CHƯƠNG II:
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG

I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Xác định một mặt phẳng

- Ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng. (*mp(ABC), (ABC)*)
- Một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó thuộc mặt phẳng. (*mp(A,d)*)
- Hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng. (*mp(a, b))*

2. Một số qui tắc vẽ hình biểu diễn của hình không gian

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Đường nhìn thấy vẽ nét liền, đường bị che khuất vẽ nét đứt.

VẤN ĐỀ 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ta có thể tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.

1. Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F.
a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD), (SAC) và (SBD).
b) Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng (SAD), (SBC).

2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mp(MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyến của mp(IJK) với (ACD) và (ABD).

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.
a) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (IBC) và (JAD).
b) M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (IBC) và (DMN).

5. Cho tứ diện (ABCD). M là một điểm bên trong ΔABD, N là một điểm bên trong ΔACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (AMN) và (BCD), (DMN) và (ABC).

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta có thể tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.

1. Cho tứ diện ABCD. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là một điểm bên trong ΔBCD.
a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD).
b) Tìm giao điểm của BC và BD với mặt phẳng (OMN).

2. Cho hình chóp S.ABCD. M là một điểm trên cạnh SC.
a) Tìm giao điểm của AM và (SBD).

b) Gọi N là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao điểm của SD và (AMN).

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD và không trùng với trung điểm của BD. Tìm giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (MNK).

4. Cho tứ diện ABCD. M, N là hai điểm lần lượt trên AC và AD. O là một điểm bên trong ΔBCD. Tìm giao điểm của:

a) MN và (ABO). b) AO và (BMN).

HD: a) Tìm giao tuyến của (ABO) và (ACD).

b) Tìm giao tuyến của (BMN) và (ABO).

5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt trên SA, AB, BC.

a) Tìm giao điểm của IK với (SBD).

b) Tìm các giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC.

HD: a) Tìm giao tuyến của (SBD) với (IJK).

b) Tìm giao tuyến của (IJK) với (SBD và (SCD).

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui

• *Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.*

• *Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta có thể chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.*

1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với SI > IA và SJ < JC. Một mặt phẳng (P) quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a) CMR: IJ, MN và SO đồng qui ($O = AC \cap BD$). Suy ra cách dựng điểm N khi biết M.

b) AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. CMR: S, E, F thẳng hàng.

c) IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. CMR PQ luôn đi qua 1 điểm cố định khi (P) di động.

2. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C không thẳng hàng ở ngoài (P). Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (P) tại D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng qui.

4. Cho hai điểm cố định A, B ở ngoài mặt phẳng (P) sao cho AB không song song với (P). M là một điểm di động trong không gian sao cho MA, MB cắt (P) tại A', B'. Chứng minh $A'B'$ luôn đi qua một điểm cố định.

5. Cho tứ diện SABC. Qua C dựng mặt phẳng (P) cắt AB, SB tại B_1, B'. Qua B dựng mặt phẳng (Q) cắt AC, SC tại C_1, C'. BB', CC' cắt nhau tại O'; BB_1, CC_1 cắt nhau tại O_1. Giả sử $O'O_1$ kéo dài cắt SA tại I.

a) Chứng minh: AO_1, SO', BC đồng qui.

b) Chứng minh: I, B_1, B' và I, C_1, C' thẳng hàng.

VẤN ĐỀ 4: Xác định thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng

Muốn xác định thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng (P) ta có thể làm như sau:

• *Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).*

• *Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này.*

• *Tiếp tục như trên cho tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.*

1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I là ba điểm trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

2. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh bằng a. Kéo dài BC một đoạn CE=a. Kéo dài BD một đoạn DF=a. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b) Tính diện tích của thiết diện. *HD: b)* $\frac{a^2}{6}$

3. Cho hình chóp S.ABC. M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

HD: Thiết diện là 1 ngũ giác.

4. Cho hình chóp S.ABCD. Trong ΔSBC, lấy một điểm M. Trong ΔSCD, lấy một điểm N.

a) Tìm giao điểm của MN và (SAC).

b) Tìm giao điểm của SC với (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (AMN).

HD: a) Tìm (SMN)∩(SAC) b) Thiết diện là tứ giác.

5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC), và giao điểm của (MNP) với SA.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP) và tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC, CD.

HD: b) Thiết diện là ngũ giác. Các tỉ số là: 1/3; 1; 1.

6. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD). Chứng minh (CGM) chứa CD.

b) Chứng minh (CGM) đi qua trung điểm của SA. Tìm thiết diện của hình chóp với (CGM).

c) Tìm thiết diện của hình chóp với (AGM).

HD: b) Thiết diện là tứ giác c) Tìm (AGM)∩(SAC). Thiết diện là tứ giác.

7. Cho hình chóp S.ABCD, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a) Tìm giao điểm I của BN và (SAC) và giao điểm J của MN và (SAC).

b) DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (BCN).

HD: a) Gọi O=AC∩BD thì I=SO∩BN, J=AI∩MN

b) J là điểm chung của (SAC) và (SDM)

c) Nối CI cắt SA tại P. Thiết diện là tứ giác BCNP.

8. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang ABCD với AB//CD và AB > CD. Gọi I là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) quay quanh AI cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) IM kéo dài cắt BC tại P, IN kéo dài cắt CD tại Q. Chứng minh PQ luôn đi qua 1 điểm cố định.

c) Tìm tập hợp giao điểm của IM và AN.

HD: a) Qua giao điểm của AI và SO=(SAC)∩(SBD).

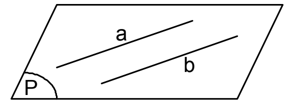
b) Điểm A.

c) Một đoạn thẳng.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$



2. Tính chất

• *Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.*

• *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.*

• *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

1. Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lí Talét đảo, …)

2. Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.

3. Áp dụng định lí về giao tuyến song song.

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD. Chứng minh IJ//CD.

2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh: MN // CD.

b) Tìm giao điểm P của SC với (AND). Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì?

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành.

b) Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

4. Cho tam giác ABC nằm trong mặt phẳng (P). Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song và nằm về cùng một phía đối với (P). M, N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

a) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định I khi M, N di động.

b) E thuộc đoạn AM và EM = $\frac{1}{3}$EA. IE cắt AN tại F. Gọi Q là giao điểm của BE và CF. CMR AQ song song với Bx, Cy và (QMN) chứa 1 đường thẳng cố định khi M, N di động.

5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD.

a) Chứng minh: PQ // SA.

b) Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh: SK // AD // BC.

c) Qua Q dựng các đường thẳng Qx // SC và Qy // SB. Tìm giao điểm của Qx với (SAB) và của Qy với (SCD).

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp:

• Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng.

• Áp dụng định lí về giao tuyến để tìm phương của giao tuyến.

Giao tuyến sẽ là đường thẳng qua điểm chung và song song với đường thẳng ấy.

1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang với đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trọng tâm của ΔSAB.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJM).

3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang với các đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD, SBC.

a) Tìm đoạn giao tuyến của (ADJ) với mặt (SBC) và đoạn giao tuyến của (BCI) với mặt (SAD).

b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

HD: *b)* $\frac{2}{5}(a+b)$.

4. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với KB = 2KD.

a) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tính diện tích thiết diện đó.

HD: *b)* $\frac{5a^2\sqrt{51}}{288}$

5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $\widehat{SAD} = 90^0$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Tìm giao điểm I của Dx với mp(SAB). Chứng minh: AI // SB.

b) Tìm thiết diện của hình chóp SABCD với mp(AIC). Tính diện tích thiết diện.

HD: *b) Tam giác AMC với M là trung điểm của SD. Diện tích* $\frac{a^2\sqrt{14}}{8}$

III. ĐƯỜNG THẲNG và MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$d \,//\, (P) \Leftrightarrow d \cap (P) = \varnothing$

2. Tính chất

• *Nếu đường thẳng d không nằm trên mặt phẳng (P) và d song song với đường thẳng d′ nằm trong (P) thì d song song với (P).*

• *Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa d mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với d.*

• *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.*

• *Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.*

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng d′ nào đó nằm trong (P).

1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.
a) Gọi O, O′ lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO′ song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).
b) M, N là 2 điểm lần lượt trên hai cạnh AE, BD sao cho AM = $\frac{1}{3}$AE, BN = $\frac{1}{3}$BD. Chứng minh MN // (CDFE).

2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD.
a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC), (SAD).
b) Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh SB, SC đều song song với (MNP).
c) Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC. Chứng minh G_1G_2 // (SBC).

3. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm của ΔABD. M là 1 điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh MG // (ACD).
HD: Chứng minh MG song song với giao tuyến của (BMG) và (ACD).

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O′ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng:
a) Điều kiện cần và đủ để OO′ // (BCD) là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}$
b) Điều kiện cần và đủ để OO′ song song với 2 mặt phẳng (BCD), (ACD) là BC = BD và AC = AD.
HD: Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác.

5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.
a) Tìm giao điểm A′ của đường thẳng AG với mp(BCD).
b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA′ và Mx cắt (BCD) tại M′. Chứng minh B, M′, A′ thẳng hàng và BM′ = M′A′ = A′N.
c) Chứng minh GA = 3GA′.

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: Tìm phương của giao tuyến. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước.

1. Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm trên AB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA.
a) Tìm các giao tuyến của (P) với (SAB) và (SAC).
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).
c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.
HD: *c) MN // BC*

2. Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài (P) sao cho SB = a và SB ⊥ OA. Gọi M là 1 điểm trên cạnh AB. Mặt phẳng (Q) qua M và song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM (0 < x < a).
a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.
b) Tính diện tích hình thang đó. Tìm x để diện tích lớn nhất.
HD: *b)* $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a-3x)}{4}$. S_{MNPQ} *đạt lớn nhất khi* $x = \dfrac{2a}{3}$

3. Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm bất kì trên SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.
a) Tìm các giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SBC), (SCD), (SAC).
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P).

4. Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.
a) Tìm giao tuyến của (P) với (ICD).
b) Xác định thiết diện của tứ diện ABCD với (P).

5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành. Gọi C′ là trung điểm của SC, M là 1 điểm di động trên cạnh SA. Mặt phẳng (P) di động luôn đi qua C′M và song song với BC.
a) Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.
b) Xác định thiết diện mà (P) cắt hình chóp SABCD. Xác định vị trí điểm M để thiết diện là hình bình hành.
c) Tìm tập hợp giao điểm của 2 cạnh đối của thiết diện khi M di động trên cạnh SA.
HD: *a) Đường thẳng qua C′ và song song với BC.*
b) Hình thang. Hình bình hành khi M là trung điểm của SA.
c) Hai nửa đường thẳng.

IV. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$(P) // (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$

2. Tính chất

• *Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*

• *Nếu đường thẳng d song song với mp(P) thì có duy nhất một mp(Q) chứa d và song song với (P).*

• *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

• *Cho một điểm A $\notin$ (P). khi đó mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong một mp(Q) đi qua A và song song với (P).*

• *Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.*

• *Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.*

• ***Định lí Thales:*** *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

• ***Định lí Thales đảo:*** *Giả sử trên hai đường thẳng d và d′ lần lượt lấy các điểm A, B, C và A′, B′, C′ sao cho:*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Khi đó, ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song với một mặt phẳng.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp: Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng trong mặt phẳng kia.

1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh (OMN) // (SBC).

b) Gọi P, Q là trung điểm của AB, ON. Chứng minh PQ // (SBC).

2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có: $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a) CMR: IJ luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước.

HD: a) IJ song song với mp qua AB và song song CD.

b) Tập hợp điểm M là đoạn EF với E, F là các điểm chia AB, CD theo tỉ số k.

3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) CMR: (OMN) // (SBC).

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song (SAB).

c) Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF // (SAD).

HD: *c) Chú ý:* $\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FB}}$

4. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho: AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M′, N′.

a) Chứng minh: (CBE) // (ADF).

b) Chứng minh: (DEF) // (MNN′M′).

c) Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N di động.

HD: *c) Trung tuyến tam giác ODE vẽ từ O.*

5. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By. M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax, By sao cho AM = BN. Vẽ $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$.

a) Chứng minh MP có phương không đổi và MN luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.

b) Gọi I là trung điểm của MN. CMR I nằm trên 1 đường thẳng cố định khi M, N di động.

6. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. CMR các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ đồng phẳng.

HD: *Cùng nằm trong mặt phẳng qua A và song song với (BCD).*

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp:

- *Tìm phương của giao tuyến bằng cách sử dụng định lí: Nếu 2 mặt phẳng song song bị cắt bởi 1 mặt phẳng thứ ba thì 2 giao tuyến song song.*
- *Sử dụng định lí trên để xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi 1 mặt phẳng song song với 1 mặt phẳng cho trước.*

1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O với AC = a, BD = b. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với mp(SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với (P).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AI.

HD: *a) Xét 2 trường hợp: $I \in OA$, $I \in OC$. Thiết diện là tam giác đều.*

$$b)\ S_{\text{thiết diện}} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2} & \text{nếu } 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2} & \text{nếu } \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

2. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tam giác ABC nằm trong (P) và đoạn thẳng MN nằm trong (Q).

a) Tìm giao tuyến của (MAB) và (Q); của (NAC) và (Q).

b) Tìm giao tuyến của (MAB) và (NAC).

3. Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz, Dt không nằm trong (ABCD). Một mặt phẳng (P) cắt bốn nửa đường thẳng tại A′, B′, C′, D′.

a) Chứng minh (Ax,By) // (Cz,Dt).
b) Chứng minh A′B′C′D′ là hình bình hành.
c) Chứng minh: AA′ + CC′ = BB′ + DD′.

4. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB.
a) Chứng minh $(G_1G_2G_3)$ // (BCD).
b) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mp$(G_1G_2G_3)$. Tính diện tích thiết diện khi biết diện tích tam giác BCD là S.
c) M là điểm di động bên trong tứ diện sao cho G_1M luôn song song với mp(ACD). Tìm tập hợp những điểm M.
HD: b) $\frac{4S}{9}$

5. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′. Gọi H là trung điểm của A′B′.
a) Chứng minh CB′ // (AHC′).
b) Tìm giao điểm của AC′ với (BCH).
c) Mặt phẳng (P) qua trung điểm của CC′ và song song với AH và CB′. Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ.
HD: *c) M, N, P, Q, R theo thứ tự chia các đoạn CC′, B′C′, A′B′, AB, AC theo các tỉ số 1, 1, 3,* $\frac{1}{3}$*, 1.*

6. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′.
a) Chứng minh hai mặt phẳng (BDA′) và (B′D′C) song song.
b) Chứng minh đường chéo AC′ đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của 2 tam giác BDA′, B′D′C. Chứng minh G_1, G_2 chia đoạn AC′ làm ba phần bằng nhau.
c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mp$(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?
HD: *c) Hình bình hành.*

7. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Trên AB, CC′, C′D′, AA′ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho AM = C′N = C′P = AQ = x $(0 \le x \le a)$.
a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại 1 điểm cố định.
b) Chứng minh mp(MNPQ) luôn chứa 1 đường thẳng cố định.
Tìm x để (MNPQ) // (A′BC′).
c) Dựng thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNPQ). Thiết diện có đặc điểm gì? Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.
HD: *a) MP và NQ cắt nhau tại tâm O của hình lập phương.*
b) (MNPQ) đi qua trung điểm R, S của BC và A′D′. $x = \frac{a}{2}$.
c) Thiết diện là lục giác MRNPSQ có tâm đối xứng là O.
Chu vi nhỏ nhất: $3a\sqrt{2}$; *chu vi lớn nhất:* $2a(\sqrt{2} + 1)$.

8. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′.
a) Tìm giao tuyến của (AB′C′) và (BA′C′).
b) Gọi M, N lần lượt là 2 điểm bất kì trên AA′ và BC. Tìm giao điểm của B′C′ với mặt phẳng (AA′N) và giao điểm của MN với mp(AB′C′).

9. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC′), (BCA′) và (CAB′) có một điểm chung O ở trên đoạn GG′ nối trọng tâm ΔABC và trọng tâm ΔA′B′C′. Tính $\frac{OG}{OG'}$. *HD:* $\frac{1}{2}$

BÀI TẬP ÔN

1. Cho tứ diện ABCD có AB = 2a, tam giác BCD vuông tại C có BD = 2a, BC = a. Gọi E là trung điểm của BD. Cho biết $(\widehat{AB,CE}) = 60^0$.

a) Tính $2AC^2 – AD^2$ theo a.

b) (P) là 1 mặt phẳng song song với AB và CE, cắt các cạnh BC, BD, AE, AC theo thứ tự tại M, N, P, Q. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x = BM (0 < x < a). Xác định x để diện tích ấy lớn nhất.

c) Tìm x để tổng bình phương các đường chéo của MNPQ là nhỏ nhất.

d) Gọi O là giao điểm của MP và NQ. Tìm (P) để $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ nhỏ nhất.

HD: *a) Gọi F là trung điểm của AD.*

Xét $\widehat{CEF} = 60^0, \widehat{CEF} = 120^0 \Rightarrow 2AC^2 – AD^2 = 6a^2$ *hoặc* $–2a^2$.

b) $S = x(a-x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \dfrac{a}{2}$ *c)* $x = \dfrac{a}{2}$

d) $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$.

O di động trên đoạn IJ nối trung điểm của AB và CE. Tổng nhỏ nhất khi O là hình chiếu của G lên IJ (G là trọng tâm tứ diện ABCD).

2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (P) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng qui hoặc song song và MNPQ thường là hình thang cân.

b) Đặt AM = x, AN = y. CMR: a(x + y) = 3xy. Suy ra: $\dfrac{4a}{3} \le x + y \le \dfrac{3a}{2}$.

c) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và s = x + y.

HD: *b)* $S_{\Delta AMN} = S_{AMI} + S_{ANI}$ *c)* $\dfrac{2a-s}{4}.\sqrt{s^2 - \dfrac{8as}{3}}$.

3. Cho hình chóp S.ABCD. Tứ giác đáy có AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F, AC và BD cắt nhau tại G. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC lần lượt tại A′, B′, C′.

a) Tìm giao điểm D′ của SD với (P).

b) Tìm điều kiện của (P) để A′B′ // C′D′.

c) Với điều kiện nào của (P) thì A′B′C′D′ là hình bình hành? CMR khi đó:

$$\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC} = \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}$$

d) Tính diện tích tứ giác A′B′C′D′.

HD: *b) (P) // SE.*

c) (P) // (SEF). Gọi $G' = A'C' \cap B'D'$. *Chứng minh:* $\dfrac{SA'}{SA} + \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2SG'}{SG}$

d) $S_{A'B'C'D'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

4. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (P) tại A và B. Đường thẳng (Δ) thay đổi luôn song song với (P), cắt d_1 tại M, d_2 tại N. Đường thẳng qua N và song song d1 cắt (P) tại N′.

a) Tứ giác AMNN′ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N′.

b) Xác định vị trí của (Δ) để MN có độ dài nhỏ nhất.

c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng cố định khi M di động.

d) Tam giác BMN vuông cân đỉnh B và BM = a. Tính diện tích thiết diện của hình chóp B.AMNN′ với mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (BMN).

HD: a) Hình bình hành. Tập hợp các điểm N′ là d_3, giao tuyến của (P) với mặt phẳng qua d_2 và song song với d_1.

b) MN nhỏ nhất khi AN′ vuông góc d_3 tại N′.

d) $\dfrac{3a^2}{8}$

5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành. M và P là hai điểm lần lượt di động trên AD và SC sao cho: $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{PS}{PC} = x$ (x > 0).

a) CMR: MP luôn song song với một mặt phẳng cố định (P).

b) Tìm giao điểm I của (SBD) với MP.

c) Mặt phẳng qua M và song song với (P) cắt hình chóp SABCD theo một thiết diện và cắt BD tại J. Chứng minh IJ có phương không đổi. Tìm x để PJ song song với (SAD).

d) Tìm x để diện tích thiết diện bằng k lần diện tích ΔSAB (k > 0 cho trước).

HD: a) Mặt phẳng (SAB). c) Phương của SB; x = 1.

d) $x = \dfrac{1-k+\sqrt{1-k}}{k}$ *(0 < k < 1).*

6. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. SA = SB = SC = SD = a. Gọi M là một điểm trên đoạn AO. (P) là mặt phẳng qua M và song song với AD và SO. Đặt $\dfrac{AM}{AO} = k$ (0 < k < 1).

a) Chứng minh thiết diện của hình chóp với (P) là hình thang cân.

b) Tính các cạnh của thiết diện theo a và k.

c) Tìm k để thiết diện trên ngoại tiếp được 1 đường tròn. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện theo a.

HD: b) a; (1 – k)a; $\dfrac{ka\sqrt{3}}{2}$ *c) k=* $\sqrt{3}-1$; $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{9}$

7. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên 3 đoạn AB′, AC′, B′C sao cho $\dfrac{AM}{AB'} = \dfrac{C'N}{AC'} = \dfrac{CP}{CB'} = x$.

a) Tìm x để (MNP) // (A′BC′). Khi đó hãy tính diện tích của thiết diện cắt bởi mp(MNP), biết tam giác A′BC′ là tam giác đều cạnh a.

b) Tìm tập hợp trung điểm của NP khi x thay đổi.

HD: a) x = $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9}$ *b) Đoạn thẳng nối trung điểm của CC′ và AB.*

8. Cho lăng trụ ABCD.A′B′C′D′, có đáy là hình thang với AD = CD = BC = a, AB = 2a Mặt phẳng (P) qua A cắt các cạnh BB′, CC′, DD′ lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác AMNP là hình gì? So sánh AM và NP.

b) Tìm tập hợp giao điểm của AN và MP khi (P) di động.

c) CMR: BM + 2DP = 2CN.

HD: *a) Hình thang. AM = 2NP.* *b) Đoạn thẳng song song với cạnh bên.*

c) $DP = \dfrac{5a}{4}$.