

CHƯƠNG III: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa và các phép toán

- Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

- Lưu ý:

+ **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

+ **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

+ **Hệ thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tùy ý.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$$

+ **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

+ **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$$

+ **Điều kiện hai vectơ cùng phương:** \vec{a} và \vec{b} cùng phương ($\vec{a} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{R} : \vec{b} = k\vec{a}$

+ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq -1$), O tùy ý. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}; \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Khi đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists! m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

- Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, \vec{x} tùy ý.

$$\text{Khi đó: } \exists! m, n, p \in \mathbb{R} : \vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

- **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC} \quad (0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ)$$

- **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

+ Cho $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$. Khi đó: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

+ Với $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$. Qui ước: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

+ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh một đẳng thức vectơ.

Dựa vào qui tắc các phép toán về vectơ và các hệ thức vectơ.

- Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.
 a) Chứng minh: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.
 b) Chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$, với M tùy ý.
 c) Tìm điểm M thuộc mặt phẳng cố định (P) sao cho: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng trong một tứ diện bất kì, các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối đồng qui tại trung điểm của chúng. (Điểm đồng qui đó được gọi là trọng tâm của tứ diện)
- Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là các điểm chia các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số k ($k \neq 1$). Chứng minh rằng hai tứ diện ABCD và A'B'C'D' có cùng trọng tâm.

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh ba vectơ đồng phẳng.**Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng**

• Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

+ Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.

+ Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

Nếu có $m, n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

• Để phân tích một vectơ \vec{x} theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

- Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.
 HD: Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.
- Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi M, N, I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AE, CG, AD, DH, GH, FG; P và Q lần lượt là trung điểm của NG và JH.
 a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.
 b) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ đồng phẳng.
 HD: a) $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{PQ}$ có giá cùng song song với (ABCD).
 b) $\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}, \overrightarrow{AH}$ có giá cùng song song với (BDG).
- Cho hình lăng trụ ABC.DEF. Gọi G, H, I, J, K lần lượt là trung điểm của AE, EC, CD, BC, BE.
 a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{GI}, \overrightarrow{HK}$ đồng phẳng.
 b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên AF và CE sao cho $\frac{FM}{FA} = \frac{CN}{CE} = \frac{1}{3}$. Các đường thẳng vẽ từ M và N song song với CF lần lượt cắt DF và EF tại P và Q. Chứng minh ba vectơ

- $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CF}$ đồng phẳng.
4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.
- HD: Chứng minh $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{5AB} - \overrightarrow{AA'}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{GG'}$ đồng phẳng.
5. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và vectơ \vec{d} .
- a) Cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m và n $\neq 0$. Chứng minh các bộ ba vectơ sau không đồng phẳng:
- i) $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ii) $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$
- b) Cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với m, n và p $\neq 0$. Chứng minh các bộ ba vectơ sau không đồng phẳng:
- i) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ ii) $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ iii) $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$
- HD: Sử dụng phương pháp phản chứng.
6. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$ và ba số thực m, n, p $\neq 0$. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{x} = m\vec{a} - n\vec{b}$, $\vec{y} = p\vec{b} - m\vec{c}$, $\vec{z} = n\vec{c} - p\vec{a}$ đồng phẳng.
- HD: Chứng minh $p\vec{x} + n\vec{y} + m\vec{z} = \vec{0}$.
7. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- HD: a) $\overrightarrow{B'C} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.
8. Cho tứ diện OABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
- a) Phân tích vectơ \overrightarrow{OG} theo các ba $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.
- b) Gọi D là trọng tâm của tứ diện OABC. Phân tích vectơ \overrightarrow{OD} theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.
- HD: a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ b) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
9. Cho hình hộp OABC.DEFG. Gọi I là tâm của hình hộp.
- a) Phân tích hai vectơ \overrightarrow{OI} và \overrightarrow{AG} theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.
- b) Phân tích vectơ \overrightarrow{BI} theo ba vectơ $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}$.
- HD: a) $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. b) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FI}$.
10. Cho hình lập phương ABCD.EFGH.
- a) Phân tích vectơ \overrightarrow{AE} theo ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.
- b) Phân tích vectơ \overrightarrow{AG} theo ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.
- HD: a) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})$ b) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})$.

VẤN ĐỀ 3: Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.
- a) Xác định góc giữa các cặp vectơ: \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'C'}$, \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{AC'}$ và \overrightarrow{BD} .
- b) Tính các tích vô hướng của các cặp vectơ: \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'C'}$, \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{AC'}$ và \overrightarrow{BD} .
2. Cho hình tứ diện ABCD, trong đó $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ (k $\neq 1$). Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng: $\vec{a} \neq \vec{0}$ là VTCP của d nếu giá của \vec{a} song song hoặc trùng với d .

2. Góc giữa hai đường thẳng:

$$\bullet a' // a, b' // b \Rightarrow (\widehat{a', b'}) = (\widehat{a, b})$$

• Giả sử \vec{u} là VTCP của a , \vec{v} là VTCP của b , $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$.

$$\text{Khi đó: } (\widehat{a, b}) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{nếu } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases}$$

• Nếu $a // b$ hoặc $a \equiv b$ thì $(\widehat{a, b}) = 0^\circ$

Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{a, b}) \leq 90^\circ$

3. Hai đường thẳng vuông góc:

$$\bullet a \perp b \Leftrightarrow (\widehat{a, b}) = 90^\circ$$

• Giả sử \vec{u} là VTCP của a , \vec{v} là VTCP của b . Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

• Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

1. Chứng minh góc giữa hai đường thẳng đó bằng 90° .

2. Chứng minh 2 vectơ chỉ phương của 2 đường thẳng đó vuông góc với nhau.

3. Sử dụng các tính chất của hình học phẳng (như định lý Pi-ta-go, ...).

1. Cho hình chóp tam giác S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

HD: Chứng minh $\vec{SA} \cdot \vec{BC} = 0$

2. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.

a) Chứng minh AO vuông góc với CD.

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

$$\text{HD: } b) \cos(\widehat{AC, BM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

3. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.

a) CMR đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối diện thì vuông góc với 2 cạnh đó.

b) Tính góc hợp bởi các cạnh đối của tứ diện.

$$\text{HD: } b) \arccos \frac{|a^2 - c^2|}{b^2}; \arccos \frac{|b^2 - c^2|}{a^2}; \arccos \frac{|a^2 - b^2|}{c^2}.$$

4. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình bình hành với $AB = a$, $AD = 2a$, SAB là tam giác vuông cân tại A, M là điểm trên cạnh AD ($M \neq A$ và D). Mặt phẳng (P) qua M song song với mp(SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Đặt $AM = x$. Tính diện tích của MNPQ theo a và x .

5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$, $AB' \perp CD'$, $AD' \perp CB'$.

III. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa

$$d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (P)$$

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

$$\begin{cases} a, b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

3. Tính chất

- **Mặt phẳng trung trực** của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

- $\begin{cases} a // b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$
- $\begin{cases} a \perp (P), b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a // b$
- $\begin{cases} (P) // (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \neq (Q) \\ (P) \perp a, (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$
- $\begin{cases} a // (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$
- $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a // (P)$

4. Định lý ba đường vuông góc

Cho $a \not\subset (P), b \subset (P)$, a' là hình chiếu của a trên (P) . Khi đó $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu $d \perp (P)$ thì $(\widehat{d, (P)}) = 90^\circ$.
- Nếu $d \not\perp (P)$ thì $(\widehat{d, (P)}) = (\widehat{d, d'})$ với d' là hình chiếu của d trên (P) .

Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{d, (P)}) \leq 90^\circ$.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

* Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh $d \perp (P)$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong (P) .
- Chứng minh d vuông góc với (Q) và $(Q) // (P)$.
- Chứng minh $d // a$ và $a \perp (P)$.

* Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Để chứng minh $d \perp a$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh d vuông góc với (P) và (P) chứa a .
- Sử dụng định lý ba đường vuông góc.
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

1. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.
- a) CMR: $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

- b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.
- c) CMR: $HK \perp (SAC)$. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.
2. Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B; $SA \perp (ABC)$.
- a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$.
- b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB . Chứng minh: $AH \perp SC$.
3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết: $SA = SC$, $SB = SD$.
- a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
- b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. CMR: $IJ \perp (SBD)$.
4. Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là 2 tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.
- a) Chứng minh: $BC \perp (AID)$.
- b) Vẽ đường cao AH của ΔAID . Chứng minh: $AH \perp (BCD)$.
5. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC). Chứng minh rằng:
- a) $BC \perp (OAH)$.
- b) H là trực tâm của tam giác ABC.
- c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
- d) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.
6. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SAD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.
- a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.
- b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. CMR: $SH \perp AC$.
- c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: $BM \perp SA$. Tính AM theo a.
- HD: a) $a, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$
7. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.
- a) CMR: $SH \perp (ABCD)$.
- b) Chứng minh: $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.
8. Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.
- a) Chứng minh: $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.
- b) Đường thẳng qua A và vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với mp(HIJ). CMR: $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$.
- c) Tính diện tích tứ giác AKHL.
- HD: a) $a\sqrt{2}$. c) $\frac{8a^2}{15}$.
9. Gọi I là 1 điểm bất kì ở trong đường tròn (O;R). CD là dây cung của (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với $OS = R$. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). Chứng minh rằng:
- a) Tam giác SDE vuông tại S.
- b) $SD \perp CE$.
- c) Tam giác SCD vuông.

10. Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (P) . Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A ta lấy 2 điểm C, D ở hai bên điểm A . Gọi C' là hình chiếu của C trên MD , H là giao điểm của AM và CC' .
- a) Chứng minh: $CC' \perp (MBD)$.
- b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB . CMR: K là trực tâm của ΔBCD .
11. Cho hình tứ diện $ABCD$.
- a) Chứng minh rằng: $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.
- b) Từ đó suy ra nếu một tứ diện có 2 cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

VẤN ĐỀ 2: Tìm thiết diện qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng

Phương pháp: Tìm 2 đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với đường thẳng đã cho, khi đó mặt phẳng cắt sẽ song song (hoặc chứa) với 2 đường thẳng ấy.

1. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là 1 điểm trên cạnh AB . Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AB . Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$).
- a) Tìm thiết diện của hình chóp với (P) . Thiết diện là hình gì?
- b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .
- HD: a) Hình thang vuông b) $S = 2a(a - x)$.
2. Cho tứ diện $SABC$, có đáy là tam giác đều cạnh a ; $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với SC . Tìm thiết diện của tứ diện với (P) và tính diện tích của thiết diện này.
- HD: $S = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.
3. Cho tứ diện $SABC$ với ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$. $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. M là 1 điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .
- a) Tìm thiết diện của tứ diện với (P) .
- b) Tính diện tích của thiết diện đó theo a và x . Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.
- HD: b) $S = \sqrt{3}x(a - x)$; S lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$.
4. Cho hình tứ diện $SABC$ với ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:
- a) (P) qua S và vuông góc với BC .
- b) (P) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC .
- c) (P) qua trung điểm M của SC và vuông góc với AB .
- HD: a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. b) $\frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. c) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.
5. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB .

a) CMR: $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

HD: b) $S = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$

VẤN ĐỀ 3: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

- Tìm giao điểm O của a với (P).
- Chọn điểm $A \in a$ và dựng $AH \perp (P)$. Khi đó $\widehat{AOH} = (\widehat{a, (P)})$

1. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , tâm O; $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết $(\widehat{MN, (ABCD)}) = 60^\circ$.

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và (SBD).

HD: a) $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$; $SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$ b) $\sin(\widehat{MN, (SBD)}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a ; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b) SC và (SAB) c) SB và (SAC) d) AC và (SBC)

HD: a) 60° b) $\arctan \frac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{14}}$ d) $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật; $SA \perp (ABCD)$. Cạnh SC = a hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β .

a) Tính SA.

b) CMR: $AB = a\sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}$.

HD: a) $a \cdot \sin \alpha$

4. Cho hình chóp SABC, có ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Biết SA, SB, SC đều hợp với mặt phẳng (ABC) góc α .

a) CMR: hình chiếu của S trên mp(ABC) là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

b) Tính khoảng cách từ S đến mp(ABC).

HD: b) $\frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

5. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' \perp (ABC)$. Đường chéo BC' của mặt bên BCC'B' hợp với (ABB'A') góc 30° .

a) Tính AA'.

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến (BA'C').

c) Gọi N là trung điểm của cạnh BB'. Tính góc giữa MN và (BA'C').

HD: a) $a\sqrt{2}$. b) $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. c) $\arcsin \sqrt{\frac{54}{55}}$.

6. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; $AA' \perp (ABC)$. Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B'C' có độ dài bằng a , MN hợp với đáy góc α và mặt bên BCC'B' góc β .

a) Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α .

b) Chứng minh rằng: $\cos\alpha = \sqrt{2} \sin\beta$.

HD: a) $AB = AC = 2a \cos\alpha$; $BC = 2a\sqrt{2} \cos\alpha$; $AA' = a \sin\alpha$.

IV. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

$$\bullet \begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(P), (Q)}) = (\widehat{a, b})$$

$$\bullet \text{ Giả sử } (P) \cap (Q) = c. \text{ Từ } I \in c, \text{ dựng } \begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(P), (Q)}) = (\widehat{a, b})$$

Chú ý: $0^\circ \leq (\widehat{(P), (Q)}) \leq 90^\circ$

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P) , S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (Q) , $\varphi = (\widehat{(P), (Q)})$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos\varphi$

3. Hai mặt phẳng vuông góc

$$\bullet (P) \perp (Q) \Leftrightarrow (\widehat{(P), (Q)}) = 90^\circ$$

$$\bullet \text{ Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau: } \begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

4. Tính chất

$$\bullet \begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q) \qquad \bullet \begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$

$$\bullet \begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

VẤN ĐỀ 1: Góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp: Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

$$\bullet \text{ Tìm hai đường thẳng } a, b: a \perp (P), b \perp (Q). \text{ Khi đó: } (\widehat{(P), (Q)}) = (\widehat{a, b}).$$

$$\bullet \text{ Giả sử } (P) \cap (Q) = c. \text{ Từ } I \in c, \text{ dựng } \begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(P), (Q)}) = (\widehat{a, b})$$

1. Cho hình chóp $SABC$, có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC .

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC) .

$$\text{HD: a) } (\widehat{(SAC), (SBC)}) = 60^\circ \qquad \text{b) } \cos(\widehat{(SEF), (SBC)}) = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O ; $SA \perp (ABCD)$. Tính SA theo a để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) bằng 60° .

- HD: $SA = a$.
3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.
- a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).
b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).
- HD: a) $\tan(\widehat{(SAD), (SBC)}) = \sqrt{7}$ b) $\cos(\widehat{(SBC), (SCD)}) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.
4. Cho hình vuông ABCD cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:
- a) (SBC) và (ABC) b) (SBD) và (ABD) c) (SAB) và (SCD)
- HD: a) 60° b) $\arctan \sqrt{6}$ c) 30° .
5. Cho hình thoi ABCD cạnh a , tâm O, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $SA \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- a) Chứng minh \widehat{ASC} vuông.
b) Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.
c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).
- HD: c) 60° .
6. Cho hình chóp SABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng:
- a) (SBC) và (ABC) b) (SAB) và (SBC) c) (SBC) và (SCD)
- HD: a) 45° b) 60° c) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$.

**VẤN ĐỀ 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.
Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.**

*** Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc**

Để chứng minh $(P) \perp (Q)$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh trong (P) có một đường thẳng a mà $a \perp (Q)$.
- Chứng minh $(\widehat{(P), (Q)}) = 90^\circ$

*** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

Để chứng minh $d \perp (P)$, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh $d \subset (Q)$ với $(Q) \perp (P)$ và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).
- Chứng minh $d = (Q) \cap (R)$ với $(Q) \perp (P)$ và $(R) \perp (P)$.
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

1. Cho tam giác đều ABC, cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = a\sqrt{6}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.
2. Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD cùng vuông góc với đáy BDC. Vẽ các đường cao BE, DF của $\triangle BCD$, đường cao DK của $\triangle ACD$.
- a) Chứng minh: $AB \perp (BCD)$.
b) Chứng minh 2 mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với mp(ADC).
c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của 2 tam giác BCD và ADC. CMR: $OH \perp (ADC)$.

3. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.
 a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
 b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).
 c) Gọi BE, DF là hai đường cao của $\triangle SBD$. CMR: $(ACF) \perp (SBC)$, $(AEF) \perp (SAC)$.
 HD: b) 90° .
4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt ở trên 2 cạnh BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh 2 mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.
5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với mp(ABC).
 a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.
 b) Gọi AH, AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh 2 mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).
6. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.
 a) Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$, $AD \perp (SAB)$.
 b) Tính góc giữa BD và mp(SAD).
 c) Tính góc giữa SD và mp(SCI).
 HD: b) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ c) $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{5}$
7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mp(ABC); S là 1 điểm di động trên (P) sao cho SABC là hình chóp có 2 mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC..
 a) Chứng minh rằng: $SH^2 = HI.HJ$.
 b) Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α .
 HD: b) $SH_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{bc}$; $\alpha = \arctan \sqrt{\frac{c}{b}}$
8. Cho hình tứ diện ABCD có $AB = BC = a$, $AC = b$, $DB = DC = x$, $AD = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để:
 a) Mặt phẳng (ABC) \perp (BCD).
 b) Mặt phẳng (ABC) \perp (ACD).
 HD: a) $x^2 - y^2 + \frac{b^2}{2} = 0$ b) $x^2 - y^2 + b^2 - 2a^2 = 0$
9. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$; M và N là hai điểm nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt $BM = x$, $DN = y$.
 a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là $MN \perp (SAM)$. Từ đó suy ra hệ thức liên hệ giữa x và y.
 b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có số đo bằng 30° là $a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.
 HD: a) $a^2 - a(x + y) + x^2 = 0$
10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60° , cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SC \perp (ABCD)$.

- a) Chứng minh $(SBD) \perp (SAC)$.
 b) Trong tam giác SCA kẻ $IK \perp SA$ tại K . Tính độ dài IK .
 c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^\circ$ và từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.

HD: b) $IK = \frac{a}{2}$.

VẤN ĐỀ 3: Tính diện tích hình chiếu của đa giác

Phương pháp: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P) , S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (Q) , $\varphi = \left((P), (Q) \right)$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos \varphi$

- Cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh A ở trong mặt phẳng (P) , các đỉnh khác không ở trong (P) , $BD = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi lên mặt phẳng (P) ta được hình vuông $AB'C'D'$.
 a) Tính diện tích của $ABCD$ và $AB'C'D'$. Suy ra góc giữa $(ABCD)$ và (P) .
 b) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của CB , CD với (P) . Tính diện tích của tứ giác $EFDB$ và $EFD'B'$.
 HD: a) 450 b) $S_{EFDB} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$; $S_{EFD'B'} = \frac{3a^2}{4}$
- Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH = a\sqrt{3}$, đáy $BC = 3a$; $BC \subset (P)$. Gọi A' là hình chiếu của A trên (P) . Khi $\triangle A'BC$ vuông tại A' , tính góc giữa (P) và (ABC) .
 HD: 30°
- Cho tam giác đều ABC cạnh a , nằm trong mặt phẳng (P) . Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P) .
 a) Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích của tam giác ADE .
 b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (P) .
 HD: a) $\frac{3a^2}{4}$ b) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Cho hình chóp $SABC$ có các mặt bên hợp với đáy một góc φ .
 a) Chứng minh hình chiếu của S trên mp (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
 b) Chứng minh: $S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCA} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos \varphi}$
- Cho tứ diện $SABC$ có SA , SB , SC đôi một vuông góc. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:
 a) $SH \perp (ABC)$.
 b) $(S_{SBC})^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC}$. Từ đó suy ra: $(S_{ABC})^2 = (S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2$.
- Trong mặt phẳng (P) cho $\triangle OAB$ vuông tại O , $AB = 2a$, $OB = a$. Trên các tia vuông góc với (P) vẽ từ A và B và ở về cùng một bên đối với (P) , lấy $AA' = a$, $BB' = x$.
 a) Định x để tam giác $OA'B'$ vuông tại O .
 b) Tính $A'B'$, OA' , OB' theo a và x . Chứng tỏ tam giác $OA'B'$ không thể vuông tại B' . Định x để tam giác này vuông tại A' .
 c) Cho $x = 4a$. Vẽ đường cao OC của $\triangle OAB$. Chứng minh rằng $CA' \perp A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(OA'B')$ và (P) .

HD: a) $x = 0$ b) $x = 4a$ c) $\arccos \frac{\sqrt{39}}{26}$

IV. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

$d(M, a) = MH$ trong đó H là hình chiếu của M trên a hoặc (P).
 $d(M, (P)) = MH$

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

$d(a, (P)) = d(M, (P))$ trong đó M là điểm bất kì nằm trên a.
 $d((P), (Q)) = d(M, (Q))$ trong đó M là điểm bất kì nằm trên (P).

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường thẳng Δ cắt cả a, b và cùng vuông góc với a, b được gọi là đường vuông góc chung của a, b.
- Nếu Δ cắt a, b tại I, J thì IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của a, b.
- Độ dài đoạn IJ được gọi là khoảng cách giữa a, b.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

VẤN ĐỀ 1: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp: Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 1: Giả sử $a \perp b$:

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A.
 - Dựng $AB \perp b$ tại B.
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Sử dụng mặt phẳng song song.

- Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.
 - Chọn $M \in a$, dựng $MH \perp (P)$ tại H.
 - Từ H dựng đường thẳng $a' \parallel a$, cắt b tại B.
 - Từ B dựng đường thẳng song song MH , cắt a tại A.
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Chú ý: $d(a, b) = AB = MH = a(a, (P))$.

Cách 3: Sử dụng mặt phẳng vuông góc.

- Dựng mặt phẳng (P) $\perp a$ tại O.
 - Dựng hình chiếu b' của b trên (P).
 - Dựng $OH \perp b'$ tại H.
 - Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.
 - Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A.
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Chú ý: $d(a, b) = AB = OH$.

- Cho hình tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:
 - OA và BC.
 - AI và OC.
 HD: a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$
- Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, SA \perp (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:
 - SC và BD.
 - AC và SD.
 HD: a) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- Cho tứ diện SABC có SA \perp (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.
 - Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng qui.
 - Chứng minh SC \perp (BHK), HK \perp (SBC).
 - Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.
 HD: c) Gọi E = AH \cap BC. Đường vuông góc chung của BC và SA là AE.
- Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu AC = BD, AD = BC thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD.
 - Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD, AD = BC.
 HD: b) Giả sử BC = a, AD = a', AC = b, BD = b'. Chứng minh a = a', b = b'.
- Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS \perp (ABCD) và IS = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:
 - NP và AC
 - MN và AP.
 HD: a) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{a}{2}$

VẤN ĐỀ 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng.

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Để tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng (mặt phẳng) ta cần xác định đoạn vuông góc vẽ từ điểm đó đến đường thẳng (mặt phẳng).

- Cho hình chóp SABCD, có SA \perp (ABCD) và SA = $a\sqrt{6}$, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a.
 - Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).
 - Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).
 - Tính diện tích của thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (P) song song với mp(SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.
 HD: a) $d(A, (SCD)) = a\sqrt{2}$; $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$

2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.
- Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.
 - Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.
 - Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') .
- HD: a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.
- Tính khoảng cách từ A đến $mp(SBC)$, từ C đến $mp(SBD)$.
 - M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD . Chứng minh rằng MN song song với (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD) .
 - Mặt phẳng (P) qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F . Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) và diện tích tứ giác $BCFE$.
- HD: a) $a\sqrt{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$
4. Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60° , nhận $AB = a$ làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với $BC = a$. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax .
- Tính AD và khoảng cách từ C đến $mp(ABD)$.
 - Tính khoảng cách giữa AC và BD .
- HD: a) $AD = \frac{a}{2}; d(C, (ABD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{93}}{31}$
5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Đường thẳng $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC , F là trung điểm của BE .
- Chứng minh $(SOF) \perp (SBC)$.
 - Tính các khoảng cách từ O và A đến (SBC) .
- HD: b) $d(O, (SBC)) = \frac{3a}{8}, d(A, (SBC)) = \frac{3a}{4}$.

