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}(m+1)\right)y'-\frac{1}{2}(m-1)^2x$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=-\frac{1}{2}(m-1)^2x_1\\ y_2=-\frac{1}{2}(m-1)^2x_2\end{cases}$

Nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=-\frac{1}{2}(m-1)^2x$

Từ đó suy ra hoành độ, tung độ các điểm cực trị thỏa mãn $(x^3-y)x=x^4+\frac{1}{2}(m-1)^2x^2\geq 0$. Từ đó ta có đpcm.

Bài 5. Với mỗi giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+m^2x+\frac{m^2}{9}$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y-x}{x+y}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=3x^2+2x+m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt, khi và chỉ khi $\Delta'=1-3m^2>0 \Leftrightarrow 0\le m^2<\frac{1}{3}$

Khi đó gọi tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$

Lấy y chia cho y', ta được : $y=\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)y'+\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x$

Do $y'(x_1)=y'(x_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x_1 \\ y_2=\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x_2 \end{cases}$

Nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x$

Vậy $P=\frac{y-x}{x+y}=\frac{\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x-x}{\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}\right)x+x}=\frac{\frac{2}{3}m^2-\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}m^2+\frac{7}{9}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{\frac{2}{3}t-\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}t+\frac{7}{9}}$, với $t=m^2\in\left[0;\frac{1}{3}\right)$

Ta có $f(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\left[0;\frac{1}{3}\right)$, nên suy ra $P=f(t)\ge f(0)=-\frac{11}{7}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{11}{7}$ khi $m=0$.

Bài 6. Tìm các giá trị thực của m để đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tiếp xúc với đường tròn $(T):(x-m)^2+(y-m-1)^2=5$

Lời giải :

Dễ thấy hai điểm cực trị là $A(0;1);B(2;-3)$, suy ra phương trình đi qua hai điểm cực trị của hàm số là $d:2x+y-1=0$

Đường tròn (T) có tâm $I(m;m+1)$ và bán kính $\mathbb{R}=\sqrt{5}$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$d(I;(d))=\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{|2m+m+1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow m=\pm\frac{5}{3}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Đáp số : $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

1.2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có cực đại, cực tiểu nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

1.3. Tìm m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ vuông góc với đường thẳng $3x - y - 7 = 0$.

1.4. Tìm những giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$ tạo với đường thẳng $x + 4y - 20 = 0$ một góc bằng 45^0.

1.5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

1.6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ là nhỏ nhất.

1.7. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ có cực đại, cực tiểu chạy trên một đường thẳng cố định.

1.8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ song song với đường thẳng $y = -4x + 3$.

1.9. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ luôn có cực đại, cực tiểu đồng thời gọi $(x; y)$ là hoành độ, tung độ các điểm cực trị thì ta luôn có $2x - y + \dfrac{1}{4} \geq 0$.

1.10. Chứng minh rằng với những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \dfrac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - \dfrac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x; y)$ là tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu thì ta luôn có $(x^3 - y)x \geq 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.11. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - \frac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời hoành độ, tung độ các điểm cực trị thỏa mãn $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(y - \frac{1}{2}x\right) \geq 0$; trong đó $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực trị.

1.12. Chứng minh rằng với những giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m+1)x^2 + 3mx - \frac{1}{2}m(m+1)$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực đại, cực tiểu thì ta luôn có $\frac{x-y}{x} > 1$.

1.13. Với mỗi giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + m^2x + \frac{m^2}{9}$ có cực đại, cực tiểu ; đồng thời gọi $(x;y)$ là tọa độ các điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y-x}{x+y}$.

<u>Dạng toán</u>: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác

Bài 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba điểm của một tam giác vuông cân.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$, vậy với $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số có 3 cực trị.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1); B\left(-m;1-m^4\right); C\left(m;1-m^4\right)$, ta thấy B, C đối xứng với nhau qua trục tung. Vậy ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân thì sẽ vuông tại A.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-m;-m^4\right); \overrightarrow{AC} = \left(m;-m^4\right)$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$, do $m \neq 0$.

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị có bán kính bằng 1.

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$, vậy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1); B\left(-\sqrt{m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{m};1-m^2\right)$

Gọi I là tâm và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do B, C đối xứng với nhau qua trục tung nên tam giác ABC cân tại A, do đó tâm I nằm trên Oy, giả sử :

$$I(0;y) \Rightarrow IA = R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(y-1)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow I_1(0;0); I_2(0;2)$$

Với $I_1(0;0) \Rightarrow I_1B = R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m + \left(1-m^2\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$, do $m > 0$ nên chỉ nhận $m = 1; m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Với $I_2(0;2) \Rightarrow I_2B = R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m + \left(1+m^2\right)^2} = 1$, phương trình này vô nghiệm do $m > 0 \Rightarrow m + \left(1+m^2\right)^2 > 1$.

Vậy $m = 1; m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là hai giá trị cần tìm.

Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là O.

Lời giải:

Ta có $y' = x^3 - 2(3m+1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $3m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$ (i)

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là:

$A(0;2m+2), B\left(-\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1\right), C\left(\sqrt{6m+2}; -9m^2 - 4m + 1\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$y_A + y_B + y_C = 0 \Leftrightarrow -18m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}; m = -\dfrac{2}{3}$. Chỉ giá trị $m = \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $m=\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\left(C_m\right)$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$.

Lời giải :

Ta có $y'=4x^3-4mx \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $m>0$

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là $A\left(0;2\right),B\left(-\sqrt{m};-m^2+2\right),C\left(\sqrt{m};-m^2+2\right)$

Gọi $I\left(x;y\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó

$$\begin{cases} IA^2=ID^2 \\ IB^2=IC^2 \\ IA^2=IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+1=0 \\ 2x\sqrt{m}=-2x\sqrt{m} \\ \left(x+\sqrt{m}\right)^2+\left(y-2+m^2\right)^2=x^2+\left(y-2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0;y=1 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Do $m>0$ nên chỉ có $m=1$ thỏa mãn. Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải :

Ta có $y'=4x^3-4x\left(1-m^2\right)=4x\left(x^2-1+m^2\right)$. Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1-m^2>0 \Leftrightarrow -1<m<1 (i)$

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là :

$A\left(0;1+m\right);B\left(-\sqrt{1-m^2};\sqrt{1-m^2}\right);C\left(\sqrt{1-m^2};\sqrt{1-m^2}\right)$

Ta có $BC=2\sqrt{1-m^2}$, phương trình đường thẳng $BC: y=\sqrt{1-m^2}$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}d\left(A;BC\right).BC=\left(1-m^2\right)^2\sqrt{1-m^2}\le 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=1$ (thỏa mãn (i)).

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2-4$. Xác định m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - m\right) = 0$. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$ (*)

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị của hàm số 1 :

$A\left(0;2m^2-4\right), B\left(\sqrt{m};m^2-4\right), C\left(-\sqrt{m};m^2-4\right)$

Nhận thấy $A \in Oy; B, C$ đối xứng với nhau qua trục tung nên tam giác ABC cân tại A.

Kẻ $AH \perp BC$ khi đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}\left|y_A - y_B\right|\left|2x_B\right| = \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn (*)).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Tìm m để hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba cực trị, đồng thời ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ độ dài cạnh bên.

<u>Lời giải :</u>

Ta có $y' = 4x^3 + 2(3m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{3m+1}{2} \end{array}\right.$

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $-\frac{3m+1}{2} > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$ (*)

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là

$A(0;-3); B\left(\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; -\frac{(3m+1)^2}{4} - 3\right); C\left(-\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; -\frac{(3m+1)^2}{4} - 3\right)$

Tam giác ABC cân tại A, vậy nên yêu cầu bài toán tương đương với $BC = \frac{2}{3}AB$

$\Leftrightarrow 9.4\left(\frac{-3m-1}{2}\right) = 4.\left(\frac{-3m-1}{2} + \frac{(3m+1)^4}{16}\right) \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$ thỏa (*)

Vậy $m = -\frac{5}{3}$ là gía trị cần tìm của tham số m.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

1.2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

1.4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

1.5. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

1.6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

1.7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

1.8. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2\left(m-2\right)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

1.9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$. Xác định giá trị của tham số m để đồ thị hàm số trên có cực đại, cực tiểu tạo thành.

1. Một tam giác đều.
2. Một tam giác vuông.
3. Một tam giác có diện tích bằng 16.

1.10. Tìm tất cả các cặp số $\left(m,n\right)$ sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + n$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều ngoại tiếp đường tròn có tâm là gốc tọa độ.

1.11. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

1.12. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2\left(m+1\right)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$ với O là gốc tọa độ, A là điểm trên trục tung.

1.13. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \left(3m+1\right)x^2 + 2\left(m+1\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

<u>Dạng toán:</u> Hai điểm cực trị và một điểm khác tạo thành một tam giác

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu và gốc tọa độ tạo thành vuông tại O.

<u>Lời giải:</u>

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3\left(m^2 - 1\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=9+9\left(m^2-1\right)>0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó gọi $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ là tọa độ hai điểm cực trị.

Lấy y chia cho y', ta được:

$y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)y'+2m^2x-2\left(m^2+1\right)$. Do $y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=2m^2x_1-2\left(m^2+1\right) \\ y_2=2m^2x_2-2\left(m^2+1\right) \end{cases}$

Vậy tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+\left(2m^2x_1-2\left(m^2+1\right)\right)\left(2m^2x_2-2\left(m^2+1\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4\left(m^2+1\right)\left(x_1+x_2\right)+4\left(m^2+1\right)^2=0 \ (*)$

Nhưng theo định lý vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=1-m^2 \end{cases}$, khi đó (*) trở thành

$\left(m^2-1\right)\left(3+4m^2-4m^4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$ tất cả các giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $m\neq 0$.

Vậy $m\in\left\{\pm 1;\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+3\left(1-m\right)x+1+3m$ có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải:

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-2x+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m>0$.

Khi đó gọi $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$ là tọa độ hai điểm cực trị.

Lấy y chia cho y' ta được:

$y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)y'-2mx+2m+2$, do $y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=-2mx_1+2m+2 \\ y_2=-2mx_2+2m+2 \end{cases} \Rightarrow AB: y=-2mx+2m+2$

Ta có $AB=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+4m^2\left(x_1-x_2\right)^2}=\left|x_1-x_2\right|\sqrt{4m^2+1}$; $d\left(O;AB\right)=\frac{\left|2m+2\right|}{\sqrt{1+4m^2}}$

Vậy $S_{OAB}=\frac{1}{2}.d\left(O;AB\right).AB=\left|x_1-x_2\right|.\left|m+1\right|=4$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow 16 = (m+1)^2\left((x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right)$ (*)

Theo định lý vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 1-m \end{cases}$, khi đó (*) trở thành $m(m+1)^2 = 4 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+3m+4) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thỏa mãn điều kiện $m > 0$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.

Lời giải :

Ta có $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

Tọa độ 2 điểm cực trị là $A(0;m); B(-2;m+4)$

Yêu cầu bài toán tương đương với :

$$\cos\widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}}{OA.OB} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2m(m+4) = |m|\sqrt{m^2+8m+20} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{-12+\sqrt{132}}{3} \end{array}\right.$$

Bài 4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2-1)x - 3m^2 - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

Lời giải :

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2-1)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $\Delta' = 9m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Giả sử A, B là hai điểm cực trị của hàm số, khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(1-m;-2-2m^3), B(1+m;-2+2m^3)$

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi $OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}(m \neq 0)$.

Vậy $m = \pm\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Tìm m để đồ thi hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m-1)x^2+(m-2)x+1$ có hai điểm cực trị A và B đồng thời tứ giác $OADB$ là hình bình hành, với O là gốc tọa độ và $D\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Lời giải :

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=x^2-(m-1)x+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=(m-1)^2-4(m-2)=(m-3)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 3$

Khi đó hoành độ hai điểm cực trị $x_A=1; x_B=m-2$

Vì tứ giác $OADB$ là hình bình hành nên trung điểm của AB cũng là trung điểm của OD, từ đó suy ra

$$\begin{cases} x_A+x_B=x_D \\ y_A+y_B=y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=3 \\ y_A+y_B=y_D \end{cases}$$

Suy ra $m=4 \Rightarrow A\left(1;\frac{11}{6}\right); B\left(2;\frac{5}{3}\right) \Rightarrow \frac{11}{6}+\frac{5}{3}=\frac{7}{2}$ thỏa mãn $y_A+y_B=y_D$

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ có hai điểm cực trị là A, B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trọng tâm.

Lời giải :

Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+12m$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

Tương đương với $\Delta'=(m+1)^2-4m>0 \Leftrightarrow m\neq 1$

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là $A(2;9m); B(2m;-4m^3+12m^2-3m+4)$

Yêu cầu bài toan tương đương với

$$\begin{cases} 2+2m-1=0 \\ 9+-4m^3+12m^2-3m+4-\frac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn}$$

Vậy $m=-\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4 .

1.2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$ có cực trị đồng thời các điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác vuông tại O.

1.3. Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho diện tích tam giác MAB bằng 2.

1.4. Tìm m để đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

1.5. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x - 12m + 8$ và điểm $M(3;2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

1.6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3\left(m^2 - 1\right)x + 3m^2 + 1$ có hai điểm cực trị A, B cùng với điểm $C(2;1)$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ CỰC TRỊ HÀM SỐ

1.1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng $4\sqrt{2}$, biết rằng $I(1;1)$.

1.2. Tìm tất các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+1)x - 1$ có 2 cực trị cùng dấu.

1.3. Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ cắt đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 0$ theo một dây cung có độ dài bằng $\frac{4\sqrt{30}}{5}$.

1.4. Tìm $m > 0$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có 2 điểm cực trị và khoảng các từ điểm cực tiểu đến đường thẳng d bằng 2 lần khoảng cách từ điểm cực đại tới d, biết rằng $d: y = x$.

1.5. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m + 1$ luôn có hai điểm cực trị, đồng thời đường thẳng nối hai điểm cực trị tạo với trục hoành một góc không đổi.

CÁC BÀI TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Xét hai bài toán cơ bản :

Bài toán 1: Tiếp tuyến tại một điểm.

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M\left(x_0; f(x_0)\right)$ có dạng là $d: y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$

Bài toán 2: Tiếp tuyến đi qua một điểm.

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ có hệ số góc k có dạng là $d: y = k\left(x - x_0\right) + y_0$

Khi đó hệ $\begin{cases} f\left(x\right) = k\left(x - x_0\right) + y_0 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm, giải hệ này suy ra k. Từ đó viết phương trình của tiếp tuyến.

Bài toán 3 : Cho hai đường cong $\left(C\right): y = f(x)$ và $\left(d\right): y = g(x)$. Hãy tìm tất cả các tiếp tuyến chung của $\left(d\right), \left(C\right)$.

Giả sử $\left(\Delta\right)$ là tiếp tuyến chung của $\left(d\right), \left(C\right)$. Và $\left(\Delta\right)$ tiếp xúc với $\left(C\right), \left(d\right)$ lần lượt tại các điểm có hoành độ x_1, x_2.

Khi đó

$\left[\begin{array}{l} \left(\Delta\right): y = f'(x_1)\left(x - x_1\right) + f(x_1) \\ \left(\Delta\right): y = g'(x_2)\left(x - x_2\right) + g(x_2) \end{array}\right.$ từ đó ta có hệ phương trình

$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases}$ giải hệ này ra nghiệm x_1, x_2.

Từ đó viết phương trình tiếp tuyến chung: $\left(\Delta\right): y = f'(x_i)\left(x - x_i\right) + f(x_i)$.

Một số kiến thức bổ sung :

Hai đường thẳng $\left(d_1\right): y = k_1 x + m$ và $\left(d_2\right): y = k_2 x + n$

Khi đó :

1. $\left(d_1\right) // \left(d_2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m \neq n \end{cases}$

2. $\left(d_1\right) \perp \left(d_2\right) \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

3. Góc tạo bởi hai đường thẳng này là : $\tan\alpha = \dfrac{\left|k_2 - k_1\right|}{\left|1 + k_1 k_2\right|}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Lưu ý : *Tại một điểm M thuộc đồ thị hàm số thì có thể tồn tại tiếp tuyến tại điểm hoặc tiếp tuyến đi qua điểm nó, vì vậy cần xem kỹ đề bài yêu cầu tìm loại tiếp tuyến nào để không bỏ sót tiếp tuyến.*

BÀI TẬP MẪU

Dạng toán : Viết phương trình tiếp tuyến thỏa mãn một số điều kiện cơ bản

- Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị hàm số.
- Tiếp tuyến đi qua một điểm A cho trước.
- Tiếp tuyến song song(có cùng hệ số góc), vuông góc(tích hệ số góc bằng -1) hoặc tạo với một đường thẳng cho trước một góc α .

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}\left(C_m\right)$.
Gọi M là điểm có hoành độ bằng -1 thuộc $\left(C_m\right)$. Tìm m để tiếp tuyến với $\left(C_m\right)$ tại M song song với đường thẳng $5x-y=0$. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải:

+ Hệ số góc của đường thẳng $5x-y=0$ là $k=5$. Để tiếp tuyến tại M song song với $d:5x-y=0$ suy ra $y'(-1)=m+1=5\Leftrightarrow m=4$. Suy ra $y(-1)=-2$.
Vậy tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: y=5\left(x+1\right)-2\Leftrightarrow \Delta: y=5x+3$.
Vậy tiếp tuyến cần tìm là $5x-y+3=0$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\left(C\right)$.
Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $\left(C\right)$ tại điểm uốn và chứng minh Δ là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải:

Ta có $y'=x^2-4x+3$ và $y''=2x-4\Rightarrow y''(x)=0\Leftrightarrow x=2$. Suy ra điểm $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$ là điểm uốn của $\left(C\right)$. Ta có $y'(2)=-1$. Vậy tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm uốn có phương trình là $y=-\left(x-2\right)+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=-x+\frac{8}{3}.$

Hệ số góc tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm bất kì là $k=x^2-4x+3=\left(x-2\right)^2-1\geq -1$.
Từ đó suy ra đpcm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1\left(C\right)$.
Chứng minh rằng trên $\left(C\right)$ tồn tại vô số cặp điểm mà mà hai tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại từng cặp điểm song song với nhau.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Bài toán trở thành chứng minh tồn tại vô số số k để phương trình $3x^2 - 6x = k(*)$ có hai nghiệm phân biệt.
Xét phương trình (*), có $\Delta' = 9 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -3$. Do đó mọi $k > -3$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt. Ta có đpcm.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 8x + 5\left(C\right)$.
Chứng minh rằng không tồn tại tiếp tuyến tại hai điểm thuộc đồ thị hàm số mà vuông góc với nhau.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 8 = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{20}{3} > 0, \forall x(*)$.
+ Giả sử ngược lại tồn tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thuộc đồ thị hàm số sao cho tiếp với đồ thị hàm số tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Khi đó
$y'(x_1)y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \left(3{x_1}^2 - 4x_1 + 8\right)\left(3{x_2}^2 - 4x_2 + 8\right) = -1$, mâu thuẫn với (*).
Vậy ta có đpcm.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3 + \left(1 - 2m\right)x^2 + \left(2 - m\right)x + m + 2(1)$.
Tìm m để đồ thị hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ một góc $\alpha, \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Lời giải:

+ Gọi hệ số góc của tiếp tuyến là k suy ra tiếp tuyến có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left(k; -1\right)$, véc tơ pháp tuyến của d là $\overrightarrow{n_2} = \left(1;1\right)$.
Từ đó suy ra :

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\left|k-1\right|}{\sqrt{2\left(k^2+1\right)}} \Leftrightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \vee k = \frac{2}{3}.$$

Khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\left[\begin{array}{l} y'=\dfrac{3}{2} \\ y'=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1 \geq 0 \\ \Delta'_2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2-2m-1\geq 0 \\ 4m^2-m-3\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\geq \dfrac{1}{2} \vee m\leq -\dfrac{1}{4}.$

Vậy giá trị cần tìm của m là $\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1\,(C_m)$. Tìm các giá trị của m sao cho tồn tại duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

Lời giải:

+ Đường thẳng $x+2y-3=0$ có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{2}$ nên tiếp tuyến vuông góc với nó có hệ số góc bằng 2, khi đó ta có

$mx^2+2(m-1)x+(4-3m)=2 \Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+(2-3m)=0(*)$

Khi đó yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi phương trình (*) có duy nhất một nghiệm âm.

+ Nếu $m=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ (loại).

+ Nếu $m\neq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2-3m}{m} \end{array}\right.$

Vậy (*) có duy nhất một nghiệm âm khi và chỉ khi $\dfrac{2-3m}{m}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}(C)$.

Tìm điểm những điểm thuộc đồ thị hàm số (C) sao cho khoảng cách từ giao điểm hai đường tiệm cận đến tiếp tuyến với (C) tại điểm đó có khoảng cách lớn nhất.

Lời giải:

+ Giao điểm hai đường tiệm cận $I(-2;2)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Giả sử điểm $A\left(a;\dfrac{2a}{a+2}\right)$ là điểm cần tìm, khi đó tiếp tuyến với (C) tại A là

$d: y=\dfrac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\dfrac{2a}{a+2} \Leftrightarrow d: 4x-(a+2)^2y+2a^2=0$

Ta có $d(I;d)=\dfrac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \le \dfrac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}}=2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a+2)^4=16 \Leftrightarrow a=0 \vee a=-4$

Vậy có hai điểm thỏa mãn $A(0;0), A_2(-4;4)$.

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

Lời giải :

Ta có $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y'.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+4-3m=2$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=4m^2-4m+1>0 \\ S=\dfrac{2(1-m)}{m}>0 \\ P=\dfrac{2-3m}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Tìm điểm A thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$ (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B,C khác A sao cho $AC=3AB$ (B nằm giữa A và C).

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét điểm $A\left(a,\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}\right)\in(C)$

Tiếp tuyến với (C) tại A có phương trình là :

$d: y=(2a^3-6a)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}$, khi đó hoành độ giao điểm của d và (C) là

$(2a^3-6a)(x-a)+\dfrac{a^4}{2}-3a^2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{x^4}{2}-3x^2+\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-6)=0$

Để $d\cap(C)$ tại hai điểm phân biệt khác A thì phương trình : $x^2+2ax+3a^2-6=0$ có hai nghiệm phân biệt khác a.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a^2+3a^2-6\neq 0 \\ \Delta'=6-2a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}<a<\sqrt{3} \\ a\neq \pm 1 \end{cases}$

Khi đó gọi $B(x_B;y_B);C(x_C;y_C)$, có $AC=3AB$ (B nằm giữa A,C) nên $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow x_C-3x_B=-2a$, kết hợp với định lý vi-ét ta có hệ

$\begin{cases} x_C-3x_B=-2a \\ x_C+x_B=-2a \\ x_Cx_B=3a^2-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=0 \\ x_C=-2a \\ a=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện, suy ra có hai điểm $A_1\left(-\sqrt{2};-\dfrac{3}{2}\right);A_2\left(\sqrt{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ cần tìm.

Bài 10. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ (C) tại điểm A thuộc (C), biết tiếp tuyến cắt trục hoành tại B và tam giác OAB vuông(O là gốc tọa độ).

Lời giải:

Xét điểm $A\left(a-1;\dfrac{a+2}{a}\right)\in(C), a\neq 0$. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm A có phương trình:

$d: y=-\dfrac{2}{a^2}(x-a+1)+\dfrac{a+2}{a}$

Hệ số góc của d là $k_1=-\dfrac{2}{a^2}$

Tam giác OAB vuông nên chỉ có thể vuông tại O hoặc A.

Trường hợp 1: Tam giác OAB vuông tại $O\Rightarrow A$ thuộc trục tung hay tiếp điểm $A(0;3)$. Suy ra tiếp tuyến $d_1: y=-2x+3$.

Trường hợp 2: Tam giác OAB vuông tại A

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Hệ số góc của đường thẳng $OA: k_2 = \dfrac{\dfrac{a+2}{a} - 0}{a-1-0} = \dfrac{a+2}{a(a-1)}$

Vậy $k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{a^2}.\dfrac{a+2}{a(a-1)} = -1 \Leftrightarrow (a+1)(a-2)(a^2+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$

Với $a=-1 \Rightarrow d_2 : y = -2x-5$

Với $a=2 \Rightarrow d_3 : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

Vậy tất cả có ba tiếp tuyến cần tìm là

$d_1 : y = -2x+3; d_2 : y = -2x-5; d_3 : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $M\left(\dfrac{3}{4};1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (C) tại điểm A có hoành độ bằng 1 thuộc (C) đạt giá trị lớn nhất.
Đáp số: $m=1$.

1.2. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ (C) luôn đi qua hai điểm cố định A, B với mọi m. Tìm m để tiếp tuyến với (C) tại A và B vuông góc với nhau.

1.3. Tìm m để trên đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (4m+2)x + 1$ tồn tại đúng một điểm mà tiếp tuyến tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $x + 10y + 30 = 0$.
Đáp số: $m = 5$.

1.4. Đường thẳng $y = 3 - x$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 4 - m$ (C) tại A. Tìm m để tiếp tuyến với (C) tại A cắt (C) tại điểm B khác A thỏa mãn tam giác AIB vuông, với $I(1;2)$.

Dạng toán : Tiếp tuyến cùng với hai trục tọa độ tạo thành tam giác

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - mx + 1 - m\,(C_m)$.
Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại giao điểm của (C_m) với trục tung, tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Tọa độ giao điểm M của $\left(C_m\right)$ với trục tung là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x=0 \\ y=x^3-mx+1-m \end{cases} \Rightarrow M\left(0;1-m\right) \Rightarrow y'(0)=-m$. Vậy phương trình tiếp tuyến với $\left(C_m\right)$ tại điểm M là: $d: y=-mx+1-m$. Khi đó d cắt các trục tọa độ tại các điểm $M\left(0;1-m\right), N\left(\dfrac{1-m}{m};0\right)$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=8 \Leftrightarrow \left|1-m\right|\left|\frac{1-m}{m}\right|=16 \Leftrightarrow \left(1-m\right)^2=16\left|m\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9\pm 4\sqrt{5} \\ m=-7\pm 4\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy có 4 giá trị của m như trên thỏa mãn đề bài.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}\left(C\right)$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho OAB là tam giác vuông cân, ở đây O là gốc tọa độ.

Lời giải:

Ta có $y'=\dfrac{-1}{\left(2x+3\right)^2}$. Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=\pm x$. Vậy hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1.

Suy ra $-\dfrac{1}{\left(2x_0+3\right)^2}=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$

+ Khi $x_0=-2 \Rightarrow y(-2)=0$, lúc đó tiếp tuyến là $d: y=-\left(x+2\right) \Leftrightarrow d: y=-x-2$.

+ Khi $x_0=-1 \Rightarrow y(-1)=1$, lúc đó tiếp tuyến là $y=-x$, không cắt các trục tọa độ tại hai điểm nên loại.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $d: y=-x-2$.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}\left(C\right)$.

Tìm điểm M thuộc $\left(C\right)$ sao cho tiếp tuyến tại M của $\left(C\right)$ cắt Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{1}{4}$, ở đây O là gốc tọa độ.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm. Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là:

$d: y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0}{x_0+1}\Leftrightarrow d: y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}x+\dfrac{2x_0^{\ 2}}{(x_0+1)^2}$

Từ đó suy ra $A\left(-x_0^{\ 2};0\right), B\left(0;\dfrac{2x_0^{\ 2}}{(x_0+1)^2}\right)$.

Ta có $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow OA.OB=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left|x_0^{\ 2}\right|\left|\dfrac{2x_0^{\ 2}}{(x_0+1)^2}\right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+ Với $x_0=1\Rightarrow M_1(1;1)$.

+ Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M_2\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$.

Vậy có hai điểm $M_1(1;1), M_2\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ cần tìm.

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại A,B sao cho tam giác OAB cân tại O (với O là gốc tọa độ).

Lời giải :

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}+1\right)$ thuộc đồ thị hàm số

$d: y=\left(3x_0^{\ 2}-2x_0\right)(x-x_0)+x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}+1$

Khi đó giao điểm của d với Ox là $A\left(\dfrac{2x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}-1}{3x_0^{\ 2}-2x_0};0\right)$, giao điểm của d với Oy là $B\left(0;-2x_0^{\ 3}+x_0^{\ 2}+1\right)$.

Tam giác OAB cân tại O nên $OA=OB$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{2x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}-1}{3x_0^{\ 2}-2x_0}\right|=\left|-2x_0^{\ 3}+x_0^{\ 2}+1\right|$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}-1}{3x_0^{\ 2}-2x_0}=-2x_0^{\ 3}+x_0^{\ 2}+1\\ \dfrac{2x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}-1}{3x_0^{\ 2}-2x_0}=2x_0^{\ 3}-x_0^{\ 2}-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Với $x_0=1\Rightarrow A\equiv B\equiv O\Rightarrow$ loại trường hợp này.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Với $x_0 = -\frac{1}{3}$ ta có tiếp tuyến $d: y = x + \frac{32}{27}$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$.

Lời giải :

- Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 là $d: y = -3x + m + 2$.
- Khi đó d cắt Ox tại $A\left(\frac{m+2}{3};0\right)$ và cắt Oy tại $B\left(0;m+2\right)$
- Vậy $S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\frac{m+2}{3}\right|\left|m+2\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(m+2\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5 \end{array}\right.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ biết rằng tiếp tuyến này tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

1.2. Viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ biết rằng tiếp tuyến này tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{6}$.

1.3. Viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2\left(x+1\right)}$ biêt rằng tiếp tuyến tạo với hai trục tọa một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

1.4. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - \left(2m+1\right)x^2 + \left(m+2\right)x + \frac{1}{3}$ tại giao điểm đồ thị hàm số với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

<u>Dạng toán :</u> Số tiếp tuyến đi qua một điểm đến đồ thị hàm số

- Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước đến đồ thị hàm số.
- Tìm những điểm trên mặt phẳng tọa độ kẻ được một, hai, ba hoặc không có tiếp tuyến nào đi qua đến đồ thị hàm số.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 1. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1\left(C\right)$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M\left(-1;-9\right)$.

Lời giải:

+ Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ đi qua điểm $M\left(-1;-9\right)$ có hệ số góc k là $d: y = k\left(x+1\right) - 9$, gọi x là hoành độ tiếp điểm, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k\left(x+1\right) - 9 (1) \\ 12x^2 - 12x = k (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được: $4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^2\left(4x-5\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \dfrac{5}{4}$

+ Với $x = -1 \Rightarrow k = 24 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = 24x + 15$.

+ Với $x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow k = \dfrac{15}{4} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{21}{4}$.

Vậy hai tiếp tuyến cần tìm là $d_1: 24x - y + 15 = 0$ và $d_2: 15x - 4y - 21 = 0$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2}\left(C\right)$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải:

+ Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ có hệ số góc k là $d: y = kx + \dfrac{3}{2}$, gọi x là hoành độ tiếp điểm, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2} = kx + \dfrac{3}{2} (1) \\ 2x^3 - 3x = k (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$.

+ Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \dfrac{3}{2}$.

+ Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow k = \sqrt{2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = \sqrt{2}x + \dfrac{3}{2}$.

+ Với $x = -\sqrt{2} \Rightarrow k = -\sqrt{2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $d: y = -\sqrt{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 2\,(C)$ kẻ từ điểm $A(0;2)$.

Lời giải:

+ Nhận thấy $A(0;2) \in (C)$.

+ Xét tiếp tuyến với (C) tại A, ta có

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\left(x^2-3\right) = \begin{cases} -3\left(x\to 0^+\right) \\ = 3\left(x \to 0^-\right)\end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $y'(0)$. Vậy không có tiếp tuyến với (C) tại A.

+ Xét tiếp tuyến có hệ số góc k đi qua A có phương trình là $d: y = kx + 2$

Do (C) đối xứng qua trục tung nên chỉ cần xét trên khoảng $(0;+\infty)$, khi đó $y = x^3 - 3x + 2$ và ta có hệ $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = kx + 2 \\ 3x^2 - 3 = k \end{cases}$ có nghiệm

Hệ này vô nghiệm trên $(0;+\infty)$. Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua A.

<u>Kết luận:</u> Không có tiếp tuyến nào kẻ từ A đến (C).

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2\,(C)$.

Tìm điểm M trên (C) sao cho chỉ có một tiếp tuyến với (C) đi qua M.

Lời giải:

Giả sử điểm $M\left(x_0; x_0^3 - 3x_0 + 2\right) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua M có dạng $y = k\left(x - x_0\right) + x_0^3 - 3x_0 + 2$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = k\left(x - x_0\right) + x_0^3 - 3x_0 + 2 (1) \\ 3x^2 - 3 = k (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2x^3 - 3x_0x^2 + x_0^3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - x_0\right)^2\left(2x + x_0\right) = 0 (*)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x_0 \Leftrightarrow \dfrac{-x_0}{2} = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M(0;2)$.

Bài 5. Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x^2$, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Giả sử $M\left(x_0;0\right)$ là điểm cần tìm, khi đó tiếp tuyến với (C) đi qua M có dạng là $d: y=k\left(x-x_0\right)$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x^3+3x^2=k\left(x-x_0\right)(1) \\ 3x^2+6x=k(2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$2x^3+3\left(1-x_0\right)x^2-6xx_0=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $2x^2+3\left(1-x_0\right)x-6x_0=0(*)$

Kí hiệu, $g(x)=2x^2+3\left(1-x_0\right)x-6x_0$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, khác không.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9{x_0}^2+30x_0+9>0 \\ g(0)=-6x_0\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0<-3 \\ -\dfrac{1}{3}<x_0\neq 0 \end{array}\right.(1)$$

Tại điểm $M\left(0;0\right)$ tiếp tuyến với đồ thị hàm số chính là trục hoành, dễ thấy không có tiếp tuyến nào vuông góc với tiếp tuyến này.Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại các điểm có hoành độ x_1,x_2 (x_1,x_2 là nghiệm của (*)) vuông góc với nhau.

Hệ số góc của các tiếp tuyến này là $k_1=3{x_1}^2+6x_1;k_2=3{x_2}^2+6x_2$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $k_1.k_2=-1\Leftrightarrow\left(3{x_1}^2+6x_1\right)\left(3{x_2}^2+6x_2\right)=-1\Leftrightarrow 9\left(x_1x_2\right)^2+18x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+36x_1x_2=-1(2)$ Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{3\left(x_0-1\right)}{2};x_1x_2=-3x_0$, khi đó (2) trở thành

$-27x_0+1=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{27}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{27};0\right)$ là điểm duy nhất cần tìm.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}(C)$. Tìm những điểm trên trục tung kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành.

Lời giải:

\+ Giả sử $A\left(0;a\right)$ là điểm cần tìm, đường thẳng đi qua A với hệ số góc k là $d: y=kx+a$.

d tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1}=kx+a \\ \dfrac{-3}{\left(x-1\right)^2}=k \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow PT:\left(1-a\right)x^2+2\left(a+2\right)x-\left(a+2\right)=0(*)$ có nghiệm $x\neq 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Kí hiệu: $g(x)=(1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)$, từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a\neq 0 \\ \Delta' = 3a+6>0 \\ g(1)=3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<a\neq 1(1).$$

Khi đó ta có $y_1=1+\frac{3}{x_1-1}, y_2=1+\frac{3}{x_2-1}$. Để hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành khi và chỉ khi $y_1y_2<0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x_1-1}\right)\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0(2)$

Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1+x_2=\frac{2(a+2)}{a-1}; x_1x_2=\frac{a+2}{a-1}$, khi đó (2) trở thành

$3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}$. Kết hợp với điều kiện (1) suy ra $-\frac{2}{3}<a\neq 1$.

Vậy những điểm trên trục tung có hoành độ x thỏa mãn $-\frac{2}{3}<x\neq 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-2}$ (C) và hai điểm $A(4;2); B\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C)(M, N là các tiếp điểm) sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN bằng $\sqrt{5}$.

1.2.

<u>Dạng toán:</u> Tiếp tuyến cắt hai đường tiệm cận

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$. Tìm những điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

+ Giả sử điểm $M\left(m;2+\frac{1}{m-2}\right)$ là điểm cần tìm, khi đó tiếp tuyến với (C) tại M có phương trình là: $d: y=-\frac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\frac{1}{m-2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\frac{2}{m-2}\right)$.

+ Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B\left(2m-2;2\right)$.

Ta có $AB^2=4\left[\left(m-2\right)^2+\frac{1}{\left(m-2\right)^2}\right]\ge 8\sqrt{\left(m-2\right)^2.\frac{1}{\left(m-2\right)^2}}=8$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left(m-2\right)^2=\frac{1}{\left(m-2\right)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1\left(1;1\right),M_2\left(3;3\right)$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}\left(C\right)$.

Tìm trên $\left(C\right)$ những điểm mà tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại điểm đó cắt các đường tiệm cận của $\left(C\right)$ tại A,B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất(I là giao điểm của hai đường tiệm cận hàm số).

Lời giải:

+ Giả sử điểm $M\left(m;2+\frac{3}{m-1}\right)\in\left(C\right)$ là điểm cần tìm, tọa độ $I\left(1;2\right)$.

+ Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại M là $d:y=\frac{-3}{\left(m-1\right)^2}\left(x-m\right)+2+\frac{3}{m-1}$.

+ Tọa độ giao điểm của d với các tiệm cận của $\left(C\right)$ là $A\left(1;2+\frac{6}{m-1}\right),B\left(2m-1;2\right)$

+ Tam giác IAB vuông tại I , ta có $IA=\frac{6}{\left|m-1\right|};IB=2\left|m-1\right|\Rightarrow IA.IB=12.$

Chu vi tam giác IAB bằng :

$p=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\ge 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $IA=IB\Leftrightarrow\left(m-1\right)^2=3\Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm $M_1\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right),M_2\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1;2)$.

1.2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-2)x + 3m$ đi qua điểm $A\left(1;-\frac{55}{27}\right)$.

1.3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến tại hai điểm cố định thuộc đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ vuông góc với nhau.

1.4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C). Tìm hai điểm A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$.

1.5. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{5}$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

1.6. Tìm các giá trị thực của tham số m để từ điểm $M(1,2)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$.

1.7. Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại hai tiếp tuyến phân biệt với đồ thị hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có cùng hệ số góc k, sao cho đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa mãn $OA = 2012OB$.

1.8. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ cắt đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

1.9. Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (m-2)x + 3m$ đi qua điểm $A\left(1,-\frac{55}{27}\right)$.

1.10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để trên đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{m}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x$ tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại đó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

1.11. Tìm những điểm trên trục hoành kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x + 2$.

Tương tự :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Tìm tất cả các điểm trên trục hoành kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $\left(C\right): y = x^3 + 3x^2$ biết có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

2. Tìm trên đường thẳng $y = 2$ các điểm kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x\left(C\right)$.

3. Cho hàm số $y = 3x - x^3$ $\left(C\right)$. Tìm trên đường thẳng $y = -x$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt đến $\left(C\right)$.

4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ $\left(C\right)$. Tìm những điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt đến $\left(C\right)$.

5. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ $\left(C\right)$. Tìm những điểm trên trục hoành kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt đến $\left(C\right)$.

6. Tìm những điểm trên trục tung kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $\left(C\right): y = x^4 - x^2 + 1$.

1.12. Tìm hai điểm A, B phân biệt thuộc đồ thì hàm số $\left(C\right): y = x^3 - 3x + 2$ sao cho tiếp tuyến tại A, B song song vơi nhau và đường thẳng đi qua hai điểm đó vuông góc với đường thẳng $x + y + 2012 = 0$.

1.13. Cho hàm số $y = x^3 - 2011x\left(C\right)$. Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm M_1 (có hoành độ bằng $x_1 = 1$) cắt $\left(C\right)$ tại điểm $M_2 \neq M_1$, tiếp theo tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M_2 cắt $\left(C\right)$ ở điểm $M_3 \neq M_2$ và cứ như vậy tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M_{n-1} cắt $\left(C\right)$ ở điểm $M_n \neq M_{n-1}\left(3 \leq n \in \mathbb{N}\right)$. Giả sử điểm $M_n\left(x_n, y_n\right)$, hãy tìm n để $2011x_n + y_n = 2^{2012}$.

1.14. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $\left(C_m\right): y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm m để tiếp tuyến tại hai điểm cố định đó vuông góc với nhau.

1.15. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2\left(C\right)$. Trên $\left(C\right)$ lấy hai điểm A, B có hoành độ tương ứng là a, b. Tìm điều kiện của a và b sao cho tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại A, B song song với nhau.

1.16. Tìm điểm $A \in \left(C\right): y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$ sao cho tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt B, C khác A sao cho $AC = 3AB$ (B nằm giữa A, C).

1.17. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$ $\left(C\right)$ biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $MN = OM\sqrt{2}$ với O là gốc tọa độ.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.18. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ (C) biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại A,B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OAB lớn nhất.

1.19. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+3}{x-m}\left(C_m\right)$. Tìm những giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của $\left(C_m\right)$ cắt hai đường tiệm cận của $\left(C_m\right)$ tại A,B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng 64(I là giao điểm của hai đường tiệm cận).

1.20. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C) biết tiếp tuyến tạo với hai đường tiệm cận một giác có chu vi bằng $4+2\sqrt{2}$.

1.21. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C) biết tiếp tuyến cắt hai trục tọa độ tại A,B sao cho đường trung trực của AB đi qua gốc tọa độ.

1.22. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ hai điểm A,B phân biệt sao cho tiếp tuyến tại hai điểm có song song với nhau và độ dài đoạn AB lớn nhất.

1.23. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để tồn tại ít nhất một điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ biêt tiếp tuyến tại điểm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $y=2m-1$.

1.24. Tìm trên hai nhánh của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ hai điểm M,N sao cho tiếp tuyến tại hai điểm đó cắt các đường tiệm cận tạo thành một hình thang.

1.25. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ và điểm M bất kỳ thuộc (C), gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. tiếp tuyến tại M cắt hai đường tiệm cận tại A,B.

1. Chứng minh M là trung điểm của AB.
2. Chứng minh diện tích tam giác IAB không đổi.
3. Tìm m để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

1.26. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ tại điểm thuộc đồ thị mà có khoảng cách đến đường thẳng $3x+4y-2=0$ bằng 2.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.27. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tìm trên (C) những điểm mà tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại A,B sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất.

1.28. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Tìm trên (C) những điểm mà tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB lớn nhất(I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C)).

1.29. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng tiếp tuyến với (C) tại điểm M bất kỳ trên (C) luôn cắt các đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B và M là trung điểm của AB .

1.30. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C). Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) tại điểm bất kỳ thuộc (C) luôn tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

1.31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C). Gọi d là một tiếp tuyến bất kỳ của (C), I là giao điểm của hai đường tiệm cận . Viết phương trình đường thẳng d biết khoảng cách từ I đến d là lớn nhất.

1.32. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Tìm những điểm trên trục tung những điểm kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

1.33. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đó cách đều hai điểm $A(2;4),B(-4;-2)$.

1.34. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$ biết rằng tiếp tuyến đó cắt các tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt tại A,B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận.

1.35. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ (C), biết d cắt hai đường tiệm cận của (C) tại A,B.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1. Diện tích tam giác IAB lớn nhất(với I là giao điểm của hai đường tiệm cận).

2. Độ dài đoạn thẳng $AB = 2\sqrt{10}$.

1.36. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A\left(2;4\right)$ và $B\left(-4;-2\right)$.

1.37. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$, biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho trung trục của AB đi qua gốc tọa độ.

CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số có tính chất đặc biệt:

Lưu ý:

- Tâm đối xứng của hàm bậc ba là điểm uốn, tâm đối xứng của hàm phân thức là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Các bài toán:

- Tìm điểm cố định thuộc đồ thị hàm số hoặc quỹ tích các điểm cố định.
- Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng qua một điểm hoặc qua một đường thẳng cho trước.
- Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận hoặc đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.
- Tìm điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất.
- Tìm những điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số(với hàm phân thức).
- Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \dfrac{11}{3}\left(C\right)$. Tìm trên $\left(C\right)$ hai điểm phân biệt M, N đối xứng với nhau qua trục tung.

Lời giải:

+ giả sử điểm $M\left(x_1;y_1\right), N\left(x_2;y_2\right) \in \left(C\right)$. Khi đó M, N đối xứng với nhau qua trục tung khi và chỉ khi

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \neq 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2 + 3x_1 - \frac{11}{3} = -\frac{1}{3}x_2^3 + x_2^2 + 3x_2 - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

vậy có hai điểm cần tìm là $M\left(3;\frac{16}{3}\right), N\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}\left(C\right)$. Lập phương trình đường cong $\left(C'\right)$ đối xứng với $\left(C\right)$ qua điểm $I\left(0;2\right)$.

Lời giải:

Lấy điểm $M\left(x;y\right) \in \left(C\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2} \quad (i)$

Điểm $M'\left(x';y'\right)$ đối xứng với M qua điểm $I\left(0;2\right)$ nên $\begin{cases} x = -x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$ thay vào (i) ta được

$$4 - y' = \frac{1}{2}x'^4 - 3x'^2 + \frac{5}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x'^4 + 3x'^2 + \frac{3}{2}\left(C'\right)$$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4\left(C_m\right)$. Tìm m để $\left(C_m\right)$ nhận điểm $I\left(1;2\right)$ làm tâm đối xứng.

Lời giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m \Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6m + 2 \end{cases}$

Điểm uốn của đồ thị hàm số là tâm đối xứng $U\left(1;6m+2\right)$

Yêu cầu bài toán tương đương với $6m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Cho hàm số $y = \left(m+2\right)x^3 - 3\left(m-2\right)x + m + 7\left(C_m\right)$. Chứng minh rằng với mọi m đường cong $\left(C_m\right)$ luôn đi qua 3 điểm cố định thuộc một đường thẳng.

Lời giải:

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định thuộc đường cong $\left(C_m\right)$. Khi đó ta có

$$y_0 = \left(m+2\right)x_0^3 - 3\left(m-2\right)x_0 + m + 7, \forall m$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow m\left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) + 2x_0^3 + 6x_0 + 7 - y_0 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^3 + 6x_0 + 7 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 1 = 0(1) \\ y_0 = 2\left(3x_0 - 1\right) + 6x_0 + 7 = 12x_0 + 5(2) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(0) = 1 > 0; f(1) = -3 < 0; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

từ đó suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Và từ (2) suy ra cả 3 nghiệm này đều thuộc đường thẳng $y = 12x + 5$. Ta có đpcm.

Bài 5. Tìm hai điểm trên đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ đối xứng nhau qua điểm $M\left(-1;3\right)$

Lời giải:

Giả sử điểm $A\left(x_0; y_0\right) \in \left(C\right)$, điểm B đối xứng với A qua $M\left(-1;3\right)$ nên $B\left(-2 - x_0; 6 - y_0\right)$

Nhưng do $A, B \in \left(C\right)$ nên:

$$\begin{cases} y_0 = -x_0^3 + 3x_0 + 2 \\ 6 - y_0 = -\left(-2 - x_0\right)^3 + 3\left(-2 - x_0\right) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-1;0\right); B\left(-1;6\right)$$

Vậy $A\left(-1;0\right)$ và $B\left(-1;6\right)$ là hai điểm cần tìm.

Bài 6. Tìm trên đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ hai điểm đối xứng qua đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$.

Lời giải:

Giả sử hai điểm $M\left(x_1; y_1\right); N\left(x_2; y_2\right)$ thuộc đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$.

Khi đó trung điểm I của MN cũng thuộc d: $\begin{cases} I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) \in d \\ MN \perp d \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_2 - x_1\right) + 2\left(y_2 - y_1\right) = 0 \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-x_1^3 + 3x_1 + 2 + -x_2^3 + 3x_2 + 2}{2} = 2.\dfrac{x_1 + x_2}{2} + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\left(x_2 - x_1\right) - 2\left(x_2 - x_1\right)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0 \\ -\left(x_2 + x_1\right)^3 + 3x_1x_2\left(x_2 + x_1\right) + 3\left(x_2 + x_1\right) = 2\left(x_2 + x_1\right) \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \dfrac{7}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x_2 + x_1 = 0 \\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \\ x_2 = \mp\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} \\ y_2 = 2 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}}; 2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right); N\left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}}; 2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$.

Bài 7. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C) cách đều hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Lời giải:

Giả sử điểm $M\left(x; \dfrac{3x-4}{x-2}\right) \in (C)$, vậy M cách đều hai đường tiệm cận của (C) khi và chỉ khi:

$$|x-2| = \left|\frac{3x-4}{x-2} - 3\right| \Leftrightarrow |x-2| = \left|\frac{x}{x-2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-2} = x-2 \\ \dfrac{x}{x-2} = 2-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;1) \\ M(4;6) \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cần tìm $M_1(1;1); M_2(4;6)$.

Bài 8. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ cách đều hai điểm $A(2;0); B(0;2)$.

Lời giải:

Phương trình đường trung trực của AB là $d: y = x$

Khi đó điểm M thuộc đồ thị hàm số cách đều hai điểm A, B có tọa độ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x+2}{2x-1} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right); M_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 9. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giả sử điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$, khi đó tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) là:

$$|x_0+1|+\left|\frac{2x_0}{x_0+1}-2\right|=|x_0+1|+\left|\frac{2}{x_0+1}\right|\geq 2\sqrt{|x_0+1|.\left|\frac{2}{x_0+1}\right|}=2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$|x_0+1|=\left|\frac{2}{x_0+1}\right|\Leftrightarrow (x_0+1)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{2}\\x_0=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)\\M\left(-1-\sqrt{2}-2+\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right);M_2\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)$

Bài 10. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm đó đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Giả sử điểm $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$, phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là:

$$\Delta: y=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+1}\Leftrightarrow 2x-(x_0+1)^2y+2x_0^2=0$$

Khi đó khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến Δ là

$$d=\left|\frac{-2-2(x_0+1)^2+2x_0^2}{\sqrt{4+(x_0+1)^4}}\right|=\left|\frac{4(x_0+1)}{\sqrt{4+(x_0+1)^4}}\right|=\left|\frac{4}{\sqrt{\dfrac{4}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\right|\leq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x_0+1)^2=\dfrac{4}{(x_0+1)^2}\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1\left(-1+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right);M_2\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right)$

Bài 11. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ sao cho khoảng cách giữa chúng đạt giá trị nhỏ nhất.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Giả sử điểm $A\left(-1-a,2+\frac{2}{a}\right);B\left(b-1,2-\frac{2}{b}\right)\in(C)$ với $a,b>0$

Khi đó ta có $AB^2=(a+b)^2+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left(1+\frac{4}{(ab)^2}\right)\geq 4ab\left(1+\frac{4}{(ab)^2}\right)\geq 8ab\sqrt{1.\frac{4}{(ab)^2}}=16$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b\\1=\frac{4}{(ab)^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}\Rightarrow A\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right);B\left(\sqrt{2}-1;2-\sqrt{2}\right)$

Vậy hai điểm cần tìm là $A\left(-1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right);B\left(\sqrt{2}-1;2-\sqrt{2}\right)$

Bài 12. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$, biết rằng hai điểm đó tạo với điểm $A(2;0)$ một tam giác vuông cân tại A.

Lời giải:

Giả sử điểm $B\left(b,2+\frac{2}{b-1}\right);C\left(c,2+\frac{2}{c-1}\right)$ với $b<1<c$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C trên trục hoành

Từ điều kiện $\begin{cases}AB\perp AC\\AB=AC\end{cases}\Rightarrow\triangle ABH=\triangle CAK$

Từ đó suy ra: $\begin{cases}AH=CK\\BH=AK\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-b=2+\frac{2}{c-1}\\\left|2+\frac{2}{b-1}\right|=|c-2|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\c=3\end{cases}$

Vậy hai điểm cần tìm là $B(-1;1);C(3;3)$

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$ đồ thị hàm số $y=\frac{(m+1)x+m}{x+m}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Giả sử đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $d: y = kx + l$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2}{(x+m)^2} = k \\ \dfrac{(m+1)x+m}{x+m} = kx + l \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{m^2}{(x+m)^2} \\ m^2(l-x-1) + 2m(lx - x) + lx^2 - x^2 = 0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{m^2}{(x+m)^2} \\ l - x - 1 = 0 \\ lx - x = 0 \\ lx^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ l = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y = x + 1$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -\dfrac{x^3}{m} + 3mx^2 - 2\left(C_m\right), m \neq 0$ nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.

1.2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2\left(C\right)$. Tìm trên (C) hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua đường thẳng $2x - y + 2 = 0$.

1.3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}(C)$. Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

1.4. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}(C)$. Tìm trên (C) các điểm cách đều hai đường tiệm cận của (C).

1.5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$. Tìm trên đồ thị hàm số hai điểm đối xứng với nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0), N(-1;-1)$.

1.6. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (C). Tìm trên (C) điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và đường thẳng đi qua M và giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) có tích hệ số góc bằng -9.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}(C)$. Tìm trên (C) các điểm có hoành độ là các số nguyên.

1.8. Tìm điểm cố định của $(C_m): y=x^3+(m+|m|)x^2-4x-4(m+|m|)$.

1.9. Với mỗi giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M,N và cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B. Chứng minh rằng $MA=NB$.

1.10. Tìm m để trên đồ thị hàm số $y=x^3-3(2m^2-1)x^2+3(m^2-1)x+1-m^3$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

1.11. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ biết rằng tổng khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x+y-2=0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.12. Tìm những điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ sao cho khoảng cách giữa chúng đạt giá trị nhỏ nhất.

1.13. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ điểm đó đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ điểm đó đến trục tung.

1.14. Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến các trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.15. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$, biết rằng hai điểm đó tạo với điểm $A(2;0)$ một tam giác vuông cân tại A.

1.16. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ hai điểm A,B có độ dài đoạn $AB=4$ và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y-x=0$.

1.17. Tìm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x-1}{x+2}$ các điểm A,B biết rằng tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A,B song song với nhau và độ dài đoạn AB bằng $2\sqrt{2}$.

1.18. Tìm trên đồ thị $y=-x^3+3x$ bốn điểm A,B,C,D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông tâm O.

VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dạng 1: Dựa vào đồ thị hàm số $\left(C\right)$: $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $\left(C_1\right): y = \left|f(x)\right|$.

Phương pháp:

Ta có $\left(C_1\right): y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) \leq 0 \end{cases}$

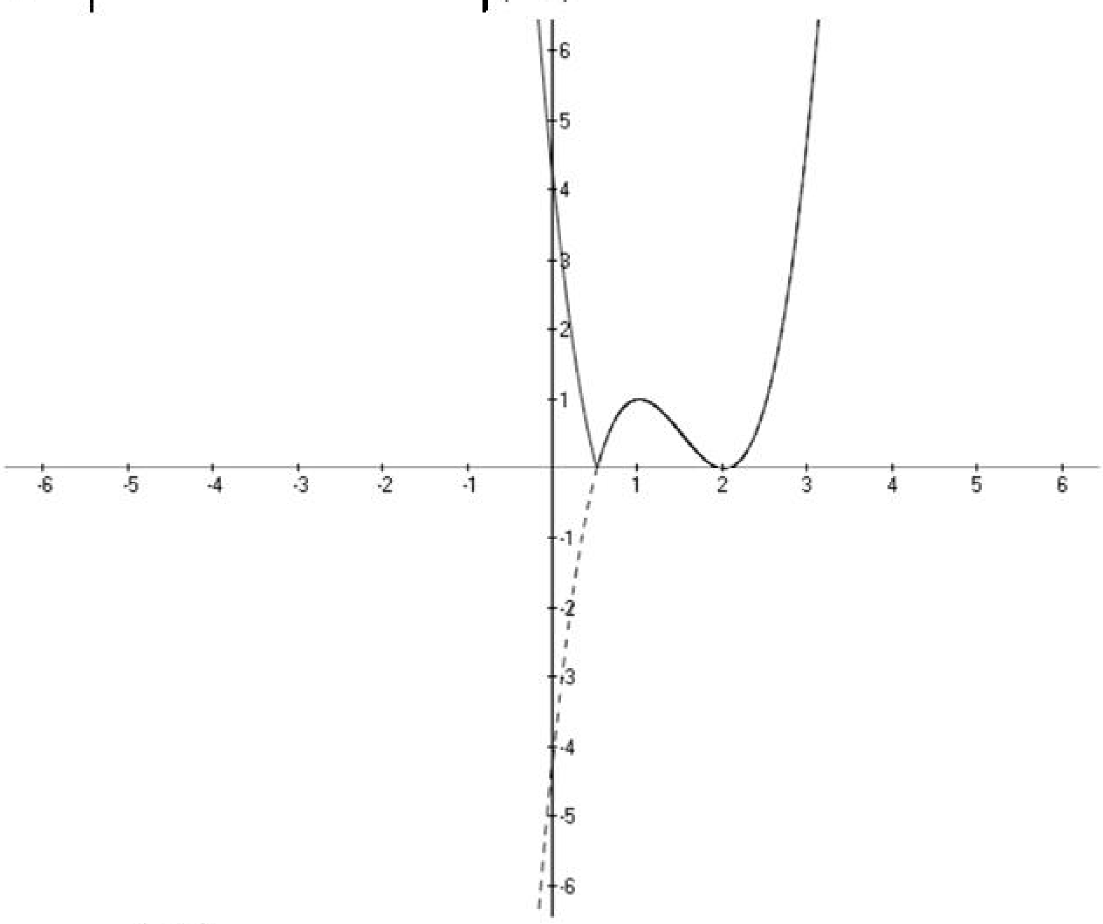
Do đó đồ thị $\left(C_1\right)$ gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị $\left(C\right)$ nằ trên trục hoành.

Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C\right)$ nằm phái dưới trục hoành qua trục hoành.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\left(C\right)$$

$$y = \left|2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\right|\left(C_1\right)$$



$\left(C_1\right)$

Dạng 2: Dựa vào đồ thị hàm số $\left(C\right)$: $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $\left(C_2\right): y = f\left(\left|x\right|\right)$.

Phương pháp:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Ta có $\left(C_2\right): y = f\left(\left|x\right|\right) = \begin{cases} f(x), x \ge 0 \\ f(-x), x \le 0 \end{cases}$

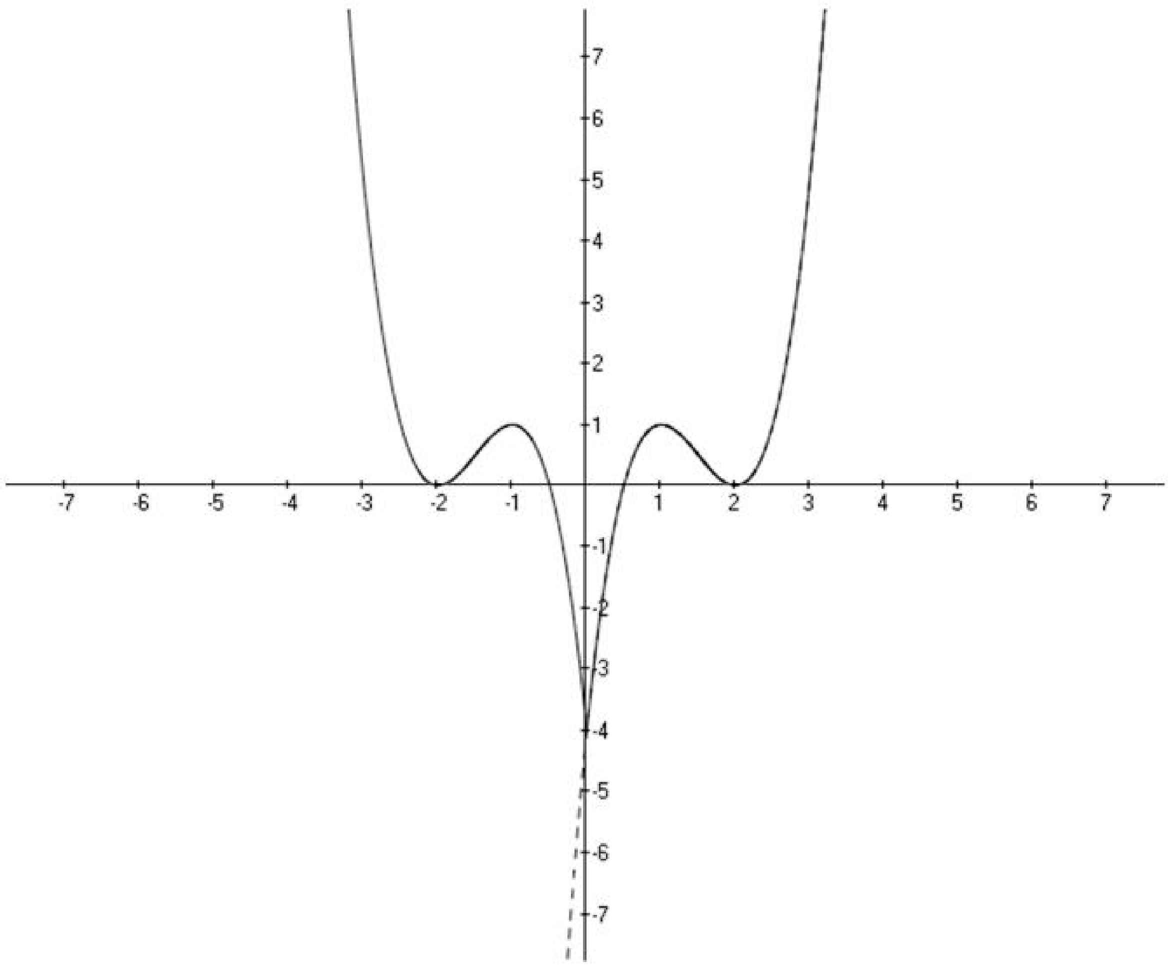
Do đó đồ thị $\left(C_2\right)$ gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị $\left(C\right)$ bên phải trục tung.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\left(C\right)$$

$y = 2\left|x\right|^3 - 9x^2 + 12\left|x\right| - 4\left(C_1\right)$



$\left(C_1\right)$

Dạng 3: Dựa vào đồ thị hàm số $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ suy ra đồ thị hàm số $\left(C_3\right): \left|y\right| = f\left(x\right)$.

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $\left|y\right| = f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

Ta có $\left(C_3\right): \left|y\right| = f\left(x\right) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} y, y \ge 0 \\ -y, y \le 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị nhận trục hoành làm trục đối xứng, nên đồ thị gồm hai phần

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) phía trên trục hoành

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục hoành

Dạng 4: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_4): y = |u(x)|v(x)$.

Phương pháp:

Ta có $(C_4): y = |u(x)|v(x) = \begin{cases} u(x)v(x) = f(x), u(x) \geq 0 \\ -u(x)v(x) = -f(x), u(x) \leq 0 \end{cases}$.

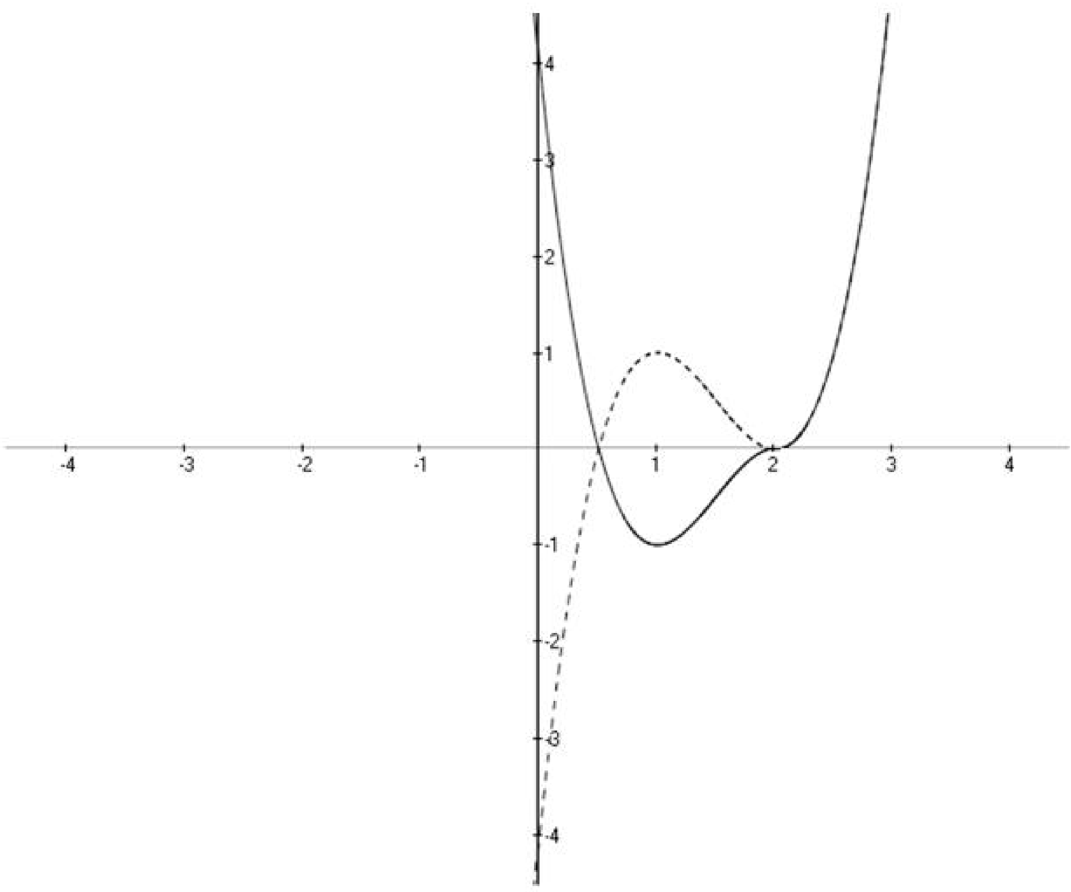
Do đó đồ thị (C_4) gồm hai phần

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên miền $u(x) \geq 0$.

Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) qua trục hoành nằm trên miền $u(x) \leq 0$.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4(C)$$

$$y = |x-2|(2x^2 - 5x + 2)(C_1)$$



(C_1)

Trên đây là 4 dạng bài hay gặp trong kỳ thi TSĐH, một số dạng khác phức tạp hơn như sau

Dạng 5: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_5): y = |f(|x|)|$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dạng 6: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_6): |y| = f(|x|)$.

Dạng 7: Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $(C_7): |y| = |f(|x|)|$.

Dạng toán: Biện luận số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị

Phương pháp:
Dùng trực quan đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$, trong đó m là tham số. Coi $y = g(m)$ là đường thẳng và $y = f(x)$ là đường cong
Ta phải vẽ được đồ thị hàm số $y = f(x)$, khi đó số giao điểm của đường thẳng $y = g(m)$ và đường cong $y = f(x)$ chính là số nghiệm của phương trình.

Như vậy điểm mấu chốt của bài toán là vẽ được đồ thị hàm số $y = f(x)$.

BÀI TẬP MẪU

Lưu ý:
Tài liệu này quan niệm:
- Đồ thị hàm số lúc đầu quan niệm là đồ thị hàm số cơ bản.
- Đồ thị hàm số được suy ra từ đồ thị hàm số cơ bản gọi là đồ thị hàm số mới.

Với các bài toán mẫu ở đây, ta giả sử là đã có đồ thị hàm số cơ bản và ở đây chỉ nên ra cách suy ra ra đồ thị hàm số mới. Khi làm bài các em phải xuất phát từ đồ thị hàm số cơ bản xong mới được suy ra đồ thị hàm số mới(thường thì đề ra câu 1, ý một khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số các em đã có đồ thị hàm sô cơ bản).

Bài 1. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Lời giải:

Hàm số cơ bản $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \ (C)$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| \ (C_1)$

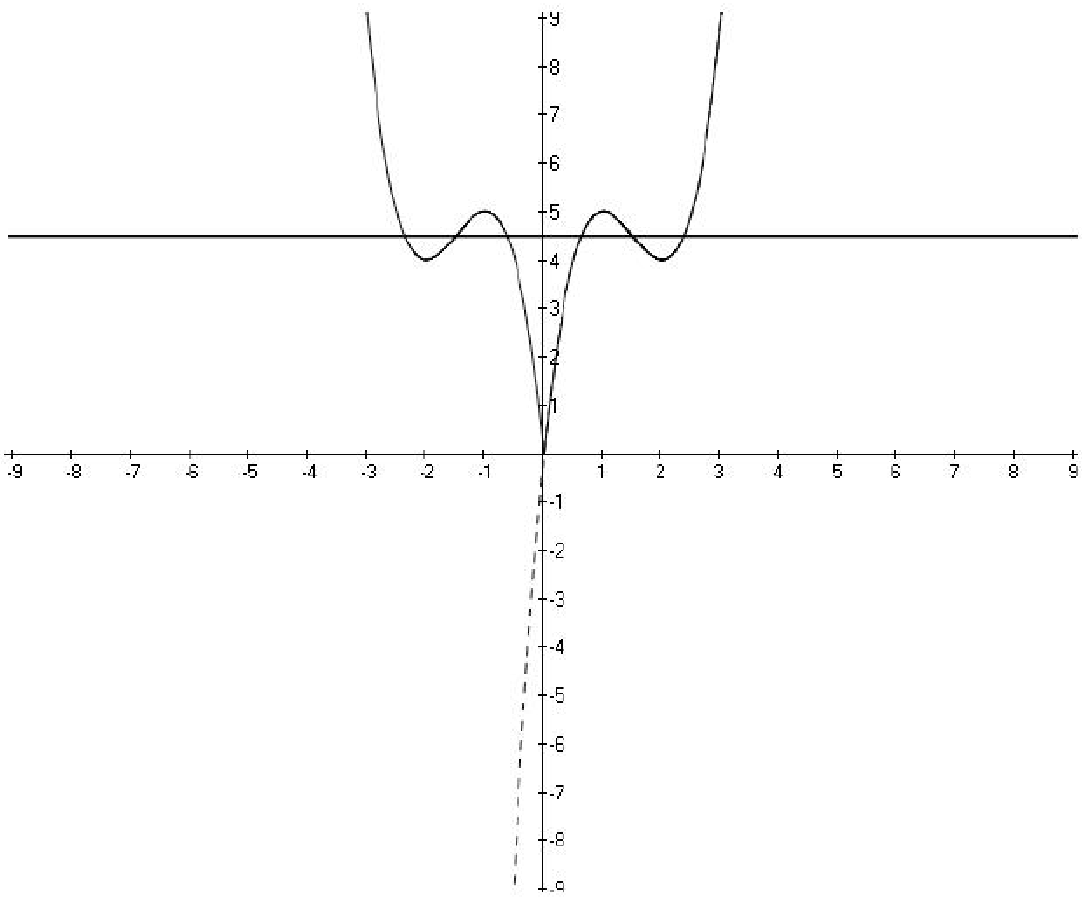
Ta có $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = \begin{cases} f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x, x \geq 0 \\ f(-x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x, x < 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị (C_1) gồm hai phần:

Phần 1: giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam



Đồ thị hàm số $\left(C_1\right)$ là phần liền nét trên hình vẽ

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra để phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt $\left(C_1\right)$ tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Bài 2. Tìm m để phương trình $2^{\left|x^4 - 3x^2 + 2\right|} = m - 1$ có tám nghiệm phân biệt.

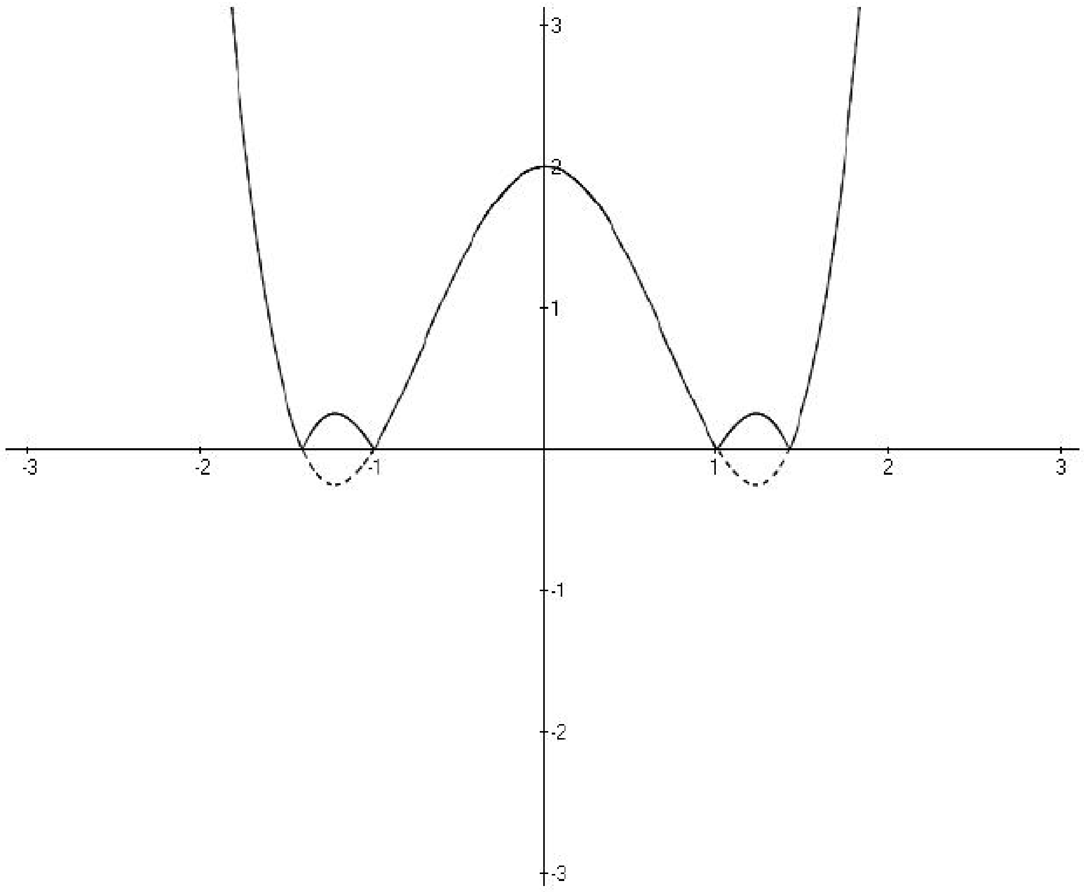
Lời giải:

Điều kiện: $m > 1$, khi đó phương trình tương đương với:

$$\left|x^4 - 3x^2 + 2\right| = \log_2\left(m - 1\right)$$

Đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 3x^2 + 2\right|$ như trên hình vẽ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam



Dựa vào đồ thị hàm số suy ra để phương trình có tám nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = k = \log_2(m-1)$ cắt đồ thị hàm số tại tám điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 0 < \log_2(m-1) < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2 < m < 1 + \sqrt[4]{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\,(C)$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2\,(C)$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Với giá trị nào của m, phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

Bài 3. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ với hệ số góc k. Tìm k để d cắt đồ thị hàm số $y = |x^3| - 3|x| - 2$ tại 4 điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 1\,(C)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Tìm những giá trị của tham số m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $\left|x-1\right|^3 - x^2 - 2x - \left|x-1\right| = m$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}(C)$.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Tìm m để phương trình sau có nghiều nghiệm nhất $\dfrac{2|x|+1}{|x|+1} = m$.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP

1.1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8\ (C_m)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Tìm m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.
3. Chứng minh rằng tồn tại điểm x_0 sao cho tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm đó song song với nhau với mọi m.
4. Chứng minh rằng trên parabol $(P): y = x^2$ có hai điểm không thuộc đồ thị hàm số với mọi m.

1.2. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x-1}(C_m)$, m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 3$.
2. Cho hai điểm $A(-3;4)$ và $B(3;-2)$. Tìm m để trên đồ thị (C_m) có hai điểm P,Q cách đều hai điểm A,B và diện tích tứ giác $APBQ$ bằng 24.

1.3. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x + 3 - m(C_m)$, m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.
2. Tìm m để hàm số (C_m) có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ điểm $N\left(\dfrac{1}{2};4\right)$ đến đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của hàm số là lớn nhất.

1.4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2\ (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. Tìm tất cả các giá trị của k để trên đồ thị hàm số (C) tồn tại đúng hai tiếp tuyến có cùng hệ số góc k đồng thời đường thẳng đi qua hai tiếp điểm cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại A và B sao cho $AB \geq \sqrt{5}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.5. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ $(m \neq \pm 1)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -\dfrac{1}{2}$.
2. Lấy A, B lần lượt thuộc đồ thị hàm số có hoành độ $x_A = -1; x_B = 1$. Xác định m biết tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A, B cắt nhau tại C sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

1.6. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 3m + 4$ (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm m để tiếp tuyến cắt đồ thị hàm số (C_m) tại điểm B khác A, sao cho tam giác OAB cân tại O.

1.7. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1$ (C_m)

1. Với $m = 1$, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. Tìm m để đường thẳng $y = 2mx - m - 1$ cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $OA^2 + OB^2 + OC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.8. Cho hàm số $y = x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m$ (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = \dfrac{3}{2}$.
2. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

1.9. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.
2. Cho hai điểm $M\left(\dfrac{1}{2}; 2\right); N\left(\dfrac{7}{2}; 2\right)$. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt P, Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

1.10. Cho hàm số $y = \dfrac{m-x}{x+2}$ (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.
2. Tìm m để đường thẳng $d: 2x + 2y - 1 = 0$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt và cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng $\dfrac{3}{8}$.

1.11. Cho hàm số $y = -\dfrac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (3m-2)x - \dfrac{5}{3}$ (C_m)

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 2$.

2. Tìm trên đồ thị $\left(C_m\right)$ hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 > 0$ sao cho tiếp tuyến tại mỗi điểm đó vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$.

1.12. Với $m \in \left(0;4\right]$ tìm điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{\left(m+1\right)x + m}{x + m}$ có hoành độ dương ; tung độ lớn nhất, biết rằng khoảng cách từ điểm đó đến tiếp tuyến cố định của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{2}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 2:

ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Dạng toán tìm điều kiện của tham số để phương trình, hệ phương trình có nghiệm thường xuất hiện trong đề thi TSĐH dưới dạng áp dụng phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số để tìm miền giá trị của hàm số, từ đó suy ra giá trị cần tìm của tham số m. Đây là loại bài toán không khó và chiếm một điểm trong đề thi, nên nhớ áp xét tính đơn điệu của hàm số.

Phương pháp

+ Điều kiện cho trước ở đây được rút ra từ tập xác định của hàm số hoặc được xác định từ điều kiện nghiệm của phương trình mà đề bài yêu cầu. Ta quy ước điều kiện cho trước này là miền D.
+ Để giải quyết dạng bài toán này ta dùng phương pháp hàm số, mục đích là biểu diễn tham số theo hàm của một ẩn trên miền D, sau đó tìm GTLN,GTNN của hàm số đó trên D.

+ Phương trình, bất phương trình dưới dạng sau thì điều kiện của tham số là:

(i). $g(m) = f(t), t \in D \Rightarrow \min_{t\in D} f(t) \le g(m) \le \max_{t\in D} f(t)$.

(ii). $g(m) \ge f(t), t \in D$ có nghiệm $t \in D \Rightarrow g(m) \ge \min_{t\in D} f(t)$.

(iii). $g(m) \le f(t), t \in D$ có nghiệm $t \in D \Rightarrow g(m) \le \max_{t\in D} f(t)$.

(iv). $g(m) \ge f(t), t \in D$ có nghiệm với mọi t thuộc D khi và chỉ khi $g(m) \ge \max_{t\in D} f(t)$.

(v). $g(m) \le f(t), t \in D$ có nghiệm với mọi t thuộc D khi và chỉ khi $g(m) \le \min_{t\in D} f(t)$.

Các hướng giải quyết bài toán loại này:

(i). Xét tính đơn điệu của hàm trực tiếp theo ẩn x.

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

(ii). Nếu xuất hiện biểu thức đối xứng $\begin{cases} \sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} \\ \sqrt{(ax+b)(cx+d)} \end{cases}$, thì

đặt $t = \sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}$.

(iii). Nếu xuất hiện $\sqrt{a+bx};\sqrt{c-bx} \Rightarrow (\sqrt{a+bx})^2 + (\sqrt{c-bx})^2 = a+c$,

thì đặt $\begin{cases} \sqrt{a+bx} = \sqrt{a+c}\sin\alpha \\ \sqrt{c-bx} = \sqrt{a+c}\cos\alpha \end{cases}$ Và sử dụng hệ thức $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} \end{cases}$, tiếp tục đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$.

(iv). Nhân hai vế với hệ thức liên hợp nếu có.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$6 + x + 2\sqrt{(4-x)(2x-2)} = m + 4(\sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2})(x \in R)$$

Lời giải:

+Điều kiện: $1 \le x \le 4$.

Đặt $t = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$

Xét hàm số $t(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-2}$ liên tục trên đoạn $[1,4]$. Ta có

$$t'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} \Rightarrow t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = \sqrt{2x-2} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ta có: $t_{(1)} = \sqrt{3}; t_{(3)} = 3; t_{(4)} = \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in[1,4]} t(x) = t(1) = \sqrt{3} \\ \max\limits_{x\in[1,4]} t(x) = t(3) = 3 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$t^2 + 4 = m + 4t \Leftrightarrow m = t^2 - 4t + 4$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t + 4$

Ta có $f'(t) = 2t - 4$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 7 - 4\sqrt{3}; f(2) = 0; f(3) = 1$

$\Rightarrow 0 \le f(t) \le 1 \Rightarrow \min_{f(t)} \le m \le \max_{f(t)} \Rightarrow 0 \le m \le 1$

Vậy giá trị cần tìm của m là $0 \le m \le 1$.

Bài 2. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} + \sqrt{x^2 + 3x + \frac{9}{4}} = m$$

<u>Lời giải:</u>

+Điều kiện: $-4 \le x \le 1$.

Khi đó phương trình tương đương với: $m = \sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} + \left|x + \frac{3}{2}\right|$.

Đặt $t = x + \frac{3}{2} \Rightarrow m = f(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - t} + \sqrt{\frac{5}{2} + t} + |t|, (-\frac{5}{2} \le t \le \frac{5}{2})$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - t} + \sqrt{\frac{5}{2} + t} + |t|, (-\frac{5}{2} \le t \le \frac{5}{2})$, ta có $f(-t) = f(t)$ nên hàm số

f(t) chẵn, nên ta chỉ cần chỉ cần xét *f(t)* trên $\left[0; \frac{5}{2}\right]$. Khi đó $f(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - t} + \sqrt{\frac{5}{2} + t} + t$.

+Ta có: $f'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{5}{2} - t}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{2} + t}} + 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{5}{2} - t} - \sqrt{\frac{5}{2} + t} + 2\sqrt{(\frac{5}{2} - t)(\frac{5}{2} + t)} = 0 (*)$

Giải phương trình (*):

+Đặt $u = \sqrt{\frac{5}{2} - t} - \sqrt{\frac{5}{2} + t} (u < 0) \Rightarrow u^2 = 5 - 2\sqrt{(\frac{5}{2} - t)(\frac{5}{2} + t)}$

Khi đó phương trình (*) trở thành:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$u+5-u^2=0 \Leftrightarrow u=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow (\dfrac{1-\sqrt{21}}{2})^2=5-2\sqrt{\dfrac{25}{4}-t^2} \Leftrightarrow t=\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}}$.

Ta có: $f(0)=\sqrt{10}; f(\dfrac{5}{2})=\sqrt{5}+\dfrac{5}{2}; f(\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}})=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}}$.

Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]} f(x)=f(0)=\sqrt{10} \\ \max\limits_{x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]} f(x)=f(\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}})=\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}} \end{cases}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $\sqrt{10} \le m \le \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{21}}{2}}+\sqrt{\dfrac{39+\sqrt{21}}{8}}$.

Bài 3. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm thực

$$2\sqrt[3]{3x-2m}+3\sqrt{6x-5m}-8=0$$

Lời giải:

+Điều kiện: $x \ge \dfrac{5m}{6}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{3x-2m} \\ v=\sqrt{6x-5m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3=3x-2m \\ v^2=6x-5m \end{cases}$.

Từ đó suy ra:

$2u^3-v^2=m(1); 2u+3v-8=0(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\Rightarrow m=2(\dfrac{8-3v}{2})^3-v^2$.

Xét hàm số $f(v)=2(\dfrac{8-3v}{2})^3-v^2$ liên tục trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(v)=-9(\dfrac{8-3v}{2})^2-2v \le 0, \forall v \ge 0$. Suy ra hàm số $f(v)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Mặt khác $\lim\limits_{v\to+\infty} f(v) = -\infty; f(0) = 128$.

$\Rightarrow f(v) \le 128, \forall v \ge 0 \Rightarrow$ để phương trình có nghiệm thì $m \le 128$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(-\infty, 128]$.

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$$

Lời giải:

Điều kiện: $0 \le x \le 6$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x}$ lien tục trên đoạn $[0;6]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x(6-x)}} + \dfrac{1}{\sqrt{6-x}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2x}} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2x(6-x)}} + \dfrac{1}{2\sqrt{6-x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}} \Leftrightarrow 2x = 6 - x \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \\ f(2) = 6 + 3\sqrt{2} \\ f(6) = \sqrt[4]{12} + \sqrt{12} \end{cases}$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$, ta suy ra để phương trình có đúng 2 nghiệm thực thì : $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \le m < 6 + 3\sqrt{2}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=\sqrt[4]{x^2-1}$$

Lời giải:

+Điều kiện: $x \ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+m=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}(*)$.

Ta đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, xét hàm số $t(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ trên đoạn $\left[1;+\infty\right)$.

Ta có $t'(x)=\dfrac{1}{2(x+1)^2}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{-3}{4}}>0, \forall x \ge 1$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} t = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=1 \\ t(1)=0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le t < 1$.

Phương trình (*) trở thành: $m=t-3t^2$.

Xét hàm số $f(t)=t-3t^2$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right)$.

Ta có $f'(t)=1-6t \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{6}$.

Ta có: $\begin{cases} \Rightarrow f(0)=0 \\ f(\dfrac{1}{6})=\dfrac{1}{12} \\ f(1)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{t\in[0;1)} f(t)=f(1)=-2 \\ \max\limits_{t\in[0;1)} f(t)=f(\dfrac{1}{6})=\dfrac{1}{12} \end{cases}$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-2 \le m \le \dfrac{1}{12}$.

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$

$\Rightarrow (2x+1)^2(x^2-x+1)=(2x-1)^2(x^2+x+1) \Rightarrow x=0.$

Thử lại thấy $x=0$ không thỏa mãn, vậy $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định. Mặt khác lại có $f'(0)=1 \Rightarrow f'(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$.

Và tương tự ta có, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Từ đó suy ra : $-1<f(x)<1$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-1<m<1$.

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3(3x-2)\sqrt[3]{3x-2}+2(6-5x)\sqrt{6-5x}-48x=m.$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=3(3x-2)\sqrt[3]{3x-2}+2(6-5x)\sqrt{6-5x}-48x$ liên tục trên đoạn $\left(0;\dfrac{6}{5}\right]$.

Ta có $f'(x)=12\sqrt[3]{3x-2}+18\sqrt{6-5x}-48$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0(*)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giải phương trình (*):

Đặt

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Rightarrow 5u^3 + 3v^2 = 8(1).$$

Và từ (*) ta có $2u + 3v - 8 = 0(2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$5u^3 + 3(\frac{8-2u}{3})^2 = 8 \Leftrightarrow (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-2} = -2 \Rightarrow x = -2.$$

Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) = 272 \\ f(\frac{6}{5}) = \frac{48}{5\sqrt[3]{5}} - \frac{288}{5} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{x \in \left(0;\frac{6}{5}\right]} f(x) = f(\frac{6}{5}) = \frac{48}{5\sqrt[3]{5}} - \frac{288}{5}.$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m \geq \frac{48}{5\sqrt[3]{5}} - \frac{288}{5}$.

Bài 8.Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm thực: $(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$

Lời giải:

+ Điều kiện: $-3 \leq x \leq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$m(4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1) = 1 + 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 + 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x+3}}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}(*).$$

Ta có $(\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{x+3})^2 = 4$, nên ta đặt $\begin{cases} \sqrt{1-x} = 2\sin\alpha \\ \sqrt{x+3} = 2\cos\alpha \end{cases}, (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Sử dụng $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}; \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$ và đặt $t = \tan^2\dfrac{\alpha}{2}(0 \le t \le 1)$.

Khi đó (*) trở thành: $m = \dfrac{1+t^2+16t+6(1-t^2)}{8(1-t^2)+12t+1+t^2} = \dfrac{-5t^2+16t+7}{-7t^2+12t+9}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-5t^2+16t+7}{-7t^2+12t+9}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{52t^2+8t+60}{(-7t^2+12t+9)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in [0;1]$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Suy ra $\begin{cases} \min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = f(0) = \dfrac{7}{9} \\ \max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = f(1) = \dfrac{9}{7} \end{cases}$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{7}{9} \le m \le \dfrac{9}{7}$.

Bài 9. Tìm những giá trị thực dương của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm thực không vượt quá 6.

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = m - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

Lời giải:

Điều kiện $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Khi đó phương trình tương đương với

$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right) = m(*)$

Với những giá trị thực dương của tham số m nên để phương trình (*) có nghiệm thì $\sqrt{2x-1}-3 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Vậy ta xét hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ trên khoảng $(5;6]$

Ta có $f'(x) > 0, \forall x \in (5;6)$. Và $f(5) = 0; f(6) = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{11}-3\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $0 < m \le 6\sqrt{2}\left(\sqrt{11}-3\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau đây có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x})^3+(y+\dfrac{1}{y})^3-3(x+\dfrac{1}{x})-3(y+\dfrac{1}{y})=15m-10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x})^3+(y+\dfrac{1}{y})^3=15m+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y})^3-3(x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y})=15m+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ (x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})=8-m \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases} (|u|;|v|\ge 2)$

$\Rightarrow u,v$ là nghiệm của phương trình: $t^2-5t+(8-m)=0$ (1)

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $|t|\ge 2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (1) ta có: $m = f(t) = t^2 - 5t + 8(|t| \geq 2) \Rightarrow f'(t) = 2t - 5 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2}$.

Ta có: $f(-2) = 22; f(2) = 2; f(\dfrac{5}{2}) = \dfrac{7}{4}; \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

+Để (1) có 2 nghiệm phân biệt ($|t| \geq 2$)thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 2 điểm phân biệt. Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$,dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \dfrac{7}{4} < m \leq 2 \bigcup 22 \leq m < +\infty$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0(1) \\ 3\sqrt{y-1} - m\sqrt{10-2x} = 2\sqrt[4]{y^2-1}(2) \end{cases} (*)$$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \leq 2; y \geq 1$.

Khi đó phương trình (1) tương đương với: $(1+2-x)\sqrt{2-x} = (1+2y-1)\sqrt{2y-1}$

$\Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1})$, trong đó $f(t) = (1+t)\sqrt{t}\,(t \geq 0)$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1+t}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Rightarrow x = 3 - 2y \leq 1 < 2\,(y \geq 1)$.

Thay $x = 3 - 2y$ vào (2) ta được : $3\sqrt{y-1} - 2m\sqrt{y+1} = 2\sqrt[4]{y^2-1}(1)$. Do vậy ta chỉ cần tìm m để phương trình (1) có nghiệm $y \geq 1$.

Chia cả hai vế của (1) cho $\sqrt[4]{y+1}$ ta được:

$3\sqrt{\dfrac{y-1}{y+1}} - 2m = 2\sqrt[4]{\dfrac{y-1}{y+1}}(i)$, đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{y-1}{y+1}} \Rightarrow 0 \leq t < 1$.

Khi đó phương trình (i) trở thành: $m = \dfrac{3}{2}t^2 - t$.

Xét hàm số $f(t) = t - 3t^2$ liên tục trên đoạn $[0;1)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $f'(t) = 3t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Lại có: $f(0) = 0; f(\frac{1}{3}) = \frac{-1}{6}; f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{6} \le f(t) < \frac{1}{2}$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\frac{-1}{6} \le m < \frac{1}{2}$.

Bài 12. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases} (*)$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x^2 - x)(2x - y) = m \\ x^2 - x + 2x - y = 1 - 2m \end{cases}$

Ta đặt $\begin{cases} u = x^2 - x \ge \frac{-1}{4} \\ v = 2x - y \end{cases}$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} uv = m \\ u + v = 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + (2m-1)u + m = 0 (1) \\ v = 1 - 2m - u \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thỏa mãn $u \ge \frac{-1}{4}$

Với $u \ge \frac{-1}{4}$, Từ(1)$\Rightarrow m(2u+1) = -u^2 + u \Leftrightarrow m = \frac{-u^2 + u}{2u+1}$.

Xét hàm số $f(u) = \frac{-u^2 + u}{2u+1}$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ta có: $f'(u) = -\frac{2u^2 + 2u - 1}{(2u+1)^2} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Lại có: $f(\frac{-1}{4}) = \frac{-5}{8}; f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}; \lim\limits_{u \to +\infty} f(u) = -\infty$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ ta suy ra để hệ có nghiệm thì $m \le \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 13. Xác định tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} m(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} (*)$$

Lời giải:

+Nếu $m = 0 \Rightarrow (*) \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ -\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

+Nếu $m \ne 0$;Đặt $t = \sqrt[3]{x}$, khi đó $t = 0$ không là nghiệm của hpt;và hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} m(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 \\ m(t^8 + t^6 + t^2 + 1) + (m-1)t^4 = 2yt^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 (1) \\ m(t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + 1) = (2y+1)t^4 (2) \end{cases}$$

+Do $t = 0$ không là nghiệm của hpt, nên chia 2 vế của (1) cho t^3 và của (2) cho t^4, ta được:

$$\begin{cases} m(t^3 + \frac{1}{t^3} + t + \frac{1}{t}) = y \\ m(t^4 + \frac{1}{t^4} + t^2 + \frac{1}{t^2} + 1) = 2y + 1 \end{cases}$$

$+t^3 + \frac{1}{t^3} = (t + \frac{1}{t})^3 - 3(t + \frac{1}{t}); t^4 + \frac{1}{t^4} = (t^2 + \frac{1}{t^2})^2 - 2; t^2 + \frac{1}{t^2} = (t + \frac{1}{t})^2 - 2$

Đặt $u = t + \frac{1}{t} (|u| \ge 2)$, Khi đó HPT trở thành:

$$\begin{cases} m(u^3 - 3u + u) = y \\ m[(u^2 - 2)^2 - 2 + u^2 - 2 + 1] = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3 - 2u) = y \\ m(\mathrm{u}^4 - 3u^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3 - 2u) = y \\ m(\mathrm{u}^4 - 3u^2 + 1) = 2m(u^3 - 2u) + 1 (3) \end{cases}$$

+ Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm $|u| \ge 2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$(3) \Leftrightarrow m(u^4 - 3u^2 + 1 - 2u^3 + 4u) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = f(u) = u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1$

$+ f'(u) = 4u^3 - 6u^2 - 6u + 4; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2(|u| \geq 2)$

Lập bảng biến thiên của $f(u)$ ta suy ra (3) có nghiệm thỏa mãn $(|u| \geq 2)$ khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{m} \geq -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \leq \frac{-1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là: $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$m(\sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3 (*)$$

Lời giải:

Điều kiện: $1 \leq x \leq 4$.

Khi đó phương trình tương đương với: $m = \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3}{\sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3}{\sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Trong đó: $\begin{cases} u(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + 3 > 0 \\ v(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{2}x > 0 \end{cases}, (1 \leq x \leq 4)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

Mặt khác, ta có: $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0;$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$v'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5-x}} \le 0 (\sqrt{5-x} \le 2)$$

Từ đó suy ra : $\Rightarrow f'(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

$$\Rightarrow \min_{x\in[1;4]} f(x) = f(1) = \frac{10}{5+2\sqrt{3}}; \max_{x\in[1;4]} f(x) = f(4) = \frac{7+\sqrt{3}}{3}, x \in [1;4].$$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\frac{10}{5+2\sqrt{3}} \le m \le \frac{7+\sqrt{3}}{3}$.

Bài 15. Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x})$$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện $0 \le x \le 4$.

Nhân cả 2 vế của phương trình với $(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$, phương trình trở thành

$m = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x})$.

Xét hàm số $f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})(\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}) = u(x).v(x)$.

Trong đó: $\begin{cases} u(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} > 0 \\ v(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{4-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0 \\ v'(x) = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}} > 0 \end{cases}$

Từ đó suy ra:

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biên trên đoạn $[0;4]$.

Suy ra $\min_{x\in[0;4]}(x) = f(0) = 2\sqrt{15} - 4\sqrt{3}; \max_{x\in[0;4]} f(x) = f(4) = 12, \forall x \in [0;4]$.

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2\sqrt{15} - 4\sqrt{3} \le m \le 12$.

Bài 16. Xác định m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$x^3 - 3x + 1 \le m(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})^3$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 1$.

Khi đó nhân cả 2 vế của bất phương trình với $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 > 0$, bất phương trình trở thành:

$(x^3-3x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 \leq m(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 = m$

$\Leftrightarrow f(x) = (x^3-3x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 \leq m$.

Suy ra để bất phương trình có nghiệm là $m \geq \min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = (x^3-3x+1)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 = u(x).v(x)$,

trong đó: $\begin{cases} u(x) = x^3-3x+1 > 0 \\ v(x) = (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 > 0 \end{cases}, \forall x \geq 1$.

Ta có $u'(x) = 3x^2-3 > 0; v'(x) = \dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2 > 0$.

$\Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x)+v'(x)u(x) > 0$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$.

$\min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x) = f(1) = -1, \forall x \geq 1$.

+ Để bpt có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min f(x) = -1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(-1;+\infty)$.

Bài 17. Tìm m để hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012 (1) \\ x^2-(m+2)x+2m+3 \geq 0 (2) \end{cases}$$ có nghiệm

Lời giải:

+Điều kiện: $x \geq -1$, Khi đó ta có:

$(1) \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012$

$\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1006(2x+\sqrt{x+1}) = 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1006(2+\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow f(2x+\sqrt{x+1}) \leq f(2+\sqrt{x+1}) (*)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Với $f(t)=7^t+1006t$, ta có

$f'(t)=7^t\ln 7+1006>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên R, và từ $(*)\Rightarrow 2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0$ có nghiệm $x\in[-1;1]$

$$\Leftrightarrow m\ge g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2};x\in[-1;1]$$

$$\Leftrightarrow m\ge \min_{x\in[-1;1]} g(x)$$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=2-\sqrt{3}\in[-1;1]$

$+g(-1)=-2;g(2-\sqrt{3})=2-2\sqrt{3};g(1)=-2\Rightarrow \min\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=g(\pm 1)=-2$.

Vậy $m\ge -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 18. Biết rằng $f(t)=3\sqrt{2+t}-6\sqrt{2-t}+4\sqrt{4-t^2}-10+3t,-2\le t\le 2$, xác định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$m=\int_0^x f(t)dt;x\in[-2;2]$$

Lời giải:

Ta có: $m=F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt;x\in[-2;2]$

$+F'(x)=f(x)\Rightarrow F'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$

$\Leftrightarrow 3(\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x})+4\sqrt{4-x^2}=10-3x(*)$

Đặt $u=\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\Rightarrow u^2=2+x-4\sqrt{4-x^2}+4(2-x)=10-3x-4\sqrt{4-x^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó phương trình (*) trở thành: $3u = u^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x} \\ \sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x}+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$

Ta tìm GTLN và GTNN của $F(x), x \in [-2;2]$, ta có:

$$+F(-2) = \int_0^{-2} f(x)dx = \int_0^{-2} (3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} - 10 + 3x)dx = 58 - 12\sqrt{2} - 4\pi$$

$$+F(\frac{6}{5}) = \int_0^{\frac{6}{5}} (3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} - 10 + 3x)dx$$

$$= 32\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{246}{25} + 8\arcsin\frac{3}{5} - 4\sin(2\arcsin\frac{3}{5}).$$

$$+F(2) = \int_0^{2} (3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} - 10 + 3x)dx = 2 - 12\sqrt{2} + 4\pi$$

$$\Rightarrow \min_{x\in[-2;2]} F(x) = F(2) = 2 - 12\sqrt{2} + 4\pi; \max_{x\in[-2;2]} F(x) = F(-2) = 58 - 12\sqrt{2} - 4\pi;$$

$$\Rightarrow 2 - 12\sqrt{2} + 4\pi \le m \le 58 - 12\sqrt{2} - 4\pi\ .$$

Bài 19. Xác định giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$

$$2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \ge m\,(*)$$

__Lời giải:__

BPT$(*) \Leftrightarrow m \le f(x) = 2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

Vậy $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} f(x)$

Ta chứng minh: $f(x) \le 0 \forall x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$, thật vậy với $\forall x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ thì ta có

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=2\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}-1\right)+(x^2-3)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=2\left(\frac{\frac{x^2+x+1}{x+4}-1}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+1}\right)+(x^2-3)+\frac{(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x^2+x+1)(x+4)}+x+4}+(x^2-3)+\frac{(x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}$$

$=(x^2-3)\left(\frac{2}{\sqrt{(x^2+x+1)(x+4)}+x+4}+1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(2+\sqrt{x^2+1})}\right)\leq 0,\forall x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ Vậy giá trị cần tìm của m là: $(-\infty;0)$.

Bài 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình sau luôn đúng

$$m(|x|+\sqrt{1-x^2}+1)\geq 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2(*)$$

Lời giải:

+Điều kiện : $-1\leq x\leq 1$

+ Đặt $t=|x|+\sqrt{1-x^2}>0\Rightarrow t^2=1+2\sqrt{x^2-x^4}\geq 1\Rightarrow t\geq 1$;

$+\ t=|x|+\sqrt{1-x^2}\leq\sqrt{2(x^2+1-x^2)}=\sqrt{2}\Rightarrow 1\leq t\leq\sqrt{2}$

BPT(*) $\Leftrightarrow m(t+1)\geq t^2+t+1\Leftrightarrow m\geq f(t)=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$

BPT(*) có luôn có nghiệm khi và chỉ khi $m\geq\max\limits_{t\in[1;\sqrt{2}]}f(t)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0,\forall t\in[1;\sqrt{2}]\Rightarrow\max\limits_{t\in[1;\sqrt{2}]}f(t)=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $m\geq 2\sqrt{2}-1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy giá trị nhỏ nhất của tham số m cần tìm là: $m = 2\sqrt{2} - 1$.

Bài 21. Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} (x+\frac{3}{2})\sqrt{x^2+2x+3} + (x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+1} + 2x + 2 \geq 0 (1) \\ \log_{m^2+1}(3\sqrt[3]{x^2}+1) \leq \log_{m^2+1}(m-2x) (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

+ Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} > 0 \\ v = \sqrt{x^2+2x+3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2+1 \\ v^2 = x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{v^2-u^2-2}{2}$

Thay vào (1), ta được:

$$(v^2-u^2+1)\frac{v}{2} + (v^2-u^2-1)\frac{u}{2} + v^2 - u^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow v - u \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Điều kiện: $m^2+1 > 1 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó phương trình (2) tương đương với

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < 3\sqrt[3]{x^2} + 1 \leq m - 2x \end{cases} \Leftrightarrow m \geq f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x + 1; x \geq -1 (m \neq 0).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $x \geq -1$, điều này tương đương với $m \geq \min\limits_{x\in[-1;+\infty]} f(x)$.

Ta có: $f'(x) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{x\in[-1;+\infty]} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow m \geq 1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(1;+\infty)$.

Bài 22. Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 (1) \\ x^3 - 3|x|x - m^2 - 15m \geq 0 (2) \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$.

$(2) \Leftrightarrow m^2 + 15m \le f(x) = x^3 - 3|x|x$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi, bất phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $[-1;4]$, khi và chỉ khi $m^2 + 15m \le \max\limits_{x\in[-1;4]} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3|x|x = \begin{cases} x^3 + 3x^2 (-1 \le x < 0) \\ x^3 - 3x^2 (0 \le x \le 4) \end{cases}$.

Ta có $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x(-1 \le x < 0) \\ 3x^2 - 6x(0 \le x \le 4) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$.

Ta có $f(-1) = 2; f(0) = 0; f(-2) = 4; f(2) = -4; f(4) = 16$.

Từ đó suy ra: $\max\limits_{x\in[-1;4]} f(x) = f(4) = 16$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 + 15m \le 16 \Leftrightarrow -16 \le m \le 1$.

Vậy $m \in [-16,1]$ là giá trị cần tìm.

Bài 23. Tìm m để phương trình $mx^2 + 1 = \cos x$ có đúng 1 nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải:

+ Phương trình đã cho tương đương với

$$m = \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \Leftrightarrow -2m = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2; t = \frac{x}{2} \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2; t = \dfrac{x}{2} \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

+ Ta có $f'(t) = 2\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)\dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} = 2\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)\dfrac{\cos t(t - \tan t)}{t^2} > 0$, vì với $t \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $\sin t \cos t > 0, \tan t < t$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Như vậy $f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ suy ra để phương trình có nghiệm thì $f(0) < -2m < f(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < \frac{-4}{\pi^2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 24. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 \ (1) \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases}$$ có nghiệm

Lời giải:

Từ hai phương trình trong hệ ta suy ra

$$m = \frac{x^2 + xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2} (*)$$

+ Nếu $y = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ và hệ có nghiệm $(x;0), x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $y \neq 0$ chia cả tử và mẫu của (*) cho y và đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó ta được

$m = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1} (**)$. Từ (1) ta có: $2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} > 0 \Rightarrow \left(t > \frac{1}{2}\right) \vee (t < -1)$.

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm $t \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ trên khoảng $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = -\frac{t^2 + 6t + 2}{(2t^2 + t - 1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 - \sqrt{7} \\ t = -3 + \sqrt{7} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên suy ra giá trị của m là $m \geq \frac{14 + 5\sqrt{7}}{28 + 11\sqrt{7}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

Bài 25. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0(1) \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0(2) \end{cases}$$ có nghiệm thực.

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

Đặt $t = x+1 \Rightarrow t \in [0;2]$, khi đó phương trình (1) trở thành

$t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 (*)$, xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ trên đoạn $[0;2]$, ta có $f'(u) = 3u^2 - 6u \le 0, \forall u \in [0;2]$, suy ra $f(u)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$

Do đó phương trình (*) tương đương với $f(t) = f(y) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow y = x+1$

Khi đó $x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0(i)$

Đặt $v = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow v \in [0;1] \Rightarrow (i) \Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Xét hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, ta có $g'(v) = 2v + 2 > 0, \forall v \in [0;1]$

Suy ra $\min\limits_{v\in[0;1]} g(v) = g(0) = -1; \max\limits_{v\in[0;1]} g(v) = g(1) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 2$.

Bài 26. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \ge 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \le \dfrac{2m-1}{2m+5} \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 \le -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 \le 3 - \dfrac{18}{2m+5} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cộng theo vế hai phương trình trong hệ trên ta suy ra:

$$\left(4x+2y\right)^2 = 16x^2+16xy+4y^2 \le -\frac{18}{2m+5}$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì cần $2m+5<0 \Leftrightarrow m<-\frac{5}{2}$.

Bây giờ ta chứng minh với $m<-\frac{5}{2}$ thì hệ có nghiệm.

Thật vậy, xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2=3 \\ 21x^2+12xy+6y^2=3 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{7} \\ y=\mp\frac{2}{7} \end{cases}$$, suy ra hệ này có nghiệm.

Giả sử $\left(x_0, y_0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình (*), khi đó ta có

$$\begin{cases} 5{x_0}^2-4x_0y_0+2{y_0}^2=3 \\ 21{x_0}^2+4x_0y_0+6{y_0}^2=3<3-\frac{18}{2m+5} \end{cases}, m<-\frac{5}{2}$$

Suy ra $\left(x_0, y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ đã cho.

Từ đó suy ra $m<-\frac{5}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 27. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 3x^2=y^3-2y^2+my \\ 3y^2=x^3-2x^2+mx \end{cases}$$

Lời giải:

(i). Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $\left(x_0, y_0\right)$, khi đó $\left(y_0, x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$.

Thay vào hệ ta được ${x_0}^3-5{x_0}^2+mx_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ {x_0}^2-5x_0+m=0(*) \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Hệ có nghiệm duy nhất thì (*) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$, điều này tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\Delta = 25-4m<0\\ \begin{cases}\Delta = 25-4m=0\\ m=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m>\frac{25}{4}.$$

(ii). Điều kiện đủ:

Với $m>\frac{25}{4}$, khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}3x^2 = y\left(y^2-2y+m\right) = y\left(\left(y-1\right)^2+m-1\right)\geq 0\\ 3y^2 = x\left(x^2-2x+m\right) = x\left(\left(x-1\right)^2+m-1\right)\geq 0\end{cases} \Rightarrow x,y\geq 0.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x\left(x^2-5x+m\right)+y\left(y^2-5y+m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+m-\frac{25}{4}\right)+y\left(\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+m-\frac{25}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=y=0.$$

Kết luận vậy $m>\frac{25}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 28. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\left|x+1\right|+\left(4-m\right)\left|x-1\right| = \left(m-1\right)\sqrt{x^2-1}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\left(x-1\right)\left(x+1\right)\geq 0$

Nhận thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình, khi đó chia hai vế của phương trình cho $\left|x-1\right|$ và có $\frac{\left|x+1\right|}{\left|x-1\right|}=\frac{x+1}{x-1}$, ta được

$$\frac{x+1}{x-1}+4-m=\left(m-1\right)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+4}{1+t}, \text{ với } t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

Ta có $t \geq 0$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2} \neq 0, t \in [0;+\infty); t \neq 1$

Từ đó suy ra $f(t) > f(1) = 3; \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m > 3$

Bài 29. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x^4+8x} = (m-2)x^2 - 2(m+2)x + 4m$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^4+8x} + 2x^2 + 4x = m\left(x^2-2x+4\right) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x^4+8x}+2x^2+4x}{x^2-2x+4}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4}} + 2.\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4}$$

Do đó ta đặt $t = \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x+4}$; khi đó $m = \sqrt{t} + 2t$

Trước hết ta tìm tập giá trị của t, ta có

$$t'(x) = \frac{-4\left(x^2-2x-2\right)}{\left(x^2-2x+4\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra $t \in \left[1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

Vậy ta xét hàm số $f(t) = 2t + \sqrt{t}$ đồng biến trên $\left[1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

Giá trị cần tìm của tham số m thỏa mãn $m \in \left[2\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}; 2\left(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}\right]$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 30. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Ta có $f'(x)=\frac{-3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}=-x\left[\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right]$

Do $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]\Rightarrow 3x+4>0\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}>0$

Vậy $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{-\sqrt{22}+3\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	-4

Dựa vào bảng biến thiên suy ra để phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} m=1 \\ -4\le m<\frac{-\sqrt{22}+3\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

Bài 31. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_3(xy+2)=2 \\ x^3+y^3-xy=m \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $a=\log_2(x+y); b=\log_3(xy+2)$ khi đó ta có $a+b=2$

Lại có $(x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow (2^a)^2 \ge 4(3^b-2)=4(3^{2-a}-2) \Leftrightarrow 12^a+8.3^a-36 \ge 0$

Xét hàm số $f(a)=12^a+8.3^a-36$ đồng biến; lại có $f(1)=0$ vậy $a \ge 1$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$m=(x+y)^3-3xy(x+y)-xy=(2^a)^3-3(3^{2-a}-2).2^a-(3^{2-a}-2)$

Xét hàm số $f(a)=(2^a)^3-3(3^{2-a}-2).2^a-(3^{2-a}-2)$ trên $[1,+\infty)$

Ta có $f'(a)=8^a\ln 8+6.2^a\ln 2-27.\left(\frac{2}{3}\right)^a.\ln\frac{2}{3}-9.\left(\frac{1}{3}\right)^a.\ln\frac{1}{3}>0$ với mọi a

Suy ra $f(a) \ge f(1)=1$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \ge 1$.

Bài 32. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \le m \\ x^2-2xy-2x \le m-2 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \le m \\ x^2-2xy-2x+2 \le m \\ 2(x^2-xy+2y^2-x)+(x^2-2xy-2x+2) \le 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \le m \\ x^2-2xy-2x+2 \le m \\ 2(x-2y)^2+2(x-1)^2 \le 3m \end{cases}$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì trước tiên $3m \ge 0 \Rightarrow m \ge 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ngược lại với $m \ge 0$; thì hệ luôn có nghiệm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$. Vậy $m \ge 0$ là giá trị cầ tìm.

Bài 33. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=m \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y(x-1)\ge 0 \\ x\le 5 \\ y\le 1 \end{cases}$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành: $y+2\sqrt{y(x-1)}+(x-1)=4$ (1)

Nếu $x<1; y<0$ thì ta có (1) tương đương với

$-\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{-y}\right)^2=4$ vô nghiệm, nên hệ vô nghiệm

Vậy $1\le x\le 5; 0\le y\le 1$ và (1) tương đương với

$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y}\right)^2=4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=4$, đặt $t=\sqrt{y}\in[0;1] \Rightarrow x=t^2-4t+5$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$m=\sqrt{4t-t^2}+\sqrt{1-t^2}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{4t-t^2}+\sqrt{1-t^2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-t}{\sqrt{4t-t^2}}-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}=0 \Leftrightarrow (2-t)\sqrt{1-t^2}=t\sqrt{4t-t^2}$

$\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}\in[0;1]$

Ta có $f(0)=1; f(1)=\sqrt{3}; f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy để hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm, tương đương với m thuộc tập giá trị của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ từ đó suy ra $m \in \left[\frac{\sqrt{5}}{3}, \sqrt{3}\right]$ là giá trị cần tìm.

Bài 34. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hệ phương trình sau đây có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |x-y| + |x^3 - y^3| = m^3 \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $|x-y| + |x^3 - y^3| = |x-y|(1 + x^2 + xy + y^2) = |x-y|(2+xy)$

Suy ra $m^6 = (x-y)^2(2+xy)^2 = (1-2xy)(2+xy)(2+xy)$ nhưng do $xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}$ nên theo bất đẳng thức cô sic ho 3 số không âm ta được:

$$m^6 = (1-2xy)(2+xy)(2+xy) \le \left(\frac{1-2xy+2+xy+2+xy}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Rightarrow m \le \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Ngược lại, với $m = \sqrt{\frac{5}{3}}$ thì dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi đó $xy = -\frac{1}{3}; x^2 + y^2 = 1$. rõ rang hệ này có nghiệm.

Vậy giá trị cần tìm của m là $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$$

1.2. Tìm tham số m để phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$$

1.3. Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

1.4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x^2-4})-\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x^2-4}$$

1.5. Tìm m để phương trình sau

$$1+\frac{2m}{3}\sqrt{x-x^2}-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0$$ có nghiệm thực

1.6. Cho phương trình

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-(2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=m$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

1.7. Cho phương trình

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{2-x}=m(3x+5).$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

1.8. Xác định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$2\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=m$$

1.9. Định m để phương trình sau có nghiệm

$$x^3+x^2+x=m(1+x^2)^2$$

1.10. Xác định giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2+(x^2+x+1)^2=(x^2+1)^2+m(x^2-x+1)^2$$

1.11. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm thực:

$$x-\sqrt{x}=m(1-\sqrt{2(x^2-x+1)})$$

1.12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2)=2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+4$$

1.13. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt[3]{x+24m}+\sqrt{12m-x}-6=0$$

1.14. Tìm giá trị tham số m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$$

1.15. Xác định giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{x^3+mx^2+x+m}+\sqrt{-x^3+mx^2-x+m}=m\sqrt{x^2+1}$$

1.16. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm thực:

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$$

1.17. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\log_2(x^3+4mx)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-2m+1)=0$$

1.18. Cho phương trình

$$\log^2{}_3 x+\sqrt{\log^2{}_3 x+1}-2m-1=0 (m \text{ là tham số})$$

Xác định m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $[1;3^{\sqrt{3}}]$

1.19. Xác định giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$12(x+2)\sqrt{x+2}-4\sqrt{(3x-2)^3}+6x^3-9x^2-36x=m$$

1.20. Chứng minh rằng với mọi giá trị thực dương của tham số m phương trình sau luôn có 2 nghiệm phân biệt:

$$x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}$$

1.21. Tìm để bất phương trình sau có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]$:

$$m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\le 0$$

1.22. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $x^3-3x-1\ge m\left(\sqrt{x-x^2}-\sqrt{x}\right)^3$

1.23. Tìm tất cả m để bất phương trình

$$-x^3+3mx-2\le -\frac{1}{x^3} \text{ thỏa mãn với } x\ge -1$$

1.24. Tìm m để bất phương trình

$$\log_{\frac{m+1}{m+2}}(x^2+3)>1 \text{ đúng với mọi } x\in\mathbb{R}$$

1.25. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$

$$m=\int_2^x f(t)dt \text{ ; trong đó } f(t)=3(2+\sqrt{t-2})-2t-\sqrt{t+6} (t\ge 2)$$

1.26. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm thực

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{m^3}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{m}}{(x-1)^2} \le \sqrt[4]{m^3}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$$

1.27. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{-1}{2};1\right]$

$$m \le 1 + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}$$

1.28. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm

$$\sqrt{m-2x(y+1)} = y - x + 2$$

1.29. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

1.30. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

1.31. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ \sqrt[8]{5-2y} + \sqrt[4]{5-2y} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m \end{cases}$$

1.32. Tìm m để hệ phương trình sau đây có nghiệm thực x, y dương:

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = \dfrac{-5}{4} + m \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = \dfrac{-5}{4} + m \end{cases}$$

1.33. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \end{cases}$$

1.34. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = m(x^2 - y) \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

1.35. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(x+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

1.36. Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} e^x = 2011 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2011 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$ có đúng 2 nghiệm thỏa mãn $x > 0; y > 0$

1.37. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$10x^2 + 8x + 4 = m\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+1}$$

1.38. Cho bất phương trình

$$\frac{x}{1+|x|} \geq mx^2 + x (1)$$

(i). Giải bất phương trình (1) khi $m = 2$.

(ii). Tìm giá trị m lớn nhất sao cho bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.39. Chứng minh rằng với mọi tham số m phương trình

$$x^3 - 9x - m\left(x^2 - 1\right) = 0$$

luôn có 3 nghiệm.

1.40. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+mx+2}}{2x-1}\right) = 2x - \sqrt{x^2+mx+2} - 1.$$

1.41. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$2012^{x^2+2mx+2} - 2012^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m.$$

1.42. Tìm m để tồn tại cặp số $\left(x, y\right)$ không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn phương trình:

$$\left(4m-3\right)|x| + \left(3m-4\right)|y| + \left(m-1\right)\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

1.43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m đê hệ phương trình sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2} + m} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2} + m} = 4 \\ \dfrac{2}{x+y} + \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

1.44. Tìm tất các các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_3(xy+2) = 2 \\ x^3 + y^3 - xy = m \end{cases}$$

1.45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+m} + \sqrt{x-y+m} = 2 \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases}$$

1.46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt{\frac{14x^2}{3} + \frac{1}{96x^2} + m} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2x$$

1.47. Tìm các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1 \\ \sqrt{2x+y} + 3\sqrt[6]{x(y+1)^2} = m\left(\sqrt{x} + \sqrt{y+1}\right) \end{cases}$$

1.48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + (m+2)x + 4 \le (m-1)\sqrt{x^3 + 4x} \ (x \in \mathbb{R})$$

1.49. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$x^2 + 7 + m\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + m\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2\right)$$

1.50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để mọi nghiệm của phương trình $\dfrac{\log_2(9-x^3)}{\log_2(3-x)} = 3$

cũng là nghiệm của phương trình: $\sqrt{\left(\sqrt{2}+x\right)^m} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-x\right)^m} = 2\sqrt{2}$

1.51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\left(x^2-1\right)\log^2\left(x^2+1\right) - m\sqrt{2\left(x^2-1\right)}\log\left(x^2+1\right) + m + 4 = 0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

có đúng hai nghiệm thực thỏa mãn điều kiện $1 \le |x| \le 3$.

1.52. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$(x-1)^2 + 4\sqrt{x^2-2x} - 2\left(2\sqrt{x^2-2x}+1\right)\ln\left(\sqrt{x^2-2x}\right) = m$$

1.53. Tìm những giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m + 1 = 0$$

1.54. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$(m-3)\sqrt{x} + (2-m)x + 3 - m = 0$$

1.55. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt[5]{x^2-34x+m} - \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1$$

1.56. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$m\sqrt{x^2-2x+17} - (2m+1)\sqrt[4]{x^2-2x+17} + m + 1 > 0$$

1.57. Tìm tất cả các giá trị không âm của tham số m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x-m} + 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x}$

1.58. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(m\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt[4]{x(x-1)}\right) = 1$$

1.59. Tìm m để phương trình $2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \cos 4x + 2\sin 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1.60. Tìm m để phương trình:

$12\sqrt{4+x-3x^2} = 3x - 24 + m\left(3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-3x}\right)$ có nghiệm

1.61. Tìm m để hệ phương trình

$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+15} = \dfrac{x+y}{2} \\ x + y = m \end{cases}$ có nghiệm

1.62. Tìm m để hệ sau có nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+4) = -3(x^2-2y^2)+9y-8 \\ \sqrt{11+2(2x-y)-y^2} = 2m+\sqrt{5+2y-x^2} \end{cases}$$

1.63. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3+(y+2)x^2+2xy = -2m-3 \\ x^2+3x+y = m \end{cases}$$

1.64. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m$$

1.65. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} \log_2(x+y)+\log_3(xy+2) = 2 \\ x^3+y^3-xy = m \end{cases}$

1.66. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực $4x^2-2mx+1 = 3\sqrt{8x^3+2x}$

1.67. Tìm m để bất phương trình $x^6-3mx^4+2x^3-1 \geq 0$ với mọi $x \geq 1$

1.68. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}-4 = m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}-4 = m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}$$

1.69. Tìm m để hệ sau vô nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{4-x}+\sqrt{4-y} = 1 \\ m^2\sqrt{4-x} > 5m\sqrt{4-x}+6\sqrt{4-y} \end{cases}$$

1.70. Tìm m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4+y^4 = 1 \\ \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x+y}+x^2y^2+\dfrac{1}{x+y} = m \end{cases}$$

1.71. Tìm m để hệ sau có ba nghiệm phân biệt $\begin{cases} x+y = m \\ (x+1)y^2+xy = m(y+2) \end{cases}$

1.72. Tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} \sqrt{x+m}+\sqrt{y+m} = 2 \\ x^2+y^2 = 2m^2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

ĐIỀU KIỆN PT-HPT CÓ NGHIỆM

1.73. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \left|6x+4y+6\sqrt{x+3y}+9\right| = 2\left(\sqrt{5x^2+16xy+3y^2}+3\sqrt{5x+y}\right) \\ 12\sqrt{x+3y}+\dfrac{7}{3}(x-2y)-\dfrac{31}{4} \geq 8\left[2(m+5)-\sqrt{\left|1-9m^2\right|}\right] \end{cases}$$

1.74. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x+1+\dfrac{5}{6x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}=m$

1.75. Tìm m để bất phương trình sau dung với mọi $x \in [0;1]$

$$\frac{\left(x-6^{1-x}\right)\left((m-1)6^x-\dfrac{2}{6^x}+2m+1\right)}{ex^2-\pi x+2012} \geq 0$$

1.76. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x+y+4=2xy \\ 2^{x+y}=m\left(\sqrt{x^2+y^2+x+y+5}+x+y\right) \end{cases}$ có nghiệm (x,y) thỏa mãn $x,y \geq 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 3:

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

MỘT SỐ BÀI TẬP CƠ BẢN

Phương trình lượng giác cơ bản:

$$\begin{cases} \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi \\ \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \\ \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \end{cases}$$

Bài 1. Giải phương trình

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi\sin 2x\right) \Leftrightarrow 1 + \cos\left(\pi\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi\cos^2 x\right) = \cos\left(\pi\sin 2x\right) \Leftrightarrow \pi\cos^2 x = \pm\pi\sin 2x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \pm\sin 2x + 2k \Leftrightarrow \cos 2x \pm 2\sin 2x = 4k - 1 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\left(4k-1\right)^2 \le 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{4} \le k \le \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow k = 0 \in \mathbb{Z}.$

Khi đó phương trình (*) trở thành

$$\cos 2x \pm 2\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x \pm 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\cos x \pm 2\sin x\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \tan x = \pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\alpha + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}, \tan\alpha = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pm\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \tan\alpha = \dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài 2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x - 16k \ge 0\\ 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 2k)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x - 16k \ge 0\\ 9x = 24k - 40 - \dfrac{25}{3k + 5}\end{cases}$$

Vậy với $x, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 25 \vdots 3k + 5 \Rightarrow \begin{cases}k = -2\\ x = -7\end{cases} \vee \begin{cases}k = -10\\ x = -31\end{cases}$

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{x = -7, x = -31\}$.

Bài 3. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$$\cos\left(\pi\left(x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi x^2\right)$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\cos\left(\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right)=\sin\left(\pi x^2\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\left(x^2+2x\right)\right)=\sin\left(\pi x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\pi\left(x^2+2x\right)\right)=\sin\left(\pi x^2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi\left(x^2+2x\right)=\pi x^2+k2\pi\\ \pi\left(x^2+2x\right)=\pi-\pi x^2+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4k+3}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x>0\Rightarrow\begin{cases}k\ge 0\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow k=0\Rightarrow x_{\min}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Bài 4. Tìm nghiệm x thuộc đoạn $[0;14]$ thỏa mãn phương trình

$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$4\cos^3x-3\cos x-4\left(\cos 2x+1\right)+3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x-8\cos^2x=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$0\le x\le 14\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14\Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}$$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right\}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[-1,10]$ của phương trình

$$\sin x\cos\frac{\pi}{5}+\cos x\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\cos\left(\pi x^2\right) = \cos\left(\pi\left(x+1\right)^2\right)$$

Bài 3. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x-\sqrt{9x^2+80x-40}\right)\right)=1$$

Bài 4. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^8+3x^4-2}\sin\left(\pi\left(16x^2+2x\right)\right)=0$$

Bài 5. Tìm các nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$của phương trình

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3$$

Bài 6. Tìm nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ thỏa mãn phương trình

$$2\sin 2x-3\cos 2x+2\left(3\sin x-\cos x\right)=7$$

ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX, COSX

Cần nhớ đến các biến đổi sau, khi xuất hiện các biểu thức này khi giải toán sẽ áp dụng cách biến đổi tương tự.

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\cos x\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x\pm\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x\mp\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin x\pm\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\pm\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x\mp\frac{\pi}{3}\right)$$

BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Giải phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) = 2\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2. Giải phương trình

$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{6} = 4x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right.$$

Bài 3. Giải phương trình

$\sqrt{3}\left(\sin 2x + \sin x\right) + \cos 2x - \cos x = 2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\left(\sin 2x+\sin x\right)+\cos 2x-\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Bài 4. Giải phương trình

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=-5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=5\sin\left(5x+\frac{7\pi}{6}\right)$$

Đặt $\sin\alpha=\frac{4}{5};\cos\alpha=\frac{3}{5}$, khi đó phương trình tương đương với

$$5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=5\sin\left(5x+\frac{7\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=\frac{9\pi}{24}+\frac{\alpha}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{36}-\frac{\alpha}{6}+\frac{k\pi}{3}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 5. Giải phương trình: $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (*)

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(1+2\sin x - \sin x - 2\sin^2 x\right) \Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(\cos 2x + \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos s\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{6} = x+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ 2x-\dfrac{\pi}{6} = -x-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

So sánh với điều kiện (*) suy ra nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 6. Giải phương trình: $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) - \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow -\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

$$-\cos 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 1 - \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 1\right)\left(-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 7. Giải phương trình: $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x=2$

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 3x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=1$$

Do $\begin{cases}-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\\ -1\le\sin 3x\le 1\end{cases}$ nên phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Bài 8. Giải phương trình:

$$4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=3+\left(1+\tan 2x\tan x\right)\sin 4x$$

Lời giải:

Điều kiện: $\cos x\cos 2x\neq 0\,(*)$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=3+\left(\frac{\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}\right)\sin 4x$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow cos4x+\sqrt{3}\sin 4x=2\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}cos4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+\frac{\pi}{6}=2x+k2\pi \\ 4x+\frac{\pi}{6}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \text{ thỏa mãn (*).}$$

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{3}\left(\sin 2x-\cos x\right)+\sin x-\cos 2x=2$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+\sin x-\sqrt{3}\cos x=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi;-\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Bài 10. Giải phương trình $\dfrac{\sin x\sin 2x+2\sin x\cos^2 x+\sin x+\cos x}{cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}cos2x$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x+\sin x+\cos x}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x+\cos x\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra nghiệm $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm $x\in\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình

$$\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x.$$

Bài 4. Giải phương trình

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right).$$

Bài 5. Giải phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\cos x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=\sqrt{3}\left(1+2\cos x\right).$$

Bài 6. Giải phương trình: $16\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-4\sqrt{3}\cos 2x+5=0$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos x\tan^2 x+\sin x=4\tan x-\sin x\tan^2 x-\sqrt{3}\cos x$.

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$.

Bài 9. Giải phương trình: $\dfrac{\left(3\sin x-1\right)\left(2\sqrt{3}\cos x-1\right)}{\sin x\left(2\sqrt{3}\cos x+1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 11. Giải phương trình: $\sqrt{3}\left(\sin 2x-\cos x\right)+\sin x-\cos 2x=2$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SINX, COSX

Phương trình có dạng

$a\left(\sin x+\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$

$a\left(\sin x-\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$

Đặt $\left[\begin{array}{l} t=\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}. \\ t=\sin x-\cos x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}. \end{array}\right.$

Đưa về giải phương trình với ẩn là t.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$1+\sin^3 x+cos^3 x=\dfrac{3}{2}\sin 2x.$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$1+(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=3\sin x\cos x.$

Đặt $t=\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}.$

Khi đó phương trình trở thành

$1+t^3-3\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)t=3\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-5=0\Leftrightarrow (t+1)(t^2+2t-5)=0$

$\Leftrightarrow t=-1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow\ x=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Bài 2. Giải phương trình:

$2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\sin 2x=1.$

Lời giải:

đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin 2x=t^2-1.$

Khi đó phương trình trở thành:

$2\sqrt{2}t-(t^2-1)=1\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t=0\Leftrightarrow t(t-2\sqrt{2})=0\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Bài 3. Giải phương trình:

$$\frac{\left(1-\sqrt{2}\sin x\cos x\right)\left(1+\dfrac{\sin x+\cos x}{2}\right)-\dfrac{1}{2}}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}=0.$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $\sin x+\cos x+\sqrt{2}\neq 0\,(*)$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t^2-1\right)\right)\left(1+\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{2}t^2\right)\left(2+t\right)=2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}t^3-2\sqrt{2}t^2+\left(2+\sqrt{2}\right)t+2+2\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}t^2-\left(2\sqrt{2}+2\right)t-\sqrt{2}-2\right)=0\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-1\right)\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2}\\ t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=k2\pi \qquad ,k\in\mathbb{Z}\quad (\text{ thỏa mãn } (*)\text{ }).\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k2\pi,\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình

$$\sin x-\cos x+7\sin 2x=1.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sin x-\cos x\right)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Bài 4. Giải phương trình

$$\sin 3x-\cos 3x+2\left(\sin x+\cos x\right)=1.$$

Bài 5. Giải phương trình

$$2+\left(2+\sin 2x\right)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\tan x+\cot x\right)=0.$$

Bài 6. Giải phương trình:

$$\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}.$$

Bài 7. Giải phương trình:

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x.$$

Bài 8. Giải phương trình:

$$\frac{\sin x\cos^2 x+\cos x\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x-\sin 2x\right)-\sqrt{2}}{\sin x+\cos x-\sin x\cos x}=0.$$

Bài 9. Giải phương trình:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sin x-\cos x\right)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$$

Bài 10. Giải phương trình:

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Bài 11. Giải phương trình: $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1$.

Bài 12.

Giải phương trình: $5\left(1-\sin 2x\right)-16\left(\sin x-\cos x\right)+3=0$.

Bài 13.

Giải phương trình: $\left(\sin x+\cos x-1\right)\left(2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)+1\right)=2\sin 2x$.

Bài 14.

Giải phương trình: $2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)-\left(\sin x+\cos x\right)+\sin 2x=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 15.

Giải phương trình: $2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)+\sin 2x\left(\sin x+\cos x\right)=2\sqrt{2}$.

Bài 16.

Giải phương trình: $\left(\sin x+\cos x-1\right)\left(2\sin 2x+1\right)=\left(\sin x+\cos x\right)\left(2\sin 2x-1\right)$.

PHƯƠNG TRÌNH KẾT HỢP TANX, COTX, SINX, COSX

Bài 1. Giải phương trình: $2\left(\tan x-\sin x\right)+3\left(\cot x-\cos x\right)+5=0$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1-\sin x\right)+3\left(\frac{\cos x}{\sin x}+1-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x-\sin x\cos x\right)\left(\frac{2}{\cos x}+\frac{3}{\sin x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-\dfrac{3}{2}\\ \sin x+\cos x-\sin x\cos x=0\end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình: $3\left(\cot x-\cos x\right)-5\left(\tan x-\sin x\right)=2$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$3\left(\frac{\cos x}{\sin x}+1-\cos x\right)-5\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1-\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(\cos x+\sin x-\sin x\cos x\right)}{\sin x}-\frac{5\left(\cos x+\sin x-\sin x\cos x\right)}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sin x}-\frac{5}{\cos x}\right)\left(\cos x+\sin x-\sin x\cos x\right)=0 .$$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\tan x+\cot x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=\sin^2 x+cos^2 x=1$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t^2-1\right)t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}t^3-\sqrt{2}t-2=0 \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}t^2+2t+\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 4. Giải phương trình: $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x \Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x+\sin x\cos x\right)=0$$

- Xét $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.
- Xét $\sin x-\cos x+\sin x\cos x=0$ (*), đặt

$t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos x\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$t+\frac{1-t^2}{2}=0 \Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2} \Rightarrow t=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=cos\alpha \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\pi.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$\left\{x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\pi,k\in\mathbb{Z},\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Bài 5. Giải phương trình: $3\left(\tan x+\cot x\right)=2\left(2+\sin 2x\right)$.

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$3\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=2\left(2+\sin 2x\right)\Leftrightarrow\frac{3\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin x\cos x}=2\left(2+\sin 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6}{\sin 2x}=2\left(2+\sin 2x\right)\Leftrightarrow\sin^2 2x+2\sin 2x-3=0\Leftrightarrow\left(\sin 2x-1\right)\left(\sin 2x+3\right)=0$$

. thỏa mãn điều kiện.

Bài 6. Giải phương trình: $2\tan x+\cot x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}$.

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\left(\tan x+\cot x\right)+\tan x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}\Leftrightarrow\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)+\tan x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}+\tan x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}\Leftrightarrow\tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 7. Giải phương trình:

$$3\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)-12=2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right).$$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó phương trình tương đương với:

$$3\left(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\right)-12=2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x-2\right)-2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan x-\cot x\right)^2-2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right)=0 \Leftrightarrow \left(\tan x-\cot x\right)\left(3\left(\tan x-\cot x\right)-2\sqrt{3}\right)=0$$

- Xét $\tan x-\cot x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

- Xét $\tan x-\cot x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $4\sin^2 x+3\tan^2 x=1$.

Bài 2. Giải phương trình: $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin x$.

Bài 3. Giải phương trình: $1+3\sin 2x=2\tan x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\tan^2 x\left(1-\sin^3 x\right)+\cos^3 x-1=0$.

Bài 5. Giải phương trình: $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$.

Bài 6. Giải phương trình: $\sin 2x-2\cos^2 x+4\left(\sin x-\cos x+\tan x-1\right)=0$.

Bài 7. Giải phương trình: $\cot^4 x=\cos^3 2x+1$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sin^2 x\tan x+\cos^2 x\cot x-\sin 2x=1+\cot x+\tan x$.

Bài 9. Giải phương trình: $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=1+\sin 2x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{3(\sin x+\tan x)}{\tan x-\sin x}-2\cos x=2$.

Bài 11. Giải phương trình: $(\tan x-\cot x+2\tan 2x)(1+\cos 3x)=4\sin 3x$.

Bài 12. Giải phương trình: $\tan^2 x=\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$.

Bài 13. Giải phương trình: $\tan^2 x=\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.

Bài 14. Giải phương trình: $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=1+\sin 2x$.

Bài 15. Giải phương trình: $1+\cot 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

Bài 16. Giải phương trình: $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x$.

Bài 17. Giải phương trình: $\tan x=\cot x+2\cot^3 2x$.

Bài 18. Giải phương trình: $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$.

Bài 19. Giải phương trình: $\cot x=\tan x+2\tan 2x$.

Bài 20. Giải phương trình: $6\tan x+5\cot 3x=\tan 2x$.

Bài 21. Giải phương trình: $2(\cot 2x-\cot 3x)=\tan 2x+\cot 3x$.

Bài 22. Giải phương trình: $3\tan 3x+\cot 2x=2\tan x+\dfrac{2}{\sin 4x}$.

Bài 23. Giải phương trình: $2\tan x+\cot 2x=2\sin 2x+\dfrac{1}{\sin 2x}$.

Bài 24. Giải phương trình: $\cot x-1=\sqrt{2}(\tan x+\cot x)(\cos x-\sin x)$.

Bài 25. Giải phương trình: $2+\tan x=\dfrac{\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Bài 26. Giải phương trình: $3\tan^2 x+\dfrac{3(\tan x+1)}{\cos x}-4\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{4}\right)=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỈ CHỨA MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các công thức biến đổi

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}; \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Thường gặp các phương trình dạng:

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d = 0$

Hoặc $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x + \left(m\sin x + n\cos x\right) = 0$

Phương pháp giải:

(i). Xét trường hợp $\cos x = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không.

(ii). Xét trường hợp $\cos x \neq 0$, khi đó chia cả hai vế của phương trình thứ nhất và thứ hai lần lượt cho $\cos^2 x$ và $\cos^3 x$. Ta được các phương trình thuần nhất bậc hai, bậc ba với ẩn là $\tan x$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình

$$\frac{2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0.$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\dfrac{1}{2}\sin 2x=0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x-1)(3\sin 2x-4)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện (*), suy ra k lẻ suy ra $x=\dfrac{\pi}{4}+(2k+1)\pi=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Bài 2. Giải phương trình

$\sin^2 2x\cos 6x+\sin^2 3x=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{11x}{2}\sin\dfrac{9x}{2}$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với

$(1-\cos 4x)\cos 6x+1-\cos 6x=\sin\dfrac{11x}{2}\sin\dfrac{9x}{2} \Leftrightarrow 1-\cos 4x\cos s6x=\sin\dfrac{11x}{2}\sin\dfrac{9x}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}(\cos 10x+\cos 2x)=\dfrac{1}{2}(\cos x-\cos 10x) \Leftrightarrow \cos 2x+\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-3=0 \Leftrightarrow (\cos x-1)(2\cos x+3)=0 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Bài 3. Giải phương trình

$5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$.

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện $\cos x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x \Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x)\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \Leftrightarrow 5\sin x-2=\dfrac{3\sin^2 x}{1+\sin x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow (5\sin x-2)(1+\sin x)=3\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x+2)=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 4. Giải phương trình:

$4\sin^3 x+3\cos^3 x-3\sin x-\sin^2 x\cos x=0$.

Lời giải:

Nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x\neq 0$, khi đó chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được phương trình:

$4\tan^3 x+3-3\tan x(1+\tan^2 x)-\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0 \Leftrightarrow (\tan x-1)(\tan^2 x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=1 \\ \tan x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 5. Giải phương trình:

$\sin x\sin 2x+\sin 3x=6\cos^3 x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$2\sin^2 x\cos x+3\sin x-4\sin^3 x-6\cos^3 x=0$

Nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x\neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được phương trình

$2\tan^2 x+3\tan x(1+\tan^2 x)-4\tan^3 x-6=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x-3\tan x+6=0 \Leftrightarrow (\tan x-2)(\tan^2 x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 2 = \tan\alpha \\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \alpha + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 6. Giải phương trình:

$1 + 3\sin 2x = 2\tan x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$1 + 3.\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 2\tan x \Leftrightarrow 2\tan^3 x - \tan^2 x - 4\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)\left(2\tan^2 x - 3\tan x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \sin x = 0$.

Bài 2. Giải phương trình: $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \sin 2x$.

Bài 3. Giải phương trình : $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sin x \cos 2x = 6\cos x\left(1 + 2\cos 2x\right)$.

Bài 5. Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\cos^3 x + 2\sin^3 x\right)}{2\sin x + 3\cos x} = \sin 2x$.

Bài 6. Giải phương trình: $\sin x + \cos x - 4\sin^2 x = 0$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sin^2 x\left(\tan x + 1\right) = 3\sin x\left(\cos x - \sin x\right) + 3$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{2}\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 9. Giải phương trình: $\dfrac{8\cos^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos 3x}{\cos x-\dfrac{1}{2}}=0$.

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin x}{\sin x+\cos x}=0$.

Bài 11. Giải phương trình: $6\sin x-2\cos^3 x=\dfrac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$.

Bài 12. Giải phương trình: $\dfrac{\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-3x\right)}{\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Các công thức sử dụng :

i. $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

ii. $\sin a-\sin b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$.

iii. $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

iv. $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

<u>Lưu ý :Các thừa số chung</u>

$+1+\sin 2x;\cos 2x;1+\tan x;1+\cot x$ có thừa số chung là $\sin x+\cos x$.

$+1-\sin 2x;\cos 2x;1-\tan x;1-\cot x$ có thừa số chung là $\sin x-\cos x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$+\sin^2 x, \tan^2 x$ có thừa số chung là $(1-\cos x)(1+\cos x)$.

$+\cos^2 x, \cot^2 x$ có thừa số chung là $(1-\sin x)(1+\sin x)$.

Lưu ý với Bài tập mẫu số 5. Các bài toán thường cho dưới dạng này.

Thông thường loại toán này có dạng :

$(a+b\sin x).f(\cos x)+f(\sin x)=0$

Ta phân tích được $f(\sin x)=(a+b\sin x)g(\sin x)$

Khi đó phương trình trở thành :

$$(a+b\sin x)\left(f(\cos x)+g(\sin x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b\sin x=0 \\ f(\cos x)+g(\sin x)=0 \end{array}\right.$$

<u>Ví dụ :</u>Giải phương trình :

$$9\sin x+6\cos x(1-\sin x)-2\sin^2 x-7=0 \Leftrightarrow 6\cos x(1-\sin x)+\left(-2\sin^2 x+9\sin x-7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x(1-\sin x)+(1-\sin x)(-7+2\sin x)=0 \Leftrightarrow (1-\sin x)(6\cos x+2\sin x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ 6\cos x+2\sin x-7=0 \end{array}\right.$$

BÀI TẬP MẪU

Lưu ý : ***Nhóm các số hạng với nhau dùng công thức cộng, trừ lượng giác***

Bài 1.

Giải phương trình: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với:

$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-\frac{1}{2}\\ \sin 2x=\cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2.

Giải phương trình: $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với: $(\cos 3x+1)+(\cos x+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{3x}{2}+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\frac{3x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 3.

Giải phương trình: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$(\cos x+\cos 4x)+(\cos 2x+\cos 3x)=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\ \cos x=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 4.

Giải phương trình: $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\sin 3x - \sin x\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos x + \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos x + 1\right)\left(2\cos x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 5.

Giải phương trình: $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\cos 10x - \cos 6x\right) + \left(1 - \cos 8x\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 8x \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 4x \sin 2x\left(\cos 4x - \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 4x \sin 2x \sin 3x \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 6.

Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(1 - \cos 2x\right) + \left(\cos 3x - \cos x\right) + \left(\sin x - \sin 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin 2x \sin x + \sin x\left(1 - 2\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin x - 2\sin 2x + 1 - 2\cos x\right) = 0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)(1-2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6}+k2\pi, x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 7.

Giải phương trình: $(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)=3-4\cos^2 x$.

<u>Lời giải:</u>

$$(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)=3-4\left(1-\sin^2 x\right)=4\sin^2 x-1$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(2\sin 2x+1)=(2\sin x-1)(2\sin x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin 2x-\sin x)=0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6}+k2\pi, x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$$

Bài 8.

Giải phương trình: $(\cos x-\sin x)\cos x\sin x=\cos x\cos 2x$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với:

$$(\cos x-\sin x)\cos x\sin x=\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-\sin x)(\sin x-(\cos x+\sin x))=0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x(\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x = \frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 9.

Giải phương trình: $(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4(1-\sin^2 x)-3=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+(1+2\sin x)(1-2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (1+2\sin x)(3\cos 4x-3)=0$.

Bài 10.

Giải phương trình: $\cos^2 x+\sin^3 x+\cos x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$(\cos^2 x+\cos x)+\sin^3 x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)+\sin x(1-\cos^2 x)=0$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(\cos x+\sin x-\sin x\cos x)=0$.

Bài 11. Giải phương trình

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 12. Giải phương trình

$$\cos 2x-3\sin 2x+5\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{9\pi}{4}\right)=3.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\cos 2x-3\sin 2x+5\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{9\pi}{4}\right)=3\Leftrightarrow \cos 2x-3\left(1+\sin 2x\right)+5\left(\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\cos x-\sin x\right)-3\left(\sin x+\cos x\right)^2+5\left(\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(5-3\left(\sin x+\cos x\right)+\left(\cos x-\sin x\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(4\sin x+2\cos x-5\right)=0\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Bài 13. Giải phương trình

$$\frac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Lời giải:

Điều kiện $\cos x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\cos^2 x\left(\tan^2 x+\tan x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos x\sin x=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.\text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Bài 14. Giải phương trình

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\left(\sin 3x+\sin x\right)+\sin 2x=\left(1+\cos 2x\right)+\cos x\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=\cos x\left(2\cos x+1\right)\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos x+1\right)\left(2\sin x-1\right)=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 15. Giải phương trình

$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8.$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$$
$$\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x\left(1 - \sin x\right) - 2\sin^2 x - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\cos x\left(1 - \sin x\right) + \left(1 - \sin x\right)\left(2\sin x - 7\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(1 - \sin x\right)\left(6\cos x + 2\sin x - 7\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \sin x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Bài 16.

Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\sin x + \sin 3x\right) + \sin 2x = \left(\cos x + \cos 3x\right) + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x + 1\right) = \cos 2x\left(2\cos x + 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(2\cos x + 1\right)\left(\sin 2x - \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = \cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 17.

Giải phương trình: $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$2\sin^3 x-\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(1+\sin x\right)-\left(1-\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x\right)-\left(1-\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(2\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(1+2\sin x\cos x+2\left(\sin x+\cos x\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(\left(\sin x+\cos x\right)^2+2\left(\sin x+\cos x\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\cos x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 18.

Giải phương trình: $2\cos^3 x+\cos 2x+\sin x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$2\cos^3 x+2\cos^2 x-1+\sin x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(1+\cos x\right)-\left(1-\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)-\left(1-\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(2\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(1+2\sin x\cos x+2\sin x+2\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\sin x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 19.

Giải phương trình: $\sin 3x=\cos x\cos 2x\left(\tan^2 x+\tan 2x\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $\cos x.\cos 2x \neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với: $\cos x.\sin 3x = \cos 2x\sin^2 x + \cos^2 x\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) = \sin x\left(2\cos^2 x.\cos x + \cos 2x\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = \sin x\left(\cos 2x\sin x + 2\cos^3 x\right)$

❖ Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, thỏa mãn điều kiện.

❖ Xét $\cos x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = \cos 2x\sin x + 2\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(3 - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x\right) = \cos 2x\sin x \Leftrightarrow \cos x\cos 2x = \cos 2x\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x - \cos x\right) = 0$, đối chiếu với điều kiện thì phương trình này tương đương với:

$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 20. Giải phương trình: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$2\left(\sin 3x - \cos 3x\right) = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} \Leftrightarrow 2\left(3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x\right) = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$

$\Leftrightarrow 2\left(3\left(\sin x + \cos x\right) - 4\left(\sin x + \cos x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x\right)\right) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x}$

❖ Xét $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

❖ Xét $2\left(3 - 4\left(1 - \sin x\cos x\right)\right) = \dfrac{1}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x\left(4\sin x\cos x - 1\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\sin 2x - 1\right) = 1 \Rightarrow 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sin 2x - 1\right)\left(2\sin 2x + 1\right) = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 21. Giải phương trình:

$$\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0$

Khi đó phương trình tương đương với

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1) = 2(\sin x + \cos x)(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)^2 (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Bài 22. Giải phương trình:

$$3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \neq k\pi$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - 2\sin^2 x \cos x + 2\sqrt{2}\sin^4 x - 3\sqrt{2}\cos x \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x\right)\left(3\cos x - 2\sin^2 x\right) = 0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\cos x - 2\sin^2 x = 0 \\ \cos x - \sqrt{2}\sin^2 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$ thỏa mãn điều kiện.

Bài 23. Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x + \sin 2x\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) - 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x(\sin x + \cos x) - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(4(\cos x - \sin x) - \sin 2x - 4) = 0$$

Ta có $4(\cos x - \sin x) - \sin 2x - 4 = 4(\cos x - \sin x) - 2\sin x\cos x - 5 + \sin^2 x + \cos^2 x$

$$= (\cos x - \sin x)^2 + 4(\cos x - \sin x) - 5 = (\cos x - \sin x - 1)(\cos x - \sin x + 5)$$

Vậy phương trình tương đương với

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1)(\cos x - \sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Bài 24. Giải phương trình $2\sin^2 x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\sin 2x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2\sin^2 x\left(\sin x+\cos x\right)=\sqrt{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}.2\sin 2x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\sin x+\cos x\right)=\sqrt{2}\sin 2x\left(1-\cos 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\sin x+\cos x\right)=2\sqrt{2}\sin^2 x\sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x-\sqrt{2}\sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\,,k\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k2\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình sau:

Bài 1. Giải phương trình : $cos^3 x+\sin^3 x=\sin x-\cos x$.

Bài 2. Giải phương trình: $\cos^3 x+\sin^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$.

Bài 3. Giải phương trình: $\cos^3 x+cos^2 x+2\sin x-2=0$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sin x+\sin^2 x+cos^3 x=0$.

Bài 5. Giải phương trình: $\cos^2 x-4\sin x\cos x=0$.

Bài 6. Giải phương trình: $2\sin^3 x-\sin x=2\cos^3 x-\cos x+cos2x$.

Bài 7. Giải phương trình: $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+cos^2 x+cos^3 x+cos^4 x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 9. Giải phương trình: $\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}=\sin 2x$.

Bài 10. Giải phương trình: $(\sin x+3)\sin^4\dfrac{x}{2}-(\sin x+3)\sin^2\dfrac{x}{2}+1=0$.

Bài 11. Giải phương trình: $2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$.

Bài 12. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 4x}$.

Bài 13. Giải phương trình: $5\sin 3x-3\sin 5x=0$.

Bài 14. Giải phương trình: $2\cos 2x-8\cos x+7=\dfrac{1}{\cos x}$.

Bài 15. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^2 x(1+\cot x)-3}{\sin x-\cos x}=3\cos x$.

Bài 16. Giải phương trình: $1+\sin\dfrac{x}{2}\sin x-\cos\dfrac{x}{2}\sin^2 x=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$.

Bài 17. Giải phương trình: $\sin^3 x(1-\cot x)+\cos^3 x(1-\tan x)=\dfrac{3}{2}\cos 2x$.

Bài 18. Giải phương trình: $\dfrac{5\sin x-5\tan x}{\sin x+\tan x}+4(1-\cos x)=0$.

Bài 19. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}$.

Bài 20. Giải phương trình :

$$2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x.$$

Bài 21. Giải phương trình:

$$\cos 2x+3\sin 2x+5\sin x-3\cos x=3.$$

Bài 22. Giải phương trình:

$$\frac{4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)}{2\sin^2 x-1}=0.$$

Bài 23. Giải phương trình: $\cos^4 x-\cos 2x+2\sin^6 x=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 24. Giải phương trình: $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$.

Bài 25. Giải phương trình: $\cos 2x + 5 = 2\left(2 - \cos x\right)\left(\sin x - \cos x\right)$.

Bài 26. Giải phương trình: $2\sin^3 x + \cos 2x = \sin x$.

Bài 27. Giải phương trình: $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3\left(4\sin x - 1\right)$.

Bài 28. Giải phương trình: $\sin 4x - \cos 4x = 1 - 4\left(\sin x - \cos x\right)$

Bài 29. Giải phương trình:

$$\sin 2x\left(\cos x + 3\right) - 2\sqrt{3}\cos^3 x - 3\sqrt{3}\cos 2x + 8\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) - 3\sqrt{3} = 0$$

BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

Bài 1. Giải phương trình:

$$4\cos x\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos 2x.$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$4\sin x\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 4\sqrt{3}\cos x\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2.$$

Bài 3. Giải phương trình: $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos x = \frac{3}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)$

Bài 4. Giải phương trình: $\left(2\sin 5x - 1\right)\left(2\cos 2x - 1\right) = 2\sin x$

ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ CÙNG MỘT CUNG LƯỢNG GIÁC

Đặt $t = ax + b$, với $|a|$ nhỏ nhất, mục đích là biến đổi các biểu thức thành các cung lượng giác $t, 2t, 3t, \dots$. Sau đó dùng công thức hạ bậc để giải phương trình với ẩn là t.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right).$$

Lời giải:

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\pi-3t$, khi đó phương trình trở thành

$$\sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\pi-3t\right)\Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow \sin t\left(1-4\sin^2 t\right)=0\Leftrightarrow \sin t\left(2\cos 2t-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi\\ x=\frac{14\pi}{5}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{4\pi}{5}+k2\pi\end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Lời giải:

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=3t-\pi; 2x=2t-\frac{\pi}{2}$, khi đó phương trình trở thành

$$\sin\left(3t-\pi\right)=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\Leftrightarrow \sin 3t=\sin t\cos 2t\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3 t=\sin t\cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \sin t\left(3-4\sin^2 t-\cos 2t\right)=0\Leftrightarrow \sin t\left(1+\cos 2t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=-1\end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ 2t = (2k+1)\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 3. Giải phương trình

$$8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x.$$

Lời giải:

Đặt $t = x + \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = 3t - \pi$, khi đó phương trình trở thành

$$8\cos^3 t = \cos(3t-\pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -\cos 3t \Leftrightarrow 8\cos^3 t = 3\cos t - 4\cos^3 t$$

$$\Leftrightarrow 3\cos t\left(4\cos^2 t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(2\cos 2t + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \cos 2t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 3x.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$32\cos^6\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 6x = 1.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x - \cos 3x.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Giải phương trình

$$2\cos\frac{6x}{5}+1=3\cos\frac{8x}{5}.$$

Bài 5. Giải phương trình

$$\cos 9x+2\cos\left(6x+\frac{2\pi}{3}\right)+2=0$$

NHÂN HAI VẾ CỦA PHƯƠNG TRÌNH VỚI MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Giải phương trình: $\sin\frac{5x}{2}=5\cos^3 x\sin\frac{x}{2}$

Lời giải:

Nhận thấy $\cos\frac{x}{2}=0$, không là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, ta được:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=10\cos^3 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\Leftrightarrow \sin 3x+\sin 2x=5\cos^3 x\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sin x-4\sin^3 x\right)+2\sin x\cos x=5\cos^3 x\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(5\cos^3 x-2\cos x-3+4\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos x-1\right)\left(5\cos^2 x+\cos x-1\right)=0$$

- Xét $\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=k2\pi$, do $\cos\frac{x}{2}\neq 0$.
- Xét $\cos x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- Xét $5\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{5}=\cos\alpha\\ \cos x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{5}=\cos\beta\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\alpha+k2\pi\\ x=\pm\beta+k2\pi\end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 2. Giải phương trình: $2\sin 3x\left(1-4\sin^2 x\right)=1$.

Lời giải:

nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình:

nhân hai vế của phương trình với $\cos x\neq 0$, ta được

$$2\sin 3x\left(1-4\left(1-\cos^2 x\right)\right)\cos x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x=\cos x \Leftrightarrow \sin 6x=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7} \\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.$$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

Sau khi biến đổi phương trình có dạng:

$$\frac{F\left(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x\right)}{G\left(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x\right)}=0$$

Lưu ý: *Khi giải phương trình dạng này ta phải xét điều kiện mẫu thức khác 0, nên khi giải xong phải đối chiếu lại xem ngiệm có thỏa mãn điều kiện không.*

Ta nên để điều kiện có nghiệm của phương trình dưới dạng thô.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin 4x=4\sin x\cos x\cos 2x\neq 0$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{2}{4\sin x\cos x\cos 2x}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos 2x - \sin x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin^2 x + \sin x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), thì chỉ có nghiệm $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Bài 2.

Giải phương trình: $\dfrac{2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x}{\left(\sin x - \cos x\right)\sin 2x} = 0$

Lời giải:

Điều kiện: $\left(\sin x - \cos x\right)\sin 2x \neq 0$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos 2x - 1\right) = 0$

Xét $\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$ loại, do không thỏa mãn điều kiện (*).

Xét $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sin x\right) = 0$, đối chiếu với điều kiện (*) ta suy ra chỉ có:

$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 3.

Giải phương trình: $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin 2x \neq 1$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = \sin 2x - 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\sqrt{2}\right)\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) chỉ có nghiệm $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$ là nghiệm của phương trình.

Bài 4.

Giải phương trình: $\frac{1-cos4x}{2\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{1+cos4x}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x\neq 0 \\ 1+cos4x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x\neq 0 \\ cos2x\neq 0 \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với:

$1-cos^2 4x=2\sin 2x\sin 4x \Leftrightarrow \sin^2 4x=2\sin 2x\sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\sin 4x\left(cos2x-1\right)=0$, đối chiếu với điều kiện thì phương trình này vô nghiệm.

Bài 5.

Giải phương trình: $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+cos2x+cos3x}=\sqrt{3}$.

lời giải:

Phương trình tương đương với: $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+cos2x+cos3x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x\left(1+2\cos x\right)}{cos2x\left(1+cos2x\right)}=\sqrt{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2cosx\neq 0 \\ \tan 2x=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\neq -\frac{1}{2} \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+m\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+2m\pi \end{array}\right., m\in\mathbb{Z}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình sau:

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x+2\cos^2 x-1}{\cos x-cos3x+\sin 3x-\sin x}=\cos x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 2. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^2 x(1+\cot x)-3}{\sin x-\cos x}=3\cos x$.

Bài 3. Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\cos^3 x+2\sin^3 x\right)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\tan x+\cot 2x}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot x-1}$.

Bài 5. Giải phương trình: $\dfrac{\cot^2 x-\tan^2 x}{\cos 2x}=16(1+\cos 4x)$.

Bài 6. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$.

Bài 7. Giải phương trình: $\dfrac{3(\cos 2x+\cot 2x)}{\cot 2x-\cos 2x}-2\sin 2x=2$.

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}=\dfrac{7}{8}$.

Bài 9. Giải phương trình: $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$.

Bài 10. Giải phương trình: $1+\cot 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

Bài 11. Giải phương trình: $\tan 3x\cot x=-1$.

Bài 12. Giải phương trình: $\dfrac{\sin x\cot 5x}{\cos 9x}=1$.

Bài 13. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+\sin x-1}=\sqrt{3}$.

Bài 14. Giải phương trình: $\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}=\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$.

Bài 15. Giải phương trình: $\dfrac{4\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\cos 2x}{\sin x-\cos x}=0$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Tìm $x \in [2;+\infty)$ thỏa mãn phương trình

$$\sin\frac{2(2x+1)}{x-1}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x+1}{x-1}-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Bài 2. Tìm các nghiệm $x \in \left[\frac{1}{10};+\infty\right)$ $\sin\frac{2x+1}{x}+\sin\frac{2x+1}{3x}-\cos^2\frac{2x+1}{3x}=0$

Bài 3. Giải phương trình:

$$2011\tan x+\cot x=2\left(1005\sqrt{3}+\frac{1}{\sin 2x}\right)$$

Bài 4. Giải phương trình:

$$2(1+\cos x)\left(\cot^2 x+1\right)=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}$$

Bài 5. Giải phương trình:

$$\sin 3x+\cos 3x-2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

Bài 6. Giải phương trình:

$$16\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-2\sin 4x$$

Bài 7. Giải phương trình:

$$\frac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x$$

Bài 8. Giải phương trình:

$$4\cos^4 x-\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x+\cos\frac{3x}{4}=\frac{7}{2}$$

Bài 9. Giải phương trình:

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x$$

Bài 10. Giải phương trình:

$$2\sin^5 x+2\sin^3 x\cos^2 x+\cos 2x-\sin x=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 11. Giải phương trình:

$$(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x)=\frac{1}{2}$$

Bài 12. Giải phương trình:

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\cos 2x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Bài 13. Giải phương trình:

$$2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x$$

Bài 14. Giải phương trình:

$$\tan^2 x-\tan^2 x\sin^3 x-\left(1-\cos^3 x\right)=0$$

Bài 15. Giải phương trình:

$$2\cos x+\frac{1}{3}\cos^2(x+\pi)=\frac{8}{3}+\sin 2x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin^2 x$$

Bài 16. Giải phương trình:

$$\left(1-\sin^3 x\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}-2\right)=0$$

Bài 17. Giải phương trình:

$$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}(\sin x+1)$$

Bài 18. Giải phương trình:

$$\frac{\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{8}$$

Bài 19. Giải phương trình:

$$\cos 3x\sin 2x-\cos 4x\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 3x+\sqrt{1+\cos x}$$

Bài 20. Giải phương trình:

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 21. Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x - \cot x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2$

Bài 22. Giải phương trình:

$$\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$$

Bài 23. Giải phương trình: $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x \cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0$

Bài 24. Giải phương trình:

$$\cos^2 2x + \cos 4x(\tan 2x \cot x - 1) = -\frac{3}{4}$$

Bài 25. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{3} - 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin 4x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = 6\sin^2 x - 2\cos^2 x$$

Bài 26. Giải phương trình:

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 8\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 2$$

Bài 27. Giải phương trình:

$$1 + \frac{1}{2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Bài 28. Giải phương trình:

$$\frac{\frac{1}{2} + (1 - \sin x)(1 - \cos x) + 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{7}{6}\sin 2x}{\tan x + 1} = \frac{3}{2}\cos 2x$$

Bài 29. Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}(1 - \cos x \cos 2x) = \frac{\cos 4x}{2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) - 1}$$

Bài 30. Giải phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1.1. $\sin 9x + \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 8x - \cos 8x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.2. $\sin 9x + \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 8x - \cos 8x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x - \cos 2x) = 0$

Bài 31. Giải phương trình:

1.1. $\frac{\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

1.2. $\frac{\sqrt{3}\sin 2x(1 + 2\cos x) + \cos 3x}{1 + 2\cos x + \cos 2x} = 1$

1.3. $\sqrt{3}(\sin 2x - 3\sin x) = 2\cos^2 x + 3\cos x - 5$

1.4. $\frac{2\cos^2 x + 2\cos x - 3}{\sin^2 \frac{x}{2}} + 4\sqrt{3}\sin x = 0$

1.5. $\left(2 - \frac{1}{\sin x}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 4\sin x - \frac{1}{2\sin x} - 1$

1.6. $\frac{2 - \sin^2 x}{\cos 2x + 4\cos x + 3} = \frac{1}{2}\tan^2 \frac{x}{2}$

1.7. $2\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) - \cos x\right) = 2\sin 2x - 3$

1.8. $\frac{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)^2(1 + 2\sin 2x)}{\sin 3x + \sin 5x} = 1 - \tan x$

1.9. $2(\sin x + 1)(\sin^2 2x - 3\sin x + 1) = \sin 4x \cos x$

1.10. $\frac{(1 + \cos 2x)\sin 2x}{1 - \sin x} = 2(\sin 3x + \sin x)(1 + \sin x)$

1.11. $\frac{2\sin x\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) - 2\cos 3x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1} = 0$

1.12. $3\cot x - \tan x\left(3 - 8\cos^2 x\right) = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1.13. $\dfrac{\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x-\dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}}{2\sin 4x-\sqrt{2}}=0$

1.14. $\dfrac{3\left(\cos 2x+\cot 3x\right)}{\cot 3x-\cos 2x}=4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

1.15. $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\sin 2x}=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$

1.16. $9+\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}+1\right)\cos 2x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\sin 2x=4\sqrt{2}\left(\cos x+\sqrt{2}\sin x\right)$

1.17. $\left(\dfrac{\sin x}{\cos 3x}+\dfrac{\sin 3x}{\cos 9x}+\dfrac{\sin 9x}{\cos 27x}\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0$

1.18. $\dfrac{1+\cot 2x\cot x}{\cos^2 x}+1=6\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$

1.19. $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=1+\dfrac{1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$

1.20. $\tan^2\dfrac{x}{2}\tan x=4\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x+\tan x$

1.21. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}+8\sin^2\left(2x+\dfrac{11\pi}{2}\right)=4\left(\cos 2x+1\right)$

1.22. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=3\left(1-\dfrac{1}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}\right)$

1.23. $2\sqrt{2}\cos 2x+\sin 2x\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)-4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

1.24. $\sin^2 x\left(\tan x-2\right)=3\left(\cos 2x+\sin x\cos x\right)$

1.25. $\sqrt{2}\left(\sin 2x-1\right)=\dfrac{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 2x}{3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}$

1.26. $\dfrac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+\cos x-1}=\tan^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1.27. $2\sin^2 x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$

1.28. $8\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\left(\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)-\sin 4x$

1.29. $2(\sin 3x+\cos 3x-\sin 2x)=-1+2\sqrt{2}$

1.30. $5\sin x-\sqrt{2\cos 3x-1}=5\cos 3x-\sqrt{2\sin x-1}$

1.31. $(1+\tan x)\cos 5x=\sin x+\cos x+2\cos 4x-2\cos 2x$

1.32. $(2\sin^2 x-1)\cot^2\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]+3(2\cos^2 x-1)=0$

1.33. $\dfrac{(1+2\cos x.\cos 3x)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-\sin 2x}=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

1.34. $\dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}=\dfrac{2}{1+2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

1.35. $\cot\dfrac{x}{2}-\dfrac{1+\cos 3x}{\sin 2x-\sin x}=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

1.36. $\sqrt{2(1-\sin 2x)}\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos 2x=0$

1.37. $\dfrac{4\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3x}{2}\right)+1}{2\sin x}=2\cos 2x+2\cos x+1$

1.38. $\dfrac{(\cos x+\sin x)(2\sin 2x+1)+4\cos 2x}{(\cos x-\sin x)(2\sin 2x+1)+2}=\sqrt{3}$

1.39. $3\tan^3 x-3\tan x+\dfrac{3(1+\sin x)}{\tan^2 x}=8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$

1.40. $\dfrac{\tan x\cos 3x+2\cos 2x-1}{1-2\sin x}=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.41. $\dfrac{4\left(1-\sin x\cos x\right)+\cos 3x+4\sin x-\cos x}{\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)+1}=8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\sin^2 x$

1.42. $\dfrac{1+\sin x-\cos^2 x}{\sin^2 x}.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=\tan x+2\sqrt{3}$

1.43. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos x}+\tan^2 x=2\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)$

1.44. $2\sin x\left(2\sin x-\sin^2 3x\right)=\sin^2 3x\left(2\sin x-1\right)$

1.45. $\left[4\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)-1\right]\sin 2x=2\left(\sin 7x-\sin 3x\right)\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 4:

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Phương trình vô tỷ, cùng với hệ phương trình là một bài toán hay thường xuyên xuất hiện trong đề thi TSĐH. Bài tập dạng này rất phong phú và đa dạng, đòi hỏi học sinh phải vận dụng linh hoạt biến đổi cơ bản, đến đặt ẩn phụ hay, một số đánh giá nhỏ dựa vào bất đẳng thức, hàm số.
Với đề thi TSĐH thì bài toán theo nhận định chủ quan thì 2 phương pháp cơ bản để các em làm được các bài toán dạng này là biến đổi cơ bản(quan trọng) và đặt ẩn phụ nếu có.
Các phương pháp sẽ được trình bày theo từng dạng toán để các em có thể tiếp cận làm quen, về sau khi đã được tiếp cận từng phương pháp sẽ hình thành cho các em khả năng nhận dạng và tư duy phương pháp giải.
Xin được mở đầu bằng một số bài toán:

Bài 1. Giải bất phương trình sau: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0(*)$

Lời giải:

$$+(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x-2\geq 0\\(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-3x-2=0\\\begin{cases}2x^2-3x-2>0\\(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\\\begin{cases}(x>2)\vee(x<\dfrac{-1}{2})\\x^2-3x\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\\\begin{cases}(x>2)\vee(x<\dfrac{-1}{2})\\(x\geq 3)\vee(x\leq 0)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{2}\\x=2\end{array}\right.\\(x\geq 3)\vee(x<\dfrac{-1}{2})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq\dfrac{-1}{2}\\x=2\\x\geq 3\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $D=(-\infty,\dfrac{-1}{2}]\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 2. Giải bất phương trình sau: $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \ge 1$ (*)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \ge 0$, ta có $1-\sqrt{2(x^2-x+1)} = 1-\sqrt{2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}} \le 1-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$x-\sqrt{x} \le 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow (x-1)-\sqrt{x}+\sqrt{2(x-1)^2+2x} \le 0$ (1)

+ Ta có $(x-1-\sqrt{x})^2 = (x-1)^2 + x - 2(x-1)\sqrt{x} \le 2(x-1)^2 + 2x$ (do $x-1+\sqrt{x} \ge 0$)

$\Rightarrow \left|x-1-\sqrt{x}\right| \le \sqrt{2(x-1)^2+2x} \Rightarrow x-1-\sqrt{x}+\sqrt{2(x-1)^2+2x} \ge 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$x-1-\sqrt{x} = \sqrt{2(x-1)^2+2x} \Leftrightarrow x-1+\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $D = \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

Bài 3. Giải phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0(*)$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \le \dfrac{6}{5}$

+ Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2}; v=\sqrt{6-5x} \ge 0$

$\Rightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Rightarrow 5u^3+3v^2 = 5(3x-2)+3(6-5x) = 8$ (1)

Mặt khác ta lại có: $2u+3v-8=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$u^3 + 3(\frac{8-2u}{3})^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 45u^3 + 12u^2 - 96u + 120 = 0$

$\Leftrightarrow (u+2)(45u^2 - 78u + 60) = 0 \Leftrightarrow u = -2 \Rightarrow v = 4$

Khi đó: $\sqrt[3]{3x-2} = -2 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = -2$

Bài 4. Giải phương trình sau: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Lời giải:

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \le x \le 6$

Khi đó phương trình được biến đổi thành:[1]

$(\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1) = 0 \Leftrightarrow x-5=0$

Do $(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 > 0, \forall \frac{-1}{3} \le x \le 6)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Bài 5. Giải phương trình sau:

$$3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x \; (x \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

$+ t = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 2 + x + 4(2-x) - 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x - 4\sqrt{4-x^2}$

[1] Xem phương pháp trục căn thức được trình bày ở dưới

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Rightarrow PT \Leftrightarrow 3t = t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x} \\ \sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{6}{5}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{6}{5}$.

Bài 6. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x+2}+x^2-x-2 \le \sqrt{3x-2}(x\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2})+(x^2-x-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2-x)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x-2)(x+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(\frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)f(x)\le 0; f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1, x\ge\frac{2}{3}$$

$$+f'(x)=1+\frac{\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})^2}>0$$

$$\Rightarrow f\uparrow \Rightarrow f(x)\ge f(\frac{2}{3})=\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}>0 \Rightarrow BPT \Leftrightarrow x-2\le 0 \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow \frac{2}{3}\le x\le 2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $D=\left[\frac{2}{3},2\right]$

Bài 7. Giải phương trình sau:

$$(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}(x\in\mathbb{R})$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

$+DK:\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}(*)$

$+u=\sqrt{2x-3};v=\sqrt{5-2x}\Rightarrow u^2=2x-3;v^2=5-2x\Rightarrow u^2+v^2=2(1)$

$+13-4x=2v^2+3\,\&\,4x-3=2u^2+3;uv=\sqrt{16x-4x^2-15}$

$\Rightarrow BPT\Leftrightarrow(2v^2+3)u+(2u^2+3)v=2+8uv=u^2+v^2+8uv(do(1))$

$\Leftrightarrow 2uv(u+v)+3(u+v)=(u+v)^2+6uv\Leftrightarrow 2uv(u+v-3)=(u+v)(u+v-3)$

$\Leftrightarrow(u+v-3)(2uv-u-v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u+v=3\\u+v=2uv\end{array}\right.$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}uv=\dfrac{7}{2}\\uv=1\end{array}\right.(uv\ge0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{16x-4x^2-15}=\dfrac{7}{2}\\\sqrt{16x-4x^2-15}=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{16x-4x^2-15}=\dfrac{7}{2}\\\sqrt{16x-4x^2-15}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$

Bài 8. Giải phương trình sau:[2]

$(x+2)(\sqrt{x^2+4x+7}+1)+x(\sqrt{x^2+3}+1)=0(x\in\mathbb{R})$

Lời giải:

$+BPT\Leftrightarrow(x+2)(\sqrt{(x+2)^2+3}+1)+x(\sqrt{x^2+3}+1)=0$

$\Leftrightarrow g(x)=f(x+2)+f(x)=0;f(x)=x(\sqrt{x^2+3}+1)$

$+f'(x)=\sqrt{x^2+3}+1+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}>0\Rightarrow g'(x)=f'(x+2)+f'(x)>0$

[2] Xem phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên R, nên nếu phương trình $g(x)=0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Nhận thấy $g(-1)=0 \Rightarrow x=-1$ là nghiệm của phương trình.

Bài 9. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 (x \in \mathbb{R})$

Lời giải:

+ Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-3x+1 \leq 0 \end{cases} (*)$

$+PT \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=-(x^2-3x+1) \Rightarrow 2x-1=(x^2-3x+1)^2=((x-1)^2-x)^2$

$\Leftrightarrow 2x-1=(x-1)^4-2x(x-1)^2+x^2 \Leftrightarrow (x-1)^4-2x(x-1)^2+(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2((x-1)^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-4x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$

Thử lại thấy các nghiệm đều thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy nghiệm của phương trình là:

$x=1; x=2 \pm \sqrt{2}$

Bài 10. Giải phương trình sau:

$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Lời giải:

$+DK: |x| \leq 2 (*)$

$+PT \Leftrightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16$

$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x (1)$

$+t=\sqrt{2(4-x^2)} \geq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4t^2+16t-x^2-8x=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x}{2} \\ t=\dfrac{-x}{2}-4<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ 8(4-x^2)=x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH DƯỚI DẠNG TƯƠNG ĐƯƠNG

Đưa về bình phương hai vế của phương trình, bất phương trình:

<u>Phương trình, bất phương trình cơ bản:</u>

$$\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A\geq 0 \\ B\geq 0 \\ A=B \end{cases}$$

$$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B\geq 0 \\ A=B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A}\geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B<0 \\ A\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B\geq 0 \\ A\geq B^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Nếu phương trình có dạng: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$ mà có $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì biến đổi về: $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$

Phương trình có dạng: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Lập phương hai vế của phương trình ta được: $A+B+3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C$, lại có $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ suy ra phương trình: $A+B+3C\sqrt[3]{AB}=C$ giải phương trình suy ra nghiệm. Sau đó thử lại nghiệm xem thỏa mãn không.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 0$.

Phương trình tương đương với

$2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}$

$\Rightarrow 5x+3-2\sqrt{4x^2+12x}=5x+3-2\sqrt{6x^2+8x+2}$

$\Leftrightarrow 4x^2+12x=6x^2+8x+2 \Leftrightarrow x=1$

Thử lại thấy nghiệm $x=1$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

Lời giải:

Điều kiện: $-4 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}=x+4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ (1-x)(1-2x)=(2x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 3. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-16\ge 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 4$.

Khi đó quy đồng mẫu số, bất phương trình tương đương với:

$\sqrt{x^2-16}+x-3>5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}\ge 8-x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-16\ge 0 \\ 8-x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-16>(8-x)^2 \\ 8-x\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 4 \vee x\le -4 \\ x>8 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 8 \\ x>5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>8 \\ 5<x\le 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>5$

Đối chiếu với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(5;+\infty)$.

Bài 4. Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{16x+17}=8x^2-15x-23$.

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{17}{16}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)\Leftrightarrow(x+1)\left(\sqrt{16x+17}-8x+23\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \sqrt{16x+17}=8x-23\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \begin{cases}8x-23\geq 0\\ 16x+17=(8x-23)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=4\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện cả hai nghiệm này đều thỏa mãn. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=4$.

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

Lời giải:

Để phương trình có nghiệm thì $2x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Khi đó điều kiện của phương trình là:

$$\begin{cases}2x^2+8x+6\geq 0\\ x^2-1\geq 0\\ x\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x\geq 1\end{array}\right.$$

❖ Nhận thấy $x=-1$ thỏa mãn phương trình.

❖ Xét $x\geq 1$, khi đó phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(x+1)(2x+6)}+\sqrt{(x+1)(x-1)}=2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x+6+x-1+2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=4(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+6)(x-1)}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0\\ 4(2x+6)(x-1)=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=1$.

Bài 6. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}=\sqrt{2(x^2+5x-3)}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 3$.

Khi đó cả hai vế của phương trình đều không âm, nên bình phương hai vế ta được

$$x^2+8x-6+6\sqrt{x\left(x^2-x-6\right)}=2\left(x^2+5x-3\right)$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x\left(x^2-x-6\right)}=x\left(x+2\right)\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{x}\left(x+2\right)\text{, do } x\ge 3$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x^2-x-6\right)=x\left(x+2\right)^2\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(x^2-34x+108\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-34x+108=0\Leftrightarrow x=17\pm\sqrt{181}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=17\pm\sqrt{181}$.

Bài 7. Giải bất phương trình: $\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^4+3x^2}-2x}\le 1$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ne 0; x\ne 1$.

- Với $x\in\left(0;1\right)\Rightarrow\sqrt{x^4+3x^2}-2x<\sqrt{x^2+3x^2}-2x=0$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$x^2-x\ge\sqrt{x^4+3x^2}-2x\Leftrightarrow x^2+x\ge\sqrt{x^4+3x^2}$, hai vế của bất phương trình không âm nên bình phương hai vế, ta được

$\Leftrightarrow x^2\left(x+1\right)^2\ge x^4+3x^2\Leftrightarrow 2x^2\left(x-1\right)\ge 0$; không thỏa mãn $x\in\left(0;1\right)$.

- Với $x>1$ hoặc $x<0$ (*) thì $\sqrt{x^4+3x^2}-2x>0$

Khi đó bất phương trình tương đương với: $x^2-x\le\sqrt{x^4+3x^2}-2x\Leftrightarrow x^2+x\le\sqrt{x^4+3x^2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x\le 0\\ \begin{cases}x^2+x>0\\ \sqrt{x^4+3x^2}\ge x^2+x\end{cases}\end{array}\right.\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ \begin{cases}x>1\vee x<-1\\ 2x^2\left(x-1\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x<0$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;0\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 8. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}-\sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)}}{x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)}} \geq 0$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 3$

Ta có $\left(x+3\right)^2 = x^2+6x+9 \leq x^2+x^2+9+9$

$= 2\left(x^2+9\right) < 2\left(x^2+10\right) \Rightarrow x+3 < \sqrt{2\left(x^2+10\right)} \Leftrightarrow x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)} < 0$

Vậy bất phương trình tương đương với

$\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}-\sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x} \leq \sqrt{2\left(x^2+5x-3\right)}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}\right)^2 \leq 2\left(x^2+5x-3\right) \Leftrightarrow 6\sqrt{x\left(x^2-x-6\right)} \leq x\left(x+2\right)$

$\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-x-6} \leq \left(x+2\right)\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(x+2\right)\left(x^2-34x+108\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-34x+108 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \leq x \leq 17-\sqrt{181} \\ x \geq 17+\sqrt{181} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[3;17-\sqrt{181}\right] \cup \left[3;+\infty\right)$

Bài 9. Giải phương trình $x^3-3x^2-3x+2\sqrt{\left(x+1\right)^3} = 0$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq -1$

Phương trình tương đương với

$x^3-3x\left(x+1\right)+2\sqrt{\left(x+1\right)^3} = 0$

$\Leftrightarrow x^3-x\left(x+1\right)+2\sqrt{\left(x+1\right)^3}-2x\left(x+1\right) = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow x\left(x^2-(x+1)\right)+2(x+1)\left(\sqrt{x+1}-x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-x\right)\left(-x\left(\sqrt{x+1}+x\right)+2(x+1)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-x\right)^2\left(x+2\sqrt{x+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-x=0\\ x+2\sqrt{x+1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x+1=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ 4(x+1)=x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=2-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=2-2\sqrt{2};x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 10. Giải bất phương trình $2\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x}>\sqrt{3x^2+x}+2$

Lời giải:

Điều kiện $x\ge 0$

Hai vế của phương trình không âm nên bình phương hai vế của phương trình ta được

$4(3x+1)+16x+16\sqrt{x(3x+1)}>3x^2+x+4+4\sqrt{3x+1}$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3x^2+x}>x^2-9x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-9x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-9x\ge 0\\ 16\left(3x^2+x\right)>\left(x^2-9x\right)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<x<16$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;16)$

Bài 11. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+3}-4\ge 2x+\sqrt{x+11}$

Lời giải:

Điều kiện $x\ge -3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó bất phương trình tương đương với

$3\sqrt{x+3}-4\geq 2x+\sqrt{x+11}\Leftrightarrow 3\sqrt{x+3}\geq 4+2x+\sqrt{x+11}$

$\Leftrightarrow 9(x+3)\geq 4x^2+17x+27+2(2x+4)\sqrt{x+11}\Leftrightarrow x^2+2x\geq (x+2)\sqrt{x+11}$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x-\sqrt{x+11}\right)\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2\geq 0\\ x-\sqrt{x+11}\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+2\leq 0\\ x-\sqrt{x+11}\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\leq x\leq \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-2;\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right]$

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với

$$\begin{cases}3-2x-x^2\geq 0\\ 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-3\leq x\leq 1\\ x\sqrt{x+5}=-2(x+2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3\leq x\leq 1\\ x\neq 0\\ \sqrt{x+5}=-2\dfrac{x+2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2\leq x<0\\ x+5=4\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2\leq x<0\\ (x+1)\left(x^2-16\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$

Bài 13. Giải phương trình $2\left(\sqrt{2(2+x)}+2\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{9x^2+16}$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Khi đó bình phương hai vế của phương trình ta được

$$8(x+2)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+8x-32=16\sqrt{2(4-x^2)} \Leftrightarrow (9x^2+8x-32)^2=512(4-x^2)$$

$$\Leftrightarrow 81x^4+144x^3-512x-1024=0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2-32)(9x^2+16x+32)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{32}}{3}$$, thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm\dfrac{\sqrt{32}}{3}$.

Bài 14. Giải bất phương trình $\dfrac{(2x-1)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+1-x} \ge 1$

Lời giải:

Điều kiện: $0 \le x \le 1$

Ta có: $2\sqrt{x}+(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x}+1-x=2(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})+\sqrt{1-x}(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x})$ và

$(2x-1)\sqrt{x+3}=(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})\sqrt{x+3}$

Vậy nên bất phương trình tương đương với:

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{1-x}} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+3)} \ge 2+\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)(x+3)}$$

Ta có $\sqrt{x(x+3)} \le 2$ do $0 \le x \le 1$ và $2+\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)(x+3)} \ge 2$. Dấu bằng xảy ra hai vế khi và chỉ khi $x=1$.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3$

1.2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

1.3. $\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-3}=1$

1.4. $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$

1.5. $(x-3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

1.6. $2\sqrt{x+2+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$

1.7. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

1.8. $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$

1.9. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

1.10. $1+\sqrt{1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}}=10x^2$

1.11. $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-2\right)\log_2\left(x^2-x\right)=0$

1.12. $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|=-\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$

1.13. $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$.

1.14. $\sqrt{\dfrac{8}{x-2}}+\dfrac{8}{\sqrt{8-x}}=6$

1.15. Giải các bất phương trình sau:

1. $\sqrt{x+1}>3-\sqrt{x+4}$

2. $\sqrt{(x-1)(4-x)}>x-2$

3. $\sqrt{x+3}\ge\sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}$

4. $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<\sqrt{5-2x}$

5. $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\le\sqrt{2x^2+9x+7}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

6. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} > x+1$

7. $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1} \ge x+1$

8. $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x} \ge 3\sqrt{5-x}$

9. $2\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x} > \sqrt{3x^2+x}+2$

10. $\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100} = 2x-10$

11. $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \le 2-\dfrac{x^2}{4}$

12. $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \ge 1$

13. $\dfrac{1}{2-3x^2}-1 \ge \dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2}}$

14. $\dfrac{x^4-4x^2+16}{x^2\left(4-x^2\right)}-\left(\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) \le 1$

15. $\dfrac{x+2}{x+\sqrt{3x^4-11x^2+9}} = \dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-3}$

16. $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$

17. $\dfrac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}} \ge 1$

18. $\dfrac{x^3-3x^2-3x+2\sqrt{(x+1)^3}}{x+1-\sqrt{2\left(x^2+2\right)}} \ge 0$

19. $\dfrac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2+3}}{2(x-2)\left(\sqrt{2x-2}+\sqrt[3]{4x-4}\right)-3x+1} \ge 0$

20. $\dfrac{\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-5}\right)^3-2}{x+2+\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x^2+10x+6}} \ge 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

21. $$\frac{2\sqrt{3x+1}+4\sqrt{x}-\sqrt{3x^2+x}-2}{2x-\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}\geq 0$$

22. $$\frac{\sqrt{x^5+x^3+x}-\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{\sqrt{x^2\left(x^2-x+1\right)}}\leq -1$$

Bài 12. Giải các phương trình sau:

1.1. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

1.2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

1.3. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

1.4. $\dfrac{x}{2}-2=\dfrac{x^2}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}$

1.5. $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$

1.6. $\sqrt{x\left(x-1\right)}+\sqrt{x\left(x+2\right)}=2\sqrt{x^2}$

1.7. $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}=\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

1.8. $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}\left(x^2-4x-2\right)$

1.9. $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$

1.10. $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$

1.11. $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

1.12. $\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+21}=\sqrt{x^2+9x-42}$

1.13. $2\sqrt{\left(2x+5\right)\left(x^2+x+1\right)}=x^2+6x-1$

1.14. $\left(25-3x\right)\sqrt{x^2-1}=3x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.15. $(x-2)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}x+2=0$

1.16. $\dfrac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4}-\cos\dfrac{x-5}{4}}\geq 0$

1.17. $\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}}=1+\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}$

PHƯƠNG PHÁP TRỤC CĂN THỨC

Áp dụng với các phương trình nhẩm được nghiệm x_0 và ta biến đổi phương trình thành phương trình tương đương dạng $(x-x_0)A(x)=0$. Sau đó chỉ ra $A(x)\neq 0$ với x thuộc miền xác định của phương trình, ta thường đánh giá qua bất đẳng thức hoặc khảo sát tính đơn điệu của hàm số.

Sử dụng những hằng đẳng thức sau:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Lời giải:

Nhận thấy $3x^2-5x+1-3\left(x^2-x+1\right)=-2\left(x-2\right)$

Và $\left(x^2-2\right)-\left(x^2-3x+4\right)=3\left(x-2\right)$

Do đó trục căn thức phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$

Lời giải:

Để phương trình có nghiệm thì $3x-5=\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}>0 \Rightarrow x>\frac{5}{3}$.

Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình nên ta biến đổi về phương trình tương đương sau

$$\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)+\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)=3x-6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}+\frac{4-x^2}{3+\sqrt{x^2+5}}=3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-3\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Do $x>\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-3<\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-\frac{x+2}{3+\sqrt{x^2+5}}-3=-3<0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

Lời giải:

Điều kiện $x\geq\sqrt[3]{2}$. Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình, nên biến đổi về phương trình tương đương sau

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\left(\sqrt[3]{x^2-1}-2\right)+x-3=\sqrt{x^3-2}-5$

$\Leftrightarrow (x-3)+\dfrac{x^2-9}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=\dfrac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{\sqrt{x^3-2}+5}$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}-\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}\right)=0$ (1)

Do $x\geq\sqrt[3]{2}$ nên $1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 4. Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$

Lời giải:

Điều kiện $2\leq x\leq 4$

Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình, khi đó phương trình tương đương với

$\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)=2x^2-5x-3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}=(x-3)(2x+1)$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{-1}{\sqrt{4-x}+1}-(2x+1)\right)=0$ (1)

Do $2\leq x\leq 4\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\dfrac{-1}{\sqrt{4-x}+1}-(2x+1)<\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-1-5<0$

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 5. Giải phương trình sau: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Nhận thấy $x=-2$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{x^2+x-1}{x+2}$$

Phân tích:

Thêm vào 2 vế của phương trình lượng $mx+n$, ta có

$$\sqrt{x^2-2x+2}-(mx+n)=\frac{x^2+x-1}{x+2}-(mx+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-m^2)x^2-2(1+mn)x+2-n^2}{\sqrt{x^2-2x+2}+(mx+n)}=\frac{(1-m)x^2+(1-2m-n)x-1-2n}{x+2}$$

Ta chọn m,n sao cho $\frac{1-m^2}{1-m}=\frac{-2(1+mn)}{1-2m-n}=\frac{2-n^2}{-1-2n}\Leftrightarrow m=0;n=3$

Vậy phương trình tương đương với

$$\sqrt{x^2-2x+2}-3=\frac{x^2+x-1}{x+2}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-7}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=\frac{x^2-2x-7}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-7=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=\dfrac{1}{x+2}\quad (1) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) vô nghiệm, nên phương trình tương đương với

$x^2-2x-7=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1\pm\sqrt{7}$.

Bài 6. Giải phương trình sau: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện $\frac{5}{2} \le x \le 4$

Nhẩm nghiệm thấy phương trình có nghiệm $x = 3$, vì vậy biến dổi phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)+\left(\sqrt{2x-5}-1\right)=2x^2-5x-3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-2x-1=0 \end{array}\right.$$

Do $\frac{5}{2} \le x \le 4$ nên $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}-2x-1<0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}+2\sqrt{8x+9}=4x^2$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge -\frac{9}{8}$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\left(\frac{x+4}{3}-\sqrt{x+2}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+6}\right)+2\left(\frac{4x+7}{3}-\sqrt{8x+9}\right)+4\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)^2-9(x+2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+2)^2-(5x+6)}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{2\left[(4x+7)^2-9(8x+9)\right]}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4\left(x^2-x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4\right)=0 \ (*)$$

Do $x \ge -\frac{9}{8}$ nên $\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4>0$

Do đó phương trình (*) tương đương với: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1;x=2$.

Bài 8. Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^3+4x^2+4x}-\sqrt[3]{16x^3+12x^2+6x+3}=4x^4+2x^3-2x-1$$

Lời giải:

Điều kiện $2x^3+4x^2+4x=2x\left(x^2+2x+2\right)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\left[\sqrt{(2x+1)^2+2x^3-1}-(2x+1)\right]+\left[(2x+1)-\sqrt[3]{(2x+1)^3+4\left(2x^3-1\right)}\right]=\left(2x^3-1\right)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-1}{A}-\frac{4\left(2x^3-1\right)}{B}=\left(2x^3-1\right)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^3-1\right)\left(\frac{1}{A}-\frac{4}{B}-2x-1\right)=0\ (1)$$

Trong đó $A=\sqrt{(2x+1)^2+2x^3-1}+(2x+1)>1$

$$B=(2x+1)^2+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^3+4\left(2x^3-1\right)}+\sqrt[3]{\left[(2x+1)^3+4\left(2x^3-1\right)\right]^2}>0$$

Do đó $\frac{1}{A}-\frac{4}{B}-2x-1<0$. Suy ra phương trình (1) tương đương với $2x^3-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Bài 8. Giải phương trình: $2\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}=x^2+1$

Lời giải:

Điều kiện $x\geq 1$.

❖ Với $1\leq x<2$, phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$2\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}-2=x^2-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Do $\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-1>0, \forall x\in[1;2)$

❖ Với $x\ge 2$, phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{x-1}-2+\sqrt{5x-1}-3=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Do $\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}-x-2<0, \forall x[2;+\infty)$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1; x=2$.

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x-7}{8}}+\sqrt{\frac{x-6}{9}}+\sqrt{\frac{x-5}{10}}=\sqrt{\frac{x-8}{7}}+\sqrt{\frac{x-9}{6}}+\sqrt{\frac{x-10}{5}}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $x\ge 10$.

Khi đó phương trình được biến đổi thành

$$\sqrt{\frac{x-8}{7}}-\sqrt{\frac{x-7}{8}}+\sqrt{\frac{x-9}{6}}-\sqrt{\frac{x-6}{9}}+\sqrt{\frac{x-10}{5}}-\sqrt{\frac{x-5}{10}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-15}{56\left(\sqrt{\frac{x-8}{7}}+\sqrt{\frac{x-7}{8}}\right)}+\frac{3(x-15)}{54\left(\sqrt{\frac{x-9}{6}}+\sqrt{\frac{x-6}{9}}\right)}+\frac{5(x-15)}{50\left(\sqrt{\frac{x-10}{5}}+\sqrt{\frac{x-5}{10}}\right)}=0$$

$\Leftrightarrow x=15$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=15$.

Bài 10. Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $-2\le x\le \frac{22}{3}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phân tích:

Ta thấy $x=2, x=-1$ là nghiệm của phương trình nên ta tìm cách biến đổi phương trình để có nhân tử chung $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

Vì thế ta viết phương trình lại như sau:

$$3\left(4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}\right)=3\left(x^2+8\right)$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{x+2}-(4x+16)+3\sqrt{22-3x}-(14-x)=3\left(x^2-x-2\right)$$ [3]

$$\Leftrightarrow \frac{-16\left(x^2-x-2\right)}{12\sqrt{x+2}+(4x+16)}-\frac{x^2-x-2}{3\sqrt{22-3x}+(14-x)}=3\left(x^2-x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(\frac{16}{12\sqrt{x+2}+(4x+16)}+\frac{1}{3\sqrt{22-3x}+(14-x)}+3\right)=0\ (*)$$

Do $-2\le x\le\frac{22}{3}$ nên $\frac{16}{12\sqrt{x+2}+(4x+16)}+\frac{1}{3\sqrt{22-3x}+(14-x)}+3>0$. Do đó phương trình (*) tương tương với:

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1, x=2$.

Bài 11. Giải bất phương trình $\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\le\frac{9x^2+8x-32}{16}$

Lời giải:

Điều kiện: $\frac{\sqrt{304}-4}{9}\le x\le 2$.

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\frac{9x^2-32}{16}\ge\sqrt{2\left(4-x^2\right)}-\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{9x^2-32}{16}\ge\frac{32-9x^2}{2\left(x+\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\right)}$$

[3] Cách phân tích liên hợp dựa vào hình học phẳng tọa độ hoặc hệ số bất định

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left(9x^2-32\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2\left(x+\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\right)}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-32\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{4\sqrt{2}}{3}\vee x\le -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện ra suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{4\sqrt{2}}{3},2\right]$

Bài 12. Giải phương trình $\left(x+1\right)\sqrt{x+2}+\left(x+6\right)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge -2$.

Khi đó biến đổi phương trình thành:

$$\left(x+1\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(x+6\right)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=x^2+7x+12-2\left(x+1\right)-3\left(x+6\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+1\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{\left(x+6\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x+7}+3}=\left(x-2\right)\left(x+4\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-4\right)=0 \ (*)$$

Do $x\ge -2$ nên $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-4\le \frac{x+1}{2}+\frac{x+6}{3}-x-4<0$

Do đó phương trình (*) chỉ có nghiệm duy nhất $x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(\sqrt[3]{162x^3+2}-2\right)-\left(\sqrt{27x^2-9x+1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{162x^3-6}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{27x^2-9x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left(\frac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right)=0$$

Xét phương trình: $\dfrac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\dfrac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $x\neq 0$ ta được:

$$2\left(3x+1+\frac{1}{3x}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=\frac{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}{\sqrt[3]{162x^3+2}}\quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{162x^3+2}$ thì phương trình (*) trở thành:

$$3x+\frac{1}{3x}+1=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}+1\Leftrightarrow 3x=\frac{t}{2}\Leftrightarrow 6x=\sqrt[3]{162x^3+2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{3}$.

Bài 14. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}=x$

Lời giải:

Điều kiện: $7-2x^2\geq 0$

Khi đó phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{7x-8}-(2x-2)+\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}-(2-x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-8-(2x-2)^3}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{\frac{7-2x^2}{6}-(2-x)^2}{\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)}=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \frac{-x\left(8x^2-24x+17\right)}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}-\frac{8x^2-24x+17}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(8x^2-24x+17\right)\left(\frac{x}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{1}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)\right)}\right)=0$$

Xét phương trình: $\frac{x}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{1}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+(2-x)\right)}=0$

Chứng minh vế trái luôn lớn hơn 0

Do vậy phương trình chỉ có nghiệm $8x^2-24x+17=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{2}}{4}$

Bài 15. Giải phương trình: $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$

Lời giải:

Điều kiện: $8-3x^2 \geq 0$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$x^3-3x+1-(2-x)+(2-x)-\sqrt{8-3x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-1\right)+\frac{4\left(x^2-x-1\right)}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x+1+\frac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}\right)=0 \quad (*)$$

Ta chứng minh phương trình: $x+1+\frac{4}{(2-x)+\sqrt{8-3x^2}}=0$ vô nghiệm, thật vậy

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(x)=2-x+\sqrt{8-3x^2}, x\in\left[-\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$

Ta có $f'(x)=-1-\frac{3x}{\sqrt{8-3x^2}}=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, có $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{6+4\sqrt{6}}{3}, f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2-\sqrt{\frac{8}{3}}>0$

$f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2+\sqrt{\frac{8}{3}}>0$. Suy ra $0<f(x)\le\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$. Nên $x+1+\frac{1}{f(x)}\ge 1-\sqrt{\frac{8}{3}}+\frac{1}{\frac{6+4\sqrt{6}}{3}}>0$

Vậy nên phương trình (*) chỉ có nghiệm $x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$

1.2. $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$

1.3. $2x^2-11x+21=\sqrt[3]{4x-4}$

1.4. $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$

1.5. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

1.6. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$

1.7. $3x^2+\sqrt{3x+1}=2(7x+4)+\sqrt{6-x}$

1.8. $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$

1.9. $\sqrt[3]{3x-92}+\sqrt{4x-108}=x-28$

1.10. $(x+2)\left(x^2-\sqrt{x^2+x+2}\right)=-3x$

1.11. $(x+2)\left(x^2-\sqrt{x^2+x+2}\right)=x+1$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.12. $\sqrt{\frac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1$

1.13. $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

1.14. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

1.15. $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

1.16. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$

1.17. $\sqrt[3]{14-x^3}+x=2\left(1-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$

1.18. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}+2=x^2+2x$

1.19. $\sqrt{3x^2-2x}=\sqrt{4-x}+x^2-3x-4$

1.20. $3x^2+\sqrt{3x+1}=2(7x+4)+\sqrt{6-x}$

1.21. $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$

1.22. $\sqrt{x^2+2x+92}\geq x^2+2x+1+\sqrt{x-1}$

1.23. $\sqrt{x^3-2x+5}+\sqrt{24x-23}=\dfrac{5x^2+4}{3}$

1.24. $\sqrt{5-(2x^2-3)(x-3)^2}=2x^3+2x^2-1$

1.25. $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^3}=x^3+x-1$

1.26. $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{5x-2}=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{2}$

1.27. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{9}{4}(x-1)\sqrt{2(x-1)}$

1.28. $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[4]{x+81}=\dfrac{3}{2}(x+4)$

1.29. $4\sqrt{1+x}-1\geq 3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

1.30. Giải các bất phương trình sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$

2. $\dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2}>x-4$

3. $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\ge\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$

4. $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$

1.31. $3x^4-4x^3=1-\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}$

Đáp số: $x=0$

1.32. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$

Đáp số: $x=3$

1.33. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Đáp số: $x=2$

1.34. $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

Đáp số: $x=2$

1.35. $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4\left(x-1\right)}=0$

Đáp số: $x=3$

1.36. $\sqrt[4]{x^2+77}-\sqrt[3]{x^2-3}=2$

Đáp số: $x=\pm2$

1.37. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$

Đáp số: $x=2$

1.38. $\sqrt{x^2-3x+2}+x^2-4x+3\ge2\sqrt{x^2-5x+4}$

Đáp số: $S=\{1\}\cup\left[4;+\infty\right)$

1.39. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Đáp số: $x=-2$

1.40. $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Đáp số: $x=\pm 1; x=\dfrac{-32+\sqrt{513}}{7}$

1.41. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$

Đáp số: $x=2$

1.42. $\sqrt[3]{7x-8}+1=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

1.43. $2(x-2)\left(\sqrt{2x-2}+\sqrt[3]{4x-4}\right)=3x-1$

1.44. $\sqrt{1-4x^2}+2\sqrt{x^2+1}=8x$

1.45. $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

1.46. $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$

ĐƯA VỀ HỆ TẠM

Phương trình có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ mà $A-B=\alpha C$, khi đó ta có

$\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{A}=\dfrac{C+\alpha}{2}\\ \sqrt{B}=\dfrac{C-\alpha}{2}\end{cases}$, giải hệ này và thử lại nghiệm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4(1)$

Lời giải:

Nhận thấy $\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)=2\left(x+4\right)$, và $x=-4$ không là nghiệm của phương trình

Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{2\left(x+4\right)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2(2)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sqrt{2x^2+x+9}=\dfrac{x+6}{2}\Leftrightarrow x=0;x=\dfrac{8}{7}$

Thử lại thấy cả hai nghiệm này thỏa mãn

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0;x=\dfrac{8}{7}$.

Bài 2. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$.

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế phương trình cho $x\neq 0$ ta được

$$\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=3$$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow$ phương trình trở thành $\sqrt{2+t+t^2}+\sqrt{1-t+t^2}=3(1)$

Ta có $\left(\sqrt{2+t+t^2}+\sqrt{1-t+t^2}\right)\left(\sqrt{2+t+t^2}-\sqrt{1-t+t^2}\right)=2t+1$

$$\Rightarrow \sqrt{2+t+t^2}-\sqrt{1-t+t^2}=\frac{2t+1}{3}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{2+t+t^2}=\dfrac{2t+10}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{7}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{8}{7}\end{array}\right.$

Thử lại ta thấy chỉ có nghiệm $x=1$ thỏa mãn,

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{-5(x-5)^2}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}=5-x$$

$$\Leftrightarrow (5-x)\left(\frac{-5(5-x)}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{-5(5-x)}{\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}}-1=0(*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) tương đương với $\sqrt{x^2-9x+24}+\sqrt{6x^2-59x+149}=-5(5-x)(1)$

Ta lại có $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sqrt{x^2-9x+24}=2x-10 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x^2-9x+24=(2x-10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{19}{3}$, thử lại thấy nghiệm này thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=5; x=\frac{19}{3}$.

Bình luận:

Thực chất của phương pháp này là trục căn thức, Xem **phương pháp trục căn thức** ở trên.

BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

- Đôi khi biến đổi trực tiếp về phương trình tích không dễ thực hiện, khi đó nếu trong biểu thức của phương trình có xuất hiện nhân tử chung thì ta đặt ẩn phụ sau đó biến đổi phương trình mới về dạng tích sẽ dễ dàng hơn.
- Chúng ta sử dụng các biến đổi quen thuộc :

$$u+v=uv+1 \Rightarrow (u-1)(v-1)=0$$

$$au+bv=ab+uv \Rightarrow (b-u)(a-v)=0$$

Dạng toán : $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Sử dụng $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Từ đó suy ra $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Lời giải :

Phương trình tương đương với $\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x+2}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1}-1=0 \\ \sqrt[3]{x+2}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=0; x=-1$.

Bài 2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế phương trình cho x ta được

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[3]{x} = 1 + \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x}-1=0 \\ \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$

Lời giải :

Điều kiện $x \geq -1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+3)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}-2x=0\\ \sqrt{x+1}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=0;x=1$.

Bài 4. Giải phương trình sau : $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x+1}+\sqrt{-x^2+6x+7}-1$

Lời giải :

Điều kiện $-1\le x\le 7$.

Dặt $a=\sqrt{7-x},b=\sqrt{x+1}$ khi đó phương trình trở thành

$$b^2+2a-1=ab+2b-1\Leftrightarrow(a-b)(b-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ b=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{7-x}=\sqrt{x+1}\\ \sqrt{x+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 5. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$

Lời giải :

Diều kiện $x\ge 0$

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+3}$ ta được

$$1+\frac{4x}{x+3}=4\sqrt{\frac{x}{x+3}}\Leftrightarrow\left(1-2\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x}{x+3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 6. Giải phương trình : $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $0 \le x \le 2$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2-x} \\ v = \sqrt{3-x} \\ w = \sqrt{5-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - u^2 = uv + vw + wu \\ x = 3 - v^2 = uv + vw + wu \\ x = 5 - w^2 = uv + vw + wu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = (u+v)(u+w) \\ 3 = (u+v)(v+w) \\ 5 = (v+w)(u+w) \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : $u = \dfrac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x = \dfrac{239}{120}$.

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2 - x - 8} + \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} = 2$

Lời giải :

Đặt $a = \sqrt[3]{7x+1}, b = -\sqrt[3]{x^2 - x - 8}, c = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1}$, khi đó ta có

$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 \Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2 - x - 8} \\ \sqrt[3]{x^2 - x - 8} = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \\ \sqrt[3]{7x+1} = -\sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1, x = 9$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = 0, x = \pm 1, x = 9$.

Bài 8. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 1$

Lời giải :

Phương trình đã cho tương đương với

$(x+1) - (x+2) + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}\right) = 0$ (*)

Ta đặt $a = \sqrt[3]{x+1}, b = -\sqrt[3]{x+2}$, khi đó phương trình (*) trở thành :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$a^3+b^3-ab(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2=0$

$\Leftrightarrow a=\pm b \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\pm\sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Thử lại thấy nghiệm $x=-\frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\frac{3}{2}$.

Bài 9. Giải bất phương trình $7\sqrt{3x-4}+(4x-3)\sqrt{6-x}\ge 32$

Lời giải :

Điều kiện : $\frac{4}{3}\le x\le 6$ (*)

Khi đó bất phương trình tương đương với

$[(3x-4)+3(6-x)]\sqrt{3x-4}+[3(3x-4)+(6-x)]\sqrt{6-x}\ge 64$

$\Leftrightarrow (3x-4)\sqrt{3x-4}+3(3x-4)\sqrt{6-x}+3(6-x)\sqrt{3x-4}+(6-x)\sqrt{6-x}\ge 64$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-4}+\sqrt{6-x}\right)^3\ge 64 \Leftrightarrow \sqrt{3x-4}+\sqrt{6-x}\ge 4 \Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{(3x-4)(6-x)}\ge 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-4)(6-x)}\ge 7-x \Leftrightarrow (3x-4)(6-x)\ge (7-x)^2$ do điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 4x^2-36x+73\le 0 \Leftrightarrow \frac{9-2\sqrt{2}}{2}\le x\le \frac{9+2\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{9-2\sqrt{2}}{2},\frac{9+2\sqrt{2}}{2}\right]$

Bài 10. Giải bất phương trình $(x+2)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{2x^2+5x+3}-1\ge 0$

Lời giải :

Điều kiện : $x\ge -1$

Nhận xét :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta thấy xuất hiện nhân tử chung $\sqrt{2x+3};\sqrt{x+1}$ trong $\sqrt{2x^2+5x+3}$

Khi đó ta tìm cách biến đổi phương trình nhờ đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+3} \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=x+2 \\ a^2-2b^2=1 \\ \sqrt{2x^2+5x+3}=ab \end{cases}$

Khi đó bất phương trình trở thành

$$\left(a^2-b^2\right)\left(a-2b\right)+ab-\left(a^2-2b^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a+b\right)\left(a-2b\right)+\left(ab-a^2+2b^2\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-2b\right)\left(a+b-1\right)\ge 0$$

Nhưng do $a+b>0$ nên bất phương trình trên tương đương với

$$\left(a-2b\right)\left(a+b-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\ge 0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\le 0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}-1\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

Bài 11. Giải bất phương trình $\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}}\ge \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}-\dfrac{x^2+1}{x}$

Lời giải :

Điều kiện : $x>0$.

Khi đó bất phương trình được biến đổi thành

$$\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}.\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\ge \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}-\frac{x^2+x+1}{x}+1$$

Đến đây ta đặt : $a=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}}, b=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x}}$ khi đó bất phương trình trở thành

$ab\ge a-b^2+1 \Leftrightarrow \left(a+1\right)\left(b-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow b\ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x}}\ge 1$ luôn đúng với $x>0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(0,+\infty\right)$.

Bài 12. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $x \ge -2$

Khi đó phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}}\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+7x+10}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-4$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(1-\sqrt{x^2-x-2}\right)=3$

1.2. $\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1-x}=1+(1-x)\sqrt{x}$

1.3. $\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4$

1.4. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x}=1+\sqrt{1-x^3}$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau : $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}\ge 0 \\ x+\sqrt{x^2-1}\ge 0 \\ x^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có, $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$. Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$

Khi đó phương trình trở thành : $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow(t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2-1=(x-1)^2\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2. Giải phương trình sau : $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Lời giải :

Điều kiện : $x\ge-\frac{5}{4}$.

Đặt $t=\sqrt{4x+5}\ge0\Rightarrow x=\frac{t^2-5}{4}$, khi đó phương trình trở thành :

$2\left(\frac{t^2-5}{4}\right)^2-6\left(\frac{t^2-5}{4}\right)-1=t\Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0$.

$\Leftrightarrow(t^2+2t-27)(t^2-2t-11)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+2\sqrt{2}\\t=1+2\sqrt{3}\end{array}\right.$ (do $t\ge0$).

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Bài 3. Giải phương trình sau : $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Lời giải :

Điều kiện : $1\le x\le6$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}\ge0\Rightarrow x=t^2+1$, khi đó phương trình trở thành :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{5+t}=5-t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5+t=\left(5-t^2\right)^2 \\ 0\le t\le\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(t^2+t-4\right)\left(t^2-t-5\right)=0 \\ 0\le t\le\sqrt{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình sau : $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$.

Lời giải :

Điều kiện : $-1\le x<0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho x, ta được :

$x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3+\dfrac{1}{x}$

Dặt $t=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\ge 0$ phương trình trở thành : $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(do $t\ge 0$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài 5. Giải phương trình sau: $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế phương trình cho $x\ne 0$, ta được:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$x+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-2=0$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}\Rightarrow$ phương trình trở thành:

$t^3+t-2=0\Leftrightarrow(t-1)(t^2+t+2)=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=1\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6. Giải phương trình sau: $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1]$.

Ta có $VT=x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^2+x)^2+(x-1)^2>0$

Và $VP=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}=x(x^2+1)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ do đó phương trình có nghiệm thì $x\in(0;1]$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow(x^2+1)^2-2x(1-x^2)=(x^2+1)\sqrt{x(1-x^2)}$$

Nhận thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình, nên chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x(1-x^2)}$ ta được:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}-2\frac{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}{x^2+1}=1(*)$, ta đặt $t=\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}>0$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$t-\frac{2}{t}=1\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=2>0$.

Khi đó $\frac{x^2+1}{\sqrt{x\left(1-x^2\right)}}=2\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2=4x\left(1-x^2\right)\Leftrightarrow\left(x^2+2x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

Do $x\in(0,1)$ nên chỉ có nghiệm $x=-1+\sqrt{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1+\sqrt{2}$.

Bài 7. Giải phương trình sau: $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$

Lời giải:

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(x^2-x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$ (*).

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^3+\sqrt{2}t^2-3t-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t^2+2\sqrt{2}t+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=-\sqrt{2}\pm 1\end{array}\right.$

(i). Với $t=\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}-x=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}-x\right)^2=1-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(ii). Với $t=-\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}-1$, vô nghiệm do $VT \geq -1 > VP$.

(iii). Với $t=-\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=-\sqrt{2}+1-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq -\sqrt{2}+1 \\ 1-x^2=\left(-\sqrt{2}+1-x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Bài 8. Giải phương trình sau: $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$7\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)-2\left((2x-3)\sqrt{2x-3}+(5-2x)\sqrt{5-2x}\right)=2+8\sqrt{(5-2x)(2x-3)} \quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} \Rightarrow \sqrt{(2x-3)(5-2x)}=\dfrac{t^2-2}{2}$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$t^3-4t^2+t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)\left(t^2-2t-3\right)=0 \Leftrightarrow t=2>0$

Khi đó $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=2 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 9. Giải phương trình: $10x^2+3x+1=(1+6x)\sqrt{x^2+3}$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $u=1+6x; v=\sqrt{x^2+3}$ khi đó phương trình đã cho trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{1}{4}u^2+v^2-\frac{9}{4}=uv \Leftrightarrow (u-2v)^2=9 \Leftrightarrow u-2v=\pm 3$

❖ Với $u-2v=3$, ta được: $1+6x-2\sqrt{x^2+3}=3$

$\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1\ge 0 \\ x^2+3=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

❖ Với $u-2v=-3$, ta được:

$1+6x-2\sqrt{x^2+3}=-3 \Leftrightarrow 3x+2=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2\ge 0 \\ x^2+3=(3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}-3}{4}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1; x=\frac{\sqrt{7}-3}{4}$.

Bài 10. Giải phương trình: $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$

Lời giải:

Điều kiện: $|x|\le 1$

Đặt $a=\sqrt{1+x^2}; b=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 3x^2+1=2(1+x^2)-(1-x^2)=2a^2-b^2$

Khi đó phương trình trở thành:

$2(2a-b)-ab=2a^2-b^2 \Leftrightarrow 2a^2+a(b-4)+2b-b^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là a, ta được:

$\Delta_a=(b-4)^2-8(2b-b^2)=(3b-4)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{4-b+3b-4}{4}=\frac{b}{2} \\ a=\frac{4-b-3b+4}{4}=2-b \end{array}\right.$

❖ Với $a=\frac{b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$ VN

❖ Với $a=2-b \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}=2-\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}=2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^4}=4 \Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 11. Giải bất phương trình: $27\sqrt{5+2x}+27\sqrt{4-2x}\ge(4x+1)^2$

Lời giải:

Điều kiện: $-\frac{5}{2}\le x\le 2$.

Khi đó đặt $\begin{cases}u=\sqrt{5+2x}\\v=\sqrt{4-2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+v^2=9\\3\le u+v\le\sqrt{2(5+2x+4-2x)}=3\sqrt{2}\end{cases}$ (*)

Bất phương trình trở thành:

$$27(u+v)\ge(u^2-v^2)^2\Leftrightarrow 27\ge(u-v)^2(u+v)=(u+v)\left(18-(u+v)^2\right)$$

$\Leftrightarrow(u+v-3)\left((u+v)^2+3(u+v)-9\right)\ge 0$, luôn đúng do (*)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-\frac{5}{2},2\right]$.

Bài 12. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{7x-8}+1\ge\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$, khi đó ta đặt $t=\sqrt{2x-1}\ge 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}+1\ge(t-1)^2\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}\ge t^2-2t\Leftrightarrow\frac{7t^2-9}{2}\ge(t^2-2t)^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^6-12t^5+24t^4+16t^3-7t^2+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)(t-3)\left(2t^4-4t^3+2t^2+4t+3\right)\le 0$$

Với $t\ge 0\Rightarrow 2t^4-4t^3+2t^2+4t+3=\left(2t^4+2t^2-4t^3\right)+4t+3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$= 2t^2(t-1)^2 + 4t + 3 > 0$

Vậy $(t-1)(t-3) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2x-1} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1,5]$

Bài 12. Giải bất phương trình $x^2 + 12x < 8\sqrt{x^3 + 3x} - 3$

Lời giải:

Điều kiện $x \ge 0$, khi đó đặt $a = \sqrt{x^2 + 3}; b = \sqrt{x}$; bất phương trình trở thành

$a^2 + 12b^2 < 8ab \Leftrightarrow (a-2b)(a-6b) < 0 \Leftrightarrow 2b < a < 6b$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} < \sqrt{x^2+3} < 6\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{35}} \le x \le 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\sqrt{\dfrac{3}{35}}, 1\right]$

Bài 13. Giải phương trình $2\left(5x + 3\sqrt{x^2 + x - 2}\right) = 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + 27$

Lời giải:

Điều kiện: $x \ge 1$

Khi đó đặt $t = 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = 10x - 7 + 6\sqrt{x^2 + x - 2}$

Khi đó phương trình trở thành

$t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -4 \end{array}\right.$

Nhưng do $t > 0$ nên chỉ nhận nghiệm $t = 5 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$

1.2. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.3. $\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}}{2} \le x-2+\sqrt{x^2-4}$

1.4. $\sqrt{5x^2+10x+1} \ge 7-2x-x^2$

1.5. $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

1.6. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

1.7. $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$

1.8. $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x} \ge 2-x^2$

1.9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

1.10. $(x-1)(x+3)+2(x-1)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}=8$

1.11. $x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}}=2$

1.12. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=x$

1.13. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$

1.14. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=6\sqrt[3]{x^2-1}$

1.15. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$

1.16. $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$

1.17. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

1.18. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

1.19. $\sqrt{\dfrac{x^3}{3-4x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

1.20. $\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}=38+10x-2x^2-x^3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.21. $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+...+2\sqrt{3x}}}}=x$

1.22. $x^2\left(7-2\sqrt[3]{-3x^3+3x^2+x}\right)=13x-8$

1.23. $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-2012}}}}=2012$

1.24. $\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2012}+\left(1+x-\sqrt{1-x^2}\right)^{2012}=2^{2013}$

1.25. Giải các bất phương trình:

1. $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}-7$

2. $\sqrt{5x^2+10x+1}\geq 7-x^2-2x$

1.26. Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1. $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\geq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

2. $4\sqrt[3]{(x+2)^2}-7\sqrt[3]{4-x^2}+3\sqrt[3]{(2-x)^2}=0$

1.27. $\sqrt{36x^2-63x+27}=15x-27+2\sqrt{9x^2-9x+3}$

1.28. $\left(6x^2-x-2\right)\sqrt{3x^2-4x+1}=\left(10x^2-11x+4\right)\sqrt{x^2+x-1}$

Đặt $a=\sqrt{3x^2-4x+1},b=\sqrt{x^2+x-1}$ và suy ra

$6x^2-x-2=ma^2+nb^2;10x^2-11x+4=pa^2+qb^2$ đưa về phương trình đẳng cấp bậc ba.

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ

Phương pháp:

Khi gặp phương trình có dạng $F\left(f(x),\sqrt[m]{a+f(x)},\sqrt[n]{b-f(x)}\right)=c$. Ta có thể giải phương trình này bằng cách đặt $\begin{cases}u=\sqrt[m]{a+\alpha f(x)}\\ v=\sqrt[n]{b-\beta f(x)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(u,v)=c\\ \beta u^m+\alpha v^n=a\beta+b\alpha\end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 1. Giải phương trình sau: $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

Lời giải:

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$

Và phương trình ban đầu trơ thành: $xy\left(x+y\right)=30$, từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+y^3=35\\ xy\left(x+y\right)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=35\\ xy\left(x+y\right)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=3\\ x=3,y=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hia nghiệm là $x=2,x=3$.

Bài 2. Giải phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$

Lời giải:

Điều kiện: $x\le\dfrac{6}{5}$

Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2};v=\sqrt{6-5x}\ge 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^3=3x-2\\ v^2=6-5x\end{cases}\Rightarrow 5u^3+3v^2=5(3x-2)+3(6-5x)=8(1)$$

Mặt khác ta lại có: $2u+3v-8=0(2)$

$$(1)\,\&\,(2)\Rightarrow 5u^3+3(\frac{8-2u}{3})^2-8=0\Leftrightarrow 45u^3+12u^2-96u+120=0$$

$$\Leftrightarrow(u+2)(45u^2-78u+60)=0\Leftrightarrow u=-2\Rightarrow v=4(TM)\Rightarrow\sqrt[3]{3x-2}=-2\Leftrightarrow x=-2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-2$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 1$.

Đặt $u = \sqrt{x-1}, v = \sqrt{5+\sqrt{x-1}}$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u^2 + v = 5 \\ v^2 - u = 5 \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow u^2 + u + v - v^2 = 0 \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1) = 0 \Leftrightarrow u - v + 1 = 0$$

Khi đó $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 5 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Vậy phương tình có nghiệm là $x = \dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Bài 4. Giải phương tình sau: $\dfrac{4}{x} + \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \in [-1;0) \cup \left[\sqrt{\dfrac{5}{2}}, +\infty\right)$.

Đặt $u = \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}; v = \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}}, u \geq 0, v \geq 0$. Ta được $u - v = x - \dfrac{4}{x}(i)$.

Ta lại có $v^2 - u^2 = \left(2x - \dfrac{5}{x}\right) - \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = x - \dfrac{4}{x}(ii)$

Từ (i) và (ii) ta suy ra: $v^2 - u^2 = u - v \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Leftrightarrow u = v$, do $u, v \geq 0$.

Vậy phương trình tương đương với :

$\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}} \Leftrightarrow x - \dfrac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. So sánh với điều kiện thì chỉ có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 5. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{24-x} + \sqrt{12-x} = 6$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $x \le 12$.

Đặt $u = \sqrt[3]{24+x}, v = \sqrt{12-x}$. Ta được $u + v = 6$ (1)

Lại có $u^3 + v^2 = 36$ (2) . Thay $v = 6 - u$ từ (1) vào (2) ta được :

$$u^3 + u^2 - 12u = 0 \Leftrightarrow u(u-3)(u+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 3 \\ u = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -24 \\ x = 3 \\ x = -88 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $\{-88, -24, 3\}$.

Bài 6. Giải phương trình: $8x^2 - 13x + 7 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1}$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với: $8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)}$$

Đặt $u = 2x - 1, v = \sqrt[3]{3x^2 - 2}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)u \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$(u - v)(u^2 + uv + v^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

❖ Với $u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{8}$

❖ Với $u^2 + uv + v^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + x + 1 = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow 4\left(v+\frac{u}{2}\right)^2+4x^2+2(2x-1)^2+5=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1; x=-\frac{1}{8}$.

Bài 7. Giải phương trình: $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

Lời giải:

Đặt $u=x^2, v=\sqrt{x^2-1}; u,v\ge 0$, khi đó phương trình trở thành

$$u+3v=\sqrt{u^2-v^2}\Leftrightarrow 10v^2+6uv=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\\ v=-\frac{3}{5}u\end{array}\right.$$

Do $u,v\ge 0$ nên chỉ nhận nghiệm $v=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Thử lại ta thấy các nghiệm này thỏa mãn.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm 1$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$.

Khi đó bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+2x)(2x-1)}=(x^2+2x)-(2x-1)$$

Đặt $u=\sqrt{x^2+2x}, v=\sqrt{2x-1}; u,v\ge 0$, khi đó ta có phương trình:

$uv=u^2-v^2\Leftrightarrow u=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}v$, nhưng do $u,v\ge 0$ nên $u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}v$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x^2+2x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2(2x-1)\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{1+x}$

Lời giải:

Điều kiện: $0\le x\le 1$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Xét với $0<x\le 1$

Khi đó chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[4]{x}$ ta được phương trình

$$1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=1$$

Đặt $u=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}};v=\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}$ khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}u-v=1\\u^4+v^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\\left(\left(u-v\right)^2+2uv\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\2u^2v^2+4uv-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\uv=-1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}}{2}-3}}+1}{2}\\v=\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}}{2}-3}}-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}}{2}-3}}+1}{2}\right)^4-1}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1$

1.2. $\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-5}\right)^3-2=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.3. $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

1.4. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1$

1.5. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

1.6. $(x+5)\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$

1.7. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

1.8. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

1.9. $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

1.10. $7\sqrt{3x-7}+(4x-7)\sqrt{7-x}=32$

1.11. $(9x-2)\sqrt{3x-1}+(10-9x)\sqrt{3-3x}-4\sqrt{-9x^2+12x-3}=4$

1.12. $(2x-6)\sqrt{x+4}-(x-5)\sqrt{2x+3}=3(x-1)$

1.13. $\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100}=2x-10$

1.14. $\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2$

1.15. $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$

1.16. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}-1=0$

1.17. $2\left(x^2+x-1\right)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}$

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp :

Khi gặp các phương trình có dạng

(i). $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{px+q}$

(ii). $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{px^2+qx+r}$

(iii). $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)\sqrt{ax^3+qx^2+rx+s}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta thường đặt $\left[\begin{array}{l}\sqrt{px+q}=t\\ \sqrt{px^2+qx+r}=t\\ \sqrt{ax^3+qx^2+rx+s}=t\end{array}\right.$ và chuyển phương trình về dạng

$\alpha t^2-(mx+n)t+g(x)=0(*)$

Việc bây giờ của chúng ta là giải phương trình (*), tức tìm α sao cho biệt thức Δ là số chính phương.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

<u>Lời giải :</u>

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+3}$, khi đó phương trình trở thành

$(x+1)t=x^2+1 \Leftrightarrow (x^2-2x+3)-(x+1)t+2x-2=0 \Leftrightarrow t^2-(x+1)t+2x-2=0(*)$

Phương trình (*) có $\Delta=(x-3)^2$, nên (*) có hai nghiệm

$\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+3}=2\\ \sqrt{x^2-2x+3}=x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$.

Bài 2. Giải phương trình : $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$

<u>Lời giải :</u>

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}$, khi đó phương trình trở thành :

$x^2-(x+2)t+3x-1=0 \Leftrightarrow \alpha t^2-(x+2)t+x^2+3x-1-\alpha\left(x^2+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \alpha t^2-(x+2)t+(1-\alpha)x^2+3x-1-2\alpha=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Phương trình này có biệt thức $\Delta=\left(4\alpha^2-4\alpha+1\right)x^2+\left(4-12\alpha\right)x+4\alpha\left(1+2\alpha\right)+4=0$, nhận thấy $\alpha=1\Rightarrow\Delta=\left(x-4\right)^2$.

Vậy phương trình ban đầu tương đương với

$$t^2-\left(x+2\right)t-3-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2}=3\\\sqrt{x^2+2}=x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}.$$

Bài 3. Giải phương trình : $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Lời giải :

Điều kiện : $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1-x}$, khi đó phương trình trở thành : $4\sqrt{x+1}=3x+2t+t\sqrt{1+x}+1$

$\Leftrightarrow -t^2+\left(\sqrt{x+1}+2\right)t+2x-4\sqrt{x+1}+2=0$ (*)

Phương trình này có biệt thức $\Delta=\left(3\sqrt{x+1}-2\right)^2$, do đó phương trình (*) có hai nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l}t=2\sqrt{x+1}\\t=\sqrt{x+1}-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x}=2\sqrt{x+1}\\\sqrt{1-x}=\sqrt{x+1}-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{5}\\x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=-\dfrac{3}{5};x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình : $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{x^3+x^2-2x+\left(x^2-x+1\right)}{x^2+2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}$, khi đó phương trình trở thành :

$$\left(x^2+2\right)t=x^3+x^2-2x+t^2 \Leftrightarrow t^2-\left(x^2+2\right)t+x^3+x^2-2x=0$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là t, ta có

$$\Delta_t=\left(x^2+2\right)^2-4\left(x^3+x^2-2x\right)=\left(x^2-2x-2\right)^2$$

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l} t=x^2-x \\ t=x+2 \end{array}\right.$

❖ Với $t=x^2-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=x^2-x \Leftrightarrow t=t^2-1 \Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x^2-x+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x-\left(1+\sqrt{5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}.$$

❖ Với $t=x+2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x^2-x+1=\left(x+2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.

Vậy phương trình có ba nghiệm : $x=-\dfrac{3}{5}, x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$.

Bài 5. Giải phương trình $\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\dfrac{3x}{2}-3$

Lời giải:

Điều kiện $2x^2-1\ge 0$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-1} \Rightarrow x^2=\dfrac{t^2+1}{2}$ và phương trình được đưa về dạng

$$\left(3x+1\right)t=5x^2+\frac{3}{2}x-3 \Leftrightarrow mx^2+\left(5-m\right)x^2+\frac{3}{2}x-3-\left(3x+1\right)t=0$$

$$\Leftrightarrow m\frac{t^2+1}{2}+\left(5-m\right)x^2+\frac{3}{2}x-3-\left(3x+1\right)t=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow m\frac{t^2}{2}+(5-m)x^2-(3x+1)t+\frac{3}{2}x-3+\frac{m}{2}=0\ (*)$$

Coi (*) là phương trình bậc hai ẩn t, tính delta:

$\Delta=(3x+1)^2-2m\left((5-m)x^2+\frac{3}{2}x-3+\frac{m}{2}\right)$ là số chính phương, tìm được $m=4$.

Các bạn tự giải tiếp nha!

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

1.2. $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$

1.3. $4x^2-7x+x\sqrt{5+x-2x^2}=1$

1.4. $x^2+(2x+3)\sqrt{3x^2+6x+2}=6x+5$

1.5. $x^2+(2x+3)\sqrt{3x^2+6x+2}=6x+5$

1.6. $(3x-5)\sqrt{2x^2-3}=4x^2-6x+1$

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

<u>Phương pháp:</u>

- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số :

Giả sử biến đổi phương trình về dạng $f(x)=f(t)$ (*), trên miền xác định D xét tính đơn điệu của hàm số $f(t)$. Nếu $f(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D thì phương trình (*) tương đương với $x=t$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

- Dùng bất đẳng thức đánh giá(Các bất đẳng thức xem ***Chuyên đề GTLN-GTNN và chứng minh bất đẳng thức***).
-

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3+1$

Lời giải:

- Với $x>0$ thì Vế trái lớn hơn 1, Vế phải nhỏ hơn 1
- Với $x<0$ thì Vế trái nhỏ hơn 1, Vế phải lớn hơn 1
- Nhận thấy $x=0$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+12}+\sqrt{5x^4-10x^2+9}=-2x(x+2)+3$

Lời giải:

$$VT=\sqrt{3x^2+6x+12}+\sqrt{5x^4-10x^2+9}=\sqrt{3(x+1)^2+9}+\sqrt{5(x^2-1)^2+4}\geq\sqrt{9}+\sqrt{4}=5$$

$$VP=-2x(x+2)+3=-2(x+1)^2+5\leq 5$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $VT=VP=5\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\(x^2-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Bài 3. Giải phương trình sau: $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=-3x\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\ (*).$$

Ta xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình (*) tương đương với : $2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{5}$.

Bài 4. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

Lời giải :

Phương trình tương đương với

$$6x+1+\sqrt[3]{6x+1}=(2x)^3+2x\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt[3]{6x+1})\ (*).$$

Ta xét hàm số $f(t)=t^3+t$ lên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên phương trình (*) tương đương với : $2x=\sqrt[3]{6x+1}\Leftrightarrow 8x^3-6x-1=0$.

Giải phương trình bằng cách đặt $x=\cos t, t\in[0,\pi]$, khi đó phương trình trở thành:

$$2\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)-1=0\Leftrightarrow \cos 3t=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3t=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{9}\\ t=\dfrac{7\pi}{9}\\ t=\dfrac{5\pi}{9}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\cos\dfrac{\pi}{9}\\ x=\cos\dfrac{5\pi}{9}\\ x=\cos\dfrac{7\pi}{9}\end{array}\right.$$

Do là phương trình bậc ba nên có tối đa 3 nghiệm, vậy nên phương trình có ba nghiệm như trên:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x \in \left\{ \cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9} \right\}$.

Bài 5. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} - (x-5)\sqrt{x-8} - 3x + 31 = 0$

Lời giải :

Điều kiện : $x \geq 8$.

Khi đó phương trình tương đương với :

$$x - 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} = \left(\sqrt{x-8}+1\right)^3 + \left(\sqrt{x-8}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{x-8}+1\right)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 - 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t - 2 > 0, \forall t \in [1, +\infty)$. Nên $f(t)$ đồng biến.

Phương trình có dạng $f(\sqrt[3]{x-1}) = f(\sqrt{x-8}+1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-8}+1$

Đặt $u = \sqrt[3]{x-1}$, ta được phương trình : $u - 1 = \sqrt{u^3 - 7}$

$$\Leftrightarrow u^3 - u^2 + 2u - 8 = 0 \Leftrightarrow (u-2)\left(u^2 + u + 4\right) = 0 \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow x = 9$$

Bài 6. Giải bất phương trình sau : $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$

Lời giải :

Điều kiện : $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

Ta xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x - 6$ trên $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3} - 2 < 0$, suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Nhận thấy $f(1) = 0$. Do đó bất phương trình tương đương với : $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 7. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$

Lời giải :

Đặt $u=\sqrt[3]{x+1}, v=\sqrt[3]{2x^2}$, khi đó phương trình trở thành :

$\sqrt[3]{u^3+1}+u=\sqrt[3]{v^3+1}+v \Leftrightarrow f(u)=f(v)$

Ta xét hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t^3+1}+t$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt[3]{\left(t^3+1\right)^2}}+1>0$ nên $f(t)$ đồng biến. do đó

phương trình tương đương với $u=v \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Giải phương trình sau : $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$

Lời giải :

Điều kiện : $x\in\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$\log_2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+x+2=\log_2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)+\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-2t+t^2$ trên khoảng $(0,+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2t-2\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{t\ln 2}.2t}-2>0$, nê hàm số đồng biến. do đó phương trình (*) tương đương với :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{x+2}=2+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x+2=4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-3x-1)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. So sánh với điều kiện suy ra phương trình có hai nghiệm là $x=-1;x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 9. Giải phương trình sau : $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{2x-1}-3>0\Leftrightarrow x>5$.

Khi đó xét hàm số $f(x)=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$ trên khoảng $(5,+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)+\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}}>0$, nên hàm số đồng biến trên $(5,+\infty)$. Nhận thấy $f(7)=4$, do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=7$.

Bài 10. Giải phương trình sau : $2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}+3x^2-30x+71=0$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $1\le x\le 5$.

Khi đó phương trình tương đương với :

$2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}=-3(x-5)^2+4\le 4$ (1)

Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}$ liên tục và xác định trên $[1,5]$. Ta có

$f'(x)=\dfrac{2\sqrt{5-x}-3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{29}{13}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta lại có $f(1)=6, f(5)=4, f\left(\frac{29}{13}\right)=2\sqrt{13} \Rightarrow \min\limits_{x\in[1,5]} f(x)=f(5)=4$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài 11. Giải phương trình sau : $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $-2 \le x \le \frac{22}{3}$.

Khi đó phương trình tương đương với :

$$4\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(\sqrt{22-3x}-4\right)=x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3(2-x)}{\sqrt{22-3x}+4}=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(*) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=x+2-\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}$, ta có

$$f'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)^2}+\frac{9}{\sqrt{22-3x}\left(\sqrt{22-3x}+4\right)^2}>0, \forall x\in\left(-2;\frac{22}{3}\right)$$

Nên hàm số đồng biến trên $\left[-2,\frac{22}{3}\right]$

Nhận thấy $f(-1)=0$, do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1; x=2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 12. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^2-x+1$.

Lời giải :

Điều kiện : $-2\le x\le 3$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x^2+x-1$ trên đoạn $[-2,3]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}-2x+1; f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}-\dfrac{1}{4\sqrt{(3-x)^3}}-2<0$. Do đó hàm số $f'(x)$ nghịch biến trên $(-2,3)$, do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Nhận thấy $x=2;x=-1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-1;x=2$.

Nhận xét :

Bài toán này có thể giải bằng phương pháp trục căn thức

Bài 13. Giải phương trình : $\sqrt{x}=(1-x)^3+1$

Lời giải :

Điều kiện $x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}-(1-x)^3-1$ trên đoạn $[0,+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3(1-x)^2>0,\forall x\in(0,+\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[0,+\infty)$.

Vậy nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. nhận thấy $f(1)=0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 14. Giải phương trình : $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Điều kiện : $|x| \le 1$

Khi đó phương trình tương đương với :

$$x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy sharvart ta có

$$\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2$$

$$\le(13+27)\left(13\left(1-x^2\right)+3\left(1+x^2\right)\right)=40\left(16-10x^2\right)$$

Từ đó suy ra $VT \le 40x^2\left(16-10x^2\right)\le 4\left(\frac{16}{2}\right)^2=256=VP$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\ 10x^2=16-10x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{x^4-5x^2+4}+2x=\sqrt{4x^4-16x^2}+\sqrt{x^2-1}$

Lời giải :

Điều kiện $x\ge 2; x\le -2$

- Với $x \ge 2$ phương trình tương đương với

$$\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}+\sqrt{4x^2}=\sqrt{4x^2\left(x^2-4\right)}+\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4x^2}\right)+\sqrt{4x^2}-\sqrt{x^2-1}=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-4}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}>2$$

- Với $x \le -2$ khi đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}-\sqrt{4x^2}=\sqrt{4x^2\left(x^2-4\right)}+\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-4}-1\right)=\sqrt{4x^2}\left(\sqrt{x^2-4}+1\right) \ (*)$$

Dễ thấy với $x \le -2$ thì Vế phải lớn hơn Vế trái, hay phương trình (*) vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{5}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

1.2. $\left(3+4\sqrt{x^2+1}\right)\left(4x+15\right)=16$

1.3. $\sqrt{2x\sqrt{5}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{9}{x}$

1.4. $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$

1.5. $\sqrt{2x^2+12x+6}-\sqrt{2x-1}\ge x+2$

1.6. $\sqrt{6\left(2-x\right)}+2\sqrt{2\left(3-x\right)}=6\sqrt{x^2-5x+6}$

1.7. $2x+3=x^2+\left(x-1\right)\sqrt[3]{3x^3+3}$

1.8. $\sqrt[6]{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=\sqrt[3]{1-\sqrt{4x-1}}+1-\sqrt{4x^2-1}$

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Khi gặp một số bài toán mà biểu thức chứa căn thức, ta thường đổi biến số dưới dạng lượng giác như sau.

+ Nếu có chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt $x = a\sin t$ hoặc $x = a\cos t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = \dfrac{a}{\cos t}$ hoặc $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

+ Nếu có chứa $x^2 + a^2$ hoặc $\sqrt{x^2 + a^2}$ thì đặt $x = a\tan t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{\dfrac{x+a}{a-x}}$ thì đặt $x = a\cos 2t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\dfrac{1-x^2}{3}}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $|x| \le 1$.

Với $-1 \le x \le 0$ thì $\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \le 0 \Rightarrow VT \le 0, VP > 0$, do đó phương trình không có nghiệm trên $[-1,0]$. Ta xét nghiệm của phương trình $x \in [0,1]$.

Đặt $x = \cos t, t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, khi đó phương trình trở thành :

$$\sqrt{1+\sqrt{1-cos^2 t}}\left(\sqrt{(1+\cos t)^3} - \sqrt{(1-\cos t)^3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{1-cos^2 t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t}\left(\left(\sqrt{2}cos\frac{t}{2}\right)^3 - \left(\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right)^3\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\left(\cos\frac{t}{2}.\sin\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin t$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6}\cos t\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right)=2+\sin t \Leftrightarrow \cos t=\frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 2. Giải phương trình sau : $\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{4x^2-1}$

Lời giải :

Điều kiện : $|x|\le 1, x\ne \pm\frac{1}{2}$.

Ta đặt $x=\cos t, t\in[0;\pi], t\ne\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

Khi đó phương trình trở thành :

$$\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{4\cos^2 t-1} \Leftrightarrow \sin t\left(4\cos^2 t-1\right)=\cos t \Leftrightarrow \sin t\left(3-4\sin^2 t\right)=\cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin 3t=\cos t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t=\frac{\pi}{2}-t+k2\pi \\ 3t=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ t=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện của t, suy ra $x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{\pi}{4}$.

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x=\cos\frac{\pi}{8}; x=\cos\frac{5\pi}{8}; x=\cos\frac{\pi}{4}$.

Bài 3. Giải phương trình : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện : $|x| \le 1$.

Để phương trình có nghiệm thì $x \ge 0$, do đó ta chỉ xét nghiệm phương trình $x \in [0,1]$.

Ta đặt $x = \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, khi đó phương trình trở thành :

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2 t}} = \cos t\left(1+2\sqrt{1-\cos^2 t}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t} = \cos t\left(1+2\sin t\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin t = \cos^2 t\left(1+2\sin t\right) \Leftrightarrow \left(1+\sin t\right)\left(1-\left(1-\sin t\right)\left(1+2\sin t\right)\right) = 0$$

$1-\left(1-\sin t\right)\left(1+2\sin t\right) = 0(*)$, do $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Phương trình (*) tương đương với :

$$2\sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau :

1.1. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2$

1.2. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right) = 2x$

1.3. $2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x+\sqrt{x\left(a+x\right)}}$

1.4. $\sqrt{3+x} - \sqrt{6-x}\sqrt{\left(3+x\right)\left(6-x\right)} = 1$

1.5. $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH DẠNG ĐẶC BIỆT

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Dạng 1: $a.A(x)+b.B(x)=\sqrt{A(x).B(x)}$.

Phương trình này được giải bằng cách chia hai vế phương trình cho $A(x)$ hoặc $B(x)\neq 0$.

Dạng 2: $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$.

Phương trình này được giải bằng cách chia hai vế phương trình cho u hoặc $v\neq 0$.

Dạng 3 : $\alpha\left(f(x)\right)^n+\beta=\gamma\sqrt[n]{ag(x)+b}$ ta đặt $\sqrt[n]{ag(x)+b}=f(y)$ và đưa về giải hệ đối xứng.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau: $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$

Lời giải:

Điều kiện: $x\geq -1$.

Khi đó phương trình tương đương với: $2\left(x^2-x+1\right)+2\left(x+1\right)=5\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$.

Nhận thấy $x=-1$, không là nghiệm của phương trình, nên chia hai vế phương trình cho $\left(x+1\right)$ ta được:

$2\dfrac{x^2-x+1}{x+1}+2=5\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}$ (*), đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}\geq 0$, khi đó (*) trở thành:

$$2t^2+2-5t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}=2\\ \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Bài 2. Giải phương trình sau: $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

Lời giải:

Ta có $\sqrt{x^4+x^2+1}=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2-x^2}=\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$

Giả sử $x^2-3x+1=\alpha\left(x^2-x+1\right)+\beta\left(x^2+x+1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\-\alpha+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=-1\end{cases}$

Khi đó phương trình trở thành:

$$-2\left(x^2-x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}$$

Đặt $u=\sqrt{x^2-x+1},v=\sqrt{x^2+x+1}$, khi đó phương trình trở thành:

$$-2u^2+v^2=-\frac{\sqrt{3}}{3}uv\Leftrightarrow\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)\left(u+\frac{\sqrt{3}}{3}v\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{\sqrt{3}}{2}v\\u=-\frac{\sqrt{3}}{3}v\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+x+1}\\\sqrt{x^2-x+1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+x+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3. Giải phương trình sau: $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}-9x^2+26x+\frac{37}{3}=0$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{4}$.

Khi đó phương trình tương đương với: $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1}=\left(3x-4\right)^2-2x-\frac{11}{3}(*)$

Đặt $\sqrt{4x+1}=3y-4,y\ge\frac{4}{3}$, khi đó kết hợp với (*) ta có hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\(3x-4)^2=\frac{2}{3}(3y-4)+2x+\frac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\(x-y)(9x+9y-22)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-4)^2=4x+1\\\left[\begin{array}{l}x=y\\9x+9y-22=0\end{array}\right.\end{cases}$$

Giải hệ này ta được các nghiệm thỏa mãn điều kiện là $x=\frac{14+\sqrt{61}}{9}; x=\frac{12-\sqrt{53}}{9}$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$ (*)

Nên ta đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3$ (**), kết hợp với (*) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(2y-3)^3=3x-5\\(2x-3)^3=x+2y-5\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$2(x-y)\left((2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2\right)=2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\ (i)\\(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1=0\ (ii)\end{array}\right.$$

Dễ thấy phương trình (ii) vô nghiệm, do

$$(2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2+1=\left(2x-3+\frac{1}{2}(2y-3)\right)^2+1+\frac{3}{4}(2y-3)^2>0$$

Thay $x=y$ ở (i) vào (**) ta được:

$$(2x-3)^3=3x-5\Leftrightarrow(x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow x=2\vee x=\frac{5\pm\sqrt{3}}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.1. $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

1.2. $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

1.3. $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$

Đáp số: $x=3\pm\sqrt{13}$

1.4. $\sqrt[3]{3x+4}=x^3+3x^2+x-2$

1.5. $2x^3-x^2-3x+1=\sqrt{x^5+x^4+1}$

1.6. $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2$

1.7. $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}$

1.8. $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

1.9. $8x^3-4x-1=\sqrt[3]{6x+1}$

1.10. $7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x\left(1+3x-3x^2\right)}$

1.11. $2\left(x^2+2x+3\right)\le 5\sqrt{x^3+5x^2+3x+2}$

1.12. $8x^2-13x+7=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$

1.13. $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}=6$

1.14. $10\sqrt[3]{x^3+1}=3\left(x^2+2\right)$

Đặt $u=\sqrt{x+1}, v=\sqrt{x^2-x+1}$

Đáp số $x=5\pm\sqrt{33}$

1.15. $10\sqrt{x^3+8}=3\left(x^2-x+6\right)$

Đáp số: $x=\dfrac{11\pm\sqrt{177}}{2}$

1.16. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đáp số: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1. $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

2. $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$

3. $x-\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$

4. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

5. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}-\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}=1$

6. $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

7. $\sqrt{x}>1+\sqrt[3]{x-1}$

8. $(x-1)\sqrt{2x-1}\le 3(x-1)$

9. $4\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}<2x+\frac{1}{2x}+2$

10. $x^2-1\le 2x\sqrt{x^2+2x}$

11. $x-1\ge x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2-x}$

12. $(4x-1)\sqrt{x^3+1}\le 2x^3+2x+1$

13. $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$

14. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}\ge (x+1)(3-x)$

15. $\sqrt{x+1}\le 1-2x+x^2-x^3$

16. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\le 2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

17. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

18. $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$

19. $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

20. $\left(x^2-4x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$

21. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}=x-\dfrac{1}{2}$

22. $x^2-4x+3=\sqrt{x+5}$

23. $x^3+x^2-3x-1=2\sqrt{x+2}$, $x\in[-2,2]$

24. $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^3+x\right)\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$

25. $x+\sqrt{4-x^2}=2+x\sqrt{4-x^2}$

26. $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

27. $2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2$

28. $\sqrt[3]{\dfrac{x^9-9x^2+1}{3}}=2x+1$

29. $x-1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x^2+\sqrt{2}$

30. $\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}-\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}}=x^2-1$

31. $2012^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$

32. $2x^2\sin x+x\cos x+\sqrt[3]{2x+1}=x^3-x^5+x+1$

33. $2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$

34. $(x-3)\sqrt{x^2-4}\leq x^2-9$

35. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

36. $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} \le 1$

37. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$

38. $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$

39. $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 6x$

40. $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$

41. $(x-2)\sqrt{x-1} - \sqrt{2}x + 2 = 0$

42. $2x + \dfrac{x-1}{x} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} + 3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$

43. $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^2(1-x)} + \sqrt[4]{x^3}$

44. $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$

45. $\sqrt[3]{x^2+4} + \sqrt{x-1} + 2x - 3$

46. $\sqrt{x^2+15} + 2 = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2+8}$

47. $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} - \sqrt[3]{x^2-8x+1} = 2$

48. $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$

49. $\sqrt{\dfrac{7}{4}\sqrt{x} - 1 + x^2} = (1-\sqrt{x})^2$

50. $1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

51. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \dfrac{(2x-1)^2}{2}$

52. $x^2 + 2x - 1 - 3x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = 0$

53. $2(x^2-3x+2) = \sqrt[3]{x^3+8}$

54. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

55. $2\sqrt{3x+3}=x^2+9x+20$

56. $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$

57. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

58. $\sqrt{2x^2+13}=4x-2+\sqrt{2x^2+7}$

59. $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$

60. $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

61. $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

62. $3x^2+7x+8-(4x+2)\sqrt{x+8}=0$

63. $\dfrac{x+2+x\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{2x+1}}=\sqrt{x+2}$

64. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x$

65. $25x+9\sqrt{9x^2-4}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{18x}{x^2+1}$

66. $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

67. $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$

68. $x^2\sqrt{x}+(x-5)^2\sqrt{5-x}=11\left(\sqrt{x}+\sqrt{5-x}\right)$

69. $15x^2+2(x+1)\sqrt{x+2}+5x-2=0$

70. $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

71. $x^3+3x^2+4=4x\sqrt{x+3}$

72. $\sqrt{2x^2+2x}+(x-1)\sqrt{x}=x+1$

73. $4\sqrt{1-x}-6=x-3\sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1+x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

74. $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

75. $4+2\sqrt{1-x}=-3x+5\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}$

76. $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$

77. $(x+4)^2-6\sqrt{x^3+3x}=13$

78. $x^3+6x^2-2x+3=(5x-1)\sqrt{x^3+3}$

79. $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

80. $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$

81. $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

82. $2x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{1-x^2}$

83. $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$

84. $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$

85. $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$

86. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$

87. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

88. $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

89. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+6}}$

90. $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$

91. $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

92. $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

93. $\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}=x^4-8x^2+28$

94. $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

95. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

96. $2x+\frac{x-1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}+3\sqrt{x-\frac{1}{x}}$

97. $x+\sqrt{x-1}\geq 3+\sqrt{2\left(x^2-5x+8\right)}$

98. $x+\frac{1}{x}+\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4$

99. $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}\geq\sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$

1.2. $\frac{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x}}\geq\frac{4}{x}$

1.3. $\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{22}{21}}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+\frac{23}{7}}=1$

1.4. $\sqrt{3x^2+\frac{2}{x^2}+4}\leq x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

1.5. $7\sqrt{3x-7}+\left(4x-7\right)\sqrt{7-x}=32$

1.6. $\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}=x$

1.7. $\sqrt[3]{3x^2-3x+3}-\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

1.8. $\sqrt{2+2x}\leq 2\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.9. $x^3 - \sqrt[3]{x + 2\ln x} - \dfrac{2}{3}\ln\left(x + 2\ln x\right) = 0$

1.10. $3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + \left(4x + 2\right)\left(1 + \sqrt{1 + x + x^2}\right) = 0$

1.11. $2\left(x - 2\right)\left(\sqrt{3}x + 5 + 2\sqrt{2x - 5}\right) = 3x - 1$

1.12. $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{\left(x + 2\right)^3} - 6x \ge 0$

1.13. $4\sqrt{17x + 53} - 12x < \left(2\sqrt{x + 5} + 1\right)^2 + 27$

1.14. $\sqrt{1 + x^2 + x^4} + x = \sqrt{x - x^3}$

1.15. $2\left(2\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}\right) - \sqrt{1 - x^4} = 3x^2 + 1$

1.16. $\sqrt{20x^2 + 80x + 15} \le 2x + 1 + 4\sqrt{3x + 5}$

1.17. $\sqrt{x^4 + 3x^2} + \sqrt{-x} = x^2 - 2x$

1.18. $2x + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + \left(x + 1\right)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$

1.19. $\sqrt{x - 3} + x < \sqrt{2\left(x^2 - 9x + 22\right)} + 5$

1.20. $\sqrt{x^4 + 20} - \sqrt{x^4 + 9} = x^3 - 7$

1.21. $\sqrt{-x^3 + 2x} + 2 > \sqrt{-6x + 4}$

1.22. $\left(x^2 - 6x + 11\right)\sqrt{x^2 - x + 1} = 2\left(x^2 - 4x + 7\right)\sqrt{x - 2}$

Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1.1. $\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 2\left(x^2 + x + 1\right)$

1.2. $3x^3 - x^2 + 3 + \sqrt{x^4 + 3x^3 + 3} = 0$

1.3. $\sqrt{x^3 - 2x + 5} + \sqrt{24x - 23} = \dfrac{5x^2 + 4}{3}$

1.4. $\sqrt{x^5 + x^3 + x} \le \sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3} - \sqrt{x^2\left(x^2 - x + 1\right)}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.5. $x^2+x+1=(x+1)\sqrt{9-x^2}$

1.6. $8\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+1}}+3\ge 6\sqrt{2x-3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$

1.7. $\sqrt{8-x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}}=5-\dfrac{1+x^2}{x^2}$

1.8. $\sqrt{x+\sqrt{x^2-4x+5}}-\sqrt{2x+1+\sqrt{4x^2-4x+2}}=x+1$

1.9. $\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1$

1.10. $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^3}=x^3+x-1$

1.11. $x^4-2x^3+x=\sqrt{2\left(x^2-x\right)}$

1.12. $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x+1}$

1.13. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$

1.14. $(x+2)\sqrt{1-x}\ge x^4-x^3+5x-2$

1.15. $\left(4x^2-10x+7\right)\left(\sqrt[3]{(6x-4)^2}-\sqrt[3]{6x-4}+1\right)=9$

1.16. $\sqrt{6}\left(x^2-3x+1\right)+\sqrt{x^4+x^2+1}\le 0$

1.17. $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

1.18. $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{x^2+3x+\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$

1.19. $\sqrt{5x+6}+\sqrt{x-1}=\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x^3+8}{5x+6}}$

1.20. $3\left(x^2-x+1\right)=8\sqrt{x\left(x^2+1\right)}$

1.21. $\sqrt{12x-8}+\sqrt{8x+28}=\sqrt{2x^2+22x+40}$

1.22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}+2\sqrt{8x+9}=4x^2$

1.23. $2x-1=-3\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.24. $\sqrt{x^2-x-6}+3\sqrt{x}=\sqrt{6\left(x^2+5x-2\right)}$

1.25. $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$

1.26. $\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^4+3x^2}-2x}\le 1$

1.27. $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x}-\sqrt{6\left(x^2+5x-2\right)}}{x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)}}\le 0$

1.28. $15\sqrt{x^3+x}=x^2+14\sqrt[3]{x^4+x^2}+1$

1.29. $7x\sqrt{x+2}=12x+\sqrt{22-3x}$

1.30. $\sqrt[3]{7x-8}+1\ge\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

1.31. $\sqrt[3]{24x-11}-16x\sqrt{2x-1}-1=0$

1.32. $x+\sqrt{x}+3\sqrt{2x-x^2}=4+\sqrt{2-x}$

1.33. $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

1.34. $12\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}\ge 3\left(x+5\right)$

1.35. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{17-x^2}=3$

1.36. $1+x-2x^2=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$

1.37. $4x-x^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{x^4-8x^3+16x^2+1}}$

1.38. $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27\left(x+1\right)$

1.39. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x^3+1}+1=\sqrt[3]{\left(x+1\right)\sqrt[3]{3x^3+3}}+x\sqrt[3]{3x^3+3}$

1.40. $x^2=\sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}$

1.41. $2\sqrt{2}\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x+1}{4}\right)=\sqrt{x^2+18x-7}$

1.42. $\sqrt[6]{1-\sqrt{x^4-x^2}}+\sqrt[3]{\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}+1}=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.43. $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

1.44. $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x+1$

1.45. $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = 28-x$

1.46. $2+\sqrt{x} = \left(3+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)$

1.47. $(x+2)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{2x^2+5x+3}-1 \geq 0$

1.48. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-11x+33}+\sqrt{3x-5}$

1.49. $4x^2+3x+3 = 4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$

1.50. $\left(19+10x-4x^2\right)\sqrt{x^2+5x+24}+\left(62+25x-27x^2\right)\sqrt{3x^2-x+1} = 0$

1.51. $\dfrac{x^3-2x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{6}$

1.52. $x = \sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

1.53. $8x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{5}{2}$

1.54. $\left(\sqrt{x+1}+2\right)^3 = \sqrt{x^3+2}$

1.55. $(4x+2)\sqrt{x+1}-(4x-2)\sqrt{x-1} = 9$

1.56. $5x^2+28x+24 = \left(3x^2+4x+8\right)\sqrt{2x+1}$

1.57. $x\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+5}+x+3$

1.58. $\sqrt{x}-2\sqrt{5x-x^2+\sqrt{5-x}} = 1$

1.59. $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2}} = \dfrac{-x^2+4x-1}{x}$

1.60. $4x^2-4x-10 = \sqrt{8x^2-6x-10}$

1.61. $\sqrt{x+5}-\sqrt{9-7x}-x^3+3x^2+51x+49 = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.62. $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{4}{x}$

1.63. $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$

1.64. $\sqrt{4x^2-x+10}+2x=3\sqrt[3]{2x^2-x^3}+\sqrt{9x^2-4x+4}$

1.65. $\sqrt{x^2-x+1}>2x-1+\frac{1}{x}$

1.66. $5+8\sqrt{1-x}=3x+4\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}\right)$

1.67. $\sqrt{5x^2+4x}+5\sqrt{x}=\sqrt{x^3-3x^2-18}$

1.68. $3\left(3x-x^2-1\right)\sqrt{x^2-2x}=x^3-4x^2+4x-1$

1.69. $x^3-1=\sqrt{x}\left(-3x^2+5x-3\right)$

1.70. $(2x+1)\sqrt{x-1}+\sqrt{2x^2-3x+1}\ge\sqrt{(2x-1)^3}+1$

1.71. $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

1.72. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[4]{x+80}$

1.73. $\sqrt{x^2+1}=x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}$

1.74. $2x+7=\sqrt[4]{4x-3}+4\sqrt{x+3}$

1.75. $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$

1.76. $\frac{2x-8}{\sqrt{6-x}}=3\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}$

1.77. $\sqrt{17+5\sqrt{4x^2-16}}+x^2\sqrt{7-x}=3$

1.78. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{2}\left(7x^2-x+4\right)}{4}$

1.79. $\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{3x}}}}=x$

1.80. $\left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2012}+\left(1+x-\sqrt{1-x^2}\right)^{2012}=2^{2013}$

1.81. $6(x-1)\sqrt{x+1}+\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{x-1}+3\right)=x\left(x^2+2\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.82. $13\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\sqrt{x^2+4}+9\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\sqrt{x^2+4}=0$

1.83. $(x-1)^2-\frac{x+1}{x-3}\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}=4$

1.84. $\left(x-\frac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x-3x^2-3}\ge 0$

1.85. $(2x+1)^2-2.\frac{x+2}{x-4}.\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}=9$

1.86. $x-1+\sqrt[3]{\frac{7}{4}-x^3}=\sqrt{4x^2-4x-1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 5:

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dang Thanh Nam

Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Email : dangnamneu@gmail.com

Yahoo: changtraipkt

Mobile: 0976266202

Cùng với phương trình, bất phương trình vô tỷ thì hệ phương trình là bài toán luôn xuất hiện trong đề thi các năm

Thứ tự ưu tiên các hướng khi giải hệ phương trình

+ Các hệ mà 2 phương trình của hệ có dạng tương đương thì trừ 2 vế của hệ, hoặc cộng 2 vế của hệ sẽ được nhân tử chung.

+ Biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho, biến đổi rút ra một phương trình trong hệ là phương trình tích.

+ Các hệ có biệt thức $xy; x+y; (x+y)^2; x-y; x^2-y^2, \ldots$ *đặt* $u = x+y; v = xy$

+ Có các nhân tử chung ở các phương trình của hệ thì đặt ẩn phụ.

+ Thường thì Đề thi Đại Học cho đặt ẩn phụ nhưng ta không thể nhận thấy ngay được nên đặt cái gì. Vì vậy phải chia hoặc nhân với một biểu thức của biến nào đó(chẳng hạn như $x, y, x^2, x^3, xy, \ldots$ *) sau đó mới đặt ẩn phụ được.*

+ Hệ có một phương trình dạng là hàm bậc 2 của x *hoặc của* y*, giải phương trình này theo ẩn đó sẽ rút ra* x *theo* y *(hoặc* y *theo* x*).*

+ Thay biểu thức ở một phương trình vào phương trình còn lại.

+ Biến đổi các phương trình trong hệ rùi dung phương pháp hàm số.

+ Đánh giá nhờ vào điều kiện có nghiệm của hệ, các bất đẳng thức.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2+y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$$xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \Leftrightarrow xy(x+y)^2 - 2x^2y^2 + 2 = (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1) - 2(xy-1)(xy+1) = 0 \Leftrightarrow (xy-1)((x+y)^2 - 2(xy+1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{array}\right.$$

(i). Với $xy = 1$, thay vào (1) ta được: $5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2xy(x+y) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 = 0 \Leftrightarrow y(x-y)^2 = 0$, nhưng do $xy = 1$ nên $x = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$

(ii). Với $x^2 + y^2 = 2$, thay vào (1) ta được: $5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - (x^2+y^2)(x+y) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = y \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình (1) ta suy ra các nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \\ y = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \end{cases}; \begin{cases} x = -2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \\ y = -\sqrt{\dfrac{2}{5}} \end{cases}$$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 = 5(2x - y)\sqrt{xy} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải:

Điều kiện: $xy \geq 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Hệ tương đương với $\begin{cases} x+y=2 \\ (2x-y)^2+4xy-5(2x-y)\sqrt{xy}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \left(2x-y-\sqrt{xy}\right)\left(2x-y-4\sqrt{xy}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y-\sqrt{xy}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y-4\sqrt{xy}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2=\sqrt{2x-x^2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2=4\sqrt{2x-x^2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=\dfrac{22+8\sqrt{6}}{25}, y=\dfrac{22-8\sqrt{6}}{25} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1,1);\left(\dfrac{22+8\sqrt{6}}{25},\dfrac{22-8\sqrt{6}}{25}\right)$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x^2+y\right)(x+y)+x(2x+1)=7-2y \\ x(4x+1)=7-3y \end{cases}$

Lời giải:

$$\begin{cases} 2x^3+2x^2y+xy+y^2+2x^2+x=7-2y \\ 4x^2+x=7-3y \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được phương trình

$$2x^3+2x^2y+xy+y^2-2x^2=y \Leftrightarrow 2x^2(x+y)+y(x+y)-\left(2x^2+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2+y\right)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2x^2 \\ y=1-x \end{array}\right.$$

Đến đây xét từng trường hợp ta suy ra nghiệm của hệ

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x+y=3 \\ 4x^3+12x^2+9x=-y^3+6y+5 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} xy - x + y = 3 \\ (x+y+1)(2x+2-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1 - x \\ xy - x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 - 2x \\ xy - x + y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1 - x \\ x(-1-x) - x - 1 - x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 - 2x \\ x(-2-2x) - x - 2 - 2x = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1 - x \\ x(-1-x) - x - 1 - x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 - 2x \\ x(-2-2x) - x - 2 - 2x = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{4} \\ y = \dfrac{2 \mp 2\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x, y) = \left(\dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{4}, \dfrac{2 \mp 2\sqrt{5}}{4} \right)$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4x = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x(x^2 - 16) = y(y^2 - 4) \\ y^2 = 4 + 5x^2 \end{cases}$$

Bình phương hai vế phương trình thứ nhất của hệ ta được

$x^2(x^2 - 16)^2 = y^2(y^2 - 4)^2$ và thay $y^2 = 4 + 5x^2$ vào ta được

$x^2(x^2 - 16)^2 = 25x^4(4 + 5x^2)^2 \Leftrightarrow 4x^2(x^2 - 1)(31x^2 + 64) = 0$

- Với $x = 0$ ta được $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$
- Với $x^2 = 1$ hệ trở thành $\begin{cases} -15x = 5y \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(0, \pm 2); (-1, 3); (1, -3)$

Cách khác: Xem phương pháp đồng bậc

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3 \\ 2y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện $x>0, y\neq 0$.

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2x} \\ 1-\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2y} \\ 2=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2y} \end{cases} \quad (*)$$

Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{4}{x^2+y^2}=\frac{9}{4x^2}-\frac{1}{4y^2} \Leftrightarrow 9y^4+8x^2y^2-x^4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(9y^2-x^2\right)\left(y^2+x^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2=9y^2 \Leftrightarrow x=\pm 3y$$

Từ đây thay vào phương trình (*) ta được nghiệm của hệ là $\left(x,y\right)=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} & (1) \\ \sqrt{x-\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1) của hệ ta suy ra: $x-2y-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0$ (*)

Ta đặt $t=\sqrt{x-2y}$, khi đó phương trình (*) trở thành: $t^2-yt-6y^2=0$, phương trình này có biệt thức $\Delta=25y^2$, do đó $\left[\begin{array}{l} t=3y \\ t=-2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x-2y}=-2y \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(i). Với $\sqrt{x-2y}=3y$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y\\ \sqrt{x-\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$$

(ii). Với $\sqrt{x-2y}=-2y$ ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y}=-2y\\ \sqrt{x-\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$$

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}16x^3y^3-9y^3=(2xy-y)(4xy^2+3)\\ 4x^2y^2-2xy^2+y^2=3\end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ đã cho, khi đó ta chia hai vế của phương trình thứ nhất cho y^3 và chia cả hai vế của phương trình thứ hai cho y^2, khi đó hệ trở thành :

$$\begin{cases}16x^3-9=(2x-1)\left(4x+\dfrac{3}{y^2}\right) & (1)\\ 4x^2-2x+1=\dfrac{3}{y^2} & (2)\end{cases}$$

Thế $\dfrac{3}{y^2}$ từ phương trình (2) vào phương trình (1), ta được :

$16x^3-9=(2x-1)(4x+4x^2-2x+1)\Leftrightarrow 16x^3-9=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$\Leftrightarrow 16x^3-9=8x^3-1\Leftrightarrow x=1$, thay vào phương trình (2) ta suy ra $\dfrac{3}{y^2}=3\Leftrightarrow y=\pm 1$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1,-1);(1,1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1 \\ xy+x+1=x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ, từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$y+1=\dfrac{x^2-1}{x}$ ta thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(x+\frac{x^2-1}{x}\right)=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \text{ do } x\neq 0.$$

❖ Với $x=1 \Rightarrow y=0$.

❖ Với $x=-2 \Rightarrow y=-\dfrac{5}{2}$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1;0);\left(-2;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+xy(2x+y)=5xy \\ x+y+xy(3x-y)=4xy \end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0, y=0$ là một nghiệm của hệ.

Với $x=0, y\neq 0$ hoặc $x\neq 0, y=0$ không là nghiệm của hệ.

Ta xét $xy\neq 0$, khi đó chia theo vế cả hai phương trình trong hệ cho xy thì hệ trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2x+y=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+3x-y=4 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta suy ra : $2y-x=1 \Rightarrow x=2y-1$ ta thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$2y-1+y+y(2y-1)(5y-3)=4y(2y-1) \Leftrightarrow 10y^3-19y^2+10y-1=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow (y-1)\left(10y^2-9y+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{20} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1;\ y=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{10};\ y=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{20} \end{array}\right.$$

Bài 10. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x \ge y \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\left(\sqrt{x+y}-1\right)\left(\sqrt{x-y}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x-y}=1 \end{array}\right.$

(i). Với $\sqrt{x+y}=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;\ y=1 \\ x=1;\ y=0 \end{array}\right.$

(ii). Với $\sqrt{x-y}=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} \sqrt{x-y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1;\ y=0$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(0;1)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=\dfrac{-5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=\dfrac{-5}{4} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y+1)=\dfrac{-5}{4} & (1) \\ (x^2+y)^2+xy=\dfrac{-5}{4} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được :

$$(x^2+y)(1-(x^2+y))+xy(x^2+y)=0 \Leftrightarrow (x^2+y)(xy+1-(x^2+y))=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y=0 \\ xy+1-(x^2+y)=0 \end{array}\right.$$

+ Với $x^2+y=0 \Rightarrow y=-x^2 \Rightarrow HPT \Leftrightarrow x.(-x^2)=\frac{-5}{4} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \Rightarrow y=-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}$

+ Với $xy+1-(x^2+y)=0 \Leftrightarrow x^2+y=xy+1 \Rightarrow HPT \Leftrightarrow \begin{cases} xy+1+xy(xy+2)=\frac{-5}{4} \\ (xy+1)^2+xy=\frac{-5}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (xy)^2+3xy+\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow xy=\frac{-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} xy=\frac{-3}{2} \\ x^2+y=\frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x,y)=\left(1,-\frac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}},-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$ **Bài 12.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Điều kiện $x\neq 0$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+1-\frac{3}{x}=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{x}-1 \\ (\frac{3}{x}-1)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{x}-1 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{x}-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{-3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x,y)=(1,1);\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 13. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x(y-9)+\sqrt{y-1}+1=0 & (1) \\ y(18x^2+1)=3x+22+(xy+1)^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $y \geq 1$

Khi đó từ (1) ta suy ra: $\sqrt{y-1}+1=0=x(y-9) \Rightarrow 81x^2+x^2y^2-18x^2y-y-2\sqrt{y-1}=0$ (3)

và (2) tương đương với: $18x^2y+y=3x+22+x^2y^2+2xy+1$

$\Leftrightarrow 18x^2y+y-3x-x^2y^2-2xy-22=0$ (4)

Lấy (3) cộng với (4) theo vế ta được:

$81x^2-3x-22-2(xy+\sqrt{y-1})=0$ (*)

Mặt khác từ (1) ta lại có: $xy+\sqrt{y-1}=9x-1$, thay vào (*) ta suy ra:

$81x^2-3x-22-2(9x-1)=0 \Leftrightarrow 81x^2-21x-20=0$

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ (*)

Khi đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)^2=(x-y)^3 \\ (x+y)^2=(x+y)+2 \end{cases} \overset{\text{ĐK (*)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (x-y)^2(x-y-1)=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x,y)=(1,1);(2,0)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 15. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(\sqrt{3x+4}-\sqrt{5-x})2^y = 2(\dfrac{19}{x}-3x+8)\\ y+\log_2 x = 1\end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $0 < x \le 5$

+ Từ (2) ta có $y = 1-\log_2 x = \log_2 \dfrac{2}{x} \Rightarrow 2^y = \dfrac{2}{x}$, thay vào phương trình (1) ta được phương trình:

$\sqrt{3x+4}-\sqrt{5-x} = 19-3x^2+8x$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+4}-4)+(1-\sqrt{5-x}) = 16-3x^2+8x$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-12}{\sqrt{3x+4}+4}+\dfrac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} = -(x-4)(3x+4)$

$\Leftrightarrow (x-4)(\dfrac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-x}}+3x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x-4 = 0\ (x>0) \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = -1$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (4;-1)$

Bài 16. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^4+2x^3y+x^2y^2 = 2x+9 & (1)\\ x^2+2xy = 6(x+1) & (2)\end{cases} (x,y\in\mathbb{R})\quad (*)$$

Lời giải:

+ Thay $2xy = 6x+6-x^2$ ở (2) vào phương trình (1), ta được

$x^4+x^2(6x+6-x^2)+(\dfrac{6x+6-x^2}{2})^2 = 2x+9$

$\Leftrightarrow 4x^2(6x+6)+(6x+6-x^2)^2 = 4(2x+9)$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2(6x+6)+(6x+6)^2 = 4(2x+9)$

$\Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+12x^2+48x+64) = 0$

$\Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-4\end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Với $x = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 9 \\ 0 = 6 \end{cases} \Rightarrow VN$

+ Với $x = -4 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = \dfrac{17}{4} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(-4, \dfrac{17}{4}\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases} (*)$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ x + y + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ 3 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{xy + 4 + \sqrt{xy}} = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ 4(xy + 4 + \sqrt{xy}) = (11 - \sqrt{xy})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ 3xy + 26\sqrt{xy} - 105 = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (3, 3)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y & (1) \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Nhận thấy $y=0$, không là nghiệm của hệ, do đó ta chia cả 2 vế của (1) cho y; chia cả 2 vế của (2) cho y^2.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7 \\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})+\dfrac{x}{y}=7 \\ (x+\dfrac{1}{y})^2-\dfrac{x}{y}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})=7-\dfrac{x}{y} \\ (7-\dfrac{x}{y})^2-\dfrac{x}{y}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})=7-\dfrac{x}{y} \\ (\dfrac{x}{y})^2-15\dfrac{x}{y}+36=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})=7-\dfrac{x}{y} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=12 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=12 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x,y)=(12,1);\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x>0; y\ge 3$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{y-3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\frac{y-3}{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \end{array}\right.$$

(i). Với $y=3$, khi đó $2\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow x=-3$ loại.

(ii). Với $\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=8$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 8)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y = 3x - xy \\ \left(x^2 + y\right)^2 + x^2y - 5x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 3x - xy \\ \left(3x - xy\right)^2 + x^2y - 5x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 3x - xy \\ x^2\left(y^2 - 5y + 4\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4 \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x; y) = (0; 0); (1; 1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3 + 5y^3 - 2xy = 6 \\ 2x^3 + 3y^3 + 3xy = 8 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ tương đương với $\begin{cases} 3x^3 + 5y^3 = 2xy + 6 \\ 2x^3 + 3y^3 = -3xy + 8 \end{cases}$

Lúc này coi đây là hệ với hai ẩn là $x^3; y^3$ từ đó suy ra hệ tương đương với

$\begin{cases} x^3 = 22 - 21xy \\ y^3 = 13xy - 12 \end{cases}$ nhận thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn hệ nên nhân hai vế của hệ với nhau ta được

$$(xy)^3 = (22 - 21xy)(13xy - 12) \Leftrightarrow (xy - 1)\left((xy)^2 + 274xy - 264\right) = 0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -137 \pm \sqrt{19033} \end{array}\right.$$

- Với $xy = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

- Với $xy = -137 \pm \sqrt{19033} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{22 - 21\left(-137 \pm \sqrt{19033}\right)} \\ y = \sqrt[3]{13 - 12\left(-137 \pm \sqrt{19033}\right)} \end{cases}$

Vậy hệ có ba nghiệm

Bình luận: Dạng bài toán này có cách giải rất hay và hết sức cơ bản, ta có thể sáng tạo nhiều bài toán tương tự

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x^2 y + y + 1 \\ (x + y - 1)\sqrt{y + 1} = 10 \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 2y + 1 \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất của hệ

$$x^3 + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x^2 y + y + 1 \Leftrightarrow x^2 (x - y) + \sqrt{x^2 + 2y + 1} - (y + 1) = 0$$

Nếu cả $y + 1 = \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được $x^3 = -x^2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow x + y - 1 = -3 < 0$ không thỏa mãn vậy chúng không đồng thời bằng 0, khi đó biến đổi phương trình như sau

$$\Leftrightarrow x^2 (x - y) + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 2y + 1} + (y + 1)} = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2y + 1} + (y + 1)}\right) = 0$$ nhưng do

$(x + y - 1)\sqrt{y - 1} = 10 \Rightarrow x + y > 1$ nên $x^2 + \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2y + 1} + (y + 1)} > 0$

Vậy $y = x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$(2x-1)\sqrt{x-1}=10 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-1)(2x-1)^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-3)\left(4x^2+4x+17\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, với $x\neq 0$ nhân vào hai vế của phương trình thứ hai với x ta được hệ

$$\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ xy+x^2y^2=-6x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^3y^3+\dfrac{19}{6}\left(xy+x^2y^2\right)=0 \\ 1+x^3y^3=19x^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy+\dfrac{2}{3}\right)\left(xy+\dfrac{3}{2}\right)(xy+1)=0 \\ 1+x^3y^3=19x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};-2\right);\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+2x+2y-16=0 \\ (x+y)(xy+4)=32 \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x(x+y)+2(x+y)=16 \\ (x+y)(xy+4)=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+2)=16 \\ (x+y)(xy+4)=32 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{x+y} = \dfrac{32}{xy+4} \\ (x+y)(x+2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2x \\ (x+y)(x+2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 6 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm $(x;y) = (0;8);(2;2);(-6;2)$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 12y^3 + xy(7x+16y) = 0 \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{x+2y} = 2 \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$

Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} (x-3y)(x-2y)^2 = 0 \\ 2x + 2\sqrt{x^2 - 4y^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 2y \end{array} \right. \\ x + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y \\ \sqrt{5y^2} = 2 - 3y \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y \\ 2y = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 1 \\ x = \dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; y = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y) = (2;1);\left(\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^2 + 2y + x + 1} + 4y + x + 1 = 0 \\ 2(y^3 + 2y - x - 1) = y^2(x+1) \end{cases}$

Lời giải:

Viết phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2\left(y^3+2y-x-1\right)=y^2\left(x+1\right)\Leftrightarrow 2\left(y^3+2y\right)=y^2\left(x+1\right)+2\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2y\left(y^2+2\right)=\left(x+1\right)\left(y^2+2\right)\Leftrightarrow 2y=x+1$, thay vào phương trình đầu tiên của hệ ta được phương trình

$x\sqrt{x^2+2x+2}+3\left(x+1\right)=0$

Nếu $x\geq 0$ thì vế trái của phương trình luôn lớn hơn 0, vậy nên phương trình có nghiệm nếu $x<0$, nên chia cả hai vế của phương trình cho $x^2, x<0$ ta được

$$-\sqrt{1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\geq 0\\1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1+\sqrt{10}}{9}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\\frac{1+\sqrt{10}}{9}x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\left(3-\sqrt{13+4\sqrt{10}}\right)\left(\sqrt{10}-1\right)}{6}$$

Suy ra $y=\dfrac{\left(3-\sqrt{13+4\sqrt{10}}\right)\left(\sqrt{10}-1\right)+6}{12}$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=xy\left(x+3\right)\\x^2\left(1-4xy^2\right)=y^2\left(1+8x^2\right)\end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}xy\left(x+3\right)\geq 0\\x^2-y^2=x^2y^2\left(x+3\right)^2\\x^2-y^2=4x^3y^2+8x^2y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy\left(x+3\right)\geq 0\\x^2y^2\left(x+3\right)^2=4x^3y^2+8x^2y^2\\x^2-y^2=x^2y^2\left(x+3\right)^2\end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+3) \geq 0 \\ x^2y^2(x+1)^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = x^2y^2(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ x^2 - y^2 = x^2y^2(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = -1; y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y) = (0;0); \left(-1; \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $y \geq -1$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ

$$2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \Leftrightarrow 2x^2(y - x^2) + (y - x^2)(x^4 + x^2y + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y)(2x^2 + x^4 + x^2y + y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ 2x^2 + x^4 + x^2y + y^2 = x^2(y+2) + x^4 + y^2 = 0 \end{array}\right.$$

- Nếu $x^2(y+2) + x^4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ thử lại nghiệm thấy không thỏa mãn.
- Nếu $y = x^2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \ (*)$$

Đến đây ta đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ khi đó phương trình (*) trở thành

$$t^2 + 2x = (x+2)t \Leftrightarrow (t-x)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = 2 \\ \sqrt{x^2+1} = x \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \text{ suy ra } y = 3$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y) = (\pm\sqrt{3};3)$

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2(1-x) + x + 2y\sqrt{x} = 0 \end{cases}$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$

Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - y - 1} \\ y^2(1 - x) + x + 2y\sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x} + 1 = x - y - 1 \\ y^2 + 2y\sqrt{x} + x - xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} - 2 \\ \left(y + \sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x}y\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} - 2 \\ \left[\begin{array}{l} y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} \\ y + \sqrt{x} = -y\sqrt{x} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x} - 2 = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \\ 3\sqrt{x} - 2 = -2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \end{array}\right. \\ y = 2\sqrt{x} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4; y = 2 \\ x = \dfrac{1}{4}; y = -1 \\ x = \dfrac{\sqrt{\sqrt{17} - 1}}{2}; y = \sqrt{2\sqrt{17} - 2} - 2 \end{array}\right.$$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2\sqrt{y + 1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y + 1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $y \geq -1$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{4} \\ x^3 - 4x^2.\dfrac{x - 3}{2} - 9x - 8.\dfrac{x^2 - 6x + 5}{4} + 52 + 4x.\dfrac{x^2 - 6x + 5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{4} \\ -x^2 + 4x + 21 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(7;3)$

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+\dfrac{3xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}\left(\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{6x+y}\right)=\sqrt[3]{3x-5y+5} \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $x+y>0$

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^3+y^3+\frac{3xy}{x+y}=1 \Leftrightarrow (x+y)\left(x^3+y^3\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left(x^2+y^2-xy\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left((x+y)^2-3xy\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-(x+y)+3xy\left(1-(x+y)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)^3+(x+y)^2+x+y-1-3xy(x+y+1)\right)=0\ (*)$$

Nhưng do $(x+y)^3+(x+y)^2+x+y-1-3xy(x+y+1)$

$$=x^3+y^3+x^2+y^2-xy+x+y=(x+y)\left(x^2+y^2-xy+1\right)+x^2+y^2-xy>0$$

Với $x+y>0$

Vậy nên phương trình (*) tương đương với $x+y-1=0$; lúc này thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{5x+1}=2\sqrt[3]{x}$ (phương trình này được giải bằng cách lập phương hai vế; chi tiết xem ***Chuyên đề phương trình, bất phương trình vô tỷ***).

Giải phương trình trên có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{5} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=-\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{6}{5} \\ x=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=(0;1);\left(\frac{-1}{5};\frac{6}{5}\right);\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36\end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{12}{x+y}\\xy=-15\end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy(x+y)^2-2(x+y)+3=0\\xy(x-y)^2-4x^2y^2+(x+y)^2=0\end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+3y=y^3+4x\\5(1+3y^2)=4(3x^2+2)\end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(x^2+1)+xy(2x-3y)+y(x-2)=2y^2(1+5y)\\(x^2+17y+12)^2=4(x+y+7)(x^2+3x+8y+5)\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+2y^3-2xy=1\\2x^3+y^3+2xy=5\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3+x^2y^2-xy=2\\-x^3+y^3+xy=1\end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+\sqrt{x^2+1+3y-y^2}=x^2(y-1)+\sqrt{y}\\(x+y-1)\sqrt{y+1}=10\end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y+1)(2x+2y-1)=9\\(3x+y-1)\sqrt{y+1}=10\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(y^3+2y-x-1\right)=y^2\left(x+1\right) \\ \sqrt{x^2+2y-2}+\sqrt{2y-x^2}=x^2-2y+3 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2\left(2y+5\right)+6y+7=0 \\ 5\sqrt{x^2+4y+5}=11x-2y-7 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy-6}=12-y^2 \\ x^2y-x^3-3x+3y-xy^2-x^2y=0 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_3\left(3x-y\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+y\right)=1+\log_3 2 \\ x^2+y^2-2x+3y-35=0 \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x}\right)x=y-x \\ x+\dfrac{x}{\sqrt{y^2-1}}=-\dfrac{35}{12} \end{cases}$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=3 \\ 6\dfrac{\left(x+y\right)^2}{xy}+x^2+y^2-5\left(x+y\right)=2\dfrac{x^2}{y}+3\dfrac{y^2}{x}+6 \end{cases}$

HỆ ĐỐI XỨNG

(i). Hệ đối xứng loại 1.

Hệ đối xứng loại 1 là hệ mà vai trò của x, y trong hệ là như nhau.

Nếu $\left(x_0, y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0, x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

<u>Phương pháp:</u>

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ với điều kiện $S^2\geq 4P$.

(ii). Hệ đối xứng loại 2.

Hệ đối xứng loại 2 là hệ mà khi ta đổi vai trò x, y cho nhau thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Nếu $\left(x_0, y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0, x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

<u>Phương pháp:</u>

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(x-y\right)f\left(x,y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ f\left(x,y\right)=0 \end{array}\right.$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $S=x+y, P=xy$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S+2P=2 \\ S\left(S^2-3P\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{2-S}{2} \\ S\left(S^2-\dfrac{6-3S}{2}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(2,0\right);\left(0,2\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ \left(x+y\right)\left(8+xy\right)=2 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $S=x+y, P=xy$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S\left(S^2-3P\right)=19 \\ S\left(8+P\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=2-8S \\ S^3-3\left(2-8S\right)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(3,-2\right);\left(-2,3\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2(x+y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

Lời giải :

Đặt $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$ khi đó hệ trở thành : $\begin{cases} 2(a^3+b^3) = 3(a^2b + b^2a) \\ a+b = 6 \end{cases}$

Đặt $S = a+b, P = ab$ khi đó hệ trên trở thành

$$\begin{cases} 2S(S^2-3P) = 3SP \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 6 \\ ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \Rightarrow x = 64 \\ b = 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $(x,y) = (64,8);(8,64)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases}$

Đặt $S = x+y, P = xy$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S+P+1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = (S-3)^2, S \geq 3 \\ 2\sqrt{S + (S-3)^2 + 1} = 14 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 5. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}3x^3 = x^2 + 2y^2\\ 3y^3 = y^2 + 2x^2\end{cases}$$

Lời giải :

Từ hai phương trình của hệ suy ra hệ có nghiệm nếu $x, y \geq 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$3\left(x^3 - y^3\right) = -\left(x^2 - y^2\right) \Leftrightarrow (x-y)\left(3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y\\ 3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y = 0\end{array}\right.$$

(i). Nếu $x = y$, khi đó ta được hệ $\begin{cases}x = y\\ 3x^3 = x^2+2y^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y = 0\\ x = y = 1\end{array}\right.$

(ii). Nếu $3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y = 0$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y = 0\\ 3x^3 = x^2+2y^2\end{cases}$$

Từ $x \geq 0$ suy ra để hệ có nghiệm thì phương trình thứ nhất phải có nghiệm $y \leq 0$. Do đó $x = y = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ này.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x, y) = (0,0);(1,1)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^2 + \sqrt{x} = 2y\\ y^2 + \sqrt{y} = 2x\end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x, y \geq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \sqrt{t}$ trên đoạn $[0;+\infty)$. Ta có $f'(t) = 2t + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \in (0;+\infty)$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Hệ phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} 2y = f(x) \\ 2x = f(y) \end{cases} \Rightarrow 2(y-x) = f(x) - f(y)$$

Do $f(t)$ là hàm đồng biến nên, nếu $y \ge x \Rightarrow f(x) \le f(y)$ và nếu $y \le x \Rightarrow f(x) \ge f(y)$. Vậy $x = y$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + \sqrt{x} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x} - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x, y) = (1,1); \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right) \end{cases}$$

Lời giải :

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$(x-y)(x+y-2xy+7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{array} \right.$$

(i). Nếu $x = y$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} x = y \\ xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = 3 \end{array} \right.$

(ii). Nếu $x + y - 2xy + 7 = 0$, khi đó cộng theo vế hai phương trinh của hệ ta được

$x^2 + y^2 - 5(x+y) + 12 = 0$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5(x+y) + 12 = 0 \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 5(x+y) - 2xy + 12 = 0 \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases}$

Đặt $S = x + y, P = xy; S^2 \ge 4P$ khi đó hệ trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} S^2 - 5S - 2P + 12 = 0 \\ S - 2P + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 6S + 5 = 0 \\ P = \dfrac{S+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 1, P = 4 \\ S = 5, P = 6 \end{array}\right.$$

Chỉ nhận nghiệm $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 3 \\ x = 3; y = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(2,2);(3,3);(3,2);(2,3)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

Hệ đối xứng loại 1 :

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 41 \\ xy\left(x^2 + y^2\right) = 10 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 4 \\ \left(x^2 + y^2\right)\left(x^3 + y^3\right) = 280 \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \\ \left(x + y\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 12 \\ x\left(x - 1\right)y\left(y - 1\right) = 36 \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(x + y\right)\left(1 + xy\right) = 18xy \\ \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + x^2y^2\right) = 208x^2y^2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=15 \\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)(x^2+y^2)=85 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=12 \\ (xy)^2+xy=6 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{x^2+y^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Hệ đối xứng loại 2 :

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3y=\dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x=\dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3=3x+8y \\ y^3=3y+8x \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2} \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+7x=y^3+7y \\ x^2+y^2=x+y+2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x^2+21}=\sqrt{y-1}+y^2\\ \sqrt{y^2+21}=\sqrt{x-1}+x^2\end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3\\ \sqrt{y^2+3}+2\sqrt{y}-\sqrt{x}=3\end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2\\ y-y^2x-2y^2=-2\end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^3-3xy^2-x+1=x^2-2xy-y^2\\ y^3-3x^2y+y+1=y^2-2xy-x^2\end{cases}$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Phương pháp :

Xét xem hệ phương trình có nghiệm $x=0$ hoặc $y=0$ hay không, xét $x\neq 0$, khi đó đặt $y=tx$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}2y\left(x^2-y^2\right)=3x\\ x\left(x^2+y^2\right)=10y\end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0, y=0$ là một nghiệm của hệ. Xét $x\neq 0$, đặt $y=tx$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}2tx\left(x^2-t^2x^2\right)=3x\\ x\left(x^2+t^2x^2\right)=10tx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2tx^2\left(1-t^2\right)=3\\ x^2\left(1+t^2\right)=10t\end{cases}$$

Từ đó suy ra $2t\left(1-t^2\right).10t=3.\left(1+t^2\right)\Leftrightarrow 20t^2-20t^4=3+3t^2$

$$\Leftrightarrow 20t^4-17t^2+3=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{5};t=\frac{1}{4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(i). Với $t = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ x^2\left(1+t^2\right) = 10t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{5\sqrt{85}}{17} \\ y = \pm\frac{3\sqrt{85}}{17} \end{cases}$

(ii). Với $t = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ x^2\left(1+t^2\right) = 10t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{2\sqrt{170}}{17} \\ y = \pm\frac{\sqrt{170}}{34} \end{cases}$

Vậy hệ có năm nghiệm là $(x,y) = (0,0), \left(\pm\frac{5\sqrt{85}}{17}, \pm\frac{3\sqrt{85}}{17}\right); \left(\pm\frac{2\sqrt{170}}{17}, \pm\frac{\sqrt{170}}{34}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ, đặt $x = ty$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} y^2\left(t^2 - 3t + 1\right) = -1 \\ y^2\left(t^2 + 2t - 2\right) = 1 \end{cases}$$

Chia theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$\frac{t^2 - 3t + 1}{t^2 + 2t - 2} = -1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

(i). Với $t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2\left(t^2 - 3t + 1\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$

(ii). Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ y^2\left(t^2 - 3t + 1\right) = -1 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm

Bài 3. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 3y - x \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $y \neq 0$, đặt $x = ty$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} y^2\left(2t^2 - t + 1\right) = y(3-t) \\ y^2\left(t^2 + t - 3\right) = y(t-2) \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\left(2t^2 - t + 1\right)(t-2) = (3-t)\left(t^2 + t - 3\right) \Leftrightarrow 3t^3 - 7t^2 - 3t + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \left(t^2 - 1\right)(3t - 7) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1, t = \dfrac{7}{3}$

Thế ngược trở lại hệ đã cho tìm được các nghiệm là $(x,y) = (0,0),(1,1),(-1,1),\left(\dfrac{7}{43},\dfrac{3}{43}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2 + 1\right) \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, đặt $y = tx$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3\left(1 - t^3\right) = (2t + 8)x \\ x^2\left(1 - 3t^2\right) = 6 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ đây suy ra $6\left(1-t^3\right)=\left(2t+8\right)\left(1-3t^2\right)\Leftrightarrow 12t^2-t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{3}\\ t=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

(i). Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x\\ x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 3\\ y=\pm 1\end{cases}$

(ii). Với $t=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{x}{4}\\ x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{4\sqrt{78}}{13}\\ y=\pm\dfrac{\sqrt{78}}{13}\end{cases}$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(3,1\right);\left(-3,-1\right);\left(\dfrac{4\sqrt{78}}{13},-\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(\dfrac{-4\sqrt{78}}{13},\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1. Giải phương trình: $\begin{cases}3x^2-2xy=16\\ x^2-3xy-2y^2=8\end{cases}$

Bài 2. Giải phương trình: $\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9\\ 2x^2-13xy+15y^2=0\end{cases}$

Bài 3. Giải phương trình: $\begin{cases}2x+y=\dfrac{3}{x^2}\\ 2y+x=\dfrac{3}{y^2}\end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2y+y^2x=30\\ x^3+y^3=35\end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+y^3-xy^2=1\\ 4x^4+y^4=4x+y\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\\ \left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + 3y = y^3 + 4x \\ 5\left(1 + 3y^2\right) = 4\left(3x^2 + 2\right) \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2y - 2y = 0 \\ x + 3y - 2y^3 = 0 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = 2 \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

DẠNG TOÁN CỘNG, TRỪ THEO VẾ CÁC PHƯƠNG TRÌNH TRONG HỆ

(PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH)

- Đôi khi việc giải hệ phương trình, đơn giản nhất chỉ là cộng hoặc trừ theo vế 2 phương trình của hệ.

- Nâng cao hơn thì nhân vào hai vế của một phương trình với một biểu thức rồi cộng vào phương trình còn lại của hệ.

Các cách trên sẽ đưa về một phương trình tích(hay là các hằng đẳng thức) và ta dễ dàng tìm ra mối liên hệ giữa x và y.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phân tích:

Lấy $(1)+\alpha.(2)$ ta được:

$$x^3-y^3-35+\alpha\left(2x^2+3y^2-4x+9y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+2\alpha x^2-4\alpha x-y^3+3\alpha y^2+9\alpha y-35=0$$

Ta sẽ chọn các số $a,b,\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho:

$$x^3+2\alpha x^2-4\alpha x-y^3+3\alpha y^2+9\alpha y-35=\left(x+a\right)^3-\left(y+b\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-b^3=-35\\3a=2\alpha\\3a^2=-4\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\a=-2\\b=3\end{cases}$$

Vậy đi đến lời giải cho bài toán này như sau:

Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình(2) ta được: $\left(x-2\right)^3=\left(3+y\right)^3\Rightarrow x=y+5$ (3)

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được : $y^2+5y+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\Rightarrow x=3\\y=-3\Rightarrow x=2\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(3,-2\right),\left(2,-3\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x^3+y^3=91 & (1)\\4x^2+3y^2=16x+9y & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$\left(x-4\right)^3=\left(3-y\right)^3\Rightarrow x=7-y\quad(3)$.

Thay (3) vào phương trình (2) của hệ ta được

$$y^2-7y+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=4\Rightarrow x=3\\y=3\Rightarrow x=4\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(3,4\right),\left(4,3\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) cộng theo vế với 3 lần phương trình (2) ta được

$$x^3 + xy^2 + 3x^2 - 24xy + 3y^2 = -49 + 24y - 51x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2 + 3(y-4)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1; y = -4 \\ x = -1; y = 4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(-1,-4),(-1,4)$

Bài 4. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1) & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy 25 lần phương trình (1) cộng theo vế với 50 lần phương trình (2) ta được

$$25(3x+y)^2 + 50(3x+y) - 119 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + y = \dfrac{7}{5} \\ 3x + y = -\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$$

Giải ra ta được nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25},\dfrac{2}{25}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 & (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) cộng theo vế với 2 lần phương trình (2) ta được:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=-1 \\ x+2y=-2 \end{array}\right.$$

+ Với $x+2y=-1$, thay vào (2) ta được: $y^2-2y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{2} \Rightarrow x=-3-2\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \Rightarrow x=-3+2\sqrt{2} \end{array}\right.$

+ Với $x+2y=-2$, thay vào (2) ta được:

$$y^2-y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=-3+\sqrt{5} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=-3-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 nghiệm

$$\left(-3\pm\sqrt{2};1\mp\sqrt{2}\right),\left(-3\pm\sqrt{5};\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x^2y+2y^3+35=0 & (1) \\ 5(x^2+y^2)+2xy+5x+13y=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) ta được

$$(6y+15)x^2+3(2y+5)x+2y^3+15y^2+39y+35=0$$

$$\Leftrightarrow (2y+5)\left(3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}; y=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2y^2=xy+2y & (1) \\ 2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y & (2) \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

+ Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của hệ.

+ Xét $y \neq 0$, nhân vào 2 vế của (1) với $-y$ sau đó cộng theo vế với phương trình (2) ta được

$2x^3 - 2y^3 - 4x^2y + 4xy^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (3)$.

Thay (3) vào phương trình (1) ta được: $2y^2 = 2y \Leftrightarrow y = 1 \quad (y \neq 0) \Rightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(0;0),(1;1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 & (1) \\ x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cộng theo vế 2 phương trình của hệ ta được: $(x+y-2)(2x+y-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{array}\right.$

❖ Với $x + y - 2 = 0$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x^2 + x(2-x) + (2-x)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

❖ Với $2x + y - 3 = 0$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-2x \\ x^2 + x(3-2x) + (3-2x)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y) = (1;1);(2;-1)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 3y - 16 \\ 2y^2 + 3xy = 2x + 12 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3\left(x^2 - 4y^2\right) - 4\left(x - 8y\right) \end{cases}$

Gợi ý: Nhân vào hai vế phương trình thứ hai với (-8) rùi cộng theo vế với phương trình thứ nhất của hệ.

DẠNG TOÁN BIẾN ĐỔI VÀ ĐẶT ẨN PHỤ

Áp dụng với hệ có số hạng chung xuất hiện ở các phương trình trong hệ.

Thường thì các bài toán biến đổi đơn giản ta đặt ẩn phụ với $\begin{cases} u = x \pm y \\ v = xy \end{cases}$

Chẳng hạn:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 = 4 \\ \left(x + y\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + y\right)\left(\left(x + y\right)^2 - 2xy\right) = 4 \\ \left(x + y\right)\left(\left(x + y\right)^2 - xy\right) = 6 \end{cases}$$

Ta đặt ẩn phụ như sau: $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ khi đó được hệ mới: $\begin{cases} u\left(u^2 - 2v\right) = 4 \\ u\left(u^2 - v\right) = 6 \end{cases}$ đơn giản hơn nhiều.

Đôi khi chia(hoặc nhân) hai vế của phương trình trong hệ với một biểu thức nào đó của biến(thường đơn giản là $x, x^2, x^3; y, y^2, y^3$) lúc này sẽ được hệ mới có thể đặt ẩn phụ được.

Chẳng hạn:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Mới đầu nhìn hệ này chưa có gì đặc biệt tuy nhiên, với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình đầu cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ mới như sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0 \end{cases}$$

Đến đây ta đặt $u=x+\dfrac{y}{x};v=y-3$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v-2=0 \end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y & (1) \\ x^2-y^2=3 & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $x^2+y^2-xy=\dfrac{1}{4}\left((x+y)^2+3(x-y)^2\right)$.

Vậy đặt $a=x+y;b=x-y$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} a^2+3b^2=4a \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^4-12b+9=0 \\ a=\dfrac{3}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(b-1)^2(b^2+2b+3)=0 \\ a=\dfrac{3}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(2;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện $y\ge -1$, khi đó hệ tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2+2x+6=y^2+2y+1 \\ \frac{1}{4}\left((x-y)^2+3(x+y)^2\right)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2(x-y)+5=0 \\ \frac{1}{4}\left((x-y)^2+3(x+y)^2\right)=28 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y;b=x-y$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} ab+2b+5=0 \\ 3a^2+b^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

+ Với $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của hệ là $(1;2),(-3;2)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)+\dfrac{1}{(x-y)^2}=2(10-xy) \\ 2x+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $x \neq y$ (*)

+ Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{1}{(x-y)^2}=20 \\ x+y+x-y+\dfrac{1}{x-y}=5 \end{cases}$

Đặt $u=x+y;\quad v=x-y+\dfrac{1}{x-y}(|v|\geq 2)$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} 2u^2+v^2-2=20 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ 3v^2-20v+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \vee \begin{cases} u=\dfrac{1}{3} \\ v=\dfrac{14}{3} \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + \dfrac{1}{x - y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ x - y + \dfrac{1}{x - y} = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{3} \\ y = \dfrac{-3 \mp \sqrt{10}}{3} \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(2;1), \left(\dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{3}; \dfrac{-3 \mp \sqrt{10}}{3} \right)$

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2 \\ x^2 y + 2x^2 + 6y = 23 \end{cases}$$

Lời giải:

+ Đặt $t = y^2$, khi đó hệ trở thành

$\begin{cases} t - 4y = 2 - x^4 - 4x^2 \\ \left(x^2 + 6\right) y = 23 - 2x^2 \end{cases}$, ta coi x là hằng số khi đó ta được hệ đơn giản với 2 ẩn là t, y.

Ta có: $D = x^2 + 6; D_t = -x^6 - 10x^4 - 30x^2 + 104; D_y = 23 - 2x^2$

Ta có $t = y^2 \Rightarrow \dfrac{D_t}{D} = \left(\dfrac{D_y}{D} \right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + 6\right)\left(-x^6 - 10x^4 - 30x^2 + 104\right) = \left(23 - 2x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(x^4 + 16x^2 + 95) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{array} \right.$

Bài 5.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 & (1) \\ 45x^2 y + 75x = 6y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Nhận thấy $x=0 \vee y=0$, không là nghiệm của hệ, khi đó chia 2 vế của phương trình (1) cho y^3; và chia 2 vế của phương trình (2) cho y^2 ta được

$$\begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ 45\dfrac{x^2}{y} + 75\dfrac{x}{y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ 15\dfrac{x}{y}(3x + \dfrac{5}{y}) = 6 \end{cases}$$

Đặt $u = 3x; v = \dfrac{5}{y}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 9 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \\ \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 5 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ \dfrac{5}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm là $\left(\dfrac{2}{3};5\right), \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(1+x) + \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y}+1\right) = 4 \\ x^3y^3 + y^2x^2 + xy + 1 = 4y^3 \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện $y \neq 0$.

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x + x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{y^3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right) + \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2 - 2\dfrac{x}{y} = 4 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3 - 2\dfrac{x}{y}\left(x+\dfrac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $u = x + \frac{1}{y}; v = \frac{x}{y}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u + u^2 - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v = 4 - u - u^2 \\ u^3 + u(4 - u - u^2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2v = 4 - u - u^2 \\ (u-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3(3y + 55) = 64 \\ xy(y^2 + 3y + 3) = 12 + 51x \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $x = 0$, không là nghiệm của hệ, khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} 3y + 55 = \frac{64}{x^3} \\ y^3 + 3y^2 + 3y = \frac{12}{x} + 51 \end{cases}$$

Đặt $t = \frac{4}{x} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 55 = t^3 (1) \\ y^3 + 3y^2 + 3y = 3t + 51 (2) \end{cases}$, cộng theo vế của (1) và (2) ta được

$$y^3 + 3y^3 + 6y + 55 = t^3 + 3t + 51 \Leftrightarrow (y+1)^3 + 3(y+1) = t^3 + 3t + 51$$

$\Leftrightarrow f(t) = f(y+1)$, trong đó $f(t) = t^3 + 3t + 51 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \Rightarrow f \uparrow$

Vậy $f(t) = f(y+1)$ khi và chỉ khi $t = y + 1$, khi đó thay $y = t - 1$ vào (1) ta được

$$t^3 - 3t - 52 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2 + 4t + 13) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

Vậy hệ có nghiệm $(1;3)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 & (1) \\ x(y^3-2)=3 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Nhận thấy $x=0$, không là nghiệm của hệ, khi đó chia 2 vế của (1) cho x^3 và chia 2 vế của (2) cho x, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2+3y=\dfrac{1}{x^3} \\ y^3-2=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3y=\dfrac{1}{x^3} \\ 2+\dfrac{3}{x}=y^3 \end{cases}, \text{ đặt } \begin{cases} u=y \\ v=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=y=1 \\ u=y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y & (1) \\ (x^2+1)(x+y-2)=y & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Nhận thấy $y=0$, không là nghiệm của hệ, nên ta chia cả 2 vế của (1) và (2) cho y ta được

$$+HPT \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+(x+y)=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(x+y-2)=1 \end{cases}, \text{ đặt } u=\dfrac{x^2+1}{y}; v=x+y-2 \Rightarrow \text{hệ trở thành}$$

$$\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Bài 10. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2xy+y^2+1=8y \end{cases}$$

Lời giải:

Chia 2 vế của (2) cho y ta được

$+HPT \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\frac{1}{y}=8 \end{cases}$, đặt $u=\sqrt{x+\frac{1}{y}}; v=\sqrt{x+y-3} \Rightarrow$ hệ trở thành

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^2+v^2+3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2; v=1 \\ u=1; v=2 \end{array}\right.$$

$$+\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}=2 \\ \sqrt{x+y-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5\mp\sqrt{2} \\ y=-1\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$+\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}=1 \\ \sqrt{x+y-3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\mp\sqrt{10} \\ y=3\pm\sqrt{10} \end{cases}$$

Bài 11. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-2011)\left(2011+2012\sqrt[3]{y-2013}\right)=1 \\ \sqrt[3]{x-2010}\,(y-4024)=2012 \end{cases}$$

Lời giải :

Đặt $u=\sqrt[3]{x-2010}, v=\sqrt[3]{y-2013}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} \left(u^3-1\right)(2011-2012v)=1 \\ u\left(v^3-2011\right)=2012 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$2011u^3+2012u^3v+2011u-uv^3-2012v=0 \Leftrightarrow u=v=0 \Leftrightarrow x=2010, y=2013$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (2010; 2013)$

Bài 12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{2x}{3y} = \dfrac{x + \sqrt{y}}{2x^2 + y} \\ 2\left(2x + \sqrt{y}\right) = \sqrt{2x + 6} - y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải :

Điều kiện : $-3 \le x \ne 0; y > 0$.

Khi đó ta đặt $\sqrt{y} = kx \Leftrightarrow \begin{cases} kx > 0 \\ y = k^2x^2 \end{cases}$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành :

$$\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3k^2x^2} = \frac{x + kx}{2x^2 + k^2x^2} \Leftrightarrow (k-2)^2\left(k^2 + k + 1\right) = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Với $k = 2$ ta có $\sqrt{y} = 2x \Rightarrow x > 0$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4x^2 + 8x = \sqrt{2x + 6} \Leftrightarrow (2x + 2)^2 - 4 = \sqrt{2x + 6}$$

Đặt $\sqrt{2x + 6} = 2t + 2$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2x + 6 = (2t + 2)^2 \\ (2x + 2)^2 - 4 = 2t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = (2t + 2)^2 \\ (x - t)(1 + 2x + 2t + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4} \\ y = \dfrac{13 - 3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}, \dfrac{13 - 3\sqrt{17}}{2}\right)$.

Bài 13. Giải hê phương trình :

$$\begin{cases} (x + y - 3)^3 = 4y^3\left(x^2y^2 + xy + \dfrac{45}{4}\right) \\ x + 4y - 3 = 2xy^2 \end{cases}$$

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

❖ Xét $y=0 \Rightarrow \begin{cases}(x-3)^3=0\\ x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow (3,0)$ là một nghiệm của hệ.

❖ Xét $y \neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho y^3 và chia hai vế của hệ cho y, ta được:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}+1-\dfrac{3}{y}\right)^3=4\left(x^2y^2+xy+\dfrac{45}{4}\right)\\ \dfrac{x}{y}+4-\dfrac{3}{y}=2xy\end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{x}{y}+1-\dfrac{3}{y}, v=xy$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}u^3=4\left(v^2+v+\dfrac{45}{4}\right)\\ u+3=2v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3=4\left(\left(\dfrac{u+3}{2}\right)^2+\dfrac{u+3}{2}+\dfrac{45}{4}\right)\\ v=\dfrac{u+3}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u^3-u^2-8u-60=0\\ v=\dfrac{u+3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u-5)\left(u^2+4u+12\right)=0\\ v=\dfrac{u+3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=5\\ v=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{y}+1-\dfrac{3}{y}=5\\ xy=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-1}{2}\left(-3\mp\sqrt{105}\right)\\ y=\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}\end{cases}$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=(3;0);\left(\dfrac{-1}{2}\left(-3\mp\sqrt{105}\right);\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}\right)$

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+\sqrt{y-1}=6\\ \sqrt{x^2+2x+y}+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}=29\end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện: $y \geq 1$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $a=\sqrt{y-1}\Rightarrow y=a^2+1$, khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}x+a=6\\ \sqrt{x^2+2x+a^2+1}+2(x+1)a=29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1+a=7\\ \sqrt{(x+1)^2+a^2}+2(x+1)a=29\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^2+a^2+2(x+1)a=49 & (1)\\ \sqrt{(x+1)^2+a^2}+2(x+1)a=29 & (2)\end{cases}$$

Lấy phương trình (1) trừ theo vế cho phương trình (2), ta được:

$$(x+1)^2+a^2-\sqrt{(x+1)^2+a^2}-20=0\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+a^2}=5>0\Rightarrow(x+1)^2+a^2=25$$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases}x+a=6\\ (x+1)^2+a^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;a=4\\ x=3;a=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;y=17\\ x=3;y=10\end{array}\right.$$

Thử lại thấy hai nghiệm này đều thỏa mãn

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(2,17);(3,10)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+xy-3x+y=0\\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0\end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình

Xét $x\neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình thứ nhất cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ

$$\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}+y-3=0\\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}+y-3=0\\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0\end{cases}$$ đến đây ta đặt $u=x+\dfrac{y}{x};v=y-3$

Khi đó hệ trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-u \\ u^2-u-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ v=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=-1 \\ y-3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2 \\ y-3=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ y^3x-9y^2+x^2y+x=0 \end{cases}$

Lời giải:

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho y và hai vế của phương trình thứ hai của hệ cho y^2, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{x+y^2}{y}+\dfrac{xy+1}{y}=6 \\ \dfrac{x+y^2}{y}.\dfrac{xy+1}{y}=9 \end{cases}$$

Vậy ta đặt $u=\dfrac{x+y^2}{y};v=\dfrac{xy+1}{y}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} u+v=6 \\ uv=9 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y^2}{y}=3 \\ \dfrac{xy+1}{y}=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-y^2 \\ x=3-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^3=0 \\ x=3-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 17. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2-4y^2+y+1=0\\ xy+x^2y^2+1-\left(4-x^3\right)y^3=0\end{cases}$

Lời giải :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2+y+1=4y^2\\ xy+x^2y^2+1+x^3y^3=4y^3\end{cases}$$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế của phương trình thứ nhất cho y^2 và chia hai vế của phương trình thứ hai cho y^3

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{xy+1}{y}=4\\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{xy+1}{y}\right)=4\end{cases}$$

Ta đặt $\begin{cases}u=x^2+\dfrac{1}{y^2}\\ v=\dfrac{xy+1}{y}\end{cases}$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases}u+v=4\\ uv=4\end{cases}\Leftrightarrow u=v=2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}=2\\ x^2+\dfrac{1}{y^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2\left(y+1\right)=6y-2\\ x^4y^2+2x^2y^2+y\left(x^2+1\right)=12y^2-1\end{cases}$

Lời giải :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases}x^2\left(y+1\right)+2=6y\\ \left(x^4y^2+2x^2y^2+y^2\right)+y\left(x^2+1\right)=13y^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left(y+1\right)+2=6y & (1)\\ y^2\left(x^2+1\right)^2+y\left(x^2+1\right)+1=13y^2 & (2)\end{cases}$$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế phương trình (1) cho y và chia hai vế phương trình (2) cho y^2, ta được hệ mới

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2}{y}=6 \\ \left(x^2+1\right)^2+\dfrac{x^2+1}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2+1}{y}=7 \\ \left(x^2+1\right)^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x^2+1}{y}=13 \end{cases}$$

Đến đây ta đặt $S=x^2+1+\dfrac{1}{y};P=\dfrac{x^2+1}{y};\quad \left(S^2-4P\ge 0\right)$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S+P=7 \\ S^2-P=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=7-S \\ S^2+S-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=4 \\ P=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+1=3 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+1=1 \\ \dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=\left(\pm\sqrt{2};1\right);\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(1+2x^3y\right)=3x^6 \\ 1+4x^6y^2=5x^6 \end{cases}$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ, với $x\ne 0$ ta chia hai vế của các phương trình trong hệ cho x^6 ta được hệ

$\begin{cases} \dfrac{y}{x^3}\left(\dfrac{1}{x^3}+2y\right)=3 \\ \dfrac{1}{x^6}+4y^2=5 \end{cases}$ đến đây ta đặt $a=\dfrac{y}{x^3};b=\dfrac{1}{x^3}+2y$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} ab=3 \\ b^2-4a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b^2-5}{4} \\ b\left(\dfrac{b^2-5}{4}\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x^3}=1 \\ \dfrac{1}{x^3}+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}, y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\frac{1}{2}\right)$

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ (x+y-1)^2-\dfrac{4}{(x-y)^2}-3=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải :

Diều kiện : $x\neq y$

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(x-y)=6 \\ (x+y-1)^2-\dfrac{4}{(x-y)^2}-3=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y;b=x-y$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} ab=6 \\ (a-1)^2-\dfrac{4}{b^2}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{6}{a} \\ a^2-2a+1-\dfrac{a^2}{9}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{6}{a} \\ 8a^2-18a-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3;b=2 \\ a=-\dfrac{3}{4},b=-8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{4} \\ x+y=-8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2},y=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{35}{8},y=\dfrac{29}{8} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{35}{8};\frac{29}{8}\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1.1. $\begin{cases} x^2+1+y^2+xy=4y \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x^3(6+21y)=1 \\ x\left(y^3-6\right)=21 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy} \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19(x-y)^2 \\ x^2-xy+y^2=7(x-y) \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x^3(2+3y)=8 \\ x\left(y^3-2\right)=6 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \log_x(\log_x y)=\log_y(\log_y x) \\ \lg^2 x+\lg^2 y=8 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x+y^2-y\sqrt{x+3y^2}=0 \\ 2y^2-3y-x+1+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{21}}=0 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x^4-2x=y^4-y \\ \left(x^2-y^2\right)^3=3 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.13. $\begin{cases} 8\left(x^2+y^2\right)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 4x^2y+y^2+2=7xy \\ 2x^2+2y^2+3y^3=6xy^2 \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} (x-y)^2+x+y=y^2 \\ x^4-4x^2y+3x^2=-y^2 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} xy(xy+2y+1)+y=6y^2-1 \\ xy+x=4y-2 \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} \dfrac{y(xy-1)}{y^2+1}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x(xy-1)}{y^2+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=4y-1 \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} y^3=x^3\left(9-x^3\right) \\ x^2y+y^2=6x \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+y-1)^3}+\dfrac{1}{(x-y+1)^3}=2 \\ x^2+2x=y^2 \end{cases}$

ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BẬC

<u>Phương pháp :</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ hai phương trình của hệ biến đổi và đưa về phương trình đồng bậc với biến x, y Giải phương trình x biểu diễn theo y rồi thế lại hệ bân đầu.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 2\left(4\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) & (1) \\ x - 3y = 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ý tưởng:

Nhận thấy vế trái của (1) có bậc là $\frac{3}{2}$, còn vế phải của (1) có bậc là $\frac{1}{2}$.Do đó nhân vào 2 vế của (1) với đa thức có bậc là 1 thì ta được đa thức đồng bậc. Lúc này ta có thể rút x theo y.

+ Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$

Thay $2 = \frac{1}{3}(x - 3y)$ từ (2) vào phương trình (1) ta được: $3(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) = (x - 3y)(4\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x + \sqrt{xy} - 12y\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + 4\sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9y \Rightarrow x = 9; y = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(9;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 & (1) \\ 4x^4 + y^4 - 4x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Thay $1 = x^3 + y^3 - xy^2$ ở (1) vào (2) ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$4x^4+y^4-(4x+y)(x^3+y^3-xy^2)=0$

$\Leftrightarrow 3xy^3+x^3y-4x^2y^2=0 \Leftrightarrow xy(3y^2+x^2-4xy)=0$

$\Leftrightarrow xy(y-x)(3y-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ y=x \\ x=3y \end{array}\right.$

+ Với $xy=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

+ Với $y=x$, thay vào (1) ta được: $x=y=1$.

+ Với $x=3y$, thay vào (1) ta được: $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm là

$(0;1),(1;0),(1;1),\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3\left(y^2+1\right) \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^3-y^3=8x+2y \\ x^2-3y^2=6 \end{cases}$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình, đặt $y=tx$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3\left(1-t^3\right)=\left(2t+8\right)x \\ x^2\left(1-3t^2\right)=6 \end{cases}$$

Từ đây suy ra $6\left(1-t^3\right)=\left(2t+8\right)\left(1-3t^2\right) \Leftrightarrow 12t^2-t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3} \\ t=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(i). Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ x^2\left(1-3t^2\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(ii). Với $t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{4} \\ x^2\left(1-3t^2\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \pm\frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(x,y) = (3,1);(-3;-1);\left(\frac{4\sqrt{78}}{13};-\frac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(\frac{-4\sqrt{78}}{13};\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+3y = x^2+3xy+y^2 \\ x^2+2y^2 = x+2y \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được

$\left(2x+3y\right)\left(x^2+2y^2\right) = \left(x+2y\right)\left(x^2+3xy+y^2\right) \Leftrightarrow x^3+4y^3-3xy^2-2x^2y = 0$

$\left(x-y\right)\left(x^2-xy-4y^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}y \end{array}\right.$

(i). Với $y = x$ thay vào phương trình thứ hai suy ra $3x^2 = 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=1 \end{array}\right.$

(ii). Với $x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}y$, khi đó ta có hệ

$\begin{cases} x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}y \\ x^2+2y^2 = x+2y \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^2y^2+x^2+2x = 2 \\ 2x^2y-x^2y^2+2xy = 1 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2y^2 + x^2 + 2x = 2 \\ 2x^2y - x^2y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(xy)^2 + (x+1)^2 = 3 \\ 2xy(x+1) - (xy)^2 = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = x + 1; v = xy$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ 2uv - v^2 = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = tv$, khi đó hệ trên trở thành :

$$\begin{cases} v^2(t^2+2) = 3 \\ v^2(2t-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 2 = 3(2t-1) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = 1 \end{array} \right.$$

(i). Với $t = 5 \Rightarrow \begin{cases} u = 5v \\ u^2 + 2v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \frac{5}{3}, v = \frac{1}{3} \\ u = -\frac{5}{3}, v = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \frac{5}{3} \\ xy = \frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = -\frac{5}{3} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}, y = -2 \\ x = -\frac{8}{3}, y = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

(ii). Với $t = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + 2v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = 1 \\ u = v = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = xy = 1 \\ x + 1 = xy = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -2, y = \frac{1}{2}$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x, y) = \left(-2, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{2}{3}, -2\right); \left(-\frac{8}{3}, \frac{1}{8}\right)$.

Phương pháp :

Hệ có nghiệm (a, b) thì đặt $\begin{cases} x = a + u \\ y = b + v \end{cases}$ ta đưa về hệ đơn giản hơn, thường là hệ đẳng cấp ta đã biết cách giải :

Sau đây xem xét một bài toán nữa đưa được về hệ đẳng cấp

Bài 6. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2 \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải :

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2 \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 + x(y+1) = 3 \\ 2x^2 - (y+1)^2 = 1 \end{cases}$$

Khi đó đặt $u = y + 1$ và hệ trở thành

$\begin{cases} x^2 + u^2 + xu = 3 \\ 2x^2 - u^2 = 1 \end{cases}$ đây là hệ đẳng cấp.□

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

Lời giải :

Hệ này có nghiệm $(1,1)$

Đặt $\begin{cases} x = a + 1 \\ y = b + 1 \end{cases}$ khi đó hệ trở thành : $\begin{cases} a^2 + b^2 + ab = -3(a+b) \\ a^2 + 2ab = 3(a+b) \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ, nên đặt $y = tx$

Khi đó hệ trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^3\left(1+3t^2\right)=-49 \\ x^2\left(1-8t+t^2\right)=x\left(8t-7\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8t-7}{1-8t+t^2}=\dfrac{8t-7}{\left(t^2-16\right)-\left(8t-17\right)}=\dfrac{b}{a-b} \\ x^3=\dfrac{-49}{1+3t^2}=\dfrac{-49}{3\left(t^2-16\right)+49}=\dfrac{-49}{49+4a} \end{cases}$$

Trong đó $a=t^2-16, b=8t-17$

Từ đó suy ra : $\dfrac{b^3}{\left(a-b\right)^3}=\dfrac{-49}{49+3a} \Leftrightarrow 49\left(b^3+\left(a-b\right)^3\right)+3a=0$

$\Leftrightarrow a\left(49b^2-49b\left(a-b\right)+49\left(a-b\right)^2+3\right)=0 \Leftrightarrow a=0$

Suy ra $t^2=16 \Rightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=\pm 4$.

Vậy hệ có hai nghiệm $\left(x,y\right)=\left(-1,4\right);\left(-1,-4\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

1.1. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5\left(1+x^2\right) \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x^3+3y=y^3+4x \\ 5\left(1+3y^2\right)=4\left(3x^2+2\right) \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

DẠNG TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}(2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=7-2y & (1)\\ x(4x+1)=7-3y & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Thế $7=4x^2+x+3y$ ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được

$(2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=4x^2+x+3y-2y$

$\Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y)=2x^2+y \Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y-1=0\\ y+2x^2=0\end{array}\right.$

+ Với $x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x$, thay vào (2) ta được: $2x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y=\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{4}$.

+ Với $y+2x^2=0$, thay vào (2) ta được $2x^2-x+7=0 \Rightarrow VN$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là : $(x,y)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4},\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{4}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+4 & (1)\\ 3x^2+y^2+8y+4=8x & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Thế $4=8x-3x^2-y^2-8y$ ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được

$(x-y)(x^2+2x-15)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-5\\ x=3\end{array}\right.$

+ Với $x=y$, thay vào phương trình (2) ta được: $4+2x^2=0 \Rightarrow VN$

+ Với $x=-5$, thay vào (2) ta được: $y^2+8y+119=0 \Rightarrow VN$

+ Với $x=3$, thay vào (2) ta được: $y^2+8y+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=-7\end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy nghiệm của hệ là: $(x,y)=(3;-1),(3;-7)$

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 & (1) \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $y=-1$, không là nghiệm của hệ, xét $y\neq -1$ khi đó rút $x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}$ từ (1) thế vào (2), ta được:

$$\left(\frac{6y-2}{y+1}\right)^2 y^2+2y^2\frac{6y-2}{y+1}+y\left(\frac{6y-2}{y+1}+1\right)=12y^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y-1)(9y+1)y^2}{(y+1)^2}=y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ (9y+1)y^2=(y+1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 nghiệm là

$(x,y)=\left(0;\dfrac{1}{3}\right),\left(\pm\sqrt{2};1\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^2-xy+1=0 & (1) \\ x^2+y^2+2x+2y+1=0 & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Thay $y^2+1=xy$ từ phương trình (1) vào phương trình (2), ta được

$$x^2+xy+2(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

- Với $y=-x$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x^2+x^2+1=0 \\ x^2+x^2+1=0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

- Với $x=-2$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} y^2+2y+1=0 \\ y^2+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;-1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = x+7y+1 & (1) \\ x^2y^2 = 10y^2-1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1), rút $x=\dfrac{7y+1}{y-1}$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\left(\frac{7y+1}{y-1}\right)^2 y^2 = 10y^2-1 \Leftrightarrow 39y^4+34y^3-8y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=3 \\ y=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(3,-1);\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+xy+2x+2y=16 \\ (x+y)(4+xy)=32 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(x+2)=16 & (1) \\ (x+y)(4+xy)=32 & (2) \end{cases}$$

+ Nhận thấy $x=-2$ không là nghiệm của hệ, nên chia 2 vế của (1) cho $x+2$ ta được

$x+y=\dfrac{16}{x+2}$, thay vào (2) ta được:

$$\frac{16(4+xy)}{x+2}=32 \Leftrightarrow 4+xy=2(x+2) \Leftrightarrow x(y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=8 \\ y=2 \Rightarrow x=2 \vee x=-6 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(x,y)=(0;8),(2;2),(2;-6)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20\\ x^2+(2y+1)^2=2\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Hệ tương đương với

$$\begin{cases}x^2-2x+1+6xy-6y+4y^2=20 & (1)\\ x^2+4y^2+4y+1=2 & (2)\end{cases}$$

Thay $x^2+4y^2=1-4y$ từ phương trình (2) vào phương trình (1), ta được

$-2x+1+1-4y+6xy-6y=20\Rightarrow y=\dfrac{x+9}{3x-5}$, thay vào (2) ta được

$$x^2+\left(\frac{2x+18}{3x-5}+1\right)^2=2\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=-1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(-1,-1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+2xy^2=5 & (1)\\ 2x^2+xy+y^2=4x+y & (2)\end{cases}$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, với $x\neq 0$ rút $y^2=\dfrac{5-x^3}{2x}$ từ phương trình (1)

và thay vào phương trình (2) ta được

$$2x^2+xy+\frac{5-x^3}{2x}=4x+y\Leftrightarrow 3x^3-8x^2+5+2x^2y-2xy=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-5x-5)+2xy(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-5x-5+2xy)=0$$

- Với $x=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases}1+2y^2=5\\ 2+y+y^2=4+y\end{cases}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$

- Với $3x^2-5x-5+2xy$ khi đó thay vào phương trình (2) ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2x^2 - \frac{1}{2}\left(3x^2 - 5x - 5\right) + y^2 = 4x + y$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 + 2y^2 = 8x + 2y \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 2y\left(1 - y\right)$ (*)

Vế trái $x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

Vế phải $2y\left(1 - y\right) \leq \frac{1}{2}\left(y + 1 - y\right)^2 = \frac{1}{2}$

Từ đây suy ra phương trình (*) vô nghiệm

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(1; \sqrt{2}\right); \left(1; -\sqrt{2}\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 13y^3 - 3x^2 = 1 \\ y^2 + 4y + 1 = 5x + 4xy \end{cases} \quad \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Lời giải:

Nhận thấy $y = -\frac{5}{4}$ không thỏa mãn hệ, nên với $y \neq -\frac{5}{4}$ rút $x = \frac{y^2 + 4y + 1}{4 + 5y}$ từ phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất ta được

$13y^3 - 3\left(\frac{y^2 + 4y + 1}{4 + 5y}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(y - 2\right)^3\left(y + 2\right)\left(13y^2 + 16y + 7\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(1; -2\right); \left(1; 2\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} 16x^3y^3 - 9y^3 = \left(2xy - y\right)\left(4xy^2 + 3\right) \\ 4x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.2. $\begin{cases} 16x^2y^2 - 17y^2 = -1 \\ 4xy + 2x - 7y = -1 \end{cases}$

DẠNG TOÁN DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

<u>Để ý điều kiện nghiệm của hệ, Sử dụng phương pháp hàm số, sử dụng bất đẳng thức:</u>

Biến đổi một phương trình của hệ thành $f(x) = f(y)$ (*)

Nếu chứng minh được hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm trên miền nghiệm của hệ thì phương trình (*) tương đương với: $y = x$, lúc này ta thế ngược lại hệ.

Bất đẳng thức xem **<u>chuyên đề giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và phương pháp chứng minh bất đẳng thức</u>**

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5xy - 7x + 3y + 2 = 0 & (1) \\ \dfrac{x-y}{3} = \ln(x+2) - \ln(y+2) & (2) \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện: $x > -2; y > -2$

Coi (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là y, ta được

$(1) \Leftrightarrow y^2 + (3-5x)y + 6x^2 - 7x + 2 = 0$, ta có

$$\Delta_y = (x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{5x - 3 + x - 1}{2} = 3x - 2 \\ y = \dfrac{5x - 3 - (x-1)}{2} = 2x - 1 \end{array}\right.$$

Từ phương trình (2) ta có:

$x - 3\ln(x+2) = y - 3\ln(y+2) \Leftrightarrow f(x) = f(y); f(t) = t - 3\ln(t+2), t > -2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $f'(t)=\frac{t-1}{t+2}\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(i). Nhận thấy với $x=y=1$ là nghiệm của hệ.

(ii). Với $x<1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y-x=2x-2<0\\y-x=x-1<0\end{array}\right.\Rightarrow y<x,\forall x<1\Rightarrow f(y)>f(x)\Rightarrow VN$.

(iii). Với $x>1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y-x=2(x-1)>0\\y-x=x-1>0\end{array}\right.\Rightarrow y>x>1,\forall x>1\Rightarrow f(y)>f(x)\Rightarrow VN$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1,1)$.

Bài 2.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+21}-\sqrt{y}=(y+1)^2 & (1)\\ \sqrt{(y+1)^2+21}-\sqrt{x}=(x+1)^2 & (2)\end{cases}$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x,y\geq 0$

Nhận thấy $x=0\vee y=0$, không là nghiệm của hệ nên $x>0;y>0$.

Trừ theo vế 2 phương trình với nhau ta được

$$\sqrt{(x+1)^2+21}+\sqrt{x}+(x+1)^2=\sqrt{(y+1)^2+21}+\sqrt{y}+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(y);f(t)=\sqrt{(t+1)^2+21}+\sqrt{t}+(t+1)^2,t>0$$

Ta có $f'(t)=2(t+1)+\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2+21}}>0,\forall t>0$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

Suy ra $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$, khi đó thay vào (1) ta được phương trình

$$(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}=0(*),$$

xét hàm số $g(x)=(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}$. Ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 21}} > 2 - \frac{x+1}{|x+1|} > 0$. Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến.

Mặt khác ta có, $g(1) = 0$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Suy ra nghiệm $x = y = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Bài 3.

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) = \frac{7}{2}xy & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Coi (2) là phương trình bậc 2 với ẩn là x thì điều kiện phương trình này có nghiệm là

$\Delta_x = (y-7)^2 - 4y^2 + 24y - 56 \ge 0 \Leftrightarrow y \in \left[1, \frac{7}{3}\right]$.

Cũng coi (2) là phương trình bậc 2 với ẩn là y thì điều kiện để phương trình này có nghiệm là

$\Delta_y = (x-6)^2 - 4x^2 + 28x - 56 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$

+ Nhận thấy $x = 0 \vee y = 0$, không là nghiệm của hệ . Ta chia 2 vế của (1) cho xy

$\Rightarrow \left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow f(x)f(y) = \frac{7}{2}$

Ta có $f'(t) = 2 + \frac{1}{t^2} > 0 \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow f(x)f(y) \ge f(2)f(1) = \frac{7}{2}$

Vậy $x = 2; y = 1$. Thay vào (2) thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2;1)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^3 + 3xy^2 = 7y \\ y^3 + 6x^2y = 7 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ phương trình thứ hai của hệ , ta có $y^3+6x^2y=7 \Leftrightarrow y\left(y^2+6x^2\right)=7 \Rightarrow y>0$.

Khi đó từ phương trình thứ nhất ta suy ra $x>0$. Vậy $x,y>0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$(x-y)\left(4x^2-2xy+y^2\right)=7(y-1)(*)$

Xét phương trình (*).

(i). Với $0<y<1$ thì $VP<0 \Rightarrow VT<0 \Leftrightarrow x<y \Rightarrow 0<x<y<1$, từ đó ta suy ra $y^3+6x^2y<7$, hệ vô nghiệm.

(ii). Với $y>1 \Rightarrow 7(y-1)>0 \Rightarrow VP>0 \Rightarrow VT>0 \Rightarrow x>y>1$, từ đó suy ra $y^3+6x^2y>7$, hệ vô nghiệm.

Vậy với $y=1$, ta có nghiệm $x=1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1,1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2=y^3-3y^2-2 \\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)=(x-2012)^2 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<y<1 \\ 0<x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>1 \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right.$

Đặt $y=u-1$, khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$x^3-3x^2=u^3-3u^2$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên miền xác định, ta có $f'(t)=3t^2-3$ nên đơn điệu trên miền xác định. Do đó $f(x)=f(u) \Leftrightarrow x=u \Leftrightarrow x=y+1$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta suy ra nghiệm $x=2012$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ 4^x+4=4x+4\sqrt{2y-2x+4} \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $y-x+2\geq 0$.

Đặt $t=x^2-2y$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$4+3^{t+2}=\left(4+9^t\right).7^{2-t}\Leftrightarrow \frac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{4+3^{2t}}{7^{2t}}\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4+3^x}{7^x}=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^x+\left(\dfrac{3}{7}\right)^x$ là hàm nghịch biến.

Do đó $f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow 2t=t+2\Leftrightarrow t=2$

Từ đó suy ra $x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4^x+4=4x+4\sqrt{x^2-2-2x+4}\Leftrightarrow 4^{x-1}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow 4^s=s+\sqrt{s^2+1}$$

Trong đó $s=x-1$

Do $\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)=1\Rightarrow 4^{-s}=\sqrt{s^2+1}-s$

Từ đó ta suy ra : $4^s-4^{-s}-2s=0(*)$

Ta xét hàm số $f(x)=4^x-4^{-x}-2x$ ta có $f'(x)=\ln 4\left(4^x+4^{-x}\right)-2\geq 2\ln 4-2>0$. Do đó hàm số đơn điệu tăng. Mặt khác nhận thấy $f(0)=0$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $s=0$. Từ đây suy ra $x=1\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x+2x^2+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Do $\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1$ nên từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra

$$x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow f(x)=f(-y)$$

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ ta có $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>\frac{|x|+x}{\sqrt{1+x^2}}>0$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có phương trình

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{6x+2x^2+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{6x+2x^2+1}=3x\\ \sqrt{6x+2x^2+1}=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-1\\ x=\frac{3-\sqrt{11}}{2}\Rightarrow y=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1,-1);\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases}x\le\frac{3}{4}\\ y\le\frac{5}{2}\end{cases}$ (*), khi đó phương trình (1) tương đương với

$$(4x^2+1)x+\left(\frac{-(5-2y)-1}{2}\right)\sqrt{5-2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(4x^2+1)(2x)=((\sqrt{5-2y})^2+1)\sqrt{5-2y}$$

$$\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y});\ f(t)=t(t^2+1),\ f'(t)=3t^2+1>0$$

$$\Rightarrow f\uparrow\Rightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\ge0\Rightarrow y=\frac{5-4x^2}{2};x\ge0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Thay vào (2) ta được phương trình: $4x^2+(\frac{5-4x^2}{2})^2+2\sqrt{3-4x}=7(*)$

Xét hàm số $f(x)=4x^2+(\frac{5-4x^2}{2})^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên đoạn $\left[0;\frac{3}{4}\right]$

Ta có $f'(x)=-4x(3+4x^2)+\frac{-4}{\sqrt{3-4x}}<0,\forall 0\le x<\frac{3}{4}\Rightarrow f\downarrow\Rightarrow f(x)=0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Nhận thấy $f(\frac{1}{2})=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\log_3(2x+1)-\log_3(x-y)=\sqrt{4x^2+4x+2}-\sqrt{(x-y)^2+1}-3x^2+y^2-4x-2xy-1\\ \log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1}=1-\sqrt{2}\end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành

$$\sqrt{(2x+1)^2+1}-(2x+1)^2-\log_3(2x+1)=\sqrt{(x-y)^2+1}-(x-y)^2-\log_3(x-y)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t^2-\log_3 t$ với $t>0$, ta có

$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-2t-\frac{1}{t\ln 3}<0$ nên hàm số $f(t)$nghịch biến. Do đó phương trình đầu tiên

$f(2x+1)=f(x-y)\Leftrightarrow 2x+1=x-y\quad(*)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1},\forall x>0$

Ta có $f'(x)=4x\left(2-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)+\frac{1}{x\ln 3}>0$, nên hàm số đơn điệu tăng.

Mặt khác ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\sqrt{2}$. Suy ra $x=1-\sqrt{2}$ kết hợp với phương trình (*) ta có nghiệm $y=-\frac{3}{2}$.

Bài 10. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x, y \ge -\dfrac{1}{2}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$x^3+4x+\sqrt{2x+1}=y^3+4y+\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow f(x)=f(y)$

Xét hàm số $f(x)=x^3+4x+\sqrt{2x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có

$f'(x)=3x^2+4+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$, nên $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Vậy phương trình $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được phương trình :

$x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}=0$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$, nên hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Mặt khác nhận thấy $f(0)=0$. Vậy phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$, từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0,0)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{y^2-8y}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{y^2-8y+17} \\ y\left(x^2-1\right)-4x^2+3x-8+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x \ge 0, y \ge 4$.

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất thành :

$4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{(y-4)^2}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{(y-4)^2+1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(t)=4^{t^2-16}+3\sqrt{t}+\sqrt{t^2+1}$ trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=2t4^{t^2-16}\ln 4+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\left[0;+\infty\right)$. Nên hàm số $f(t)$đơn điệu tăng trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$. Vậy phương trình $f(x)=f(y-4)\Leftrightarrow x=y-4\Leftrightarrow y=x+4$ lúc này thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0(*)$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)$. Ta có

$f'(x)=3x^2+2+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}=3x^2+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}>0$, nên hàm số $f(x)$đơn điệu tăng trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Mặt khác nhận thấy $f(2)=0$, từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=2\Rightarrow y=6$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(2,6\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$$

Phương trình này có nghiệm nếu $xy\ge 0$. Nhận thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $xy>0$

Phương trình này có $VP\ge 2xy;VT=\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2+8}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{\left(y-1\right)^2+8}}\le xy+xy=2xy$

Dấu bằng xảy ra khi cà chỉ khi $x=y=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x,y)=(0,0);(1,1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y+1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x^2-2y-1\geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành :

$(x^2-2y)(x-y)=0$, so sánh với điều trên suy ra $x=y$, lúc này ta thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2$, phương trình này có nghiệm nếu

$\sqrt[3]{x^3-14}\leq x-2\Rightarrow x^2-2x-1\leq 0$. Kết hợp với điều kiện suy ra $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$, thử lại ta thấy nghiệm thỏa mãn.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=\left(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right);\left(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+2x=\dfrac{121}{9}-27^{\frac{x}{2}} \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \end{cases}$$

Lời giải :

Coi phương trình thứ hai là phương trình bậc hai ẩn y, khi đó phương trình này tương đương với :

$y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0$, phương trình này có nghiệm nếu

$\Delta_y=(x-4)^2-4\left(x^2-3x+4\right)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq\dfrac{4}{3}$.

Khi đó $x^2+2x+27^{\frac{x}{2}}\leq\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}+27^{\frac{2}{3}}=\dfrac{121}{9}$. Vậy dấu bằng xảy ra, suy ra $x=\dfrac{4}{3}\Rightarrow y=\dfrac{4}{3}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{5 - \frac{1}{x^2}} = 3 + y^2 \\ x + \frac{1}{x} = 2(3 - 2y) \end{cases}$$

Lời giải :

Nhân thêm 2 vào hai vế của phương trình thứ nhất sau đó cộng theo vế với phương trình thứ hai, ta được :

$$2\sqrt{5 - x^2} + x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{5 - \frac{1}{x^2}} = 2y^2 - 4y + 12$$

Sử dụng bất đẳng thức cauchy-shar ta có

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{5 - x^2} \le \sqrt{(1^2 + 2^2)(x^2 + 5 - x^2)} = 5 \\ \frac{1}{x} + 2\sqrt{5 - \frac{1}{x^2}} \le \sqrt{(1^2 + 2^2)\left(\frac{1}{x^2} + 5 - \frac{1}{x^2}\right)} = 5 \end{cases} \Rightarrow VT \le 10$$

Mặt khác lại có $VP = 2y^2 - 4y + 12 = 2(y - 1)^2 + 10 \ge 10$

Vậy $VT = VP = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^{y+1} = (y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2 + 18x - 20} + \frac{2x^2 - 9x + 6}{2x^2 - 9x + 8} = \sqrt{y+1} \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} -4x^2 + 18x - 20 \ge 0 \\ 2x^2 - 9x + 8 \ne 0 \\ y + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le \frac{5}{2} \\ y \ge -1 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $t=\sqrt{-4x^2+18x-20}=\sqrt{-4\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành : $t+1+\frac{4}{t^2+4}=\sqrt{y+1}$,

Xét hàm số $f(t)=t+1+\frac{4}{t^2+4}$, ta có $f'(t)=1-\frac{8t}{\left(t^2+4\right)^2}\ge\frac{t^4+7t^2+(t-4)^2}{\left(t^2+4\right)^2}>0$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f(t)\ge f(0)=2$. Từ đó suy ra ta phải có $\sqrt{y+1}\ge 2\Rightarrow y\ge 3$.

Từ phương trình thứ nhất của hê : Ta lấy logarit tự nhiên hai vế ta được

$(y+1)\ln x=x\ln(y+1)\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(y+1)}{y+1}$ (*)

Xét hàm số $g(u)=\frac{\ln u}{u}$, ta có $g'(u)=\frac{1-\ln u}{u^2}=0\Leftrightarrow u=e$

Suy ra hàm số tăng trong khoảng $(0;e)$, giảm trong khoảng $(e;+\infty)$

Vậy ta có : $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]\Rightarrow g(x)\ge g(2)=\frac{\ln 2}{2}$ và $y\in[3;+\infty)\Rightarrow g(y)\le g(3)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$

Từ đó suy ra phương trình (*) tương đương với : $x=2;y=3$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;3)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\log_2 x=2^{y+2}\\ 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0\end{cases}$$

<u>**Lời giải :**</u>

Điều kiện $x>0$, từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $y<0$

Từ phương trình thứ hai ta suy ra $16(x+1)=x^2y^2\left(4+y^2\right)\Leftrightarrow x^2y^4+4x^2y^2-16(x+1)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y^2, ta được $\Delta'_{y^2} = 4x^4 + 16x^2(x+1) = 4x^2(x+2)^2$, từ đó suy ra

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{-2x^2 + 2x(x+2)}{x^2} = \dfrac{4}{x} \\ y^2 = \dfrac{-2x^2 - 2x(x+2)}{x^2} = \dfrac{-4x^2 - 4x}{x^2} < 0 \end{array}\right.$$

Chỉ nhận nghiệm $y^2 = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{y^2}$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$\log_2 \frac{4}{y^2} = 2^{y+2} \Leftrightarrow 2 - \log_2 y^2 - 2^{y+2} = 0 \ (*)$$

Xét hàm số $f(y) = 2 - \log_2 y^2 - 2^{y+2}$ với $y < 0$

Ta có $f'(y) = -2^{y+2}\ln 2 - \dfrac{2}{y\ln 2} = \dfrac{-2}{y\ln 2}\left(1 - y(\ln 2)^2.2^{y+1}\right) > 0, \forall y \in (-\infty; 0)$

Vậy $f(y)$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $(-\infty; 0)$. Mặt khác lại có $f(-1) = 0 \Rightarrow y = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Từ đây suy ra $x = 4$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; -1)$

Bài 18. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + x + \log_2 \dfrac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x \ge 1, y \ge 1$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được biến đổi thành :

$$x^3 + x + \log_2 x = (2y)^3 + 2y + \log_2 2y$$

Ta xét hàm số $f(t) = t^3 + t + \log_2 t, t > 0$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 + \dfrac{1}{t\ln 2} > 0, t > 0$. Suy ra hàm số đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai ta được :

$$\sqrt{2y-1} - \sqrt{y-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = y - 2\sqrt{y-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{y-1} = 1 - y \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2}+\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2} \\ 3xy=x+y+1 \end{cases}$

Lời giải :

Ta có $(x+1)(y+1)=xy+x+y+1=3xy+xy=4xy$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge 2ab$, ta được

$$\frac{x^2}{(y+1)^2}+\frac{y^2}{(x+1)^2}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{(y+1)^2}.\frac{y^2}{(x+1)^2}}=\frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x^2}{(y+1)^2}=\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-1\pm 2x \\ x=-1\pm 2y \end{cases}$

Thế ngược lại phương trình thứ hai của hệ

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$

Lời giải :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x\left(x^3-y^3\right)+x^2y(x-y)-9(x-y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ (x-y)\left(x\left(x^2+xy+y^2\right)+x^2y-9\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x\left(x^2+xy+y^2\right)+x^2y-9=0 \end{cases}\text{ do } x\ne y$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x(x+y)^2=9 \end{cases}$$

Từ đây suy ra $x>0$ và $y>x>0$ và $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$x\left(\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x\right)^3-x^3\right)=7$, đặt $x=t^2$ ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$t^2\left(\frac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6=7\Leftrightarrow\left(t^3-3\right)^3+t^7+7t=0$$

Dễ thấy vế trái là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$, lại có $f(1)=0$

Vậy $x=1\Rightarrow y=2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=y-x\\16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x}\end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $x,y\ge-\frac{1}{2}$ khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases}\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}=y-x\\16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}+1\right)\\16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}\end{cases}$$

Từ đây suy ra $x,y>0$

Ta có $\sqrt[3]{4x^3+x}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4x\left(4x^2+1\right).2}\le\frac{3}{2}\left(4x+4x^2+1+2\right)=\frac{3}{2}\left(4x^2+4x+3\right)$

Từ đó suy ra $16x^5+5\le\frac{3}{2}\left(4x^2+4x+3\right)\Leftrightarrow2\left(2x^2+2x+1\right)(2x-1)^2\le0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Thử lại thấy $x=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn phương trình trên

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases}8y^3+(2x+y)6xy=6x^3+13\\x^3+5x+\left(x^3-2y+6\right)\sqrt{x^3-2y+1}=0\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x^3-2y+1\ge 0$

Đặt $t=\sqrt{x^3-2y+1}$ thì phương trình thứ hai của hệ được viết lại thành

$x^5+5x+\left(t^2+5\right)t=0\Leftrightarrow x^5+5x=\left(-t\right)^5+5\left(-t\right)$

Xét hàm số $f(u)=u^5+5u$ có $f'(u)=5u^4+5>0$ nên hàm số $f(u)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, từ đó

suy ra $f(x)=f(-t)\Leftrightarrow x=-t\Leftrightarrow x=-\sqrt{x^3-2y+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ y=\dfrac{1}{2}\left(x^3+1-x^2\right)\end{cases}$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được phương trình

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0\end{cases}$

Lời giải :

Bình luận : Phương trình thứ nhất được viết lại thành

$x+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=3y+\sqrt{y^2+4}$ 2 vế có dạng gần tương tự nhau ; tuy nhiên sai khác nhau đại lượng x và $3y$; bây giờ thế $3y$ từ phương trình thứ hai của hệ vào chúng ta sẽ được gì ?

$x+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+3x-1-x^2+\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$

Rõ ràng đưa về phương trình dạng $f(x-1)=f(y)$ trong đó $f(t)=t^2+\sqrt{t^2+4}$

Hàm này có $f'(t)=2t+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$; liệu chúng ta có thể đánh giá được bằng tính đơn điệu của hàm số hay không ?

Trình bày :

Rút $3y=y^2+3x-1-x^2$ từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$x+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+3x-1-x^2+\sqrt{y^2+4}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{(x-1)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2+\sqrt{(x-1)^2+4}-\sqrt{y^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2+\frac{(x-1)^2-y^2}{\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{y^2+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}-\sqrt{y^2+4}}\right)\left((x-1)^2-y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-x \end{array}\right.$$

- Nếu $y=x-1$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-(x-1)^2-3x+3(x-1)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Nếu $t=1-x$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y=1-x \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-(1-x)^2-3x+3(1-x)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right) \\ 2^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4 \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện : $2y-2x+5\geq 0$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ ; nên chia hai vế phương trình thứ nhất của hệ cho x^3, ta được phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(\frac{2y}{x}\right)^3+3.\frac{2y}{x}=x^3+3x$$

Ta xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên suy ra $f(t)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Vậy nên $f\left(\frac{2y}{x}\right)=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{2y}{x}\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2}$; ta thay vào phương trình thứ hai của hệ ; ta được phương trình

$$2^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)\right)=2\ (*)$$

Xét hàm số $f(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)-2$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f'(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)>0 \text{ ; do } \begin{cases}\sqrt{u^2+4}>|u|\ge u\\ \ln 2>1>\dfrac{1}{\sqrt{u^2+4}}\end{cases}$$

Vậy $f(u)$ đơn điệu tăng ; nên nếu phương trình $f(u)=0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Phương trình (*) tương đương với $f(x-1)=0=f(0)\Leftrightarrow x=1$; suy ra $y=\frac{1}{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y-1)\sqrt{x+y-1}+6x+2y=20\\(3x+y-2)\sqrt{3x+y-2}+2x+2y=18\end{cases}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\3x+2y-1\ge 0\end{cases}$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+y-1)\sqrt{x+y-1}+2(3x+y-2)=16\\(3x+y-2)\sqrt{3x+y-2}+2(x+y-1)=16\end{cases}\ (1)$$

Trừ theo vế hai phương trình trên ta được

$$(x+y-1)\sqrt{x+y-1}-2(x+y-1)-(3x+y-2)\sqrt{3x+y-2}+2(3x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(\sqrt{x+y-1}-2\right)+(3x+y-2)\left(2-\sqrt{3x+y-2}\right)=0\ (*)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (*) ta có nhận xét sau

Nếu $x+y-1\ge 4$ thì từ (*) suy ra $3x+2y-2\ge 4$

Nếu $x+y-1\le 4$ thì từ (*) suy ra $3x+2y-2\le 4$

Như vậy hệ có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y-1\ge 4\\3x+y-2\ge 4\end{cases}\\ \begin{cases}x+y-1\le 4\\3x+y-2\le 4\end{cases}\end{array}\right.$ từ đây kết hợp với hệ (1) ta suy ra hệ tương đương với

$$\begin{cases}x+y-1=4\\3x+y-2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Kết luận :

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+y}=3\\\sqrt{x}+\sqrt{(y-4)^2+5}=\sqrt{5}\end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x^2+y^3-4x+3=0\\x^2y^2-2x+y^2=0\end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}y^3+x^2=\sqrt{64-x^2y}\\(x^2+2)^3=y+6\end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}3-(y+1)^2=\sqrt{x-y}\\x+8y=\sqrt{x-y-9}\end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+y=x+y^2\\2^{x+y}-2^{x-1}=x-y\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\\ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-1}+6y-26x=3 \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-3x^2=y^3-3y-2 \\ \log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)+\log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)=(x-3)^3 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3 \\ (x-1)^4=y \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_y\sqrt{xy}=\log_x y \\ 2^x+2^y=3 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{y+1}=(y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2+18x-20}+\dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8}=\sqrt{x+1} \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y} \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$$

Bài 14. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}=(x^2+2x-6)(x^3+4) \\ x+\dfrac{2}{x}=1+\dfrac{2}{y^2} \end{cases}$$

Bài 15. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x^{10}}{y^2}+\dfrac{y^{10}}{x^2}\right)+x^{16}+y^{16}=4(1+x^2y^2)^2-10 \\ (x+y-1)\sqrt{y-1}=10 \end{cases}$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy-6}=12-y^2 \\ x^2y-x^3-3x+3y-xy^2-x^2y=0 \end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8y^3+(2x+y)6xy=6x^3+13 \\ x^3+5x+(x^3-2y+6)\sqrt{x^3-2y+1}=0 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}=27-x^3 \\ (x-2)^4+1=y \end{cases}$

DẠNG HỆ CÓ MỘT PHƯƠNG TRÌNH LÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TÌM ĐƯỢC NGHIỆM

Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng : $(ax+by+c)(a_1x+b_1y+c_1)=0$

Mục đích là biểu diễn ẩn này theo ẩn kia ở dạng bậc nhất ; khi đó chỉ việc thay vào phương trình còn lại trong hệ và giải phương trình với một ẩn số.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2=(5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Biến đổi phương trình (2) thành phương trình bậc 2 với ẩn là y, ta được

$y^2-(4x+8)y-5x^2+16x+16=0$, phương trình có

$$\Delta_y=9x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=5x+4 \\ y=4-x \end{array}\right.$$

(i). Với $y=5x+4$, thay vào (1) ta được $x(5x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x=-\dfrac{4}{5} \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

(ii). Với $y=4-x$, thay vào (1) ta được: $x(4-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x=4 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(0;4),(4;0),\left(\dfrac{-4}{5};0\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 0 \end{cases} (*)$, khi đó (1) tương đương với

$(1) \Leftrightarrow x^2 - (y+1)x - (y + 2y^2) = 0$, coi đây là phương trình bậc 2 với ẩn là x ta được

$\Delta_x = (y+1)^2 + 4(y+2y^2) = 9y^2 + 6y + 1 = (3y+1)^2$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y+1+(3y+1)}{2} = 2y+1 \\ x = \dfrac{y+1-(3y+1)}{2} = -y \end{array} \right.$$

$+ x = -y \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow$ loại.

$+ x = 2y - 1$, thay vào phương trình 2 ta được: $(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(y+1)$

$$\Leftrightarrow (y+1)(2-\sqrt{2y}) = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2 - \sqrt{2y} = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$$

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \dfrac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ y \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó coi (2) là phương trình bậc hai với ẩn là x, ta được

$\left[\begin{array}{l} x = 1 - y \\ x = -4 - 2y \end{array} \right.$ nhưng do $x \ge -\dfrac{1}{2}, y \ge -\dfrac{1}{2}$ nên $x + 2y + 4 > 0$ vậy $x = 1 - y \Leftrightarrow x + y = 1$

Ta biến đổi phương trình thứ nhất:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x-y)^2}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x+y)^2-4xy}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)+2+2\sqrt{4xy+2(x+y)+1}=\left(\frac{(x+y)^2-4xy}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4xy+3}=\left(\frac{1}{2}-2xy\right)^2-4=\left(-2xy-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-2xy\right)$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3}=(4xy+3)(2xy-5)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4xy+3=0\\(2xy-5)\sqrt{4xy+3}=8\end{array}\right.\quad(*)$$

Do $1=(x+y)^2\geq 4xy\Rightarrow 2xy-5<0$, vậy hệ (*) $\Leftrightarrow 4xy+3=0\Leftrightarrow xy=-\frac{3}{4}$

Vậy hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+y=1\\xy=-\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x-3}=(2y^2+11)(17-y)+\sqrt{y}\\y(y-3x+3)=5(3x+2)\end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases}x\geq\frac{3}{4}\\y\geq 0\end{cases}$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ coi là phương trình bậc hai với ẩn là y ta được

$y^2+(3-3x)y-15x-10=0$ có $\Delta=(3-3x)^2+4(15x-10)=(3x+7)^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}y=-5<0\\y=3x+2\end{array}\right.$ chỉ nhận nghiệm $y=3x+2x$, thay vào phương trình ban đầu của hệ ta được

$$\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x+2}+5(18x^2+24x+19)(x-5)=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}+5(x-5)(18x^2+24x+19)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}+5(18x^2+24x+19)\right)=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=17$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(5,17)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} \frac{3}{2}(x^2-y^2)+2y+xy=4x-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \sqrt{4x-3}=(2y^2+11)(17-y)+\sqrt{y} \\ y(y-3x+3)=5(3x+2) \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x^2-8xy^2-xy+4y^3=0 \\ 16x^3+2x-8y^2+5=0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x^3+x^2(x^2+y)+x(x-y)^2=(3+2y-x)y^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Giải các hệ phương trình, hệ bất phương trình sau:

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_2 3}=3^{-y-4} \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \le 8 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{9x}{5} \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{5+3x}{6(5-y)} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} - \sqrt{x})^2 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 27x^3y^3 + 7y^3 = 8 \\ 9x^2y + y^2 = 6x \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2 - \sqrt{x^2y^4 + 2xy^2 - y^4 + 1} = 2(3 - \sqrt{2} - x)y^2 \\ \sqrt{x - y^2} + x = 3 \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + x^2y^2 + xy = x^2 \\ \dfrac{1}{x^3} + y^3 = \dfrac{1}{x} + 3y \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 7x = y^3 + 7y \\ x^2 + y^2 = x + y + 2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases}$

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3 \\ (x-4)^4=y \end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 \end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y})=2 \\ \sqrt{2y}(1-\dfrac{1}{x+y})=4\sqrt{2} \end{cases}$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{x}-\sqrt{x}=y\sqrt{y}+8\sqrt{y} \\ x-y=5 \end{cases}$

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}=14 \end{cases}$

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

Bài 23. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{y}{x}=1 \\ x^2+y^2+4\dfrac{y}{x}=22 \end{cases}$

Bài 24. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1 \end{cases}$

Bài 25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 \end{cases}$

Bài 26. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y}+e^{x+y}=2(x+1) \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 27. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+4^{x-y})5^{1-x+y} = 1+3^{x-y+2} \\ x^2 - 3y\sqrt{y-\dfrac{1}{x}} = 1-2y \end{cases}$

Bài 28. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases}$

Bài 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + x - \dfrac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$

Bài 31. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+xy}{3}} = x + y \\ x\sqrt{xy+5x+3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$

Bài 32. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = (y+1)x^2 \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$

Bài 33. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}$

Bài 34. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$

Bài 35. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y^2 + x^2y + 20 = 0 \end{cases}$

Bài 36. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}$

Bài 37. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + y + xy^2 + x = 18xy \\ x^4y^2 + y^2 + x^2y^4 + x^2 = 208x^2y^2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 38. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_7(2x+3y) = \log_3(2+2x+3y) \\ \ln(4x^2+x+1) + x^3 = 3(3y-7) \end{cases}$

Bài 39. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 40. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x = -(y^3 + 3) \end{cases}$

Bài 41. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases}$

Bài 42. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$

Bài 43. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$

Bài 44. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ \sqrt[3]{x+6} = 4 - \sqrt{1-y} \end{cases}$

Bài 45. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = x(2x+9) \end{cases}$

Bài 46. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 4(x+y) = 0 \\ xy(x^2+y^2) - 1 = 3xy - (x+y)^2 \end{cases}$

Bài 47. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = (x^2+3y^2)(y^2+3x^2) \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{cases}$

Bài 48. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ x^3 + 2xy^2 - 2y = x \end{cases}$

Bài 49. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 27xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 10xy \end{cases}$

Bài 50. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+5} - \sqrt{3x+2y} = -1 \\ \sqrt{x+1} + x + 3 - y = 0 \end{cases}$

Bài 51. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 7x^2 - 14x + 3y^3 + 10 = 0 \end{cases}$

Bài 52. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3 + 2x^2y^2 - x^4y^2} + x^4(1-2x^2) = y^4 \\ 1 + \sqrt{1+(x-y)^2} = x^3(x^3 - x + 2y^2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 53. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 \end{cases}$

Bài 54. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x-y)\sqrt{y}=\sqrt{x} \\ (x+y)\sqrt{x}=3\sqrt{y} \end{cases}$

Bài 55. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

Bài 56. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4} \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52 \end{cases}$

Bài 57. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)=\sqrt{xy} \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Bài 58. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

Bài 59. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=18 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24 \end{cases}$

Bài 60. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-y+\dfrac{2y}{x}=-2 \\ 2xy-2y^2+x=0 \end{cases}$

Bài 61. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+y^3=x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

Bài 62. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(x^2+1) \end{cases}$

Bài 63. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2(x^2+1)+7y \end{cases}$

Bài 64. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y}=\dfrac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1=6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y \end{cases}$ $x, y \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 65. Giải phương trình: $\begin{cases}\left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}\\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0\end{cases}$

Bài 66. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^y=-xy-\dfrac{3}{2}\\ \left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y+1-4x=0\end{cases}$

Bài 67. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\\ 2^{(x+y)^2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

Bài 68. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+2x=3\\ 2\left(x^3+y^3\right)+6x^2=5+3\left(x^2+y^2\right)\end{cases}$

Bài 69. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7}\end{cases}$

Bài 70. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-y}=2\\ x^2-y^4+9y=x\left(9+y-y^3\right)\end{cases}$

Bài 71. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2}\\ \sqrt{y-1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0\end{cases}$

Bài 71. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-2)(2y-1)=x^3+20y-28\\ 2\left(\sqrt{x+2y}+y\right)=x^2+x\end{cases}$

Bài 72. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}\\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1\end{cases}$

Bài 73. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}\\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x}\end{cases}$

Bài 74. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}6\dfrac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y\\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 75. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \sqrt{2x+y} - \sqrt{x+2y} = \sqrt{x-y} \end{cases}$

Bài 76. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + y^3 = x^4 + x^6 \\ 2x + \sqrt{1+y} = \dfrac{\sqrt{(1+y)^3}}{1-x^2} \end{cases}$

Bài 77. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y + 2\sqrt{4x+y} = 1 \\ \sqrt{46-16y(x+y)-6y} + 4\sqrt{4x+y} = 8-4y \end{cases}$

Bài 78. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3x+3y} \\ 12x\left(2x^2+3y+7xy\right) = -1-12y^2(3+5x) \end{cases}$

Bài 79. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right) = \dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$

Bài 80. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1} = \dfrac{1}{12}\left(x^2+17\right) \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$

Bài 81. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 - 2^{1+\log_2 x^3} = \log_2\left(y^2+1\right) - \log_2 y \\ y^3 - 2x^2y = y(y-x) \end{cases}$

Bài 82. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_7(2x+3y) = \log_3(2x+3y+2) \\ \ln\left(4x^2+x+1\right) + x^3 + 21 = 9y \end{cases}$

Bài 83. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\sqrt{x+y} = 3\log_8\left(\sqrt{x-y}+2\right) \\ \sqrt{x^2+y^2+1} - \sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$

Bài 84. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5y-\frac{5x}{3}} \\ x^3 = \dfrac{1}{y} \end{cases}$

Bài 85. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{x^2+2} - 9^{2y^2+1} = 2\left(\sqrt{2y} - \sqrt{x}\right) \\ 3^{(x+y)^2+2} + 2\sqrt{x+y} = 29 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 86. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+(y-3)x-4y=-3 \\ 2\sqrt[3]{x-2}+5\sqrt{2-y}=12 \end{cases}$

Bài 87. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{30+x}-\sqrt{18-y}=1 \\ \sqrt{45+2y}-\sqrt{20-x}=2 \end{cases}$

Bài 88. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{10}{2x+3y}+\dfrac{1}{xy}=1 \\ \dfrac{124}{4x^2+9y^2}-\dfrac{1}{x^2y^2}=1 \end{cases}$

Bài 89. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{7x}{2y} \\ y^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{7y}{2x} \end{cases}$

Bài 90. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4.64^{\frac{x-y^2}{y^2}}+\dfrac{1}{4}.64^{\frac{x^2-y}{x^2}}=2.8^{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}} \\ \log_2\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)+\log_3(xy)=3 \end{cases}$

Bài 91. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18 \end{cases}$

Bài 92. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{72xy}{x-y}+29\sqrt[3]{x^2-y^2}=4 \end{cases}$

Bài 93. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ 5x+y+\dfrac{x^2-5y^2}{xy}=5 \end{cases}$

Bài 94. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 14x^3+3y^2+1=0 \\ 4xy+2y=5x+2y^2+2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 95. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)(y+1)+1=(x^2+x+1)(y^2+y+1) \\ x^3+3x=(x^3-y+4)\sqrt{x^3-y+1}\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$

Bài 96. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14 \\ (x+y)(x^2+14xy+y^2)=36\end{cases}$

Bài 97. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)(y^2+6)=y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6)=x(y^2+1)\end{cases}$

Bài 98. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(x^2+4y^2)=8y^4(y^2+1) \\ \sqrt{5x+6}+\sqrt{2y^2+7}=7\end{cases}$

Bài 99. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y} \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}\end{cases}$

Bài 100. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^3+6y}+2y+1=\sqrt{x^3+4x^2+7x+4} \\ (2x^2-2y^2+xy)^2=(4x^2+y^2)(10x^2-14xy+5y^2)\end{cases}$

Bài 101. Tìm số nghiệm của hệ: $\begin{cases}x^2=y^3 \\ x+y^2+12\sqrt[8]{x^2y}=2012\end{cases}$

Bài 102. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7 \\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1\end{cases}$

Bài 103. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(x+y)^2=9 \\ x(x^3-y^3)=7\end{cases}$

Bài 104. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=2xy \\ (x+3)\sqrt{2x-1}+(y+3)\sqrt{2y-1}=2\sqrt{(x+3)(y+3)}\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 105. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\sqrt{y+1}=\dfrac{5}{2} \\ y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Giải các hệ phương trình, hệ bất phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} x+\sqrt{y-1}=6 \\ \sqrt{x^2+2x+y}+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}=29 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{y+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{x+y}{x} \\ 2\sqrt{y}+\dfrac{x-2}{\sqrt{y}}=\dfrac{2y+x}{y} \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{32x^2+4x} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{72xy}{x-y}+29\sqrt[3]{x^2-y^2}=4 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x+\dfrac{y}{x+\sqrt{1+x^2}}+y^2=0 \\ \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{1+x^2}+y^2=3 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x^2-8y^3=2xy(1-2y) \\ \sqrt{x^3+4x}=1+\dfrac{(2y+1)^2}{3} \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{4-2y}+\sqrt{5+2y-(x-1)^2}=5 \\ 3x^4+(x-y)^2=6x^3y+y^2 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 9x^3+x-\left(y-\dfrac{5}{3}\right)\sqrt{3y-6}=0 \\ x^2+x+2=\sqrt{y+2} \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{1-y}-34=2xy+x \\ y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{1-y}-34=-xy+2y \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.10. $\begin{cases} x^2 - 8y^3 = 2xy(1-2y) \\ \sqrt{x^3+4x} = 1 + \dfrac{(2y+1)^2}{3} \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} (x+y)^4 + 3 = 4(x+y) \\ \dfrac{x^4-y^4}{64} + \dfrac{9(x^2-y^2)}{32} + \dfrac{7(x-y)}{8} + 3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right) = 0 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x+y+2xy+1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y+1} = 8x^3 - 2y - 1 \\ x > 0 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x^4 + 2x^2y + x^2 + y^2 + y = 6 \\ x^2 + y^2 + y = 3 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x^2 + xy = x + 2 \\ (2y^2+5)x + 13x^2 = 26 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x + 2y + 2\sqrt{4x+y} = 1 \\ \sqrt{46 - 16y(x+y) - 6y} + 4\sqrt{4x+y} = 8 - 4y \end{cases}$

Đáp số: $(x,y) = \left(\dfrac{3}{7}, -\dfrac{5}{7}\right)$

1.16. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 4 \\ \sqrt{3xy - y^2} = xy \end{cases}$

Đáp số: $(x,y) = (\pm\sqrt{2}, 0); \left(\pm\sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}}, \pm(2-\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}}\right)$

1.17. $\begin{cases} \sqrt{x^2+6x} = y + 3 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \end{cases}$

Đáp số: $(x,y) = (5,4)$

1.18. $\begin{cases} 2xy - x + 2y = 3 \\ x^3 + 4y^3 = 3x + 6y^2 - 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Đáp số: $(x,y) = (1,1); \left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.19. $\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} e^x - e^{2y} + (x-2y)(x^2+y^2+3) + \ln(x+xy-2y) - \ln xy = 0 \\ 2^x - 3.6^y - 4.3^x = 0 \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} \sqrt{4x^2 + (4x-9)(x-y)} + \sqrt{xy} = 3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)} = 3(x+3) \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2(x+y)^3 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} (x+y)(y-2) = (xy+1)(2y-1) \\ (x-y)(x-3) = (xy-1)(1-3x) \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} y^2 + x + xy - 6y + 1 = 0 \\ y^3x - 8y^2 + x^2y + x = 0 \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4) \\ x + \dfrac{2}{x} = 1 + \dfrac{2}{y^2} \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} 8(x^3 - y^3) + 9(x-9) = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x^4 + x^2y + 9y = y^2x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y} + \dfrac{6}{xy} = 1 \\ \dfrac{124}{x^2+y^2} - \dfrac{36}{x^2y^2} = 1 \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x^3 + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x^2y + y + 1 \\ (x+y-1)\sqrt{y+1} = 10 \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x + \dfrac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.31. $\begin{cases} x^3 + y(x+2) = 2y(y+x^2) + x \\ x^2 + 3y + 2xy + 4 = 5x \end{cases}$

1.32. $\begin{cases} 10x^3y^3 - 9y^3 = (2xy - y)(4xy^2 + 3) \\ 4x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

1.33. $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

1.34. $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$

1.35. $\begin{cases} x^2y + x = \dfrac{5}{2}y^5 \\ xy^2 + x + y = \dfrac{7}{2}y^3 \end{cases}$

1.36. $\begin{cases} 2012^{x^5+3x} + \ln\dfrac{x}{y} = 2012^{y^5+3y} \\ 2x^2 - 5y - 4 = y\sqrt{5x+4} \end{cases}$

1.37. $\begin{cases} (x-4)(x+1) = y(y+5) \\ \log_{x-2}(y+2) = \dfrac{x-2}{y^2} \end{cases}$

1.38. $\begin{cases} x^2 + y^3 = \sqrt{64 - x^2y} \\ (x^2+2)^3 = y + 6 \end{cases}$

1.39. $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$

1.40. $\begin{cases} x^2y - y^2 = 3xy + x \\ x^2y^2 - xy^2 + y + 1 = 4y^2 \end{cases}$

1.41. $\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x \end{cases}$

1.42. $\begin{cases} 2z(x+y) + 1 = x^2 - y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2xz - 2yz \\ y(3x^2 - 1) = -2x(x^2+1) \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.43. $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2 y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$

1.44. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$

1.45. $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x+2y} + y\right) = x^2 + x \\ (x-2)(2y-1) = x^3 - xy \end{cases}$

1.46. $\begin{cases} x\sqrt{x^2 + 2y + x + 1} + 4y + x + 1 = 0 \\ 2\left(y^3 + 2y - x - 1\right) = y^2(x+1) \end{cases}$

1.47. $\begin{cases} 2\left(y^3 + 2y - x - 1\right) = y^2(x+1) \\ \sqrt{x^2 + 2y - 2} + \sqrt{2y - x^2} = x^2 - 2y + 3 \end{cases}$

1.48. $\begin{cases} \sqrt{2x + 3y - 1} - \sqrt{x^3 + 3y} = 1 \\ 3(2x + y - 1) = 2x^2 + 10\sqrt{x^3 + 3y} \end{cases}$

1.49. $\begin{cases} x + 2y + 2\sqrt{4x + y} = 1 \\ 2(x+3) = \sqrt{46 - 2(3 - 8x - 8y)} \end{cases}$

1.50. $\begin{cases} 2x + 3 = 17x^2 + 13xy \\ 2y - 4 = 10y^2 + 13xy \end{cases}$

1.51. $\begin{cases} \left(x^2 + 1\right)\left(y^2 + 1\right) = 10xy \\ (xy + x + y + 1)^2 = 27xy \end{cases}$

1.52. $\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3x - 2} + 10 = 2y \\ y^2 - 6\sqrt{4y - 3} + 11 = x \end{cases}$

1.53. $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{4x + 2y + 1} = 6 \\ \sqrt{x + y + 1} + x - y = 1 \end{cases}$

1.54. $\begin{cases} 6(x+y)\left(xy + \dfrac{1}{xy} + 2\right) = \left(2x^2 + 3y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) \\ 29\left(xy + \dfrac{1}{xy}\right) + 62 = (9x + 13y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.55. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{1}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{x} \end{cases}$

1.56. $\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{x}+\left(2\sqrt{2}\right)^{y}=6 \\ xy=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

1.57. $\begin{cases} (x-2y)\left(3x+8y+4\sqrt{x^2+4xy+4y^2-16}\right)=-6 \\ (y-4x)\left(3y+2x+2\sqrt{x^2+4xy+4y^2-16}\right)=-10 \end{cases}$

1.58. $\begin{cases} \sqrt{4x-3}=\left(2y^2+11\right)(17-y)+\sqrt{y} \\ y(y-3x+3)=5(3x+2) \end{cases}$

1.59. $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

1.60. $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{2y-x}=1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x+1 \end{cases}$

1.61. $\begin{cases} \sqrt{4x-y}-\sqrt{3y-4x}=1 \\ 2\sqrt{3y-4x}+y(5x-y)=x(4x+y)-1 \end{cases}$

1.62. $\begin{cases} y^2-6x=\sqrt{x\left(y^2+3\right)}-3 \\ \sqrt{y^2+x+2}+\sqrt[3]{2x-3}=2 \end{cases} (x, y\in\mathbb{R})$

1.63. $\begin{cases} x+2y+\sqrt{x-2y}=8 \\ y\sqrt{x-2y}=1 \end{cases}$

1.64. $\begin{cases} \sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y} \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$

1.65. $\begin{cases} xy+y^2+x=7y \\ \dfrac{x^2}{y}+x=12 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.66. $\begin{cases} 2\left(y^3 - x^3\right) = 6x^2 + 7x - y + 3 \\ 2\sqrt{3-y} + \sqrt{2\left(1+y\right)} = \sqrt{\dfrac{9}{4}x^2 + 4} \end{cases}$

1.67. $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2} \end{cases}$

1.68. $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 6xy - 3x - 49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 10y - 25x - 9 \end{cases}$

1.69. $\begin{cases} x^2\left(y+1\right) = 6y - 2 \\ x^4y^2 + 2x^2y^2 + y\left(x^2+1\right) = 12y^2 - 1 \end{cases}$

1.70. $\begin{cases} \left(2x - y - 2\right)y = 1 \\ x^2 + y^2 + 1 = 2x + 2y \end{cases}$

1.71. $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+y} + \dfrac{1}{3x-y} = 2 \\ 4x + 12y = 7\left(2x+y\right)\left(3x-y\right) \end{cases}$

1.72. $\begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = y + \sqrt{y^2-1} \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases}$

1.73. $\begin{cases} \sqrt{7x^2 - xy - 1} = 2xy - 1 \\ y\sqrt{1-3x^2} = 2x \end{cases}$

1.74. $\begin{cases} 2\sqrt{x + y^2 + y + 3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ y^3 + y^2 - 3y - 5 = 3x - 3\sqrt[3]{x+2} \end{cases}$

1.75. $\begin{cases} 8y^3 + \sqrt{y-2} = y\sqrt{y-2} - 2x \\ y + \sqrt{2x+1} = 3 \end{cases}$

1.76. $\begin{cases} \sqrt{2\left(\dfrac{y}{x} + 8x\right)} + 3\sqrt{3\left(\dfrac{x}{y} + 3y\right)} = 4 \\ \dfrac{5}{xy} + 144 = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\left(2x + \dfrac{3x^4}{y^3}\right) \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.77. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+1 \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3\left(x^2+1\right)} \end{cases}$

1.78. $\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$

1.79. $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4\left(x+y\right)^2+\sqrt{3\left(x+y\right)} \\ 12x\left(2x^2+3y+7xy\right)=-1-12y^2\left(3+5x\right) \end{cases}$

1.80. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases}$

1.81. $\begin{cases} x^3y\left(1+y\right)+x^2y^2\left(2+y\right)+xy^3=30 \\ x^2y+x\left(1+y+y^2\right)+y=11 \end{cases}$

1.82. $\begin{cases} 1+xy+\sqrt{xy}=x \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x}}+y\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{y} \end{cases}$

1.83. $\begin{cases} x-2\sqrt{y+1}=3 \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}-9x-8y=-52-4xy \end{cases}$

1.84. $\begin{cases} x^4-\left(1+x^2y^2\right)\log_{\frac{1}{5}}x=y^4-\left(1+x^2y^2\right)\log_{\frac{1}{5}}y \\ x+\sqrt{2y+1}=1+\sqrt{2x-y+2} \end{cases}$

1.85. $\begin{cases} x^4+y^4=240 \\ x^3-2y^3=3\left(x^2-4y^2\right)-4\left(x-8y\right) \end{cases}$

1.86. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x\left(1-2x\right)}+\sqrt{y\left(1-2y\right)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$

1.87. $\begin{cases} 2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right) \\ 2^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.88. $\begin{cases} 6x^4 - (x^3 - x)y^2 - (y+12)x^2 = -6 \\ 5x^4 - (x^2-1)^2 y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases}$

1.89. $\begin{cases} 2x^2 - 8xy^2 - xy + 4y^3 = 0 \\ 16x^3 + 2x - 8y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

1.90. $\begin{cases} (x+y-1)\sqrt{x+y-1} + 6x + 2y = 20 \\ (3x+y-2)\sqrt{3x+y-2} + 2x + 2y = 18 \end{cases}$

1.91. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$

1.92. $\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x + 1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$

1.93. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4x + 1 = 0 \\ y\left(7 - (x-y)^2\right) = 2(x^2+1) \end{cases}$

1.94. $\begin{cases} (x^2+9)(x^2+9y) = 22(y-1)^2 \\ x^2 - 2 - 4y\sqrt{y+1} = 0 \end{cases}$

1.95. $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2 - y^2} = y^2 - 2x^2 + 3 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$

1.96. $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}$

1.97. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - (x+y)} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2(x^2+y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases}$

1.98. $\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1} + (2y+3)\sqrt{4y-1} = 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \\ x + y = 4xy \end{cases}$

1.99. $\begin{cases} x^3 + y^3 + \dfrac{3xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y}\left(\sqrt[3]{2x-y} + \sqrt[3]{6x+y}\right) = \sqrt[3]{3x-5y+5} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.100. $\begin{cases} \dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9 \end{cases}$

1.101. $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)\left(y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right)=4 \end{cases}$

1.102. $\begin{cases} \left(y^2-4y-8\right)\left(x^2+3\right)=64\sqrt[3]{x} \\ y\left(y^2-6y+12\right)=8\left(1+x\sqrt{x}\right) \end{cases}$

1.103. $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+\sqrt{xy-y^2}=2\sqrt{2}\,(x-y-1) \end{cases}$

1.104. $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2 \\ 4y\sqrt{x-y}+32x-y^2=44 \end{cases}$

1.105. $\begin{cases} \sqrt{x-y}=9-|x+2y| \\ x(x+4y-2)+y(4y+2)=44 \end{cases}$

1.106. $\begin{cases} x+2y^2-y\sqrt{x+3y^2}=0 \\ 2y^2-3y-x+1+\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{6}=0 \end{cases}$

1.107. $\begin{cases} \left(11\sqrt{2x+y}-16\sqrt{x+3y}\right)x=y\left(13\sqrt{x+3y}-23\sqrt{2x+y}\right) \\ x^2-y^2+\dfrac{4x^2+8x}{y}=-4 \end{cases}$

1.108. $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)}-1 \\ \sqrt{(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$

1.109. $\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1}=2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \\ x+y=4xy \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.110. $\begin{cases} 3x+10\sqrt{xy}-y=12 \\ x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\le 3 \end{cases}$

1.111. $\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)}=\dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2\left(x^2+y^2\right)-3\sqrt{2x-11}=11 \end{cases}$

1.112. $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{2y-x}=1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1=0 \end{cases}$

1.113. $\begin{cases} 2x-y+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-2+2(2x-y)^2} \\ y^2+4x\sqrt{x-1}=17 \end{cases}$

1.114. $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

1.115. $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=4xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2y^2\right)=4x^2y^2 \end{cases}$

1.116. $\begin{cases} x^4-3\sqrt{y}=3x+y \\ x\sqrt{y}(y-1)=3\left(x+\sqrt{y}\right) \end{cases}$

1.117. $\begin{cases} x^2-y-4xy^2+4=0 \\ 2xy^2+4y^2-x^2y-2y=3 \end{cases}$

1.118. $\begin{cases} 2x+\sqrt{1-x+y-x^2-y^2}=1 \\ 2x^3-2y^3=1 \end{cases}$

1.119. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x^2+y+3}=2 \\ 2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}=13 \end{cases}$

1.120. $\begin{cases} \sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}+\sqrt{y+1}=x+1 \\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.121. $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^5+x^4y+3x^3+x^2y+1}=\sqrt{x^4+x^2+1} \end{cases}$

1.122. $\begin{cases} x^2+2xy+y=0 \\ x^3+3xy+2\sqrt{y+1}\left(x+\sqrt{x^2y+2}\right)=4 \end{cases}$

1.123. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3x-2 \\ \left(x^2+xy\right)^4+\left(y^2+2\right)^4=17x^4 \end{cases}$

1.124. $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)} \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2 \end{cases}$

1.125. $\begin{cases} x+8=\sqrt{2y-x}\sqrt{y+4} \\ x^2+2x+y=y\sqrt{x^2-x+4} \end{cases}$

1.126. $\begin{cases} x^3y^2+x^2y^2+y^2x=2x^2+2x-y^2 \\ 2x^3+3x^2+6y=12x-13 \end{cases}$

1.127. $\begin{cases} x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2=0 \\ y^3+(x-2)y+x^2+x+2=0 \end{cases}$

1.128. $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} \end{cases}$

1.129. $\begin{cases} \sqrt{3x^2y^2+y^2}-6xy(x+y)^2=48y\left(x^2+y^2\right)+y\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-3}+12x^2y^2 \\ \sqrt{y(x+y-1)-3\left(x^2+y^2\right)+6xy-31}-\sqrt{xy+x(x+y)+y^2}=1 \end{cases}$

1.130. $\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18 \end{cases}$

1.131. $\begin{cases} \sqrt{x(x-y-1)}+\sqrt[3]{(x+y)^2+(x-1)^2+6}=\sqrt{x}+2 \\ x^2+3xy+y^2=1 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.132. $\begin{cases} y+\dfrac{16x\sqrt{y}}{2x+y}=16-4x^2 \\ 2x^3-3x^2+3\sqrt[3]{x^3+3\sqrt{y}-12}-4=0 \end{cases}, x>0$

1.133. $\begin{cases} x^2+2xy+y=0 \\ x^3+3xy+2\sqrt{y+1}\left(x+\sqrt{x^2y+2}\right)=4 \end{cases}$

1.134. $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 8xy^3+2y^3+\dfrac{1}{2}=4x^4+3x^2+x+2\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$

1.135. $\begin{cases} x\left(x^2-1\right)+\left(xy+3\right)y=x^2+y^2 \\ y\left(x^2+1\right)+\left(xy+3\right)x=0 \end{cases}$

1.136. $\begin{cases} x^4+y^2+x^2y^2=y^3+x^2y-x^2 \\ -10x^3-5x+12y-11=2x^2\sqrt[3]{7x^3-7y+2x+7} \end{cases}$

1.137. $\begin{cases} (3x+1)\sqrt{9y^2+6y+2}-y+1=4x\sqrt{16y^2+1} \\ 2012^x-2012^y=\left(\log_3 y-\log_3 x\right)(12+4xy) \end{cases}$

1.138. $\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+6+3x^2}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$

1.139. $\begin{cases} 1+\sqrt{x+y+1}=4(x+y)^2+\sqrt{3(x+y)} \\ \log_4(3x+2y)^2+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}=4 \end{cases}$

1.140. $\begin{cases} x^4+2xy+6y-(7+2y)x^2=-9 \\ 2x^2y-y^3=10 \end{cases}$

1.141. $\begin{cases} 2x^3+x^2y+xy^2+\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2=y^3-\dfrac{3y^2}{4} \\ \sqrt{2+x}+\sqrt{2y-1}=5 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 6:

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số mũ $y = a^x (0 < a \neq 1)$

Hàm số logarit $y = \log_a x (0 < a \neq 1, x > 0)$

+ Các công thức lũy thừa

Với $a, b > 0; m, n \in \mathbb{Z}$ ta có

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\left(ab\right)^m = a^m b^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

+ Các công thức biến đổi logarit

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b\left(0 < a \neq 1, b > 0\right)$$

Với $0 < a, b \neq 1; x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$ ta có

$$\log_a \left(x_1 x_2\right) = \log_a \left|x_1\right| + \log_a \left|x_2\right|$$

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a \left|x_1\right| - \log_a \left|x_2\right|$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Công thức đổi cơ số

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Giải phương trình mũ

Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$\log_8(5-x)+\log_8\left(\sqrt{3-x}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \log_8(5-x)(3-x)=1 \Leftrightarrow (5-x)(3-x)=8 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=7 \end{array}\right.$

Chỉ có nghiệm $x=1$ thỏa mãn điều kiện (*).
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 9. Giải phương trình: $\log_4(x-1)+\dfrac{1}{\log_{2x+1}4}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x+2}$.

Lời giải:
+ Điều kiện $x>1$(*).
Khi đó phương trình tương đương với

$\log_4(x-1)+\log_4(2x+1)=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(x-1)+\dfrac{1}{2}\log_2(2x+1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)(2x+1)=\log_2 2(x+2)$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)=2(x+2) \Leftrightarrow 2x^2-3x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Chỉ có nghiệm $x=\dfrac{5}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{2}$.

Bài 10. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\dfrac{1}{2}<x\neq 1$(*).
Khi đó phương trình tương đương với

$\log_3(x-1)^2+\log_3(2x-1)^2=2$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2(2x-1)^2=2 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1)^2=9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(2x-1)=3 \\ (x-1)(2x-1)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=0 \\ 2x^2-3x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Chỉ có nghiệm $x=2$ thỏa mãn điều kiện (*).
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 11. Giải phương trình: $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$.

Lời giải:

+ Điều kiện $0 < x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1 (*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_4 2x} = \frac{1}{\log_8 \sqrt{2x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{4}{1+\log_2 x} = \frac{6}{1+\log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} = \frac{2}{1+\log_2 x} \Leftrightarrow 1+\log_2 x = 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 12. Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0$.

Lời giải:

+ Điều kiện $1 < x < 3 (*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_2(x+1) + \log_2(3-x) - \log_2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1)(3-x) = \log_2(x-1) \Leftrightarrow (x+1)(3-x) = x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Chỉ có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Bài 13. Giải phương trình: $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (x+4)^3$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases} (*)$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\log_2 |x+1| + 2 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2(16-x^2) \Leftrightarrow 16 - x^2 = 4|x+1|$$

+ Với $-1 < x < 4$ phương trình trở thành

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Với $-4 < x < -1$ phương trình trở thành

$x^2 - 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{24}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 2, x = 2 - \sqrt{24}$.

Bài 14. giải bất phương trình: $\log_x\left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 2$

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \log_x\left(x - \frac{1}{4}\right) \geq \log_x x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x - \frac{1}{4} - x^2\right) \geq 0 \\ x > \frac{1}{4}, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

Bài 15. Giải bất phương trình: $\dfrac{\log_2\left(x^2 - 9x + 8\right)}{\log_2(3 - x)} < 2$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ \log_2(3 - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1$, suy ra $\log_2(3 - x) > 0$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$\log_2\left(x^2 - 9x + 8\right) < 2\log_2(3 - x) = \log_2(3 - x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 < (3 - x)^2 \Leftrightarrow 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$, kết hợp với điều kiện suy ra $-\frac{1}{3} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Bài 16. Giải bất phương trình:

$$\frac{\log_5\left(x^2 - 4x - 11\right)^2 - \log_{11}\left(x^2 - 4x - 11\right)^3}{2 - 5x - 3x^3} \geq 0$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4x - 11 > 0 \\ 2 - 5x - 3x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; 2 - \sqrt{15}\right) \cup \left(2 + \sqrt{15}; +\infty\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta đưa về cùng cơ số 5; $\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3=3\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)=3\dfrac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)}{\log_5 11}$

Khi đó bất phương trình tương đương với:

$$\left(2-\frac{3}{\log_5 11}\right)\frac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)}{2-5x-3x^2}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)}{2-5x-3x^2}\le 0 \text{ do } 2-\frac{3}{\log_5 11}<0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_5\left(x^2-4x-11\right)\ge 0\\ 2-5x-3x^2<0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_5\left(x^2-4x-11\right)\le 0\\ 2-5x-3x^2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4x-11\ge 1\\ 3x^2+5x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x-11\le 1\\ 3x^2+5x-2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-2)\cup[6;+\infty)\\ x\in\left(-2;\dfrac{1}{3}\right)\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là

$S=(-\infty;-2)\cup\left(-2;2-\sqrt{15}\right)\cup[6;+\infty)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-1)^{x-1}}=(x-1)^{\sqrt[3]{x-1}}$.

Bài 2. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\dfrac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2(4x)$.

Bài 3. Giải phương trình: $\log_5\left(-4x^2+13x-5\right)=\log_{25}(3x+1)$.

Bài 4. Giải phương trình:

$\log_2\left(x^2+x+1\right)+\log_2\left(x^2-x+1\right)=\log_2\left(x^4+x^2+1\right)+\log_2\left(x^4-x^2+1\right)$.

Bài 5. Giải phương trình: $\log_9(x+1)^2=\log_3(4-x)+\log_3(4+x)$.

Bài 6. Giải phương trình: $\log_3\dfrac{3}{x}.\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

Bài 7. Giải phương trình: $\left(x^2+3\right)^{\left|x^2-5x+4\right|}=\left(x^2+3\right)^{x+4}$

Bài 8. Giải phương trình: $\left(x^2+x+1\right)^{2x^2-3}\le\left(\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}\right)^x$

Bài 9. Giải bất phương trình: $\dfrac{\log_2\left(x^2-9x+8\right)}{\log_2(3-x)}<2$

Bài 10. Giải bất phương trình: $\log_x\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\ge 2$

Bài 11. Giải phương trình: $\left(x^2-4x\right)^{x^2-10}=(4-x)^{x^2-10}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Bài 12. Giải phương trình: $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2\left(x^2-25\right) = 0$

Bài 13. Giải phương trình: $\log_4\left(\log_2 x\right) + \log_2\left(\log_4 x\right) = 2$

Bài 14. Giải phương trình:

$$\frac{1}{3}\log_2\left(3x-4\right)^6.\log_2 x^3 = 8\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2 + \left[\log_2\left(3x-4\right)^2\right]^2$$

Bài 15. Giải phương trình: $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left(x+2\right)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)^3 + \log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right)^3$

Bài 16. Giải phương trình: $\log_9\left(x+8\right) - \log_3\left(x+26\right) + 2 = 0$

Bài 17. Giải phương trình: $2\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 3$

Bài 18. Giải phương trình: $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

Bài 19. Giải phương trình: $\log_{(x+3)} 6 + 2\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(4-x\right)}{\log_2\left(x+3\right)} = 1$

Bài 20. Giải phương trình: $\log_4\left\{2\log_3\left[1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right]\right\} = \frac{1}{2}$

Bài 21. Giải các phương trình:

1.1. $2\log_2\sqrt{x^2-4x+3} + \log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)^2 - 2 \geq 0$

1.2. $\log_2\left[x\left(x+9\right)\right] + \log_2\frac{x+9}{x} = 0$

1.3. $\log_{25}\left(x^2-8x+25\right)^2 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}\frac{x-1}{2} + \log_5\left|x-5\right|$

LOGARIT HÓA 2 VẾ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình sau:

1. $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500.$

2. $3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}} = 18.$

3. $2^{x^2-4}.5^{x-2} = 1.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

4.	$2^{x^2-2x}=\frac{3}{2}.$

Lời giải:

1. Phương trình tương đương với

$5^x.2^{3^{\frac{x-1}{x}}}=5^3.2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}}=1$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình ta được

$$\left(x-3\right)\log_2 5+\frac{x-3}{x}=0 \Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(\log_2 5+\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\log_5 2 \end{array}\right.$$

2. Phương trình tương đương với

$3^{x^2-2}.2^{2^{\frac{2x-3}{x}}}=3^2.2^1 \Leftrightarrow 3^{x^2-4}.2^{\frac{3x-6}{x}}=1$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình ta được

$$\left(x^2-4\right)\log_2 3+3\frac{\left(x-2\right)}{x}=0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\frac{3}{x}+\left(x+2\right)\log_2 3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \frac{3}{x}+\left(x+2\right)\log_2 3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+2x+3\log_3 2=0(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

3. Phương trình tương đương với

$$\log_2 2^{x^2-4}+\log_2 5^{x-2}=0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x+2+\log_2 5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2-\log_2 5 \end{array}\right.$$

Bài 2. Giải các phương trình sau	
1.	$x^{\lg x}=1000x^2.$
2.	$x^{\log_2 x+4}=32.$
3.	$7^{\log^2_{25}(5x)-1}=x^{\log_5 7}.$

Lời giải:

1. Điều kiện $x>0$, khi đó phương trình tương đương với

$\lg x.\lg x=\lg 1000+\lg x^2$

$$\Leftrightarrow \left(\lg x\right)^2-2\lg x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=-1 \\ \lg x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{10} \\ x=1000 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x\in\left\{\frac{1}{10};1000\right\}$.

2. Điều kiện $x>0$, lấy logarit cơ số 2 hai vế của phương trình, khi đó phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\left(\log_2 x+4\right)\log_2 x=\log_2 32 \Leftrightarrow \log^2{}_2 x+4\log_2 x-5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{32}\end{array}\right.$

3. Điều kiện $x>0$, khi đó phương trình tương đương với

$\log_5\left(7^{\log^2{}_{25}(5x)-1}\right)=\log_5\left(x^{\log_5 7}\right) \Leftrightarrow \left(\log^2{}_{25}(5x)-1\right)\log_5 7=\log_5 7.\log_5 x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\log^2{}_5(5x)-\log_5 x-1=0 \Leftrightarrow \log^2{}_5 x-2\log_5 x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x=-1\\ \log_5 x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{5}\\ x=125\end{array}\right.$ **BÀI**

TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình : $5^x.\sqrt[x+1]{8^x}=100.$

Bài 2. Giải phương trình: $9.x^{\log_9 x}=x^2.$

Bài 3. Giải phương trình: $3^{x^2}.2^{\frac{x}{2x-1}}=6$

ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 1. Giải phương trình sau: $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}\left(4-2^{2x}\right)+\left(4-2^{2x}\right)=0 \Leftrightarrow \left(4-2^{2x}\right)\left(2^{x^2-x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-2^{2x}=0\\ 2^{x^2-x}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\\ x^2-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x\in\{0;1\}$.

Bài 2. Giải phương trình
$2\left(\log_9 x\right)^2=\log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$

Lời giải:

+ Điều kiện $x>0$, khi đó phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\left(\log_3 x\right)^2 = 2\log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$

$\Leftrightarrow \log_3 x\left(\log_3 x - 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 0\\ \log_3 x - 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \log_3\sqrt{x} = \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là
$x \in \{1;4\}$.

Bài 3. Giải phương trình:
$2\log_4^2 x = \log_2 x.\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$, khi đó phương trình tương đương với:

$\frac{1}{2}\log_2^2 x = \log_2 x.\log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \Leftrightarrow \log_2 x\left(\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 0\\ \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \log_2\sqrt{x} = \log_2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{x} = \sqrt{2x+1}-1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x+1+2\sqrt{x} = 2x+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=1; x=4$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải bất phương trình: $4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12$

Bài 2. Giải phương trình: $2\left(x^2 - 3^{x+1}\right) = 3x\left(1-4.3^x\right) - 1$

Bài 3. Giải phương trình: $x^2.5^{x-1} - \left(3^x - 3.5^{x-1}\right)x + 2.5^{x-1} - 3^x - 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Giải phương trình: $2^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{x^2+4}-x-2\right)=4\sqrt{x^2+4}-4x-8$

Bài 5. Giải phương trình: $3^{x^2+\log_4(x+2)}+3.3^{\sqrt{x+2}+2}=3^{x^2+1}+9.3^{\sqrt{x+2}+\log_4(x+2)}$

MỘT SỐ DẠNG ĐẶT ẨN PHỤ CƠ BẢN

Dạng 1: Phương trình có dạng

$\alpha_k a^{kf(x)}+\alpha_{k-1}a^{(k-1)f(x)}+...+\alpha_1 a^{f(x)}+\alpha_0,\alpha_k\in\mathbb{R}.$

Đặt $t=a^{f(x)}$, đưa về giải phương trình bậc k với ẩn là t.

Dạng 2: Phương trình có dạng

$\alpha_1 a^{f(x)}+\alpha_2 b^{f(x)}+\alpha_3=0,ab=1$

Đặt $t=a^{f(x)}>0\Rightarrow b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}\Rightarrow\alpha_1 t+\dfrac{\alpha_2}{t}+\alpha_3=0\Leftrightarrow\alpha_1 t^2+\alpha_3 t+\alpha_2=0$

Dạng 3: Phương trình có dạng

$\alpha_1 a^{2f(x)}+\alpha_2\left(ab\right)^{f(x)}+\alpha_3 b^{2f(x)}=0$

Khi đó chia cả 2 vế của phương trình cho $b^{2f(x)}>0$. Phương trình trở thành

$\alpha_1 t^2+\alpha_3 t+\alpha_3=0,t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0.$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình : $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$

Lời giải :

Phương trình đã cho tương đương với :

$$2^{x^2-x}-\frac{4}{2^{x^2-x}}=3\Leftrightarrow 2^{2\left(x^2-x\right)}-3.2^{x^2-x}-4=0$$

Đặt $t=2^{x^2-x}>0$, khi đó phương trình trở thành :

$$t^2-3t-4=0\Leftrightarrow t=4>0\Leftrightarrow 2^{x^2-x}=2^2\Leftrightarrow x^2-x=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình : $2^{3x}-6.2^x-\dfrac{1}{2^{3(x-1)}}+\dfrac{12}{2^x}=1$

Lời giải :

Đặt $t=2^x>0$, khi đó phương trình trở thành :

$$t^3-6t-\frac{8}{t^3}+\frac{12}{t}=1\Leftrightarrow t^3-\frac{8}{t^3}-6\left(t-\frac{2}{t}\right)-1=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dặt $u=t-\dfrac{2}{t}\Rightarrow t^3-\dfrac{8}{t^3}=\left(t-\dfrac{2}{t}\right)\left(t^2+2+\dfrac{4}{t^2}\right)=\left(t-\dfrac{2}{t}\right)\left(\left(t-\dfrac{2}{t}\right)^2+6\right)=u\left(u^2+6\right)$

Khi đó phương trình trở thành :

$u\left(u^2+6\right)-6u-1=0\Leftrightarrow u=1\Leftrightarrow t-\dfrac{2}{t}=1\Leftrightarrow t=2>0\Leftrightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Bài 3. Giải bất phương trình : $x^{\log_{(x+1)}(x-1)}+(x-1)^{\log_{x+1}x}\le 2$

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x>0; x-1>0 \\ 0<x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

khi đó đặt $t=x^{\log_{(x+1)}(x-1)}\Rightarrow x=t^{\frac{1}{\log_{(x+1)}(x-1)}}\Rightarrow \log_{x+1}x=\dfrac{1}{\log_{(x+1)}(x-1)}\log_{x+1}t=\log_{x-1}t\Rightarrow t=(x-1)^{\log_{x+1}x}$

vậy bất phương trình tương đương với :

$t+t\le 2\Leftrightarrow t\le 1\Leftrightarrow x^{\log_{(x+1)}(x-1)}\le 1\Leftrightarrow \log_{(x+1)}(x-1)\le 0;$ do x>1 $\Leftrightarrow x\le 2$

vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;2]$.

Bài 4. Giải phương trình: $64^{\log_4{}^2 x}=3.2^{\log_2{}^2 x}+3.4^{\log_4{}^2 x}+4$

Lời giải :

Điều kiện $x>0$

Dặt $t=4^{\log_4{}^2 x}\Rightarrow 2^{\log_2{}^2 x}=t^2; 64^{\log_4{}^2 x}=t^3$

Khi đó phương trình trở thành

$t^3=3t^2+4t+4\Leftrightarrow (t-4)\left(t^2+t+1\right)=0\Leftrightarrow t=4$

$\Leftrightarrow 4^{\log_4{}^2 x}=4\Leftrightarrow \log_4{}^2 x=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Một số dạng đặt ẩn phụ khác

Cùng tìm hiểu qua một số ví dụ sau

Dạng 1: $\log_a f(x)=\log_b g(x)$, đặt $t=\log_a f(x)$

Bài 1. Giải phương trình: $\log_7 x=\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

+ Điều kiện $x > 0$, khi đó đặt

$$t = \log_7 x = \log_3\left(\sqrt{x}+2\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 7^t \\ \sqrt{x}+2 = 7^{\frac{t}{2}}+2 = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1(*)$$

Vế trái của phương trình (*) là hàm nghịch biến, vế phải là hàm hằng. Mặt khác nhận thấy $t = 2$ thỏa mãn phương trình.
Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$t = 2 \Leftrightarrow \log_7 x = 2 \Leftrightarrow x = 49$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 49$.

Bài 2. Giải phương trình: $\log_{\sqrt[4]{6}}\left(x^2-2x-2\right) = 2\log_{\sqrt{5}}\left(x^2-2x-3\right)$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x^2-2x-3 > 0$, khi đó phương trình tương đương với

$\log_6\left(x^2-2x-2\right) = \log_5\left(x^2-2x-3\right)$

Đặt $t = x^2-2x-3$, phương trình trở thành

$$\log_6(t+1) = \log_5 t = y \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^y \\ t+1 = 5^y+1 = 6^y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^y + \left(\frac{1}{6}\right)^y = 1(*)$$

Vế trái của phương trình (*) là hàm nghịch biến, vế phải là hàm hằng. Mặt khác ta lại có $y = 1$, thỏa mãn phương trình.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất

$$y = 1 \Leftrightarrow \log_5 t = 1 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x \in \{-2; 4\}$.

Dạng 2: $a^{\log_b(x+c)} = x, b = a+c$

Đặt $t = \log_b(x+c)$

Bài 1. Giải phương trình: $4^{\log_7(x+3)} = x$.

Lời giải:

Đặt $t = \log_7(x+3)$, khi đó phương trình trở thành

$$4^t = x = 7^t - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^t + 3\left(\frac{1}{7}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_7(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Bài 2. Giải phương trình: $2^{\log_3(x+5)} = x+4$.

Lời giải:

Đặt $t = \log_3(x+5)$, khi đó phương trình trở thành

$$2^t = x+4 = 3^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Dạng 3: $s^{ax+b} = c\log_s\left(dx+e\right)+\alpha x+\beta, d = ac+\alpha; e = bc+\beta$.

Khi đó đặt $ay+b=\log_s\left(dx+e\right)$, và chuyển về hệ phương trình

Bài 1. Giải phương trình: $7^{x-1} = 6\log_7\left(6x-5\right)+1$.

Lời giải:

Đặt $y-1=\log_7\left(6x-5\right) \Rightarrow 7^{y-1}=6x-5$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6\left(y-1\right)+1 \\ 7^{y-1} = 6x-5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1}-7^{y-1}=6y-6x \Leftrightarrow 7^{x-1}+6x=7^{y-1}+6y$$

Xét hàm số $f(t)=7^{t-1}+6t$, ta có $f'(t)=7^{t-1}\ln 7+6>0$. Nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow x=\log_7\left(6x-5\right)+1 \Leftrightarrow 7^{x-1}=6x-5$

Dễ thấy phương trình này có nghiệm $x=1, x=2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $(7+4\sqrt{3})^x-3(2-\sqrt{3})^x+2=0$

Bài 2. Giải phương trình: $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=1000$

Bài 3. Giải phương trình: $\left(5-\sqrt{21}\right)^x+7\left(5+\sqrt{21}\right)^x=2^{x+3}$

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{8}{2^{x-1}}+\dfrac{2^x}{2+2^x}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Bài 5. Giải phương trình:

$\left(7+5\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{2}-5\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+3\left(1+\sqrt{2}\right)^x+1-\sqrt{2}=0$

Bài 6. Giải phương trình: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{(x-1)^2}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$

Bài 7. Giải phương trình: $\left(\log_x\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)\left(3^{\log_2 x}-x^2+1\right)=0$

Bài 8. Giải phương trình: $64^{\log_4^2 x}=3.2^{\log_2^2 x}+3.4^{\log_4^2 x}+4$

ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1. Giải phương trình: $9^x+2\left(x-2\right)3^x+2x-5=0$

Lời giải:

Đặt $t=3^x$, khi đó phương trình trở thành

$t^2+2\left(x-2\right)t+2x-5=0$, coi đây là phương trình bậc 2 với ẩn là t

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $\Delta' = (x-2)^2 - (2x-5) = (x-3)^2$

Từ đó suy ra

$\left[\begin{array}{l} t = 2-x+x-3 = 2x-5 \\ t = 2-x-(x-3) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = -1 (VN) \\ 3^x = 5-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = 5-2x \Leftrightarrow f(x) = 3^x + 2x - 5 = 0 (*)$ Xét hàm số $f(x)$ ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0$, do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến. mặt khác ta nhận thấy $f(1) = 0$. Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 2. Giải phương trình: $\log_3^2(x+1) + (x-5)\log_3(x-1) - 2x + 6 = 0$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x > -1$.

Đặt $t = \log_3(x-1)$, khi đó phương trình trở thành

$t^2 + (x-5)t - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3+x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x+1) = 2 \\ \log_3(x+1) = 3-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 9 \\ x+1 = 3^{3-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ 3^x(x+1) - 27 = 0 (*) \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = 3^x(x+1) - 27$ có $f'(x) = 3^x(x+1)\ln 3 + 3^x > 0$. Nên $f(x)$ là hàm đồng biến.

Mặt khác ta lại có $f(2) = 0$. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 2, x = 8$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $3^{2x} - (2^x + 9)3^x + 9.2^x = 0$.

Bài 2. Giải phương trình: $9^{x^2} + (x^2 - 3)3^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0$.

Bài 3. Giải phương trình: $9^x + (x-12)3^x + 11 - x = 0$.

Bài 4. Giải phương trình: $3.25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x - 3$.

Bài 5. Giải phương trình: $4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x-3} = 16$.

Bài 6. Giải phương trình: $4^{x^2} + (x^2 - 7).2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0$

Bài 7. Giải phương trình: $2(x^2 - 3^{x+1}) = 3x(1 - 4.3^x) - 1$

Bài 8. Giải phương trình: $x^2.5^{x-1} - (3^x - 3.5^{x-1})x + 2.5^{x-1} - 3^x - 0$

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Tính chất 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và có $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0 \in (a;b)$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $f(x)$ tăng hoặc giảm trên một miền D thì phương trình $f(x)=0$ chỉ có tối đa một nghiệm trên D.

Tính chất 3: Nếu hàm số $f(x)$ tăng hoặc giảm trên một miền D thì với 2 số $u,v \in D, f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$.

Tính chất 4: Nếu hàm số $f(x)$ tăng và hàm số $g(x)$ là hàm hằng hoặc hàm giảm trên miền D thì phương trình $f(x)=g(x)$ có tối đa một nghiệm trên D.

Định lý Lagrange: Nếu hàm số $F(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $F'(x)$ trên khoảng $(a;b)$, khi đó tồn tại số $c \in (a;b) / F'(c) = \dfrac{F(a)-F(b)}{a-b}$.

Áp dụng với $F(a)=F(b) \Rightarrow \exists c \in (a;b) / F'(c)=0$.

Định lý Rolle: Nếu hàm số $f(x)$ có $\left[\begin{array}{l} f''(x)\ge 0 \\ f''(x)\le 0 \end{array}\right., \forall x \in D$ thì phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm.

Các tính chất $1,2,3,4$ được sử dụng trực tiếp khi làm bài.

Định lý Lagrange và định lý Rolle chúng ta sử dụng gián tiếp thông qua việc lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ (Xem các bài tập mẫu 6).

Bài 1. Giải phương trình: $x+2.3^{\log_2 x}=3$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x>0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$2.3^{\log_2 x}=3-x$. Nhận thấy vế trái là hàm số đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến. Mặt khác nhận thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 2. Giải phương trình: $-2^{x^2-x}+2^{x-1}=(x-1)^2$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$2^{x-1}+x-1=2^{x^2-x}+x^2-x \Leftrightarrow f(x-1)=f(x^2-x)$, trong đó $f(t)=2^t+t$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$, có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0$ vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến

Nên $f(x-1)=f(x^2-x) \Leftrightarrow x-1=x^2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x \in \{0;1\}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Bài 3. Giải phương trình: $\log_3\left(\sqrt{x^2-3x+2}+2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1}=2.$

Lời giải:

+ Điều kiện $x^2-3x+2\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le 1 \end{array}\right.(*)$

Đặt $u=\sqrt{x^2-3x+2}\ge 0$, khi đó phương trình trở thành

$\log_3(u+2)+\left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2}-2=0(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+2)+5^{t^2-1}-2, t\ge 0$. Ta có

$f'(t)=\frac{1}{(t+2)\ln 3}+2t.5^{t^2-1}.\ln 5>0, \forall t\ge 0$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến. Mặt khác ta lại có $f(1)=0$, do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$u=1\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=1\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 4. Giải phương trình: $2^{x^2-x}+9^{3-2x}+x^2+6=4^{2x-3}+3^{x-x^2}+5x.$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$2^{x^2-x}+3^{6-4x}+x^2+6=2^{4x-6}+3^{x-x^2}+5x$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}+x^2-x-3^{x-x^2}=2^{4x-6}+4x-6-3^{6-4x}$

$\Leftrightarrow f\left(x^2-x\right)=f(4x-6)$

Trong đó $f(t)=2^t+t-3^{-t}$, ta có $f'(t)=2^t\ln 2+1+3^{-t}\ln 3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f\left(x^2-x\right)=f(4x-6)\Leftrightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x\in\{2;3\}$.

Bài 5. Giải phương trình: $3^x.2x=3^x+2x+1.$

Lời giải:

Nhận thấy $x=-\frac{1}{2}$, không là nghiệm của phương trình. Khi đó phương trình tương đương với

$3^x=\frac{2x+1}{2x-1}(*)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vế trái của phương trình (*) là một hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$, vế phải của (*) là một hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Nên trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ phương trình có tối đa 1 nghiệm.

Nhận thấy $x=\pm 1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=\pm 1$.

Bài 6. Giải phương trình: $4^x+6^x=25x+2$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$4^x+6^x-25x-2=0.$

Xét hàm số $f(x)=4^x+6^x-25x-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$f'(x)=4^x\ln 4+6^x\ln 6-25, f''(x)=4^x\ln^2 4+6^x\ln^2 6>0$. Do đó $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác ta lại có $f'(0)=\ln 4+\ln 6-25<0; f'(2)=16\ln 4+36\ln 6-25>0$

Nên $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(0;2)$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	0	x_0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↘		$f(x_0)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm.

Nhận thấy $x=0, x=2$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x\in\{0;2\}$.

$$\log_3\left(x^2+x+1\right)-\log_3 x=2x-x^2.$$

$x>0$

$$\log_3\frac{x^2+x+1}{x}=2x-x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x}=3^{2x-x^2}$$

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}+1=3, \forall x>0$$

$x=1$.

$g(x)=3^{2x-x^2}=3^{1-(x-1)^2}\le 3^1=3$ $\quad$ $x=1$.

$$f(x)=g(x)=3\Leftrightarrow x=1$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Bài 8. Giải phương trình: $\log_{2012}\dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}=x^2+3x+2$.

Ta có $\begin{cases}x^2+x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}\\2x^2+4x+5>0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ và $2x^2+4x+4-\left(x^2+x+3\right)=x^2+3x+2$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\log_{2012}\frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}=\left(2x^2+4x+5\right)-\left(x^2+x+3\right)$$

Đặt $u=x^2+3x+2, v=2x^2+4x+5$, khi đó phương trình trở thành:

$$\log_{2012}\frac{u}{v}=v-u\Leftrightarrow\log_{2012}u+u=\log_{2012}v+v$$

Xét hàm số $f(t)=\log_{2012}t+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2012}+1>0,\forall t>0$ do đó hàm số $f(t)$ đồng biến.

Vậy phương trình tương đương với:

$f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+x+3=2x^2+4x+5\Leftrightarrow x=-1;x=-2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x=-1;x=-2$.

Bài 9. Giải phương trình:

$$4(x-2)\left[\log_3(x-2)+\log_2(x-3)\right]=15(x+1)$$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện $x>3$, khi đó phương trình tương đương với

$$\log_3(x-2)+\log_2(x-3)=\frac{15(x+1)}{4(x-2)}\quad(*)$$

Phương trình (*) có vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến. Mặt khác lại có

Nhận thấy $f(11)=g(11)=5\Rightarrow x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Đpcm

Bài 10. Giải phương trình: $5^x+4^x+3^x+2^x=\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{6^x}-2x^3+5x^2-7x+17$

<u>Lời giải:</u>

Kí hiệu vế trái của phương trình là $f(x)$, vế phải của phương trình là $g(x)$

Ta có vế trái là hàm đồng biến; vế phải là hàm nghịch biến. Mặt khác nhận thất $f(1)=g(1)=13$.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $2^{x^2-x}-2^{x+8}=8+2x-x^2$.

Bài 2. Giải phương trình: $x+x^{\log_2 3}=x^{\log_2 7}-2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Giải phương trình: $9^x = 5^x + 4^x + 2\left(\sqrt{20}\right)^x$.

Bài 4. Giải phương trình: $3.x^{\log_3 x} + \left(\log_3 x - 1\right)^2 = x^2$.

Bài 5. Giải phương trình: $2^x + 3^x = 5$.

Bài 6. Giải phương trình: $3^x + x - 4 = 0$.

Bài 7. Giải phương trình; $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{5}\right)^x$.

Bài 8. Giải phương trình: $8^x\left(3x+1\right) = 4$.

Bài 9. Giải phương trình: $x\left(2.3^x - 1\right) = 3^x + 2$.

Bài 10. Giải phương trình: $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

Bài 11. Giải phương trình: $2^{3x} + 3x.2^{2x} + \left(1+3x^2\right)2^x + x^3 + x - 2 = 0$.

Bài 12. Giải phương trình: $3^x + 5^x = 6x + 2$.

Bài 13. Giải các bất phương trình sau:

1.1- $\left(x+1\right)\log^2_{\frac{1}{2}} x + \left(2x+5\right)\log_{\frac{1}{2}} x + 6 \ge 0$.

1.2- $\log_2\left(2^x+1\right) + \log_3\left(4^x+2\right) \le 2$.

1.3- $\dfrac{3}{\log_2\left(x+1\right)} > \dfrac{2}{\log_3\left(x+1\right)}$.

1.4- $\dfrac{\lg\left(\dfrac{5+x}{5-x}\right)}{2^x - 3x + 1} < 0$.

1.5- $\log_7 x < \log_3\left(\sqrt{x}+2\right)$.

1.6- $\log_2\left(\sqrt{x^2-5x+5}+1\right) + \log_3\left(x^2-5x+7\right) \le 2$.

1.7- $2^{-|x-2|}.\log_2\left(4x - x^2 - 2\right) \ge 1$.

1.8- $\left(4.3^x + 3^{-x}\right)^{3\log_3(x-1) - \log_3(x-1)(2x+1)} > 1$.

1.9- $\left(x+1\right)\log^2_{\frac{1}{3}} x + 2\left(x+3\right)\log_{\frac{1}{3}} x + 8 \le 0$.

1.10- $\dfrac{\log_4\left(x^2-4x-11\right)^2 - \log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{2-5x-3x^2} \ge 0$.

Bài 14. Giải các phương trình sau:

1.1. $\log_3 \dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5} = x^2 + 3x + 2$.

1.2. $\log_3\left(x^2+x+1\right) - \log_3 x = 2x - x^2$.

Bài 15. Giải các phương trình:

1.1. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = -x^2 + x - 1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.2. $\dfrac{(x-1)^2(\log_5 x-11+2x)}{x+3}=0$.

1.3. $\dfrac{8}{3}.x^{\log_3 4}=x^2.2^{\log_3 x}-x^{\log_3 2}$.

1.4. $3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+5^x-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-\left(\dfrac{5}{12}\right)^x=-3x+10$.

1.5. $2\log_6\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}\right)=\log_4\sqrt{x}$.

1.6. $3^x+2^x=3x+2$.

1.7. $\log_2\dfrac{2^x-1}{|x|}=1+x-2^x$.

1.8. $4^x-2^{x+1}+2\left(2^x-1\right)\sin\left(2^x+y-1\right)+2=0$

Bài 16. Giải các phương trình:

1.1. $3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+2^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{6}\right)^x=-2x+6$

TỔNG HỢP BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Với cách giải thông thường của bất phương trình là xét hai trường hợp cơ số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 1. Tuy nhiên các em nên làm theo cách gộp luôn cả tích $(a-1)$ vào bất phương trình, với cách này thì bài giải sẽ gọn và nhanh hơn cả.

Với các bất phương trình có dạng sau, ta biến đổi như dưới đây.

Dạng 1 : $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\(a-1)\left(f(x)-g(x)\right)\ge 0\end{cases}$

Dạng 2 : $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}0<a\ne 1\\f(x)>0,g(x)>0\\(a-1)\left(f(x)-g(x)\right)\ge 0\end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải bất phương trình: $4^{\frac{x-1}{x+1}}\le\dfrac{1}{4}.32^{\frac{x}{x-2}}$.

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$$2^{\frac{2(x-1)}{x+1}}\le 2^{-2}.2^{\frac{5x}{x-2}}\Leftrightarrow 2^{\frac{2x-2}{x+1}}\le 2^{\frac{3x+4}{x-2}}\Leftrightarrow\frac{2x-2}{x+1}\le\frac{3x+4}{x-2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow \frac{-x^2-13x}{(x+1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow x \le -13 \vee -1 < x < 0 \vee x > 2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là
$S = (-\infty; 13] \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty).$

Bài 2. Giải bất phương trình: $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} \le \frac{4}{2-\sqrt{3}}.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} \le 4$

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} = \frac{1}{t}$

Khi đó bất phương trình trở thành

$t + \frac{1}{t} \le 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \le t \le 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \le \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x} \le 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow -1 \le x^2 - 2x \le 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$.

Bài 3. Giải bất phương trình :
$\log_{\frac{\pi}{4}}\left[\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right] < 0.$

Lời giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{\frac{\pi}{4}}\left[\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right) > 0 \\ \log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2-x} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x} > 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 0 \\ 2x^2 - x \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 2x^2 - x > 4 - 4x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \vee \begin{cases} x \le 2 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Bài 4. Giải bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+4}{x+4}\right) < 0.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

: $\log_{0,7}\left(\log_6\dfrac{x^2+4}{x+4}\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_6\dfrac{x^2+4}{x+4}>0\\ \log_6\dfrac{x^2+4}{x+4}>1\end{cases}\Leftrightarrow\log_6\dfrac{x^2+4}{x+4}>1$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2+4}{x+4}>6\Leftrightarrow\dfrac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0\Leftrightarrow-4<x<-3\vee x>8.$

Vậy tập nhiệm của bất phương trình là $S=(-4;-3)\cup(8;+\infty)$.

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)\le 1$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases}0<x\ne 1\\ 9^x-72>0\\ \log_3\left(9^x-72\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow 9^x-72>1\Leftrightarrow x>\log_9 73>1(*)$

Khi đó với $x>1$, bất phương trình tương đương với

$\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)\le 1\Leftrightarrow\log_3\left(9^x-72\right)\le x\Leftrightarrow 9^x-72\le 3^x\Leftrightarrow 9^x-3^x-72\le 0$

Xét hàm số $f(x)=9^x-3^x-72$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy bất phương trình

$f(x)\le 0=f(2)\Leftrightarrow x\le 2.$

Kết hợp với điều kiện suy nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\log_3 73;2\right]$.

Bài 6. Giải bất phương trình: $\log_x(3x-1)>\log_x\left(x^2+1\right)$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\dfrac{1}{3}<x\ne 1$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$\log_x(3x-1)>\log_x\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow(x-1)\left(3x-1-x^2-1\right)>0\Leftrightarrow(x-1)^2(x-2)<0\Leftrightarrow x<2$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của phương trình là

$S=\left(\dfrac{1}{3};2\right)\setminus\{1\}$.

Bài 7. Giải bất phương trình: $\log_{x(3-x)}(3-x)>1$.

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với

$\log_{x(3-x)}(3-x)>1\Leftrightarrow\log_{x(3-x)}(3-x)>\log_{x(3-x)}x(3-x)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x(3-x) \neq 1 \\ 3-x > 0 \\ \left(x(3-x)-1\right)\left(3-x-x(3-x)\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x(3-x) \neq 1 \\ 3-x > 0 \\ \left(x^2-3x+1\right)(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\log_{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)} 2 \leq \log_{\sqrt{x+1}} 2.$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 0 < x+1 \neq 1 \\ 0 < \sqrt{x+2}-\sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq \frac{1}{4}.$

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\log_{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)} 2 \leq \log_{\sqrt{x+1}} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) \geq \log_2 \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x} \geq \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 1-x \geq 2\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (1-x)^2 \geq 4\left(x^2+x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(0; \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Bài 9. Giải bất phương trình: $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+8}\right).$

Lời giải:

+ Điều kiện $x \geq 2$

Khi đó ta có vế trái của bất phương trình $VT = \log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geq l\,og_2 4 = 2.$

$$VP = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right) \leq \log_3\left(\frac{1}{1}+8\right) = 2.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$VP = VT = 2 \Leftrightarrow x = 2.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Bài 10. Giải bất phương trình: $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} 0 < 2x^2-3x+1 \neq 1 \\ 0 < x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 1 < x < \dfrac{3}{2} \\ x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Xét $A = log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{3}{2}$.

Xét $B = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy

+ Nếu $-1 < x < 0, VT < 0; VP > 0 \Rightarrow BPT$ vô nghiệm.

+ Nếu $0 < x < \dfrac{1}{2}, VT > 0; VP < 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

+ Nếu $1 < x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow VT > 0, VP < 0 \Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm $x \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

+ Nếu $x > \dfrac{3}{2} \Rightarrow VT < 0, VP < 0$, khi đó bất phương trình tương đương với

$log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1} < log_{\frac{1}{3}}(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} > x+1 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x^2-3x+1 > x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 5 \end{array}\right.$

Kết hợp với trường hợp đang xét suy ra $x > 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

Bài 11. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5 \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \le 0$.

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x^2-4x+3 \ge 0 \\ 8x-2x^2-6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Với $x=1$, bất phương trình trở thành $\log_5 \frac{1}{5}+1\le 0$ luôn đúng.

Với $x=3$, bất phương trình trở thành $\log_5 \frac{3}{5}+\frac{1}{3}\le 0 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 12. Giải bất phương trình: $x\left(3\log_2 x-2\right)>9\log_2 x-2$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x>0$, khi đó bất phương trình tương đương với

$3\left(x-3\right)\log_2 x>2\left(x-1\right)$

Nhận thấy $x=3$ không là nghiệm của bất phương trình.

+ Nếu $x>3$, khi đó bất phương trình trở thành

$$\frac{3}{2}\log_2 x>\frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}\log_2 x-\frac{x-1}{x-3}>0$$

Ta có $f'(x)=\frac{3}{2x\ln 2}+\frac{2}{\left(x-3\right)^2}>0$, nên $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left(3;+\infty\right)$. Mặt khác $f(4)=0$, vậy $f(x)>0\Leftrightarrow x>4$.

+ Nếu $x<3$, khi đó bất phương trình trở thành

$$\frac{3}{2}\log_2 x<\frac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}\log_2 x-\frac{x-1}{x-3}<0$$

Ta có $f'(x)=\frac{3}{2x\ln 2}+\frac{2}{\left(x-3\right)^2}>0$, nên $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;3\right)$. Mặt khác $f(1)=0$, vậy $f(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(0;1\right)\cup\left(4;+\infty\right)$.

Bài 13. Giải bất phương trình: $\frac{2^x+2x-5}{x-2}>1$.

Lời giải:

+ Điều kiện $x\neq 2$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\frac{2^x+2x-5}{x-2}>1 \Leftrightarrow \frac{2^x+2x-5}{x-2}-1>0 \Leftrightarrow \frac{2^x+x-3}{x-2}>0$$

Xét hàm số $f(x)=2^x+x-3$, ta có $f'(x)=2^x\ln 2+1>0$. Do đó $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác ta lại có $f(1)=0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x>1; f(x)<0\Leftrightarrow x<1$.

Vậy nếu $x<1\Rightarrow f(x)<0; x-2<0\Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm với $x<1$.

Nếu $1<x<2\Rightarrow f(x)>0; x-2<0\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $x>2\Rightarrow f(x)>0; x-2>0\Rightarrow$ bất phương trình có nghiệm với $x>2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Bài 14. Giải bất phương trình : $\left(2^x+3.2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$

Lời giải :

Điều kiện $x>0$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x+3.2^{-x}>1\\ 2\log_2 x-\log_2(x+6)>0\end{cases}\\ \begin{cases}2^x+3.2^{-x}<1\\ 2\log_2 x-\log_2(x+6)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;+\infty)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải bất phương trình: $\dfrac{2^{x-1}+6x-11}{x-2}>4.$

Bài 2. Giải bất phương trình: $2^{2x^2-4x+2}-16.2^{2x-x^2-1}-2\le 0.$

Bài 3. Giải bất phương trình : $3^{2x+1}-2^{2x+1}-5.6^x\le 0.$

Bài 4. Giải bất phương trình: $\dfrac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1.$

Bài 5. Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}\le\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}.$

Bài 6. Giải bất phương trình: $\sqrt{-3x^2-5x+2}+2x>3.2^x\sqrt{-3x^2-5x+2}+4x^2.3^x.$

Bài 8. Giải bất phương trình: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}\left[\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2}{2}+2^{\log_2(x-1)}\right)+3\right]}\ge 1.$

Bài 9. Giải bất phương trình: $x^4-8e^{x-1}>x\left(x^2e^{x-1}-8\right).$

Bài 10. Giải bất phương trình: $4x^2+x.2^{x^2+1}+3.2^{x^2}>x^2.2^{x^2}+8x+12.$

Bài 11. Giải các bất phương trình sau

1. $\log_{x^2}\dfrac{4x-2}{|x-2|}\ge\dfrac{1}{2}.$
2. $\log_{\frac{x+1}{2}}\log_2\dfrac{2x-1}{x+3}<0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

3. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \dfrac{24-2x-x^2}{14} > 1.$

4. $\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\left(\dfrac{2}{x}-1\right) \le \left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)\log_x \dfrac{2}{x}.$

Bài 12. Giải các bất phương trình sau

1. $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > \left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}.$

2. $\dfrac{\lg\dfrac{5+x}{5-x}}{2^x-3x+1} < 0.$

3. $\dfrac{x-1}{\log_3\left(9-3^x\right)-3} \le 1.$

4. $\log_{\frac{1}{2}} \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$

Bài 13. Giải các bất phương trình sau

1. $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt[3]{2-x}\right).$

2. $\log_4\left(18-2^x\right)\log_2\left(\dfrac{18-2^x}{2}\right) \le -1.$

3. $\dfrac{\log_2\left(x^2-9x+8\right)}{\log_2\left(3-x\right)} < 2.$

4. $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-3}{1-x}} < 1.$

Bài 14. Giải các bất phương trình sau

1. $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2} > \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(x+3\right).$

2. $\log_{\frac{1}{3}}\log_4\left(x^2-5\right) > 0.$

3. $\log_3 \dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{x^2+\left|x-5\right|} \ge 0.$

4. $\dfrac{\log_5\left(x^2-4x+11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x+11\right)^3}{\sqrt{2-5x-3x^2}} \ge 0.$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

1.1. $\dfrac{1-\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x} = \lg x^4+5$

1.2. $2\log_2 \dfrac{x-3}{x-7}+1 = \log_3 \dfrac{x-3}{x-1}$

Bài 16. Giải các bất phương trình sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

1.1. $(x+1)\log^2_{\frac{1}{2}} x+(2x+5)\log_{\frac{1}{2}} x+6\ge 0$.

1.2. $\dfrac{3}{\log_2(x+1)}>\dfrac{2}{\log_3(x+1)}$.

1.3. $\dfrac{\lg\dfrac{5+x}{5-x}}{2^x-3x+1}<0$.

1.4. $\log_2\left(\sqrt{x^2-5x+5}+1\right)+\log_3\left(x^2-5x+7\right)\le 2$.

1.5. $\log_7 x<\log_3\left(\sqrt{x}+2\right)$.

1.6. $2^{-|x-2|}.\log_2\left(4x-x^2-2\right)\ge 1$.

1.7. $\left(4.3^x+3^{-x}\right)^{3\log_3(x-1)-\log_3(x-1)(2x+1)}>1$

1.8. $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\ge 0$.

1.9. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}}>\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$.

1.10. $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}+\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x^2-3x+2}}>0$.

1.11. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{9x-x^2}+3\right)>\log_3\dfrac{27}{\sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}}-3$.

1.12. $\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right)>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}+1$

Bài 17. Giải các bất phương trình:

1.1. $\left(2^{2x+1}-9.2^x+4\right)\sqrt{x^2+2x-3}\ge 0$.

1.2. $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0$.

1.3. $\dfrac{3^x+x-4}{x^2-x-6}>0$.

1.4. $\sqrt{-3x^2-5x+2}+2x>3^x.\sqrt{-3x^2-5x+2}+(2x)^2.3^x$.

1.5. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_7\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)<\log_4\left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right)$.

1.6. $2^{(\log_2 x)^2}+x^{\log_2 x}<0$.

1.7. $2\log_8(x-2)+\log_{\frac{1}{8}}(x-3)>\dfrac{2}{3}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

1.8. $\frac{1}{\log_4(x+3)} > \frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}}$

1.9. $\log_{\frac{x+6}{3}} \log_2 \frac{x-1}{x+2} > 0$

1.10. $(4x^2-16x+7)\log_3(x-3) > 0$

1.11. $\left(\log_{\frac{1}{2}}(1-|x|)-\frac{1}{2}\right).\log_x \frac{4x+1}{6(x+1)} < 0$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Bài 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2-4y \\ \frac{4^x+2^{x+1}}{2^x+2} = y \end{cases}$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2-4y \\ \frac{2^x(2^x+2)}{2^x+2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2-4y \\ y = 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-5y^2+4y = 0 \\ y = 2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4 \end{array}\right. \\ y = 2^x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là $(0;1),(2;4)$.

Bài 2.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4^{x+y}+3.4^{2y} = 8 \\ x+3y = 2-\log_4 3 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 4^{x+y-1}+3.4^{2y-1} = 2 \\ (x+y-1)+(2y-1) = -\log_4 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1}+3.4^{2y-1} = 2 \\ (x+y-1)+(2y-1) = \log_4 3^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1}+3.4^{2y-1} = 2 \\ 4^{(x+y-1)+(2y-1)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Đặt $u = 4^{x+y-1}, v = 4^{2y-1} \Rightarrow \begin{cases} u+3v = 2 \\ uv = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} = 1 \\ 4^{2y-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1+\log_4 3) \\ y = \frac{1}{2}(1-\log_4 3) \end{cases}$

Bài 3.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3.2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4.4^{x^2-1}.2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3.4^{x^2-1}.2^y = 4 \end{cases}$$

Đặt $u = 4^{x^2-1}, v = 2^y$, khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1 \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(u^2 - 4uv + v^2\right) = \left(v^2 - 3uv\right) \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u^2 - 13uv + 3v^2 = 0 \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-3v)(4u-v) = 0 \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 3v \\ u = \dfrac{1}{4}v \end{array}\right. \\ v^2 - 3uv = 4 \end{cases}$$

+ Nếu $u = 3v \Rightarrow v^2 - 9v^2 = 4 \Rightarrow$ vô nghiệm.

+ Nếu $u = \dfrac{1}{4}v \Rightarrow v^2 - \dfrac{3}{4}v^2 = 4 \Leftrightarrow v = 4 > 0 \Rightarrow u = 1$

Vậy $\begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 4.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{2|x|+1} - 3.2^{|x|} = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = 2^{2|x|} - 2 \end{cases}$

Lời giải:

Đặt $u = 2^{|x|} \geq 1$.Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u^2 - 3u = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-y)(u+y-1) = 0 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$

Bài 2.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Bài 3.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+7xy+6y^2=0 \\ 3^{x+2y+1}-3^{4y+x+1}+3^{3y+x}=0 \end{cases}$.

Bài 4.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1+4^{x-y}\right).5^{1-x+y}=1+3^{x-y+2} \\ x^2-3y\sqrt{y-\dfrac{1}{x}}=1-2y \end{cases}$

Bài 5.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y}+e^{x+y}=2(x+1) \\ e^{x+y}=x-y+1 \end{cases}$

Bài 6.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases}$

Bài 7.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x-2^y=(y-x)(xy+2) \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

Bài 8.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) \\ 2^{(x+y)^2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Bài 9.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)} \\ 4|y|-\left|y-1\right|+(y+3)^2\le 8 \end{cases}$

Bài 10.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+xy+\dfrac{3}{2}=2^y \\ \left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y-4x+1=0 \end{cases}$

Bài 11.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^4+y\right)3^{y-x^4}=1 \\ 8\left(x^4+y\right)-6^{x^4-y}=0 \end{cases}$

Bài 12.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 32.2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3.3^{\frac{2(1-y)}{y}} \end{cases}$

Bài 13.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 5^{\frac{x-y}{3}} \\ 5^{\frac{x-y}{3}} = 5.3^{x-y-3} \end{cases}$

Bài 14.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1 = 6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y \end{cases}$

Bài 15.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right) = 0 \end{cases}$

Bài 16.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}.3^y = \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ y+\log_3 x = 1 \end{cases}$

Bài 17.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x+y) - \log_3(2x-y) = 1 \end{cases}$

Bài 18.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\left(x^2+y^2\right) = 1+\log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 81 \end{cases}$

Bài 19.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9\left(9x^2\right) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$

Bài 20.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$

Bài 21.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$

Bài 22.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 23.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8\left(\sqrt{x-y} + 2\right) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$

Bài 24.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x - y \end{cases}$

Bài 25.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$

Bài 26.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x(6x+4y) = 2 \\ \log_y(6y+4x) = 2 \end{cases}$

Bài 27.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}\left(x^2 - 2x + 1\right) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

Bài 28.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$

Bài 29.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^{\log_2 x} + \log^2{}_2\left(\dfrac{x}{2}\right) = y^2 \\ \log_2(xy - x + y) = 2\log_2 x \end{cases}$

Bài 30.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{x+y}(3x+y) + \log_{3x+y}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = 3 \\ 4^{x+y} + 2.4^{\frac{x}{x+y}} = 20 \end{cases}$

Bài 31.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_3 y - 2^x = 4 \\ 2^x.\log_3 y = \log_3 y^2 + 2^{x+1} \end{cases}$

Bài 32.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_3 y = \log^2_{\frac{1}{2}} x - 1 \\ \log_2 y = (\log_2 x - 1)\log_2 3 \end{cases}$

Bài 33.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_{3-x}(6-3y+xy-2x) + \log_{2-y}(x^2-6x+9) = 6 \\ \log_{3-x}(5-y) - \log_{2-y}(x+2) = 1 \end{cases}$

Bài 34.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+3x+\ln(2x+1) = y \\ y^2+3y+\ln(2y+1) = x \end{cases}$

Bài 35.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$

Bài 36.

Chứng minh với mỗi số dương a, hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

Bài 37.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Bài 38.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x+y) = x + y - 1 \\ \log_{x+y+2}(xy+1) = x + y - 1 \end{cases}$

Bài 39.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y-x)(x^2-xy+y^2) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Bài 40.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2 \\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right) + \log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right) = (x-2)^3 \end{cases}$

Bài 41.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2 \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3 \end{cases}$

Bài 42.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=1+3\lg 2 \\ \lg\left(x+y\right)+\lg\left(x-y\right)=\lg 3 \end{cases}$

Bài 43.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27 \\ \log_3 y-\log_3 x=1 \end{cases}$

Bài 44.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_4\left(x^2+y^2\right)-\log_4\left(2x\right)+1=\log_4\left(x+3y\right) \\ \log_4\left(xy+1\right)-\log_4\left(4y^2+2y-2x+4\right)=\log_4\dfrac{x}{y}-1 \end{cases}$

Bài 45.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\left(\log_4 x\right)=\log_4\left(\log_2 y\right) \\ \log_4\left(\log_2 x\right)=\log_2\left(\log_4 y\right) \end{cases}$

Bài 46.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4^{\log_3(xy)}=2+\left(xy\right)^{\log_3 2} \\ x^2+y^2+3x+3y=12 \end{cases}$

Bài 47.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+xy+y=14 \\ \log_{x+1}\left(y+2\right)-\log_{y-2}\left(x+1\right)=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

Bài 48.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \lg^2 x=\lg^2 y+\lg^2\left(xy\right) \\ \lg^2\left(x-y\right)+\lg x.\lg y=0 \end{cases}$

Bài 49.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\log_3 y=3 \\ \left(2y^2-y+12\right).3^x=81y \end{cases}$

Bài 50.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_3 x^2-\log_3 y=0 \\ \left|x\right|^3+y^2-2y=0 \end{cases}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

A. PHẦN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Bài 1. Giải phương trình: $\log_2\left(8-x^2\right)+\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)-2=0\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Bài 2. Giải phương trình: $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$.

Bài 3. Giải phương trình: $\log_{2x-1}\left(2x^2+x-1\right)+\log_{x-1}\left(2x-1\right)^2=4$.

Bài 4. Giải phương trình: $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$.

Bài 5. Giải bất phương trình: $\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$.

Bài 6. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-3x+2}{x}\geq 0$.

Bài 7. Giải bất phương trình: $2\log_3\left(4x-3\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)\leq 2$.

Bài 8. Giải bất phương trình: $\left(\log_x 8+\log_4 x^2\right)\log_2\sqrt{2x}\geq 0$.

Bài 9. Giải phương trình: $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{\log_2 2012}-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{\log_2 2011}=2x$.

Bài 10. Giải phương trình: $\left(\log_2 x\right)^2+x\log_6\left(x+2\right)=\log_2 x\left(\frac{x}{2}+2\log_6\left(x+2\right)\right)$.

Bài 11. Giải bất phương trình: $\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{2x^2-3x+1}}>\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(x+1\right)}$.

Bài 12. Giải phương trình:

$$2.9^x+\left(4x-39-\sqrt{3^x+16}\right).3^x-\left(2x-13\right)\left(13+\sqrt{3^x+16}\right)=0.$$

Bài 13. Giải bất phương trình:

$$\left(x-3\right)\log_2\left(x^2-2\right)<\left(x-3\right)\left[\log_2\left(x+11\right)+2\right]$$

Bài 14. Tìm nghiệm $x\in\left(0;2\right)$ của phương trình

$$4^{\frac{1}{x}-2x+1}-4^{x^2-2x+1}=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$$

Bài 15. Giải bất phương trình:

$$\frac{2^{4-x}-x+1}{\left(\log_2|x|-2\right)\left(x^2-25\right)}\geq 0$$

Bài 16. Giải bất phương trình:

$$3^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)3^{x-2}\geq 1$$

Bài 17. Giải phương trình

$$\frac{\log_3\left(2x+1\right)+\log_5\left(4x+1\right)+\log_6\left(6x+1\right)-3x}{x^2\left(x^3-3x+2\right)}=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

Bài 18. Giải phương trình: $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} + x\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 1 + x^2$.

Bài 19. Giải các bất phương trình:

1.1. $\dfrac{\left(5^{x-2}+x-3\right)\left(x^2+5x+6\right)}{3^{x-1}-1} \ge 0$.

1.2. $\dfrac{\left(3.2^{x+2}-7x-17\right)\left(\log_4\left(x+4\right)+\log_7\left(x+7\right)-2\right)}{x^2-9} < 0$.

1.3. $\sqrt{2.6^x-4^x} + \sqrt[3]{3.12^x-2.8^x} \ge 2.3^x$.

1.4. $4^x + \left(x^3-x\right)\ln\left(x^2+x+2\right) \ge 4^{\sqrt[3]{x}}$.

1.5. $x^{\log_2 x} + x^{5\log_x 2-\log_2 x} - 18 < 0$.

1.6. $2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2^{2x+1}+4x+2}$.

1.7. $\left(2^x-2\right)^2 < \left(2^x+2\right)\left(1-\sqrt{2^x-1}\right)^2$.

1.8. $2^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 2 \le 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$.

1.9. $\dfrac{4^x-2^{x+2}-x^2+2x+3}{\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt{2x+1}} > 0$

1.10. $\left(\sqrt{5}+1\right)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3.\left(\sqrt{5}-1\right)^{-x^2+x}$

1.11. $\log_{0,25}\left(\dfrac{2-x}{16^x-2x}\right) \le x$

1.12. $\left(2+\sqrt{5}\right)^{\log_{0,5} 0,5x} \ge \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\log_2 x+\log_{2x} 0,25}$

1.13. $3^{2\log_2\left(x^3+3x+4\right)} - 8\left(x^3+3x+4\right)^{\log_2 3} < 9$

1.14. $3^{3x-x^2-1} \ge 2 + 3^{x^3-1}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

1.15. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\dfrac{2x}{2-x}\right)-4} \le \sqrt{5}$

1.16. $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + \left(x^2-x\right)2^{x+1} + x.2^{x+2}.\sqrt{2-x^2}$

1.17. $5x + \sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > \left(x^2-x\right)\log_2 x + 5 + \sqrt{6+x-x^2}$

1.18. $\log_4\left(x^2-x-8\right) \le 1 + \log_3 x$

1.19. $\dfrac{6-3^x}{x} > \dfrac{10}{2x-1}, x > 0$

1.20. $3^{x^2-4} + \left(x^2-4\right).3^{x-2} \ge 1$

1.21. $4x^2 + x.3^{\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} < 2.3^{\sqrt{x}}x^2 + 2x + 6$

1.22. $\log_2\left(\sqrt{x^2+3}-x^2-1\right) + 2\log_2 x \le 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.23. $\ln\left(x^4+2x^3+2x^2-2x+1\right)-\ln\left(x^3+x^2\right)\le \ln\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$

1.24. $\left(3^x-2x-1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)>0$

1.25. $\log_2\left(4x^2-4x+1\right)-2x>2-\left(x+2\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)$

1.26. $\log_{\frac{x}{4}}\left(\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right)<0$

Bài 20. Giải các phương trình sau:

1.1. $\log_{2x-1}\left(2x^2+x-1\right)+\log_{x+1}\left(2x-1\right)^2=4$

1.2. $\log_x\left(3-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\frac{1}{2}$

1.3. $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x+2\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$

1.4. $\log_2\frac{2^x-1}{|x|}=1+x-2^x$

1.5. $2^{2x+1}+2^{3-2x}=\frac{8}{\log_3\left(4x^2-4x+4\right)}$

1.6. $\left(\log_x\sqrt{2x+1}-2\right)\left(\frac{x^2+x+1}{x}-3^{2x-x^2}\right)=0$

1.7. $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)=\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right)$

1.8. $\sqrt{3+\log_2\left(x^2-4x+5\right)}+2\sqrt{5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=6$

1.9. $\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)-2\right)\left(\left(1+x\right)\left(2+4^x\right)-3.4^x\right)=0$

1.10. $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$

1.11. $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$

1.12. $x^{\log_2 9}=x^2.3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}$

1.13. $2^x\left(2^{2^x+x}+1\right)+\log_2 x+2x=\frac{9x+512}{x}$

1.14. $3^x=1+x+\log_3\left(1+2x\right)$

1.15. $\log_4\left(2x+\frac{1}{2x}\right)+\log_{0,25}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{29}{4}\right)=\log_{0,5}\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}}$

1.16. $x^3-\sqrt[3]{x+2\ln x}-\frac{2}{3}\ln\left(x+2\ln x\right)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

1.17. $\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}+x.\left(\sqrt{3}-1\right)^{\log_2 x}=1+x^2$

1.18. $(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}+x-1=x\left(x^2+1\right)\ln\dfrac{x^2+1}{x^2}, x\geq 1$

1.19. $\ln\left(x^2+x+1\right)+x+x^4=0$

1.20. $x^2-x-1=x^2.e^{x+1}-(x+1)e^{x^2}$

1.21. $\log_{2x}\left(\dfrac{x^3}{2}\right)+\log_{\sqrt{2}}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=2$

1.22. $\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2 x=3x^2-2x^3$

1.23. $\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4$

1.24. $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}$

1.25. $\log_2\left(x^2+2\right)\log_{2-x}2-2=0$

1.26. $\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\leq\left(2+\sqrt{14x-2x^2-24}\right)\log_x\dfrac{2}{x}$

1.27. $\left|\ln(2x-3)+\ln\left(4-x^2\right)\right|=\left|\ln(2x-3)\right|+\left|\ln\left(4-x^2\right)\right|$

1.28. $4(x-2)\left[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)\right]=15(x+1)$

1.29. $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}}=1-x, x>0$

1.30. $x.3^{x^2-1}+\left(x^2-1\right).3^x+1-x-x^2=0$

1.31. $x^2\left(6^{x^2-4x+3}+8^{x^2-4x+3}+9^{x^2-4x+3}\right)=\left(2x^3+1\right)12^{x^2-4x+3}$

1.32. $\left(6^x-3^x\right)\left(19^x-5^x\right)\left(10^x-7^x\right)+\left(15^x-8^x\right)\left(9^x-4^x\right)\left(5^x-2^x\right)=231^x$

1.33. $\log_2\dfrac{4^x-2^x+1}{2.16^x-2.4^x+1}=2^x\left(2.8^x-3.2^x+1\right)$

1.34. $27^x=\left(6x^2-4x+1\right)9^x$

1.35. $\log_4\left(x^2+x+1\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1\right)=\dfrac{1}{3}\log_2\left(x^2+x+1\right)^3+\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}\right)$

1.36. $(x+6).5^{1-|x-1|}-x=(x+1)\left|5^x-1\right|+5^{x+1}+1$

1.37. $(x-1)^2+4\sqrt{x^2-2x}-2\left(2\sqrt{x^2-2x}+1\right)\ln\sqrt{x^2-2x}\geq 6$

Bài 21. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình $2\log_6\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)=\log_4 x$ thỏa mãn bất đẳng thức $\cos\dfrac{\pi x}{16}<\sin\dfrac{16\pi}{x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

B. PHẦN HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

1.1. $\begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{1+\log_2{}^2 x}+\dfrac{\log_2 y}{1+\log_2{}^2 y}=\dfrac{9}{10} \\ \left(1+\log_x 2.\log_y 2\right)\log_2\left(xy\right)=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \log_2 x = 2^{y+2} \\ 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}\left(y+3x+7\right)=6 \\ 2.8^x+2^{y+2}=17.2^{y+3x-1} \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \sqrt{y^2+1}+\log_3\left(2x-y\right)=4xy-4x^2+\sqrt{4x^2-4xy+y^2+1}+\log_3 y \\ \sqrt{y^2+5}=x^2-\sqrt{x-1} \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x^3+x+\log_2\dfrac{x}{y}=8y^3+2y+1 \\ y^2-xy+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} \log_{x+y}(3x+y)+\log_{3x+y}(x^2+2xy+y^2)=3 \\ 4^{x+y}+2.4^{\frac{x}{x+y}}=20 \end{cases} \quad (x\in R)$

1.7. $\begin{cases} \log_2 x+\log_{xy}16=4-\dfrac{1}{\log_y 2} \\ 4x^4+8x^2+xy=16x^2\sqrt{4x+y} \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} y^{2y^2+x^2}=y^{3xy} \\ \log_{y-2x}\left(y+2x\right)=\log_{2y-2x-1}\left(4x^2+xy+x\right) \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x\ge y^2-4y+5 \\ \log_{x+1}\left(4y^2-12y+9\right)=\dfrac{x^2+2x+10}{6y-9} \\ y>\dfrac{3}{2} \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} e^x+\left(x^2-y\right)\ln\left(x+y+2012\right)=e^{\sqrt{y}} \\ 2^x\left(2^x-1\right)+3^x\left(3^x-1\right)=34y-26x \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

PT-HPT MŨ, LOGRARIT

1.11. $\begin{cases} \dfrac{1}{1+2^x}+\dfrac{1}{1+3^x}+\dfrac{1}{1+10^y}=\dfrac{3}{1+2^y} \\ 2^{x+\frac{y}{2}}=2^{\sqrt{2x^2+\frac{y^2}{2}}} \end{cases}, x, y \geq 0$

1.12. $\begin{cases} \left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)^y=\left(2^y+\dfrac{1}{2^y}\right)^x \\ e^x+\left(x^3-y\right)\ln\left(y^2+x+2\right)=e^{\sqrt[3]{x}} \end{cases}, x, y > 0$

1.13. $\begin{cases} \sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y^2-6y+10}=5 \\ \log_3 8xyz^3=10\log_9 z^2-\left(\log_3\dfrac{3x^2z}{y}\right)^2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 7:

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Các bài toán tích phân trong đề thi TSĐH được đánh giá là bài toán quan trọng, luôn xuất hiện dưới dạng tính tích phân trực tiếp hoặc là xác định diện tích, thể tích giới hạn bởi các đường cong.
Để làm tốt dạng toán này học sinh nên lưu ý nhớ và vận dụng lịnh hoạt công thức các nguyên hàm cơ bản, cách xác định công thức tính thể tích và diện tích giới hạn bởi các đường cong.
Hai phương pháp cơ bản được sử dụng xuyên suốt cho các bài toán tích phân là đổi biến và tích phân từng phần(thường là kết hợp cả 2 phương pháp này).

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khái niệm nguyên hàm của một hàm số:

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng D

Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in D$

Và nguyên hàm của $f(x)$ được xác định theo công thức, thực chất đây chỉ là ký hiệu của nguyên hàm của một hàm số:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Để tìm nguyên hàm của một hàm số chúng ta dựa vào nguyên hàm của một số hàm cơ bản:

Nguyên hàm của một số hàm cơ bản:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$\int \sin xdx = \cos x + c$

$\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$

$\int \cot xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln\left|\sin x\right| + c$

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$

Khái niệm tích phân của một hàm số:

Tích phân của một hàm số $f(x)$ được xác định trên một đoạn $[a,b]$ là giá trị của $F(b) - F(a)$ và được ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

Dưới đây sẽ trình bày một số bài toán cơ bản nhất của tích phân, cách thức tiến hành là đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng $\int f(u)du$.

Bài 1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 (2x-1)(x-1)^{100}dx$

Lời giải:

Ta có $I = \int\limits_0^1 (2x-1)(x-1)^{100}dx = \int\limits_0^1 \left(2(x-1)+1\right)(x-1)^{100}dx = 2\int\limits_0^1 (x-1)^{101}dx + \int\limits_0^1 (x-1)^{100}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=2\int_0^1 (x-1)^{101}\,d(x-1)+\int_0^1 (x-1)^{100}\,d(x-1)=\frac{1}{51}(x-1)^{102}\Big|_0^1+\frac{1}{101}(x-1)^{100}\Big|_0^1=\frac{152}{5151}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x\sqrt{2x+1}\,dx$

Lời giải:

Ta có $I=\int_{\frac{-1}{2}}^{0} x\sqrt{2x+1}\,dx=\int_{\frac{-1}{2}}^{0}\frac{(2x+1)-1}{2}\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{2}}^{0}(2x+1)^{\frac{3}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{2}}^{0}(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{-1}{2}}^{0}(2x+1)^{\frac{3}{2}}d(2x+1)-\frac{1}{4}\int_{\frac{-1}{2}}^{0}(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)=\frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{0}-\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{0}=\frac{-1}{15}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^4+5}{x+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1\frac{x^4+5}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^4-1+6}{x+1}dx=\int_0^1\left[(x-1)(x^2+1)+\frac{6}{x+1}\right]dx$

$$=\int_0^1(x^3-x^2+x-1)+\int_0^1\frac{6}{x+1}dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1+6\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{-7}{12}.$$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}+c.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^x}\right)^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-x}\right)dx=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1+\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int\frac{\cos^5x}{1-\sin x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{\cos^5x}{1-\sin x}dx=\int\frac{\cos^3x\left(1-\sin^2x\right)}{1-\sin x}dx=\int\cos^3x\left(1+\sin x\right)dx$

$=\int\cos^3xdx+\int\cos^3x\sin xdx=\int\left(1-\sin^2x\right)d\left(\sin x\right)-\int\cos^3xd\left(\cos x\right)$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{4}\cos^4x+c.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\left(x+1\right)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+\left(x+1\right)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(x\sin x+\cos x\right)+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

$=x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(x\sin x+\cos x\right)}{x\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln\left|x\sin x+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\pi+4\sqrt{2}}{8}.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\frac{\tan^3x}{\cos2x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{\tan^3 x}{\cos 2x}dx=\int\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)}dx=\int\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}d\left(\tan x\right)$

$=\int\left(\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x\right)d\left(\tan x\right)=\int\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}d\left(\tan x\right)-\int\tan x d\left(\tan x\right)$

$=\frac{-1}{2}\int\frac{d\left(1-\tan^2 x\right)}{1-\tan^2 x}-\frac{1}{2}\tan^2 x=-\frac{1}{2}\ln\left|1-\tan^2 x\right|-\frac{1}{2}\tan^2 x+c.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx.$

Lời giải:

Xét $x^2-\sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1.$

Vậy với $0\le x\le 1\Rightarrow\min\left(x^2,\sqrt{x}\right)=x^2.$

Với $1\le x\le 2\Rightarrow\min\left(x^2,\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}.$

Vậy $I=\int\limits_0^2\min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx=\int\limits_0^1\min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx+\int\limits_1^2\min\left(x^2,\sqrt{x}\right)dx$

$$=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2\sqrt{x}dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-1}{3}.$$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\min\left(\tan x,x\right)dx.$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=\tan x-x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right].$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Ta có $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1\ge 0,\forall x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Ta có $f(0)=0$. Từ đó suy ra

$$f(x)\le f(0)=0,x\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]\Leftrightarrow \tan x\le x,x\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]\Rightarrow \min(\tan x,x)=\tan x,x\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$$

$$f(x)\ge f(0)=0,x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Leftrightarrow \tan x\ge x,x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow \min(\tan x,x)=x,x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$$

Vậy $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\min(\tan x,x)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\min(\tan x,x)dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\min(\tan x,x)dx$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan xdx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}xdx=\frac{1}{2}x^2\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi^2}{32}-\ln|\cos x|\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 x|1-x|dx.$

Lời giải:

Với $0\le x\le 1\Rightarrow 1-x\ge 0\Rightarrow |1-x|=1-x.$

Với $1\le x\le 2\Rightarrow 1-x\le 0\Rightarrow |1-x|=x-1.$

Vậy $I=\int\limits_0^2 x|1-x|dx=\int\limits_0^1 x(1-x)dx+\int\limits_1^2 x(x-1)dx$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2=1.$$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{|x^2-x|}{x^2+3}dx$.

L ời gi ải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta c ó $I=\int_0^1 \frac{\left|x^2-x\right|}{x^2+3}dx+\int_1^3 \frac{\left|x^2-x\right|}{x^2+3}dx$

$=-\int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx+\int_1^3 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx$

Xét $K=-\int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx=-\int_0^1\left(1-\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}\right)dx=-\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3}+\int_0^1 \frac{3}{x^2+3}dx$

$=-1+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\int_0^1 \frac{3dx}{x^2+3}$

Đặt $x=\sqrt{3}\tan t \Rightarrow dx=\sqrt{3}\frac{dt}{\cos^2 t}; x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Khi đó $K=-1+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt=-1+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Tương tự : $L=\int_1^3 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx=2-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Vậy $I=K+L=1+\ln\frac{2}{3}$.

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1 \frac{x^2\left(1+2e^x\right)+e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 \frac{e^xdx}{1+2e^x}$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+2e^x\right)}{1+2e^x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(1+2e\right)-\frac{1}{2}\ln 3.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{\ln xdx}{x\left(\sqrt{2+\ln x}+\sqrt{2-\ln x}\right)}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\dfrac{dx}{x}; x=1 \Rightarrow t=0; x=e \Rightarrow t=1$

Vậy $I=\int\limits_0^1 \dfrac{tdt}{\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}}=\int\limits_0^1 t\left(\dfrac{\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}}{2t}\right)dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}\right)dt$

$=\dfrac{1}{3}\sqrt{(2+t)^3}\Big|_0^1+\dfrac{1}{3}\sqrt{(2-t)^3}\Big|_0^1=\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int \dfrac{x^n}{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}}dx,\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

Lời giải:

Đặt $f_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!} \Rightarrow f'_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f_{n-1}(x)$

vậy $I=\int \dfrac{n!\left(f_n(x)-f_{n-1}(x)\right)}{f_n(x)}dx=n!\int\left(1-\dfrac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}\right)dx=n!\int\left(1-\dfrac{f'_n(x)}{f_n(x)}\right)dx$

$=n!x-n!\ln f_n(x)+C=n!x-n!\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right)+C$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{-1}^1 \dfrac{\left(1+x+x^2\right)-\sqrt{x^4+3x^2+1}}{\left(1+x+x^2\right)^2-\left(x^4+3x^2+1\right)}dx=\int\limits_{-1}^1\dfrac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx-\int\limits_{-1}^1\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét tích phân $M=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{1}+\arctan t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

$N=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$, đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt; x=1\Rightarrow t=-1; x=-1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $N=\int\limits_{1}^{-1}\frac{\sqrt{(-t)^4+3(-t)^2+1}}{2(-t)\left(1+(-t)^2\right)}(-dt)=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{t^4+3t^2+1}}{2t\left(1+t^2\right)}dt=-N\Rightarrow N=0$.

Vậy $I=M-N=\frac{\pi}{4}$.

Bài 17. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}$

Lời giải:

Ta có $\int\frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}=\int\frac{dx}{x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}}}=\int\frac{x^{-n-1}dx}{\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}$

$=\int\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}}x^{-n-1}dx=-\frac{1}{n}\int\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}}d\left(1+\frac{1}{x^n}\right)=\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{1}{n}}+C$

Từ đó suy ra $I=\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{1}{n}}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Bình luận: ở ví dụ này ta không trực tiếp tính I luôn, bởi phép biến đổi trên không thể thực hiện với mọi $x\in[0,1]$ nên thong qua nguyên hàm sau đó tính tích phân sau(kỹ thuật giấu cận).

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 18. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\left(e^{x}\sin x+1\right)\sin x}dx$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{\left(e^{x}\sin x+1\right)\sin x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(e^{x}\sin x+1\right)e^{x}\sin x}dx$

Đặt $t=e^{x}\sin x\Rightarrow dt=e^{x}\left(\sin x+\cos x\right)dx;x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=e^{\frac{\pi}{2}}$

Vậy $I=\int\limits_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{t\left(t+1\right)}dx=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{3}\ln\left(\frac{e^{\frac{\pi}{6}}+2}{e^{\frac{\pi}{2}}+1}\right)$

Bài 19. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{\left(x^{2}+2\right)e^{2x}+x^{2}\left(1-e^{x}\right)-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}dx$

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{x^{2}\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)+2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}dx=\int\limits_{0}^{\ln 2}x^{2}dx+\int\limits_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}dx$

$=\frac{1}{3}x^{3}\Bigg|_{0}^{\ln 2}-\ln\left|e^{2x}-e^{x}+1\right|\Bigg|_{0}^{\ln 2}=2+\frac{\ln^{3}2}{3}$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^{2}+\left(\sqrt{1+x^{2}}\right)^{3}}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}d\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int_1^e \left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)^2 dx$.

Lời giải:

$$I=\int_1^e \left(1-\frac{4\ln x+4}{(\ln x+2)^2}\right)dx=\int_1^e \left(1-\frac{4(\ln x+2)-4x(\ln x+2)'}{(\ln x+2)^2}\right)dx$$

$$=\int_1^e d\left(x-\frac{4x}{\ln x+2}\right)=\left(x-\frac{4x}{\ln x+2}\right)\Big|_1^e=1-\frac{e}{3}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^1 x(1-x)^{100}dx$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^1 (2x+1)(x-1)^{100}dx$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_{-1}^0 (x-1)^2(x+1)^{100}dx$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_{\frac{-1}{2}}^0 (3x+4)\sqrt{2x+1}dx$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_{-1}^0 (x-1)^2\sqrt{x+1}dx$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int_0^2 x^2\left|x^2-1\right|dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 7. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\sin^2 x dx$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} max\left(\sin x, \cos x\right)dx$

Bài 9. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\cos x + \left(x-2\right)\sin x}{x\cos x - \sin x}dx$

Bài 10. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{x^2\left(1+e^x\right)^2 + e^x}{1+e^x}dx$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^x + 3}{e^x + 2e^{-x} + 3}dx$

Bài 12. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xe^x\left(4 + 4\left(\sin x + \cos x\right) + \sin 2x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2}dx$

Bài 13. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \min\left(\tan x + 2\sin x, 3x\right)dx.$

Bài 14. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} max\left(e^x + \cos x, 2 + x - \frac{x^2}{2}\right)dx$.

Bài 15. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}dx$

Bài 16. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{\ln\left[\left(x+1\right)^{x+1}\left(x+2\right)^{x+2}\right]}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}dx$.

Bài 17. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{x^2+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Bài 18. Tính tích phân $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\cos^4\sqrt{x^2+1}}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$.

+ Nếu $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_i)^k...(x-x_n)$, trong đó x_i là các nghiệm của đa thức $Q(x)$ và k là số nghiệm bội x_i, thì ta giả sử

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \left[\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + ... + \frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k}\right] + ... \frac{A_n}{x-x_n}.$$

+ Nếu $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x^2+px+q)...(x-x_n)$, trong đó phương trình $x^2+px+q=0$ vô nghiệm, ta giả sử phân tích được

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + ... \frac{A_n}{x-x_n}.$$

+ Nếu $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x^2+px+q)^k...(x-x_n)$, trong đó phương trình $x^2+px+q=0$ vô nghiệm, ta giả sử phân tích được $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \left[\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}\right] + ... \frac{A_n}{x-x_n}$. Sau đó đồng nhất hai vế của các đẳng thức và so sánh hệ số hai vế ta suy các hệ số cần xác định ở tử thức mỗi phân thức đơn giản hoặc có thể thay các giá trị đặc biệt của x vào hai vế.

Cách nhớ phân tích là nếu mẫu là tam thức bậc hai thì tử thức có dạng $Bx+C$.

Một số khai triển nhanh(nên nhớ)

❖ $$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}.\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right).$$

❖ $$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}.\left[\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}\right]^2 = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} - \frac{2}{a-b}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)\right].$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.Tính tích phân $I = \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Lời giải:

Ta có $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$ và $x^3-5x^2+6x = x(x-2)(x-3)$.

Giả sử $\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \forall x$

$\Leftrightarrow 5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2), \forall x (*)$.

Thay $x=0$ vào (*) suy ra $1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$.

Thay $x=2$ vào (*) suy ra $9 = -2B \Rightarrow B = -\frac{9}{2}$.

Thay $x=3$ vào (*) suy ra $28 = 3C \Rightarrow C = \frac{28}{3}$.

Vậy $I = \int \left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}\right)dx$

$$= \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + c.$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int \frac{3x^2+3x+3}{(x+2)(x-1)^2}dx$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giả sử $\frac{3x^2+3x+3}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2},\forall x$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x+3=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2,\forall x(*)$

Thay $x=1$ vào (*) suy ra $9=3A\Rightarrow A=3$.

Thay $x=-2$ vào (*) suy ra $9=9C\Rightarrow C=1$.

Thay $x=0$ vào (*) suy ra $3=2A-2B+C\Rightarrow B=2$.

Vậy $I=\int\left(\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{x-1}+2\ln|x-1|+\ln|x+2|+c.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$.

Giả sử $\frac{x^2-1}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1},\forall x$

$\Leftrightarrow x^2-1=(Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right),\forall x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

$$\Leftrightarrow x^2-1=(A+C)x^3+\left(-A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D\right)x^2+\left(A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}\right)x+B+D,\forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D=1 \\ A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}=0 \\ B+D=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ D=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $I=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)dx$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\left|x^2-x\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|x^2+x\sqrt{2}+1\right|\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$.

Lời giải:

Ta có $x\left(x^3+1\right)=x\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

Giả sử $\frac{1}{x\left(x^3+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1},\forall x$.

$\Leftrightarrow 1=A\left(x^3+1\right)+Bx\left(x^2-x+1\right)+\left(Cx+D\right)x\left(x+1\right),\forall x(*)$

Thay $x=0$ vào (*) suy ra $1=A\Rightarrow A=1$.

Thay $x=-1$ vào (*) suy ra $1=-3B\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$.

Đồng nhất hệ số của x^3,x^2 ở hai vế ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B+C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-\dfrac{2}{3} \\ D=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\int_1^2\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\int_1^2\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\left(\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right|\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{3x+1}{(x+1)(x+2)}dx$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{3x+1}{(x+1)^3}dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^2+10}{x^3-2x^2+5x}dx.$

Bài 6.Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{x^2+1}dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_3^4\frac{3x^3}{x^2-3x+2}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx.$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3}.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3}.$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx.$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CÓ MẪU SỐ LÀ ĐA THỨC

Xin đề cập dưới đây các bài toán kèm theo kỹ thuật biến đổi tương ứng với mỗi ví dụ. Những kỹ thuật biến đổi dưới đây rất tự nhiên và dễ hiểu.Vì vậy khi đọc kỹ các ví dụ này các bạn có thể nắm bắt được kỹ thuật và áp dụng vào các bài toán tương tự.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\int_0^2 \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}dx=\frac{1}{3}\int_0^2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\frac{1}{3}\left(\int_0^2\frac{dx}{x-1}-\int_0^2\frac{dx}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_0^2=-\ln 2.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^3\frac{dx}{(x+3)(x+6)(x+9)}$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^3\frac{dx}{(x+3)(x+6)(x+9)}=\frac{1}{6}\int_0^3\frac{(x+9)-(x+3)}{(x+3)(x+6)(x+9)}dx$

$$=\frac{1}{6}\left[\int_0^3\frac{dx}{(x+3)(x+6)}-\int_0^3\frac{dx}{(x+6)(x+9)}\right]=\frac{1}{18}\left[\int_0^3\frac{(x+6)-(x+3)}{(x+3)(x+6)}dx-\int_0^3\frac{(x+9)-(x+6)}{(x+6)(x+9)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{18}\int_0^3\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+9}\right)dx=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{(x+3)(x+9)}{(x+6)^2}\right|\Bigg|_0^3=\ln\frac{32}{27}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}}dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1\frac{(3x-5)^{10}}{(x+2)^{12}}dx=\int_0^1\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10}\frac{dx}{(x+2)^2}$

$$=\frac{1}{11}\int_0^1\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{10}d\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)=\frac{1}{121}\left(\frac{3x-5}{x+2}\right)^{11}\Bigg|_0^1$$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^1\frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx=\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\frac{dx}{(2x+1)^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$= \frac{1}{9}\int_0^1 \left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99} d\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right) = \frac{1}{900}\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}\Bigg|_0^1 = \frac{2^{100}-1}{900}.$$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{(x+3)^5(x+5)^3}$.

Lời giải:

Ta có $I = \int \frac{dx}{(x+3)^5(x+5)^3} = \int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5 (x+5)^8} = \int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}.\frac{1}{(x+5)^6}.\frac{dx}{(x+5)^2}$

$$= \frac{1}{2^7}\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^5}.\left[\frac{(x+3)-(x+5)}{x+5}\right]^6 d\left(\frac{x+3}{x+5}\right) = \frac{1}{2^7}\int \frac{1}{t^5}(t-1)^6\,dt, t = \frac{x+3}{x+5}.$$

$$= \frac{1}{2^7}\int \frac{t^6 - 6t^5 + 15t^4 - 20t^3 + 15t^2 - 6t + 1}{t^5}dt$$

$$= \frac{1}{2^7}\left(\frac{t^2}{2} - 6t + 15\ln|t| + \frac{20}{t} - \frac{15}{2t^2} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{4t^4}\right) + c.$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{dx}{x^3 - 3x}$.

Lời giải:

Ta có $I = \int_1^3 \frac{dx}{x^3-3x} = \int_1^3 \frac{dx}{x(x^2-3)} = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{x^2-(x^2-3)}{x(x^2-3)}dx = \frac{1}{3}\left(\int_1^3 \frac{xdx}{x^2-3} - \int_1^3 \frac{dx}{x}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{d(x^2-3)}{x^2-3} - \int_1^3 \frac{dx}{x}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln|x^2-3| - \ln|x|\right]\Bigg|_1^3 = -\frac{1}{6}\ln 3.$$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{x^9 + 3x^5}$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$I=\int\frac{dx}{x^9+3x^5}=I=\int\frac{dx}{x^5\left(x^4+3\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^4+3\right)-x^4}{x^5\left(x^4+3\right)}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x^5}-\int\frac{dx}{x\left(x^4+3\right)}\right)=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x^5}-\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^4+3\right)-x^4}{x\left(x^4+3\right)}dx\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^5}-\frac{1}{9}\left[\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^3dx}{x^4+3}\right]=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^5}-\frac{1}{9}\left[\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^4+3\right)}{x^4+3}\right]$$

$$=-\frac{1}{12x^4}-\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+c.$$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$$=\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+c.$$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+c,t=x-\frac{1}{x}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}dx$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}dx=\int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-5x-4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}dx$

$$=\int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6}dx=\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{t^2-5t-6}=\int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{(t-6)(t+1)}, t=x+\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{7}\int_2^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{t-6}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-6}{t+1}\right|\Bigg|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{7}\ln\frac{4}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{-1}^0 \frac{dx}{(2x+1)(2x+3)}$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+3)}$.

Bài 4. Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$.

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{(2x+1)^3}{(x+1)^5}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 6. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{(3x-2)^7(3x+4)^3}.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{(2x-1)^3(3x-1)^4}.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{x^3+5x}.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{x^6+9x}.$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int \frac{xdx}{x^8+3x^4+16}.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int \frac{x^2+1}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1}dx.$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^6+1}.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^4-3}{x\left(x^8+3x^4+2\right)}dx$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{1-x^4}{x\left(1+x^4\right)}dx$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3-1}{x\left(x^3-4\right)\left(x^4-4x+1\right)}dx$

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+2x^3-x^2+2x+1}dx$

Bài 18. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{1-x^{2012}}{x\left(1+x^{2012}\right)}dx$

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Dạng tích phân: $I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$, trong đó các số m, n, p là các số hữu tỉ.

Hướng giải quyết đầu tiên là đặt $t = a + bx^n$ hoặc $t = \left(a + bx^n\right)^p$.

Nếu cách đặt thứ nhất không hiệu quả chuyển sang cách đặt ẩn phụ thứ hai.

Đặt $t^k = \dfrac{a + bx^n}{x^n}$, k là số nguyên, thường là $k = 1$.

Dạng toán này rất hay xuất hiện trong đề thi tuyển sinh đại học.

Dạng tích phân: $I = \int R\left(x, x^{\frac{r_1}{q_1}}, ..., x^{\frac{r_i}{q_i}}\right) dx$, trong đó r_i, q_i là các số nguyên dương.

Tìm bội số chung nhỏ nhất của các mẫu số $q_1, q_2, ..., q_i$ giả sử là k.

Khi đó ta đặt $x = t^k$.

Dạng tích phân: $I = \int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$ ta đặt $t = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \dfrac{xdx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow t^2 = 1 + \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^2 = \left(t^2 - 1\right)^3 \Rightarrow 2xdx = 6t\left(t^2 - 1\right)^2 dt$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; khi $x = 3\sqrt{3} \Rightarrow t = 2$.

Vậy $I = \int\limits_0^{3\sqrt{3}} \dfrac{xdx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} = \int\limits_1^2 \dfrac{3t\left(t^2 - 1\right)^2 dt}{t} = 3\int\limits_1^2 \left(t^2 - 1\right)^2 dt$

$$= 3\int\limits_1^2 \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) dt = \left(\frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t\right)\Bigg|_1^2 = \frac{38}{5}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 2. Tính tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{7}}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow x^2=9-t^2\Rightarrow 2xdx=2tdt$

Khi $x=\sqrt{7}\Rightarrow t=4$; khi $x=4\Rightarrow t=5$.

Vậy $I=\int\limits_{\sqrt{7}}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}=\int\limits_{\sqrt{7}}^{4}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+9}}=\int\limits_{4}^{5}\frac{tdt}{t\left(t^2-9\right)}=\int\limits_{4}^{5}\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_4^5=\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow x^2=t^3-1\Rightarrow 2xdx=3t^2dt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=1$; khi $x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2$.

Vậy $I=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx=\int\limits_{0}^{\sqrt{7}}\frac{x^2.xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(t^3-1\right)t^2dt}{t}$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{2}\left(t^4-t\right)dt=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{93}{10}.$$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}dx$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x^2=1-t^2\Rightarrow 2xdx=-2tdt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=1$; khi $x=1\Rightarrow t=0$.

Vậy $I=\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}dx=-\int\limits_{1}^{0}\left(1-t^2\right)t^2dt=\int\limits_{0}^{1}\left(t^2-t^4\right)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 5. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Lời giải:

Phân tích: Việc đặt $t = \sqrt{1+x^2}$ lúc này tỏ ra không hiệu quả, ta chuyển hướng sang cách đặt thứ hai.

Đặt $t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow 2xdx = \frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$.

Khi $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \sqrt{3}; x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $I = \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^4 . \frac{1+x^2}{x^2} . \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}$

$$= \int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^2 . \frac{1}{\left(t^2-1\right)^2} . t^2 . t} = \int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Bigg|_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{\sqrt[3]{3}} \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Lời giải:

Đặt $t = \frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x} \Rightarrow t^3 = \frac{2-x^3}{x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{2}{t^3+1} \Rightarrow 3x^2dx = \frac{-6t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2}$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = \sqrt[3]{3} \Rightarrow t = -1$.

Vậy $I = \int\limits_{1}^{\sqrt[3]{3}} \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}} = \int\limits_{1}^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2dx}{x^6 . \frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}} = \int\limits_{1}^{-1} \frac{1}{\left(\frac{2}{t^3+1}\right)^2 . t} . \frac{-2t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2} = -\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{-1} tdt = -\frac{t^2}{4}\Bigg|_{1}^{-1} = 0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 7. Tính tích phân $I = \int\limits_1^4 \frac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt.$

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 4 \Rightarrow t = 2.$

Vậy $I = \int\limits_1^4 \frac{dx}{x\left(1+\sqrt{x}\right)} = \int\limits_1^2 \frac{2tdt}{t^2\left(t+1\right)} = 2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t\left(t+1\right)} = 2\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^2 = 2\ln\frac{4}{3}.$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Lời giải:

Đặt $t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow t^2 = \frac{1+x^2}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow 2xdx = -\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}.$

Vậy $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{xdx}{x^6.\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2-1}\right)^3.t}.\frac{-tdt}{\left(t^2-1\right)^2} = \int \left(1-t^2\right)dt = -\frac{t^3}{3} + t + c.$

$= -\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$

Bài 9. Tính tích phân $I = \int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{\left(x+4\right)^3}}$.

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow t^2 = x+4 \Rightarrow 2tdt = dx.$

Khi $x = -3 \Rightarrow t = 1; x = -1 \Rightarrow t = \sqrt{3}.$

Vậy $I = \int\limits_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x+4}+\sqrt{\left(x+4\right)^3}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t+t^3} = 2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 10. Tính tích phân $I=\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \Rightarrow t^3=\frac{2-x}{2+x} \Rightarrow x=\frac{4}{1+t^3}-2 \Rightarrow dx=\frac{-12t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}.$

Vậy $I=\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx=\int t.\frac{\left(1+t^3\right)^2}{16t^6}.\frac{-12t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8t^2}+c=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+c.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_4^6 \sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{dx}{x+2}.$

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{\frac{x-4}{x+2}} \Rightarrow t^2=\frac{x-4}{x+2} \Rightarrow x=\frac{6}{1-t^2}-2 \Rightarrow dx=\frac{12tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$

Khi $x=4 \Rightarrow t=0; x=6 \Rightarrow t=\frac{1}{2}.$

Vậy $I=\int_4^6 \sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{dx}{x+2}=\int_0^{\frac{1}{2}} t.\frac{1-t^2}{6}.\frac{12tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt=2\left(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-t\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\ln 3-1.$$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_2^3 \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}.\frac{dx}{(x-1)^2}.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow t^3=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x=\frac{2}{1-t^3}-1 \Rightarrow dx=\frac{6t^2dt}{\left(1-t^3\right)^2}$.

Khi $x=2 \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; x=3 \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $I=\int_2^3 \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}.\frac{dx}{(x-1)^2}=\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} t^2.\frac{\left(1-t^3\right)^2}{4t^6}.\frac{6t^2dt}{\left(1-t^3\right)^2}=\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\frac{dt}{t^2}=-\frac{3}{2}t\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$.

Bài 13. Tính tích phân $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \Rightarrow \frac{1}{t}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x}=t-\frac{1}{t} \Rightarrow x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \Rightarrow dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt$.

Vậy $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int\frac{t^4-1}{2t^3(1+t)}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+c$

$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+c.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_1^{16}\frac{dx}{x\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^1\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5dx$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}dx.$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx.$

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

Bài 12.Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx.$

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+2x\sqrt{1+x^2}+2x^2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}dx$

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{xdx}{2x^2-1+3\sqrt{x^2-1}}$

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Giả sử $u(x), v(x)$ là các hàm liên tục trên miền D, khi đó ta có

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \int d(uv) = \int udv + \int vdu \Leftrightarrow uv = \int udv + \int vdu$$

$$\Rightarrow \int udv = uv - \int vdu \Rightarrow \int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu (*)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Công thức (*) là công thức tích phân từng phần, các bài toán áp dụng cách tính này thường biểu thức dưới dấu tích phân là tích của hai biểu thức, trong đó một biểu thức là đạo hàm của một hàm số. Khi lấy tích phân từng phần thì tích phân sau phải đơn giản hơn tích phân đầu. Dưới đây trình bày một số dấu hiệu nhận biết để đặt u, dv sao cho thích hợp.Một các tổng quát là thành phần dv là đạo hàm của v nên chọn thành phần dv sao cho dễ tìm được v là được.

$$+ \; I = \int P(x)\begin{bmatrix} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \\ e^{ax+b} \\ m^{ax+b} \end{bmatrix} dx \text{ thì đặt } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \\ e^{ax+b} \\ m^{ax+b} \end{bmatrix} dx \end{cases}.$$

$$+ \; I = \int P(x)\begin{bmatrix} \ln(ax+b) \\ \log_c(ax+b) \end{bmatrix} dx \text{ thì đặt } \begin{cases} u = \begin{bmatrix} \ln(ax+b) \\ \log_c(ax+b) \end{bmatrix} \\ dv = P(x)dx \end{cases}$$

$$+ \; I = \int e^{ax+b}\begin{bmatrix} \sin(\alpha x+\beta) \\ \cos(\alpha x+\beta) \end{bmatrix} dx \text{ thì đặt } \begin{cases} u = e^{ax+b} \\ dv = \begin{bmatrix} \sin(\alpha x+\beta) \\ \cos(\alpha x+\beta) \end{bmatrix} dx \end{cases}$$

$$+ \; \int x^k \begin{bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \\ \sin(\log_a x) \\ \cos(\log_a x) \end{bmatrix} dx \text{ thì đặt } \begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin(\ln x) \\ \cos(\ln x) \\ \sin(\log_a x) \\ \cos(\log_a x) \end{bmatrix} \\ dv = x^k dx \end{cases}$$

ở đây $P(x)$ là đa thức.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx = 3\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2}+\int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$.

+ $3\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} = 3\int_1^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \left.\frac{-3}{x+1}\right|_1^3 = \frac{3}{4}$.

+ Tính tích phân $K=\int_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{-1}{x+1} \end{cases}$

Vậy $K=\left.\frac{-\ln x}{x+1}\right|_1^3+\int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{-\ln 3}{4}+\int_1^3 \frac{(x+1)-x}{x(x+1)}dx = \frac{-\ln 3}{4}+\int_1^3 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{-\ln 3}{4}+\ln\left.\left|\frac{x}{x+1}\right|\right|_1^3 = \frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}.$$

Vậy $I=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{27}{16}$.

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{-1}{2x^2} \end{cases}$

Vậy $I=\left.\frac{-1}{2x^2}\ln x\right|_1^2+\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{8}\ln 2-\left.\frac{1}{4x^2}\right|_1^2 = \frac{3-2\ln 2}{16}$.

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_1^e x^3\ln^2 x dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$

Vậy $I = \dfrac{1}{4}x^4\ln^2 x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx = \dfrac{1}{4}e^4 - K.$

+ Tính $K = \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3 \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$

Vậy $K = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}x^4\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{4}\int_1^e x^3 dx\right) = \dfrac{1}{8}e^4 - \dfrac{1}{32}x^4\Big|_1^e = \dfrac{1}{32} + \dfrac{3e^4}{32}$

Vậy $I = \dfrac{1}{4}e^4 - \left(\dfrac{1}{32} + \dfrac{3e^4}{32}\right) = \dfrac{5e^4 - 1}{32}.$

Bài 4.Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Vậy $I = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x-2)\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}(2 - e^2) - \dfrac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{5 - 3e^2}{4}.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x)dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2 - x\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x-1}{x^2-x} \\ v = x \end{cases}$

Vậy $I = x\ln\left(x^2 - x\right)\Big|_2^3 - \int_2^3 \dfrac{x(2x-1)}{x^2-x}dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_2^3 \dfrac{2x-1}{x-1}dx = \ln 54 - \int_2^3 \dfrac{2(x-1)+1}{x-1}dx$

$= \ln 54 - 2\int_2^3 dx - \int_2^3 \dfrac{dx}{x-1} = \ln 54 - 2x\Big|_2^3 - \ln|x-1|\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2.$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^2}.2xdx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^2} d(x^2) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 te^t dt$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^1 td(e^t) = \dfrac{1}{2}te^t\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}.$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_0^2 \dfrac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = x^2 e^x \\ dv = \dfrac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = xe^x(x+2)dx \\ v = \dfrac{-1}{x+2} \end{cases}$

Vậy $I = \dfrac{-x^2e^x}{x+2}\Big|_0^2 + \int_0^2 xe^x dx = -e^2 + \int_0^2 xd\left(e^x\right) = -e^2 + xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = e^2 - e^x\Big|_0^2 = 1.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx=K-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=K-\frac{\pi^2}{32}.$

+ Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\tan x)=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x)}{\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Vậy $I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=x^4 \\ dv=\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=4x^3dx \\ v=\dfrac{-1}{4(x^4+1)}\end{cases}$

Vậy $I=\frac{-x^4}{4(1+x^4)}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^3dx}{1+x^4}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d(1+x^4)}{1+x^4}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln|1+x^4|\Big|_0^1=\frac{2\ln 2-1}{8}.$

Bài 10. Tính tích phân $I=\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln xdx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^e\left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln xdx=2\int_1^e x\ln xdx-3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=M-N.$

+ Tính $M=2\int_1^e x\ln xdx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{1}{2}x^2\end{cases}$

Vậy $M=2\left(\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx\right)=2\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e\right)=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}.$

+ Tính $N=3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=3\int_1^e\ln xd\left(\ln x\right)=\frac{3}{2}\left(\ln x\right)^2\Big|_1^e=\frac{3}{2}.$

Vậy $I=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{e^2}{2}-1.$

Bài 11. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}d\left(\sin x\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\int_0^1 e^tdt+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e^t\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}=e+\frac{\pi}{4}-1.$

Bài 12. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x\sin x\cos^2xdx.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\cos^2 xdx=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} xd\left(\cos^3 x\right)=-\frac{1}{3}x\cos^3 x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}\\0\end{matrix}\right.+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 xdx$

$=\frac{-\pi\sqrt{3}}{48}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)=\frac{-\pi\sqrt{3}}{48}+\frac{1}{3}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}\\0\end{matrix}\right.=\frac{11\pi}{72}-\frac{-\pi\sqrt{3}}{48}.$

Bài 13. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$

$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\left(\sin 2x\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\left(x\sin 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx\right)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{8}\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}.$

Bài 14. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx=I=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx-\int_e^{e^2}\frac{dx}{\ln x}=M-N.$

+ Tính $M=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx=-\int_e^{e^2} xd\left(\frac{1}{\ln x}\right)=-\frac{x}{\ln x}\left|\begin{matrix}e^2\\e\end{matrix}\right.+\int_e^{e^2}\frac{dx}{\ln x}=e-\frac{e^2}{2}+N.$

Vậy $I=M-N=e-\frac{e^2}{2}.$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int_1^{e}\left(x\ln x\right)^2 dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_1^e (x\ln x)^2 dx=\frac{1}{3}\int_1^e (\ln x)^2 d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\left[x^3(\ln x)^2\Big|_1^e-\int_1^e x^3 d\left((\ln x)^2\right)\right]$

$=\frac{1}{3}\left[e^3-2\int_1^e x^2\ln x dx\right]=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\int_1^e \ln x d\left(x^3\right)\right]=\frac{1}{3}\left[e^3-\frac{2}{3}\left(x^3\ln x\Big|_1^e-3\int_1^e x^2 dx\right)\right]=\frac{5e^3-2}{27}.$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx \\ v=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Vậy $I=\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx$

$=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^2 dx=\frac{1}{8}\ln 3-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx$

$=\frac{1}{8}\ln 3-\left[x-2\ln|1+x|-\frac{1}{x+1}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\ln 3+2\ln\frac{3}{2}-\frac{5}{6}.$

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}d(e^x)=e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

$=2e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$.

+ Tính tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(e^x)}{1+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=e^x\frac{1}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$

$=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$.

Vậy $I=2e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}-\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$.

Bài 18. Tính tích phân $I=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\ v=x\end{cases}$

Vậy $I=\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1 d\left(\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 19. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$

Vậy $I = \int_0^1 \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-1.$

Bài 20. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin xdx}{1+\cos x} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(1+\cos x\right)}{1+\cos x} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$= -\ln\left|1+\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} xd\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \ln\frac{4}{2+\sqrt{2}} + x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\frac{x}{2}dx$

$= \ln\frac{4}{2+\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{8} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right).$

Bài 21. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x\ln\left(1+3x\right)}{3^{3x}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $\int \frac{x\ln(1+3x)}{3^{3x}}dx = \int x\ln(1+3x)d\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}d\left(x\ln(1+3x)\right)$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\left(\ln(1+3x) + \frac{3x}{1+3x}\right)dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int \ln(1+3x)d\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) + \int e^{-3x}\frac{x}{1+3x}dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\ln(1+3x) + \int e^{-3x}d\ln(1+3x)\right] + \int e^{-3x}\frac{x}{1+3x}dx$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x}x\ln(1+3x) + -\frac{1}{9}e^{-3x}\ln(1+3x) + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\frac{1}{1+3x}dx + \int e^{-3x}\frac{x}{1+3x}dx$

$= -\frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x)\ln(1+3x) + \int e^{-3x}\left(\frac{1}{3(1+3x)} + \frac{x}{1+3x}\right)dx$

$= -\frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x)\ln(1+3x) + \int d\left(-\frac{1}{9}e^{-3x}\right)$

$= -\frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x)\ln(1+3x) - \frac{1}{9}e^{-3x} + C = -\frac{(1+3x)\ln(1+3x)+1}{9e^{3x}} + C$

Vậy $I = -\frac{(1+3x)\ln(1+3x)+1}{9e^{3x}}\Bigg|_0^1 = \frac{-4\ln 4 + 1 + e^3}{9e^3}$

Bài 22. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}dx$.

Lời giải:

Ta có $I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right]\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$= -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x}dx$

Ta có $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

Vậy $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{1+x}dx = \int_0^1 \left[-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x+1)}\right]dx$

$= \left[-\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x+1)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}.$

Vậy $I = -\frac{\ln 2}{8} + \frac{\pi}{16}.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x+1)e^x dx.$

Bài 2.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(1+\sin 2x)dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin 2x dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \left(e^{x^2}\sin x + x^3 e^x\right)dx.$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin^2 x dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin^2 x dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx.$

Bài 9.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\cos\sqrt{x}dx.$

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_1^2 x^2 \ln x dx.$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}dx.$

Bài 12.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}.$

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^x \sin^2(\pi x)dx.$

Bài 14.Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xe^x \cos x dx.$

Bài 15. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 e^x \cos^2 x dx.$

Bài 16. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\cos x+(x-2)\sin x}{x\cos x-\sin x}dx.$

Bài 17. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 18. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln\left(1 - \cos x\right) dx.$

Bài 19. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx.$

Bài 20. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Bài 21. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx.$

Bài 22. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^4\left(\sin x\right) dx.$

Bài 23. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln\left(\tan x\right) dx.$

Bài 24. Tính tích phân $I = \int_{1}^{e^{\pi}} \cos\left(\ln x\right) dx.$

Bài 25. Tính tích phân $I = \int_{1}^{e^{\pi}} \cos^2\left(\ln x\right) dx.$

Bài 26. Tính tích phân $I = \int_{1}^{2} \frac{\ln\left(1 + x\right)}{x^2} dx.$

Bài 27. Tính tích phân $I = \int_{1}^{e} \frac{1 + \ln x}{\left(x + 1\right)^2} dx.$

Bài 28. Tính tích phân $I = \int_{1}^{e} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

Bài 29.Tính tích phân $I = \int_{1}^{e} \left(\ln^2 x - \ln x\right) dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 30. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \left(x^2 - x\right)\ln x dx.$

Bài 31. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx.$

Bài 32. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{x^3}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

Bài 33. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2}dx.$

Bài 34. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{x + \sqrt{1 + x^2}}dx.$

Bài 35. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx.$

Bài 36. Tính tích phân $I = \int\limits_{-3}^0 \frac{\ln(1 - x)}{(1 - x)\sqrt{1 - x}}dx.$

Bài 37.Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}dx.$

Bài 38. Tính tích phân $I = \int\limits_2^e \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)dx.$

Bài 39. Tính tích phân $I = \int\limits_2^3 \frac{x - 1}{(x + 1)^3}\ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)dx.$

Bài 40. Tính tích phân $I = \int\limits_2^3 \frac{1}{(x + 1)^3}\ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)dx.$

Bài 41. Tính tích phân $I = \int\limits_2^3 \frac{\ln(x - 1)}{(x - 1)^4}dx.$

Bài 42.Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x\tan\frac{x}{2} + x^2\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\right)dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 43. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x^2+1\right)e^x}{\left(x+1\right)^2}dx.$

Bài 44. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\left(1+x\cos x\right)dx.$

Bài 45. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}x\sin x\cos^2 xdx.$

Bài 46. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{1+\sin 2x}.$

Bài 47. Tính tích phân $I=\int_2^{5}\frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1+\sqrt{x-1}}dx.$

Bài 48.Tính tích phân $I=\int_3^{8}\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx.$

Bài 49. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x\left(1+\tan x\right)}.$

Bài 50.Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}x\left(\cos x+\sin^5 x\right)dx.$

Bài 51.Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(1+\cos x\right)e^x}dx.$

Bài 52.Tính tích phân $I=\int_1^{e}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)dx.$

Bài 53. Tính tích phân $I=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}+x\left(\frac{x}{\cos x}+2\tan x\right)\right)dx.$

Bài 54. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}+x\cos x\right)e^{\sin x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 55. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{e^x+1}dx.$

Bài 56. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \left(\frac{x^2\ln x + 2x^2 + 2}{x}\right)\ln^3 xdx.$

Bài 57. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 (2x-1)\ln(x^3+1)dx.$

Bài 58. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx.$

Bài 59. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)}dx.$

Bài 60. Tính tích phân $I = \int \quad I = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^8dx}{(x^4-1)^2}.$

Bài 61. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(2\cot^2 x + 3\cot x + 1)}{\sin^3 x} e^{\frac{1}{\sin^2 x} + \cot x}dx.$

Bài 62. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 x\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)\left(\ln(x^2+1) - \ln x\right)dx$.

Bài 63. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{(17-\cos 4x)^x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{\pi}{2}}}dx$

Bài 64. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x - \tan x)e^{-x}dx$

Bài 65. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 66. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x + \ln x}{(\ln x + x + 1)^3} dx$.

Bài 67. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\log_2{}^3 x}{x\sqrt{1 + 3\ln^2 x}} dx$.

Bài 68. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx$

Bài 69. Tính tích phân $I = \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}} - 2x\ln(1 + x) \right) dx$

Bài 70. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx$

Bài 71. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \left(2x + \frac{e^x}{1 + \tan^2 x} \right) dx$

Bài 72. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{2x\ln\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} dx$

Bài 73. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\tan^4 x - 1\right)\tan 2x dx$

Bài 74. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x + \tan x}{x - \tan x} + \left(\frac{x\tan x}{x - \tan x} \right)^2 \right) dx$

Bài 75. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x} \right)^{x + \frac{1}{x}} dx$

Bài 76. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x(x + \ln x)} dx$

Bài 77. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4 - 3\ln^2 x}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 78. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Bài 79. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{0} x\left(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}\right) dx$

Bài 80. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x \ln\left(x^2 + x + 1\right) dx$

Bài 81. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \left(\frac{x^3+1}{x}\right) \ln x dx$

Bài 82. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) dx$

Bài 83. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 (x+1)^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

Bài 84. Tính tích phân $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$

Bài 85. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{1-\sin x}{(1+\cos x)e^x} dx$

Bài 86. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(1+\cos x)^{1+\cos x}}{1+\sin x}\right) dx$

Bài 87. Tính tích phân $I = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x^3 \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Bài 88. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \frac{x^2 + 1 + \left(x^3 + x\ln x + 2\right)\ln x}{1 + x\ln x} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 89. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{\left(x^2+x+1\right)\ln x}{x\left(x+1\right)^2}dx$

Bài 90. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 \frac{\ln\left(5-x\right)+x^3\sqrt{5-x}}{x^2}dx$

Bài 91. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \left(\frac{x^3-1}{x}+\frac{3x^2+e^x+1}{e^x+x^3+x}\right)dx$

Bài 92. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{x^2dx}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}$

Bài 93. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx$

Bài 94. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^3\ln\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)dx$

Bài 95. Tính tích phân $I=\int\limits_1^e \frac{\left(2+x\ln x\right)\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}dx$

Bài 96. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{e^3} \frac{2\ln x+1}{x\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)}dx$

Bài 97. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xe^x\left(4+4\left(\sin x+\cos x\right)+\sin 2x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2}dx$

Bài 98. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2\cos^2 x-x\sin x-\cos x-1}{\left(1+x\sin x\right)^2}dx$

Bài 99. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+7x-x\cos 2x}{2\left(2+\cos x\right)}dx$

Bài 100. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 101. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{x}{1-x^4}\ln\left(\frac{3-x^2}{2}\right)dx$

Bài 102. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-x}\left(2x+\frac{e^x}{1+\tan^2 x}\right)dx$

Bài 103. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(1+\sin x)\cos^2 x}$

Bài 104. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(4x-\frac{3}{x}+2\right)e^{2\left(x+\frac{3}{4x}\right)}dx$

Bài 105. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{t\ln(1+t)}{e^t}dt$

Bài 106. Tính tích phân $I=\int_1^e\ln^3 x\left(\frac{x^2\ln x+2x^2+2}{x}\right)dx$

Bài 107. Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{\ln\left(1+x^{2+\sqrt{3}}\right)}{1+x}dx$

Bài 108. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\ln(\cos x)\sin 2x dx$

Bài 109. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln^2(\cos x)dx$

Bài 110. Tính tích phân $I=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2}dx$

Bài 111. Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{x^2\left(1+(\ln x)^2\right)\sqrt{1+(\ln x)^2}}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

TÍCH PHÂN VỚI HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dưới đây xin trình bày những lưu ý tổng quát nhất khi giải quyết tích phân hàm lượng giác.

Khi thực hiện phép tính tích phân với các hàm số lượng giác, trong biểu thức tích phân có thể xuất hiện

+ $\sin xdx = -d\left(\cos x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \cos x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\cos x)d\left(\cos x\right) = \int f(t)dt.$

+ $\cos xdx = d\left(\sin x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \sin x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\sin x)d\left(\sin x\right) = \int f(t)dt.$

+ $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\tan x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \tan x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\tan x)d\left(\tan x\right) = \int f(t)dt.$

+ $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\cot x\right) \Rightarrow$ ta đặt $t = \cot x$ lúc này biến đổi biểu thức trong dấu tích phân thành $\int f(\cot x)d\left(\cot x\right) = \int f(t)dt.$

<u>Lưu ý:</u>

$$\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + c.$$

$$\int \cot xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + c.$$

Một lưu ý nữa là nếu biểu thức lượng giác có dạng phân thức thì luôn nghĩ tới tử thức sẽ chứa mẫu thức và đạo hàm của mẫu thức.

Phương pháp chủ đạo tính tích phân hàm lượng giác là đổi biến số.

BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 2x dx$.

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx$.

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = M - N$.

+ Tính $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right)^2 d(\sin x)$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = d(\sin x)$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Vậy $M = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^2 dt = \int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}$.

+ Tính $N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $I = M - N = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$

Đặt $t = 1+\sin 2x \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2.$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\sin x}{\cos^3 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)}{\cos^3 x}$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = d\left(\cos x\right)$. Khi $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$

Vậy $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2-1}{t^3}dx = \left(\ln|t| + \frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\ln 2.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^4 x}=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\cos x\right)}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}.$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=d\left(\cos x\right)$. Khi $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-t+1+t}{(1-t)(1+t)}\right)^2 dt$

$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\left(2\cos x+1\right)}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2tdt=-3\sin xdx$

Khi $x=0\Rightarrow t=2; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Vậy $I=\int_{1}^{2}\left(\frac{4t^2}{9}+\frac{2}{9}\right)dt=\left(\frac{4}{27}t^3+\frac{2}{9}t\right)\Bigg|_1^2=\frac{34}{27}.$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $d\left(\cos^2 x+4\sin^2 x\right)=-2\sin x\cos x+8\cos x\sin x=6\sin x\cos x=3\sin 2x.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy đặt $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}\Rightarrow t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x\Rightarrow 2tdt=3\sin 2xdx$

Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{tdt}{t}=\frac{2}{3}\int_1^2 dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$

Bài 8. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\left(1-\cos x\right)\sin xdx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$

$=\left(-4\cos x+\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$

Bài 9. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot xdx.$

Lời giải:

$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot xdx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{\sin^2 x}}.\frac{\cot x}{\sin^2 x}dx$

Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}$. Khi $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}\sqrt[3]{-t^2}.tdt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}t^{\frac{5}{3}}dt=\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0}=-\frac{1}{8\sqrt{3}}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1-\cos^3 x}\sin x\cos^5 x dx.$

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt[6]{1-\cos^3 x} \Rightarrow t^6 = 1-\cos^3 x \Rightarrow 6t^5 dt = 3\cos^2 x\sin x dx$

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

Vậy $I = 2\int_0^1 t\left(1-t^6\right)t^5 dt = 2\int_0^1 \left(t^6 - t^{12}\right)dt = 2\left(\dfrac{1}{7}t^7 - \dfrac{1}{13}t^{13}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{12}{91}.$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x\left(\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1\right)}{\sin^4 x}dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x d\left(\cot^2 x\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) - 2\left(-\cot x - x\right) - \frac{\cot^3 x}{3}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{8} - \frac{23}{12}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx$.

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \sin x}{1+\cos x} dx$.

Đặt $t = 1+\cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Vậy $I = -2\int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t} dt = 2\int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t^2}\right) dt = 2\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)} dx$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-\left(1-t^4\right)}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1-t^2} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(1+t^2\right) dt$

$= \left[-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \left(t + \frac{1}{3}t^2\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{10}{9\sqrt{3}}$.

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+1\right)d\left(\tan x\right)=\left(\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}.$

Bài 15. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{\left(\sin x+\cos x\right)^4}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{\left(\sin x+\cos x\right)^4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\left(1+\sin 2x\right)^2}dx$

Đặt $t=1+\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx$. Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=2.$

Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|t\right|\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2.$

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)$

$=\left(\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{15}.$

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t \Rightarrow dx=-dt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=0.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I \Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

Bài 18. Tính tích phân $I=\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}.$

Lời giải:

Ta có $I=\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos x}=\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x(1-\sin^2 x)}=\int \frac{dt}{t^4(1-t^2)}$

$=\int \frac{(1-t^4)+t^4}{t^4(1-t^2)}dt=\int \frac{1+t^2}{t^4}dt-\int \frac{dt}{t^2-1}=-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$

$=-\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+c$

Bài 19. Tính tích phân $I=\int \frac{\tan^2 x}{\cos x}dx.$

Lời giải:

$I=\int \frac{\tan^2 x}{\cos x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\cos x dx=\int \frac{\sin^2 x}{(1-\sin^2 x)^2}d(\sin x)=\int \left(\frac{t}{1-t^2}\right)^2 dt$

$=\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)^2 dt=\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\frac{1}{4(1-t)}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\frac{1}{4(1-\sin x)}-\frac{1}{4(1+\sin x)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c.$$

Bài 20. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\sin^2 x+\sin x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

Lời giải :

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin^6 x-1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\sin^2 x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sin^3 x\right)}{\left(\sin^3 x\right)^2-1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x-1}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(1+\cos^3 x\right)dx.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x-1\right)\sin^2 xdx.$

Bài 3.tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 xdx.$

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6 xdx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$.

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Bài 9.Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}-\tan x} dx$.

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan x}\, dx$.

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+8\cos x}} dx$.

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x - \cos x}$.

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{1+\sin 2x}$.

Bài 15. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 16. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2xdx}{\left(3\sin^2 x+4\cos^2 x\right)^3}$.

Bài 17. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^3 xdx}{3\sin 4x-\sin 6x-3\sin 2x}$.

Bài 18. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx$.

Bài 19. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Bài 20. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x+3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}dx$

Bài 21. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{7\sin x-5\cos x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}dx$

Bài 22. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$

Bài 23. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx$

Bài 24. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\sin xdx}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}$

Bài 25. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin x}-\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos x}\right)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 26. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{1+\cos x}dx$

Bài 27. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{(2\sin x+1)^4}dx$

Bài 28. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$

Bài 29. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^9 x}{\sin x\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)}dx$

Bài 30. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\sin^2 x+\sin x+1\right)}{\sin^6 x-1}dx$

Bài 31. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\cos x(\sin x+1)}{\sin^6 x-1}dx$

Bài 32. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x+\cos 2x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx$

Bài 33. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\tan\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$

Bài 34. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\cos^2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$

Bài 35. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x(1+\cos x)^2 dx$

Bài 36. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 37. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\sin x} dx$

Bài 38. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + 4\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$

Bài 39. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx$

Bài 40. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1+\cos x} dx$

Bài 41. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2\cos x \cos \frac{x}{2}} dx$

Bài 42. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x - \sin^3 3x}{1+\cos 3x} dx$

Bài 43. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin 2x + \sin x}{\sqrt{6\cos x - 2}} dx$

Bài 44. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \left(1+\sin^2 x\right)^3 dx$

Bài 45. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x\left(\tan^2 x - 2\tan x + 5\right)} dx$

Bài 46. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x + 2}} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Bài 47. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$

Bài 48. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}dx$

Bài 49. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}dx$

Bài 50. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

Bài 51. Tính tích phân $I=\int_0^{1}\frac{x+1+\sin x}{\cos^2 x}dx$

Bài 52. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x(\sin x+\cos x+1)}{(1+\cos x)^2}dx$

Bài 53. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\ln(\tan x)dx$

Bài 54. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x}\sin x}{\cos^3 x}dx$

Bài 55. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\frac{\sin x}{\cos^3 x}-x^2\sin^3 x\right)dx$

Bài 56. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\cos x)dx$

Bài 57. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}\,dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 58. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{10} x + \cos^{10} x - \sin^4 x \cos^4 x\right) dx$

Bài 59. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln\left(\cos x\right)}{\cos^2 x} dx$

Bài 60. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx$

DẠNG TOÁN BỔ SUNG

Nếu tích phân có dạng $I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{m\sin x + n\cos x} dx$

Lúc này nghĩ tới việc biểu diễn tử thức theo mẫu thức và đạo hàm của mẫu thức

<u>Trình bày:</u>

Giả sử $a\sin x + b\cos x = \alpha\left(m\sin x + n\cos x\right) + \beta\left(m\cos x - n\sin x\right)$

$\Leftrightarrow a\sin x + b\cos x = \left(\alpha m - \beta n\right)\sin x + \left(\alpha n + \beta m\right)\cos x$

Đồng nhất hệ số ta được

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha m - \beta n \\ b = \alpha n + \beta m \end{cases}$ giải hệ này suy ra các hệ số α, β.

Khi đó

$$I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{m\sin x + n\cos x} dx = \int \frac{\alpha\left(m\sin x + n\cos x\right) + \beta\left(m\cos x - n\sin x\right)}{m\sin x + n\cos x} dx$$

$$= \alpha \int dx + \beta \int \frac{d\left(m\sin x + n\cos x\right)}{m\sin x + n\cos x} = \alpha x + \beta \ln\left|m\sin x + n\cos x\right| + c.$$

Một lưu ý là các số a, b, m, n có thể là các số thực tự do hoặc cũng có thể chứa x.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chẳng hạn:Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\cos x + (x-2)\sin x}{x\cos x - \sin x}dx.$

Một dạng tương tự

$$I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{(m\sin x + n\cos x + k)^2}dx.$$

$$I = \int \frac{a\sin x + b\cos x}{\sqrt{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}}dx(*)$$

Với dạng (*) các đề tuyển sinh hay bắt gặp dưới dạng này

Lúc này ta phải nhóm biểu thức trong căn

Trình bày:

Nhóm được $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = \alpha(m\sin x + n\cos x)^2 + \beta(**)$

Và tiến hành phân tích

$$a\sin x + b\cos x = k(m\sin x + n\cos x) + l(m\cos x - n\sin x)(***)$$

Lưu ý cách nhóm ở (**) không phải là duy nhất, do đó ta có thể làm bài toán dạng này tương đối dễ.

Đề bài cũng cho dễ nhìn, vì vậy mà cách phân tích ở (***) có thể nhận thấy ngay mà không cần đồng nhất hệ số như trên.

Nếu tích phân có dạng

$$I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt[n]{(a\sin^2 x + b\cos^2 x)}}dx$$

Lúc này tử thức biểu diễn theo đạo hàm của $a\sin^2 x + b\cos^2 x$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x + (x+1)\cos x}{x\sin x + \cos x}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Ta có $x\sin x+(x+1)\cos x=(x\sin x+\cos x)+x\cos x=(x\sin x+\cos x)+(x\sin x+\cos x)'$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(x\sin x+\cos x)+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}+\ln|x\sin x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx.$

Lời giải:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x+2(\sin x+\cos x)+1}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1}dx=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x+1)^2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x+1)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}.$

Lời giải:

Ta có $d\left(\cos^2 x+4\sin^2 x\right)=-2\cos x\sin x+8\sin x\cos x=6\sin x\cos x=3\sin 2x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\cos^2x+4\sin^2x\right)}{\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}}=\frac{2}{3}\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{10}-2\right).$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2-1}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2-1}}$

Đặt $t=\cos x+\sin x\Rightarrow dt=d\left(\cos x+\sin x\right)$.

Khi $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{2};x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Vậy $I=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}d\left(\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\right)=\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt[4]{24}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}\right).$

`

TÍCH PHÂN CỦA HÀM TUẦN HOÀN

<u>Xét bài toán sau:</u> Nếu $f(x)$ liên tục tuần hoàn với chu kì T, với mọi $a\in\mathbb{R}$ ta có

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$$

<u>Chứng minh:</u>

Ta có $I=\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx(1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $x = t + T \Rightarrow \int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(x)dx (2)$

Lấy (1) cộng với (2) theo vế suy ra đpcm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{2012\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx.$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$ liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ với chu kì $T = \pi$ nên ta có:

$$\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{0+\pi}^{\pi+\pi} f(x)dx = \int\limits_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx = \ldots \int\limits_{2011\pi}^{2012\pi} f(x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{0}^{2012\pi} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x)dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{2011\pi}^{2012\pi} f(x)dx = 2012\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$= 2012\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx = 2012\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi} |\sin x|dx = 2012\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx = -2012\sqrt{2} \cos x\Big|_{0}^{\pi} = 4024\sqrt{2}.$$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \ln\left(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}\right)dx$

TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Xét tích phân $I_1 = \int \frac{F(x)}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^n}dx.$, trong đó α, β là các số thực tự do, n là số nguyên dương; $F(x), G(x)$ là các hàm số lượng giác.

Việc tính trực tiếp tích phân I_1 tỏ ra khó khăn, khi đó ta sẽ gián tiếp tính I_1 thông qua tích phân $I_2 = \int \frac{G(x)}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^n}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \alpha I_1 + \beta I_2 = \int \dfrac{dx}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^{n-1}} (*) \\ kI_1 + lI_2 = \int \dfrac{kF(x) + lG(x)}{\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)^{n}} dx (**) \end{cases} (1)$$

Các hệ số k, l được chọn sao cho $kF(x) + lG(x)$ là đạo hàm của $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

Trong đó tích phân (*) và (**) tính đơn giản hơn, khi đó giải hệ (1) suy ra I_1, I_2.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int \dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

Lời giải:

Xét tích phân $K = \int \dfrac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Ta có $I + K = \int \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int dx = x + c_1 (1)$

$$I - K = \int \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{2\cos 2x dx}{\sin^2 2x - 2} = \int \frac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin^2 2x - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}}\right| + c_2 (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\dfrac{\sin 2x - \sqrt{2}}{\sin 2x + \sqrt{2}}\right| + \dfrac{x}{2} + c$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x dx}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Lời giải:

Xét tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx$

Ta có $I+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{4}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1)$

$$K-\sqrt{3}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}=-\frac{1}{2\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}-3}{6}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I=\frac{\sqrt{3}+1}{6}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}x}{\sin^{100}x+cos^{100}x}dx.$

Lời giải:

Xét tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^{100}x}{\sin^{100}x+cos^{100}x}dx$

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}x}{\sin^{100}x+cos^{100}x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-\sin^{100}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{100}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos^{100}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100}t}{\sin^{100}t+cos^{100}t}dt=K.$

Mặt khác ta có

$I+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $I = K = \dfrac{\pi}{4}.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\left(\sin x + \cos x\right)^3}.$

Bài 2. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx.$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ KHÔNG LÀM THAY ĐỔI CẬN

Dưới đây xin trình bày kỹ thuật đổi biến số không làm thay đổi cận tích phân với một số bài toán tích phân hàm lượng giác cũng như tích phân các hàm số khác khi mà ta khó áp dụng cách tính tích phân thông thường.

Đảm bảo khi đọc phương pháp này các bạn sẽ không cần phải để ý tới các dạng tích phân đặc biệt!

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_a^b f(x) dx.$

Khi đó ta sẽ đổi biến số bằng cách đặt $x = a + b - t$ thì ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} dx = -dt \\ x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$$

Lúc này cận mới của tích phân là $-\int\limits_b^a f(a+b-t)dt = \int\limits_a^b f(a+b-t)dt$

Vẫn là từ a đến b không thay đổi.

BÀI TẬP MẪU

Ta xét bài toán quen thuộc sau

Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ (1)

Thông thường ta nghĩ đến các hướng

Hướng 1. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx.$

Hướng 2. Dùng tích phân từng phần $\begin{cases} u = \ln(1+\tan x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)}dx \\ v = x \end{cases}$

Suy ra $I = x\ln(1+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{xdx}{\cos^2 x(1+\tan x)}$

Cả hai hướng này nhận thấy khó hiệu quả.

Ta giải quyết bài toán này bằng cách đổi biến số không làm thay đổi cận như sau

<u>Lời giải:</u>

Đặt $x = \left(\frac{\pi}{4}+0\right) - t = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan t\right)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Rất đơn giản phải không nào!

Nhưng từ hướng 2 và cách giải này ta có bài toán tương đối hay sau

+ Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2x\left(1+\tan x\right)}$ (*)

Và một bài được suy ra từ (1)

Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{\ln\left(1+x\right)}{1+x^2}dx$. Nếu đặt $x=\tan t$ thì đưa về tích phân (1)

Các bạn thử giải quyết bài toán sau:

Liệu tính được tích phân $I=\int_0^1\frac{\ln\left(1+ax\right)}{1+x^2}dx$, với a là số thực không âm.

Các bạn thử nghĩ cách giải quyết bài toán (*) khi không dùng các kết quả trên nhé! Một bài tập phải không nào!

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO CÓ DẠNG TƯƠNG TỰ TRÊN

Sưu tập trên http://ezine.math.vn

1.1. $\int_0^{\pi}\ln\left(a+b\cos x\right)dx,\ a,b\in\mathbb{R};a>|b|$.

1.2. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{2+\sin x}dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.3. $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin 2x}{\cos 2x+8\cos x+9}dx$.

1.4. $I=\int_0^{2}\sqrt{x^2-2x+2}\ln(2+x)dx$.

1.5. $I=\int_1^{3}\frac{\ln(3+x^2)}{\sqrt{x(4-x)}-2}dx$.

Sau đây trình bày một số ví dụ minh họa phương pháp này:

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=\pi; x=\pi\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{\cos^2(\pi-t)-4}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{\cos^2 t-4}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\cos^2 t-4}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{\cos^2 t-4}dt$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-4}=\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right|\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt; x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Vậy $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=K.$

Lại có

$$I+K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin x\cos x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=\left(x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}$$

Từ đó suy ra $I=K=\frac{\pi-1}{4}.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+cos^6 x}{6^x+1}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt; x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}.$

Vậy $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6(-t)+cos^6(-t)}{6^{-t}+1}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{6^t\left(\sin^6 t+cos^6 t\right)}{6^t+1}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{6^x\left(\sin^6 x+cos^6 x\right)}{6^x+1}dx$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(6^x+1-1\right)\left(\sin^6 x+cos^6 x\right)}{6^x+1}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 x+cos^6 x\right)dx-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 x+cos^6 x\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx=\frac{5}{32}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{1+x+x^2+\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

Lời giải:

Ta có $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{\left(1+x+x^2\right)-\sqrt{x^4+3x^2+1}}{\left(1+x+x^2\right)^2-\left(x^4+3x^2+1\right)}dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx-\int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$

Xét tích phân $M=\int_{-1}^{1}\dfrac{1+x+x^2}{2x\left(1+x^2\right)}dx=\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right)dx=\dfrac{1}{2}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{1}+\arctan t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

$N=\int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x\left(1+x^2\right)}dx$, đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt; x=1\Rightarrow t=-1; x=-1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $N=\int_{1}^{-1}\dfrac{\sqrt{(-t)^4+3(-t)^2+1}}{2(-t)\left(1+(-t)^2\right)}(-dt)=-\int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt{t^4+3t^2+1}}{2t\left(1+t^2\right)}dt=-N\Rightarrow N=0$.

Vậy $I=M-N=\dfrac{\pi}{4}$.

Bài 5. Cho $f(x)$ là hàm số lien tục trên đoạn $[-a;a], a>0$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx$

Lời giải:

Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx; x=-\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2}; x=0\Rightarrow t=0$

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}f(x)dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{0}-f(-t)dt=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-t)dt=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}f(-x)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Rightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \left(f(x)+f(-x)\right)dx = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x}dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|dx = 2\left(\int_{0}^{\pi}\sin xdx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin xdx\right) = 6$$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2012}x + \cos^2 x}{1+\sin^{2012}x + \cos^{2012}x}dx$

Lời giải:

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, tương tự trên ta suy ra

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2012}x + \sin^2 x}{1+\sin^{2012}x + \cos^{2012}x}dx$$

Từ đó ta có

$$2I = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2012}x + \cos^{2012}x + \sin^2 x + \cos^2 x}{1+\sin^{2012}x + \cos^{2012}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\sin 2x}dx$

Lời giải:

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin 2x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Suy ra $2I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x+\cos x\right)\sqrt{\sin 2x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x+\cos x\right)\sqrt{1-\left(\sin x-\cos x\right)^2}dx$

Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow dt=\left(\cos x+\sin x\right)dx$

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\dfrac{\pi}{4}$.

Bài 8. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{x\left[\left(3\pi\cos x+4\sin x\right)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$

Lời giải:

Đặt $t=\pi-x$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi\left[\left(-3\pi\cos x+4\sin x\right)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx+\int\limits_0^{\pi}\frac{x\left[\left(3\pi\cos x-4\sin x\right)\sin^2 x-4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$$

Do đó $2I=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{6\pi x.\cos x.\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx+\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\pi\left[\left(-3\pi\cos x+4\sin x\right)\sin^2 x+4\right]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$

$$=\int\limits_0^{\pi}\frac{\left(6\pi x-3\pi^2\right)\cos x.\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx+4\pi\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^3 x}dx$$

Ta có

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\left(6\pi x-3\pi^2\right)\cos x.\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx=2\int\limits_0^{\pi}\left(2\pi x-\pi^2\right)d\left(\sqrt{1+\sin^3 x}\right)$$

$$=2\left(2\pi x-\pi^2\right)\sqrt{1+\sin^3 x}\Big|_0^{\pi}-4\pi\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^3 x}dx$$

Suy ra $I=\left(2\pi x-\pi^2\right)\sqrt{1+\sin^3 x}\Big|_0^{\pi}=2\pi^2$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan x\right)dx.$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{9-4\cos^2 x}.$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\cos x}{\sin^{n-1} x + cos^{n-1}x}dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 xdx}{\sin x + \cos x}.$

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\left(e^x+1\right)cos2x}.$

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin^4 x-1\right)cos^2x}{e^x+1}dx.$

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\left(\tan x + \cot x\right)dx.$

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx.$

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}\right)dx.$

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}dx.$

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx.$

Bài 14. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\sin x)} - \tan^2(\cos x)\right)dx.$

Bài 15. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}dx.$

Bài 16. Tính tích phân $I = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

Bài 17. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\alpha}}.$

Bài 18. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\left(\sqrt[2011]{\cos x}\right) + \sin^2\left(\sqrt[2011]{\sin x}\right)\right)dx$.

Bài 19. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-x+\sqrt{x^2+1}}dx$

Bài 20. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)dx$

Bài 21. Tính tích phân $I = \int_{0}^{2\pi} \sin(2012x+\sin x)dx$

Bài 22. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} x^2 \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 23. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\left(\cos^3 x+\cos x+\sin x\right)}{1+\cos^2 x}dx$

Bài 24. Tính tích phân $I=\int_2^{4}\frac{\sqrt{\ln\left(9-x\right)}dx}{\sqrt{\ln\left(9-x\right)}+\sqrt{\ln\left(x+3\right)}}$(The Putnam Mathematica Competition 1997).

Bài 25. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{\left(x^4+x^2+1\right)\left(e^x+1\right)}dx$

Bài 26. Tính tích phân $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\left(1+2^x\right)\sin x}dx$

Bài 27. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2012}x}{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx$

Bài 28. Tính tích phân $I=\int_0^{1}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{-x}}dx$

ĐỔI BIẾN SỐ DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC HÓA

Khi gặp một số bài toán mà biểu thức dưới dấu tích phân chứa căn thức, ta thường đổi biến số dưới dạng lượng giác như sau.

+ Nếu có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì đặt $x=a\sin t$ hoặc $x=a\cos t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì đặt $x=\frac{a}{\cos t}$ hoặc $x=\frac{a}{\sin t}$.

+ Nếu có chứa x^2+a^2 hoặc $\sqrt{x^2+a^2}$ thì đặt $x=a\tan t$.

+ Nếu có chứa $\sqrt{\frac{x+a}{a-x}}$ thì đặt $x=a\cos 2t$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

+ Nếu có chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx.$

Lời giải:

Đặt $x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos t dt$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$

Bài 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}dx.$

Lời giải:

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$

Vậy

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t dt}{(4-4\sin^2 t)\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t dt}{4\cos^2 t\sqrt{4\cos^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{4\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d(\tan t) = \frac{1}{4}\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Bài 3. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$. Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt$

$=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}$.

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Lời giải:

Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$. Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 tdt}{\cos^4 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 t\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 td(\tan t)=\frac{1}{3}\tan^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{9\sqrt{3}}$.

Bài 5. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx$.

Lời giải:

Đặt $x=\tan t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$

Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 t\sqrt{1+\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 t}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 t}{\cos^6 t}dt$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^6 t}d\left(\cos t\right)=\left(\frac{1}{5\cos^5 t}-\frac{1}{3\cos^3 t}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{15}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Bài 6. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{5+x}{5-x}}dx.$

Lời giải:

Đặt $x=5\cos 2t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=-10\sin 2tdt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{5}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.$

Vậy $I=-10\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{5\left(1+\cos 2t\right)}{5\left(1-\cos 2t\right)}}\sin 2tdt=20\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt$

$$=10\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)dt=10\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{5\pi}{6}+\frac{5}{2}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx.$

Bài 2. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

Bài 3. Tính tích phân $I=\int_0^1 x^3\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx.$

Bài 4. Tính tích phân $I=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 6. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 7. Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 \sqrt{x^2+2x+2}dx$.

Bài 8. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{x^8}dx$.

Bài 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

Bài 10. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Bài 11. Tính tích phân $I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$.

Bài 12.Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$.

Bài 13. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}dx$.

BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ THỂ TÍCH VẬT TRÒN XOAY

+ Diện tích hình phẳng

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng là : $S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

Khi đề bài chưa cho $x = a, x = b$ thì khi đó $x = a, x = b$ được tìm ra từ nghiệm của phương trình $f(x) = g(x).$

+ Thể tích vật thể giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$ khi quay quanh trục hoành (Ox).

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

+ Thể tích vật thể giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = f(x), y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$ khi quay quanh trục hoành (Ox).

$$V_x = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx.$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = (e+1)x$ và $y = (1+e^x)x$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của hai đường là nghiệm của phương trình

$(e+1)x = (1+e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = 1$.

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 \left| x(e^x - e) \right| dx = \int_0^1 x(e - e^x) dx = e\int_0^1 x dx - \int_0^1 xe^x dx = e\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 xd(e^x)$$

$$= \frac{e}{2} - \left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = \frac{e}{2} - \left(e - e^x \Big|_0^1 \right) = \frac{e}{2} - 1 \text{(dvdt)}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x\ln x$ với trục hoành và đường thẳng $x = e$.

Lời giải:

Giao điểm của đường cong $y = x\ln x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.\text{(do điều kiện } x > 0).$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = \int_1^e x\ln x dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Vậy $S = \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = -\sqrt{4 - x^2}$ và $y = -\frac{1}{3}x^2.$

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của hai dường cong là nghiệm của phương trình

$-\sqrt{4 - x^2} = -\frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{4 - x^2} = x^2 \Leftrightarrow 9\left(4 - x^2\right) = x^4 \Leftrightarrow \left(x^2 - 3\right)\left(x^2 + 12\right) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$ vậy

diện tích cần tính là

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left|\frac{1}{3}x^2 - \sqrt{4 - x^2}\right| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx = -\frac{1}{9}x^3 \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}dx = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + I.+$$

Tính $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}dx$.

Đặt $x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos tdt.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi $x=-\sqrt{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}; x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}.$

Vậy $I=2\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos tdt=4\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt=2\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$

vậy $S=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bà 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=2x^2e^x$ và $y=-x^3e^x$.

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y^2+8x=16$ và $y^2-24x=48.$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2\ln x$ với trục hoành và đường thẳng $x=e.$

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y^2=x^3$ và $y^2=\left(2-x\right)^3$.

Bài 5.Xác định số dương a sao cho diện tích hình phẳng gió hạn bởi hai đường cong $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^4}$ là lớn nhất.

Bài 6.Tính thể tích giới hạn bởi đường cong $y=\left(x-1\right)e^x$ và đường thẳng $x=e$ khi quay quanh trục hoành.

Bài 7.Tính thể tích giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}$ và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$ khi quay quanh trục hoành.

Bài 8.Tính thể tích giới hạn bởi hai đường cong $y=4-x^2$ và $y=x^2+2$ khi quay quanh trục hoành.

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$y=\frac{x}{1+\sin x}; y=0; x=0; x=\pi$.

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đường sau:

Elip $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$; đường thẳng $(d): x-2\sqrt{3}y-4=0$ và trục hoành.

Bài 11. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\log_{xe^2} x$, trục Ox và đường thẳng có phương trình $x=e$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi (H) quay quanh Ox .

Bài 12. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{xe^x}}{e^x+1}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ quay quanh trục hoành.

Bài 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xsin2x; y=2x; x=\frac{\pi}{2}$

Bài 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}}$; trục Ox và hai đường thẳng $x=0; x=1$.

Bài 15. Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi hình phẳng (H) quay quanh Ox . Biết (H) giới hạn bởi Ox, Oy và đồ thị hàm số $y=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ và đường thẳng $x=1$.

Bài 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\frac{x\ln(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$ và trục hoành.

Bài 17. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\left|x^2-1\right|$ và đường thẳng thẳng $y=|x|+5$

Bài 18. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và đường thẳng $y=x+3$.

Bài 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ và $y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Bài 20. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{e}{x}-\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

1.1. $I=\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{x^2+4x+4}dx$

Đáp số: $I=\frac{e}{3}$; dùng phương pháp tích phân từng phân.

1.2. $I=\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \left(\ln\left(3x^4+x^2\right)-2\ln x\right)dx$

Đáp số: $I=\frac{4\ln 2+\ln 3}{3}-\frac{4}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; dùng phương pháp tích phân từng phân kết hợp đổi biến số.

1.3. $I=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$

1.4. $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+1}$ hoặc đặt $x+1=\frac{1}{t}$

1.5. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}dx$

1.6. $I=\int\limits_0^1 \frac{2012-x^2}{\left(2012+x^2\right)^2}dx$

1.7. $I=\int\limits_0^2 \left(x+1\right)^2.\min\left\{3^x,4-x\right\}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + \cos x + 2}{1 + \cos x + \sqrt{\cos x - \cos^2 x}} dx$

Viết lại $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos x - \sqrt{\cos x - \cos^2 x}\right) dx$.

1.9. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2} \tan(x + \sin x)\tan(x - \sin x)\right)}{\tan(x + \sin x)} dx$

Viết lại $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\left(\cos 2x + \cos x.\cos(2\sin x)\right)}{\sin 2x + \sin(2\sin x)} dx = \ln\left(\sin 2x + \sin(2\sin x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{\sin 2}{1 + \sin\sqrt{2}}$

1.10. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x.\sin x}{\cos^2 x} dx$.

1.11. $I = \int_1^e \frac{\left(1 - (x-1)e^x\right)\ln x}{\left(1 + e^x\right)^2} dx$

1.12. $I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \cos x - x(\sin x + \cos x) + 1}{x^2 - x(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x} dx$

Viết $I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\left(\ln(\sin x - x)\right)' - \left(\ln(\cos x - x)\right)'\right] dx$

1.13. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\tan x\left(\ln(\sin x)\right)} + \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}\right] dx$

1.14. $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{7x+1}{(x+1)^5}} dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Viết lại $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{7x+1}\right)^5.(7x+1)^2}}=-\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{7x+1}\right)^5}}d\left(\frac{x+1}{7x+1}\right)$

1.15. $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}dx$

Viết lại $I=\int_1^2 \frac{2x^2-x-\left(2x^2-2x+1\right)}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}dx=\int_1^2 \frac{\frac{x(2x-1)}{\sqrt{2x^2-2x+1}}-\sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2}dx=\int_1^2 d\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}\right)$

1.16. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

1.17. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan x}\,dx$

Đặt $t=\sqrt{\tan x}$

1.18. $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Đặt $x=\tan t$

1.19. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sin x-1)\left(\frac{1}{\sin^3 x}-1\right)dx$

1.20. $I=\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}(1+\ln x)+x^2}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

1.21. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\left(x\sin x+\sqrt{x}\right)-\sin x}{x-1}dx$

1.22. $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.23. $I = \int_1^{\sqrt{5}} \frac{\ln x^2 - \ln\left(x^2+15\right)}{\sqrt{x^2+15}\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)^2}dx$

Viết tích phân dưới dạng:

$$I = \frac{2}{15}\int_1^{\sqrt{5}} \frac{15\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)}{\sqrt{\left(x^2+15\right)^3}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+15}}\right)^2}dx$$

Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \Rightarrow dt = \frac{15dx}{\sqrt{\left(x^2+15\right)^3}}$

1.24. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\left(e^{\sin x} - e^{2\sin x} + x^2\right)x\cos x - e^{\sin x}}{x^2 - e^{2\sin x}}dx$

1.25. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\sqrt{3-\cos 2x}}dx$

1.26. $I = \int_1^{e} \frac{2-x+(x-1)\ln x - \ln^2 x}{(1+x\ln x)^2}dx$

1.27. $I = \int_1^{2} \frac{2\left(1+xe^x\right)+x^2e^x}{x^2\left(2+xe^x\right)^2}dx$

1.28. $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{(x-1)\sin\left(\ln x\right)+x\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

1.29. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos^4\left(\pi - x\right)}{\cos^4\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-1}dx$

1.30. $I = \int_1^{e} \frac{2-x+(x-1)\ln x - \ln^2 x}{(1+x\ln x)^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

1.31. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x\left(2x^2-\cos 2x\right)}{\left(x+\sin x\cos x\right)^2}dx$

1.32. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\left(\sin x+\cos x\right)}{\cos^2x}dx$

1.33. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\ln\left(\cos x\right)}{\cos x}dx$

1.34. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}$

1.35. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x-x^2\cos x-x\sin 2x}{\left(x\sin x+\sin^2x\right)}dx$

1.36. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16x-4}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}dx$

1.37. $I=\int\limits_{2}^{e}\frac{x^2\left(4\ln x+1\right)+\left(2x+1\right)\ln^2x+4x\ln x}{x^2\ln x\left(x+\ln x\right)}dx$

1.38. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos 2x-x\sin 2x-\cos^4x}{\left(x+\sin x\cos x\right)^2}dx$

1.39. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin x\cos x-3}dx$

1.40. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cot^2x+\cot x}{e^x}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

1.41. $I = \int_1^2 \frac{(x+2)(1+2xe^x)+1}{x(1+xe^x)}dx$

1.42. $I = \int_0^1 (2x^2+x+1)e^{x^2+x+1}dx$

1.43. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 dx$

1.44. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right)^2 dx$

1.45. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin 2x}{(1+\sin 2x)^2}dx$

1.46. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(1+\cos x)(1+\sin x)}dx$

1.47. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{\sin x}{x}} + \sqrt{\frac{x}{\sin x}}.\cos x\right)dx$

1.48. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cos x}\right)\sqrt{\sin x \cos x}}$

1.49. $I = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1+x^2}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

1.50. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{1-\sin 2x}\ln(2+\sin 2x)dx$

1.51. $I = \int_0^1 \frac{(1-2x)e^x + (1+2x)e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^3}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

1.52. $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2}{(1+x\tan x)(x-\tan x)\cos^2 x}dx$

1.53. $I = \int\limits_0^1 \frac{(1-x+x^2)\cos\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\sin\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

1.54. $I = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\left\{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\right\}\sqrt{x^4+x^2+1}}dx$

1.55. $I = \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{11+4\cos 2x+\cos 4x}{1-\cos 4x}dx$

1.56. $I = \int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x+\sin 2x+1}{e^{-x}+\sin^2 x+1}dx$

1.57. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}dx$

1.58. $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}+3\left(\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}\right)\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$

1.59. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+\sin 2x+3\sin x+5\cos x}{\sin x+\cos x+2}dx$

1.60. $I = \int\limits_1^2 \frac{e^x(x-2)}{x\left(x^2+e^x\right)}dx$

1.61. $I = \int\limits_0^1 \frac{2x^2e^{x^2}-x^2e^{2x^2}-2xe^{x^2}+e^{x^2}-1}{xe^{x^2}+1}dx$

1.62. $I = \int\limits_1^e \frac{2xe^x+x\ln x+x+1}{2x\left(e^x+\ln x+1\right)}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

1.63. $I = \int_1^e \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(x^2-1+x\ln x\right)dx$

1.64. $I = \int_1^e \left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x}\right)dx$

1.65. $I = \int_1^e \frac{x+1-x^2\ln x}{x^3+x^2}\cos\left[\ln\left(x+1\right)\right]dx$

1.66. $I = \int_0^1 \left(e^{2x}-e^{-2x}\right)\sqrt[2012]{e^x-e^{-x}}\,dx$

1.67. $I = \int_0^1 \frac{xa^x}{\left(x\ln a+1\right)^2}dx$

1.68. $I = \int_0^1 \frac{a^x\left(x\ln a+1\right)}{\left(a^x+x\ln a+2\right)^2}dx$

1.69. $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x^{2011}}{x^{2013}+2012}}\,dx$

1.70. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x..\sqrt[n]{x}}}}\right)}$

1.71. $I = \int_2^3 \frac{x^{2012}-1}{\left(x-1\right)\left(x^{2013}-1\right)}dx$

1.72. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{e^{-x}+2\left(\sin x+\cos x\right)}dx$

1.73. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^n+6\left(\sin x-\cos x\right)}{e^x+\sin x+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}$

1.74. $I = \int_1^e \frac{x^2\left(1+\left(\ln x\right)^2\right)\sqrt{1+\left(\ln x\right)^2}}{x\sqrt{1+\left(\ln x\right)^2}}dx$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.75. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\tan\frac{x}{2}}} \right) dx$

1.76. $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1} - x^2}}{x^4+1} dx$

Đặt $x^2 = \tan t$

1.77. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\sin 2x}\, dx$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 8:

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Các yếu tố trong tam giác cần nắm vững

+ Với tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH khi đó

$$BC^2 = AB^2 + AC^2; AB^2 = BH.BC; AC^2 = CH.BC; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

+ Với tam giác ABC có các cạnh là a,b,c độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c và có bán kính đường tròn ngoại tiếp R, bán kính đường tròn nội tiếp r, nửa chu vi là p khi đó

Định lý cosin: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$

Từ đó tính được: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}, \sin B, \sin C.$

Định lý hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

Độ dài đường trung tuyến:

$$m_a{}^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}; m_b{}^2 = \frac{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}{4}; m_c{}^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}.$$

Diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

$$S = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Với tam giác đều cạnh a thì có diện tích là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Diện tích hình thang $S = \dfrac{1}{2}(a+b).h$ (a,b là hai cạnh đáy và h là chiều cao).

Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$

Các công thức tính thể tích

+ V **(**khối hộp chữ nhật) $= abc$ (với a,b,c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật).

+ V (khối chóp) $= \frac{1}{3}dt$ (đáy).chiều cao

+ V (khối lăng trụ) $= dt$ (đáy).chiều cao

+ V (khối cầu) $= \frac{4}{3}\pi R^3$

Phương pháp xác định chiều cao của khối chóp

Loại 1: Khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy đó chính là chiều cao của khối chóp.

Loại 2: Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao chính là đường kẻ từ đỉnh khối chóp đến giao tuyến của mặt bên đó với đáy khối chóp.

Loại 3: Khối chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao chính là giao tuyến của hai mặt bên đó.

Loại 4: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đường cao là đường kẻ từ đỉnh khối chóp đến tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy.

Loại 5: Khối chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đường cao là đường kẻ từ đỉnh đến tâm vòng tròn nội tiếp đáy.

Loại 6: Khối chóp có hai mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao khối chóp hạ từ đỉnh sẽ nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi hai cạnh nằm trên mặt đáy của hai mặt bên. Chẳng hạn khối chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAC) và (SAB) cùng tạo với đáy góc α khi đó chân đường cao của khối chóp hạ từ đỉnh S nằm trên đường phân giác của góc BAC .

Loại 7: Khối chóp có hai cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao hạ từ đỉnh khối chóp nằm trên đường trung trực nối giữa hai giao điểm của hai cạnh bên với đáy. Chẳng hạn khối chóp $S.ABCD$ có cạnh $SB = SD$ khi đó chân đường cao của khối chóp hạ từ đỉnh S nằm trên đường trung trực của BD.

Việc xác định chân đường cao của khối chóp giúp ta giải quyết bài toán

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Tính thể tích khối chóp thông qua công thức $V\,(\text{khối chóp}) = \frac{1}{3}dt\,(\text{đáy}).\text{chiều cao}$.

+ Tính góc tạo bởi đường thẳng hoặc mặt phẳng bên với đáy hoặc tính góc giữa hai mặt bên khối chóp(góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy chính là góc tạo bởi cạnh bên và đường thẳng nối chân đường cao khối chóp và giao điểm của cạnh bên với đáy). Chẳng hạn khối chóp $SABCD$ có chân đường cao hạ từ đỉnh S của khối chóp là H khi đó góc tạo bởi cạnh bên SA và mặt phẳng đáy chính là góc giữa hai đường thẳng SA và AH.

+ Tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng: $h = \frac{3V}{S_d}$.

Phương pháp tính thể tích khối đa diện

+ Khi xác định được chiều cao khối chóp thì áp dụng cách tính trực tiếp thể tích khối chóp nhờ công thức $V\,(\text{khối chóp}) = \frac{1}{3}dt\,(\text{đáy}).\text{chiều cao}$.

+ Phân chia khối đa diện thành nhiều khối đa diện hơn và dễ tính thể tích hơn.

+ Dùng tỷ số thể tích:

Cho ba đường thẳng không đồng đồng phẳng SA, SB, SC các điểm $A' \in SA; B' \in SB; C' \in SC$ khi đó ta có tỷ số thể tích

$$\frac{V\left(SA'B'C'\right)}{V\left(SABC\right)} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

$$\frac{V\left(A'ABC\right)}{V\left(SABC\right)} = \frac{A'A}{SA}$$

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên d đến (P) là như nhau.

- Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm M và có hai điểm A, B trên d sao cho $AM = kBM$ thì $d\left(A;(P)\right) = k.d\left(B;(P)\right)$. Áp dụng khi tính khoảng cách trực tiếp từ một điểm đến mặt phẳng khó khăn.

Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Giả sử I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $S.A_1A_2...A_n$ khi đó

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ I thuộc trục đường tròn đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

+ I cách đều tất cả các điểm $S, A_1, A_2, ..., A_n$ nên I phải nằm trên mặt phẳng trung trực của SA_i.

Để chứng minh các điểm đều thuộc một mặt cầu

+ Chứng minh các điểm cùng nhìn một cạnh dưới một góc 90^0.

+ Chứng minh chúng cách đều một điểm nào đó.

Dưới đây trình bày 4 bài toán cơ bản nhất, các em nên nắm vững để áp dụng vào bài thi

Bài toán cơ bản 1: Cho khối chóp có diện tích đáy là S và chiều cao khối chóp h khi đó thể tích khối chóp được xác định theo công thức $V = \frac{1}{3}S.h$.

Bài toán cơ bản 2: Cho khối chóp $S.ABC$ trên các cạnh $SA; SB; SC$ lần lượt lấy các điểm $A'; B'; C'$. Khi đó ta có

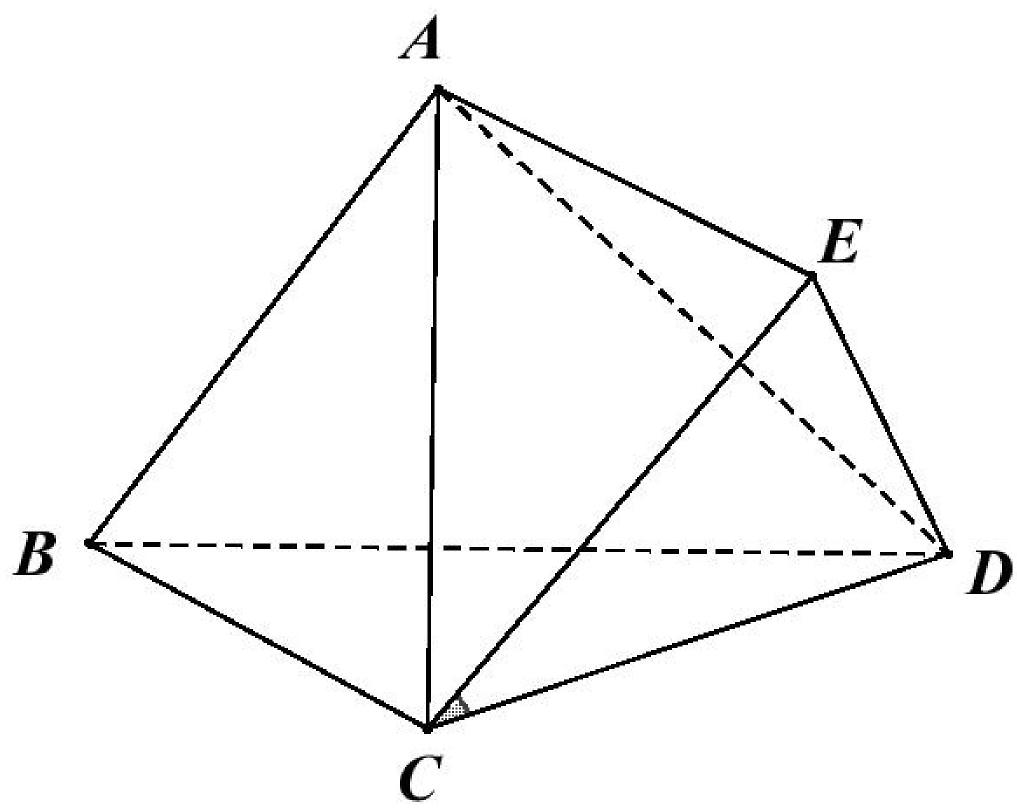
$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A_1B_1C_1}} = \frac{SA}{SA_1}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}$$

Bài toán cơ bản 3: Cho tứ diện $ABCD$, có d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD và α là góc giữa hai đường thẳng đó. Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ được xác định theo công thức

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$$

Chứng minh:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam



Dựng hình bình hành $ABCE$, khi đó $\widehat{ECD} = \alpha$

Ta có $V_{ABCD} = V_{E.BCD} = V_{B.CED}$ (do AE song song với mặt phẳng BCD)

Do AB song song với mặt phẳng CED nên khoảng cách giữa $AB; CD$ cũng chính là khoảng cách từ B đến mặt phẳng CED

Vậy $V_{ABCD} = V_{B.CED}$

$$= \frac{1}{3} d\left(B;(CED)\right).\frac{1}{2} CE.CD.\sin\alpha = \frac{1}{6} AB.CD.d.\sin\alpha$$

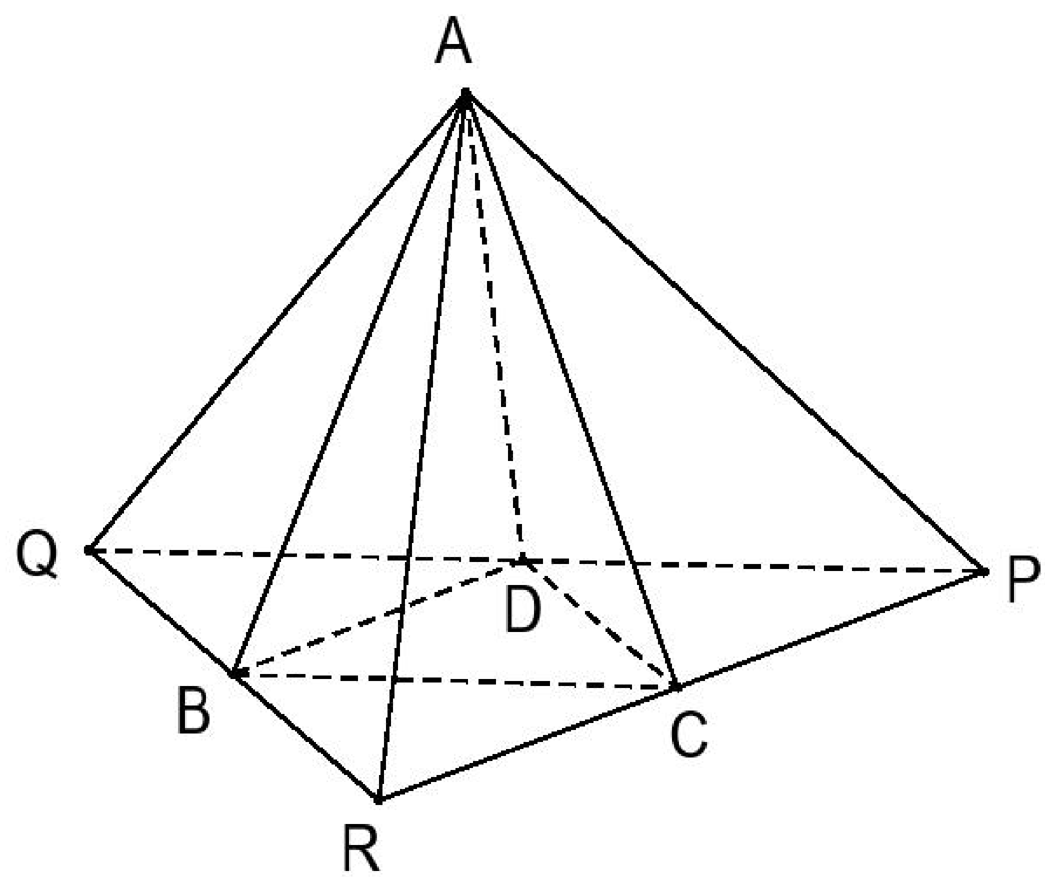
Bài toán cơ bản 4: Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau $AB = CD = a; AC = BD = b; AD = BC = c$.

Lời giải:

Dựng tứ diện $APQR$ sao cho $B; C; D$ lần lượt là trung điểm của $QR; RP; PQ$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN



Ta có $AB = CD = \frac{1}{2}QR$, mà B lại là trung điểm của QR suy ra tam giác AQR vuông tại A

$\Rightarrow AQ \perp AR$

Một cách tương tự, ta cũng có $AP \perp AQ; AR \perp AP$

Do $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{PQR}$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{4}.\frac{1}{6}AQ.AR.AP$

Ta xác định $AQ; AP; AR$:

Theo định lý pitago ta có:

$$\begin{cases} AQ^2 + AR^2 = QR^2 = (2CD)^2 = 4a^2 \\ AQ^2 + AP^2 = QP^2 = (2BC)^2 = 4c^2 \\ AP^2 + AR^2 = PR^2 = (2BD)^2 = 4b^2 \end{cases}$$

Từ đây suy ra: $AQ = \sqrt{2\left(a^2 - b^2 + c^2\right)}; AP = \sqrt{2\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}; AR = \sqrt{2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(c^2 + b^2 - a^2\right)\left(c^2 + b^2 - a^2\right)}$

1.1. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG CÔNG THỨC TRỰC TIẾP

- Với những khối chóp ta xác định được đường cao một cách tương đối dễ thì nên áp dụng cách này. Đây cũng là cách thông dụng nhất để giải các bài toán thi đại học, vì mức độ yêu cầu học sinh nắm chắc cách vận dụng kiến thức.

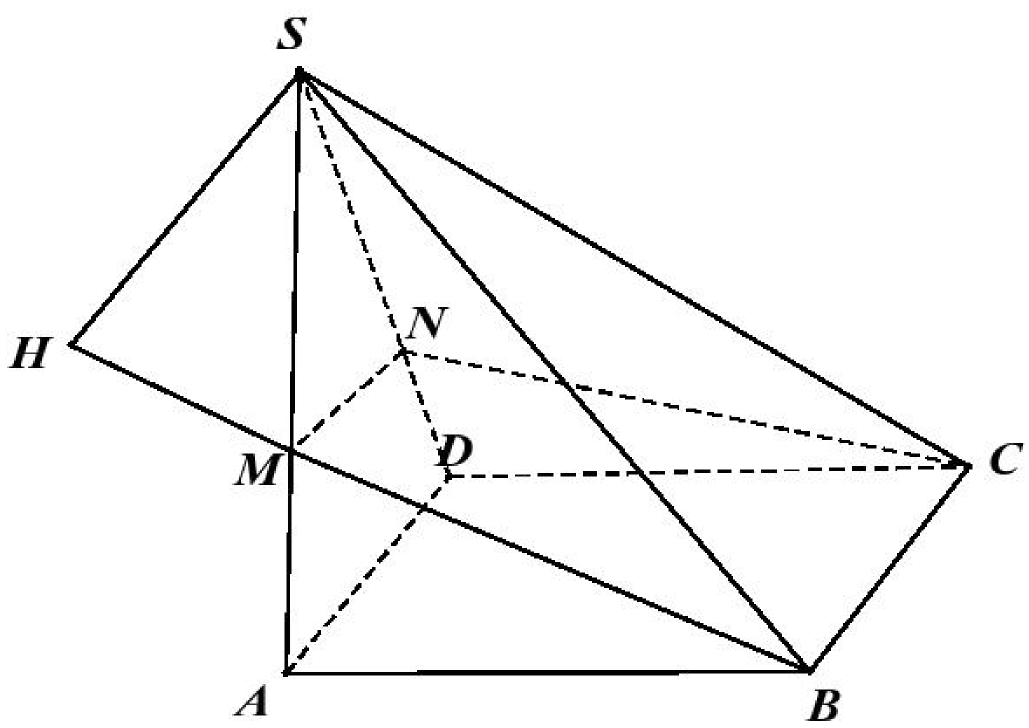
Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a; AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.

Lời giải:



Do AD song song với BC nên giao tuyến của mặt phẳng (BCM) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng MN song song với AD

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BM$ vậy thiết diện là hình thang vuông $BCNM$

Có AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa cạnh SB và mặt phẳng (SAB) chính là góc $\widehat{SBA} = 60^0$

Suy ra $SA = AB \tan 60^0 = a\sqrt{3}$

Xét tam giác SAD có:

$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{SA - AM}{SA} \Rightarrow MN = \frac{SA - AM}{SA}.AD = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}}.2a = \frac{4a}{3}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Và $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích hình thang $BCNM$ là $S_{BCNM} = \dfrac{1}{2}\left(AB + MN\right)BM = \dfrac{1}{2}\left(2a + \dfrac{4a}{3}\right).\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10a^2\sqrt{3}}{9}$

Hạ $SH \perp BM$, thì do $BC \perp \left(SAB\right) \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow SH \perp \left(BCNM\right)$

Vậy SH chính là đường cao của khối chóp $S.BCNM$

$\tan\widehat{ABH} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ABH} = 30^0 \Rightarrow \widehat{SBH} = 30^0 \Rightarrow SH = \dfrac{1}{2}SB = a$

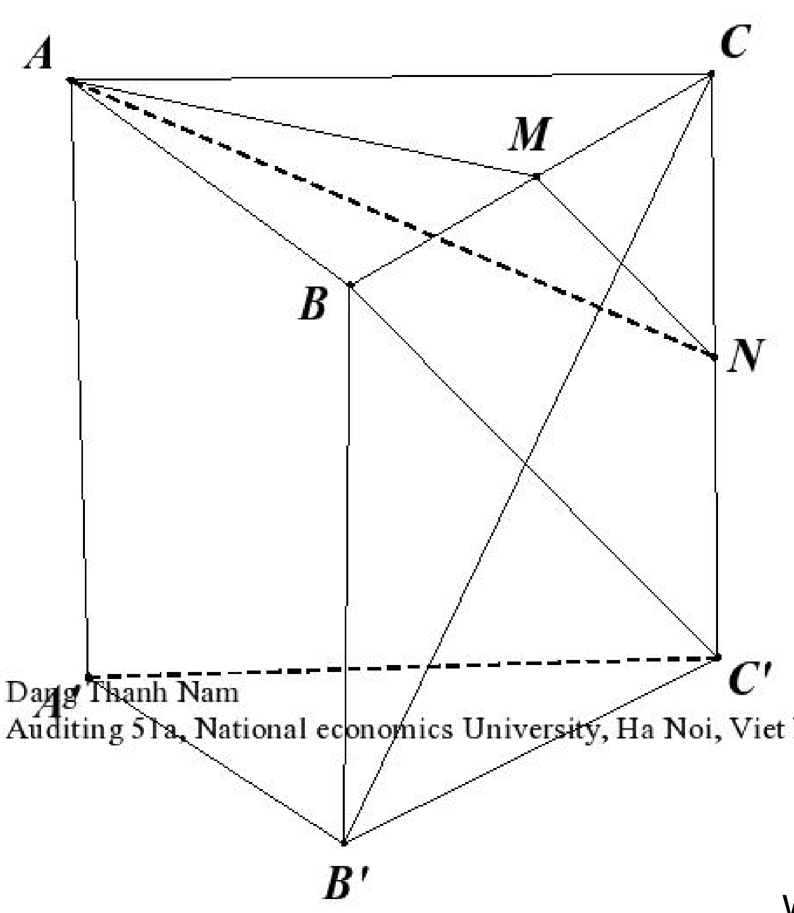
Vậy $V_{S.BCNM} = \dfrac{1}{3}S_{BCNM}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{10a^2\sqrt{3}}{9}.a = \dfrac{10a^3\sqrt{3}}{27}$

<u>Cách khác:</u> Sử dụng tỷ số thể tích; tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ theo tổng thể tích của khối chóp $SBMN$ và $SBCN$

- $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAD}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}$
- $\dfrac{V_{S.BCN}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SN}{SD}$

(chi tiết xem phương pháp tỷ số thể tích).

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua A và vuông góc với $B'C$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện; một khối chứa đỉnh C, một khối chưa đỉnh B'. Tính thể tích của khối chứa đỉnh B'.



<u>Lời giải:</u>

Gọi M là trung điểm của BC; kẻ MN song song với $BC'\left(N \in CC'\right)$

Khi đó $MN \perp B'C$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Và $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ vì vậy tam giác AMN chính là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P)

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

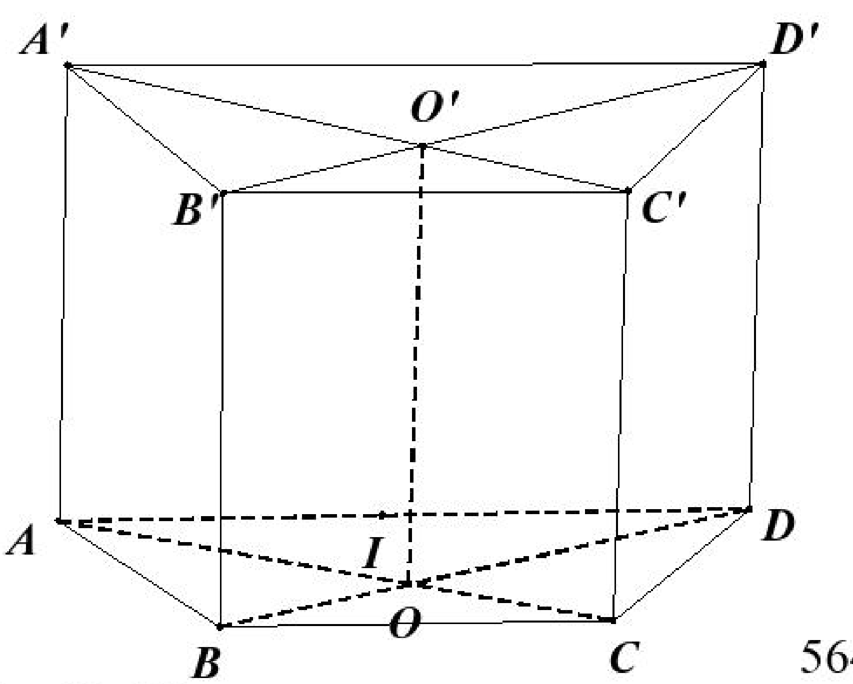
$V_{A.CMN} = \frac{1}{3}AM.S_{CMN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ Vậy

$V_{AA'BMNC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.CMN} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{48}$ (dvtt)

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AD; SD vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ $AD = 2a; AB = CD; SD = a$

$\widehat{BAD} = 60^0$. Trên các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại $A; B; C$ lần lượt lấy các điểm $A'; B'; C'$ ($A'; B'; C'$ cùng phía với S). Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và chứng minh rằng $V_{S.ABC} = V_{D.A'B'C'}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AD

Do $AB = CD$ nên BC song song với AD, suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang cân

Lại có $\widehat{BAD} = 60^0$

Suy ra tam giác IAB đều, cũng có ICD đều; và IBC đều cạnh a

Vậy $S_{ABCD} = 3S_{IAB} = 3.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chứng minh: $V_{S.ABC} = V_{D.A'B'C'}$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SD.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (dvtt)

Gọi $AC \cap BD = \{O\}; A'C' \cap B'S = \{O'\}$

Do OO' song song với SD nên ta có:

$$\frac{d\left(D;\left(A'B'C'\right)\right)}{d\left(O;\left(A'B'C'\right)\right)} = \frac{SD}{OO'};\ \frac{d\left(S;\left(ABC\right)\right)}{d\left(O';\left(ABC\right)\right)} = \frac{SD}{OO'}$$

Từ đó suy ra

$$V_{S.ABC} = \frac{SD}{OO'}V_{O'.ABC}; V_{D.A'B'C'} = \frac{SD}{OO'}V_{O.A'B'C'}$$

Ta chỉ cần chứng minh: $V_{O'.ABC} = V_{O.A'B'C'}$

Thật vậy:

- $V_{O.A'B'C'} = V_{B'.OA'C'} = \frac{1}{3}d\left(B';\left(ACC'A'\right)\right).S_{OA'C'} = \frac{1}{3}d\left(BB';\left(ACC'A'\right)\right).S_{OA'C'}$

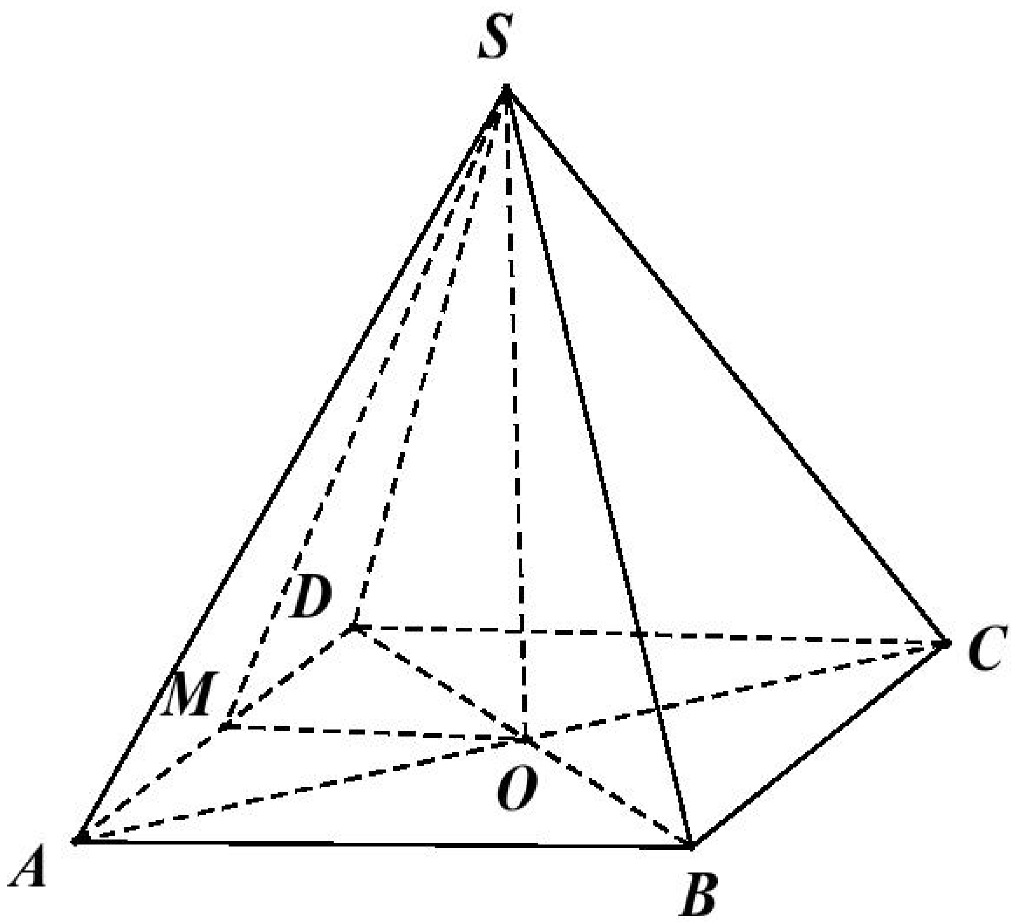
- $V_{O'.ABC} = V_{B.O'AC} = \frac{1}{3}d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right).S_{O'AC} = \frac{1}{3}d\left(BB';\left(ACC'A'\right)\right).S_{O'AC}$

Mặt khác $S_{OA'C'} = S_{O'AC}$; từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Mặt bên (SAD) cân tại S và tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam



Gọi O là tâm mặt đáy $ABCD$

Do

$$\begin{cases}(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\\(SAC)\cap(SBD)=SO\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$$

Gọi M là trung điểm của AD

Thì do tam giác SAD cân tại S nên $SM\perp AD$

Lại có $SO\perp AD$

Từ đây suy ra $AD\perp(SMO)$

Vậy nên góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SMO}=60^0$

Mặt khác $AD\perp MO$, tam giác vuông AOD có OM vừa là trung tuyến lại vừa là đường cao nên nó là tam giác cân; hay $OD=OA\Rightarrow ABCD$ là hình vuông

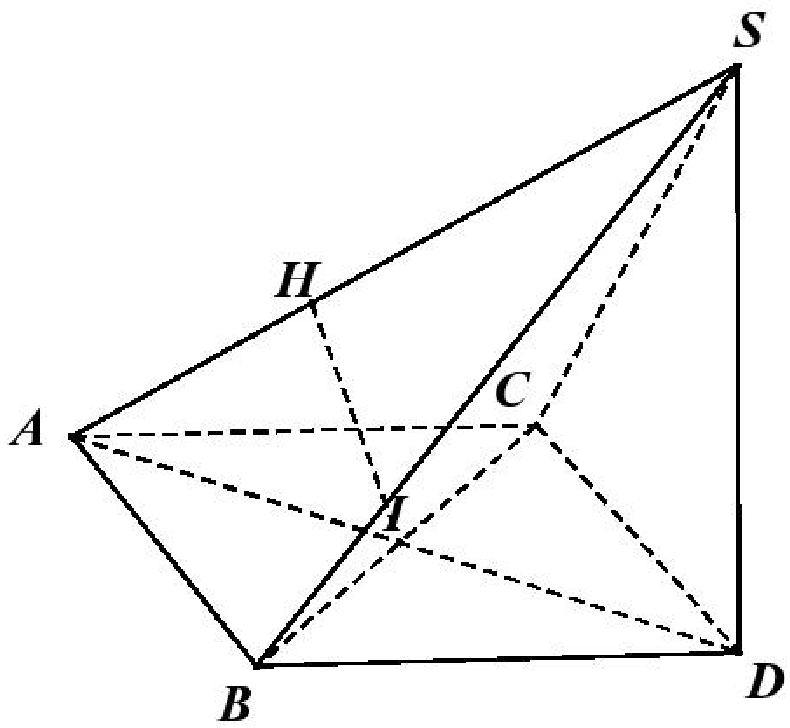
Vậy $SO=OM\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt)

Bài 5. Trên mặt phẳng (P) chứa tam giác đều ABC cạnh a, D là điểm đối xứng của A qua trung điểm I của BC. Lấy điểm S trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại D, biết $SD=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi H là hình chiếu của I trên SA. Chứng minh mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính thể tích khối chóp $H.ABC$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:



Ta có $ABCD$ là hình thoi(có tất cả các cạnh đều bằng a)

Suy ra $BC \perp AD$

Lại có $BC \perp SD$, từ đó suy ra $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$

Mặt khác lại có $HI \perp SA$

Vậy $SA \perp (HBC)$; suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) chính là góc $\widehat{BHC}$

Ta tính góc $\widehat{BHC}$:

Tam giác $AHI \sim ADS(g.g) \Rightarrow \frac{AI}{HI} = \frac{AS}{DS} \Rightarrow HI = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}$. Tam giác HBC có trung tuyến bằng $\frac{1}{2}$ cạnh đối diện nên nó là hình vuông. Vậy $\widehat{BHC} = 90^0$

Từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAC)$.

Ta có $V_{H.ABC} = \frac{1}{3}AH.\frac{1}{2}HI.BC = \frac{1}{6}.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{a}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ (đvtt)

Bài 6. Cho lăng trụ đứng có đáy $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, góc $\widehat{BAC} = 60^0$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng a và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC bằng $\frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B';B'C'$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AD'MN$ và khoảng cách từ A đến $D'N$.

1.2. Cho hình chóp đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, đường cao hình chóp bằng $a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) qua cạnh BC và vuông góc với SA. Hỏi mặt phẳng (P) chia khối chóp thành hai phần có tỷ số thể tích bằng bao nhiêu?.

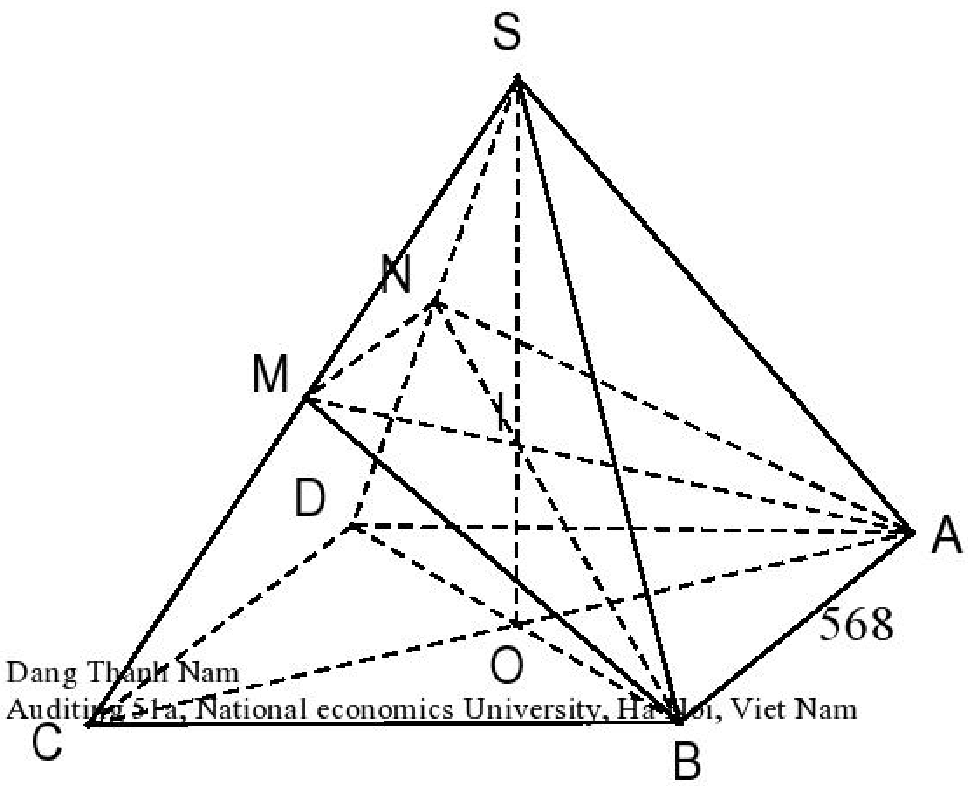
1.3.

1.2. PHƯƠNG PHÁP TỶ SỐ THỂ TÍCH

Nội dung: Xem bài toán cơ bản 2

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Xét mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A; B và trung điểm M của cạnh SC. Tính tỷ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.



Lời giải:

Kẻ MN song song với $SD\left(N\in SD\right)$

Khi đó hình thang $ABMN$ là thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) và hình chóp.

$V_{S.ABMN}=V_{S.ABN}+V_{S.ABM}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Áp dụng tỷ số thể tích cho hai khối chóp $S.ABD; S.BCD$ ta được:

- $$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{2}V_{S.ABD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$$

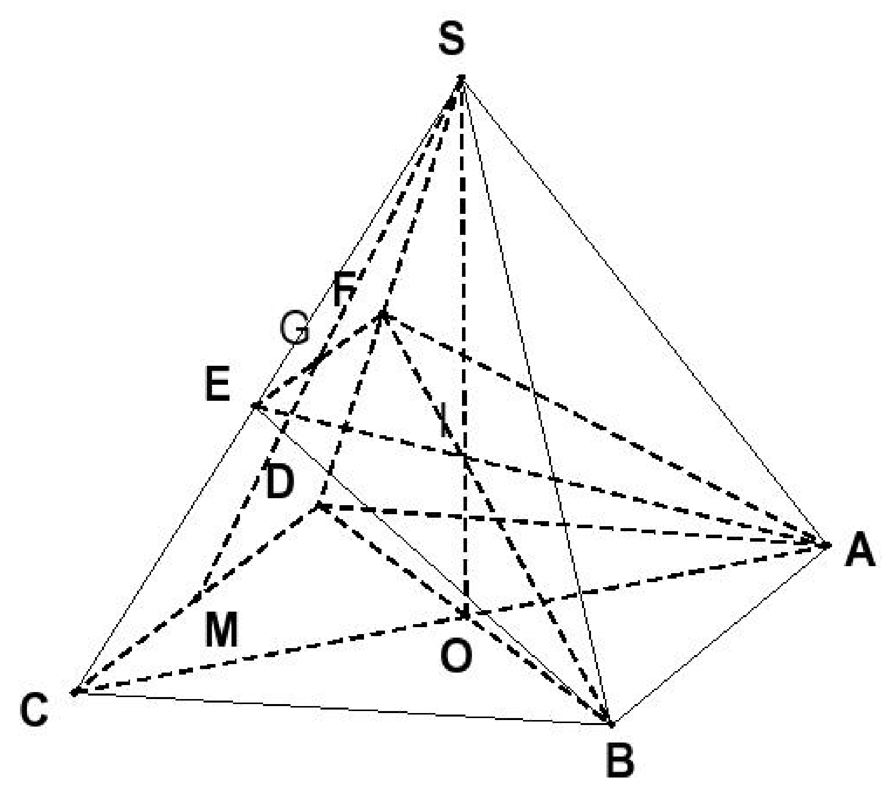
- $$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BCD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$

Từ đó suy ra: $V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.ABM} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$

Suy ra: $\frac{V_{S.ABMN}}{V.ABCDNM} = \frac{3/8}{1-3/8} = \frac{3}{5}$.

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh a, mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Mặt phẳng đi qua hai điểm $A; B$ và trọng tâm G của tam giác SCD cắt các cạnh $SC; SD$ lần lượt tại E và F. Tính thể tíchkhối chóp $S.ABEF$

<u>Lời giải:</u>



Gọi M là trung điểm của $CD; O$ là tâm hình vuông $ABCD$

Ta có $\begin{cases} SO \perp CD \\ OM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SMO) \Rightarrow \widehat{SMO} = 60^0 \Rightarrow SO$

Kẻ EF qua G và song song với $CD(E \in SC; F \in SD)$; khi đó thiết diện là hình thang cân $ABEF$.

Áp dụng tỷ số thể tích ta được:

- $$\frac{V_{S.ABF}}{V_{S.ABD}} = \frac{SF}{SD} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABF} = \frac{2}{3}V_{S.ABD}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

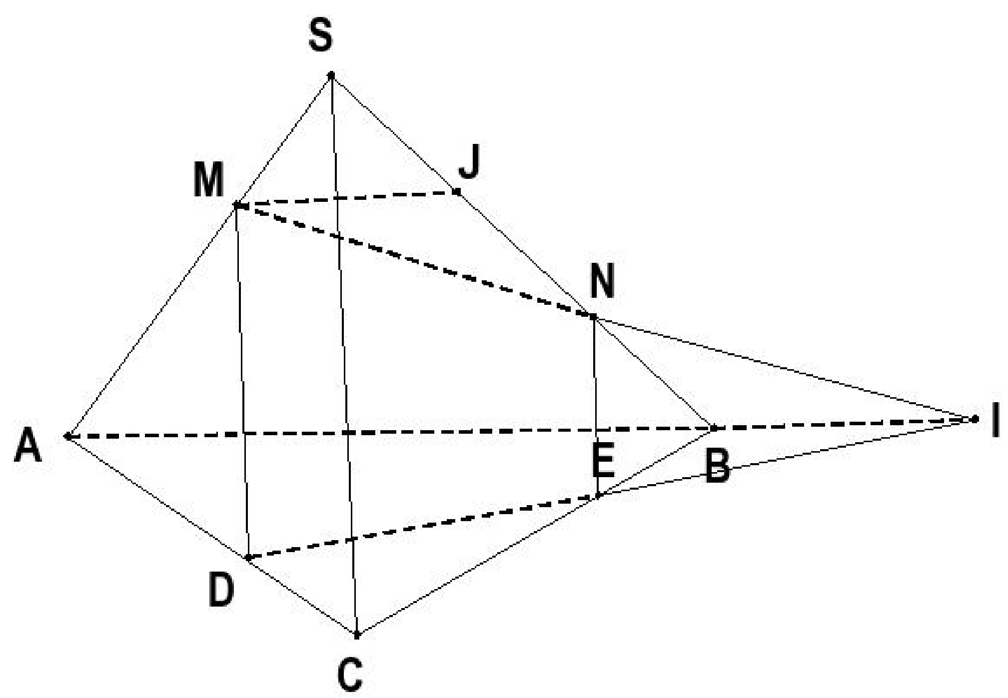
- $\dfrac{V_{S.BEF}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SE}{SC}.\dfrac{SF}{SD} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABF} = \dfrac{4}{9}V_{S.BCD} = \dfrac{4}{9}.\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{2}{9}V_{S.ABCD}$

Từ đó suy ra:

$$V_{S.ABEF} = V_{S.ABF} + V_{S.BEF} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} + \frac{2}{9}V_{S.ABCD} = \frac{5}{9}V_{S.ABCD} = \frac{5}{9}.\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{54}$$

Bài 3. Cho điểm M trên cạnh SA, điểm N trên cạnh SB của khối chóp $S.ABC$ sao cho $\dfrac{SM}{MA} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC, chia khối chóp thành hai phần. Tìm tỷ số thể tích hai phần đó.

Lời giải:



Kéo dài MN cắt AB tại I

Kẻ MD song song với SC; DI cắt BC tại E

Khi đó tứ giác $MNED$ là thiết diện của khối chóp cắt bởi mặt phẳng (α)

Trước hết ta tính thể tích khối chóp $AMNED$ theo thể tích khối chóp $A.SBC$

Kẻ MJ song song với AB suy ra $SJ = \dfrac{1}{3}SB \Rightarrow J$ là trung điểm của SN. Từ đây suy ra

$IB = MJ = \dfrac{1}{3}AB$

Theo công thức tỷ số thể tích ta có

- $\dfrac{V_{A.MDI}}{V_{A.SCB}} = \dfrac{AM}{AS}.\dfrac{AD}{AC}.\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{27} \Rightarrow V_{A.MDI} = \dfrac{16}{27}V_{A.SCB} = \dfrac{16}{27}V_{S.ABC}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

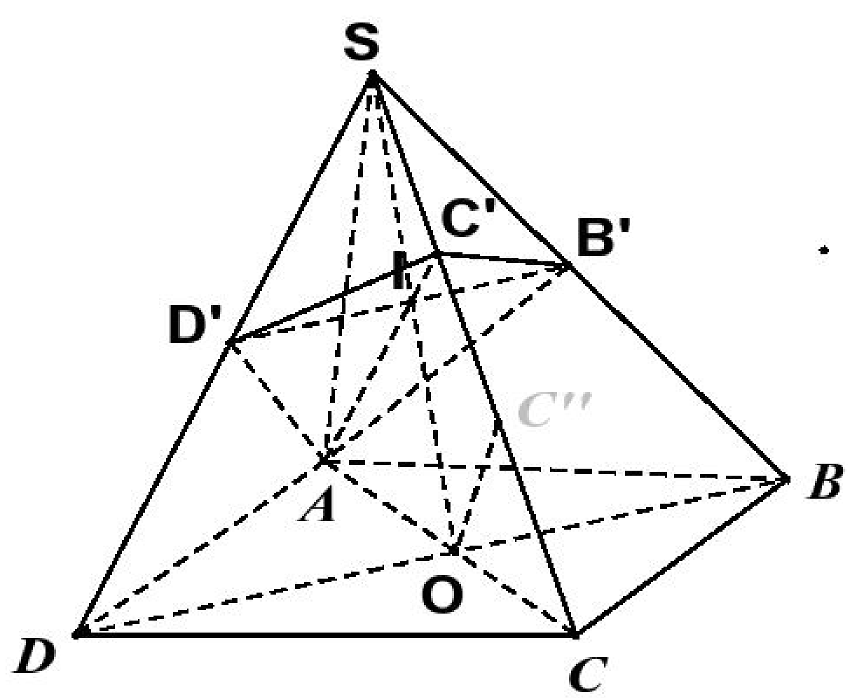
- $\frac{V_{I.BNE}}{V_{I.AMD}}=\frac{IB}{IA}.\frac{IN}{IM}.\frac{IE}{ID}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\Rightarrow V_{I.BNE}=\frac{1}{16}V_{I.AMD}=\frac{1}{16}.\frac{16}{27}V_{S.ABC}=\frac{1}{27}V_{S.ABC}$

Suy ra $V_{ADMNE}=V_{A.MDI}-V_{I.BNE}=\frac{15}{27}V_{S.ABC}$

Vậy gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích phần dưới; phần trên do mặt phẳng (α) tạo ra với khối chóp $S.ABC$ thì $\frac{V_1}{V_2}=\frac{15/27}{1-15/27}=\frac{5}{4}$

Bài 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $B';D'$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SB;SD$. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tìm tỷ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

__Lời giải:__



Gọi O là tâm mặt đáy $ABCD$; $B'D'\cap SO=\{I\}$; $AI\cap SC=\{C'\}$

Kẻ OC'' song song với AC' $(C''\in SC)$

Do $B'D'$ là đường trung bình của tam giác SBD nên I là trung điểm của SO

Và O là trung điểm của AC. Từ đó suy ra

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$SC' = C'C''; C'C'' = C''C \Rightarrow \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$

Theo công thức tỷ số thể tích ta có

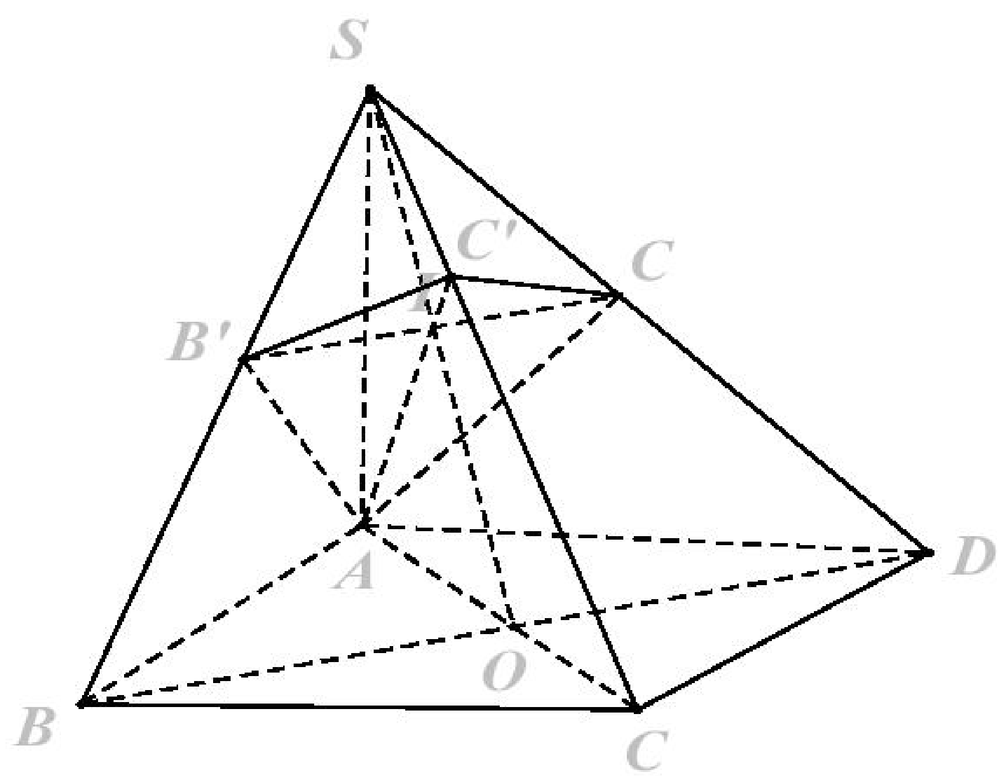
- $\dfrac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AD'C'} = \dfrac{1}{6}V_{S.ADC} = \dfrac{1}{12}V_{S.ABCD}$

- $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{12}V_{S.ABCD}$

Vậy $V_{S.AB'D'} = V_{S.AD'C'} + V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD} \Rightarrow \dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{6}$

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; cạnh SA vuông góc với đáy; $SA = 2a$. Gọi $B'; D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh $SB; SD$. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Chứng minh rằng năm điểm $S; A; B'; C'; D'$ cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Lời giải:



Để chứng minh năm điểm $S; A; B'; C'; D'$ cùng thuộc một mặt cầu ta chỉ cần chứng minh $AC' \perp SC$. Vì khi đó chúng cùng thuộc mặt cầu đường kính SA

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA\ (gt) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD'$

Mặt khác $AD' \perp SD \Rightarrow AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp SC$

Tương tự ta cũng có: $AB' \perp SC$. Từ đó suy ra $(SC) \perp (AB'D') \Rightarrow SC' \perp SC$ (ta có đpcm).

Dễ thấy $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}$(tính chất đối xứng xứng của hình chóp)

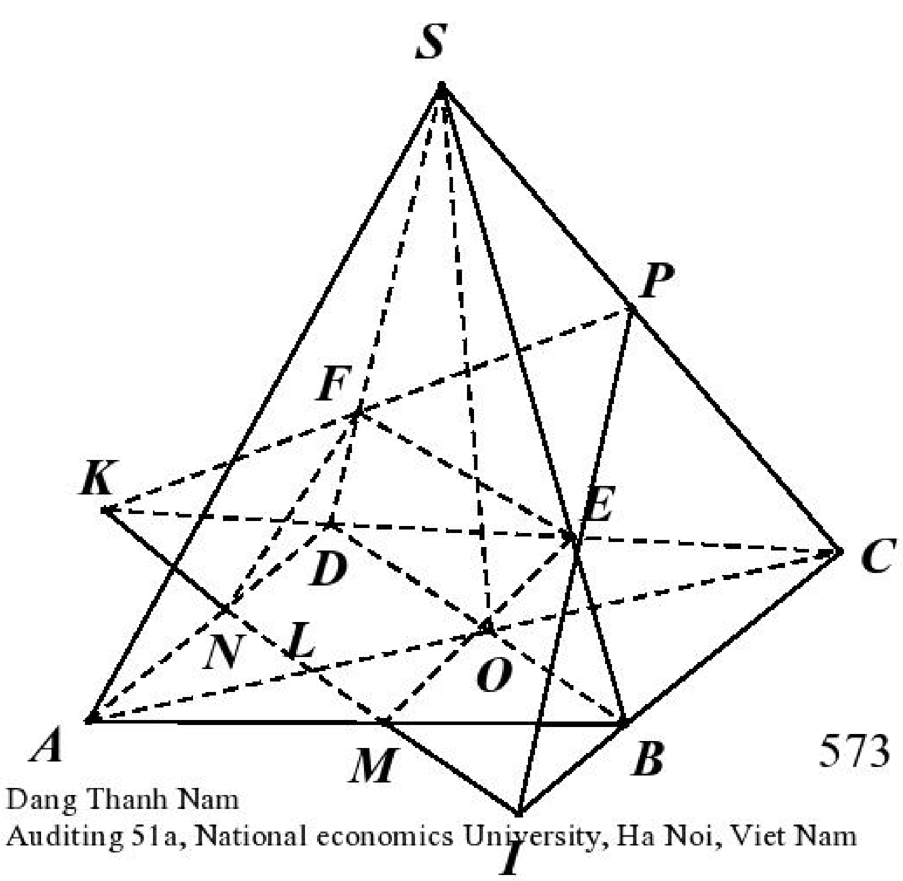
Theo công thức tỷ số thể tích, ta có:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{SB.SB'}{SB^2}.\frac{SC.SC'}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2}.\frac{4a^2}{6a^2} = \frac{8}{15}$$

Từ đó suy ra $V_{S.AB'C'} = \frac{8}{15}V_{S.ABC} = \frac{8}{15}.\frac{1}{3}.SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{8a^3}{45} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{16}{45}a^3$

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M;N;P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AB;AD;SC$. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Lời giải:



MN cắt BC tại I, cắt CD tại K

Cắt AC tại L; gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$

IP cắt cạnh SB tại $E; KP$ cắt cạnh SD tại F

Khi đó thiết diện của khối chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNFPE$

Theo tính chất song song ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{CK}{CD}=\frac{CI}{CB}=\frac{CL}{CO}=\frac{3}{2}\Rightarrow CK=\frac{3}{2}CD;CI=\frac{3}{2}CB$ Do P là trung điểm của cạnh SC nên

$d\left(P;\left(ABCD\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;\left(ABCD\right)\right)$

- $V_{P.CIK}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}d\left(S;\left(ABCD\right)\right).\frac{1}{2}CK.CI.\sin\widehat{ICK}$

$=\frac{1}{12}d\left(S;\left(ABCD\right)\right).\frac{3}{2}CD.\frac{3}{2}CB.\sin\widehat{DCB}=\frac{9}{16}V_{S.ABCD}$

Bây giờ ta tính thể tích hai khối tứ diện $I.MBE;K.END$ theo thể tích khối tứ diện $S.ABCD$

Vì tính chất đối xứng suy ra $V_{I.BME}=V_{K.END}$

Theo tỷ số thể tích ta có:

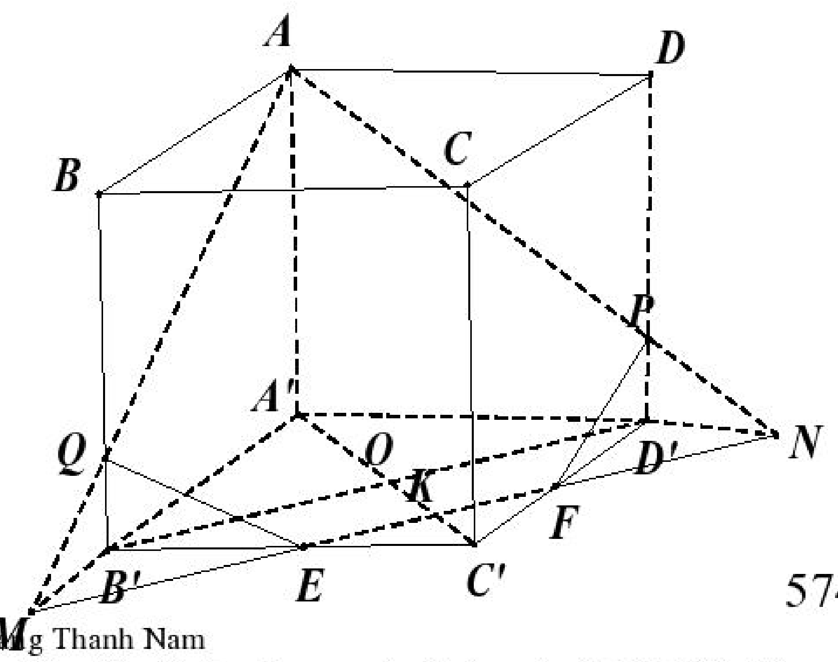
$\frac{V_{I.BME}}{V_{I.CKP}}=\frac{IB}{IC}.\frac{IM}{IK}.\frac{IE}{IP}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\Rightarrow V_{I.BME}=\frac{1}{18}V_{I.CKP}=\frac{1}{32}V_{S.ABCD}$

Gọi V_1 là thể tích phần phía dưới tạo bởi mặt phẳng $\left(MNP\right)$ và khối chóp

Ta có $V_1=V_{P.CIK}-2V_{I.BME}=\left(\frac{9}{16}-2.\frac{1}{32}\right)V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ Từ đây ta có đpcm.

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $E;F$ lần lượt là trung điểm các cạnh $C'B';C'D'$. Tính tỷ số thể tích hai phần khi cắt hình lập phương bởi mặt phẳng $\left(AEF\right)$.

<u>Lời giải:</u>



EF cắt $A'B'$ tại $M;MA$ cắt BB' tại Q

EF cắt $A'D'$ tại $N;PN$ cắt DD' tại P

Gọi O là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và K là giao điểm của $A'C'$ và EF

Khi đó thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng $\left(AEF\right)$ là ngũ giác $APFEQ$

Theo tính chất song song ta có

Đặng Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{A'M}{A'B'}=\frac{A'N}{A'D'}=\frac{AK}{AO}=\frac{3}{2}$

Ta có $V_{A.A'MN}=\frac{1}{6}AA'.A'M.A'N=\frac{1}{6}.a.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{3a^3}{8}$

$V_{P.D'NF}=V_{Q.B'ME}$ (do tính chất đối xứng)

$=\frac{1}{6}PD'.D'F.D'N=\frac{1}{6}\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{3}=\frac{a^3}{72}$

Gọi V_1 là phần thể tích phía dưới cắt bởi mặt phẳng (AEF); V_2 là phần thể tích phía trên

Ta có $V_1=V_{A.A'MN}-V_{P.D'NF}-V_{Q.B'ME}=\frac{3a^3}{8}-2.\frac{a^3}{72}=\frac{25}{72}a^3$

Suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{25/72}{1-25/72}=\frac{25}{47}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Mặt phẳng quay quanh AG cắt cạnh SB,SC theo thứ tự tại M,N. Gọi V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$; V là thể tích tứ diện $SABC$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

1.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK=\frac{2a}{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A,K và song song với BD chia hình lập phương thành hai phần. Tính thể tích hai phần đó.

BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP ĐA DIỆN

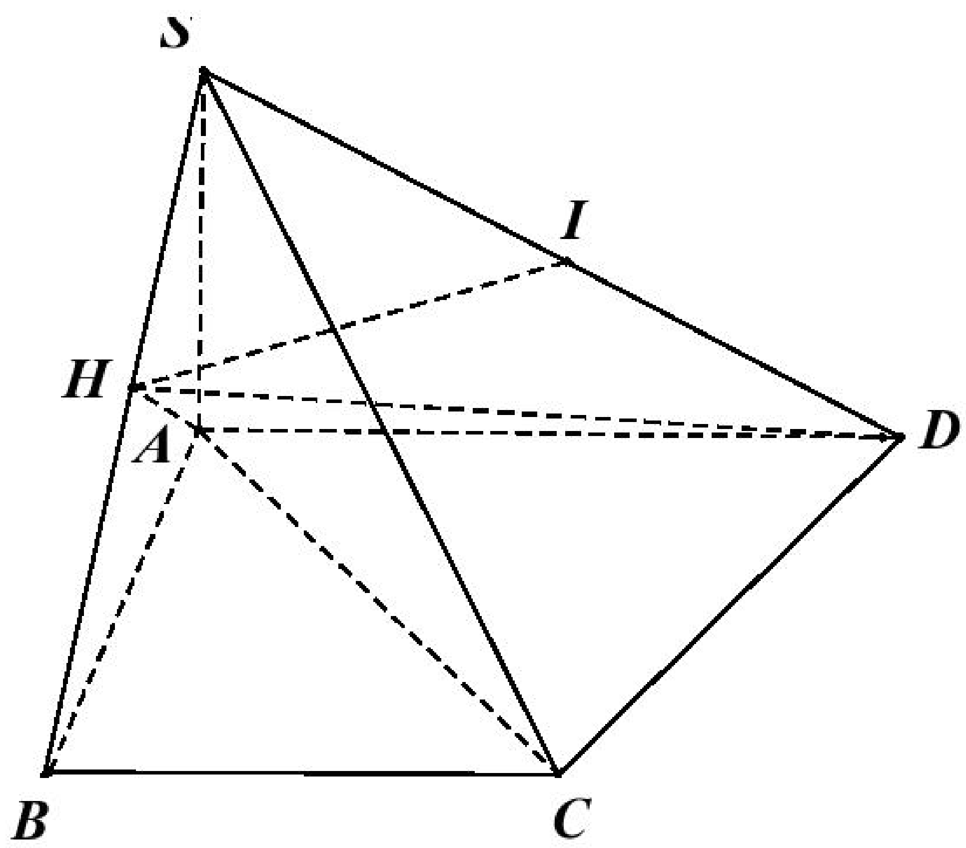
BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1. Cho hình chóp $A.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và có $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a; SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$ cắt SB tại H. Chứng minh rằng $AH \perp BS$ và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải:



Do $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ nên

$CD^2 = BC^2 + AB^2 = 2a^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$

Suy ra $AC^2 + CD^2 = AD^2 = 4a^2$

Vậy tam giác ACD vuông cân tại tại C

Vì thế gọi I là trung điểm của SD thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$

Do H cũng thuộc mặt cầu nên $\widehat{SHD} = 90^0$ hay $SH \perp HD$ (1)

Lại có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $SB \perp (AHD) \Rightarrow AH \perp SB$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a; AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính thể tích khối chóp $S.CDE$ và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đó.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a\ AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi H là trung điểm của AB. Biết mặt bên (SAB) vuông góc với đáy và là tam giác cân đỉnh S. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.AHC$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh $a, DA = DB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và CD vuông góc với AD. Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm E sao cho tam giác AEB vuông tại E. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD). Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $ABCE$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Chân đường vuông góc kẻ từ đỉnh S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD$.

Bài 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của $A'A, AB$ và BC. Biết góc tạo bởi mặt phẳng $(C'AI)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $N.AC'I$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $C'.AIB$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có đường cao là SH trong đó H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HN} = -3\overrightarrow{HM}$ (M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD). Mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) và xác định thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a; AD = 2a, SAC$ là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SB tạo với mặt phẳng (SAC) góc 60^0. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử mặt phẳng (P) qua O và song song với SC cắt SA tại M. Tính thể tích khối chop $MBCD$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chop $SACD$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a; CB = CD = a$ và AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi M là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACD) và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 9. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi M là trung điểm BC, lấy điểm D đối xứng với A qua M. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M lên SA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC). Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $NBCD$.

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh $a, DA = DB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, CD$ vuông góc AD. Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90^0$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD). Xác định tâm và thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCE$.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên vuông góc với đáy. Biết $SA = a\sqrt{3}; SB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và O là giao điểm của AC và BD. Tính theo a thể tích khối chóp $SAMBN$ và xác định tâm,bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SAMON$.

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Lấy điểm H trên đoạn AC sao cho $AH = \frac{a}{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{ASC} = 45^0$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = a, BC = b$. Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau và tam giác BCD vuông tại D. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a, b.

Bài 14. Cho hình chóp $SABC$ có $SA = SB = SC = a; \widehat{ASB} = 60^0; \widehat{BSC} = 90^0$ $\widehat{CSA} = 120^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SABC$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = a$. Từ trung điểm M của AB ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), trên đó lấy điểm S sao cho tam giác SAB đều. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SABC$.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = AC = a$. BB', CC' là hai đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cùng phía với mặt phẳng (ABC) biết $BB' = CC' = a$. Tính thể tích khối chóp $ABCC'B'$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $ABCC'B'$.

Bài 17. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $A'A, AB, BC$ biết mặt phẳng (MNP) tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $MNPC'$ và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $ABPC'$.

Bài 18. Cho hình chóp $SABCD$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Xác định tâm và bán kính khối cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$ biết $SA = h$.

Bài 19. Cho hình cầu (S) có đường kính $AB = 2R$, lấy điểm H trên AB sao cho $AH = x(0 < x < 2R)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). $MNPQ$ là hình vuông nội tiếp trong đường tròn (C)

1. Tính bán kính đường tròn (C) và độ dài AC, MN.

2. Tính thể tích khối đa diện tạo bởi hai khối chóp $AMNPQ$ và $BMNPQ$.

Bài 20. Cho hình chóp tứ giác giác đều $SABCD$ cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O, chiều cao $SH = \dfrac{a}{2}$.

1. Chứng minh rằng có mặt cầu (S) tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $SABCD$. Xác định tâm và bán kính R của mặt cầu đó.

2. Gọi (P) là mặt phẳng song song và cách mặt phẳng $(ABCD)$ một khoảng bằng $x(0 < x < R)$. Gọi S là phần diện tích tạo bởi (P) và hình chóp(bỏ đi phần diện tích nằm trong mặt cầu (S)). Xác định x để $S = \pi R^2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 21. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có chiều cao và cạnh đáy cùng bằng a. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Tính diện tích xung quanh, thể tích của mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp $SEBK$.

Bài 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 23. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc 30^0. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $SABCD$.

Bài 24. Cho hình chóp cụt tam giác đều ngoại tiếp một hình cầu bán kính r. Tính thể tích khối chóp cụt biết cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh đáy nhỏ.

Bài 25. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có độ dài cạnh bên bằng a. Các mặt bên hợp với đáy góc α. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$.

BÀI TẬP VỀ HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

Bài 1. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O'. Bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm B lấy điểm B sao cho $AB = 2a$.

1. Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ.
2. Tính thể tích tứ diện $OABO'$.

Bài 2. Cho hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, có hai đỉnh A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn đáy thứ hai. Biết mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và diện tích của hình trụ.

Bài 3. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh. Biết $SO = 3a$, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng a, diện tích tam giác SAB bằng $18a^2$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

BÀI TẬP TỔNG HỢP

1.1. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của đoạn AO. Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 600 và AB=a. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.*

1.2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính thể tích khối chop $A.BCC'B'$ theo a.

1.3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân tại S. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA . Chứng minh rằng $(SIJ) \perp (ABCD)$ và tính thể tích khối chóp $K.IBCD$.

1.4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B có đáy nhỏ BC . Biết tam giác SAB đều độ dài cạnh 2a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đọ dài $SC = a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$, với H là trung điểm của AB. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

1.5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$, qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp $SABCD$.

1.6. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tâm giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm cạnh BC. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60^0 . Tính thể tích khối chóp $SABC$ và khoảng cách từ trung điểm K của SB đến mặt phẳng (SAH) .

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1.7. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh huyền bằng 3a, trọng tâm là G có $SG \perp (ABC), SB = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $SABC$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

1.8. **(TSĐH Khối D 2011)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BA = 3a\ BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

1.9. **(TSĐH Khối B 2011)** Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

1.10. **(TSĐH Khối A 2011)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B $AB = BC = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi M là trung điểm AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

1.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $C, CA = a, CB = b$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Số đo góc phẳng nhị diện cạnh BC của hình chóp $S.ABC$ bằng α. Gọi D là trung điểm cạnh AB.

- Tính thể tích khối chóp $S.ABC$
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và tam giác ABC cân tại A; cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng $30^0, 45^0$, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

1.13. Cho hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Khoảng cách giữa mặt bên và đỉnh đối diện bằng 6. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

1.14. **(TSĐH Khối A 2010)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

1.15. **(TSĐH Khối B 2010)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

1.16. **(TSĐH Khối D 2010)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn $AC, AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

1.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^0$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD), SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC và song song với BD cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

1.18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. cạnh SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, cạnh SB hợp với đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1.19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a .Chân đường vuông góc hạ từ S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ góc 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $SABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).

1.20. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AB = a\sqrt{3}, \widehat{BAD} = 120^0$. Biết góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ trên theo a và khoảng cách từ trung điểm N của BB' đến mặt phẳng $(C'MA)$. Biết M là trung điểm của $A'D'$.

1.21. Cho hình chóp $SABC$ có góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

1.22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = a$ và $SB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Tính theo a thể tích khối chóp $SBMDN$ và tính côsin góc tạo bởi DN và SM .

1.23. **(TSĐH Khối A 2009)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

1.24. **(TSĐH Khối B 2009)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ theo a .

1.25. **(TSĐH Khối D 2009)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, A'A = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

1.26. **(TSĐH Khối A 2008)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $A'A$ và $B'C'$.

1.27. **(TSĐH Khối B 2008)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích khối chóp $SBMDN$ và tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

1.28. **(TSĐH Khối D 2008)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, cạnh bên $A'A = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

1.29. **(TSĐH Khối A 2007)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

1.30. **(TSĐH Khối B 2007)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN, AC.

1.31. **(TSĐH Khối D 2007)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1.32. (TSĐH Khối B 2006) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$.

1.33. (TSĐH Khối D 2006) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a, SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$.

1.34. (TSĐH Khối A 2002) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

1.35. (TSĐH Khối A 2002) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.

1.36. (TSĐH Khối B 2002) Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a.

1. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

1.37. (TSĐH Khối D 2003) Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

1.38. (TSĐH Khối B 2003) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh $A'A$ và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh $A'A$ theo a để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1.39. **(TSĐH Khối B 2004)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $\varphi\left(0^0 < \varphi < 90^0\right)$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo φ. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và φ.

1.40. Khối chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD chia khối chóp làm hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.

1.41. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD), SA = 2a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD; I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AEF). Tính thể tích khối chóp $S.AEIF$.

1.42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0 và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

1.43. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông cân, cạnh huyền $AB = \sqrt{2}$. Mặt phẳng (A_1AB) vuông góc với mặt phẳng $(ABC), AA_1 = \sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn , mặt phẳng (A_1AC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

1.44. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5. Hạ AK vuông góc với A_1D tại K. Chứng minh rằng $AK = 2$ và tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

1.45. Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AC = AD = 4; AB = 3; BC = 3$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

1.46. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh bên SB, SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

1.47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tam giác ABC có $AB = BC = 2a, \widehat{ABC} = 120^0$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng SBC.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.48. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có các cạnh bên $SA = SB = SC = a$, góc $\widehat{ASB} = 120^0, \widehat{BSC} = 60^0, \widehat{CSA} = 90^0$. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính thể tích khối chóp đã cho.

1.49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α. Tính thể tích khối chóp đã cho theo a, α. Xác định α để thể tích đó là nhỏ nhất.

1.50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ và $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC và I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) và tính thể tích khối chóp $ANIB$.

1.51. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn $A'C'$ và I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

1.52. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có $SC = a\sqrt{7}$. Góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

1.53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60^0$, $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy(O là tâm mặt đáy), M là trung điểm của AD. Gọi (P) là mặt phẳng qua BM và song song với SA, cắt SC tại K. Tính thể tích khối chóp $KABCD$.

1.54. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy, góc $\widehat{ASC} = 90^0$ và SA tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp đã cho.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1.55. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

1.56. Cho hình chóp $SABC$ có $AB = AC = a, BC = \frac{a}{2}; SA = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^0$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

1.57. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, khoảng cách từ G đến mặt bên (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ tâm mặt đáy đến mặt bên (SCD).

1.58. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và góc $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh rằng MB vuông góc với MB_1 và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1MB).

1.59. Cho hình chóp $S.ABC$ có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Các tam giác SBC và ABC là các tam giác đều cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

1.60. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, gọi S là điểm nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại trung điểm của AB và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Chứng minh rằng tam giác AHK vuông và tính theo R thể tích khối chóp $S.ABC$.

1.61. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA_1. Chứng minh rằng BM vuông góc với B_1C và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 9:

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Phương pháp:

Biến đổi hai vế nhờ các phép toán đại số cơ bản; nhóm nhân tử chung; quy đồng; dựa vào giá trị tuyệt đối;… sau đó nếu có dùng các bất đẳng thức cơ bản

$(x+y)^2 \ge 0$ và $(x-y)^2 \ge 0$

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\ge 0$$

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\ge 0 \quad (*)$$

Từ (*) ta có một bất đẳng thức khác hay được sử dụng:

$$(xy+yz+zx)^2 \ge 3(xy.yz+yz.zx+zx.xy)=3xyz(x+y+z)$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng $-\frac{1}{2}\le xy+yz+zx\le 1$.

Lời giải:

Ta có

$$2(xy+yz+zx)+1=2(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\ge -\frac{1}{2}$$

Lại có

$$1-(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$

$$=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\le 1$$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x\le y\le z$. Chứng minh rằng

$$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\le\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)$$

Lời giải:

BĐT tương đương với

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)-y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z-y)+\frac{1}{y}(x+z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+z)\left(\frac{1}{y}+\frac{x+z-y}{xz}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+z)(y-x)(z-y)}{xyz}\ge 0.\text{đúng vì } 0<x\le y\le z.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 3. Cho 2 số thực $x\ne 0, y\ne 0$ thay đổi vào thỏa mãn điều kiện:

$$xy(x+y)=x^2+y^2-xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$$

Lời giải:

Ta có

$$A=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$$

Theo giả thiết ta có

$$xy(x+y)=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy\ge (x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2=\frac{1}{4}(x+y)^2>0.$$

$$\Rightarrow 0<\frac{x+y}{xy}\le 4\Rightarrow A=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2\le 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=-\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 16.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)$.

Lời giải :

Ta có $x,y,z\in[0;1]\Rightarrow \begin{cases}(1-x^2)(1-y)+(1-y^2)(1-z)+(1-z^2)(1-x)\ge 0\\ x^3\le x^2\le x; y^3\le y^2\le y; z^3\le z^2\le z\end{cases}$

Từ đó suy ra $x+y+z+x^2+y^2+z^2-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\le 3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Rightarrow P = 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \le 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = 3$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 5. Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

Lời giải :

Do $a,b,c > 0$ nên bất đẳng thức tương đương với

$bc + ca - ab < 1$

Theo bất đẳng thức cơ bản ta có

$\left(a + b - c\right)^2 \ge 0 \Rightarrow bc + ca - ab \le \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{5}{6} < 1$ luôn đúng

Từ đó ta có đpcm.

Bài 6. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}}$$

Lời giải :

Ta có

$$a + \frac{(b-c)^2}{4} - \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2 = a\left(a+b+c\right) + \frac{(b-c)^2}{4} - \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-c)^2}{4} - \frac{(b+c)^2}{4} = -bc \le 0 \Rightarrow \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} \le a + \frac{b+c}{2}$$

Tương tự

$$\sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{4}} \le b + \frac{c+a}{2}$$

$$\sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \le c + \frac{a+b}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên suy ra

$$P = \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \le 2\left(a+b+c\right) = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0, c = 1$ hoặc các hoán vị

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giá trị lớn nhất của P bằng 2.

Bài 7. Cho $a,b,c\in[0;1]$ thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\cos\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Lời giải :

Do $a,b,c\in[0;1]$ nên $0\le a^2+b^2+c^2\le a+b+c=\dfrac{3}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

vậy P lớn nhất(nhỏ nhất) khi $a^2+b^2+c^2$ nhỏ nhất (lớn nhất)

- Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$

Ta có $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=\dfrac{3}{4}$. Suy ra GTLN của P bằng $\cos\dfrac{3}{4}$; xảy ra khi

$a=b=c=\dfrac{1}{2}$

- Tìm giá trị lớn nhất của $a^2+b^2+c^2$

giả sử :

$a\le b\le c\Rightarrow a+b+c=\dfrac{3}{2}\le 3c\Rightarrow c\ge\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a^2+b^2+c^2=\left(a+b\right)^2-2ab+c^2\le\left(a+b\right)^2+c^2=c^2+\left(\dfrac{3}{2}-c\right)^2\le\dfrac{5}{4}$

Do $\left(c-1\right)\left(2c-1\right)\le 0$

Suy ra GTNN của P bằng $\cos\dfrac{5}{4}$; xảy ra khi $\left(a,b,c\right)=\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$hoặc các hoán vị

Bài 8. Cho x,y là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\left(x-y\right)\left(1-xy\right)}{\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)^2}$$

Lời giải :

Ta có $P=\dfrac{\left(x-y\right)\left(1-xy\right)}{\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)^2}=\dfrac{\left(x+xy^2\right)-\left(y+yx^2\right)}{\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)^2}$

$=\dfrac{x\left(y+1\right)^2-y\left(x+1\right)^2}{\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)^2}=\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}-\dfrac{y}{\left(y+1\right)^2}$

Với $x,y\ge 0$ thì $0\le\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}\le\dfrac{1}{4};0\le\dfrac{y}{\left(y+1\right)^2}\le\dfrac{1}{4}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ đó suy ra GTLN của P bằng $\frac{1}{4}$ khi $x=1; y=0$

GTNN của P bằng $-\frac{1}{4}$ khi $x=0; y=1$.

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$ là các số đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge 4$$

Lời giải :

Giả sử $c=\min(a,b,c)$, khi đó do $a,b,c\ge 0$ ta suy ra

$$ab+bc+ca\ge ab$$

$$\frac{1}{(b-c)^2}\ge\frac{1}{b^2}$$

$$\frac{1}{(a-c)^2}\ge\frac{1}{a^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$ab\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)\ge 4\Leftrightarrow\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{ab}-2\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{ab}}\right)^2\ge 0$$ luôn đúng

Vậy ta có đpcm.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}$$

Lời giải :

Ta có $b=\frac{2ac}{a+c}$ thay vào $P=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 4$

Bài 11. Cho $a,b,c\in[1;3]$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=a^2+b^2+c^2$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Cách 1 :

Đặt $a = x+1; b = y+1; c = z+1; x, y, z \in [0;2]$

Khi đó $P = a^2 + b^2 + c^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3$

$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + 2(x+y+z) + 3$

$= -2(xy+yz+zx) + 18$

Từ $x, y, z \in [0;2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \ge 0$

$\Leftrightarrow 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz \ge 0$

$\Rightarrow -2(xy+yz+zx) = -4 - xyz \le -4$ do $xyz \ge 0$

Từ đó suy ra $P \le -2(xy+yz+zx) + 18 \le 14$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = (1,2,3)$ hoặc các hoán vị

Bình luận :

Đặt $a = x+1; b = y+1; c = z+1$ để chúng ta tận dụng tích $xyz \ge 0$

Nếu không abc sẽ rất khó đánh giá

Cách 2 : Xem phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Bài 12. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{x+y-2}{z+2}$

Lời giải :

Ta có $x^2 + y^2 = 5 - z^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (3-z)^2\right)$

$(x+y)^2 = 1 + 6z - 3z^2$

Ta có :

$P(z+2) + 2 = (x+y) \Rightarrow (x+y)^2 = (P(z+2)+2)^2$

$\Leftrightarrow (P^2+3)z^2 + (4P^2+4P-6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là z, để phương trình có nghiệm thì

$\Delta'_z = (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2+3)(4P^2+8P+3) \ge 0 \Leftrightarrow -\dfrac{36}{23} \le P \le 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

- Với $x=2; y=0; z=1$ thì $P=0$ là giá trị lớn nhất của P.
- Với $x=\frac{20}{31}; y=-\frac{66}{31}; z=\frac{7}{31}$ thì $P=-\frac{36}{23}$ là giá trị nhỏ nhất của P.
-

Bài 13. Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3abc$

Lời giải :

$(a-1)^2\ge 0\Rightarrow a(2-a)\le 1\Rightarrow \frac{1}{2-a}\ge a$

Tương tự :

$\frac{1}{2-b}\ge b;\frac{1}{2-c}\ge c$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra

$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3abc$ do $abc\le 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 14. Cho $a,b,c\in[0;1]$ và $a+b+c\ne 0$. Chứng minh rằng

$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\le\frac{5}{a+b+c}$

Lời giải :

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\ge a\ge b\ge c\ge 0$

Khi đó

$$\frac{c}{ab+1}+\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}\le\frac{a+b+c}{bc+1}\le\frac{1+b+c+(1-b)(1-c)+bc}{bc+1}=2$$

Mặt khác

$$\frac{a+b}{ab+1}+\frac{b+c}{bc+1}+\frac{c+a}{ca+1}=\left(\frac{a+b}{ab+1}-1\right)+\left(\frac{b+c}{bc+1}-1\right)+\left(\frac{c+a}{ca+1}-1\right)+3$$

$$=-\frac{(1-a)(1-b)}{ab+1}-\frac{(1-b)(1-c)}{bc+1}-\frac{(1-c)(1-a)}{ca+1}+3\le 3$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 15. Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{2}+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 \Leftrightarrow a+b+2ab\ge 2\sqrt{2}ab+1$$

$$\Leftrightarrow a+b+\left(a+b\right)^2-1\ge 2\sqrt{2}\left(\frac{\left(a+b\right)^2-1}{2}\right)+1$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{2}\right)t^2+t+\sqrt{2}-2\ge 0\ (*)\ ;\text{ với } t=a+b\in\left(1;\sqrt{2}\right]$$

(Vì $\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab>a^2+b^2=1\Rightarrow a+b>1$

Và $\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)=2\Rightarrow a+b\le\sqrt{2}$

Suy ra $t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$). Bất đẳng thức (*) luôn đúng với $t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$.

Bài 16. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng $\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 4\left(a+b+c\right)\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)$

Lời giải :

Không mất tính tổng quát ta giả sử b nằm giữa a và c, ta xét hai trường hợp

- Nếu $a\ge b\ge c\Rightarrow VT\ge 0\ge VP$, ta có đpcm.
- Nếu $c\ge b\ge a$, khi đó vế phải

$$VP=4\left(a+b+c\right)\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)$$

$$=4\left(a+b+c\right)\left(b-a\right)\left(c-b\right)\left(c-a\right)$$

$$\le\left(\left(a+b+c\right)\left(b-a\right)+\left(c-b\right)\left(c-a\right)\right)^2$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\left(a+b+c\right)\left(b-a\right)+\left(c-b\right)\left(c-a\right)\le a^2+b^2+c^2$$

Thật vậy bất đẳng thức này tương đương với

$-a\left(2a+2c-b\right)\le 0$, đúng

Vậy ta có đpcm.

Bài 17. Cho $a,b,c\in\left[0;1\right]$. Chứng minh rằng

$$a\left(1-b\right)+b\left(1-c\right)+c\left(1-a\right)\le 1$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$

Làm ta nghĩ đến :

$(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0 \Leftrightarrow 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc\ge 0$

$\Rightarrow (a+b+c)-(ab+bc+ca)\le 1-abc\le 1$

Từ đó ta có đpcm. Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0, c=1$ hoặc các hoán vị.

Bài 18. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{(a+b)^3}+\frac{4}{(b+c)^3}+\frac{4}{(c+a)^3}\ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Lời giải :

Đặt $\begin{cases}a+b=x\\ b+c=y\\ c+a=z\end{cases}$ do $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$ nên $x,y,z>0$ và $\begin{cases}a=3-y\\ b=3-z\\ c=3-x\end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{4}{x^3}+\frac{4}{y^3}+\frac{4}{z^3}\ge \frac{3-y}{y}+\frac{3-x}{x}+\frac{3-z}{z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{x^3}-\frac{3-x}{x}\right)+\left(\frac{4}{y^3}-\frac{3-y}{y}\right)+\left(\frac{4}{z^3}-\frac{3-z}{z}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^3}+\frac{(y+1)(y-2)^2}{y^3}+\frac{(z+1)(z-2)^2}{z^3}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, từ đó ta có đpcm.

Bài 19. Chứng minh rằng với mọi $a,b\in[0;1]$ thì ta luôn có $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}$

Lời giải :

Bất đẳng thức tương đương với

$(1+ab)(2+a^2+b^2)\le 2(1+a^2)(1+b^2)\Leftrightarrow (ab-1)(a-b)^2\le 0$, bất đẳng thức cuối luôn đúng. Ta có đpcm.

Bài 20. Cho $x,y,z\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(1+xyz)\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)$$

Lời giải :

Sử dụng bài 19, ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}\le\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}$$

$$\frac{1}{1+z^3}+\frac{1}{1+xyz}\le\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}+\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}\le\frac{4}{1+\sqrt{\sqrt{x^4y^4z^4}}}=\frac{4}{1+xyz}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\le\frac{3}{1+xyz}\Rightarrow P=(1+xyz)\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)\le 3$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Vậy giá trị lớn nhất của $P=3$.

Bài 21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a\le b\le c$. Chứng minh rằng

$$(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 1$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{a-b+c}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{b}+\frac{1}{a-b+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+c}{ac}\ge\frac{a+c}{b(a-b+c)}\Leftrightarrow\frac{1}{ac}\ge\frac{1}{b(a-b+c)}$$

$$\Leftrightarrow b(a-b+c)\ge ac\Leftrightarrow a(b-c)-b(b-c)\ge 0\Leftrightarrow(a-b)(b-c)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $a\le b\le c$. Ta có đpcm.

Bài 22. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$$

Lời giải :

Ta có $a^2+ab+b^2=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2\ge\frac{3}{4}(a+b)^2$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+ab+b^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}|a+b|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}|b+c|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{c^2+ac+a^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}|c+a| \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra

$P \ge \sqrt{3}(a+b+c) = \sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $ab \ge 0$. Chứng minh rằng $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$

1.2. Cho $x,y,z \in [0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2+y^2+z^2$.

1.3. Chứng minh rằng với mọi x,y,z không âm ta luôn có $(x+2y+z)(x+y+z)^2 \ge 4(x+y)(y+z)(z+x)$.

1.4. Cho $a,b,c \in [1;2]$. Chứng minh rằng $3(ab+bc+ca) \ge 2(a+b+c)+a^2b+b^2c+c^2a$

1.5. Cho $a,b,c>0$ và $b=\min(a,b,c)$. Chứng minh rằng $(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 1$

1.6. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3} \le 1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2$, từ đó chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$$

1.7. Cho $x,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}$

1.8. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c}<2$$

1.9. Cho $xy \ge 0$ và $x^2+2y^2=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y} \ge 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$

1.10. Chứng minh rằng với ba số thực a,b,c ta luôn có $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (ab+bc+ca-1)^2$

PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Đưa bài toán nhiều biến về bài toán một biến, khảo sát tính tính đơn điệu của hàm số suy ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.
Các hướng giải quyết bài toán loại này
+ Nếu trong biểu thức có xuất hiện biểu thức đối xứng của x, y đặt $t = x + y$ hoặc $t = xy$.
+ Nếu không biểu diễn các biến về một biến được có thể coi biểu thức đó là hàm một biến và các biến còn lại là hằng số.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \ge y, x \ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}$$

Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$, ta có $abc = 1, bc = \frac{x}{y} \in [1;4]$

Khi đó ta có

$$P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

Mặt khác ta có

$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2+b+c}{1+bc+b+c} = 1 + \frac{1-bc}{1+bc+b+c} \ge 1 + \frac{1-bc}{1+bc+2\sqrt{bc}} = \frac{2}{\sqrt{bc}+1}$, do $bc \ge 1$. Suy ra

$P \ge \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{\sqrt{bc}+1} = \frac{1}{2+\frac{3}{bc}} + \frac{1}{\sqrt{bc}+1} = f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{1}{t+1}$, với $t = \sqrt{bc} \in [1;2]$.

Ta có $f'(t) = 2\left[\frac{3t}{\left(2t^2+3\right)^2} - \frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right] < 0$

Vì $\sqrt{3t}\left(t+1\right)^2 - \left(2t^2+3\right) \le \frac{t+3}{2}\left(t+1\right)^2 - \left(2t^2+3\right)$

$\le \frac{2+3}{2}\left(t+1\right)^2 - \left(2t^2+3\right) = -\frac{\left(4t-1\right)\left(t-1\right)}{2} \le 0$

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$, suy ra

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$P \geq f(t) \geq f(2) = \dfrac{34}{33}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 4, y = 1, z = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{34}{33}$.

Bài 2. Cho các số thực dương $x, y, z \in (0;4]$ và $x \leq y; x \leq z$ và thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx).$$

Lời giải:

Xét

$P = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$

Ta có

$f(x,y,z) - f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}) = y^2 + z^2 + y + z - 2(yz + xy + zx) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz}$

$= (y - z)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2$

$= \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left(y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right) \geq 0$, vì $x \leq y, x \leq z$.

Đặt $t = \sqrt{yz} \Rightarrow x = \dfrac{1}{t^2}, t = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{2}$. Khi đó $f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}) = f(\dfrac{1}{t^2},t,t) = \dfrac{1}{t^4} + \dfrac{1}{t^2} + 2t - \dfrac{4}{t} = f(t)$

Ta có

$f'(t) = \left(2 + \dfrac{4}{t^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{t^3}\right), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Lập bảng biến thiên ta suy ra

$\min P = \min f(t) = f(1) = 0$. Xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 3. Cho $\dfrac{1}{4} \leq x \leq 1; y, z \geq 1$ sao cho $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z}$.

Lời giải:

Ta có $\dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{yz}} \Rightarrow P \geq \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+\sqrt{yz}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{yz}} + \dfrac{2}{1+\sqrt{yz}}$

Đặt $t = \sqrt{yz} \Rightarrow 1 \leq t = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq 2 \Rightarrow P = f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1} + \dfrac{2}{1+t}$

Ta có $f'(t) = \dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^2} - \dfrac{2}{(1+t)^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$f(t) \geq f(2) = \frac{22}{15}$

Suy ra $\min P = \frac{22}{15}$ khi $x = \frac{1}{4}; y = z = 2$.

Bài 4. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$P = \frac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Lời giải:

Vì $x^2 + y^2 = 1$, nên

$$P = \frac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{x^2 + y^2 + 2xy + 2y^2} = \frac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{x^2 + 3y^2 + 2xy}$$

+ Nếu $y = 0 \Rightarrow P = 2$.

+ Xét với $y \neq 0 \Rightarrow P = \frac{2\left(t^2 + 6t\right)}{t^2 + 2t + 3}, t = \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(t)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = \frac{-4\left(2t^2 - 9\right)}{\left(t^2 + 2t + 3\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra

$$\max P = \max f(t) = f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{48\sqrt{2} - 18}{17}, \text{ khi } x = \pm\frac{3\sqrt{11}}{11}, y = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

$$\min P = \min f(t) = f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-18 - 48\sqrt{2}}{17}, \text{ khi } x = \mp\frac{3\sqrt{11}}{11}, y = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Bài 4. Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Lời giải:

Lấy logarit cơ số tự nhiên 2 vế BĐT cần chứng minh trở thành

$$b\ln\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) \leq a\ln\left(2^b + \frac{1}{2^b}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)}{a} \leq \frac{\ln\left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)}{b} \Leftrightarrow f(a) \leq f(b).$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Trong đó $f(t)=\dfrac{\ln\left(2^t+\dfrac{1}{2^t}\right)}{t}, t>0$. Do vậy ta chỉ cần chứng minh hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Thậy vậy, ta có

$$f'(t)=\frac{4^t\ln 4^t-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{\left(4^t+1\right)t^2}=\frac{\ln\dfrac{\left(4^t\right)^{4^t}}{\left(4^t+1\right)^{\left(4^t+1\right)}}}{\left(4^t+1\right)t^2}<0$$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 5. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Lời giải:

Theo giả thì

$2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$, chia cả 2 vế của đẳng thức này cho ab ta được

$2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1=a+\dfrac{2}{a}+b+\dfrac{2}{b}$.

Sử dụng BĐT Cô si ta có

$a+\dfrac{2}{b}+b+\dfrac{2}{a}\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, suy ra

$2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, đặt

$t=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\Rightarrow 2t+1\ge 2\sqrt{2}\sqrt{t+2}\Rightarrow 4t^2-4t-15\ge 0\Rightarrow t\ge\dfrac{5}{2}$.

Vậy ta có $P=f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$

Ta có $f'(t)=12t^2-18t-12\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=2>\dfrac{5}{2}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min f(t)=-\dfrac{23}{4}$, khi $t=\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{23}{4}$, khi $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Bài 6. Cho x,y,z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$P = xy + yz + zx - 2xyz.$$

Lời giải:

Giả sử $x = \min(x,y,z) \Rightarrow 3x \le x + y + z = 1 \Rightarrow x \le \frac{1}{3}.$

Khi đó ta có

$P = xy + yz + zx - 2xyz = yz(1-2x) + xy + zx \ge 0.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = z = 0.$

Mặt khác ta lại có

$$P = yz(1-2x) + x(y+z) \le x(1-x) + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 (1-2x) = f(x)$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3} - x\right) \ge 0$, do đó $f(x)$ đồng biến trênđoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Vậy $\max P = \max f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$. Khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \ge 4.$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min(x,y,z) \Rightarrow 3x \le x + y + z = 3 \Rightarrow x \le \frac{1}{3}.$

Khi đó ta có

$$P - 4 = x^2 + (y+z)^2 - 2yz + xyz - 4 = (x-2)yz + x^2 + (3-x)^2 - 4$$

$$= f(t) = (x-2)t + 2x^2 - 6x + 5, 0 \le t = yz \le \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-x}{2}\right)^2.$$

Vậy ta tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên $\left[0;\left(\frac{3-x}{2}\right)^2\right]$, ta có $f(t)$ là hàm số nghịch biến do $x - 2 < 0$.

Vậy $P - 4 = f(t) \ge f\left(\left(\frac{3-x}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \ge 0 \Rightarrow P \ge 4.$ Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1.$

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \le 6\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 1.$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Không mất tính tổng giả sử $a = \min(a,b,c) \Rightarrow a \le \frac{1}{3}$.

BĐT đã cho tương đương với

$5\left(a^2 + (b+c)^2 - 2bc\right) \le 6\left(a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c)\right) + 1$

$\Leftrightarrow 5\left(a^2 + (1-a)^2 - 2bc\right) \le 6\left(a^3 + (1-a)^3 - 3bc(1-a)\right) + 1$

$\Leftrightarrow (9a-4)bc + (2a-1)^2 \ge 0.$

Ta đặt $t = bc \Rightarrow 0 < t \le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$f(t) = (9a-4)t + (2a-1)^2 \ge 0, t \in \left[0; \left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right]$

Do $f(t)$ là hàm nghịch biến nên $f(t) \ge f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}a(3a-1)^2 \ge 0$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 9. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - \left(a^2 + b^2\right).$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $t = a + b \Rightarrow ab = 3 - t; a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = t^2 - 2(3-t) = t^2 + 2t - 6$

Ta có $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow 3 - t \le \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow t \ge 2$.

Suy ra $P = \frac{3\left(a^2+b^2\right) + 3(a+b)}{ab + a + b + 1} + \frac{ab}{a+b} - \left(a^2 + b^2\right) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2}$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} - \frac{5}{2}$ với $t \ge 2$

Ta có $f'(t) = -2t + 1 - \frac{12}{t^2} < 0, t \ge 2$. Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên

$[2; +\infty) \Rightarrow P = f(t) \le f(2) = \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 khi $a = b = 1$.

Bài 10. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chứng minh rằng $183-165\sqrt{5}\le x^4+y^4+z^4\le 18$.

Lời giải:

Ta có $P=x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$

$=\left((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right)^2-2(xy+yz+zx)^2+2xyz(xy+yz+zx)$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}x+y+z=4\\ xyz=2\end{cases}$, đặt $t=xy+yz+zx\Rightarrow P=2\left(t^2-32t+144\right)$

Ta có $(y+z)^2\ge 4yz\Rightarrow (4-x)^2\ge\dfrac{8}{x}$, giải bất phương trình này ta suy ra $3-\sqrt{5}\le x\le 2$.

Ta có $t=x(y+z)+yz=x(4-x)+\dfrac{2}{x}$, xét hàm số $f(x)=x(4-x)+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[3-\sqrt{5},2\right]$ ta được $t\in\left[5,\dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$

Tương tự xét hàm số $f(t)=2\left(t^2-32t+144\right)$ trên đoạn $\left[5,\dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$ ta suy ra đpcm.

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Lời giải :

Sử dụng bất đẳng cô si cho 3 số dương ta có :

$(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\dfrac{a+b+c+3}{3}\right)^3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cauchy sharvart ta có

$a^2+b^2+c^2+1\ge\dfrac{1}{4}(a+b+c+1)^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Đặt $t=a+b+c+1>1$. Khi đó kết hợp với các bất đẳng thức trên ta suy ra

$P\le\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{(t+2)^3}=f(t)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{(t+2)^3}$ trên khoảng $(1,+\infty)$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{162}{(t+2)^4}\Leftrightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=4\Rightarrow f(4)=\dfrac{1}{4};\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0;f(1)=0$

từ đo suy ra $\max\limits_{t\in(1,+\infty)}f(t)=f(4)=\dfrac{1}{4}$. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a \ge b \ge c$; $a^2+b^2+c^2=5$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \ge -4$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \le 4$ (*)

Đặt vế trái của bất đẳng thức (*) là P.

Nếu $ab+bc+ca<0 \Rightarrow P \le 0$, ta có đpcm.

Xét $ab+bc+ca \ge 0$, ta đặt $x=ab+bc+ca$

Ta có : $(a-b)(b-c) \le \left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \le \dfrac{1}{4}(a-c)^3$

Mặt khác lại có

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2$$
$$\ge \frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{4}(a-b+b-c)^2$$

Suy ra $5-x \ge \dfrac{3}{4}(a-c)^2 \Rightarrow a-c \le \sqrt{\dfrac{4}{3}(5-x)}; 0 \le x \le 5$

Suy ra $P \le \dfrac{1}{4}x\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}(5-x)}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0;5]$, ta suy ra $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x) = f(2) = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=1; c=0$. Ta có đpcm.

Bài 13. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+2y-xy=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\dfrac{x^2}{4+8y}+\dfrac{y^2}{1+x}$

Lời giải:

Theo giả thiết ta có :

$$x+2y=xy=\frac{1}{2}.x.2y \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 \Rightarrow x+2y \ge 8$$

Theo bất đẳng thức Cauchy sharcs ta có

$$\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{(2y)^2}{4+4x} \ge \frac{(x+2y)^2}{4+8y+4+4x}=\frac{(x+2y)^2}{8+4(x+2y)}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy đặt $t = x + 2y$ và xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{8+4t}, t \geq 8$

Ta có $f'(t) = \dfrac{4t^2 + 8t}{(8+4t)^2} > 0$ với $t \geq 8$.

Suy ra $\min\limits_{t\in[8;+\infty)} f(t) = f(8) = \dfrac{8}{5}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{8}{5}$, khi $x = 4; y = 2$.

Bài 14. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{zx + 9}$$

Lời giải :

Theo bất đẳng thức Cauchy schwarz ta có

$$x^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{zx+9}\right) \geq \frac{4x^3}{x(y+z)+18} = \frac{4x^3}{x(9-x)+18}$$

Tương tự :

$$y^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{yz+9}\right) \geq \frac{4y^3}{y(z+x)+18} = \frac{4y^3}{y(9-y)+18}$$

$$z^3\left(\frac{1}{zx+9} + \frac{1}{yz+9}\right) \geq \frac{4z^3}{z(x+y)+18} = \frac{4z^3}{z(9-z)+18}$$

Do đó

$$P = x^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{zx+9}\right) + y^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{yz+9}\right) + z^3\left(\frac{1}{zx+9} + \frac{1}{yz+9}\right)$$

$$\geq \frac{4x^3}{-x^2+9x+18} + \frac{4y^3}{-y^2+9y+18} + \frac{4z^3}{-z^2+9z+18}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{4x^3}{-x^2+9x+18}$

Dễ chứng minh được rằng :

$$\frac{4x^3}{-x^2+9x+18} \geq \frac{11}{4}x - \frac{21}{4}$$

$$\frac{4y^3}{-y^2+9y+18} \geq \frac{11}{4}y - \frac{21}{4}$$

$$\frac{4z^3}{-z^2+9z+18} \geq \frac{11}{4}z - \frac{21}{4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ đó cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra $P \ge \frac{11}{4}(x+y+z) - 3.\frac{21}{4} = 9$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

Bài 15. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3.$$

Lời giải :

Giả sử $a = max\{a,b,c\}$

- Nếu $a \ge c \ge b$ thì

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge 3 \Rightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 3\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+3$$

- Nếu $a \ge b \ge c$ thì

Xét hàm số $f(a) = 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) - 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right) - 3$

Ta có $f'(a) = \frac{3}{b} - \frac{3c}{a^2} - \frac{2}{c} + \frac{2b}{a^2} = \frac{(a^2 - bc)(3c - 2a)}{a^2bc}$

Do $a \ge b \ge c \Rightarrow a^2 \ge bc$

Nếu $3c > 2a$ hàm số đồng biến suy ra

$$f(a) \ge f(b) = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 2 \ge 0$$

Nếu $3c < 2a$ hàm số nghịch biến suy ra

$$f(a) \ge f(b+c) = \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{3c-2b}{b+c} = \frac{2(b-2c)^2 + c(b-c)}{(b+c)^2} \ge 0$$

Ta có đpcm.

Bài 16. Cho ba số thực $a,b,c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4(ab+bc+ca)}$$

Lời giải :

Sử dụng bất đẳng thức cô si ta có $4ab \le (a+b)^2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó $P \geq \dfrac{(a+b)^2}{c^2+4(a+b)c+(a+b)^2} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)^2}{1+4\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)^2}$

Ta đặt $t = \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$ thì do $a,b,c \in [1;2] \Rightarrow t = \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c} \in [1;4]$

Bây giờ ta xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{1+4t+t^2}$ có $f'(t) = \dfrac{4t^2+2t}{(t^2+4t+1)^2} > 0, \forall t \in [1;4]$

Từ đó suy ra $\min\limits_{t\in[1;4]} f(t) = f(1) = \dfrac{1}{6}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{6}$ khi $a = b = 1; c = 2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $x,y,z \geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P = 2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4xyz-9x+2012$.

1.2. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x = max(x,y,z)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

1.3. Cho các số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1.$$

1.4. Cho x,y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

1.5. Cho các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

1.6. Cho các số thực không âm x,y thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy.$$

1.7. Cho x,y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4x^2+2xy-1}{2xy-2y^2+3}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P = x^2 + y^2 + \dfrac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}$.

1.9. Cho $a, b, c \geq -\dfrac{2}{5}$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng
$P = \dfrac{26-5a}{5a^2+2} + \dfrac{26-5b}{5b^2+2} + \dfrac{26-5c}{5c^2+2} \geq 9$.

1.10. Cho $x, y \in (0;1); x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^x + y^y$.

1.11. Cho $x, y \geq 0$ với $x + y = 2$. Chứng minh rằng
$$x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \leq 2.$$

1.12. Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh
$$7\left(xy + yz + zx\right) \leq 2 + 9xyz.$$

1.13. Cho các số thực dương a, b, c thuộc đoạn $[1;2]$. Chứng minh rằng
$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc.$$

1.14. Cho x, y là 2 số thực thay đổi thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = x^2 - xy + 2y^2.$$

1.15. Cho các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

1.16. Cho $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng
$$a^2 \ln b - b^2 \ln a > \ln a - \ln b.$$

1.17. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = (a-b)(b-c)(c-a).$$

1.18. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \frac{5}{2}.$$

1.19. Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$. Chứng minh rằng
$$\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy).$$

1.20. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng
$$3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 4abc \geq 13.$$

1.21. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} 0 < x < y \leq z \leq 1 \\ 3x + 2y + z \leq 4 \end{cases}$. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$3x^2+2y^2+z^2\le\frac{16}{3}.$$

1.22. Cho các số thực không âm x,y,z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$x(y-z)^4+y(z-x)^4+z(x-y)^4\le\frac{1}{12}.$$

1.23. Cho các số thực x,y không nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}.$$

1.24. Cho các số thực $x,y\in[-3;2]$ và thỏa mãn $x^3+y^3=2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2.$$

1.25. Cho các số thực không âm a,b,c và không đồng thời bằng không. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}$$

1.26. Cho bốn số nguyên thay đổi thỏa mãn $1\le a<b<c<d\le 50$. Chứng minh

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ge\frac{53}{175}.$$

1.27. Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

1.28. Cho các số dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

1.29. Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3.$$

1.30. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

1.31. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

1.32. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{9}{10}.$$

1.33. Cho các số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\ge 1.$$

1.34. Cho hai số dương x, y có tổng bằng 1. Tìm giá tri nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

1.35. Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 < x \le y < \pi$.

Chứng minh rằng $\left(x^3-6x\right)\sin y \le \left(y^3-6y\right)\sin x$.

1.36. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xyz=2 \end{cases}$

Chứng minh rằng $183-165\sqrt{5} \le x^4+y^4+z^4 \le 18$.

1.37. Cho $a, b \ge 1$ là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+a^2+b^2.$$

1.38. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2-z^2+xy-yz-zx=1 \\ y^2+z^2+yz=2 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

1.39. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $\left(a+c\right)\left(b+c\right)=4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{a+3c}+\frac{c}{bc+ca}$.

1.40. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn $ab+bc+ca=1; a+b+c>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{4}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}$.

1.41. Cho các số thực $x, y, z \in \left[0;1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(xy-y+1\right)^2+\left(yz-z+1\right)^2+\left(zx-x+1\right)^2$$

1.42. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+2y}\ge 4$$

1.43. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \ge -\frac{1}{2}, \frac{a}{b}>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2a^3+1}{b\left(a-b\right)}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1.44. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\begin{cases} y - x^2 \geq 1 \\ 3x^2 - 2x + y \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = y^2 - 3x^2 + 2x$.

1.45. Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x^3 + x^3y^3\left(x^3 + 2y^3 - 3\right) + \left(y^3 - 2\right)^2 - 1$

1.46. Cho ba số thực a, b, c $\left(a \neq 0\right); a > b$ sao cho hàm số $y = 2ax^3 + 3bx^2 + 6cx + 12\left(a + b - c\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a+b+c}{a-b}$.

1.47. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{b\left(3a^2 - 4ab + 11b^2\right)} + \frac{b^3 + c^3}{c\left(3b^2 - 4bc + 11c^2\right)} + \frac{c^3 + a^3}{a\left(3c^2 - 4ca + 11a^2\right)}$$

1.48. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc\left(a + b + c\right)^2 = \left(ab + bc + ca\right)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a^3 + 1}{b} + \frac{4b^3 + 1}{c} + \frac{4c^3 + 1}{a}.$$

1.49. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3}{2}\left(ab + bc + ca\right)$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{\left(a - 2c\right)^2}{ab + bc + ca}$.

1.50. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3}{2}\left(ab + bc + ca\right)$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a - 2c}{\sqrt{ab + bc + ca}}$

1.51. Cho $a, b, c \in \left[1; 2\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(a + b + c\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2.$$

1.52. Cho $a, b, c \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$. Chứng minh rằng $8\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}\right) \geq 5\left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + 9$.

1.53. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3.$$

1.54. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} + \frac{1}{1 + c^2}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.55. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx + \frac{5}{x + y + z}$$

1.56. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y - xy = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{4 + 8y} + \frac{y^2}{1 + x}$$

1.57. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3}{ab + bc + ca}$$

1.58. Cho bốn số thực x, y, z, t thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = 9\left(\frac{x + z}{x + t}\right)^2 + 16\left(\frac{x + t}{x + y}\right)^2$

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI
BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHAWARS VÀ HOLDER

BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

Trong Đề thi TSĐH các bài toán BĐT thường cho 3 biến số , nên ta chỉ cần sử dụng chắc 2 kết quả sau.

Với 2 số không âm a, b ta có

$$\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Với 3 số không âm a, b, c ta có

$$\frac{a + b + c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ngoài ra ta có các kết quả sau

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a + b} (a, b > 0).$$

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} \ge \frac{2}{1 + \sqrt{ab}} (a, b \ge 0).$$

$$(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right).$$

Lời giải:

Ta có

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{yz}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{zx}+\frac{z^2}{2}+\frac{z}{xy}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{z}{xy}+\frac{1}{2}\frac{y}{zx}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{z}{xy}+\frac{1}{2}\frac{x}{yz}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{x}{yz}+\frac{1}{2}\frac{y}{zx}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{z}{xy}.\frac{1}{2}\frac{y}{zx}}+3\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{z}{xy}.\frac{1}{2}\frac{x}{yz}}+3\sqrt[3]{\frac{z^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{x}{yz}.\frac{1}{2}\frac{y}{zx}}=\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq\frac{4}{x+x}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z}$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 4\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\geq\frac{16}{2x+y+z}$$

Một cách tương tự, ta có

$$\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq\frac{16}{2y+z+x}$$

$$\frac{2}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{16}{2z+x+y}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài 3. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}.$$

Lời giải:

Sử dụng BĐT Cô si cho 3 số dương ta có

$1+x^3+y^3 \ge 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3} = 3xy$, suy ra

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \ge \frac{\sqrt{3xy}}{xy}$$

Một cách tương tự ta có 2 bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \ge \frac{\sqrt{3yz}}{yz}$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \frac{\sqrt{3zx}}{zx}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, và để ý

$\frac{\sqrt{3xy}}{xy}+\frac{\sqrt{3yz}}{yz}+\frac{\sqrt{3zx}}{zx} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3xy}}{xy}.\frac{\sqrt{3yz}}{yz}.\frac{\sqrt{3zx}}{zx}} = 3\sqrt{3}$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $0 \le y \le x \le 1$ thì $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \le \frac{1}{4}$.

Lời giải:

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{4} + y\sqrt{x} \ge x\sqrt{y}$$

Do $0 \le x \le 1 \Rightarrow \sqrt{x} \ge x^2$, vậy $\frac{1}{4} + y\sqrt{x} \ge \frac{1}{4} + yx^2 \ge 2\sqrt{\frac{1}{4}.yx^2} = x\sqrt{y}$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1; y = \frac{1}{4}$.

Bài 5. Cho 2 số dương thay đổi thỏa mãn $x + y \ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x^2+4}{4x} + \frac{2+y^3}{y^2}.$$

Lời giải:

Ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$P=\frac{3x}{4}+\frac{1}{x}+\frac{2}{y^2}+y=\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{y^2}+\frac{y}{4}+\frac{y}{4}\right)+\frac{x+y}{2}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{x}}+3\sqrt[3]{\frac{2}{y^2}.\frac{y}{4}.\frac{y}{4}}+\frac{6}{2}=\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2,y=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$.

Bài 6. Cho x,y là các số thực không âm . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Lời giải:

Vì $x,y\geq 0$ nên ta có

$|(x-y)(1-xy)|\leq|(x+y)(1+xy)|=(x+y)(1+xy).$

Từ đó suy ra $|P|\leq\frac{(x+y)(1+xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}=\frac{(x+y)(1+xy)}{(x+y+1+xy)^2}$

Mặt khác ta lại có

$(x+y+1+xy)^2\geq 4(x+y)(1+xy)\Rightarrow|P|\leq\frac{1}{4}.$

Từ đó suy ra $-\frac{1}{4}\leq P\leq\frac{1}{4}.$

Với $x=1;y=0$ thì $P=\frac{1}{4}.$

Với $x=0;y=1$ thì $P=-\frac{1}{4}.$

Bài 7. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}.$$

Lời giải:

Ta có

$P^2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Sử dụng bất đẳng thức Cô sic ho mỗi bộ hai số dương ta có

$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\geq 2b^2;\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\geq 2c^2;\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\geq 2a^2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$P^2 \ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right)=4 \Leftrightarrow P \ge 2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Bài 8. Cho ba số thực dương a,b,c có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}.$$

Lời giải:

Ta có

$$P = x+\frac{1}{2}\sqrt{x.4y}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z}$$

Sử dụng BĐT Cô si ta có

$$P \le x+\frac{1}{4}\left(x+4y\right)+\frac{1}{12}\left(x+4y+16z\right)=\frac{16}{12}\left(x+y+z\right)=\frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=4y \\ x=4y=16z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{21} \\ y=\dfrac{4}{21} \\ z=\dfrac{1}{21} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{4}{3}.$

Bài 9. Cho các số không âm a,b,c,d chứng minh rằng

$$16(abc+bcd+cda+dab) \le \left(a+b+c+d\right)^3$$

Lời giải:

Ta có

$$16(abc+bcd+cda+dab)=16ab(c+d)+16cd(a+b)$$

$$\le 4\left(a+b\right)^2(c+d)+4\left(c+d\right)^2(a+b)$$

$$=4\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+b+c+d\right)$$

$$\le \left(a+b+c+d\right)^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ $a=b=c=d.$

Bài 10. Cho các số thực không âm a,b,c,d,e có tổng bằng 5. Chứng minh rằng $abc+bcd+cde+dea+eab \le 5$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $e=\min(a,b,c,d,e)$

Ta có
$abc+bcd+dce+cea+eab=e(a+c)(b+d)+bc(a+d-e)$
$\le e\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c+a+d-e}{3}\right)^3=e\left(\frac{5-e}{2}\right)^2+\left(\frac{5-2e}{3}\right)^3$
Ta chỉ cần chứng minh
$e\left(\frac{5-e}{2}\right)^2+\left(\frac{5-2e}{3}\right)^3\le 5\Leftrightarrow (e-1)^2(e+8)\ge 0.$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e=1$.

Bài 11. Cho các số thực không âm a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$

Lời giải:

Ta có $a+b+c=3\Rightarrow 2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$
$=9-(a^2+b^2+c^2)$
Vậy ta chỉ cần chứng minh
$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9$
Sử dụng BĐT Cô si cho mỗi bộ 3 số dương ta có
$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\ge 3a; b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\ge 3b; c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\ge 3c$
Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được
$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3(a+b+c)=9.$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 12. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz\ge xy+yz+zx$. Chứng minh
$xyz\ge 3(x+y+z)$.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có
$(xyz)^2\ge (xy+yz+zx)^2$, mặt khác ta lại có
$(xy+yz+zx)^2\ge 3\left(xzy^2+yxz^2+yzx^2\right)=3xyz(x+y+z)$
Từ 2 bất đẳng thức trên ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 13. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng
$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BĐT đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Để ý $\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}$

Sử dụng BĐT Cô si cho mỗi bộ 3 số dương ta có

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\ge 3\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}};\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1\ge 3\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}};\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\ge 3\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)+3\ge\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Lại có $\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\ge 3$, từ đó ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 14. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Đặt $x=\sqrt{a+b-c};y=\sqrt{b+c-a};z=\sqrt{c+a-b}$.

Thì ta có $x^2+y^2+z^2=a+b+c=3$.

BĐT tương đương với

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\left(xy+yz+zx\right)\ge 36xyz$$

Sử dụng BĐT Cô si ta có

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

$$9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge 12\sqrt[12]{(xyz)^4}$$

Nhân theo 2 vế của 2 bất đẳng thức trên, ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $a^3+b^3\ge ab(a+b)\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow \dfrac{abc}{a^3+b^3+abc}\le\dfrac{c}{a+b+c}$

Tương tự ta cũng có

$\dfrac{abc}{b^3+c^3+abc}\le\dfrac{a}{a+b+c};\dfrac{abc}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{b}{a+b+c}$

Cộng theo vế các bất dẳng thức trên ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bình luận: Một bài tương tự

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8^{\frac{a}{2}}+8^{\frac{b}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{b}{2}}+8^{\frac{c}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{c}{2}}+8^{\frac{a}{2}}+1}\le 1$$

Bài toán này được giải quyết bằng cách đặt $x=2^{\frac{a}{2}},y=2^{\frac{b}{2}},z=2^{\frac{c}{2}}\Rightarrow xyz=2^{\frac{a+b+c}{2}}=1$

Bài 16. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$. Chứng minh

$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}\Rightarrow a+b+c=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}+\sqrt{ab+c}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

Ta có

$$\sqrt{bc+a}=\sqrt{bc+a(a+b+c)}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\ge\sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2}=a+\sqrt{bc}$$

Một cách tương tự ta có

$\sqrt{ca+b}\ge b+\sqrt{ca}$

$\sqrt{ab+c}\ge c+\sqrt{ab}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, và để ý $a+b+c=1$. Ta suy ra đpcm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 17. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le 2(a+b+c)$.

Lời giải:

Ta có

$$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{ab+bc+ca+a^2}=\sqrt{(a+c)(a+b)}\le\frac{a+c+a+b}{2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Một cách tương tự ta có

$\sqrt{1+b^2} \le \dfrac{2b+a+c}{2}$

$\sqrt{1+c^2} \le \dfrac{2c+a+b}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 18. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

Lời giải:

Dễ thấy bất đẳng thức đúng với bộ 3 số (a,b,c) thì cũng đúng với bộ 3 số $(ka,kb,kc), k>0$.

Vậy không mất tính tổng quát ta chứng minh bất đẳng thức với $a+b+c=6$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức

$\dfrac{a}{\sqrt{6-a}}+\dfrac{b}{\sqrt{6-b}}+\dfrac{c}{\sqrt{6-c}} \ge 3$.

Đặt $x=\sqrt{6-a}; y=\sqrt{6-b}; z=\sqrt{6-c} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=12 \Rightarrow x+y+z \le 6.$

Ta cần chứng minh

$\dfrac{6-x^2}{x}+\dfrac{6-y^2}{y}+\dfrac{6-z^2}{z} \ge 3 \Leftrightarrow 6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-(x+y+z) \ge 3.$

Thật vậy bất đẳng thức này luôn đúng.

Do $6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-(x+y+z) \ge \dfrac{54}{x+y+z}-(x+y+z) \ge 9-6=3.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.$

Bài 19. Cho các số thực không âm a,b,c không đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}.$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$x+y+z \ge 2\sqrt{x(y+z)} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{y+z}} \ge \dfrac{2x}{x+y+z}$

Một cách tương tự ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z}; \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra $P \geq 2$. Nhận thấy $x = y = 1, z = 0$ dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 khi 2 số bằng 1 và một số bằng không.

Bài 20. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x\left(x+y+z\right) = 3yz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{x+y}{y+z}\right)^3 + \left(\frac{x+z}{y+z}\right)^3 + \frac{3\left(x^2+xy+yz+zx\right)}{\left(y+z\right)^2}.$$

Lời giải:

Đặt $a = \frac{x+y}{y+z}, b = \frac{x+z}{y+z} \Rightarrow a^2+b^2-ab = \left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{y+z}\right)^2 - \frac{x+y}{y+z}.\frac{x+z}{y+z} = 1$

Suy ra $\left(a+b\right)^2 = 1+3ab \leq 1+\frac{3}{4}\left(a+b\right)^2 \Rightarrow a+b \leq 2$

Ta có $P = a^3+b^3+3ab = a+b+3ab \leq 2+\frac{3}{4}\left(a+b\right)^2 = 5$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$.

Bài 21. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 5xy+7yz+8zx$.

Lời giải :

Ta có $P = 5xy+7yz+8zx = 3x\left(y+z\right)+2y\left(z+x\right)+5z\left(x+y\right)$

$= 3x\left(2-x\right)+2y\left(2-y\right)+5z\left(2-z\right) = 1 = 10-\left(3\left(1-x\right)^2-2\left(1-y\right)^2-5\left(1-z\right)^2\right)$

$= \frac{340}{31}-\left(3\left(1-x\right)^2+\frac{300}{961}+2\left(1-y\right)^2+\frac{450}{961}+5\left(1-z\right)^2+\frac{180}{961}\right)$

$\leq \frac{340}{31}-\left(\frac{60}{31}\left(1-x\right)+\frac{60}{31}\left(1-y\right)+\frac{60}{31}\left(1-z\right)\right) = \frac{340}{31}-\frac{60}{31}\left(3-x-y-z\right) = \frac{280}{31}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{21}{31}; y = \frac{16}{31}; z = \frac{25}{31}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{280}{31}$.

Bình luận : Để có được biến đổi ở (*), ta tìm các số thực a, b, c thỏa mãn

$5xy+7yz+8zx = a.x\left(y+z\right)+b.y\left(z+x\right)+c.z\left(x+y\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng
$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)\Rightarrow ab+bc+ca\ge\sqrt{3(a+b+c)}$

Suy ra $\dfrac{6}{ab+bc+ca}\le 2\sqrt{\dfrac{3}{a+b+c}}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh
$$1+\frac{3}{a+b+c}-2\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}-1\right)^2\ge 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2:

Đặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}$ do $abc=1\Rightarrow xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge\frac{6}{x+y+z}$$

Theo bất đẳng thức cô si ta có
$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

Suy ra $1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\ge 1+\dfrac{9}{(x+y+z)^2}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh
$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\ge\frac{6}{x+y+z}\Leftrightarrow\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2\ge 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 23. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có
$$3a^2+2b^2+c^2=2(a^2+b^2)+(a^2+c^2)\ge 4ab+2ac=2a(2b+c)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Rightarrow \dfrac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2b+c}$

Lại có

$(2b+c)\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 3\sqrt[3]{b^2c}.3\sqrt[3]{\dfrac{1}{b^2c}} = 9 \Rightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2b+c} \le \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Suy ra

$\dfrac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Tương tự ta chứng minh được :

$\dfrac{b}{3b^2+2c^2+a^2} \le \dfrac{1}{18}\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

$\dfrac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \le \left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 24. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}$$

<u>Lời giải :</u>

Ta có

$x+zy = zy+z-1-y = (y+1)(z-1) = (y+1)(x+y)$

$y+zx = zx+z-1-x = (z-1)(x+1) = (x+1)(x+y)$

$z+xy = xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$

Vậy $P=\dfrac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}=\dfrac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}$

Theo bất đẳng thức cô si ta có

$(x+y)^2 \ge 4xy$

$x+1=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+1 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \ge \dfrac{27x^2}{4}$

$y+1=\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}+1 \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{4}} \Rightarrow (y+1)^3 \ge \dfrac{27y^2}{4}$

Từ đó suy ra :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3} \le \frac{4}{729}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{4}{729}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 2; z = 5$.

Bài 25. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)} \ge abc + \sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

Lời giải :

Chia hai vế bất đẳng thức cho abc bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)} \ge 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ac}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}} \ge 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ac}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}$$

Dến đây ta đặt

$$x=\frac{bc}{a^2}; y=\frac{ca}{b^2}; z=\frac{ab}{c^2} \Rightarrow xyz=1$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\sqrt{3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \ge 1+\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+x+y+z+xy+yz+zx} \ge 1+\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}$$

Dặt $t=\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx} \ge \sqrt[3]{8\sqrt[8]{x^3y^3z^3}}=2$

Ta cần chứng minh :

$\sqrt{t^3+1} \ge 1+t \Leftrightarrow t^3+1 \ge 1+2t+t^2 \Leftrightarrow t^3-t^2-2t \ge 0 \Leftrightarrow t(t-2)(t+1) \ge 0$ luôn đúng

Vậy ta có đpcm.

Bài 26. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $(1-a)(1-b)(1-c)=8abc$

Chứng minh rằng $a+b+c \ge 1$

Lời giải :

- Nếu có một số lớn hơn 1, khi đó do $a,b,c > 0$ nên $a+b+c > 1$, ta có ngay diều phải chứng minh.
- Vậy xét cả 3 số nhỏ hơn 1

Giả thiết có :

$$(1-a)(1-b)(1-c)=8abc \Rightarrow \frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c}=8$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta đặt $x=\frac{1-a}{a};y=\frac{1-b}{b};z=\frac{1-c}{c}\Rightarrow x,y,z>0;xyz=8$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq 1\Leftrightarrow x+y+z\geq 6$ luôn đúng

Do $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=6$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 27. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+2b^2+3c^2=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=3a+2b+c+\frac{8}{a}+\frac{6}{b}+\frac{4}{c}$

Lời giải :

Theo giả thiết ta có

$a^2+2b^2+3c^2=3abc\Leftrightarrow 3abc=a^2+c^2+2\left(b^2+c^2\right)\geq 2ac+4bc=2c\left(a+2b\right)$

$\Rightarrow 3ab\geq 2\left(a+2b\right)$

$P=3a+2b+c+\frac{8}{a}+\frac{6}{b}+\frac{4}{c}=a+\frac{b}{2}+2\left(a+\frac{4}{a}\right)+\frac{3}{2}\left(b+\frac{4}{b}\right)+c+\frac{4}{c}$

$\geq a+\frac{b}{2}+2.4+\frac{3}{2}.4+4=\frac{2a+b}{2}+18$

Từ $3ab\geq 2\left(a+2b\right)\Leftrightarrow \frac{3}{2}\geq\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\geq\frac{9}{2a+b}\Leftrightarrow 2a+b\geq 6$

Từ đó suy ra $P\geq 21$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Bài 28. Cho $a,b,c>1$ thỏa mãn $a+b+c=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{a-2}{b^2}+\frac{b-2}{c^2}+\frac{c-2}{a^2}$

Lời giải :

Ta có $P=\frac{(a-1)+(b-1)}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{(b-1)+(c-1)}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{(c-1)+(a-1)}{a^2}-\frac{1}{a}$

$=\left(a-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(b-1\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\left(c-1\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\geq\frac{2\left(a-1\right)}{ab}+\frac{2\left(b-1\right)}{bc}+\frac{2\left(c-1\right)}{ca}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$

Lại có theo giả thiết

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$a+b+c=abc \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$

Vậy $P \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2 \geq \sqrt{3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2}-2=\sqrt{3}-2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 29. Cho x,y là các số dương thỏa mãn $2x+3y=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{2y}+\frac{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}-1}{3x^2}$$

Lời giải :

Ta có $P \geq \frac{1+xy-1}{2y}+\frac{1+\sqrt{x^3y^3}-1}{3x^2}=\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}$

Theo bất đẳng thức cô – si ta có :

$$\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}=\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{6}+\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}\right)$$

$$\geq \frac{x}{3}+3\sqrt[3]{\frac{x}{6}.\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}.\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}}=\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{1}{6}(2x+3y)=\frac{5}{6}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{6}$ khi và chỉ khi $x=y=1$.

Bài 30. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{5}$. Chứng minh rằng $\left|(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right| \leq \sqrt{5}$.

Lời giải :

Giả sử $a=\min(a,b,c) \Rightarrow b+c=\sqrt{5}-a \leq \sqrt{5}$

Và đặt $P=\left|(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right|$

$$\Rightarrow P^2=(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2$$

$$\leq b^4c^4(b^2-c^2)^2=b^4c^4(b-c)^2(b+c)^2$$

$$\leq 5b^4c^4(b-c)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức cô si ta suy ra

$$5b^4c^4(b-c)^2=5bc.bc.bc.bc(b-c)^2$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\le 5\left(\frac{4bc+(b-c)^2}{5}\right)^5 = 5\left(\frac{(b+c)^2}{5}\right)^5 \le 5$$

Suy ra $P \le \sqrt{5}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, c=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc các hoán vị.

Bài 31. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x>1, y>2, z>3$ và $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\ge 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-1)(y-2)(z-3)$.

Lời giải:

Từ giả thiết và sử dụng bất đẳng thức cô si ta suy ra

$$\frac{1}{x}\ge 1-\frac{2}{y}+1-\frac{3}{z}=\frac{y-2}{y}+\frac{z-3}{z}\ge 2\sqrt{\frac{y-2}{y}.\frac{z-3}{z}}$$

$$\frac{2}{y}\ge 1-\frac{1}{x}+1-\frac{3}{z}=\frac{x-1}{x}+\frac{z-3}{z}\ge 2\sqrt{\frac{x-1}{x}.\frac{z-3}{z}}$$

$$\frac{3}{z}\ge 1-\frac{1}{x}+1-\frac{2}{y}=\frac{x-1}{x}+\frac{y-2}{y}\ge 2\sqrt{\frac{x-1}{x}.\frac{y-2}{y}}$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra

$$P=(x-1)(y-2)(z-3)\le\frac{3}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $(a+b)(a+c)\ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}$

1.2. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b ta luôn có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$

1.3. Cho $x,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+y^3+7xy(x+y)}{xy\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

1.4. Chứng minh với $a>b>0$, ta có

$$a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\ge 3.$$

1.5. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge 2$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chứng minh $8abc \le 1$.

1.6. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+a+b+c\ge 6$.

1.7. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$$

1.8. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}$$

1.9. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2+abc$.

1.10. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{4}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2.$$

1.11. Cho $x\ge 2, y\ge 3, z\ge 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy\sqrt{z-4}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}.$$

1.12. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\ge 1$$

1.13. Cho bốn số thực dương a,b,c,d. Chứng minh rằng

$$\frac{a-d}{a+b}+\frac{d-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+d}.$$

1.14. Cho ba số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\le\frac{1}{2}.$$

1.15. Cho các số thực a,b,c có tổng bằng không. Chứng minh

$$8^a+8^b+8^c\ge 2^a+2^b+2^c$$

1.16. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\le\frac{3}{4}.$$

1.17. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}.$$

1.18. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

1.19. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}+\frac{y+z+1}{y^2+z^2+1}+\frac{z+x+1}{z^2+x^2+1}.$$

1.20. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

1.21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{8a^4+1}{a^2}+\frac{108b^5+1}{b^2}+\frac{16c^6+1}{c^2}.$$

1.22. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

1.23. Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)}\le\dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$.

1.24. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)\le\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}$$

1.25. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

1.26. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{2x+y}+\dfrac{3yz}{2y+z}+\dfrac{6zx}{2z+x}$

1.27. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}+\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{81}{a+b+c}$$

1.28. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}}+\frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}}+\frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}}\le\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

1.29. Cho $a,b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}$

1.30. Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn $xy+yz+zx\ge 2xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-1)(y-1)(z-1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1.31. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng
$9xyz+1\ge 4\left(xy+yz+zx\right)$

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHAWARS

Bất đẳng thức này có dạng
$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2,\forall a_i,b_i\in\mathbb{R}.$
Để chứng minh bất đẳng thức này ta xét tam thức bậc 2
$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_ix-b_i\right)^2$$
$$=\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)x+\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge 0,\forall x$$
$\Leftrightarrow\Delta'=\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2-\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\le 0$ (đpcm). trong đó có ít nhất một số khác 0.
Một dạng đặc biệt của BĐT này rất hay được áp dụng là
$\dfrac{a_1^2}{b_1}+\dfrac{a_2^2}{b_2}+...+\dfrac{a_n^2}{b_n}\ge\dfrac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$, trong đó các số $b_i>0$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=\frac{x^2\left(y+z\right)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2\left(z+x\right)}{z\sqrt{z}+2z\sqrt{x}}+\frac{z^2\left(x+y\right)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Lời giải:

Sử dụng BĐT Cô si cho 2 số dương ta có
$$x^2\left(y+z\right)\ge 2x^2\sqrt{yz}=2x^2.\frac{1}{\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}$$
Một cách tương tự ta có
$$y^2\left(z+x\right)\ge 2y\sqrt{y};z^2\left(x+y\right)\ge 2z\sqrt{z}$$
Đặt $a=x\sqrt{x},b=y\sqrt{y},c=z\sqrt{z}$, ta có $abc=1$.
Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của
$$P=\frac{2a}{b+2c}+\frac{2b}{c+2a}+\frac{2c}{c+2b}$$
Ta có
$$P=2\left(\frac{a^2}{a\left(b+2c\right)}+\frac{b^2}{b\left(c+2a\right)}+\frac{c^2}{c\left(c+2b\right)}\right)\ge 2\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\left(b+2c\right)+b\left(c+2a\right)+c\left(c+2b\right)}=2.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực $x, y, z > 1$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Lời giải:

Theo giả thiết ta có

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1$$

Sử dụng BĐT Cauchy – Schawars ta có

$$1=\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z} \geq \frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2}{x+y+z}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2}$.

Bài 3. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

Lời giải:

Ta có

$$VT=\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+abc}+\frac{c^2}{c+abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} \geq \frac{1}{1+\frac{(a+b+c)^3}{9}}=\frac{9}{10}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x^2+y^2+1}+\frac{1}{y^2+z^2+1}+\frac{1}{z^2+x^2+1}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy shart ta có

$$\left(x^2+y^2+1\right)\left(1+1+z^2\right) \geq \left(1.x+1.y+z\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2+1} \leq \frac{2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

Một cách tương tự ta có

$$\frac{1}{y^2+z^2+1} \leq \frac{2+x^2}{(x+y+z)^2};\frac{1}{z^2+x^2+1} \leq \frac{2+y^2}{(x+y+z)^2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$1=\frac{1}{x^2+y^2+1}+\frac{1}{y^2+z^2+1}+\frac{1}{z^2+x^2+1}\le\frac{6+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

Suy ra

$$(x+y+z)^2\le 6+x^2+y^2+z^2=6+(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\Rightarrow P=xy+yz+zx\le 3$$

Bài 5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}\ge abc$$

Lời giải:

Chia cả hai vế bất đẳng thức cho abc, bđt tương đương với

$$\frac{1}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{1}{2b^2ca+a^2c^2}+\frac{1}{2c^2ab+a^2b^2}\ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy- shacwar cho vế trái ta được

$$\frac{1}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{1}{2b^2ca+a^2c^2}+\frac{1}{2c^2ab+a^2b^2}$$

$$\ge\frac{9}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab}$$

$$=\frac{9}{(ab+bc+ca)^2}\ge\frac{9}{\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2}=1$$

Từ đó ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 6. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2\le a+b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+2b$.

Lời giải:

Ta có

$$a^2+b^2\le a+b\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$$

Vậy $P=a+2b=\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$, theo bất đẳng thức Cauchy-shawar

$$\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)\right)^2\le(1^2+2^2)\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{2}$$

Từ đó suy ra $P\le\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b)=\left(\frac{5+\sqrt{10}}{10};\frac{5+2\sqrt{10}}{10}\right)$

Bài 7. Cho a,b,c không âm thỏa mãn $a+2b+3c=4$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}$$

Lời giải:

Với hai số dương x,y; sử dụng bđt cô si ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\ge\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Sử dụng bất đẳng thức này ta có

$$P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab+bc+ca+ab+bc+c^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c^2+ca+2bc+2ab}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(c+2b)}}$$

$$\ge\frac{2\sqrt{2}}{\frac{a+c+c+2b}{2}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+3c}=\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2;b=1;c=0$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{2}$.

Bài 8. Cho a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1,ab+bc+ca>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Lời giải:

Giả sử $a>b>c$ khi đó

$$P=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Ta có

$$\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}=2\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\ge\frac{8}{a-b+b-c}=\frac{8}{a-c}$$

Vậy $P\ge10\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{\sqrt{4(ac+ab+bc)}}\right)\ge\frac{20}{\sqrt{(a-c)\sqrt{4(ac+ab+bc)}}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\geq \frac{20}{\sqrt{\frac{1}{2}\left((a-c)^2+4(ac+ab+bc)\right)}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}$$

$$=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}=\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{3(1-b)(1+3b)}}\geq\frac{20\sqrt{6}}{\frac{3(1-b)+(1+3b)}{2}}=10\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=\frac{1}{3}, a=\frac{2+\sqrt{6}}{6}, c=\frac{2-\sqrt{6}}{6}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c$

1.2. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=15\frac{x^2}{z}+\frac{5}{36}\frac{y^2}{x}+\frac{24}{25}\frac{z^2}{y}$$

1.3. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\left(1+\sqrt{ab}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{bc}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{aa}\right)^2}$$

1.4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\geq\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

1.5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2}+\frac{b^2c^2+7}{(b+c)^2}+\frac{c^2a^2+7}{(c+a)^2}\geq 6$$

1.6. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c\leq\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$$

1.7. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)^2+\left(1+y^2\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

1.8. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(3a+\frac{2}{b+c}\right)^2+\left(3b+\frac{2}{c+a}\right)^2+\left(3c+\frac{2}{a+b}\right)^2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1.9. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\left[\frac{x^4}{(xy+1)(xz+1)}+\frac{y^4}{(yz+1)(xy+1)}+\frac{z^4}{(zy+1)(zx+1)}\right]$

BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Ta chỉ xét một dạng của bất đẳng thức này,để hiểu cách vận dụng bất đẳng thức này,nó thực sự là một công cụ hữu hiệu khi giải toán bất đẳng thức.

Cho a,b,c,x,y,z,u,v,t *là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)\ge\left(axu+byv+czt\right)^3$$

Chứng minh:

Sử dụng bất dẳng thức Cô si cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{u^3}{u^3+v^3+t^3}\ge\frac{3axu}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)}}$$

Một cách tương tự xây dựng tiếp 2 bất đẳng thức

$$\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{v^3}{u^3+v^3+t^3}\ge\frac{3byv}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)}}$$

$$\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{t^3}{u^3+v^3+t^3}\ge\frac{3czt}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Do vậy khi làm toán để vận dụng bất đẳng thức này, ta có thể sử dụng luôn BĐT Cô si theo như cách chứng minh trên.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

Lời giải:

Sử sụng BĐT Cô si cho bộ 3 số dương ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên. Ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 2. Cho a,b là hai số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{\left(1+a^2b\right)\left(1+b^2\right)}{\left(a^2-a+1\right)\left(1+b^3\right)} \le 2$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức ở bài toán 1
Ta có:

$$\left(1+a^3\right)\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right) \ge \left(1+a^2b\right)^3$$

$$(1+1)(1+1)\left(1+a^3\right) \ge (1+a)^3$$

$$(1+1)\left(1+b^3\right)\left(1+b^3\right) \ge \left(1+b^2\right)^3$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra

$$8\left(1+a^3\right)^3\left(1+b^3\right)^3 \ge \left(1+a^2b\right)^3(1+a)^3\left(1+b^2\right)^3$$

Suy ra:

$$\frac{\left(1+a^2b\right)\left(1+b^2\right)}{\left(a^2-a+1\right)\left(1+b^3\right)} \le 2$$

KỸ THUẬT CÔ SI NGƯỢC DẤU

Kỹ thuật được khai thác để sử dụng BĐT Cô si cho mẫu số của các phân số, do vậy cần có bước chuyển phân số về tổng của một số dương và một số âm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Ta có

$$\frac{a}{1+b^2} = a-\frac{ab^2}{1+b^2} \ge a-\frac{ab^2}{2b} = a-\frac{1}{2}ab$$

Một cách tương tự ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{1}{2}bc; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{1}{2}ca$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}.$

Do $a+b+c=3$ và $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

Bài 2. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$

Lời giải:

Ta có

$\frac{a^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2b^2}$

Một cách tương tự ta có

$\frac{b^2}{b+2c^2} \geq b - \frac{2}{3}\sqrt[3]{b^2c^2}; \frac{c^2}{c+2a^2} \geq c - \frac{2}{3}\sqrt[3]{c^2a^2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq a+b+c-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2}\right) \geq 1.$

Thật vậy vì

$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 3(a+b+c) \Rightarrow ab+bc+ca \leq a+b+c$

$\Rightarrow 3\left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2}\right) \leq \sum(ab+a+b) \leq 3(a+b+c).$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1.$$

Lời giải:

Ta có

$\frac{1}{a^3+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{a^3+2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{3a} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{6}$

Một cách tương tự ta có

$\frac{1}{b^3+2} \geq \frac{1}{2} - \frac{b^2}{6}; \frac{1}{c^3+2} \geq \frac{1}{2} - \frac{c^2}{6}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

GTLN-GTNN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.1. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+a^2b}\ge\frac{3}{2}.$$

1.2. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{1}{2}(a+b+c).$$

1.3. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1.$$

1.4. Cho các số thực dương a,b,c,d có tổng bằng 4. Chứng minh

$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+d^2}+\frac{d+1}{1+a^2}\ge 4.$$

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Một số bài toán BĐT có điều kiện ràng buộc ta có thể quy về dạng lượng giác, khi đó BĐT dễ chứng minh hơn.
Một số dấu hiệu nhận biết đưa bài toán BĐT về dạng lượng giác
+ Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ thì luôn tồn tại 3 góc của tam giác ABC sao cho $a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}$.
+ Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$ thì luôn tồn tại 3 góc của tam giác ABC sao cho $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$.
+ Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2=b^2+c^2-\alpha bc(\alpha\in(0;2))(*)$ thì tồn tại 3 góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (*).
+ Nếu $a^2+b^2+c^2+2abc=1, a,b,c\in[-1;1]$ thì luôn tồn tại
$a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C; A+B+C=\pi$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$. Chứng minh rằng

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3.$$

Lời giải:

Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ thì a,b,c là các số dương và

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$x=\dfrac{c+a-b}{2},y=\dfrac{a+b-c}{2},z=\dfrac{b+c-a}{2}$

Điều kiện bài toán trở thành

$\dfrac{(c+a-b)}{2}\dfrac{(a+b+c)}{2}=3\left(\dfrac{b+c-a}{2}\right)\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)\Leftrightarrow (a+c)^2-b^2=3b^2-3(a-c)^2$

$\Leftrightarrow b^2=a^2+c^2-ac(*)$. Từ đây coi a,b,c như là 3 cạnh của một tam giác thì có góc $B=60^0$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$a^3+c^3+3abc\le 5b^3$

BĐT này đương đương với

$(a+c)(a^2-ac+c^2)+5abc=b^2(a+c)+3abc\le 5b^3\Leftrightarrow a+c+3ac\le 5b^2$

Sử dụng $B=60^0;a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$2\sqrt{3}(\sin A+\sin C)+12\sin A\sin C\le 15$

Mặt khác ta có

$\sin A+\sin C=2\sin\dfrac{A+C}{2}cos\dfrac{A-C}{2}\le 2\sin\dfrac{A+C}{2}=\sqrt{3}$

$\sin A\sin C\le\left(\dfrac{\sin A+\sin C}{2}\right)^2\le\dfrac{3}{4}$

Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 2. Cho các số thực không âm a,b,c và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge abc+2$.

Lời giải:

Theo giả thiết suy ra $a,b,c\in[0;2]$, nên tồn tại 3 góc $A,B,C\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho

$a=2\cos A,b=2\cos B,c=2\cos C$. Theo giả thiết suy ra

$\cos^2 A+cos^2B+cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$, suy ra A,B,C là các đỉnh của tam giác nhọn ABC.

Vậy ta cần chứng minh

$\cos A+\cos B+\cos C\ge 4\cos A\cos B\cos C+1$

$\Leftrightarrow\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\ge\cos A\cos BosC$.

Mặt khác ta lại có

$\cos B\cos C\le\dfrac{(\cos B+\cos C)^2}{4}=\sin^2\dfrac{A}{2}cos^2\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\le\sin^2\dfrac{A}{2}$

Một cách tương tự ta có

$\cos A\cos C\le\sin^2\dfrac{B}{2};\cos A\cos B\le\sin^2\dfrac{C}{2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên, ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $ab\neq 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{4}{b}-\frac{2}{a}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=a^2+b^2-a+3b$

1.2. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x^2y^2+2yx^2+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y\left(y+\frac{1}{x}+2\right)$$

1.3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c\leq 3$.

1.4. Cho các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$$

1.5. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\frac{1-16xyz}{4}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z+4xyz}{1+4(xy+yz+zx)}\geq\frac{13}{28}.$$

1.6. Cho các số thực không âm x,y. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

1.7. Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $-2\leq a_i\leq 2,\forall i=\overline{1,n}$ và các số thực này có tổng bằng không. Chứng minh rằng

$$\left|a_1^3+a_2^3+...+a_n^3\right|\leq 2n.$$

1.8. Cho $xy\geq 0$ và $x^2+2y^2=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\geq 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

1.9. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2\leq a+b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+2b$.

1.10. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc+a+c=b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$$

1.11. Cho $a\in\left[-1;\frac{5}{4}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{5-4a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 10:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình đường thẳng có dạng tổng quát $(d): ax+by+c=0$, $a^2+b^2>0$.

+ Đường thẳng (d) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=(a;b)$, và véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-b;a)$.

+ Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=(a;b)$ có dạng: $(d): a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$

+ Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k có dạng: $(d): y=k(x-x_0)+y_0.$

+ Phương trình đoạn chắn đi qua điểm $A(a;0),B(0;b)$ có dạng $(d):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

+ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ có dạng

$$(d):\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Góc giữa 2 đường thẳng

+ Nếu 2 đường thẳng cho dưới dạng hệ số góc

$$\begin{cases}(d_1): y=a_1x+b_1\\(d_2): y=a_2x+b_2\end{cases}\Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}\right|, 0\le\alpha\le 90^0.$$

+ Nếu 2 đường thẳng cho dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases}(d_1): a_1x+b_1y+c_1=0\\(d_2): a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Khoảng các từ một điểm đến một đường thẳng

$$d(M;(d))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Các tính chất trong tam giác

Cho tam giác ABC có 3 đỉnh là A,B,C và trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có

+ Tọa độ trọng tâm G được xác định bởi

$$\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}.$$

+ Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

+ Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của 3 đường phân giác trong của tam giác.

+ Phương trình đường phân giác trong của góc A có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$.

+ Phương trình đường phân giác ngoài của góc A có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$.

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ TAM GIÁC

Phương pháp:

- Cho tam giác vuông tại A chẳng hạn thì ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.
- Nếu đề bài cho phương trình đường cao $Ax+By+C=0$ thì cạnh đối diện sẽ nhận véc tơ $\vec{u}=(A;B)$ làm một véc tơ chỉ phương, vậy nếu biết cạnh đối diện đi qua một điểm nữa thì ta viết được phương trình của cạnh đối diện.
- Nếu đề bài cho phương trình của một hoặc hai đường trung tuyến thì ta tìm được trung điểm cạnh đối diện hoặc trọng tâm của tam giác.

Lưu ý: Thường xét mối liên hệ giữa tọa độ ba đỉnh và trọng tâm $\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases}$ hoặc $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm cạnh BC.

- Nếu đề bài cho phương trình đường phân giác trong d của một góc, và biết một điểm M thuộc một cạnh bên thì ta tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d

Điểm M' được xác định qua các bước:

1. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d.
2. Xác định tọa độ $I=d\cap\Delta$, vì I là trung điểm của $MM'\Rightarrow M'$ theo công thức liên hệ đối xứng qua một điểm.

- Nếu đề bài cho tâm hay bán kính đường tròn nội tiếp, diện tích tam giác thì chú ý công thức liên hệ $S_{ABC}=p.r=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho điểm $A(2;-2)$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $M(3;1)$ và cắt các trục tọa độ tại B,C. Viết phương trình đường thẳng (d), biết rằng tam giác ABC cân tại A.

Lời giải:

Giả sử (d) cắt các trục tọa độ tại $B(b;0),C(0;c)$. Khi đó $(d):\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Do điểm $M(3;1)\in(d)\Rightarrow \frac{3}{b}+\frac{1}{c}=1 (1)$.

Tam giác ABC cân tại $A \Leftrightarrow AB^2=AC^2 \Leftrightarrow (2-b)^2+4=4+(2+c)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases}b=6\\c=2\end{cases}\vee\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}$

Vậy có 2 đường thẳng $(d_1):\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1;(d_2):\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$.

Bài 2. Cho 2 đường thẳng $(d_1): x-y+1=0;(d_2): 2x+y+1=0$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng trên tại A,B sao cho M là trung điểm của AB.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $A(t_1;t_1+1)\in(d_1);B(t_2;-2t_2-1)\in(d_2)$

Điểm $M(2;1)$ là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\y_A+y_B=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1+t_2=4\\(t_1+1)+(-2t_2-1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\frac{10}{3}\\t_2=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right),B\left(\frac{2}{3};\frac{-7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}(2;5)$$

Vậy phương trình đường thẳng $(d):\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}\Leftrightarrow(d):5x-2y-8=0$.

Bài 3. Cho 2 đường thẳng $(d_1): 2x-y+5=0;(d_2): x+y-3=0$ và điểm $M(-2;0)$ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại A,B sao cho $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $A(t_1;2t_1+5)\in(d_1);B(t_2;3-t_2)\in(d_2)$. Suy ra

$\overrightarrow{MA}=(2+t_1;2t_1+5),\overrightarrow{MB}=(t_2+2;3-t_2)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1+2=2(t_2+2)\\2t_1+5=2(3-t_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=1\\t_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(3;7)$

Vậy phương trình đường thẳng $(d):\frac{x+2}{3}=\frac{y}{7}\Leftrightarrow 7x-3y+14=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y-4=0$ và $d_2: 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d_2 sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng d_1 tại điểm M thỏa mãn $OM.ON=8$.

Lời giải:

Gọi $N(a;2a-2)\in d_2; M(b;b-4)\in d_1$

Do O,M,N thẳng hàng nên hệ số góc đường thẳng OM bằng hệ số góc đường thẳng ON:

$\dfrac{2a-2}{a}=\dfrac{b-4}{b}\Leftrightarrow b=\dfrac{4a}{2-a}$

Ta có $OM.ON=8\Leftrightarrow \left(a^2+(2a-2)^2\right)\left(b^2+(b-4)^2\right)=64$, thay $b=\dfrac{4a}{2-a}$ vào ta được

$(5a^2-8a+4)^2=4(a-2)^2\Leftrightarrow (5a^2-6a)(5a^2-10a+8)=0\Leftrightarrow 5a^2-6a=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{6}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} N(0;-2) \\ N\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{2}{5}\right)\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm $N_1(0;-2); N_2\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(4;1)$ cắt các trục tọa độ tại A,B sao cho.

1. Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.
2. Tổng độ dài $OA+OB$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử (d) cắt các trục tọa độ tại $A(a;0),B(0;b),a,b>0$. Khi đó phương trình của (d) là $(d):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Do $M(4;1)\in(d)\Rightarrow \dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=1(1)$.

1. Ta có $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}ab$, theo (1) ta có $1=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{4}{a}.\dfrac{1}{b}}=\dfrac{4}{\sqrt{ab}}\Rightarrow ab\ge 16\Rightarrow S_{OAB}\ge 8$.

   Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=8,b=2\Rightarrow (d):\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{2}=1$.

2. Ta có $OA+OB=a+b=a+\dfrac{a}{a-4}=a-4+\dfrac{4}{a-4}+5\ge 2\sqrt{(a-4)\dfrac{4}{a-4}}+5=9$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-4=\frac{4}{a-4}\Leftrightarrow a=6;b=3\Rightarrow(d):\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.

Bài 5. Cho 2 điểm $A(0;6),B(2;5)$. Tìm trên $(d):x-2y+2=0$ điểm M sao cho

1. $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

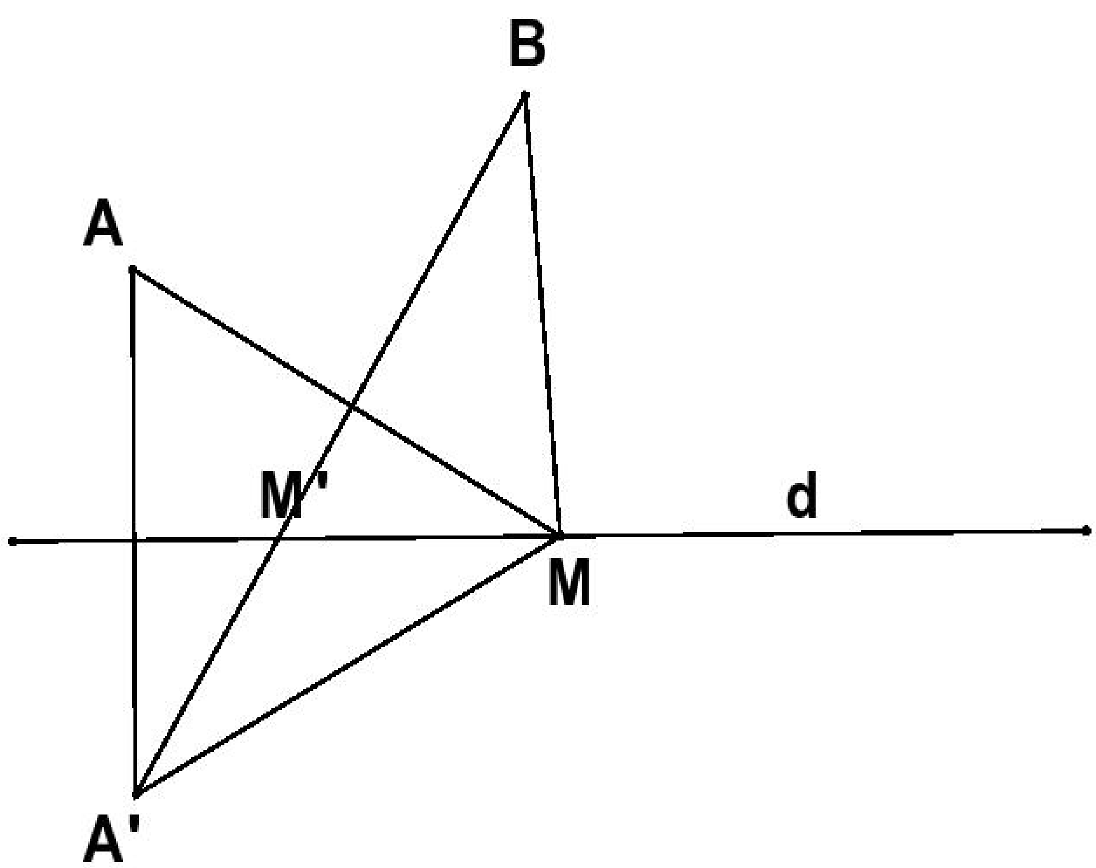
2. $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Thay tọa độ 2 điểm A,B vào phương trình của $(d)\Rightarrow(-10)(-6)>0\Rightarrow$ 2 điểm A,B nằm cùng phía với đường thẳng (d).

1. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $(d)\Rightarrow MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và (d).



Đường thẳng AA' đi qua A và vuông góc với $(d)\Rightarrow AA':2x+(y-6)=0\Leftrightarrow 2x+y-6=0$. Tọa độ giao điểm H của (d) và $A'A$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x+y-6=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow H(2;2)\Rightarrow A'(4;-2).$$

Đường thẳng $A'B:\frac{x-4}{2-4}=\frac{y+2}{5+2}\Leftrightarrow 7x+2y-24=0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\begin{cases}7x+2y-24=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{11}{4};\frac{19}{8}\right)$.

2. Ta có $|MA-MB|\le AB\Rightarrow |MA-MB|_{max}=AB\Leftrightarrow M=AB\cap(d)$

Đường thẳng $AB: x+2y-12=0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$\begin{cases}x+2y-12=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow M\left(5;\frac{7}{2}\right)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho 2 điểm $A(0;1), B(2;-1)$ và 2 đường thẳng:
$(d_1):(m-1)x+(m-2)y+2-m=0;(d_2):(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$
Gọi P là giao điểm của $(d_1),(d_2)$. Xác định m để tổng $PA+PB$ lớn nhất.

Lời giải:

d_1,d_2 có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(m-1;m-2);\overrightarrow{n_2}=(2-m;m-1)$. Suy ra
$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow(d_1)\perp(d_2)$.

Dễ thấy $A\in(d_1), B\in(d_2)\Rightarrow\Delta PAB$ vuông tại P. Ta có

$(PA+PB)^2\le 2(PA^2+PB^2)=2AB^2=16\Rightarrow PA+PB\le 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác PAB vuông cân tại P, hay góc giữa đường thẳng AB và (d_1) bằng 45^0.

Ta có $\overrightarrow{n_{AB}}=(1;1)$, từ đó suy ra

$$\cos45^0=\frac{|\overrightarrow{n_{AB}}.\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_{AB}}|.|\overrightarrow{n_1}|}\Leftrightarrow\frac{|2m-3|}{\sqrt{(m-1)^2+(m-2)^2}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\end{array}\right.$$

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho điểm $A(2;1)$. Tìm tọa độ điểm B trên trục hoành, điểm C trên trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích lớn nhất, biết điểm B có hoành độ không âm.

Lời giải:

Gọi $B(b;0), C(0;c); b,c>0\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(b-2;-1),\overrightarrow{AC}=(-2;c-1)$

Tam giác ABC vuông tại A suy ra

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow -2(b-2)-1(c-1)=0\Leftrightarrow c=5-2b\ge 0\Rightarrow 0\le b\le\frac{5}{2}$

Diện tích tam giác ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}\sqrt{4+(c-1)^2}=b^2-4b+5$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(t)=t^2-4t+5, 0\le t\le\dfrac{5}{2}\Rightarrow f(t)\le f(0)=5$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $B(0;0), C(0;5)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho điểm $A(2;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y-2=0, d_2: x+y-8=0$. Tìm B, C tương ứng thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải:

Giả sử $B(b;2-b)\in d_1; C(c;8-c)\in d_2$. Ta có

$\overrightarrow{AB}=(b-2;-b), \overrightarrow{AC}=(c-2;6-c)$. Tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\ AB^2=AC^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-2)(c-2)-b(8-c)=0\\ (b-2)^2+b^2=(c-2)^2+(8-c)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ c=5\end{cases}\vee\begin{cases}b=-1\\ c=3\end{cases}$$

Vậy có hai cặp điểm B, C thỏa mãn đề bài là $B(3;-1), C(5;3)$ hoặc $B(-1;3), C(3;5)$.

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho bốn điểm $A(1;0)$ $B(-2;4), C(-1;4), D(3;5)$. Tìm điểm M trên đường thẳng $d: 3x-y-5=0$ sao cho hai tam MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Lời giải:

Ta có $AB=5, CD=\sqrt{17}$. Giả sử điểm $M(a;3a-5)$ thuộc đường thẳng d

Đường thẳng AB, CD lần lượt có phương trình là

$AB: 4x+3y-4=0; CD: x-4y+17=0$

Vậy diện tích tam giác MAB, MCD bằng nhau khi và chỉ khi

$$AB.d(M;AB)=CD.d(M;CD)\Leftrightarrow 5.\frac{|13a-19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{17}.\frac{|-11a+37|}{\sqrt{1^2+4^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{7}{3}\\ a=-9\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn bài toán là $M_1\left(\dfrac{7}{3};2\right), M_2(-9;-32)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{3}{2}$ và hai điểm $A(2;-3), B(3;-2)$. Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $AB=\sqrt{2}$. Đường thẳng AB có phương trình là $AB: x-y-5=0$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{ABG}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(G;AB\right)=\frac{2S_{ABG}}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Gọi $G\left(a;3a-8\right)$ suy ra

$$\frac{\left|-2a+3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=2\end{array}\right.\Rightarrow G\left(1;-5\right),G\left(2;-2\right)$$

Gọi M là trung điểm của $AB\Rightarrow M\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

Vì $\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C\left(2;-2\right)\\C\left(1;-1\right)\end{array}\right.$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H\left(1;0\right)$ chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K\left(0;2\right)$ và trung điểm cạnh AB là điểm $M\left(3;1\right)$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải:

Đường cao BK đi qua hai điểm H,K nên có phương trình $BK: 2x+y-2=0$.

Ta có $\overrightarrow{HK}=\left(-1;2\right)$, đường thẳng AC đi qua K và nhận $\overrightarrow{HK}$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình $AC: x-2y+4=0$.

Do $A\in AC, B\in BK$ nên giả sử $A\left(2a-4;a\right),B\left(b;2-2b\right)$. Vì điểm $M\left(3;1\right)$ là trung điểm của AB nên ta có hệ

$$\begin{cases}2a-4+b=6\\a+2-2b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}\Rightarrow A\left(4;4\right),B\left(2;-2\right)$$

Từ đó suy ra phương trình cạnh $AB: 3x-y-8=0$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với $\overrightarrow{HA}=\left(3;4\right)$ nên có phương trình là $BC: 3x+4y+2=0$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H\left(-1;4\right)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(-3;0\right)$, trung điểm cạnh BC là điểm $M\left(0;-3\right)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh B có hoành độ dương.

Lời giải:

Gọi N là trung điểm cạnh AC, vì tam giác ABH đồng dạng với tam giác MNI và AH song song với MI nên $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow A\left(-7;10\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Gọi $B(x;y), x>0 \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(3;-3), \overrightarrow{MB}=(x;y+3)$. Với M là trung điểm cạnh BC nên $IM \perp MB$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp $IA=IB=\sqrt{116}$.

Do đó tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=116\\ -3x+3(y+3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\ y=4\end{cases} \Rightarrow B(7;4).$$

Vậy đường thẳng AB đi qua hai điểm A,B nên có phương trình là

$AB: 3x+7y-49=0$.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đỉnh A,B nằm trên trục hoành, phương trình cạnh BC có phương trình là $BC: 4x+3y-16=0$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

Lời giải:

Do điểm B thuộc đường thẳng BC và nằm trên Ox nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=0\\ 4x+3y-16=0\end{cases} \Rightarrow B(4;0).$$

Giả sử $A(a;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(4-a;0)$, gọi $C\left(c;\dfrac{16-4c}{3}\right) \in BC$. Do tam giác ABC vuông tại A nên

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow c=a$. Vậy điểm $C\left(a;\dfrac{16-4a}{3}\right)$.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}|a-4|.\left|\dfrac{16-4a}{3}\right|$

Mặt khác ta lại có $S_{ABC}=pr=\dfrac{1}{2}\left(|a-4|+\left|\dfrac{16-4a}{3}\right|+\dfrac{5}{3}|a-4|\right); \left(p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}, r=1\right)$

Từ đó suy ra $|a-4|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=7\\ a=1\end{array}\right.$

+ Với $a=1 \Rightarrow A(1;0), B(4;0), C(1,4) \Rightarrow G\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$.

+ Với $a=7 \Rightarrow A(7;0), B(4;0), C(7,-4) \Rightarrow G\left(6;-\dfrac{4}{3}\right)$.

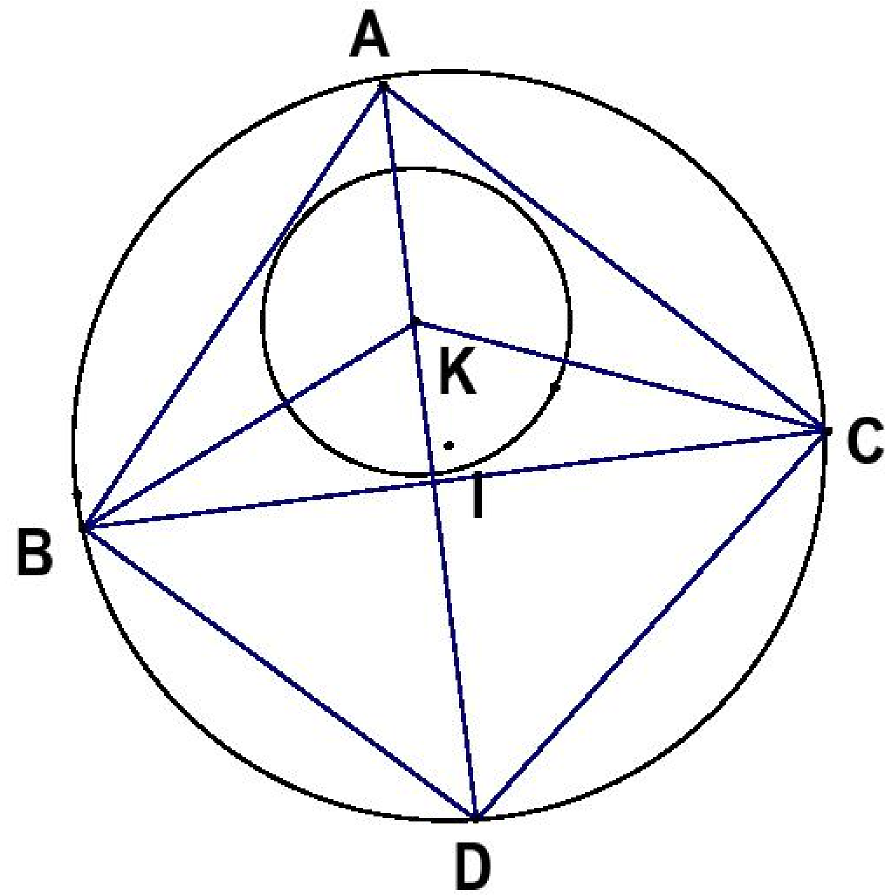
Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $K(4;5)$, biết đỉnh $A(2;3)$. Xác định tọa độ đỉnh B,C.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $IA = 5$, do vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$.

Đường phân giác AK đi qua hai điểm A, K nên có phương trình là $AK: x-y+1=0$, đường thẳng này cắt đường tròn (C) tại điểm $D(9;10)$.



Ta có $\widehat{DCK} = \widehat{DKC} = \dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}$ nên tam giác DKB là tam giác cân.

Suy ra B, C là giao điểm của (C) và đường tròn tâm D bán kính $DK = \sqrt{50}$.

Vậy tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=25\\(x-9)^2+(y-10)^2=50\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=9\end{cases} \vee \begin{cases}x=10\\y=3\end{cases}$$

Vậy $B(2;9), C(10;3)$ hoặc $B(10;3), C(2;9)$.

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại A có phương trình hai cạnh $AB: y+1=0; BC: x+y-2=0$. Tính diện tích tam giác ABC biết AC đi qua điểm $M(-1;2)$.

Lời giải:

Đỉnh B là giao điểm của AB, BC nên tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow B(3;-1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và song song với BC, khi đó d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1)$.

Suy ra phương trình của $d:(x+1)+(y-2)=0 \Rightarrow d: x+y-1=0$.

Tạo độ giao điểm N của d và AB là nghiệm hệ

$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow N(2;-1)$.

Tam giác ABC cân tại A nên A nằm trên đường trung trực của MN. Viết được phương trình đường trung trực $MN: x-y=0$.

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y+1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-1)$.

Từ đó ta có $AB=AC=4, AC\perp AB \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=8$.

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ xOy cho tam giác ABC. Biết đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong góc A lần lượt có phương trình là $d_1: 3x+4y+10=0$ và $d_2: x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải:

- Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $d_2 \Rightarrow M' \in AC$.

Đường thẳng MM' đi qua M và vuông góc với d_2 nên $MM': x+y-2=0$

Gọi $I=d_2\cap MM' \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và I là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(1;1)$

- Đường thẳng AC đi qua M' và vuông góc với d_1 nên nhận $\vec{u}=(3;4)$ làm một véc tơ chỉ phương, vậy $AC: \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \end{cases}$

Và $A=d_2\cap AC \Rightarrow A(4;5)$

- Đường thẳng AB đi qua A và M nên $AB: \frac{x-4}{-4}=\frac{y-5}{2-5} \Leftrightarrow 3x-4y+8=0$

Có $B=d_1\cap AB \Rightarrow B\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$

- Điểm $C(1+3t;1+4t)\in AC$, do $MC=\sqrt{2} \Rightarrow (1+3t)^2+(4t-1)^2=2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow C(1;1) \\ t=\dfrac{2}{25} \Rightarrow C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right) \end{array}\right.$$

Vậy các đỉnh của tam giác là $A(4;5), B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right), C(1;1)$ hoặc $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho $D(3;1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{5}{2};0\right) \Rightarrow BC$ song song với EF hay tam giác ABC cân tại A.

Đường thẳng AD vuông góc với EF nên có phương trình $x-3=0$

Do $F \in EF \Rightarrow F(t;3)$. Mặt khác lại có $BF=BD \Rightarrow \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+2^2=\dfrac{5}{2}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=-1$, suy ra $F(-1;3)$ và đường thẳng BF có phương trình:

$\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{-1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$, khi đó tọa độ giao điểm A của AD và BF là $A\left(3;-\dfrac{7}{3}\right)$, loại trường hợp này vì không thỏa mãn A có tung độ dương.

Với $t=2 \Rightarrow F(2;3)$ và đường thẳng $BF: 4x-3y+1=0$, từ đó suy ra $A\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$, thỏa mãn.

Vậy $A\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

1.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B và có $AB=2BC$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. Phương trình đường thẳng $BC: x-2y-4=0$, đường thẳng $BG: 7x-4y-8=0$. Xác định tọa độ ba đỉnh A,B,C.

1.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$. Đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD có phương trình lần lượt là $2x+y+1=0; x+y-1=0$. Viết phương trình cạnh BC.

1.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có trung điểm $M(2;0)$ của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $7x-2y-3=0; 6x-y-4=0$. Viết phương trình cạnh AC.

1.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại $A(6;6)$. Đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB, AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

1.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho các đường thẳng $d_1: x+y+3=0,\ d_2: x-y-4=0,\ d_3: x-2y=0$ Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng các từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho hai điểm $A(0;2)$ và $B\left(-\sqrt{3};-1\right)$. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

1.9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng $BC: \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$, các đỉnh A,B nằm trên trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tạo độ trọng tâm G của tam giác ABC.

1.10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông tại A ,có đỉnh $C(-4;1)$ phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

1.11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại $A(-1;4)$ và các đỉnh B,C thuộc đường thẳng $x-y-4=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B,C biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

1.12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

1.13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;0), B(4;0), C(0;m); m\neq 0$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết $M\left(1;-1\right)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Xác định tọa độ ba đỉnh của tam giác.

1.15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho điểm $A\left(0;2\right)$ và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Viết phương trình đường thẳng d biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

1.16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh huyền nằm trên đường thẳng $x+7y-31=0$, điểm $N\left(7;7\right)$ nằm trên cạnh AC, điểm $M\left(2;-3\right)$ thuộc cạnh AB và nằm ngoài đoạn AB. Xác định tọa độ ba đỉnh A,B,C.

1.17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác cân, có cạnh đáy $BC: x-3y-1=0$. Cạnh bên $AB: x-y-5=0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M\left(-4;1\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

1.18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A\left(1;1\right), B\left(-2;5\right)$, trọng tâm thuộc đường thẳng $2x+3y-1=0$. Đỉnh C thuộc đường thẳng $x+y-1=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

1.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $6x-5y-7=0; x-4y+2=0$. Tính diện tích tam giác ABC, biết trọng tâm của tam giác nằm trên trục hoành và đường cao xuất phát từ đỉnh B đi qua điểm $M\left(1;-4\right)$.

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ TỨ GIÁC

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có điểm $A\left(1;0\right), B\left(2;0\right)$. Giao điểm I của 2 đường chéo thuộc đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành, biết diện tích hình bình hành bằng 4.

Lời giải:

Giả sử tọa độ tâm $I\left(a;a\right)$, do điểm C đối xứng với A qua I và điểm D đối xứng với B qua I.

Suy ra $C\left(2a-1;2a\right), D\left(2a-2;2a\right)$.

Đường thẳng AB chính là trục hoành: $y=0$, ta có $d\left(I;AB\right)=\left|a\right|, AB=1 \Rightarrow$

$S_{ABCD}=4S_{IAB}=2d\left(I;AB\right).AB=2\left|a\right|=4 \Leftrightarrow a=\pm 2$

+ Với $a=2 \Rightarrow C\left(3;4\right), D\left(2;4\right)$.

+ Với $a=-2 \Rightarrow C\left(-5;-4\right), D\left(-6;-4\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(6;2)$, điểm $M(1;5) \in AB$ và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải:

Gọi N đối xứng với M qua $I \Rightarrow N(11;-1)$. Giả sử tọa độ điểm $E(x_0;5-x_0)$

Ta có $\overrightarrow{IE}=(x_0-6;3-x_0), \overrightarrow{NE}=(x_0-11;6-x_0)$. Do $IE \perp NE \Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE}=0$

$$\Rightarrow (x_0-6)(x_0-11)+(3-x_0)(6-x_0)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=6 \\ x_0=7 \end{array}\right.$$

+ Với $x_0=6 \Rightarrow \overrightarrow{IE}=(0;-3) \Rightarrow AB: y-5=0.$

+ Với $x_0=7 \Rightarrow \overrightarrow{IE}=(1;-4) \Rightarrow AB: x-4y+19=0.$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I giao điểm của đường thẳng $(d_1): x-y-3=0$ và đường thẳng $(d_2): x+y-6=0$. Trung điểm một cạnh là giao điểm của (d_1) với trục hoành. Xác định tọa độ bốn đỉnh hình chữ nhật.

Lời giải:

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Do vai trò các đỉnh A,B,C,D là như nhau, nên ta giả sử đó là trung điểm M của cạnh AD.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow M(3;0).$$

Suy ra $AB=2IM=3\sqrt{2}$. Mặt khác $S_{ABCD}=AB.AD \Rightarrow AD=\frac{S_{ABCD}}{AB}=\frac{12}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Vì M,I cùng thuộc (d_1) suy ra $AD \perp (d_1)$, vậy AD đi qua điểm M và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1) \Rightarrow AD: (x-3)+y=0 \Leftrightarrow x+y-3=0.$

Lại có $MA=MD=\frac{AD}{2}=\sqrt{2} \Rightarrow$ Tọa độ điểm A,D là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ \sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(2;1), D(4;1).$$

Các điểm C,B lần lượt đối xứng với A,B qua I. Suy ra tọa độ điểm $C(7;2), B(5;4)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, đường thẳng $AB: x-2y+2=0$, $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải:

Cạnh AD, BC vuông góc với AB nên phương trình có dạng: $2x+y+c=0$, do
$AB=2AD \Rightarrow d\left(I;AB\right)=\frac{1}{2}d\left(I;AD\right)$.

$$\Rightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\frac{|1+c|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-6 \\ c=4 \end{array}\right.$$

+ Do đó đường thẳng AD, BC có phương trình
$2x+y-6=0; 2x+y+4=0$. Khi đó tọa độ các đỉnh A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Do điểm A có hoành độ âm nên $A\left(-2;0\right), B\left(2;2\right)$. Điểm C đối xứng với A qua I nên $C\left(3;0\right)$ và điểm $D\left(-1;-2\right)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh $A\left(1;0\right), B\left(3;2\right); \angle ABC=120^0$. Xác định tọa độ 2 đỉnh C, D.

Lời giải:

Theo giả thiết suy ra tam giác ABD đều, ta có tọa độ trung điểm M của AB là $M\left(2;1\right)$, có $\overrightarrow{AB}=\left(2;2\right)$. Vậy phương trình đường trung trực của AB là
$\left(x-2\right)+\left(y-1\right)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$. Điểm D thuộc đường trung trực AB nên gọi $D\left(t;3-t\right)$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AD^2=AB^2 \Rightarrow \left(t-1\right)^2+\left(3-t\right)^2=8 \Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$

+ Với $t=2+\sqrt{3} \Rightarrow D\left(2+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right), C\left(-\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right)$.

+ Với $t=2-\sqrt{3} \Rightarrow D\left(2-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right), C\left(-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh AB, BC, CA, AD lần lượt đi qua các điểm $M\left(4;5\right), N\left(6;5\right), P\left(5;2\right), Q\left(2;1\right)$. Viết phương trình cạnh AB, biết hình chữ nhật có diện tích bằng 16.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Lời giải:

Giả sử phương trình cạnh $AB: a(x-4)+b(y-5)=0, a^2+b^2>0$

Khi đó $BC: b(x-6)-a(y-5)=0$.

Ta có $S_{ABCD}=d(P;AB).d(Q;BC) \Rightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|-4b+4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=-\frac{1}{3}b \end{array}\right.$

+ Với $a=-b$, chọn $b=1; a=-1 \Rightarrow AB: -x+y-1=0$.

+ Với $a=-\frac{1}{3}b$, chọn $b=1; a=-\frac{1}{3} \Rightarrow AB: -x+3y-11=0$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh BC, CD sao cho $BM=CN$. Biết $AM \cap BN = I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$. Xác định tọa độ đỉnh C.

1.2. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $y=3x$, đường thẳng BD có phương trình $x-2y=0$. Góc tạo bởi 2 đường thẳng AB, BC bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24, điểm B có hoành độ dương.

1.3. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $B(1;5)$, đường cao $AH: x+2y-2=0$, phương trình đường phân giác góc C là $x-y-1=0$. Tìm tọa độ 3 đỉnh A, C, D.

1.4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $D(-1;3)$, đường phân giác trong của góc A là $x-y+6=0$. Tìm tọa độ đỉnh B, biết diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 18 và đỉnh A có tọa độ thỏa mãn $|x_A|=|y_A|$.

1.5. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh AB, CD lần lượt có phương trình là $x-2y+5=0; x-2y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng AD, BC biết điểm $M(-3;3)$ thuộc đường thẳng AD và điểm $N(-1;4)$ thuộc đường thẳng BC.

1.6. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(1;1)$, biết điểm $M(-2;2)$ thuộc cạnh AB và điểm $N(2;-2)$ thuộc cạnh CD. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông.

1.7. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm $M(-3;-2)$ thuộc cạnh AB, đường tròn nội tiếp hình vuông có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=10$. Xác định tọa độ bốn đỉnh hình vuông, biết điểm A có hoành độ dương.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

1.9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết đỉnh A thuộc d_1 và đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D nằm trên trục hoành.

1.10. Cho hình thoi $ABCD$ có một đường chéo là $x+2y-7=0$ và một cạnh có phương trình $x+3y-3=0$. Viết phương trình ba cạnh và đường chéo còn lại của hình thoi, biết một đỉnh của hình thoi là $(0;1)$.

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐƯỜNG TRÒN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng $(d): x-y+1-\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua gốc tọa độ và điểm $A(-1;1)$ đồng thời tiếp xúc với đường thẳng (d).

Lời giải:

Giả sử đường tròn có tâm $I(a;b)$, theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IO^2 = d^2(I;(d)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = (-1-a)^2+(1-b)^2 \\ a^2+b^2 = \dfrac{\left(a-b+1-\sqrt{2}\right)^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+1 \\ a^2+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$ vậy có 2 đường tròn là

$x^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(x+1)^2+y^2=1$.

Bài 2. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$ và cắt đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0$ theo dây cung MN có độ dài bằng 4.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2), R=3$.

Đường thẳng $(d): a(x-2)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ax+by-2a-b=0, a^2+b^2>0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $d\left(I;(d)\right)=\sqrt{R^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$

Vậy $\frac{|b-3a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{11}}{4}b$

+ Với $a=\frac{3+\sqrt{11}}{4}b$,chọn $b=4,a=3+\sqrt{11}\Rightarrow(d):\left(3+\sqrt{11}\right)x+4y-2\sqrt{11}-10=0.$

+ Với $a=\frac{3-\sqrt{11}}{4}$, chọn $b=4,a=3-\sqrt{11}\Rightarrow(d):\left(3-\sqrt{11}\right)x+4y+2\sqrt{11}-10=0.$

Bài 3. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$ có tâm $I(1;0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\angle IMO=30^0$.

Lời giải:

Nhận thấy điểm $O(0;0)$ thuộc đường tròn (C) nên $IM=IO=1$.

Tam giác MIO cân tại $I,\angle IMO=30^0\Rightarrow\angle MIO=120^0$

Gọi điểm $M(a;b)\in(C)\Rightarrow(a-1)^2+b^2=1(1)$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho tam giác MIO ta có

$OM^2=IM^2+IO^2-2IO.IM\cos120^0=3\Rightarrow a^2+b^2=3(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;3)$ và cắt hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=13;(C_2):(x-6)^2+y^2=25$ lần lượt tại M,N sao cho A là trung điểm của MN.

Lời giải:

Gọi $M(x;y)\in(C_1)\Rightarrow x^2+y^2=13,x\neq2(1)$. Do A là trung điểm của MN nên $N(4-x;6-y)$.

Nhưng $N\in(C_2)\Rightarrow(2+x)^2+(6-y)^2=25(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x=-\frac{17}{5},y=\frac{6}{5}\Rightarrow M\left(\frac{17}{5};\frac{6}{5}\right)$

Đường thẳng (d) đi qua A,M nên $(d):x-3y+7=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Bài 5. Cho đường thẳng $(d): x-7y+10=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng $2x+y=0$ và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $A(4;2)$.

Lời giải:

Giả sử đường tròn (C) có tâm $I(x;-2x) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(x-4;-2x-2)$. Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại A suy ra $IA \perp (d) \Rightarrow 7(x-4)+(-2x-2)=0 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow I(6;-12)$, bán kính $R=IA=10\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn $(C):(x-6)^2+(y+12)^2=200$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $(d): x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng (d).

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2), R=2$.

Đường tròn (C') đối xứng với (C) qua (d) nên có tâm I' là điểm đối xứng của I qua (d) và bán kính $R=2$.

Gọi $H(x;x-1) \in (d)$ là tọa độ chân đường vuông góc hạ từ I , ta có $\overrightarrow{IH}=(x-1;x-3)$ và

$IH \perp (d) \Rightarrow (x-1)+(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow H(2;1)$

Điểm I' đối xứng với I qua $H \Rightarrow I'(3;0)$

Vậy phương trình đường tròn $(C'):(x-3)^2+y^2=4$.

Bài 7. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $(d): 3x-4y+m=0$. Xác định m để trên (d) có duy nhất một điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) đến đường tròn (C) sao cho tam giác MAB đều.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2), R=3$

Tam giác MAB đều suy ra tam giác MIA là nửa tam giác đều, suy ra $MI=2IA=6$.

Vậy điểm M thuộc đường tròn (C') có tâm I bán kính $R=6$, điểm M là duy nhất suy ra đường thẳng (d) tiếp xúc với (C'). Từ đó suy ra

$$d(I;(d))=6 \Leftrightarrow \frac{|m+11|}{\sqrt{1^2+7^2}}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=19 \\ m=-41 \end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Bài 8. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $(d): x+my-2m+3=0$. Gọi I là tâm của (C), tìm m để đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}R^2\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}R^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{AIB}=90^0 \Rightarrow$ Suy ra

$$d(I;(d))=\frac{R}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\frac{8}{15}\end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

1.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy, cho 2 đường thẳng $(d_1): \sqrt{3}x+y=0$ và $(d_2): \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với (d_1) tại A, cắt (d_2) tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

1.3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2), B(-2;-2), C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao hạ từ B; M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

1.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $(d_1): x-y=0, (d_2): x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kinh đường tròn (C_1), biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ và có tâm K thuộc đường tròn (C).

1.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến B bằng 5.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có $A(3;-7)$ và trực tâm $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

1.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $d: x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) tiếp xúc ngoài với (C).

1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho đường tròn $(T):(x-4)^2+y^2=40$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và cắt (T) tại hai điểm A, B sao cho $AB=4BO$.

1.9. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-6y+12=0$ có tâm I và đường thẳng $(d): x+y-4=0$. Tìm trên (d) điểm M sao cho tiếp tiếp với đường tròn (C) kẻ từ M tiếp xúc với (C) tại A, B và diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

1.10. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có $A(2;-2), B(4;0), C(3;\sqrt{2}-1)$. Viết điểm M thuộc đường thẳng $4x+y-4=0$ sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tiếp xúc với (C) tại N và diện tích tam giác NAB lớn nhất.

1.11. Cho đường tròn $(C): x^2-8x+y^2+12=0$. Tìm điểm M nằm trên trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) đến (C) và đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm đi qua $I(8;5)$.

1.12. Cho đường tròn tâm I $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm điểm M nằm trên đường thẳng $x-y+2=0$, sao cho từ M kẻ 2 tiếp tuyến đến (C) tiếp xúc tại A, B và diện tích tứ giác $MIAB$ bằng $6\sqrt{2}$.

1.13. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2;2)$ và cắt đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-2y-14=0$ tại hai điểm A, B sao cho $MA=3MB$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

1.1. Trong mặt phẳng xOy tìm điểm A trên đường thẳng $d: x-2y+1=0$ biết qua A kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm) đến đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=1$ sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.2. Trong mặt phẳng xOy tìm tọa độ ba đỉnh tam giác ABC vuông tại có trọng tâm $G\left(1;\frac{5}{3}\right)$ và A,B,C lần lượt thuộc ba đường thẳng $d_1: 3x+y-8=0$
$d_2: x-y=0; d_3: x-3y+4=0$.

1.3. Trong mặt phẳng xOy cho tam giác ABC có A nằm trên trục hoành $\left(0<x_A<\frac{5}{2}\right)$ và hai đường cao kẻ từ B,C lần lượt có phương trình là $d_1: x-y+1=0$ và $d_2: 2x+y-4=0$. Tìm tọa độ ba đỉnh A,B,C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

1.4. Trong mặt phẳng xOy cho hai đường tròn $(C_1): (x-3)^2+(y+1)^2=10$ và $(C_2): (x-1)^2+(y+7)^2=50$. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và cắt hai đường tròn trên hai dây cung bằng nhau.

1.5. Trong mặt phẳng tọa độ xOy viết phương trình bốn cạnh hình vuông không song song với các trục tọa độ; có tâm là gốc tọa độ và hai cạnh kề của hình vuông lần lượt đi qua hai điểm $M(-1;2); N(3;-1)$.

1.6. Trên mặt phẳng tọa độ xOy lấy hai điểm A,B nằm trên elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và đối xứng qua điểm $M\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$. Xác định tọa độ điểm $C\in(E)$ sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

1.7. Trong mặt phẳng xOy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2mx-my+m-2=0$ và đường tròn $(C_2): x^2+y^2-3x+1=0$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để số tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên là một số lẻ.

1.8. Trên mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$, tâm đường tròn nội tiếp là $I(2;1)$. Cạnh AB có phương trình $x-y+1=0\left(x_A<x_B\right)$. Xác định tọa độ ba đỉnh A,B,C.

1.9. Trong mặt phẳng tọa độ xOy viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC vuông tại $A(1;4)$ có phương trình cạnh $BC: x+2y+3=0$, và tâm(có hoành độ âm) và cách A một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

1.10. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hình thang cân $ABCD$ co hai đáy là AB,CD và hai đường chéo AC,BD vuông góc với nhau. Biết $A(0;3); B(3;4), C$ nằm trên trục hoành. Xác định tọa độ đỉnh D của hình thang.

1.11. Trong mặt phẳng xOy cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2=1$ và đường tròn $(C_2): (x-1)^2+(y-1)^2=10$. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) một đoạn $AB=6$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.12. Trong mặt phẳng tọa độ xOy tìm tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC vuông tại A có $A \in d_1 : x - y + 3 = 0\left(x_A > 0\right); B \in Ox$, trung điểm cạnh AB nằm trên đường thẳng $d_2 : 3x - 4y + 8 = 0$ và $I\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1.13. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC với $B(1;2)$. Đường phân giác trong Δ của góc A có phương trình $2x + y - 1 = 0$, khoảng cách từ C đến Δ bằng hai lần khoảng cách từ B đến Δ. Tìm tọa độ của A, C biết C nằm trên trục tung.

1.14. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $3x - y = 0$, đường thẳng BD có phương trình $x - 2y = 0$, góc tọa bởi hai đường thẳng AB và BC bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

1.15. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường thẳng $(d): x - y + 1 = 0$ và đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho qua M ta kẻ được các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (T)(A, B là các tiếp điểm) đồng thời khoảng cách từ điểm $N\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

1.16. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $x + y + 2 = 0$, đường cao xuất phát từ đỉnh B là $2x - y + 1 = 0$. Cạnh AB đi qua điểm $M(1;1)$, tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{27}{2}$.

1.17. Trong mặt phẳng xOy cho $A(1;2)$ và các đường thẳng $d_1 : x + 2y - 1 = 0$ $d_2 : x + 2y + 8 = 0$. Tìm điểm $B \in d_1, D \in d_2$ và điểm C sao cho $ABCD$ là hình vuông.

1.18. Trong mặt phẳng xOy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 64$ và điểm $A(3;4)$. Đường tròn (C_2) có tâm I_2 và đi qua trung điểm của I_2A. Viết phương trình đường tròn (C_2) sao cho bán kính của đường tròn này là nhỏ nhất.

1.19. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, phương trình đường phân giác trong góc A là $x - y + 1 = 0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$. Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp ba lần diện tích tam giác IBC.

1.20. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hình thoi $ABCD$, phương trình cạnh BD là $x - y = 0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $P(1;\sqrt{3})$, đường thẳng CD đi qua điểm $Q(-2;-2\sqrt{3})$. Tìm tọa độ các đỉnh hình thoi, biết độ dài $AB = AC$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 1.

1.21. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường thẳng $d_1 : 2x - 3y - 3 = 0$ và đường thẳng $d_2 : 5x + 2y - 17 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 đồng thời cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A, B sao cho $\dfrac{AB^2}{S_{OAB^2}}$ nhỏ nhất.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.22. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có $BC = CD = 2AB$, trung điểm cạnh BC là điểm $M(1;0)$, đường thẳng AD có phương trình là $x - \sqrt{2}y = 0$. Xác định tọa độ đỉnh A.

1.23. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Gọi M là điểm sao cho trung tiếp tuyến qua M tiếp xúc với (C) tại E, cát tuyến qua M cắt (C) tại A, B sao cho tam giác ABE vuông cân tại B. Tìm tọa độ của M sao cho khoảng cách từ M đến O là ngắn nhất.

1.24. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 34; $M(6;-1)$ là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng $\Delta: 15x + 8y - 48 = 0$ đi qua tâm của hình chữ nhật và cắt đường thẳng AD tại một điểm thuộc trục tung. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

1.25. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(C_2): (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$. Tìm điểm A trên (C_1), điểm B trên (C_2) và điểm C trên trục hoành sao cho tổng $AC + CB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.26. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho điểm $M(-1;0)$ và đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng d qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB lớn nhất.

1.27. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ xOy cho tam giác ABC. Biết đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong góc A lần lượt có phương trình là $d_1: 3x + 4y + 10 = 0$ và $d_2: x - y + 1 = 0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

1.28. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ xOy cho tam giác ABC có $AB = 3AC$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y = 0$; đường cao hạ từ đỉnh B có phương trình là $3x + y - 16 = 0$. Xác định tọa độ ba đỉnh A, B, C biết cạnh AB đi qua điểm $M(4;10)$.

1.29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tìm điểm P thuộc đường thẳng $3x - 2y - 1 = 0$ và điểm Q thuộc đường thẳng $2x + y + 3 = 0$ sao cho đường thẳng $7x - y + 8 = 0$ là trung trực của đoạn thẳng PQ.

1.30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $K(3;2)$ tìm điểm M thuộc đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ với tâm $I(1;2)$ sao cho $\widehat{IMK} = 60^0$.

1.31. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm điểm B thuộc trục hoành và điểm A trên đường thẳng $y - 1 = 0$ sao cho đường thẳng đi qua A cắt đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt M, N (M nằm giữa A, N); M trung điểm của AN và tam giác ABM cân tại M.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $B\left(0;5-2\sqrt{3}\right)$, đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $d: y=x-1$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt M,N. Tìm điểm A thuộc đường thẳng d (A nằm ngoài đường tròn (C)) sao cho $AB^2=AM.AN$.

1.33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(-1;-2)$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật $ABCD$ biết rằng tam giác IOM có diện tích bằng 4, đường thẳng AB đi qua $N(11;3)$ và cạnh AD tiếp xúc với đường tròn $(C): (x+1)^2+(y+2)^2=2$

1.34. Tìm m để trên đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$ tồn tại duy nhất một điểm P có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA,PB (A,B là các tiếp điểm) tới đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=9$ sao cho tam giác PAB đều.

1.35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(4;4); B(8;-2)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $d: 3x+2y-7=0$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

1.36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 2x+y-5=0$ và điểm $M(-3;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm $K(-1;3)$ và cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt A,B sao cho MA,MB là hai tiếp tuyến vuông góc của đường tròn (C).

1.37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d_1: x+2y-1=0$ và $d_2: x+2y-3=0$ và hai điểm $A(-2;-3), B(1;3)$. Tìm hai điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2. Biết rằng MN vuông góc với d_1 và độ dài đường gấp khúc $AMNB$ ngắn nhất.

1.38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$ bán kính $R=2$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA,MB (A,B là các tiếp điểm) đến (C) và AB đi qua điểm $E(4;1)$.

1.39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(0;0); B(2;4); C(6;0)$ và các điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm $P;Q$ trên cạnh AC. Xác định tọa độ bốn điểm M,N,P,Q biết $MNPQ$ là hình vuông.

1.40. Cho đường tròn $(T): (x-1)^2+(y+2)^2=1$ và đường thẳng $(\Delta): 2x-y+1=0$. Tìm điểm A thuộc đường thẳng (Δ) sao cho từ A kẻ được các tiếp tuyến AB,AC (B,C là các tiếp điểm) đến (T) sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{27}{10}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

1.41. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(T):(x-4)^2+(y-6)^2=5$ và hai điểm $A(2;5);B(6;5)$ nằm trên (T). Đỉnh C của tam giác ABC di động trên đường tròn (T). Tìm tọa độ trực tâm H H của tam giác ABC biết H nằm trên đường thẳng $(\Delta):x-y+1=0$.

1.42. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(T):x^2+y^2+3x-6y=0$. Gọi M,N là hai điểm di động trên (T) sao cho $\widehat{MON}=30^0$ (với O là gốc tọa độ). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OMN biết G nằm trên đường thẳng $(\Delta):x-y+1=0$.

1.43. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(T):(x+2)^2+(y-1)^2=4$. Gọi M là điểm sao cho tiếp tuyến qua M tiếp xúc với (T) tại E, cát tuyến qua M cắt (T) tại A,B sao cho tam giác ABE vuông cân tại B. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ M đến O là ngắn nhất.

1.44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(2;4)$ và hai đường thẳng $d_1:2x-y-2=0$ và $d_2:2x+y-2=0$. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm I, cắt d_1 tại hai điểm A,B và cắt d_2 tại hai điểm C,D sao cho $AB+CD=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$.

1.45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(4;-1)$, phương trình đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $x+y-1=0$ và $x+2y-1=0$. Viết phương trình các cạnh tam giác ABC.

1.46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(3;4);B(1;2);C(5;0)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất $P=2.d\left(B;(d)\right)+d\left(C;(d)\right)$, ở đây $d\left(B;(d)\right);d\left(C;(d)\right)$ lần lượt là khoảng cách từ điểm B,C đến đường thẳng d.

1.47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1:2x+y-2=0;d_2:x-2y+1=0$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(\dfrac{5}{13};-\dfrac{12}{13}\right)$ xuống $d_1;d_2$ và trục hoành. Chứng minh rằng ba điểm A,B,C thẳng hang.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 11:

BA ĐƯỜNG CONIC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BA ĐƯỜNG CÔNIC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Đề thi các năm chủ yếu đề cập đến Elip; hyperbol và parabol rất ít ra

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Elip có dạng chính tắc $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a, b > 0)$.

+ Độ dài trục lớn 2a; độ dài trục nhỏ 2b $(a^2 - b^2 = c^2)$.

+ Tiêu cự 2c.

+ Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-c;0); F_2(c;0)$.

+ Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0); A_2(a;0); B_1(0;-b); B_2(0;b)$. Hình chữ nhật cơ sở $A_1B_1A_2B_2$ có cạnh 2a và cạnh 2b.

+ Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$

+ Đường chuẩn $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$

+ Với điểm $M(x;y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x; MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

<u>Lời giải:</u>

+ Giả sử $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$ Từ giả thiết ta có $x_A = x_B; y_B = -y_A$ Do đó

+ $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.d(O;AB) = \dfrac{1}{2}\left|2y_A.x_A\right| = \left|y_A.x_A\right|$

+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương và A thuộc (E) ta có:

$$S_{ABC} = \left|y_A x_A\right| = 2\sqrt{\frac{x_A^{\ 2}}{4}.\frac{y_A^{\ 2}}{1}} \le \frac{x_A^{\ 2}}{4} + \frac{y_A^{\ 2}}{1} = 1 \Rightarrow S_{ABC} \le 1$$

+ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_A = \sqrt{2}; y_A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}), B(\sqrt{2};\frac{-1}{\sqrt{2}})$ hoặc $A(\sqrt{2};\frac{-1}{\sqrt{2}}), B(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Vậy các điểm cần tìm là $A(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}), B(\sqrt{2};\frac{-1}{\sqrt{2}}); A(\sqrt{2};\frac{-1}{\sqrt{2}}), B(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và các điểm $A(-3;0); I(-1;0)$ Tìm tọa độ các điểm B,C thuộc (E) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải:

+ Ta có $IA = 2 \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình: $(C):(x+1)^2+y^2=4 \Rightarrow B,C$ là giao điểm của (C) & (E)

+ Tọa độ các điểm B,C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ 5x^2+18x+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ x=-3; x=\frac{-3}{5}\end{cases}$$

Với $x=-3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow B$ hoặc C trùng A(loại).

Với $x=\frac{-3}{5} \Rightarrow y=\pm\frac{4\sqrt{6}}{5} \Rightarrow B(\frac{-3}{5};\pm\frac{4\sqrt{6}}{5}), C(\frac{-3}{5};\mp\frac{4\sqrt{6}}{5})$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ đề các vuông góc Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Lời giải:

+ Giả sử elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$, theo giả thiết ta có:

+ Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (1).

+ Chu vi hình chữ nhật cơ sở $4(a+b)=20$ (2).

$$+(1)\,\&\,(2) \Rightarrow \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases} \Rightarrow (E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Bài 4. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có tâm O, tiêu điểm trên trục hoành và qua điểm $M(-\sqrt{3};1)$, biết rằng khoảng cách giữa 2 đường chuẩn bằng 6.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Giả sử elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a,b > 0)$

Điểm $M(-\sqrt{3};1) \in (E) \Rightarrow \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1\ (1)$

+ Khoảng cách giữa 2 đường chuẩn là $\frac{a^2}{c} - (-\frac{a^2}{c}) = 2\frac{a^2}{c} = 6 \Rightarrow \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = 3\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = 2 \end{cases}$

Vậy elip cần tìm $(E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ đề các vuông góc Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và ABC là tam giác đều.

Lời giải:

+ Giả sử $A(x_0; y_0), B(x_0; -y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1(1)$

Do C là một đỉnh của (E) nằm trên trục hoành, nên tam giác ABC cân tại C

$\Rightarrow$ Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $d(C;AB) = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Leftrightarrow 2 - x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}|y_0|\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2}{7} \\ y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}$

Vậy $A(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}), B(\frac{2}{7}; \frac{-4\sqrt{3}}{7})$ hoặc $A(\frac{2}{7}; \frac{-4\sqrt{3}}{7}), B(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7})$

Bài 6. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và điểm $M(2;1)$. Gọi d là đường thẳng qua M, cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB. Hãy viết phương trình đường thẳng d.

Lời giải:

+ Xét đường thẳng qua M, có hệ số góc k. Phương trình của d là:

$y = k(x-2) + 1$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = k(x-2)+1 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k(x-2)+1 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{(k(x-2)+1)^2}{16} = 1(1) \end{cases}$$

+ $x_A; x_B$ là nghiệm của (1). Ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$(1) \Leftrightarrow (16+25k^2)x^2-(100k^2-50k)x+100k^2-100k-375=0$

Vì M là trung điểm của AB nên $x_A+x_B=2x_M$. Theo định lí Vi – ét ta có

$\dfrac{100k^2-50k}{16+25k^2}=4 \Leftrightarrow k=\dfrac{-32}{25}$. Vậy phương trình của d là

$y=\dfrac{-32}{25}(x-2)+1$ hay $32x+25y-64=0$

Bài 7. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$ và đường thẳng $\Delta: 3x+4y-30=0$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho khoảng cách từ M đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải:

+ Giả sử $M(x_0;y_0)\in(E) \Rightarrow \dfrac{x_0{}^2}{25}+\dfrac{y_0{}^2}{\frac{25}{4}}=1$ (1). Khoảng cách từ M đến Δ là

$d(M;\Delta)=\dfrac{|3x_0+4y_0-30|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$+(1) \Rightarrow 25=x_0^2+4y_0^2=\dfrac{1}{13}(3^2+2^2)(x_0^2+4y_0^2)\ge \dfrac{1}{13}(3x_0+4y_0)^2$

$\Rightarrow (3x_0+4y_0)^2 \le 25.13 \Rightarrow -5\sqrt{13}\le 3x_0+4y_0 \le 5\sqrt{13}$

$\Rightarrow -5\sqrt{13}-30 \le 3x_0+4y_0-30 \le 5\sqrt{13}-30$

$\Rightarrow 6-\sqrt{13} \le \dfrac{|3x_0+4y_0-30|}{5}=d(M;\Delta)\le 6+\sqrt{13}$

Bài 8. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1, F_1(-3;0); F_2(3;0)$ là các tiêu điểm của (E). Xác định tọa độ điểm $M\in(E)$, biết rằng $2MF_1=MF_2$.

Lời giải:

+ Gọi $M(x_0;y_0)\in(E) \Rightarrow \dfrac{x_0{}^2}{25}+\dfrac{y_0{}^2}{16}=1(1)$

Elip (E) có tâm sai $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$, ta có $MF_1=a+ex_0; MF_2=a-ex_0$

$\Rightarrow MF_2=2MF_1 \Leftrightarrow a-ex_0=2(a+ex_0)$

$\Leftrightarrow x_0=\dfrac{-a}{3e}=\dfrac{-5}{3.\frac{3}{5}}=\dfrac{-25}{9} \Rightarrow y_0=\pm\dfrac{4\sqrt{56}}{9} \Rightarrow M(\dfrac{-25}{9};\dfrac{4\sqrt{56}}{9})$ hoặc $M(\dfrac{-25}{9};\dfrac{-4\sqrt{56}}{9})$

Bài 9. Lập phương trình hypebol (H) có tiêu cự trên Ox, tâm O độ dài tiêu cự là 10 và một đường tiệm cận có phương trình $d: 3x-4y=0$.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Giả sử hypebol $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$

Độ dài tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2+b^2}=10\Rightarrow a^2+b^2=25$ (1)

+ Đường chuẩn $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. Từ $3x-4y=0\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$ (2)

$+(1)\,\&\,(2)\Rightarrow a^2=16;b^2=9$

Vậy $(H):\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

Bài 10. Cho hypebol $(H):\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$ và đường thẳng $(d):2x-y+m=0$. Đường thẳng (d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $A,B(x_A<x_B)$, biết rằng $BF_2=2AF_1$, trong đó $F_1(-3;0),F_2(3;0)$ là các tiêu điểm của (H). Viết phương trình đường thẳng (d).

Lời giải:

Tạo độ của A,B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1\\2x-y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{(2x+m)^2}{8}=1 \quad (1)\\2x-y+m=0\end{cases}$$

Ta có $(1)\Leftrightarrow 4x^2-4mx-m^2-8=0$, phương trình này luôn có 2 nghiệm phân biệt do $\dfrac{-m^2-8}{4}<0$. Do vậy (H) luôn cắt (d) tại 2 điểm phân biệt.

$+BF_2=2AF_1\Leftrightarrow\left|a-\dfrac{c}{a}x_B\right|=2\left|a+\dfrac{c}{a}x_A\right|$ (2), do A,B thuộc 2 nhánh khác nhau của $(H)(x_A<x_B)$, nên $x_A<-a;x_B>a;\dfrac{c}{a}>1$. Và từ(2) suy ra $\dfrac{c}{a}x_B-a=2(-a-\dfrac{c}{a}x_A)\Leftrightarrow 6x_A+3x_B+1=0(3)$

Do x_A,x_B là nghiệm của (1), nên theo định lí Vi – ét ta có

$$\begin{cases}x_A+x_B=m\\x_Ax_B=-\dfrac{m^2+8}{4}\end{cases}\quad(4)$$

$+(3),(4)\Rightarrow m=\dfrac{-6\pm16\sqrt{2}}{21}$

Bài 11. Cho 2 elip $(E_1):\dfrac{x^2}{16}+y^2=1;(E_2):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(E_1),(E_2)$.

Lời giải:

Tọa độ các giao điểm là nghiệm của hệ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+y^2=1 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+16y^2=16(1) \\ 4x^2+9y^2=36(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{432}{55} \\ y^2=\dfrac{28}{55} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{92}{11}$$

Do vậy (E_1) cắt (E_2) tại 4 điểm phân biệt, thỏa mãn $x^2+y^2=\dfrac{92}{11}$. Vậy phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(E_1)\,\&\,(E_2)$ là

$(C): x^2+y^2=\dfrac{92}{11}$

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho parabol $(P): y^2=16x$ và điểm $A(1;4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B, C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\angle BAC=90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

+ Giả sử $B(\frac{1}{16}b^2;b), C(\frac{1}{16}c^2;c)\in(P), (b,c\neq 4, b\neq c)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{16}b^2-1;b-4), \overrightarrow{AC}=(\frac{1}{16}c^2-1;c-4)$

$+\angle BAC=90^0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (\frac{1}{16}b^2-1)(\frac{1}{16}c^2-1)+(b-4)(c-4)=0$

$\Leftrightarrow (b-4)(c-4)((b+4)(c+4)+16^2)=0 \Leftrightarrow (b+4)(c+4)=-256$

$\Leftrightarrow 4(b+c)+bc=-272 \Rightarrow bc=-272-4(b+c)(1)$

$\overrightarrow{BC}=(\frac{c^2-b^2}{16};c-b)=\frac{1}{16}(c-b)\vec{u}; \vec{u}=(b+c;16)$

Vậy phương trình đường thẳng BC là $16(x-\frac{1}{16}b^2)-(b+c)(y-b)=0$, hay $16x-(b+c)y+bc$, thay bc ở (1) vào ta được phương trình của BC là $BC: 16x-272+(b+c)(-y-4)=0$, $\forall b,c; M(17;-4)\in BC \Rightarrow dpcm$

Bài 13. Cho parabol $(P): y^2=4x$ và 2 điểm $A(0;-4), B(-6;4)$.
- Tìm trên (P) điểm C sao cho tam giác ABC vuông tại A.
- Tìm trên (P) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải:

+ Gọi $C(\frac{c^2}{4};c)\in(P)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BA ĐƯỜNG CÔNIC

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;8),\overrightarrow{AC}=(\frac{c^2}{4};c+4)$, tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -6.\frac{c^2}{4}+8(c+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=8\\ c=\frac{-8}{3}\end{array}\right.\Rightarrow C(16;8);C(\frac{16}{9};\frac{-8}{3})$$

b) Phương trình đường thẳng $AB:4x+3y+12=0$, diện tích tam giác ABC nhỏ nhất khi khoảng cách từ C đến AB nhỏ nhất

$$+d(C;AB)=\frac{\left|4.\frac{c^2}{4}+3c+12\right|}{5}=\frac{1}{5}\left|(c+\frac{3}{2})^2+\frac{39}{4}\right|\ge\frac{39}{20}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $c=\frac{-3}{2}\Rightarrow C(\frac{9}{16};\frac{-3}{2})$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,F_1;F_2$ lần lượt là các tiêu điểm trái và phải của (E). Tìm điểm M thuôc (E) sao cho $MF_1-MF_2=2$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng nằm trên 1 đường tròn.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ đề các vuông góc Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. Xác định tọa độ điểm B,C thuộc (E) sao cho tam giác ABC đều.

Bài 4. Cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $(d):2x+15y-10=0$. Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A,B. Xác định tọa độ điểm C thuộc (E) sao cho tam giác ABC cân.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Hai điểm A và B di động trên (E) sao cho $OA\perp OB$. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(1;1)$ và cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho

a) $MA=MB$

b) $AB=2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BA ĐƯỜNG CÔNIC

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. Điểm M và N di động trên (E) sao cho $OM \perp ON$. Xác định tọa độ điểm M và N, biết rằng điểm M có tổng 2 tọa độ nhỏ nhất.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (E), biết rằng M nhìn 2 tiêu điểm dưới 1 góc

a) 90^0.

b) 120^0.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ đề các vuông góc Oxy cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm). M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E), N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(d): x - y\sqrt{2} + 2 = 0$.

a) Chứng minh rằng (d) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Bài 11. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $M(\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ nằm trong (E). Đường thẳng d đi qua M và cắt (E) tại M_1, M_2 và thỏa mãn điều kiện $MM_1 = 2MM_2$. Viết phương trình của đường thẳng d.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox, N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ các điểm M, N sao cho MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 13. Cho elip $(E): \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$; $ABCD$ là hình vuông có tất cả các cạnh đều tiếp xúc với (E). Viết phương trình các cạnh của hình vuông đó.

Bài 14. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; F_1, F_2 là các tiêu điểm. Điểm M di động trên (E). Phân giác của góc $\widehat{F_1MF_2}$ cắt F_1F_2 tại N, H là hình chiếu của N trên MF_1. Chứng minh rằng độ dài MH không đổi.

Bài 15. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; F_1, F_2 là các tiêu điểm. Điểm M di động trên (E). Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác F_1MF_2 chạy trên một elip. Viết phương trình elip đó.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

Bài 16. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$, có 2 đỉnh trên trục hoành là $A_1(-2;0), A_2(2;0)$. Chứng minh rằng trực tâm tam giác MA_1A_2 chạy trên một elip. Viết phương trình chính tắc của elip đó.

Bài 17. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$,hai điểm A,B chuyển động trên (E)sao cho góc $\widehat{AOB}=90^0$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Chứng minh rằng H nằm trên một đường tròn cố định. Viết phương trình đường tròn đó.

Bài 18. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và các đường thẳng $(d): x-\sqrt{m}y=0; (d'): \sqrt{m}x+y=0$ (m là tham số). Gọi M, N là giao điểm của (E)và (d). P,Q là giao điểm của (E)và (d'). Viết phương trình đường thẳng $(d),(d')$, biết rằng tứ giác $MPNQ$ có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ có hai tiêu điểm F_1,F_2 (F_1,F_2 lần lượt là tiêu điểm trái, tiêu điểm phải của (E)). Tìm điểm M thuộc (E)sao cho $MF_1^{\,2}+7MF_2^{\,2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

D. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HYPEBOL VÀ PARABOL

Bài 1. Cho hypebol $(H): xy=1$ và điểm $A(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2})$. Tìm điểm M thuộc (H) sao cho MA nhỏ nhất.

Lời giải:

+ Giả sử $M(x_0;y_0)\in(H)\Rightarrow y_0=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow M(x_0;\dfrac{1}{x_0})$.

+ Ta có $MA^2=(x_0-\dfrac{5}{2})^2+(\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{5}{2})^2=x_0^{\,2}+\dfrac{1}{x_0^{\,2}}-5(x_0+\dfrac{1}{x_0})+\dfrac{25}{2}$

$=(x_0+\dfrac{1}{x_0})^2-5(x_0+\dfrac{1}{x_0})+\dfrac{21}{2}=(x_0+\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{17}{4}\geq\dfrac{17}{4}$

+ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_0+\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x_0=2\vee x_0=\dfrac{1}{2}$

Vậy $M(2;\dfrac{1}{2})$ hoặc $M(\dfrac{1}{2};2)$

Bài 2. Cho parabol $(P): y^2=4x$ và đường thẳng $(d): 4x+3y+12=0$. Tìm trên (P)điểm M sao cho khoảng cách từ M đến (P) là nhỏ nhất. Tính khoảng cách đó.

Bài 3. Cho parabol $(P): y^2=4x$ và đường thẳng $(d): x+y+m=0$ cắt (P)tại 2 điểm phân biệt A và B. Viết Phương trình đường thẳng (d), biết rằng $OA\perp OB$.

Bài 4. Cho parabol $(P): y^2=4x$ và đường thẳng $(d): 4x+3y+12=0$. Tìm trên (P)điểm M và N, biết rằng khoảng cách từ M đến (P) là nhỏ nhất và $OM\perp ON$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Xác định tọa độ 2 điểm $M, N \in (P)$ sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

Bài 6. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1; (H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(E), (H)$.

Bài 7. Cho hypebol $(H): \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (H) tại 2 điểm A,B sao cho M là trung điểm của AB.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y^2 = 2x$ và đường thẳng $(d_m): 2my - 2x + 1 = 0$. Chứng minh rằng với mọi m (d_m) luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB khi m thay đổi.

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba đỉnh thuộc hypebol $(H): xy = 1$. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ABC cũng thuộc (H).

Bài 10. Cho hypebol $(H): xy = 1$ và đường thẳng $(d): 5x - 3y - 1 = 0$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (H) sao cho khoảng cách từ M đến (d) nhỏ nhất.

Bài 11. Cho hypebol $(H): xy = 1$. Tìm các điểm A,B thuộc 2 nhánh của (H) sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

Bài 12. Cho đường tròn $(C): (x+2)^2 + y^2 = 36$ và điểm $A(2;0)$. Tìm quỹ tích tâm đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (C).

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có $AB = 4$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 12:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CÁC CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Tích vô hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{v_1}=(x_1,y_1,z_1)$ và véc tơ $\overrightarrow{v_2}=(x_2,y_2,z_2)$ là một số $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Tích có hướng của hai véc tơ là một véc tơ được xác định bởi

$$\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right]=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

Có $\overrightarrow{v_1}\perp\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right];\overrightarrow{v_2}\perp\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right];\left|\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right]\right|=\left|\overrightarrow{v_1}\right|.\left|\overrightarrow{v_2}\right|.\sin\alpha$.

Diện tích của tam giác tạo bởi ba điểm A,B,C không thẳng hang

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Tích hỗn tạp của ba véc tơ $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ là một số và được ký hiệu là $D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

Ba véc tơ đồng phẳng khi và chỉ khi $D\left(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right)=0$.

Thể tích tứ diện tạo bởi 4 đỉnh A,B,C,D được tính bởi công thức

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$$

Thể tích của hình hộp dựng trên ba véc tơ $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$ được xác định bởi công thức

$$V=\left|D(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})\right|=\left|D(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}).\overrightarrow{v_3}\right|.$$

Cho đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a,b,c)$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A,B,C)$, khi đó góc φ tạo bởi $(d),(P)$ được xác định bởi

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|Aa+Bb+Cc\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Cho hai đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a,b,c)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=(a',b',c')$, khi đó góc φ giữa $(d_1),(d_2)$ được xác định bởi

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) đi qua điểm M_0 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ được xác định bởi

$d\left(M;(d)\right)=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{u}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ (lưu ý là tử thức là độ dài véc tơ không phải trị tuyệt đối).

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (d_1) đi qua điểm M, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng (d_2) đi qua điểm N, có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$ được xác định bởi

$d\left((d_1),(d_2)\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left\|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right\|}$ (lưu ý dưới mẫu là độ dài véc tơ, tử thức là giá trị tuyệt đối).

Tất cả các công thức trên đều được áp dụng tính trực tiếp trong bài thi.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG, GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Cho đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}$ và mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ và cặp véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}$.

+ Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) không có điểm chung ta nói $(d)//(P)$.

Vậy $(d)//(P)$ xảy ra khi thỏa mãn một trong các điều kiện:

(i). Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) vô nghiệm.

(ii). $\vec{a}\perp\vec{n}$ và tồn tại một điểm $A\in(d), A\notin(P)$.

(iii). $\vec{a}$ là một véc tơ chỉ phương của (P) và tồn tại một điểm $A\in(d)$ nhưng không thuộc (P).

+ Đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có hai điểm chung phân biệt ta nói $(d)\in(P)$, xảy ra khi thỏa mãn một trong các điều kiện:

(i). Hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) vô số nghiệm.

(ii). Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm phân biệt $A,B\in(d)$.

(iii). Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A\in(d)$ và nhận $\vec{a}$ làm một véc tơ chỉ phương.

+ Đường thẳng (d) có một điểm chung duy nhất với (P) ta nói (d) cắt (P), xảy ra khi hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có nghiệm duy nhất.

Đường thẳng $(d)\perp(P)\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{n}$.

Cho hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ phân biệt theo thứ tự có các véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}$. Lấy hai điểm $A\in(d_1), B\in(d_2); A\neq B$.

Khi đó xét tích hỗn tạp của 3 véc tơ $D(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{AB})$

(i). Nếu $D(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{AB})=0$ thì (d_1) và (d_2) đồng phẳng.

(ii). Nếu $D(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{AB})\neq0$ thì (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Giữa hai đường thẳng song song $(d_1),(d_2)$ trong không gian có các dạng bài toán sau:
(i). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng song song $(d_1),(d_2)$
(ii). Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều $(d_1),(d_2)$ và thuộc mặt phẳng chứa $(d_1),(d_2)$.
(iii). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.
+ Giữa hai đường thẳng cắt nhau $(d_1),(d_2)$ trong không gian có các dạng bài toán sau:
(i). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $(d_1),(d_2)$.
(ii). Viết phương trình đường phân giác tạo bởi $(d_1),(d_2)$.
+ Giữa hai đường thẳng chéo nhau $(d_1),(d_2)$ trong không gian có các dạng bài toán sau:
(i). Viết phương trình đường vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$.
(ii). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.
(iii). Viết phương trình của mặt phẳng cách đều $(d_1),(d_2)$.
(iv). Viết phương trình hai mặt phẳng $(P),(Q)$ song song với nhau và lần lượt chứa $(d_1),(d_2)$.
(v). Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều $(d_1),(d_2)$.
(vi). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M cho trước và cắt cả $(d_1),(d_2)$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình lần lượt là

$(P): 4x-3y+7z-7=0$ và $(d): \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d)\in(P)$.

Lời giải:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

$$\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \\ 4x-3y+7z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 9x-5y-7=0 \\ 18x-10y-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 9x-5y-7=0 \end{cases}$$ hệ này vô số nghiệm, do đó $(d)\in(P)$ đpcm.

Cách 2: Lấy hai điểm phân biệt $A\left(\frac{7}{9},0,\frac{5}{9}\right);B\left(0,\frac{-7}{5},\frac{2}{5}\right)\in(d)$ thay tọa độ của A,B vào phương trình của (P) ta được:

$$\begin{cases} 4.\frac{7}{9}-3.0+7.\frac{5}{9}-7=0 \\ 4.0-3.\left(-\frac{7}{5}\right)+7.\frac{2}{5}-7=0 \end{cases}$$ thỏa mãn, dó đó $(d)\in(P)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2. Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d), biết:
$(P): m^2x+2y+z+1-3m=0$,
$(d): \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=3-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Lời giải:

Thay x,y,z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được phương trình:

$(m^2-4)t=3m-6(*)$

+ Nếu $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$

- Với $m=2 \Rightarrow (*)$ vô số nghiệm, khi đó $(d)\in(P)$.
- Với $m=-2 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm, khi đó $(d)//(P)$.

+ Nếu $m\neq\pm 2 \Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất, khi đó $(d)\cap(P)=A\left(\frac{3}{m+2},\frac{m-1}{m+2},\frac{3m}{m+2}\right)$.

Bài 3. Cho đường thẳng $(d_m): \begin{cases} x+mz-m=0 \\ (1-m)x-my=0 \end{cases}$, m là tham số

Chứng minh rằng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định và nằm trong một phẳng cố định.

Lời giải:

Giả sử điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó

$$\begin{cases} x_0+mz_0-m=0 \\ (1-m)x_0-my_0=0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+(z_0-1)m=0 \\ x_0-m(x_0+y_0)=0 \end{cases}, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \\ z_0=1 \end{cases}$$

Vậy (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M(0,0,1)$.

Từ phương trình đường thẳng (d_m), ta suy ra

$mx+my+mz-m=0 \Leftrightarrow x+y+z-1=0 \Rightarrow (P): x+y+z-1=0$ là mặt phẳng mà (d_m) luôn thuộc (P).

Bài 4. Cho mặt phẳng $(P): 2x+my+z-5=0$, $(d): \begin{cases} 3x+y+2z-4=0 \\ x-y+2z-7=0 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để:

a. $(d)//(P)$.

b. $(d)\perp(P)$.

Lời giải:

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=(4,-4,-4)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2,m,1)$.

a. $(d)//(P) \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 4.2-4.m-4.1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

b. $(d)\perp(P)\Leftrightarrow \vec{a}//\vec{n}\Leftrightarrow \dfrac{2}{4}=\dfrac{m}{-4}=\dfrac{1}{-4}$ vô lý. Vậy không tồn tại m để $(d)\perp(P)$.

Bài 5. Cho đường thẳng $(d):\begin{cases}3x-y+4z-27=0\\6x+3y-z+7=0\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x+5y+z+17=0$.

Xác định phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của (d) và (P) và vuông góc với (d), nằm trong mặt phẳng (P).

Lời giải:

+ Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P)

$$\begin{cases}2x-y+4z-27=0\\6x+3y-z+7=0\\2x+5y+z+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=4\end{cases}\Rightarrow(d)\cap(P)=A(2,-5,4).$$

+ Gọi $\vec{a}$ là véc tơ chỉ phương của (d), ta được $\vec{a}=(-11,27,15)$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (d), khi đó (Q) nhận $\vec{a}$ làm véc tơ pháp tuyến, nên $(Q):-11(x-2)+27(y+5)+15(z-4)=0\Leftrightarrow(Q):-11x+27y+15z+97=0$.

Khi đó, đường thẳng cần tìm chính là giao của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Vậy đường thẳng cần tìm là $(\Delta):\begin{cases}2x+5y+z+17=0\\-11z+27y+15z+97=0\end{cases}$

Bài 6. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=3t-3\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=u+2\\y=-3+2u\\z=3u+1\end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau và xác định phương trình mặt phẳng (P) song song và các đều $(d_1),(d_2)$.

Lời giải:

+ (d_1) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}=(2,1,3)$ và (d_2) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=(1,2,3)$.

Lấy điểm $A(1,2,-3)\in(d_1);B(2,-3,1)\in(d_2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(1,-5,4)$

Ta có $D\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & -5 & 4\end{vmatrix}=24\neq0$. Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

+ Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},-1\right)$ khi đó mặt phẳng cần tìm đi qua I và có cặp véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\Rightarrow(P):\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}+2t_1+t_2\\y=-\dfrac{1}{2}+t_1+2t_2\\z=-1+3t_1+3t_2\end{cases}(t_1,t_2\in\mathbb{R})$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Viết phương trình đường thẳng (d) song song, cách đều hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$, $(d_2): \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+7}{4}$ và thuộc mặt phẳng chứa $(d_1),(d_2)$.

Lời giải :

+ $(d_1)//(d_2)$, (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{a} = (3,-1,4)$

Lấy điểm $A(-2,5,9) \in (d_1); B(0;-3;-7) \in (d_2)$ suy ra trung điểm của AB là $I(-1,1,1)$. Khi đó đường thẳng cần tìm đi qua I và có véc tơ chỉ phương là $\vec{a}$

Vậy $(d): \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1-t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 2u-2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định tọa độ giao điểm của chúng. Viết phương trình đường phân giác tạo bởi $(d_1),(d_2)$.

Lời giải :

+ Xét hệ phương trình tạo bởi $(d_1),(d_2)$, ta có

$$\begin{cases} 0 = 2u-2 \\ 1 = 1 \\ 1-t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = I(0,1,0)$$

+ Lấy điểm $A(0,1,2) \in (d_1), B(2u-2,1,0) \in (d_2)$ sao cho

$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 4 = (2u-2)^2 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 2$

+ Với $u = 0 \Rightarrow B_1(-2,1,0)$, ta có tọa độ trung điểm của AB_1 là $I_1(-1,1,1) \Rightarrow \overrightarrow{II_1} = (-1,0,1)$, khi đó đường phân giác cần tìm là đi qua I và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{II_1}$:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

+ Với $u = 2 \Rightarrow B_2(2,1,0)$ tương tự ta có đường phân giác $(\Delta_2): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Bài 9. Cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và $(d_2): \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$

Chứng minh rằng (d_1) song song với (d_2), viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $(d_1),(d_2)$ và tính khoảng cách giữa $(d_1),(d_2)$.

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(4,-6,-8)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=(-6,9,12)$, suy ra $\vec{u}//\vec{v}$. Lấy điểm $A(2,0,-1)\in(d_1)$ thay vào phương trình của $(d_2)\Rightarrow \dfrac{2-7}{-6}=\dfrac{0-2}{9}=\dfrac{-1}{12}$ vô lý. Từ đó suy ra $(d_1)//(d_2)$ Ta có đpcm.

+ Lấy điểm $B(7,2,0)\in(d_2)$. Mặt phẳng (P) chứa $(d_1),(d_2)$ nên (P) đi qua điểm A và có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ nên

$$(P):\begin{cases}x=2-2u+5v\\ y=3u+2v\\ z=-1+4u+v\end{cases}$$

+ Do $(d_1)//(d_2)$ nên $d((d_1),(d_2))=d(A,(d_2))=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\sqrt{\dfrac{854}{29}}$

Bài 10. Cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $(d_2):\begin{cases}x=-1+t\\ y=-t\\ z=-2+3t\end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau và xác định tọa độ giao điểm I của chúng. Viết phương trình mặt phẳng chứa $(d_1),(d_2)$.

Lời giải :

+ Thay x,y,z ở phương trình của (d_2) vào phương trình của (d_1) ta được

$\dfrac{-1+t-1}{-2}=\dfrac{-t+2}{1}=\dfrac{-2+3t-4}{3}\Leftrightarrow t=2$, thay vào phương trình của $(d_2)\Rightarrow I(1,-2,4)$

Vậy $(d_1)\cap(d_2)=I(1,-2,4)$. Ta có đpcm.

+ Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2,1,3)$ và (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=(1,-1,3)$

Khi đó mặt phẳng (P) chứa $(d_1),(d_2)$ đi qua điểm I và có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix}1&3\\-1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-2\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(6,9,1)$$

Vậy $(P):6(x-1)+9(y+2)+(z-4)=0\Leftrightarrow(P):6x+9y+z+8=0$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x+y+z-3=0\\ y+z-1=0\end{cases}$ và

$(d_2):\begin{cases}x-2y-2z+9=0\\ y-z+1=0\end{cases}$

Viết phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$.

Lời giải :

Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\right)=(0,-1,1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-2&-2\\1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\-1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}\right)=(4,1,1)$

Gọi (d) là đương vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$ khi đó (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-1\\4&1\end{vmatrix}\right)=(-2,4,4)$, chọn $\vec{a}=(-1,2,2)$

+ Gọi (P) là mặt phẳng chứa $(d),(d_1)$, khi đó (P) có véc tơ pháp tuyến

$\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{a}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-1\\-1&2\end{vmatrix}\right)=(-4,-1,-1)$, lấy điểm $A(2,1,0)\in(d_1)$

Khi đó $(P):-4(x-2)-(y-1)-z=0\Leftrightarrow(P):-4x-y-z+9=0$

+ Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $(d),(d_2)$, khi đó (Q) có véc tơ pháp tuyến

$\vec{n'}=\left[\vec{v},\vec{a}\right]=\left(\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&4\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\-1&2\end{vmatrix}\right)=(0,-9,9)$, lấy điểm $B(-3,2,1)\in(d_2)$

Khi đó $(Q):-(y-2)+(z-1)=0\Leftrightarrow(Q):-y+z+1=0$

Và (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$

Vậy phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$ là

$$(d):\begin{cases}-4x-y-z+9=0\\-y+z+1=0\end{cases}$$

Bài 12. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=3t-3\end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases}x=u+2\\y=-3+2u\\z=3u+1\end{cases}$

Viết phương trình đường vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$.

Lời giải :

Đường thẳng (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2,1,3)$ và đường thẳng (d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=(1,2,3)$.

Lấy điểm $A(2t+1,t+2,3t-3)\in(d_1);B(u+2,-3+2u,3u+1)\in(d_2)$ suy ra

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(u-2t+1,2u-t-5,3u-3t+4)$, và AB là đoạn vuông góc chung của

$$(d_1),(d_2)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\\overrightarrow{AB}.\vec{v}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(u-2t+1)+2u-t-5+3(3u-3t+4)=0\\u-2t+1+2(2u-t-5)+3(3u-3t+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{25}{9}\\t=\dfrac{29}{9}\end{cases}$$

Từ đó suy ra $A\left(\frac{67}{9},\frac{47}{9},\frac{20}{3}\right);B\left(\frac{43}{9},\frac{23}{9},\frac{84}{9}\right);\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-24}{9},\frac{-24}{9},\frac{24}{9}\right)=\frac{24}{9}(-1,-1,1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$ đi qua A và có véc tơ chỉ phương $(-1,-1,1)$

Vậy $AB:\begin{cases} x=\dfrac{67}{9}-t \\ y=\dfrac{47}{9}-t \\ z=\dfrac{20}{3}+t \end{cases}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho đường thẳng $(d_m):\begin{cases} x+4mz-3m=0 \\ (1-m)x-my=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định và luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$

Xác định phương trình đường thẳng đi qua giao điểm A của (d) và (P) và vuông góc với (d), nằm trong mặt phẳng (P).

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):2x-y+2=0$ và đường thẳng

$(d_m):\begin{cases} (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$

Xác định m để $(d_m)//(P)$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{-1}$

Và $(d_2):\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-t \\ z=1-t \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1)//(d_2)$. Viết phương trình đường thẳng song song, cách đều và nằm trong mặt phẳng chứa $(d_1),(d_2)$.

Bài 5. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6+4t \end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases} 4x+y-19=0 \\ x-z+15=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) cắt (d_2). Viết phương trình đường phân giác tạo bởi góc nhọn giữa $(d_1),(d_2)$.

Bài 6. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases} x+8z+23=0 \\ y-4z+10=0 \end{cases}$ và $(d_2):\begin{cases} x-2z-3=0 \\ y+2z+2=0 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và các đều $(d_1),(d_2)$.

Bài 7. Cho hai đường thẳng $(d_1): \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{3}$ và $(d_2): \begin{cases} 4x-y-2=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) song song với (d_2). Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) chứa $(d_1),(d_2)$. Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong (P) và các đều $(d_1),(d_2)$. Tính khoảng cách giữa $(d_1),(d_2)$.

Bài 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) cắt nhau, xác định tọa độ giao điểm của chúng. Viết phương trình mặt phẳng chứa $(d_1),(d_2)$.

Bài 9. Cho điểm $A(1,-1,1)$ và hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} 3x-y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x=t \\ y=-1-2t \\ z=-3t \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1),(d_2),A$ cùngg thuộc một mặt phẳng.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1): x=-y+1=z-1$ và $(d_2): -x+1=y-1=z$.

Tìm tọa độ điểm $A\in(d_1)$ và điểm $B\in(d_2)$ sao cho đường thẳng AB vuông góc với cả $(d_1),(d_2)$.

Bài 11. Cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-5t \\ z=2+t \end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1),(d_2)$ chéo nhau. Tính khoảng cách giữa $(d_1),(d_2)$. Viết phương trình đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1,1,1)$ và cắt cả $(d_1),(d_2)$.

ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Xét các dạng bài toán sau

Dạng 1: Đường thẳng cắt cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và thỏa mãn điều kiện cho trước.

(i). Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm A và cắt cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.

Phương pháp:

Cách 1:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa (d_1).

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa (d_2).

+ Nếu $(P) \equiv (Q)$, bài toán có vô số nghiệm.

+ Nếu $(P) // (Q)$, bài toán vô nghiệm.

+ Nếu $(P) \cap (Q) = (d)$, đây chính là đường thẳng cần tìm.

Cách 2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa (d_1).

Xác định giao điểm B của (P) và (d_2)

+ Nếu vô nghiệm thì bài toán vô nghiệm.
+ Nếu có vô số nghiệm thì bài toán có vô số nghiệm.
+ Nếu có nghiệm duy nhất thì phương trình đường thẳng (d) cần tìm chính là AB, đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$.

Cách 3:

Áp dụng khi cả hai đường thẳng cho ở dạng tham số

Giả sử đường thẳng cần tìm cắt (d_1) tại B và cắt (d_2) tại C, với tọa độ của B, C cho ở dạng tham số.

Xét điều kiện A, B, C thẳng hàng.

(ii). Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và cắt cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.

Phương pháp:

(iii). Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.

Phương pháp:

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Dạng 2: Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với cả hai đường thẳng cho trước.

(i). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$.

Cách 1:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc (d_1).

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc (d_2).

Khi đó (d) chính là giao tuyến của $(P),(Q)$.

Cách 2:

Xác định các véc tơ chỉ phương $\vec{u},\vec{v}$ của $(d_1),(d_2)$, khi đó véc tơ chỉ phương $\vec{a}$ của (d) thỏa mãn $\vec{a} \perp \vec{u}, \vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \left[\vec{u},\vec{v}\right]$

Đường thẳng (d) sẽ đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương $\vec{a}$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dạng 3: Đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng và cắt một đường thẳng.

(i). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng (d_1) và cắt đường thẳng (d_2).

Phương pháp:

Cách 1:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với (d_1).

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và chứa (d_2).

Khi đó đường thẳng (d) cần tìm là giao của $(P),(Q)$.

Cách 2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với (d_1).

Xác định giao điểm B của (P) và (d_2), khi đó đường thẳng (d) cần tìm chính là AB, đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Dạng 4: Hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng

(i). Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của một điểm A lên mặt phẳng (P).

Phương pháp:

Viết phương trình đường tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P)

Tọa độ hình chiếu H chính là giao điểm của (d) và (P).

(ii). Tìm điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P).

Phương pháp:

Tìm tọa độ hình chiếu H của A trên (P).

Tìm điểm A_1 đối xứng với A qua H.

(iii). Xác định phương trình đường thẳng (Δ) đối xứng với đường thẳng (d) qua mặt phẳng (P).

Phương pháp:

Lấy hai điểm phân biệt $A,B\in(d)$.

Tìm tọa độ hai điểm A_1,B_1 lần lượt đối xứng với A,B qua mặt phẳng (P).

Khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là đường thẳng đi qua hai điểm A_1,B_1.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho điểm $A(2,3,-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z-5=0$. Xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Lời giải:

Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) sẽ nhận véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2,-1,-1)$ của (P) làm véc tơ chỉ phương, nên

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$(d):\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-t \\ z=-1-t \end{cases}$

Thay tọa độ x,y,z từ phương trình của (d) vào phương trình của (P) ta được

$2(2+2t)-(3-t)-(-1-t)-5=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow (d)\cap(P)=H\left(3,\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Tọa độ điểm A_1 sẽ đối xứng với A qua H, suy ra $A_1(4,2,-2)$.

Bài 2. Cho mặt phẳng $(P): 3x+6y-z-2=0$ và đường thẳng $(d):\begin{cases} x+y-7z-14=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$

Xác định tọa độ giao điểm A của $(d),(P)$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đối xứng với (d) qua (P).

Lời giải:

Xét hệ tạo bởi $(d),(P)$, ta có:

$\begin{cases} x+y-7z-14=0 \\ x-y-z-2=0 \\ 3x+6y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow (d)\cap(P)=A(0,0,-2)$

Lấy điểm $B(3,6,0)\in(d)$, ta tìm tọa độ điểm B_1 đối xứng với B qua (P), khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là AB_1.

Tìm được $B_1\left(\frac{10}{23},-\frac{210}{23},\frac{58}{23}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB_1}=\left(\frac{10}{23},-\frac{210}{23},\frac{104}{23}\right)=\frac{2}{23}(5,-105,52)$

Vậy $(\Delta):\begin{cases} x=5t \\ y=-105t \\ z=-2+52t \end{cases}$

Bài 3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua $A(-2,4,3)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x-3y+6z+19=0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Hạ $AH\perp(P)$, Xác định tọa độ điểm H.

Lời giải :

Mặt phẳng (Q) sẽ nhận véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2,-3,6)$ của (P) làm véc tơ pháp tuyến, nên $(Q): 2(x+2)-3(y-4)+6(z-3)=0 \Leftrightarrow (Q); 2x-3y+6z-2=0$.

Đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}$ làm véc tơ chỉ phương nên,

$(d):\begin{cases} x=-2+2t \\ y=4-3t \\ z=3+6t \end{cases}$

Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ tạo bởi $(d),(P)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x=-2+2t \\ y=4-3t \\ z=3+6t \\ 2x-3y+6z+19=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-20}{7} \\ y=\dfrac{37}{7} \\ z=\dfrac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{-20}{7},\frac{37}{7},\frac{3}{7}\right)$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho bốn điểm $A(4,1,4);B(3,3,1);C(1,5,5);D(1,1,1)$.

Xác định tọa độ hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC), tính thể tích tứ diện $ABCD$. Viết phương trình đường vuông góc chung của AC,BD.

Bài 2. Cho bốn điểm $A(a,0,0);B(0,b,0);C(0,0,c),a,b,c>0$. Dựng hình hộp chữ nhật nhận O,A,B,C làm bốn đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với O của hình hộp đó.

(i). Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

(ii). Tính tọa độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD). Tìm điều kiện của a,b,c để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy).

Bài 3. Cho điểm $A(2,3,5)$ và mặt phẳng $(P):2x+3y+z-17=0$.

(i). Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với (P).

(ii). Chứng minh rằng (d) cắt trục Oz, tìm giao điểm M của chúng.

(iii). Xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P).

Dạng 5: Hình chiếu vuông góc của đường thẳng lên mặt phẳng.

(i). Xác định phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P).

Phương pháp:

Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Khi đó đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho đường thẳng $(d):\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ 3x-2y-z+15=0 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P):-2x-3y+z-4=0$.

Viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d) trên mặt phẳng (P).

Lời giải:

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2,-3,1)$

Đường thẳng (d) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right)=(3,4,1)$

Lấy điểm $A(-25,-30,0)\in(d)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), khi đó (Q) đi qua A và có véc tơ pháp tuyến

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\overrightarrow{n'} = \left[\vec{n},\vec{u}\right] = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-7,5,1)$

Vậy $(Q): -7(x+25)+5(y+30)+z=0 \Leftrightarrow (Q): -7x+5y+z-25=0$

Khi đó đường thẳng (Δ) cần tìm chính là giao tuyến của $(P),(Q)$

$(\Delta): \begin{cases} -7x+5y+z-25=0 \\ -2x-3y+z-4=0 \end{cases}$

Bài 2. Cho đường thẳng $(d_m): \begin{cases} x-my+z-m=0 \\ mx+y-mz-1=0 \end{cases}$

(i). Viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d_m) trên mặt phẳng (xOy)

(ii). Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (Δ) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố địnhnằm trong mặt phẳng (xOy).

Lời giải:

(i). Khử z từ hai phương trình của (d_m) ta được $2mx-(m^2-1)y-m^2-1$

Khi đó hình chiếu vuông góc của (d_m) trên mặt phẳng (xOy) là

$(\Delta): \begin{cases} 2mx-(m^2-1)y-m^2-1=0 \\ z=0 \end{cases}$

(ii). Trong mặt phẳng (xOy), Ta có $d(O,(\Delta)) = \dfrac{\left|-m^2-1\right|}{\sqrt{4m^2+(m^2-1)^2}} = 1$

Từ đó suy ra đường thẳng (Δ) luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính $R=1$ nằm trong mặt phẳng (xOy) (đpcm).

Bài 3. Cho đường thẳng $(d): \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-3=0$.

(i). Tìm tọa độ giao điểm A của $(d),(P)$. Tính góc giữa $(d),(P)$.

(ii). Viết phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d) lên mặt phẳng (P). Lấy điểm B thuộc đường thẳng (d) sao cho $AB=a>0$. Xét tỷ số $\dfrac{AB+AM}{BM}$ với M di động trên mặt phẳng (P). Chứng minh rằng tồn tại một vị trí của M để tỷ số đó đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải:

(i). Tọa độ giao điểm $A=(d)\cap(P)$ là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-2y+z-3=0 \\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \Rightarrow A(-2,-1,5) \\ z=5 \end{cases}$$

Góc giữa $(d),(P)$ được xác định bởi $\sin\alpha = \dfrac{\left|1.2+2.(-2)+-2.1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{4}{9}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(ii). Xác định được $(\Delta):\begin{cases}2x+5y+6z-21=0\\2x-2y+z-3=0\end{cases}$

Lấy điểm $B\in(d); AB=a>0$ và điểm $M\in(P)$.

Xét tam giác ABM, ta có $\dfrac{AB+AM}{BM}=\dfrac{2R\sin M+2R\sin B}{2R\sin A}=\dfrac{\sin M+\sin B}{\sin A}$

$$=\frac{2\sin\frac{M+B}{2}\cos\frac{M-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{M-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\cos\dfrac{M-B}{2}=1\\\sin\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}\Leftrightarrow A=\alpha, M=B=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{AB+AM}{BM}$ bằng $\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x+z-3=0\\2y-3z=0\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$

Lập phương trình hình chiếu vuông góc (Δ) của (d) trên (P).

Bài 2. Cho ba mặt phẳng $(P): 3x-y+z-2=0; (Q): x+4y-5=0; (R): 2x-z+7=0$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) trên mặt phẳng (R), trong đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$.

Bài 3. Cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ và hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}2x-z+1=0\\x+2y=0\end{cases}$ và

$(d_2):\begin{cases}3y-z+12=0\\x-z+2=0\end{cases}$

(i). Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và vuông góc với mặt phẳng (P).

(ii). Viết phương trình hình chiếu vuông góc $(\Delta_1),(\Delta_2)$ lần lượt của $(d_1),(d_2)$ trên mặt phẳng (P). Tìm tọa độ giao điểm I của $(\Delta_1),(\Delta_2)$.

Bài 4. Cho hai đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-6}{3}$ và $(d_2):\begin{cases}2x-y-11=0\\x-y-z+5=0\end{cases}$

Chứng minh rằng $(d_1),(d_2)$ đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) là hình chiếu song song của (d_2) theo phương của (d_1) trên mặt phẳng $(P): 3x-2y-2z-1=0$.

Bài 5. Cho tứ diện có 4 đỉnh $O(0,0,0); A(6,3,0); B(-2,9,1); S(0,5,8)$.

(i). Chứng minh rằng SB vuông góc với OA.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $P(x) = (1+x)^4\left(1+(1+x)+(1+x)^2+...+(1+x)^{11}\right)$

$= (1+x)^4\dfrac{1-(1+x)^{12}}{1-(1+x)} = \dfrac{1}{x}(1+x)^{16} - \dfrac{1}{x}(1+x)^4$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là $C_{16}^5 = 4368$.

Bài 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x trong khai triển của tổng sau

$S(x) = (1+x)+2(1+x)^2+...+(n-1)(1+x)^{n-1}+n(1+x)^n$

Lời giải:

Ta có $S(x) = (1+x)F(x); F(x) = 1+2(1+x)+3(1+x)^2+...+n(1+x)^{n-1}$

Để ý $F(x)$ là đạo hàm của tổng

$G(x) = 1+x+(1+x)^2+(1+x)^3+...+(1+x)^n = (1+x)\dfrac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)} = \dfrac{1}{x}(1+x)^{n+1} - \dfrac{1}{x}(1+x)$

Bài 17. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ $(x>0)$

Lời giải:

\+ Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$T_{k+1} = C_7^k(\sqrt[3]{x})^{7-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$

Chọn $\dfrac{7}{3}-\dfrac{7}{12}k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $T_5 = C_7^4 = 35$.

Bài 18. Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{\frac{-28}{15}}\right)^n$ $(x \neq 0)$. Hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

Lời giải:

+Từ giả thiết ta có

$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow n = 12 (n \in \mathbb{N}^*)$

Vậy số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là

$T_{k+1} = C_{12}^k(x\sqrt[3]{x})^{12-k}\left(x^{\frac{-28}{15}}\right)^k = C_{12}^k x^{16-\frac{48}{15}k}$

Chọn $16-\dfrac{48}{15}k = 0 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy số hạng không phụ thuộc x là $T_6 = C_{12}^5 = 792$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 19. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho trong khai triển $(1+x)^n$ có 2 hệ số liên tiếp có tỷ số là $\frac{7}{5}$.

Lời giải:

Ta có $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \Rightarrow$ Hệ số của 2 số hạng liên tiếp là C_n^k và C_n^{k+1}.

Theo giả thiết ta có:

$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow n = 3k+2+\frac{k+1}{7}(0 \le k \le n)$. Do cả 2 số $n,k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{k+1}{7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n_{\min} \Leftrightarrow \frac{k+1}{7} \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow n = 21$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 21.

Bài 20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sum_{k=0}^{n} \left(k-nx\right)^2 C_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k}$

BÀI TOÁN VỚI SỐ HẠNG LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho khai triển nhị thức

$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Lời giải:

+ Ta có $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}x\right)^k = \frac{2^k}{3^{10}} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k \Rightarrow a_k = \frac{2^k}{3^{10}} C_{10}^k$

Giả sử $a_k = max(a_0; a_1; \ldots a_{10})$, từ đó ta có

$+\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k 2^k \ge C_{10}^{k+1} 2^{k+1} \\ C_{10}^k 2^k \ge C_{10}^{k-1} 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \le k \le \frac{22}{3} \Rightarrow k = 7$

Vậy số hạng lớn nhất là $a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$.

Bài 2. Khai triển đa thức

$P(x) = \left(1+2x\right)^{12} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{12}x^{12}$. Tìm $max(a_0; a_1; \ldots; a_{12})$.

Lời giải:

+ Ta có $\left(1+2x\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_n^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_n^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = C_n^k 2^k$.

Giả sử $a_k = max(a_0; a_1; \ldots; a_{12})$. Từ đó ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$+\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \le k \le \dfrac{25}{3} \Leftrightarrow k = 8$

Vậy số hạng lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^{18}$.

Bài 3. Giả sử $P(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ thỏa nãn hệ thức

$a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$.

Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0; a_1; a_2; ...; a_n\}$.

Lời giải:

Ta có $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, thay vào 2 vế với $x = \dfrac{1}{2}$ ta được

$2^n = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.

Vậy $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = C_{12}^k 2^k$

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó ta có

$\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow k = 8$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$

Bài 4. Xét khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tìm n để $\max\{a_0; a_1; a_2; ...; a_n\} = a_{10}$

Lời giải:

Ta có $(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} x^k \Rightarrow a_k = C_n^k 2^{n-k}$

$\max\{a_0; a_1; a_2; ...; a_n\} = a_{10}$, khi và chỉ khi

$\begin{cases} a_{10} > a_{11} \\ a_{10} > a_9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^{11} 2^{n-11} \\ C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^9 2^{n-9} \end{cases} \Leftrightarrow 29 < n < 32 \Rightarrow n \in \{30; 31\}$

Vậy $n \in \{30; 31\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \ge 4)$. Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Lời giải:

Sô tập con gồm 4 phần tử của A là tổ hợp chập 4 phần tử của n: C_n^4

Số tập con gồm 2 phần tử của A là tổ hợp chập 2 phần tử của n: C_n^2.

Theo đề bài ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 20\dfrac{n(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18$

Số tập con gồm k phần tử của A là $a_k = C_{18}^k$, giả sử a_k là lớn nhất khi đó

$\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{18}^k \ge C_{18}^{k+1} \\ C_{18}^k \ge C_{18}^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow k = 9$

Vậy $k = 9$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Gọi $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau

$(x+1)^{10}(x+2) = a_0x + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{11}x^{11}$. Hãy tìm a_5.

Bài 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

Bài 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển của $(x^3 - 3x^2 + 2)^n$. Biết rằng $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^4} = \dfrac{24}{23}$.

Bài 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển

$$P(x) = (1+2x)^3 + (1+2x)^4 + (1+2x)^5 + ... + (1+2x)^{22}.$$

Bài 5. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2 - 2)^n$, biết rằng $A_n^3 + C_n^1 = 8C_n^2 + 49$.

Bài 6. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(x^2 - x - 1)^n$ thành đa thức, biết:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

Bài 7. Xác định hệ số của x^{11} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+2)^n(3x^3+1)^n$, biết:

$$C_{2n}^{2n} - 3C_{2n}^{2n-1} + ... + (-1)^k 3^k C_{2n}^{2n-k} + ... + 3^{2n} C_{2n}^0 = 1024.$$

Bài 8. Khai triển $P(x) = \left(x^3 + \dfrac{1}{2x^2}\right)^n = a_0x^{3n} + a_1x^{3n-5} + a_2x^{3n-10} + ...$ Biết rằng 3 hệ số đầu $(a_0; a_1; a_2)$ lập thành cấp số cộng. Tính số hạng chứa x^4.

Bài 9. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết :

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048.$$

Bài 10. Tìm hệ số của số hạng x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

(n là số nguyên dương, $x > 0$).

Bài 11. Cho khai triển của đa thức

$P(x) = (x+1) + 2(x+1)^2 + 3(x+1)^3 + ... + 20(x+1)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$

Hãy tính hệ số a_{15}.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Bài 12. Trong khai triển đa thức sau

$$\left(2x+1\right)^n\left(x+2\right)^n = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Tìm n, biết rằng $a_{2n-1} = 160$.

Bài 13. Tìm số nguyên dương n, biết

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n} = \frac{1}{32}.$$

Bài 14. Cho $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{2^{x-1}}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^k$, biết n thỏa mãn $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$ và số hạng thứ tư trong khai triển trên bằng $2010n$. Xác định n và x.

Bài 15. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển sau $\left(1 - x^4 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

Bài 16. Đặt $\left(1 - x + x^2 - x^3\right)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{12}x^{12}$. Tính hệ số của a_7.

Bài 17. Khai triển và rút gọn biểu thức $1 - x + 2\left(1-x\right)^2 + 3\left(1-x\right)^3 + \ldots + n\left(1-x\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Tính hệ số của a_8, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{C_n^2} + \frac{7}{C_n^3} = \frac{1}{n}$.

Bài 18. Cho số nguyên dương $n > 4$ và $S = C_{2n}^0 + \frac{C_{2n}^2}{3} + \frac{C_{2n}^4}{5} + \ldots + \frac{C_{2n}^{2n}}{2n+1} = \frac{4096}{13}$. Tìm n.

Bài 19. Giả sử n là số nguyên dương và $\left(1+x\right)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số nguyên $k\left(1 \le k \le n-1\right)$ sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Tìm n.

Bài 20. Biết rằng $\left(2+x\right)^{100} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{100}x^{100}$. Chứng minh rằng $a_2 < a_3$. Với giá trị nào của k thì $a_k < a_{k+1}\left(0 \le k \le 99\right)$.

Bài 21. Cho biết tổng tất cả các hệ số của khai triển $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ là 64. Tìm hạng tử không chứa x.

Bài 22. Chứng minh rằng với mọi x ta luôn có $x^n = \frac{1}{2012^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(2012x - 1\right)^k$.

Bài 23. Sau khi khai triển $\left(1 + x^2 - x^3\right)^{1000}$ và $\left(1 - x^2 + x^3\right)^{1000}$ thì hệ số của x^{20} của đa thức nào lớn hơn.

Bài 24. Tìm giá trị của x biết hạng tử thứ sáu của khai triển $\left(e^{\ln\sqrt{9^{x-1}+7}} + 2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^7$ là 84.

Bài 25. Chứng minh rằng trong khai triển $\left[\left(s-2\right)x^2 + nx - s\right]\left(x+1\right)^n$ hệ số của x^8 là C_n^{s-2}.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Bài 26. Cho khai triển $\left(1-x^2\right)^n = a_0 + a_1\left(1+x\right) + a_2\left(1+x\right)^2 + a_{2n}\left(1+x\right)^{2n}$. Tính hệ số a_3.

Bài 27. Cho khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$. Tìm hệ số của x^4 biết rằng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2n} = 2186$.

Bài 28. Cho khai triển $\left(1+2x\right)^{10}\left(x^2+x+1\right)^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Hãy tính hệ số a_6.

Bài 29. Cho khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_{20}x^{20}$

1. Xác định hệ số a_4.
2. Tính tổng $a_0 + 2a_2 + 16a_4 + ... + 2^{20}a_{20}$

Bài 30. Cho $y = a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + ... + a_nx^{2n+1} + ...$ thỏa mãn $\left(1-x^2\right)y' - xy = 1, \forall x \in \left(-1;1\right)$. Tính tổng $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$

Bài 31. Cho khai triển $P(x) = \left(1-x\right)^n + x\left(1+x\right)^{n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Xác định hệ số a_3 biết rằng $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 512$

ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Dựa vào các công thức cơ bản:

$$\begin{cases} C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!} \\ A_n^k = \dfrac{n!}{\left(n-k\right)!} = k!C_n^k \\ P_n = n! \end{cases}$$

Ta cũng có $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ và $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho n,k nguyên dương , $k \le n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Biến đổi vế trái của đẳng thức cần chứng minh

$$VT = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}\right) =$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}(n+1-k+k+1) =$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}(n+2) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{1}{C_n^k} \Rightarrow .\square$$

Bài 2. Cho n là số nguyên dương và chẵn chứng minh rằng

$$\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + ... + \frac{1}{(n-1)!1!} = \frac{2^{n-1}}{n!} (*)$$

Lời giải:

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$(*) \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} + ... + \frac{n!}{(n-1)!1!} = 2^{n-1}$$

$\Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$ (đúng). Ta có đpcm.

Bài 3. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương $, n \geq 2$ ta có

$$\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + ... + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$$

Lời giải:

Biến đổi Vế trái của đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$VT = \frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + ... + \frac{1}{A_n^2} = \frac{0!}{2!} + \frac{1!}{3!} + ... + \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = VP \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

Bài 4. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$\frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $y \leq x-1 (*)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Ta có: $\frac{C_{x+1}^{y}}{6}=\frac{C_{x}^{y+1}}{5}\Leftrightarrow 5C_{x+1}^{y}=6C_{x}^{y+1}\Leftrightarrow \frac{5.(x+1)!}{y!(x+1-y)}=\frac{6.x!}{(y+1)!(x-y-1)!}$

$\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1)=6(x-y)(x-y+1)(1)$

Tương tự ta cũng có: $2C_{x}^{y+1}=5C_{x}^{y-1}\Leftrightarrow 2(x-y)(x-y+1)=5y(y+1)(2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $15y(y+1)=5(y+1)(x+1)\Leftrightarrow x=3y-1(3)$, thay (3) vào (2) ta được:

$8y^2-4y=5y^2+5y\Leftrightarrow y=3\Rightarrow x=8$.

Vậy $(x;y)=(8;3)$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho $n\in\mathbb{N}^*,\forall 3\le m\in\mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{1}{C_{m+k}^{k+1}}=\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{1}{C_{m+k-1}^{k+1}}-\frac{1}{C_{m+k}^{k+2}}\right)$$

Bài 2. Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$C_n^1+2\frac{C_n^2}{C_n^1}+3\frac{C_n^3}{C_n^2}+...+n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với n nguyên dương, ta có

$$\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1}+\frac{C_n^1}{C_{n+3}^2}+...+\frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{C_{2009}^1}+\frac{1}{C_{2009}^2}+...+\frac{1}{C_{2009}^{2009}}=\frac{1005}{2009}\left(\frac{1}{C_{2008}^1}+\frac{1}{C_{2008}^2}+...+\frac{1}{C_{2008}^{2008}}\right)$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n\ge 2$ ta luôn có

$$\frac{C_n^2}{(n-1)^2}+\frac{2C_n^3}{(n-1)^3}+\frac{3C_n^4}{(n-1)^4}+...+\frac{(n-1)C_n^n}{(n-1)^n}=1$$

Bài 6. Chứng minh rằng $2.1.C_{2000}^2+3.2.C_{2000}^3+...+2000.1999.C_{2000}^{1999}\,\vdots\,3998000$

Bài 7. Chứng minh rằng với số nguyên chẵn n thì 2^n chia hết cho

$$C_{2n}^0+3C_{2n}^2+...+3^kC_{2n}^{2k}+...+3^nC_{2n}^{2n}$$

Bài 8. Giải phương trình $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$.

Bài 9. Tìm số nguyên dương x thỏa mãn

$$C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14.$$

Bài 10. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\frac{6}{x}C_x^3+10.$$

Bài 11. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

$$\begin{cases} C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \dfrac{5}{4} A_{n-2}^2 \\ C_{n+1}^{n-4} \geq \dfrac{7}{15} A_{n+1}^3 \end{cases}$$

Bài 12. Chứng minh với mọi $k, n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $3 \leq k \leq n$, ta đều có

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

Bài 13. Tìm số tự nhiên k thỏa mãn đẳng thức $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

Bài 14. Giải phương trình

$$P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$$

Bài 15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$$

Bài 16. Xác định số nguyên dương n thỏa mãn

$8\left(C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \ldots + C_n^3\right) = A_{n+1}^3$

NHỊ THỨC NEWTON DÙNG TRONG ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

❖ Khi gặp tổng là tổng các tích giữa 2 công thức tổ hợp, thường nhân 2 khai triển với nhau sau đó so sánh hệ số của biến cùng bậc với nhau.

❖ Khi gặp tổng có riêng $C_n^0; C_n^4; C_n^8; \ldots$ hoặc tổng có riêng $C_n^1; C_n^5; C_n^9; \ldots$ hoặc các tổng $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$; $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$ thì dùng số phức.

❖ Khi số hạng của tổng có dạng $\dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} C_n^k$ (hay cứ có mẫu thức hơn kém nhau k đơn vị) thì dùng tích phân.

<u>Các kết quả quen thuộc:</u>

$1/\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$2/\ C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$

<u>Chứng minh:</u>

Đặt $A = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots; B = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$

Ta cần chứng minh: $A + B = 2^n; A = B = 2^{n-1}$

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, thay vào $x = 1 \Rightarrow 2^n = A + B(1)$

Ta có $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^n + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$, thay vào $x = 1 \Rightarrow 0 = A - B(2)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (1) và $(2) \Rightarrow A = B = 2^{n-1} \Rightarrow .\square$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $m, n, 0 \le p \le \min\{m; n\}$. Ta luôn có
$C_m^p + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + ... + C_m^{p-q}C_n^q + ... + C_m^0C_n^p = C_{m+n}^p$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases}(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1x + C_m^2x^2 + ... + C_m^px^p + ... + C_m^mx^m \\ (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^px^p + ... + C_n^nx^n\end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{m+n} = M(x) + (C_m^pC_n^0 + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + ... + C_m^{p-q}C_n^q + ... + C_m^0C_n^p)x^p \, (*)$$

Trong đó $M(x)$ là một đa thức không chứa x^p, so sánh hệ số của x^p 2 vế của (*) ta được

$C_{m+n}^p = C_m^pC_n^0 + C_m^{p-1}C_n^1 + C_m^{p-2}C_n^2 + ... + C_m^{p-q}C_n^q + ... + C_m^0C_n^p \Rightarrow .\square$

Đặc biệt với $m = n = p$, ta có

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$$

Bài 2. Cho $\begin{cases}0 \le k, n \\ k, n \in \mathbb{Z}\end{cases}$. Chứng minh rằng

$$C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + ... + C_n^{n-k}C_n^n = \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$$

Lời giải:

Viết lại đẳng thức cần chứng minh

$C_n^0C_n^{n-k} + C_n^1C_n^{n-k-1} + ... + C_n^{n-k}C_n^0 = \dfrac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$, điều này gợi ý đến vế trái là hệ số của x^{n-k}.

Ta xét

$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, sau đó so sánh hệ số của x^{n-k} ở 2 vế ta có đpcm.

Áp dụng kết quả bài 1. Ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho $\begin{cases}0 \le k, n \\ k, n \in \mathbb{Z}\end{cases}$. Chứng minh rằng

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+2}^2 + ... + C_{k+n}^n = C_{n+k+1}^n$$

Lời giải:

Viết lại đẳng thức cần chứng minh

$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + ... + C_{k+n}^k = C_{n+k+1}^{k+1}$, điều này gợi ý đến vế trái là tổng các hệ số chứa x^k.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Xét đa thức

$P(x)=(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+(1+x)^{k+2}+\ldots+(1+x)^{k+n}$

$=(1+x)^k\dfrac{1-(1+x)^{n+1}}{1-(1+x)}=\dfrac{(1+x)^{n+k+1}-(1+x)^k}{x}$, so sánh hệ số của số hạng chứa x^k ở 2 vế ta suy ra đpcm.

Bài 4. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2+\left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2+\left(\frac{C_n^2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2$$

Lời giải:

S có dạng $S=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{C_n^k}{k+1}\right)^2$, biến đổi $\dfrac{C_n^k}{k+1}$

Ta có: $\dfrac{C_n^k}{k+1}=\dfrac{n!}{(k+1)k!(n-k)!}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!}=\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

Vậy $S=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}\right)^2=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left((C_{n+1}^1)^2+(C_{n+1}^2)^2+(C_{n+1}^3)^2+\ldots+(C_{n+1}^{n+1})^2\right)$

$=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(C_{2(n+1)}^{n+1}-1\right)$.

Bài 5. Tính tổng gồm 2n số hạng

$$S=\frac{1}{2}C_{2n}^1-\frac{1}{3}C_{2n}^2+\ldots+(-1)^k\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}+\ldots+(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}.$$

Lời giải:

Với $k=2,3,\ldots,2n+1$ ta có

$$\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}=\frac{1}{k}.\frac{(2n)!}{(k-1)!.(2n-k+1)!}=\frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{k!.(2n+1-k)!}=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^k$$

Do đ ó:

$$S=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}C_{2n}^{k-1}=\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{2n+1}C_{2n+1}^k=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^k\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k C_{2n+1}^k-C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1\right)=\frac{1}{2n+1}\left((1-1)^{2n+1}-1+2n+1\right)=\frac{2n}{2n+1}.$$

Bài 6. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(C_n^1\right)^2+2\left(C_n^2\right)^2+\ldots+n\left(C_n^n\right)^2$$

Lời giải:

Xét

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

$f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

$\Rightarrow f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$

$\Rightarrow xf'(x)=nx(1+x)^{n-1}=C_n^1x+2C_n^2x^2+3C_n^3x^3+...+nC_n^nx^n(1)$

$(1+x)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^n(2)$

Nhân theo vế của (1) với (2), sau đó so sánh hệ số của x^n ở 2 vế ta được

$S=\left(C_n^1\right)^2+2\left(C_n^2\right)^2+...+n\left(C_n^n\right)^2=nC_{2n-1}^{n-1}=nC_{2n-1}^n$.

<u>Theo hai hướng của bài 6 và bài 4, ta có các bài toán sau(1,2,3,4,5):</u>

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(C_n^0\right)^2-\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2-...+(-1)^n\left(C_n^n\right)^2$$

Bài 2. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\left(C_n^1\right)^2+4\left(C_n^2\right)^2+...+n^2\left(C_n^n\right)^2$$

Bài 3. Tính tổng sau: $S=\left(C_n^0\right)^2+2\left(C_n^1\right)^2+6\left(C_n^2\right)^2+...+\left(n^2+n\right)\left(C_n^n\right)^2$.

Bài 4. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\frac{\left(C_n^0\right)^2}{1}+\frac{\left(C_n^1\right)^2}{2}+\frac{\left(C_n^2\right)^2}{3}+...+\frac{\left(C_n^n\right)^2}{n+1}$$

Bài 5. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$$S=\frac{\left(C_n^0\right)^2}{1.2}+\frac{\left(C_n^1\right)^2}{2.3}+\frac{\left(C_n^2\right)^2}{3.4}+...+\frac{\left(C_n^n\right)^2}{(n+1)(n+2)}$$

Bài 6. Tính tổng gồm 2n số hạng

$S=\frac{1}{2}C_{2n}^1-\frac{1}{3}C_{2n}^2+...+(-1)^k\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}+...+(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$.

Bài 7. Chứng minh rằng: $1+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^{n-1}\right)^2+1^2=C_{2n}^n$

CÁC BÀI TOÁN DÙNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Ta thường xét hai khai triển :

$$\begin{cases} f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n \\ g(x)=(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^n\,C_n^nx^n \end{cases} (*)$$

(i). Nếu trong biểu thức tính tổng chỉ xuất hiện các số từ $n,n-1,n-2,...$ trở xuống thì ta đạo hàm trực tiếp hai vế của (*) một hoặc nhiều lần.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

(ii). Nếu ngược lại có xuất hiện từ các số từ $n+1, n+2,...$ trở lên thì ta phải nhân thêm vào hai vế của (*) một lượng với $x, x^2,...$ sau đó mới đạo hàm hai vế.
(iii). Sau các bước trên thì ta thay giá trị của x thích hợp vào hai vế, ta có kết quả.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho số nguyên dương n. Tính tổng sau
$1/\ S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$
$2/\ S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + ... + (n+1)C_n^n$

Lời giải:

1/ Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$, đạo hàm 2 vế ta được
$\Rightarrow f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}$ (*)
Thay $x=1$ vào 2 vế của (*) ta được
$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = 2^{n-1}$.
2/ Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$, nhân vào 2 vế với $x \neq 0$
$\Rightarrow xf(x) = xC_n^0 + x^2C_n^1 + x^3C_n^3 + ... + x^{n+1}C_n^n$, đạo hàm 2 vế theo x ta được
$nx(1+x)^{n-1} + (1+x)^n = C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + 4C_n^3x^3 + ... + (n+1)C_n^nx^n$ (**)
Thay $x=1$ vào 2 vế của (**) ta được
$S = 2^n + n.2^{n-1}$.

Bài 2. Tính tổng $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + ... + (n+3)C_n^n$

Lời giải:

Viết lại tổng S, ta được
$S = 3(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n) + \left(C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n\right) = 3S_1 + S_2$
$+S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$
$+S_2 = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$
Vậy $S = 3.2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(n+6)$.

Bài 3. Tìm số nguyên dương n sao cho
$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$

Lời giải:

Trong tổng vế trái có xuất hiện kC_{2n+1}^k nên ta sẽ dùng đạo hàm
Xét $(1-x)^{2n+1} = C_{2n+1}^o - C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 - C_{2n+1}^3x^3 + C_{2n+1}^4x^4 - ... + C_{2n+1}^{2n}x^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$
Đạo hàm 2 vế theo x ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$-(2n+1)(1-x)^{2n} = -C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x - 3C_{2n+1}^3 x^2 + 4C_{2n+1}^4 x^3 - ... + 2nC_{2n+1}^{2n} x^{2n-1} - (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n} (*)$

thay vào $x = 2$ vào 2 vế của (*), ta được

$-(2n+1) = -\left(C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1}\right) = -2005$

$\Leftrightarrow n = 1002$

Vậy $n \in \{1002\}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Tính tổng, với $(1 \le n \in \mathbb{N}^*)$

$1/\ S_1 = \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

$2/\ S_2 = \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + ... + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n$

$3/\ S_3 = \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^3 + \frac{1}{6}C_n^5 + ...$

Lời giải:

1/ Xét $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$, lấy tích phân 2 vế trên đoạn [0;1] ta được

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{1}C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S_1 + 1 \Rightarrow S_1 = \frac{2^{n+1}-n-2}{n+1} (*)$$

2/ Xét $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^n C_n^n x^n$,lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-1)^n C_n^n x^n\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-(n+1)}(1-x)^{n+1}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{1}C_n^0 x - \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 - ... + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{n}{n+1} (**)$$

3/ Lấy (*)+(**) ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$2S_3 = S_1 + S_2 \Longrightarrow S_3 = \frac{2^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Bài 5. Với số nguyên dương n. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1}C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Lời giải:

Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{1-\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k x^k}{x} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1} (\forall x \neq 0)$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$, ta được

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\Bigg|_0^1 \Rightarrow dpcm$$

Bài 6. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$

Lời giải:

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$, lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1 (1+x)^{2n}dx = \int_0^1 \left(C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1 = \left(C_{2n}^0x + \frac{1}{2}C_{2n}^1x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2x^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow S_1 = C_{2n}^0 + \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} (*)$$

Một cách tương tự xét $(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$, ta được

$$S_2 = C_{2n}^0 - \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{1}{2n+1} (**)$$

Trừ theo vế của (*) cho (**), ta suy ra

$$2\left(\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}\right) = \frac{2^{2n+1}-2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$$, ta có đpcm.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Bài 7. Cho n nguyên dương, tính tổng
$C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

Lời giải:

Xét $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$, lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;2]$ ta được

$$\int_0^2 (x+1)^n dx = \int_0^2 \left(C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n\right)dx$$

$$\Rightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^n-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$$

Bài 8. Cho n nguyên dương, tính tổng
$S = \frac{C_n^0}{3} + \frac{C_n^1}{4} + \frac{C_n^2}{5} + ... + \frac{C_n^n}{n+3}$

Lời giải:

Dưới mẫu tăng 2 đơn vị, nên ta nhân thêm vào 2 vế của $(x+1)^2$ với x^2

Xét $(x+1)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$, nhân vào 2 vế với $x^2 (x \neq 0)$ ta được

$$x^2(x+1)^n = x^2C_n^0 + x^3C_n^1 + x^5C_n^2 + ... + x^{n+2}C_n^n = (x+1)^{n+2} - 2(x+1)^{n+1} + (x+1)^n$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1 \left(x^2C_n^0 + x^3C_n^1 + x^5C_n^2 + ... + x^{n+2}C_n^n\right)dx = \int_0^1 \left((x+1)^{n+2} - 2(x+1)^{n+1} + (x+1)^n\right)dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3C_n^0 + \frac{1}{4}x^4C_n^1 + \frac{1}{5}x^6C_n^2 + ... + \frac{1}{n+3}x^{n+3}C_n^n\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3} - \frac{2}{n+2}(x+1)^{n+1} + \frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Bài 9. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$.

Lời giải:

Xét khai triển $(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - ... + (-1)^nC_n^nx^{2n}$

Suy ra, $x(1-x^2)^n = C_n^0x - C_n^1x^3 + C_n^2x^5 - ... + (-1)^nC_n^nx^{2n+1}$ (*)

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

Lấy tích phân hai vế của (*) trên đoạn $\left[0;1\right]$, ta được:

$$\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 x - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 - ... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}.\square$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Với số nguyên dương n, tính tổng sau:

$$S = C_n^0 + 2C_n^1 + 6C_n^2 + ... + \left(n^2 - n + 2^n\right)C_n^n.$$

Bài 2. Cho n là số tự nhiên, $n \geq 2$. Chứng minh rằng

$$n^2 C_n^0 + \left(n-1\right)^2 C_n^1 + \left(n-2\right)^2 C_n^2 + ... + 2^2 C_n^{n-2} + 1^2 C_n^{n-1} = n\left(n+1\right)2^{n-2}$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN DÙNG SỐ PHỨC

(i). Đặc điểm nhận dạng để ta ứng dụng số phức vào là biểu thức cần tính hay chứng minh có các hạng tử chẵn(hoặc lẻ) có dấu đối xứng nhau:

<u>chẳng hạn</u>: $S = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ...$

Thông thường làm bài toán loại này qua các bước:

(ii). Ta hay sử dụng khai triển: $\left(a+bi\right)^n = a^n C_n^0 + a^{n-1}bC_n^1 i - a^{n-2}b^2 C_n^2 - ... + b^n i^n C_n^n$, thay vào giá trị của a và b hợp lý.

(iii). Nếu cần dùng đến đạo hàm hay tích phân thì do biến phức không giống như biến thực do đó ta phải xét hàm của biến x sau đó đến kết quả cuối mới thay x bởi số phức i vào biểu thức cuối(Xem bài tập mẫu số 2).

(iv). Khi làm được các bước trên ta so sánh hệ số thực, hệ số ảo hai vế hoặc so sánh modun hai vế ta có kết quả bài toán.

<u>Lưu ý:</u> $i^2 = -1 \Rightarrow i^{4n} = 1$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$S = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - ... + C_{4n}^{4n}$.

<u>Lời giải:</u>

Xét $\left(1+i\right)^{4n} = C_{4n}^0 + C_{4n}^1 i + C_{4n}^2 i^2 + C_{4n}^3 i^3 + C_{4n}^4 i^4 + ... + C_{4n}^{4n} i^{4n}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$=(C_{4n}^0-C_{4n}^2+C_{4n}^4-...+C_{4n}^{4n})+(C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...-C_{4n}^{4n-1})i$

$=\left((1+i)^2\right)^{2n}=(2i)^{2n}=(-4)^n$

So sánh phần thực và phần ảo 2 vế ta được

$S=C_{4n}^0-C_{4n}^2+C_{4n}^4-...+C_{4n}^{4n}=(-4)^n$.

Ta cũng có: $C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...-C_{4n}^{4n-1}=0$

Bài 2. Với số nguyên dương n. Tính tổng sau

$S=1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}$

Lời giải:

Xét khai triển của: $f(x)=(1+x)^{8n}=C_{8n}^0+C_{8n}^1x+C_{8n}^2x^2+C_{8n}^3x^3+...+C_{8n}^{8n-1}x^{8n-1}+C_{8n}^{8n}x^{8n}$

Đạo hàm 2 vế theo x ta được:

$8n(1+x)^{8n-1}=C_{8n}^1+2C_{8n}^2x+3C_{8n}^3x^2+...+(8n-1)C_{8n}^{8n-1}x^{8n-2}+8nC_{8n}^{8n}x^{8n-1}$ (*)

Thay $x=i$ vào 2 vế của (*) ta được:

$8n(1+i)^{8n-1}=C_{8n}^1+2C_{8n}^2i+3C_{8n}^3i^2+...+(8n-1)C_{8n}^{8n-1}i^{8n-2}+8nC_{8n}^{8n}i^{8n-1}$

$=\left(1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}\right)+\left(2C_{8n}^2-4C_{8n}^4+...+8nC_{8n}^{8n}\right)i$

Mặt khác ta lại có

$8n(1+i)^{8n-1}=\dfrac{8n(1+i)^{8n}}{1+i}=4n.16^n(1-i)$. Vậy ta có

$4n.16^n(1-i)=\left(1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}\right)+\left(2C_{8n}^2-4C_{8n}^4+...+8nC_{8n}^{8n}\right)i(1)$

So sánh phần thực và phần ảo ở 2 vế của (1) ta được:

$S=1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}=4n.16^n$.

Ta cũng có: $2C_{8n}^2-4C_{8n}^4+...+8nC_{8n}^{8n}=-4n.16^n$.

Bài 3. Với số nguyên dương n. Chứng minh

$$\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)^2=2^n$$

Lời giải:

Xét số phức $z=(i+1)^n=C_n^0+iC_n^1+i^2C_n^2+...+i^nC_n^n$

$=\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)i$

Mặt khác ta lại có $z=(i+1)^n=\left(\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

So sánh $|z|^2$ ở 2 vế, ta được

$|z|^2=\left(C_n^0-C_n^2+C_n^4-...\right)^2+\left(C_n^1-C_n^3+C_n^5-...\right)^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)^2=2^n$, ta có đpcm

Bài 4. Với số nguyên dương n. Chứng minh

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$1+C_n^3+C_n^6+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

Lời giải:

Ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\,(1)$.

Xét số phức

$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\varepsilon^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=1\Leftrightarrow(\varepsilon-1)(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0\Rightarrow\varepsilon^2+\varepsilon+1$ Ta có:

$$\left(1+\varepsilon\right)^n=C_n^0+\varepsilon C_n^1+\varepsilon^2C_n^2+...+\varepsilon^nC_n^n=C_n^0+\varepsilon C_n^1+\varepsilon^2C_n^2+C_n^3+\varepsilon C_n^4+\varepsilon^2C_n^5+...(2)$$

$$\left(1+\varepsilon^2\right)^n=C_n^0+\varepsilon^2C_n^1+\varepsilon^4C_n^2+...+\varepsilon^{2n}C_n^n=C_n^0+\varepsilon^2C_n^1+\varepsilon C_n^2+C_n^3+\varepsilon^2C_n^4+...(3)$$

Cộng theo vế của (1),(2),(3) ta được

$$2^n+\left(1+\varepsilon\right)^n+\left(1+\varepsilon^2\right)^n=3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)+\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)\left(C_n^1+C_n^2+C_n^4+C_n^5+...\right)$$

$$=3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)$$

Mặt khác ta lại có

$1+\varepsilon=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};1+\varepsilon^2=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$, từ đó ta có

$$3\left(C_n^0+C_n^3+C_n^6+...\right)=2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\Rightarrow C_n^0+C_n^3+C_n^6+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\Rightarrow\square$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^0-3C_{2n}^2+9C_{2n}^4-27C_{2n}^6+...+(-3)^nC_{2n}^{2n}=2^{2n}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

Bài 2. Tính tổng

$$S=C_{2010}^1+3C_{2010}^3-3^2C_{2010}^5+3^3C_{2010}^7-...-3^{1004}C_{2010}^{2009}$$

Bài 3. Tính tổng $S=C_{2n}^1-\frac{C_{2n}^3}{3}+\frac{C_{2n}^5}{9}-...+\frac{\left(-1\right)^{n-1}C_{2n}^{2n-1}}{3^{n-1}}$.

Bài 4. Tính tổng sau: $C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...-C_{4n}^{4n-1}$.

Bài 5. Tính tổng sau: $S=C_{8n}^2-2C_{8n}^4+...+4nC_{8n}^{8n}$.

Bài 6. Với n,k là các số nguyên dương và $a_k=(-1)^{k+1}3^kC_{6n}^{2k-1}$. Chứng minh

$$\sum_{k=1}^{3n}a_k=0$$

Bài 7. Tính tổng sau $C_{2011}^1-3C_{2011}^3+5C_{2011}^5-...-2001C_{2011}^{2011}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

BẤT ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho $2 \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

$$C_n^0 C_n^1 \dots C_n^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n-1}\right)^n.$$

Lời giải:

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n$

$+x = 1 \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n \Rightarrow C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$

Áp dụng BĐT Cauchy cho n số dương ta được

$$2^n - 1 = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n \ge n\sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n}$$

$$\Rightarrow C_n^0 C_n^1 \dots C_n^n = C_n^1 \dots C_n^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n}\right)^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n-1}\right)^n. \square$$

Bài 2. Chứng minh rằng với

$n > 2, n \in \mathbb{N}$ thì ta có

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n) < n!$$

Lời giải:

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$, đạo hàm 2 vế theo x ta được

$$C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + nC_n^n x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$$

$+x = 1 \Rightarrow C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n.2^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n\right) = 2^{n-1}$$

Vậy chứng minh với $n > 2, n \in \mathbb{N}$ thì $2^{n-1} < n!$. Thật vậy

$$n! = 1.2.3.4\dots n > \underbrace{2.2\dots 2}_{(n-1)\text{ số}} = 2^{n-1} \Rightarrow . \square$$

Bài 3. Cho $0 \le k \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

$$C_{2n-k}^n C_{2n+k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $a_k = C_{2n-k}^{n} C_{2n+k}^{n}$, ta chứng minh dãy $\{a_k\}$ là dãy giảm.

Thật vậy ta chứng minh $a_{k+1} \le a_k, \forall 0 \le k \le n \in \mathbb{Z}$.

$a_{k+1} \le a_k \Leftrightarrow \dfrac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!}\dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \le \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n+k+1}{n+k+1} \le \dfrac{2n-k}{n-k} \Leftrightarrow 1+\dfrac{n}{n+k+1} \le 1+\dfrac{n}{n-k}$ (đúng).

Vậy dãy $\{a_k\}$ là dãy giảm, suy ra $a_k \le a_0 = \left(C_{2n}^{n}\right)^2, \forall 0 \le k \le n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$.□

Bài 4. Cho số nguyên $k, 0 \le k \le 2000$. Chứng minh
$C_{2001}^{k} + C_{2001}^{k+1} \le C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001}$

Lời giải:

Ta có $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1001}, \forall 0 \le k \le 2000 (*)$$

Nhưng do $C_n^k = C_n^{n-k}, \forall 0 \le k \le n$. Nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (*) với $0 \le k \le 1000$.

Đặt $a_k = C_{2002}^{k+1}$, ta chỉ cần chứng minh dãy $\{a_k\}$ tăng, thật vậy

$a_{k-1} \le a_k \Leftrightarrow C_{2002}^{k} \le C_{2002}^{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{2002!}{k!(2002-k)!} \le \dfrac{2002!}{(k+1)!(2001-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2002-k} \le \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow 2k \le 2001$ (đúng với mọi $0 \le k \le 1000$).

Vậy $a_k \le a_{1000} = C_{2002}^{1001} \Rightarrow$.□ (đpcm).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực $x \ne 0$, và số nguyên lẻ n $(n \ge 3)$ ta có

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\ldots-\frac{x^n}{n!}\right)<1$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có $n! \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Bài 3. Cho n là số nguyên dương có định và $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Chứng minh rằng nếu C_n^k đạt giá trị lớn nhất tại k_0 thì $\dfrac{n-1}{2} \le k_0 \le \dfrac{n+1}{2}$.

Bài 4. Chứng minh rằng $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k^2} C_{2n}^{n+k} < 0$.

Bài 5. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(C_n^0\right)^4+\left(C_n^1\right)^4+\left(C_n^2\right)^4+...+\left(C_n^n\right)^4\ge\frac{\left(C_{2n}^n\right)^2}{n+1}$$

Bài 6. Cho $n\in\mathbb{N}^*,\forall 3\le m\in\mathbb{N}^*$ ta có

$$\frac{1}{C_{m+k}^{k+1}}=\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{1}{C_{m+k-1}^{k+1}}-\frac{1}{C_{m+k}^{k+2}}\right)$$

Từ đó chứng minh rằng

$$\frac{1}{C_m^1}+\frac{1}{C_{m+1}^2}+\frac{1}{C_{m+2}^3}+\frac{1}{C_{m+n}^{n+1}}<\frac{1}{m-2}$$

Bài 7. Với mọi số nguyên dương n, chứng minh rằng

$$\frac{1!.2!+2!.3!+...+n!.(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2.(2!)^2....(n!)^2}}\ge 2\sqrt[2n]{n!}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên không âm k, ta có

$$\sum_{k=0}^{2011}\left(k-2011x\right)^2C_{2011}^kx^k\left(1-x\right)^{2011-k}\le\frac{2011}{4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 15:

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN TỔ HỢP

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

BÀI TOÁN THÀNH LẬP SỐ TỪ CÁC SỐ CHO TRƯỚC

Loại 1. Lập được số từ các số cho trước và có các chữ số khác nhau

Bài 1.
Từ bảy chữ số $0,1,2,3,4,5,6$ có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có năm chữ số khác nhau.

Lời giải:
+ Chữ số hàng đơn vị là 0 thì có $1.6.5.4.3=360$ số.
+ Chữ số hàng đơn vị là 2 hoặc 4 ,hoặc 6 thì có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị, 5 cách chọn chữ số hàng vạn trong 6 số còn lại(số hàng vạn khác 0), vậy có 3.5.5.4.3=900 số.
Vậy tất cả có 900+360=1260 số.

Bài 2.
Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đều lớn hơn 4 và đôi một khác nhau?. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên nói trên.

Lời giải:
Mỗi số ứng với một hoán vị của 5 phần tử 5,6,7,8,9. Vậy có $P_5=1.2.3.4.5=120$ số.
Sự xuất hiện của mỗi chữ số 5,6,7,8,9 ở mỗi hàng(đơn vị, chục,trăm,…) là như nhau, nên tổng tất cả các chữ số ở mỗi hàng của 120 số trên là

$$(5+6+7+8+9)\frac{120}{5}=840$$

Suy ra tổng của 120 số là

$$840(10^0+10^1+10^2+10^3+10^4)=840.11111=9333240$$

Bài 3.
Có 100.000 chiếc vé số được đánh số từ 00.000 đến 99.999 . Hỏi số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu?

Lời giải:
Theo đầu bài thì chữ số đầu tiên cũng có thể bằng 0. Vậy có 10.9.8.7.6=30240 vé số gồm 5 chữ số khác nhau.

Bài 4.
Cho các số 1,2,5,7,8. Có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ 5 chữ số trên sao cho:

1. Số tạo thành là một số chẵn.
2. Số tạo thành không có chữ số 7.
3. Số tạo thành nhỏ hơn 278.

Lời giải:

1. Có 2 cách chọn chữ số hàng đơn vị nên có 2.4.3=24 số chẵn.

2. Chỉ được chọn trong 4 số 1,2,5,8. Vậy có 4.3.2= $A_4^3 = 24$ số không có số 7.
3. Chữ số hàng trăm là 1 hoặc 2: Nếu là 1 thì có 1.4.3=12 số; nếu là 2 thì chỉ có đúng 8 số (275;271;258;257;251;218;217;215) nhỏ hơn 278. Vậy có 20 số nhỏ hơn 278.

Bài 5. Cho 10 chữ số 0,1,2,..,9. Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ 10 số trên.

Lời giải:

Chữ số cuối cùng(hàng đơn vị) được chọn từ 1,3,5,7,9. Chữ số đầu tiên(hàng triệu) được chọn từ 1,2,3,4,5. Còn 4 số ở giữa được chọn từ 8 số còn lại có $A_8^4 = 1680$ cách.

+ Nếu chữ số cuối được chọn từ 7 hoặc 9(2 cách chọn) thì chữ số đầu tiên có 5 cách chọn, vậy có 2.5.1680=16.800 cách chọn.

+ Nếu chữ số cuối được chọn từ 1,3,5 (3 cách chọn) thì chữ số cuối có 4 cách chọn, vậy có 3.4.1680=20.160 cách chọn.

Vậy tất cả có 16.800+20.160=36960 số.

Bài 6.

Cho các chữ số 0,2,4,5,6,8,9.

1. Có thể lập được bao nhiêu số có 3 mà trong mỗi số các chữ số khác nhau.
2. Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Lời giải:

1. Chữ số hàng trăm phải khác 0, nên có 6 cách chọn, 2 số còn lại có 6.5=30 cách chọn, vậy có 6.6.5=180 số.
2. Chữ số hàng nghìn phải khác 0:

   + Nếu chữ số hàng nghìn là 5 thì 3 số còn lại có $A_6^3 = 120$ cách chọn, vậy có 1.120 =120 số.

   + Nếu chữ số hàng nghìn là 2 hoặc 4, hoặc 6, hoặc 8, hoặc 9 thì có 5 cách chọn. Ba số còn lại có 1 số 5 có 1 cách chọn và 2 số còn lại có $A_5^2 = 20$ cách chọn, vậy có 5.1.20=100 số.

   Vậy tất cả có 120+100=220 số.

Bài 7.

Cho các chữ số 0,1,2,3,4,5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu:

1. Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau.
2. Số chia hết cho 5 gồm 3 chữ số khác nhau.

Lời giải:

1. Số chẵn tận cùng là 0 có $1.A_5^3 = 1.60 = 60$ số.

Số chẵn tận cùng là 2 hoặc 4 có 2 cách chọn chữ số cuối, số hàng nghìn khác 0 nên có 4 cách chọn, 2 số còn lại có $A_4^2 = 12$ cách chọn. Vậy có 2.4.12=96 số.

Vậy tất cả có 60+96=156 số.

2. Số chia hết cho 5 phải tận cùng là 0 hoặc 5.

Nếu tận cùng là 0 thì có $A_5^2 = 20$ cách chọn 2 số còn lại, vậy có 1.20=20 số.

Nếu tận cùng là 5 thì có 4 cách chọn số hàng trăm, 4 cách chọn số hàng chục, vậy có 1.4.4=16 số.

Vậy tất cả có 20+16=36 số.

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Bài 8.
Cho 8 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

Lời giải:
Hai chữ số hàng nghìn và đơn vị khác không nên có 7.6 cách chọn, 2 chữ số còn lại có 6.5 cách chọn, vậy có 7.6.6.5=1260 số.

Bài 9.
1. Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là số lẻ.
2. Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn(chữ số đầu tiên phải khác không).

Lời giải:
1. Chữ số đầu tiên là số lẻ nên có 5 cách chọn, chũ số cuối cùng chẵn nên có 5 cách chọn. Các số còn lại có $A_8^4 = 1680$ cách chọn, vậy có 5.5.1680=42000 số.
2. Từ 5 chữ số lẻ chọn ra 3 số có C_5^3 cách, từ 5 chữ số chẵn chọn ra 3 số có C_5^3 cách. Với 6 số này có 6! Số, trong đó số các số có chữ số 0 đầu tiên chiếm $\frac{1}{6}$. Vậy có $\frac{5}{6}.C_5^3.C_5^3.6! = 64800$ số.

Bài 10.
Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Lời giải:
Chữ số đầu tiên phải khác 0, nên chỉ có thể nhận các số từ 1 đến 9, với các chữ số đứng sau lớn hơn chữ số liền trước nên các chữ số khác nhau.
Chọn ra 5 số bất kỳ từ 9 số từ 1 đến 9 thì sẽ tạo được một số có các chữ số theo thứ tự tăng dần. Vậy có $C_9^5 = 126$ số.

Bài 11.
Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 thiết lập các số có 9 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số có chữ số 9 ở vị trí chính giữa.

Lời giải:
Số các số 9 chữ số khác nhau là hoán vị của 9 số nên có 9!. Trong đó chữ số 9 có thể có mặt ở một trong 9 vị trí, nên số các số có số 9 ở vị trí chính giữa chiếm $\frac{1}{9}$, vậy có $\frac{1}{9}.9! = 8! = 40320$ số.

Bài 12.
Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau(chữ số đầu tiên khác 0) trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1.

Lời giải:
Chữ số 0 có 5 vị trí(không bao gồm vị trí đầu tiên), 5 số còn lại được chọn từ 8 số 2,3,4,5,6,7,8,9 nên có $A_8^5 = 6720$ cách chọn. Vậy có 5.6720=33600 số.

Bài 13.
Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ các số 1,3,4,5,7,8.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Số các số có 5 chữ khác nhau đôi một được lập từ 6 số đã cho là chỉnh hợp chập 5 của 6, vậy có $A_6^5 = 720$ số.

Số lần xuất hiện của mỗi một trong các số đã cho là $\frac{720}{6} = 120$, vậy tổng tất cả các số ở mỗi hàng(hàng đơn vị, chục,…) là $120(1+3+4+5+7+8) = 3360$.

Vậy tổng tất cả các số là $3360(1+10+10^2+10^3+10^4) = 37322960$.

Bài 14.
Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 thiết lập được các số có 6 chũ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được đó có bao nhiêu số mà 2 số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Lời giải:
Số các số có 6 chữ số khác nhau tạo thành là $6! = 720$.
Có 2 cách để cho số 1 và số 6 đứng cạnh nhau(16 hoặc 61), coi cách ghép 2 số này với nhau được một số mới, số này cùng với 4 số còn lại có $5! = 120$ cách để lập thành một số có 6 số khác nhau, vậy có 2.120=240 số có 2 số 1 và 6 đứng cạnh nhau.
Số các số có 6 số khác nhau mà số 1 không đứng cạnh số 6 là 720-240=480 số.

Loại 2. Lập được số từ các số cho trước và các chữ số có thể trùng nhau.

Bài 1.
Xét dãy số có 7 chữ số được chọn từ các số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 thỏa mãn các tính chất sau:
- Chữ số ở vị trí số 3 là một số chẵn.
- Chữ số ở vị trí cuối không chia hết cho 5.
- Các chữ số ở vị trí thứ 4, thứ 5 và thứ 6 đôi một khác nhau.

Hỏi có tất cả bao nhiêu dãy số như vậy?

Lời giải:
Giả sử $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ là dãy số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vì a_3 chẵn nên có 5 cách chọn(0,2,4,6,8).

a_7 không chia hết cho 5 nên không thể là 0 hoặc 5, vậy có 8 cách chọn.

Vì a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau nên có A_{10}^3 cách chọn.

Các số còn lại mỗi số có 10 cách chọn.

Vậy có $5.8.A_{10}^3.10.10 = 2880000$ dãy số thỏa mãn đề bài.

Bài 2.
Viết các số có sáu chữ số bằng các chữ số 1,2,3,4,5(một số xuất hiện 2 lần, các số khác xuất hiện một lần). Có bao nhiêu các viết.

Lời giải:
Chẳng hạn số 1 xuất hiện 2 lần, ta cần chọn 2 vị trí để viết 2 số 1 vào có $C_6^2 = 15$ vị trí, 4 số còn lại viết vào 4 vị trí còn lại nên có 4!=24 cách, vậy có 15.24=360 số mà số 1 xuất hiện 2 lần và các số khác xuất hiện 1 lần.
Vai trò của năm số 1,2,3,4,5 là như nhau, vậy tất cả có 5.360=1800 số thỏa mãn bài toán.

Bài 3.
Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ 5 số 0,1,2,3,4.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Các số cần tìm nhỏ hơn 10000 không thể có từ 5 chữ số trở lên
+ Số có một chữ số có 5 số.
+ Số có 2 chữ số(số hàng chục khác 0) có 4.5=20 số.
+ Số có 3 chữ số(số hàng trăm khác 0) có 4.5.5=100 số.
+ Số có 4 chữ số(số hàng nghìn khác 0) có 4.5.5.5=500 số.
Vậy tất cả có 5+20+100+500=625 số.

Bài 4.

Có bao nhiêu số khác nhau gồm bẩy chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số chẵn.

Lời giải:

Chọn các chữ số từ trái(số hàng triệu) sang phải(số hàng đơn vị).
Chữ số thứ nhất phải khác 0 nên có 9 cách chọn, 5 chữ số tiếp theo mỗi số có 10 cách chọn. Chữ số cuối cùng có 10 cách chọn nhưng có 5 cách chọn để cho tổng của tất cả 7 chữ số chẵn và 5 cách để cho tổng của bẩy chữ số lẻ, vậy số cuối có 5 cách chọn.
Vậy tất cả có $9.10^5.5 = 4500000$số.

Bài 5.

Có thể lập được bao nhiêu gồm 8 chữ số từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 trong đó các chữ số 1 và 6 có mặt 2 lần và các số khác có mặt 1 lần.

Lời giải:

Chọn 2 trong 8 vị trí để viết 2 số 1 vào có C_8^2 cách, chọn 2 trong 6 vị trí còn lại viết 2 số 6 vào có C_6^2 cách.
Bốn số còn lại 2,3,4,5 xếp vào 4 vị trí còn lại có 4! cách.
Vậy có $C_8^2.C_6^2.4! = 28.15.24 = 10080$số.

Bài 6.

Từ 3 chữ số 1,2,3 có thể lập được bao nhiếu số có 5 chữ số có mặt cả chữ số trên?

Lời giải:

Có 2 trường hợp

TH1: Số này có một số xuất hiện 3 lần và các số khác xuất hiện một lần
Chẳng hạn số 1 xuất hiện 3 lần, thì có C_5^3 cách chọn vị trí cho 3 số 1, và 2 số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có 2! Cách, vậy có $C_5^3.2! = 20$số.
Do vai trò của 1,2,3 là như nhau nên.
Vậy trong trường hợp này có 3.20 =60 số.

TH2: Số này có một số xuất hiện 1 lần và hai số kia mỗi số xuất hiện 2 lần.
Chẳng hạn số 1 xuất hiện 1 lần, thì có C_5^1 cách chọn vị trí cho số 1, có C_4^2 cách chọn vị trí cho số 2, và xếp 2 số 3 vào 2 vị trí còn lại có 1 cách. Vậy có $C_5^1.C_4^2.1 = 30$số.
Do vai trò như nhau của 1,2,3 nên.
Vậy trong trường hợp này có 3.30=90 số.
Vậy tất cả có 60+90=150 số thỏa mãn bài toán.

Bài 7.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Lời giải:

Có tất cả 9000 số từ 1000 đến 9999 có 4 chữ số. Trong các số này có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

9 số có số 0 lặp lại 3 lần (có dạng là $\overrightarrow{a000}, 1 \le a \le 9$). Số có 4 chữ số mà có 3 chữ số 1 lặp lại có dạng $\overrightarrow{a111}, 1 \le a \le 9; \overrightarrow{1b11}; \overrightarrow{11b1}; \overrightarrow{111b},, 0 \le b \le 9; a, b \ne 1$ Nên a có 8 giá trị, b có 9 giá trị vậy có 8+3.9=35 số có 3 chữ số 1. Tương tự có 35 số có 3 chữ số 2, 35 số có 3 chữ số 3,…, 35 số có 3 chữ số 9. Vậy có 9000 – (9+9.35)=8676 số thỏa mãn bài toán.

Bài 8.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bẩy chữ số(số đầu tiên khác 0), biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

Lời giải:

+ Chọn 2 vị trí cho 2 số 2 có C_7^2 cách chọn, tiếp theo chọn 3 vị trí cho 3 số 3 có C_5^3 cách chọn, còn 2 vị trí ta cần xếp 2 chữ số trong 8 số 0,1,4,5,6,7,8,9 vào 2 vị trí này có A_8^2 cách. Vậy có $C_7^2.C_5^3.A_8^2 = 11760$ số. Nhưng trong các số này có các số có số 0 đứng đầu, ta cần loại bỏ các số này.

+ Cho số 0 vào vị trí đầu tiên có 1 cách, tiếp theo chọn 2 vị trí cho 2 số 2 có C_6^2 cách chọn, chọn 3 vị trí cho 3 số 3 có C_4^3 cách chọn,và chọn một trong 7 số 1,4,5,6,7,8,9 xếp vào vị trí còn lại có 7 cách. Vậy có $1.C_6^2.C_4^3.7 = 420$ số.

Vậy các số thỏa mãn đề bài là 11760 – 420 =11340.

BÀI TOÁN CÁCH CHỌN

Bài 1.

Cho 2 đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1, d_2.

Lời giải:

Tam giác tạo thành nếu có một đỉnh trên d_1 và 2 đỉnh còn lại trên d_2 hoặc là một đỉnh trên d_2 và 2 đỉnh còn lại trên d_1.

TH1: Chọn một trong 17 điểm trên d_1 có C_{17}^1 cách và 2 trong 20 điểm trên d_2 có C_{20}^2 cách, vậy có $C_{17}^1.C_{20}^2 = 3230$ tam giác.

TH2: Chọn một trong 20 điểm trên d_2 có C_{20}^1 cách và 2 trong 17 điểm trên d_1 có C_{17}^2 cách, vậy có $C_{17}^2.C_{20}^1 = 2720$ tam giác.

Vậy tất cả có 2720+3230=5950 tam giác.

Bài 2.

Một đa giác lồi n cạnh thì có bao nhiêu đường chéo. Tính số giao điểm của các đường chéo trong đa giác.

Lời giải:

Vì là đa giác lồi nên không có 3 đỉnh nào thẳng hàng, do đó qua 2 đỉnh của đa giác kẻ được một đường thẳng riêng biệt.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Số đường thẳng nối giữa 2 đỉnh của đa giác là C_n^2, trong số những đường thẳng này có n đường thẳng chính là cạnh của đa giác. Vậy số đường chéo của đa giác là
$C_n^2 - n = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

+ Cứ 4 đỉnh của đa giác cho ta 2 đường chéo cắt nhau tại một điểm trong đa giác, vậy số giao điểm của các đường chéo trong đa giác là
$C_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Bài 3.

Cho một đa giác lồi n cạnh $(n > 3)$.

1. Tìm số giao điểm tối đa của các đường thẳng đi qua n đỉnh của đa giác, không kể tại đỉnh của đa giác.
2. Giả sử 2 đường chéo bất kỳ của đa giác không song song và 3 đường chéo không cùng đi qua một đỉnh thì không đồng quy. Hãy tìm số giao điểm của tất cả các đường chéo, không kể giao điểm ở các đỉnh đa giác và giao điểm nằm ngoài đa giác.

Lời giải:

1. Số đường thẳng nối 2 đỉnh của đa giác là $m = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

   Hai đường thẳng cắt nhau tại nhiều nhất 1 điểm, nên số giao điểm tối đa của các đường thẳng này là

   $$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right]}{2} = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n - 2).$$

   Nhưng tại mỗi đỉnh có $(n-1)$ đường thẳng cắt nhau tại đỉnh này với $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ giao điểm trùng nhau tại đỉnh đó, nên với n đỉnh sẽ có $nC_{n-1}^2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ giao điểm trùng ở các đỉnh của đa giác.

   Vậy số giao điểm tối đa không kể tại các đỉnh là

   $$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n - 2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

2. Ta có số đường chéo của đa giác là $m = C_n^2 - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Số giao điểm của m đường chéo là C_m^2

Tại mỗi đỉnh của đa giác là giao điểm của $(n-3)$ đường chéo, nên số giao điểm trùng tại đỉnh của $(n-3)$ đường chéo này là C_{n-3}^2, nhưng do có n đỉnh nên số giao điểm trùng tại n đỉnh của đa giác là nC_{n-3}^2.

Vậy số giao điểm của các đường chéo không kể tại đỉnh của đa giác là $C_m^2 - nC_{n-3}^2$.

Mặt khác lại có số giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác là C_n^4.

Vậy số giao điểm nằm ngoài đa giác cần tìm là

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$C_m^2 - nC_{n-3}^2 - C_n^4 = \dfrac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$.

Bài 4.

Cho tam giác ABC. Xét tập hợp 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu tam giác và bao nhiêu hình thang(không kể hình bình hành).

Lời giải:

Mỗi ta giác được tạo thành bởi 3 đường thẳng thuộc 3 họ khác nhau, vậy có 4.5.6=120 tam giác.
Mỗi hình thang được tạo thành bởi 2 đường thẳng ở một họ và 2 đường thẳng kia ở 2 họ còn lại, vậy có

$C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 720$ hình thang.

Bài 5.

Đa giác lồi 10 cạnh. Xét các tam giác là 3 đỉnh của đa giác lồi này. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu tam giác mà cả 3 cạnh của nó đều không phải là cạnh của đa giác lồi.

Lời giải:

Có tất cả $C_{10}^3 = 120$ tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác lồi. Trong đó có 10.6=60 tam giác có đúng một cạnh của đa giác lồi, và 10 tam giác chứa đúng 2 cạnh của đa giác lồi.
Vậy có 120 – 60 – 10 =50 tam giác không có cạnh nào là của đa giác.

Bài 6.

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n} (n \ge 2, n \in \mathbb{Z})$ nội tiếp đường tròn tâm (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, tìm n.

Lời giải:

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ cũng nội tiếp trong đường tròn tâm (O). Nên có 2 đường chéo qua tâm O, hay hình chữ nhật được tạo thành bởi mỗi 2 đường chéo qua tâm O. Số đường chéo qua tâm O của đa giác đều 2n cạnh là n, vậy số hình chữ nhật là C_n^2.

Theo giả thiết ta có

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8.$$

Bài 7.

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người trong đó, có 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Lời giải:

Chọn 4 nam trong 12 nam và 1 nữ trong 3 nữ về giúp đỡ tỉnh thứ nhất có $C_{12}^4.C_3^1$ cách, tiếp theo chọn 4 nam trong 8 nam còn lại và 1 nữ trong 2 nữ còn lại về giúp đỡ tỉnh thứ 2 có $C_8^4.C_2^1$, còn lại 4 nam và 1 nữ cho về giúp đỡ tỉnh thứ ba có 1 cách.

Vậy có $C_{12}^4.C_3^1.C_8^4.C_2^1.1 = 207900$ cách.

Bài 8.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Trong một môn học thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải đủ 3 loại câu hỏi(khó,trung bình và dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Lời giải:

Số câu hỏi dễ không ít hơn 2 nên có các trường hợp sau

TH1: Đề kiểm tra gồm 2 câu dễ, 2 câu khó và 1 câu trung bình, trường hợp này có $C_{15}^2.C_5^2.C_{10}^1 = 105.10.10 = 10500$ đề.

TH2: Đề kiểm tra gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó, trường hợp này có $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 = 105.45.5 = 23625$ đề.

TH3: Đề kiểm tra gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình, trường hợp này có $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 455.10.5 = 22750$ đề.

Vậy có tất cả 10500+23625+22750=56875 đề.

Bài 9.

Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Cần chọn một nhóm gồm 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách:

1. Chọn 3 học sinh bất kỳ.
2. Chọn 3 học sinh gồm 1 nam và 2 nữ.
3. Chọn 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam.

Lời giải:

1. Mỗi cách chọn là một tổ hợp chập 3 của 40, vậy có $C_{40}^3 = 9880$ cách.
2. Có C_{25}^1 cách chọn 1 nam, có C_{15}^2 cách chọn 2 nữ, vậy có $C_{25}^1.C_{15}^2 = 2625$ cách chọn 1 nam và 2 nữ.
3. Cách chọn không có nam có $C_{15}^3 = 455$, vậy có 9880 – 455=9425 cách chọn có ít nhất 1 nam.

Bài 10.

Một đội xây dựng gồm 10 công nhân và 3 kỹ sư, để lập một tổ công tác cần chọn một kỹ sư là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác.

Lời giải:

Có C_3^1 cách chọn 1 kỹ sư là tổ trưởng, có 10 cách chọn 1 công nhân trong 10 công nhân làm tổ phó và có C_9^5 cách chọn 5 công nhân làm tổ viên. Vậy có $C_3^1.10.C_9^5 = 3780$ cách lập tổ công tác.

Bài 11.

Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi không có đủ cả 3 màu?

Lời giải:

Số cách lấy ra 4 viên bi từ hộp này là $C_{15}^4 = 1365$ cách.

Cách lấy ra 4 viên bi có đủ cả 3 màu, có các trường hợp là

TH1: Lấy ra 2 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng và 1 viên bi vàng có $C_4^2.C_5^1.C_6^1 = 180$ cách.

TH2: Lấy ra 2 viên bi trắng, 1 viên bi đỏ và 1 viên bi vàng có $C_4^1.C_5^2.C_6^1 = 240$ cách.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

TH3: Lấy ra 2 bi vàng, 1 bi đỏ và 1 bi xanh có $C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 300$

Vậy có 180+240+300=720 cách lấy ra 4 viên bi có đủ 3 màu

Vậy có 1365 – 720 = 645 cách lấy ra 4 viên bi không có đủ cả 3 màu.

Bài 12.

Có n học sinh nam và n học sinh ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp để không có 2 học sinh cùng giới ngồi cạnh nhau.

Lời giải:

Đánh số ghế từ 1 cho đến 2n, nếu số nam ngồi ở số ghế chẵn thì số n sẽ ngồi ở số ghế lẻ, và có n! cách xếp chỗ chon am và n! cách xếp chỗ cho nữ, vậy có $(n!)^2$ cách xếp.

Nếu số nam ngồi ghế lẻ, số nữ ngồi ghế chẵn thì có $(n!)^2$ cách xếp.

Vậy tất cả có $2(n!)^2$ cách sắp xếp.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thong có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Bài 2.

Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ(trong đó có 4 cặp an hem sinh đôi). Cần chọn một nhóm 3 học sinh trong số 50 học sinh trên đi dự Đại hội Cháu ngoan Bác Hồ, sao cho trong nhóm không có cặp an hem sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Bài 3.

Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó 8 em chỉ biết Tiếng Anh, 7 em chỉ biết Tiếng Pháp và 5 em chỉ biết Tiếng Đức. Cần lập nhóm đi thực tế gồm 3 em biết Tiếng Anh, 4 em biết Tiếng Pháp và 2 em biết Tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên ấy?

Bài 4.

Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người . Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B,còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Bài 5.

Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng có kích thước đôi một khác nhau.

1. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, trong đó có 2 viên bi đỏ.
2. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi, sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ.

Bài 6.

Thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau gồm 5 cuốn văn học, 4 cuốn âm nhạc và 3 cuốn hội họa. Ông lấy ra 6 cuốn để tặng 6 học sinh A,B,C,D,E,F mỗi em một cuốn.

1. Có bao nhiêu cách nếu thầy chỉ muốn tặng cuốn sách văn học và âm nhạc.
2. Có bao nhiêu cách để sau khi tặng, thầy vẫn còn ít nhất mỗi loại một cuốn.

Bài 7.

Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 học sinh khá và 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia 16 học sinh này thành 2 nhóm, mỗi nhóm 8 người sao cho mỗi nhóm đều có học sinh giỏi và có ít nhất 2 học sinh khá.

Bài 8.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Có bao nhiêu cách xếp năm học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài sao cho

1. C ngồi chính giữa ghế.
2. A và E ngồi ở 2 đầu ghế.

Bài 9.
Một đoàn tàu có 3 toa chở khách là toa I, toa II, toa III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị lên tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống.

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa đó.
2. Có bao nhiêu cách sắp xếp để cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong số 4 vị khách trên.

Bài 10.
Một nhóm gồm 10 học sinh, gồm 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh này thành một hàng dọc sao cho 7 học sinh nam đứng liền nhau.

Bài 11. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông $ABCD$ lần lượt lấy $1, 2, 3$ và n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n, biết số tam giác có ba đỉnh từ $n+6$ điểm đã cho là 439.

Bài 12. Có 3 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 5 học sinh lớp C. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh từ các lớp trên sao cho mỗi lớp đều có ít nhất một học sinh được chọn.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

CÁC BÀI TOÁN ĐẾM VÀ SỐ CÁCH CHỌN

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

LỜI CUỐI

Tác giả luôn sẵn lòng giải đáp mọi thắc mắc của bạn đọc về nội dung của cuốn tài liệu này:

Mọi chi tiết xin liên hệ qua hòm thư điện tử

dangnamneu@gmail.com

hoặc qua nick chat: changtraipkt

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

www.VNMATH.com