TỔNG HỢP MỘT SỐ KINH NGIỆM GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

www.MATHVN.com

I. Đường thẳng và mặt phẳng .

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 1)

Phương pháp :

- Tìm điểm chung của 2 mặt phẳng
- Đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng

Chú ý : Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó . Giao điểm , nếu có của hai đường thẳng này chính là điểm chung của hai mặt phẳng .

2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp :

Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) , ta tìm trong (P) một đường thẳng c cắt A tại điểm A nào đó thì A là giao điểm của a và (P) .

Chú ý : Nếu c chưa có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng (Q) qua a và lấy c là giao tuyến của (P) và (Q) .

3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng , chứng minh 3 đường thẳng đồng quy .

Phương pháp :

- Muốn chứng minh 3 điểm thẳng hàng ta chứng minh 3 điểm đó là các điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.Khi đó chúng sẽ thẳng hàng trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó .
- Muốn chúng minh 3 đường thẳng đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường nàylà điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba .

4. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động

Phương pháp :

M là giao điểm của hai đường thẳng di động d và d' . Tìm tập hợp các điểm M.

* Phần thuận : Tìm hai mặt phẳng cố định lần lượt chứa d và d'. M di đọng trên giao tuyến cố định của hai mặt phẳng đó .

* Giới hạn (nếu có)

* Phần đảo

Chú ý : nếu d di động nhưng luôn qua điểm cố định A và cắt đường thẳng cố định a không qua A thì d luôn nằm trong mặt phẳng cố định (A,a)

5. Thiết diện

Thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) là đa giác giới hạn bởi các giao tuyến của (P) với các mặt hình chóp .

Phương pháp :
Xác định lần lượt các giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp theo các bước sau :
- Từ điểm chung có sẵn , xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (Có thể là mặt trung gian)
- Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác . Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này .
- Tiếp tục như thế cho tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện .

II. Hai đường thẳng song song .

1. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp :
Có thể dùng một trong các cách sau :
- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng , rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song rong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lý đảo của định lý Ta-lét ...)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song song với đường thẳng thứ 3 .
- Áp dụng định lý về giao tuyến .

2 . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2 / dạng 1)

Thiết diện qua một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước .
Phương pháp :
* Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng
* Áp dụng định lý về giao tuyến để tìm phương của giao tuyến (tức chứng minh giao tuyến song song với một đường thẳng đã có)
Giao tuyến sẽd là đường thẳng qua điểm chung và song song với đường thẳng ấy .
Ghi chú : Ta có 2 cách để tìm giao tuyến :
Cách 1(2 điểm chung) và cách 2 (1 điểm chung + phương giao tuyến) ta thường sử dụng phối hợp 2 cách khi xác định thiết diện của hình chóp .

3 . Tính góc giữa hai đường thẳng a,b chéo nhau.

Phương pháp :
Tính góc :
Lấy điểm O nào đó .
Qua O dựng a' // a và b' // b
Góc nhọn hoặc góc vuông tạo bởi a',b' gọi là góc giữa a và b .
Tính góc : Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lý hàm số côsin trong tam giác thường .

III.Đường thẳng song song với mặt phẳng .

1. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng P

Phương pháp :

Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với đường thẳng a chứa trong (P) .

Ghi chú : Nếu a không có sẵn trong hình thì ta chọn một mặt phẳng (Q) chứa d và lấy a là giao tuyến của (P) và (Q) .

2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng(Cách 2 / dạng 2)

Thiết diện song song với một đườc thẳng cho trước

Phương pháp :

Nhắc lại một hệ quả : Nếu đường thẳng d song song với một mặt phẳng (P) thì bất kỳ mặt phẳng (Q) nào chứa d mà cắt (P) thì sẽ cắt (P) theo giao tuyến song song với d .

Từ đây xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước theo phương pháp đã biết .

IV. Hai mặt phẳng song song.

1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp :

* Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia .

Chú ý :Sử dụng tính chất

$$\begin{cases}(P)//(Q)\\ a\subset(Q)\end{cases}$$
$$\Rightarrow a//(P)$$

ta có cách thứ 2 để chưngs minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) .

2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2 / dạng 3)

Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước .

Phương pháp :

- Tìm phương của giao tuyến của hai mặt phẳng bằng định lý về giao tuyến :"Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau " .
- Ta thường sử dụng định lý này để xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước theo phương pháp đã biết .
- Chú ý : Nhớ tính chất

$$\begin{cases} (P)//(Q) \\ a \subset (Q) \end{cases}$$
$$\Rightarrow (P)//a$$

V.Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau

Phương pháp :

* Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P)
- Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P).
- Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với (P) .
* Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau .
- Chứng minh hai đường thẳng này vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia .
- Nêú hai đường thẳng ấy cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp chứng minh vuông góc đã học trong hình học phẳng .

2. Thiết diện qua 1 điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước .

Cho khối đa diện (S) , ta tìm thiết diện của (S) với mặt phẳng (P) , (P) qua điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng d cho trước .

- Nếu có hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a,b cùng vuông góc với d thì :

(P) // a (hay chứa a)

(P) // b (hay chứa b)

Phương pháp tìm thiết diện loại này đã được trình bày ở những bài trên .

- Dựng mặt phẳng (P) như sau :

Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d , trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M .

mặt phẳng được xác định bởi hai đường thẳng trên chính là (P) .

Sau đó xác định thiết diện theo phương pháp đã học .

VI.Đường vuông góc và đường xiên.

1. Dựng đường thẳng qua một điểm A cho trước và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước .

Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp :

Thực hiện các bước sau :

*Chọn trong (P) một đường thẳng d, rồi dựng mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d (nên chọn d sao cho (Q) dễ dựng).

*Xác định đường thẳng $c=(P)\cap(Q)$
* Dựng AH vuông góc với c tại H
- Đường thẳng AH là đường thẳng qua A vuông góc với (P) .
- Độ dài của đoạn AH là khoảng cách từ A đến (P)

Chú ý :
- Trước khi chọn d và dựng (Q) nên xét xem d và (Q) đã cío sẵn trên hình vẽ chưa.
- Nếu đã có sẵn đường thẳng m vuông góc với (P), khi đó chỉ cần dựng Ax // m thì $Ax\perp(p)$
- Nếu AB // (P) thì d(A,(P)) = a(B, (P))
- Nếu AB cắt (P) tại I thì d(A,(P) : d(B, (P)) = IA : IB

2. Ứng dụng của trục đường tròn

Định nghĩa : Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn đó .

Ta có thể dùngn tính chất của trục đường tròn để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng .
- Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là một điểm cách đều 3 điểm A,B,C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; khi đó MO vuông góc với mặt phẳng (ABC) và MO = d(M,(ABC))
- Nếu MA=MB=MC và NA=NB=NC trong đó A,B,C là ba điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục đường tròn qua ba điểm A,B,C; khi đó MN vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm O của đương tròn qua ba điểm A,B,C .

3. Tập hợp hình chiếu của một điểm cố định trên một đường thẳng di động

Ta thường gặp bài toán : Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc M của điểm cố định A trên đường thẳng d di động trong mặt phẳng (P) cố định và luôn đi qua điểm cố định O .

Phương pháp :
- Dựng $AH\perp(P)(H\in(P))$, theo định lý ba đường vuông góc ta có $HM\perp d$
- Trong mặt phẳng (P), $\widehat{HMO}=1v$nên M thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong (P) .

4. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của một điểm cố định trên mặt phẳng di động .

Ta thường gặp bài toán : Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc H của một điểm cố dịnh A trên mặt phẳng (P) di động luôn chứa một đường thẳng d cố định .

Phương pháp :
- Tìm mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d

- Tìm $c = (P) \cap (Q)$
- Chiếu vuông góc A lên c, điểm chiếu là H thì H cũng là hình chiếu của A trên (P) .

Gọi E là giao điểm của d với (Q). Trong mặt phẳng (Q), $\widehat{AHE} = 1v$ nên H thuộc đường tròn đương kính AE .

5. Góc giữa đương thẳng và mặt phẳng

Cách xác định góc giữa a và (P) .

Phương pháp :

- Tìm giao điểm O của a với (P)
- Chọn điểm $A \in a$ và dựng $AH \perp (P) (H \in (P))$

khi đó $\widehat{AOH} = (\widehat{a,(P)})$.

VII. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Nhị diện góc giữa hai mặt phẳng

Khi giải các bài toán liên quan đến số đo nhị diện hay góc giữa hai mặt phẳng thì ta thường xác định góc phẳng của nhị diện. Nếu góc này chưa có sẵn trên hình ta có thể dựng nó theo phương pháp dưới đây .

Phương pháp :

- Tìm cạnh c của nhị diện (giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa hai mặt của nhị diện)
- Dựng một đoạn thẳng AB có hai đầu mút ở trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với một mặt của nhị diện .
- Chiếu vuông góc A (hay B) trên c thành H .

ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện .

Chú ý :

- Nếu đã có một đường thẳng d cắt hai mặt của nhị diện tại A, B và vuông góc với cạnh c của nhị diện thì ta có thể dựng góc phẳng của nhị diện đó như sau ; Chiếu vuông góc A (hay B hay một điểm trên AB) trên c thành H .

Khi đó $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện .
- Nếu hai đường thẳng a , b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q) thì $(\widehat{(P),(Q)}) = (\widehat{a,b})$.
- Nếu hai mặt của nhị diện lần lượt chứa hai tam giác cân MAB và NAB có chung đáy AB thì $\widehat{MIN}$ (I là trung điểm của AB) là góc phẳng của nhị diện đó .

2. Mặt phân giác của nhị diện , cách xác định mặt phân giác .

Phương pháp :

C1 :

- Tìm một góc phẳng $\widehat{xOy}$ của nhị diện $((P),c,(Q))$.
- Mặt phân giác của nhị diện $((P),c,(Q))$ là mặt qua cạnh c của nhị diện và phân giác Ot của góc phẳng xOy .

C2 :

- Tìm một điểm A cách đều hai mặt của nhị diện $((P),c,(Q))$.
- Mặt phân giác của nhị diện trên là mặt qua A và cạnh c của nhị diện .

3. Mặt phẳng vuông góc

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng .

* Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc .

Phương pháp :

- Cách 1 : Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia .
- Cách 2 : chứng minh góc giữa hai mặt phẳng có số đo bằng 90 .

* Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng .

- Cách 1 : Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P) .
- Cách 2 : Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với (P) .
- Cách 3 : Chứng minh a là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với A, B, C thuộc (P) .
- Cách 4 : Sử dụng định lý : " Nếu a chứa trong một mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) và a vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) thì a vuông góc với (P) " .
- Cách 5 : Sử dụng định lý : " Nếu a là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với (P) thì a vuông góc với (P) " .

4. Xác định mặt phẳng chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặtphẳng . Thiết diện .

Cho trước mặt phẳng (P) và đường thẳng a không vuông góc với (P) . Xác định mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với (P) .

Phương pháp :

- Từ một điểm trên a dựng b vuông góc với (P) thì (Q) là mặt phẳng (a, b) .

Chú ý : Nếu có đường thẳng $d\perp(P)$ thì (Q) // d hay (Q) chứa d .