

ĐẠO DIỄN: TRUNG đẹp trai ---hehe

ĐỀ 2

Bài 1: Tìm

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$$

Bài 2: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}, & \text{khi } x \neq -2 \\ 3, & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ (1)

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số (1) rồi suy ra $f''(-5)$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $M_0(0; 1)$.
- Chứng minh PT $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(-1; 1)$.

Bài 4: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a có góc $\angle BAD = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = a$.

- Chứng minh (SAC) vuông góc với (ABCD).
- Chứng minh tam giác SAC vuông.
- Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).

MỘT SỐ ĐỀ THI THAM KHẢO

ĐỀ 1

Câu 1: Tính giới hạn của hàm số

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x - 9}{x - 3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{-3x + 2}$$

Câu 2: Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 + x + 10}{2x + 4} & \text{nếu } x < -2 \\ 4x + 17 & \text{nếu } x \geq -2 \end{cases}$$

Câu 3: Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 8$

b) $y = \frac{2x^2 + 5x - 1}{3x - 4}$

c) $y = 3\sin 3x - 3\cos^2 4x$

Câu 4:

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C)
 $y = -2x^4 + x^2 - 3$ tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_0 = 1$.
 b) Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$.

Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \cos x) + x \cdot y'' = 0$

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác cân ở B và $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = AB = 2a$. Gọi O là trung điểm của đoạn AC, H là hình chiếu của O trên SC.

- a) Chứng minh: $OB \perp SC$.
 b) Chứng minh: $(HBO) \perp (SBC)$.
 c) Gọi D là điểm đối xứng với B qua O. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Chương I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

PHẦN 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1. $y = \sin \frac{x+1}{x-1}$

2. $y = \frac{3\sin 2x}{2\cos 3x}$

3. $y = \cot(2x - \frac{\pi}{4})$

4. $y = \tan(\frac{2\pi}{3} + 5x)$

5. $y = \cos \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

6. $y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos + 1}}$

7. $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$

8. $y = \frac{3 + \tan x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

9. $y = \frac{\sin x}{\cos x - 1} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

10. $y = \sqrt{2 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}$

Bài 2. Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số:

1. $y = \frac{\cos 3x}{x}$

2. $y = 2x - 2\sin x$

3. $y = \sin|x| + x^2$

4. $y = \frac{1}{2}\tan^2 x + 1$

5. $y = 3\sin^2 x - \cos x$

6. $y = \tan x + 2\cos x$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) + 3$

2. $y = 3 - \frac{1}{2}\cos 2x$

3. $y = \frac{1 + 3\cos^2 x}{2}$

4. $y = 2 - 4\sin x \cos x$

5. $y = 4\sin^2 x - \cos 2x$

6. $y = 3\sqrt{\cos 2x} + 1$

$$7. y = 7 - 3|\sin 3x| \quad 8. y = \sqrt{5 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$$

Bài 4. Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

$$1. y = -\sin x \quad 2. y = 2 - \sin x$$

$$3. y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad 4. y = \cos x + 1$$

PHẦN 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1. \sin 3x &= \frac{1}{2} & 2. \cos 2x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3. \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{3} & 4. \sin 2x - \sin 2x \cos x &= 0 \\ 5. \sin 3x - \cos 2x &= 0 & 6. \tan 4x \cot 2x &= 1 \\ 7. 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 &= 0 & 8. \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan 3x &= 0 \\ 9. \cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} &= 0 & 10. \cos^4 x - \sin^4 x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 11. \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \\ 12. \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 13. \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x &= 1 \\ 14. \sin^2 2x - \cos^2 8x &= \sin\left(\frac{17\pi}{2} + 10x\right) \\ 15. \cos^4 x + \sin^6 x &= \cos 2x \end{aligned}$$

3. Dùng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD

4. Tính : $d[CM, (SA)]$

Bài 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.
2. Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.
3. Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') .

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Chứng minh: $B'D \perp (BA'C')$; $B'D \perp (ACD')$
2. Tính $d[(BA'C'), (ACD')]$
3. Tính $d[(BC'), (CD')]$

1. OA và BC

2. AI và OC.

Bài 2. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

1. SC và BD.

2. AC và SD.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính:

1. Giữa SC và BD ; giữa AC và SD.

2. $d[A, (ABCD)]$

3. $d[O, (SBC)]$ với O là tâm của hình vuông.

4. $d[I, (ABCD)]$ với I là trung điểm của SC.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D $AB = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính :

1. $d[A, (SCD)]$; $d[A, (SBC)]$

2. $d[AB, (SCD)]$

3. $d[AB, (SCD)]$

4. $d[DE, (SBC)]$, E là trung điểm của AB

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và $(SAD) \perp (ABCD)$. gọi I là trung điểm của SB và $K = CM \cap BI$

1. Chứng minh $(CMF) \perp (SIB)$

2. Chứng minh : tam giác BKF cân tại K

$$16. \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} = 0$$

$$17. \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

$$18. \frac{(2 - \sqrt{3}) \cos x - 2 \sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})}{2 \cos x - 1} = 1$$

Bài 2. Giải và biện luận phương trình:

$$1. \sin x = 2m - 1$$

$$2. (4m - 1) \cos x = m \cos x - 8$$

$$3. 4 \tan x - m = (m + 1) \tan x$$

$$4. (3m - 2) \cos 2x + 4m \sin^2 x + m = 0$$

Bài 3. Tìm m để phương trình:

$$1. \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = m \text{ có nghiệm } x \in (0; \frac{\pi}{2})$$

$$2. (2 + m) \sin(x + \frac{7\pi}{2}) - (3m + 2) \cos(2\pi - x) + m - 2 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1. 4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$2. 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$$

$$3. 2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0$$

$$4. 2 \cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$5. \frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x$$

$$6. 5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$$

$$7. 6 \sin^2 3x + \cos 12x = 4$$

$$8. \cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$9. \cot x = \tan x + \frac{2 \cos 4x}{\sin 2x}$$

$$10. \frac{\cos x(2 \sin x + 3\sqrt{2}) + 2 \sin^2 x - 3}{1 + \sin 2x} = 1$$

$$11. 3 \tan^4 x + 2 \tan^4 x - 1 = 0$$

$$12. \cos x - \sin x = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$$

$$13. \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2(\cos x + \frac{1}{\cos x}) = 1$$

$$14. \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 4$$

Bài 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$1. \cos^2 x + (1 - m) \cos x + 2m - 6 = 0$$

$$2. 4 \cos^2 2x - 4 \cos 2x - 3 - 3m = 0$$

Bài 3. Cho phương trình: $\cos 2x + (a + 2) \sin x - a - 1 = 0$

1. Giải phương trình đã cho khi $a = 1$.

2. Với giá trị nào của a thì phương trình đã cho có nghiệm?

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO $\sin u$ VÀ $\cos u$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$$

$$2. \cos x - \sqrt{3} \sin x = -1$$

1. Chứng minh: $(SAB) \perp (SAD)$, $(SAB) \perp (SBC)$.

2. Tính góc giữa hai mp (SAD) , (SBC) .

3. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh: $(SHC) \perp (SDI)$.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O, I, J lần lượt là trung điểm của BC và AB, AC. Từ O kẻ đoạn thẳng $OS \perp (ABC)$.

1. Chứng minh: $(SBC) \perp (ABC)$.

2. Chứng minh: $(SOI) \perp (SAB)$.

3. Chứng minh: $(SOI) \perp (SOJ)$.

Bài 11. Cho tam diện ba góc vuông Oxyz (3 tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc). Lần lượt lấy trên Ox, Oy, Oz các điểm B, C, A sao cho $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Các đường cao CH và BK của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1. Chứng minh: $(ABC) \perp (OHC)$.

2. Chứng minh: $(ABC) \perp (OKB)$.

3. Chứng minh: $OI \perp (ABC)$.

4. Gọi α , β , γ lần lượt là góc tạo bởi OA, OB, OC với OI.

Chứng minh: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

KHOẢNG CÁCH

Bài 1. Cho hình tứ diện OABC, trong đó $OA, OB, OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

1. Chứng minh: $(SBC) \perp (ABC)$.

2. Chứng minh: $(SOI) \perp (ABC)$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC.

1. Chứng minh: $SI \perp (ABCD)$.

2. Chứng minh: trên mặt phẳng SAD và SBC là những tam giác vuông.

3. Chứng minh: $(SAD) \perp (SAB)$, $(SBC) \perp (SAB)$.

4. Chứng minh: $(SDK) \perp (SIC)$.

Bài 7. Cho tứ diện ABCD có cạnh $AD \perp (BCD)$. Gọi AE, BF là hai đường cao của tam giác ABC, H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và tam giác BCD.

1. Chứng minh: $(ADE) \perp (ABC)$.

2. Chứng minh: $(BFK) \perp (ABC)$.

3. Chứng minh: $HK \perp (ABC)$.

Bài 8. Trong mp (P) cho hình thoi ABCD với $AB = a$, $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mp (P) tại giao điểm O

của hai đường chéo hình thoi ta lấy S sao cho $SB = a$.

1. Chứng minh: ΔSAC vuông.

2. Chứng minh: $(SAB) \perp (SAD)$.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$.

$$3. \sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = \sqrt{2}$$

$$4. 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$5. 2 \sin 2x \cos 2x + \sqrt{3} \cos 4x + \sqrt{2} = 0$$

$$6. \cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$$

$$7. \sin^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$8. \tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$9. \sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$10. 3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$$

$$11. \frac{\sqrt{3}(1 - \cos 2x)}{2 \sin x} = \cos x$$

$$12. \cot x - \tan x = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x}$$

Bài 2. Định m để phương trình sau đây có nghiệm:

$$1. m \sin x + 2 \cos x = 3$$

$$2. \sin 2x + m \cos 2x + 2m = 0$$

$$3. m \cos 3x + (m + 2) \sin 3x = 2$$

$$4. (\sin x + 2 \cos x + 3)m = 1 + \cos x$$

$$5. m(\cos x - \sin x - 1) = \sin x$$

$$6. (3 + 4m) \cos 2x + (4m - 3) \sin 2x + 13m = 0$$

Bài 3. Cho phương trình: $\sin x + m \cos x = 1$

1. Giải phương trình khi $m = -\sqrt{3}$.

2. Định m để phương trình trên vô nghiệm.

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI THEO $\sin u$ VÀ $\cos u$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1. \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$$

2. $3\sin^2 x + 8\sin x \cos x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$
3. $4\sin^2 x + 3\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$
4. $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - \cos^2 x = -2$
5. $4\sin^2 \frac{x}{2} + 3\sqrt{3} \sin x - 2\cos^2 \frac{x}{2} = 4$
6. $2\sin^2 x + 6\sin x \cos x + 2(1 + \sqrt{3})\cos^2 x = 5 + \sqrt{3}$
7. $\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - 3\cos^3 x = 0$
8. $4\sin^3 x + 3\sin^2 x \cos x - \sin x - \cos^3 x = 0$
9. $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$
10. $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$

Bài 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

1. $m \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3m \cos^2 x = 2$
2. $\sin^2 x - m \sin 2x - (m+1) \cos^2 x = 0$

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG – PHẢN XỨNG

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1. $2(\sin x + \cos x) + 3 \sin x \cos x + 2 = 0$
2. $3(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x + 3 = 0$
3. $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) = -12$
4. $2(\cos x + \sin x) = 4 \sin x \cos x + 1$
5. $\cos x - \sin x - 2 \sin 2x - 1 = 0$
6. $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - 2 \sin x \cos x - 1 - \sqrt{2} = 0$
7. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \sin x \cos x$
8. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$
9. $\tan x + \cot x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

3. Gọi BE, DF là hai đường cao của tam giác SBD. Chứng minh rằng: $(ACF) \perp (SBC)$, $(AEF) \perp (SAC)$.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có các mặt ABD và ACD cùng vuông góc với mặt BCD. Gọi DE, BK là đường cao tam giác BCD và BF là đường cao tam giác ABC

1. Chứng minh : $AD \perp (BCD)$
2. Chứng minh : $(ADE) \perp (ABC)$
3. Chứng minh : $(BKF) \perp (ABC)$
4. Chứng minh : $(ACD) \perp (BKF)$
5. Gọi O và H lần lượt là trực tâm của hai tam giác BCD và ABC chứng minh : $OH \perp (ABC)$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. $SA = SB = SC = a$. Chứng minh :

1. $(ABCD) \perp (SBD)$
2. Tam giác SBD là tam giác vuông.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm của cạnh BC, D là điểm đối xứng của A qua I. Dựng đoạn $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

vuông góc với (ABC) . Chứng minh:

1. $(SAB) \perp (SAC)$.
2. $(SBC) \perp (SAD)$.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Gọi O là trung điểm của BC, I là trung điểm của AB.

3. Tính góc $[(SMC), (ABC)]$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a\sqrt{2}$. $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa các mặt phẳng.

1. (SBC) và (ABC).
2. (SAB) và (SCB).
3. (SCB) và (SCD).

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O, cạnh a $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Tính số đo nhị diện cạnh AB.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = x$ ($x > 0$).

1. Tính số $[S, BC, A]$ theo a và x. Tính x theo a để số đo nhị diện trên bằng 60° .
2. Tính số $[B, BC, D]$ theo a và x. Tính x theo a để số đo nhị diện trên bằng 120° .

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

1. Chứng minh: $(SAC) \perp (SBD)$.
2. Chứng minh: $(SAD) \perp (SCD)$, $(SAB) \perp (SBC)$.

$$10. \sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$$

Bài 2. Định m để phương trình sau có nghiệm:

1. $\sin x + \cos x = 1 + m \sin 2x$
2. $\sin 2x - 2\sqrt{2}m(\sin x + \cos x) + 1 - 6m^2 = 0$

DẠNG 6. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MŨC

Bài tập. Giải các phương trình sau:

1. $\sin x \cdot \sin 2x = -1$
2. $7 \cos^2 x + 8 \sin^{100} x = 8$
3. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$
4. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$

MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC

1. $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$
2. $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$
3. $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$
4. $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$
5. $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$
6. $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$
7. $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$
8. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x - \frac{3\pi}{2})} = 4 \sin(\frac{7\pi}{4} - x)$

9. $(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$
10. $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$
11. $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$
12. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
13. $\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4$
14. $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$
15. $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos(x - \frac{\pi}{4}) \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2} = 0$
16. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
17. $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$
18. $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$
19. $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$
20. $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

Bài 4. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I là trung điểm của AB.

1. Chứng minh: $SI \perp (ABCD)$ và tính góc giữa SC và (ABCD).
2. Gọi J là trung điểm CD. Chứng tỏ: $(SIJ) \perp (ABCD)$. Tính góc hợp bởi SI và (SDC).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính:

1. $[SAB, (SCD)]$.
2. $[SAB, (SBC)]$.
3. $[SAB, (SAC)]$.
4. $[SCD, (ABCD)]$.
5. $[SBC, (SCD)]$.
6. $sđ [S, BC, A]$.
7. $sđ [C, SA, D]$.
8. $sđ [A, SB, D]$.
9. $sđ [B, SC, A]$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB.

1. Tính góc $[(SBC), (ABC)]$.
2. Tính đường cao AK của ΔAMC .

4. Gọi d là đường thẳng vuông góc với (ABC) tại trung điểm K của BC tìm $d \cap (\alpha)$.

**- GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG
- GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG**

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SO \perp (ABCD)$, M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC , biết $(MN, (ABCD)) = 60^\circ$.

1. Tính MN và SO .
2. Tính góc giữa MN và $mp(BCD)$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

1. SC và $(ABCD)$
2. SC và (SAB)
3. SC và (SBD)
4. SB và (SAC)

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$ và $AB = a\sqrt{3}$, BCD là tam giác đều cạnh a . Tính góc giữa:

1. AC và (BCD) .
2. AD và (BCD) .
3. AD và (ABC) .

Chương II. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

PHẦN 1. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

Bài 1. Có 25 đội bóng tham gia thi đấu, cứ 2 đội thì đá với nhau 2 trận (đi và về). Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu?

Bài 2.

1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số?
2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số và là số chẵn?
3. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5?

Bài 3. Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 thư kí. Hỏi có mấy cách nếu không ai được kiêm nhiệm?

Bài 4. Trong một tuần, An định mỗi tối đi thăm 1 người bạn trong số 10 người bạn của mình. Hỏi An có thể lập được bao nhiêu kế hoạch thăm bạn nếu:

1. Có thể thăm 1 bạn nhiều lần?
2. Không đến thăm 1 bạn quá 1 lần?

Bài 5. Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh thành một hàng dọc?

Bài 6. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn A, B, C, D, E vào một ghế dài 5 chỗ nếu:

1. Bạn C ngồi chính giữa.
2. Hai bạn A và E ngồi hai đầu ghế.

Bài 7. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thiết lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

Bài 8. Có 2 sách Toán khác nhau, 3 sách Lý khác nhau và 4 sách Hóa khác nhau. Cần sắp xếp các sách thành một hàng sao cho các sách cùng môn kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách?

Bài 9. Giải :

1. $P_2.x^2 - P_3.x = 8$

$$2. \frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6}$$

$$3. \frac{P_{n+4}}{P_n \cdot P_{n+2}} < \frac{15}{P_{n-1}}$$

Bài 10. Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 7 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách?

Bài 11. Từ tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể lập được mấy số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

Bài 12. Có 10 quyển sách khác nhau và 7 cây bút khác nhau. Cần chọn ra 3 quyển sách và 3 cây bút để tặng cho 3 học sinh, mỗi em được tặng 1 quyển sách và 1 cây bút. Có mấy cách?

Bài 13. Giải:

$$1. 2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2, x \in \mathbb{N}$$

$$2. A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n + 15)$$

$$3. 3A_n^2 - A_{2n}^2 + 42 = 0.$$

$$4. 2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12$$

$$5. A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8.$$

$$6. \frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$$

$$7. \frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$$

Bài 14. Có 10 cuốn sách toán khác nhau. Chọn ra 4 cuốn, hỏi có bao nhiêu cách?

Bài 15. Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách?

Bài 16. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra ?

1. Xác định mặt phẳng α

2. Tính diện tích của thiết diện của tứ giác với mặt phẳng α

Bài 12. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm của AH. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a. Gọi I là một điểm trên OH, đặt AI = x ($a < x < 2a$), (α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với OH

1. Xác định (α)

2. Tìm thiết diện của tứ diện SABC và α

3. Tính diện tích của thiết diện theo a và x

Bài 14. Cho tứ diện SABC có hai mặt ABC và SBC là 2 tam giác đều cạnh a và $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Lấy điểm M thuộc AB và AM =

x ($0 < x < a$). gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC, D là trung điểm của BC

1. Chứng minh: (α) // (SAD)

2. Tìm thiết diện của tứ diện SABC và (α)

3. Tính diện tích của thiết diện theo a và x

Bài 15. Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a. Cạnh SA \perp (ABC) và SA = $a\sqrt{2}$

1. Chứng minh các mặt của hình chóp là các tam giác vuông

2. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp với (α)

3. Tính diện tích của thiết diện

5. Tam giác ABC là tam giác nhọn các góc của tam giác đều nhọn.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$. Gọi O là trực tâm tam giác ABC, H là trực tâm tam giác SBC, I là trung điểm của BC.

1. Chứng minh: $BC \perp (SAI)$ và $CO \perp (SAB)$.
2. Chứng minh: $H = h/c O/(SBC)$.
3. Gọi $N = OH \cap SA$. Chứng minh : $SB \perp CN$ và $SC \perp BN$

Bài 9. Cho tứ diện S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh:

1. AH, SK, BC đồng quy
2. $SC \perp (BHK)$
3. $HK \perp (SBC)$

Bài 10. Cho tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh B, $AB = a, SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Lấy điểm M tùy ý thuộc cạnh AB với $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB

1. Tìm thiết diện của tứ diện và α
2. Tính diện tích của thiết diện theo a và x

Bài 11. Cho tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh B, $AB = a, SA \perp (ABC)$ $SA = a$. Gọi α là mặt phẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB

Bài 17. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ ?

Bài 18. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Tính số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên.

Bài 19. Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

Bài 20. Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn ra để lập một tổ ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau.

1. Nếu phải có ít nhất là 2 nữ.
2. Nếu phải chọn tùy ý.

Bài 21. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Người ta muốn chọn ra 3 tem thư và 3 bì thư rồi dán 3 tem thư vào 3 bì thư đó. Có bao nhiêu cách ?

Bài 22. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội đó về 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh đều có 4 nam, 1 nữ ?

Bài 23. Giải :

1. $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$
2. $C_{x-1}^3 - C_{x-1}^2 = \frac{2}{3}A_{x-2}^2$
3. $\frac{1}{C_x^1} - \frac{1}{C_{x+1}^2} = \frac{7}{6C_{x+4}^1}$
4. $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$
5. $\frac{1}{2}A_{2x}^x - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$

Bài 24. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của nhị thức:

$$1. \left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$$

$$2. \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)^{12}$$

$$3. \left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$$

$$4. \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$$

Bài 25. Tìm số hạng thứ 31 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$

Bài 26. Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{10}$

Bài 27. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niu-ton $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Bài 28. Cho biết tổng 3 hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)^n$ là 97. Tìm số hạng chứa x^4 .

Bài 29. Tính tổng:

$$1. S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

$$2. S_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

$$3. S_3 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

$$4. S_4 = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^kC_n^k + \dots + 2^nC_n^n.$$

$$5. S_5 = C_n^0 + 2^2C_n^2 + 2^4C_n^4 + \dots$$

Bài 30. Chứng minh:

$$1. C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$2. C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$$

$$3. C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + \dots + 6^nC_n^n = 7^n$$

3. Chứng minh: $HK \parallel BD$ $OH=OK$.

4. Chứng minh: $HK \perp (SAC)$.

5. Chứng minh: $AI \perp HK$.

6. Tìm mặt phẳng trung trực của đoạn BD và HK. Giải thích.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông tâm O cạnh a $SA \perp (ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD lần lượt H, M, K.

1. Chứng minh: $AH \perp SB$, $AK \perp SD$.

2. Chứng minh: $BD \parallel (\alpha)$ suy ra $BD \parallel HK$.

3. Chứng minh: HK qua trọng tâm của tam giác SAC.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA=SC$ $SB=SD$. Chứng minh:

1. $SO \perp (ABCD)$.

2. $AC \perp SD$

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu $AB \perp BD$ và $AC \perp BD$ thì $AD \perp BC$.

Bài 7. Cho tứ diện có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên (ABC). Chứng minh:

1. $OA \perp BC$, $OB \perp CA$, $OC \perp AB$.

2. $BC \perp (OAH)$, $AB \perp (OCH)$

3. H là trực tâm của tam giác ABC

$$4. \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

1. Xác định góc giữa các cặp vector: \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'C'}$; \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'D'}$; $\overrightarrow{AC'}$ và \overrightarrow{BD} .
2. Tính các tích vô hướng của các cặp vector: \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'C'}$; \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'D'}$; $\overrightarrow{AC'}$ và \overrightarrow{BD} .

**- ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG
- HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC**

Bài 1. Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

1. Chứng minh: $BC \perp (SAB)$.
2. Gọi M và N là hình chiếu của A trên SB và SC, MN cắt BC tại I. Chứng minh: $AM \perp (SBC)$, $SC \perp (AMN)$.
3. Chứng minh $AI \perp SC$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có $AB=AC$, $DB=DC$. Gọi I là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $BC \perp (AID)$.
2. Vẽ đường cao AH của tam giác AID. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

1. Chứng minh: $BC \perp (SAB)$ $CD \perp (SAD)$ $BD \perp (SAC)$.
2. Chứng minh: $AH \perp SC$ $AK \perp SC$ suy ra AH, AI, AK đồng phẳng.

$$4 \cdot 3^{17} C_{17}^0 + 4^1 \cdot 3^{16} \cdot C_{17}^1 + \dots + 4^{17} C_{17}^{17} = 7^{17}$$

PHẦN 2. XÁC SUẤT

Bài 1. Gieo hai con xúc xắc cân đối đồng chất. Gọi A là biến cố “tổng số chấm trên mặt của hai con xúc xắc bằng 4”

1. Liệt kê các kết quả thuận lợi của biến cố A
2. Tính xác suất của biến cố A

Bài 2. Chọn ngẫu nhiên 5 con bài trong bộ bài tứ – lơ – khơ :

1. Tính xác suất sao cho trong 5 quân bài đó có đúng 3 quân bài đó thuộc 1 bộ (ví dụ : có 3 con 4)
2. Tính xác suất sao cho trong 5 quân bài đó có 4 quân bài thuộc một bộ

Bài 3. Gieo một con xúc xắc 2 lần . Tính xác suất để :

1. Mặt 4 chấm xuất hiện ở lần đầu tiên
2. Mặt 4 chấm xuất hiện ở ít nhất 1 lần

Bài 4. Trong một bình có 3 quả cầu đen khác nhau và 4 quả cầu đỏ khác nhau. Lấy ra 2 quả cầu. Tính xác suất để :

1. Hai quả cầu lấy ra màu đen
2. Hai quả cầu lấy ra cùng màu

Bài 5. Gieo 3 con đồng xu. Tính xác suất để

1. Có đồng xu lật ngửa
2. Không có đồng xu nào sấp

Bài 6. Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong hai trường hợp sau:

1. Lấy được 3 viên bi màu đỏ
2. Lấy được ít nhất hai viên bi màu đỏ

Bài 7. Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất để

1. Tổng số chấm xuất hiện trên hai con là 9
2. Tổng số chấm xuất hiện trên hai con là 5
3. Số chấm xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 3

Bài 8. Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Tính xác suất để

1. Tổng số chấm xuất hiện của ba con là 10
2. Tổng số chấm xuất hiện của 3 con là 7

Bài 9. Một đợt xổ số phát hành 20.000 vé trong đó có 1 giải nhất, 100 giải nhì, 200 giải ba, 1000 giải tư và 5000 giải khuyến

khích. Tính xác suất để một người mua 3 vé trúng một giải nhì và hai giải khuyến khích.

Bài 10. Trong 100 vé xổ số có 1 vé trúng 100.000đ, 5 vé trúng 50.000đ và 10 vé trúng 10.000. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé. Tính xác suất để

1. Người mua trúng thưởng đúng 30.000
2. Người mua trúng thưởng 20.000

Bài 11. Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lý chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để

1. Có 6 khách là nam
2. Có 4 khách nam, 2 khách nữ
3. Có ít nhất 2 khách là nữ

Bài 12. Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên tấm thẻ là một số chẵn

Bài 13. Một lô hàng gồm 100 sản phẩm, trong đó có 30 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ lô hàng.

1. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt
2. Lấy ra ngẫu nhiên (1 lần) 10 sản phẩm từ lô hàng. Tìm xác suất để 10 sản phẩm lấy ra có đúng 8 sản phẩm tốt

Bài 14. Kết quả (b,c) của việc gieo hai con xúc xắc cân đối hai lần, được thay vào phương trình $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để:

1. Phương trình vô nghiệm
2. Phương trình có nghiệm kép
3. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

Bài 15. Một hộp chứa 30 bi trắng, 7 bi đỏ và 15 bi xanh. Một hộp khác chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ và 9 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp bi. Tính xác suất để 2 bi lấy ra cùng màu.

CHƯƠNG III. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện ABCD khi và chỉ khi nó thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

1. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$ với O là một điểm tùy ý.

Bài 2. Trong không gian cho 4 điểm tùy ý A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R thứ tự là trung điểm AB, A'D'. Gọi Q, Q', R' thứ tự là giao điểm của các đường chéo trong các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'. Chứng minh rằng:

1. $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.
2. Hai tam giác PQR, P'Q'R' có cùng trọng tâm.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tứ diện ABCD và tam giác BCD. Chứng minh rằng: A, G, G' thẳng hàng.

Bài 5. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BB', A'C'. K là điểm trên B'C' sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB}$. Chứng minh bốn điểm A, I, J, K thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB'} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên AC, DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D'}$.

1. Hãy phân tích $\overrightarrow{BD'}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
2. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c}$.
3. Tìm m, n để MN // BD'.

Bài 7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

B i 1. Cho h nh l ng tr  $ABC.A'B'C'$. G i I v  I' l n l t l  trung điểm của cạnh BC v  $B'C'$

1. Chứng minh rằng $AI \parallel A'I'$.
2. T m giao điểm $IA' \cap (AB'C')$.
3. T m giao t y n của $(AB'C') \cap (BA'C')$.

B i 2. Cho l ng tr  tam giác $ABC.A'B'C'$. G i I, K, G l n l t l  tr ng t m c a c c tam giác $ABC, A'B'C'$ v  ACC' . Chứng minh rằng:

1. $(IKG) \parallel (BB'C'C)$
2. $(A'KG) \parallel (AIB')$

B i 3. Cho h nh l ng tr  $ABC.A'B'C'$. G i H l  trung điểm $A'B'$

1. Chứng minh rằng $CB' \parallel (AHC')$
2. T m giao t y n $d = (AB'C') \cap (A'BC)$.

Chứng minh rằng: $d \parallel (BB'C'C)$

B i 4. Cho l ng tr  tam giác $ABC.A'B'C'$.

1. T m giao t y n của $(AB'C')$ v  $(BA'C')$.
2. G i $M,  $ l n l t l  hai điểm b t k i tr n AA' và BC . T m giao điểm c a $B'C'$ với $mp(AA' )$ v  giao điểm của $M $ v i $mp(AB'C')$.

B i 5. Cho h nh h p $ABCD.A'B'C'D'$

1. Chứng minh rằng $(BA'C') \parallel (ACD')$
2. T m c c giao điểm $I = B'D \cap (BA'C'); J = B'D \cap (ACD')$. Chứng minh rằng 2 điểm I, J chia đoạn $B'D$ th n 3 ph n bằng nhau.
3. G i $M,  $ l  trung điểm của $C'B'$ v  $D'D$. D ng thiết  i n c a h nh h p v i m t ph ng $(BM )$.

CHƯƠNG III. D Y S  - C P S  C NG – C P S  NH N

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

B i 1. Chứng minh rằng với m i $n \in n^*$, ta c    ng th c:

1. $2 + 5 + 8 + \dots + 3n - 1 = \frac{n(3n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.
4. $2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
7. $1.2 + 2.5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.
8. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
9. $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.
10. $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$.

B i 2. Chứng minh rằng với $n \in n^*$, ta c :

1. $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.
2. $n(2n^2 - 3n + 1)$ chia hết cho 6.
3. $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.
4. $n^5 - n$ chia hết cho 30.
5. $5^{n+3} + 11^{3n+1}$ chia hết cho 17.

Bài 3. Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Bài 4. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có các bất đẳng thức sau:

1. $3^n > 3n + 1$

2. $2^n - n > \frac{3}{2}$

3. $2^{n+1} > 2n + 3$

Bài 5. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta có:
 $2^n > 2n + 1$

DÃY SỐ

Bài 1. Xét tính đơn điệu các dãy số sau :

1. $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$

2. $u_n = \frac{3^n}{2^n + 1}$

3. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

5. $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

6. $u_n = \frac{n+2}{2^n}$

7. $u_n = 3^n - n$

8. $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Bài 2. Xét tính bị chặn các dãy số sau :

1. $u_n = 3n - 2$

2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

3. $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

4. $u_n = (-3)^n$

5. $u_n = \frac{4n-3}{4n+3}$

6. $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

2. Giả sử $AB \perp CD$ thì M là trung điểm của AC và BD thì $AM = x$, $AB = AC = CD = a$. Tính x để diện tích này lớn nhất.

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Bài 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$, $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, EF . Chứng minh:

1. $(ADF) \parallel (BCE)$.

2. $(DIK) \parallel (JBE)$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K, L là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD . Chứng minh rằng $(HKL) \parallel (BCD)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD là tam giác đều. Một mp (α) đi động song song với (SBD) qua điểm I trên đoạn AC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) .

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AD = CD = a$; $AB = 2a$, tam giác SAB vuông cân tại A . Trên cạnh AD lấy điểm M . Đặt $AM = x$. Mặt phẳng (α) qua M và $\parallel (SAB)$.

1. Dựng thiết diện của hình chóp với (α) .

2. Tính diện tích và chu vi thiết diện theo a và x .

Bài 5. Cho hai mp (P) và (Q) song song với nhau và $ABCD$ là một hình bình hành nằm trong mp (P) . các đường thẳng song song đi qua A, B, C, D lần lượt cắt mp (Q) tại các điểm A', B', C', D' .

1. Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì?

2. Chứng minh $(AB'D') \parallel (C'BD)$.

3. Chứng minh rằng đoạn thẳng $A'C$ đi qua trọng tâm của hai tam giác $AB'D'$ và $C'BD$. Hai mp $(AB'D')$, $(C'BD)$ chia đoạn $A'C$ làm ba phần bằng nhau.

HÌNH LĂNG TRỤ

Chứng minh : $M\hat{A} \parallel (BCD)$ và $M\hat{A} \parallel (ABC)$.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD .Gọi I, J là trung điểm của BC và CD

1. Chứng minh rằng $BD \parallel (AIJ)$
2. Gọi H, K là trọng tâm của các tam giác ABC và ACD.

Chứng minh rằng $HK \parallel (ABD)$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .G là trọng tâm của tam giác SAB và E là điểm trên cạnh AD sao cho $DE = 2EA$. Chứng minh rằng $GE \parallel (SCD)$.

Bài 4. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M , ã theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD .

1. Chứng minh $M\hat{A} \parallel (SBC)$ và $M\hat{A} \parallel (SAD)$
2. Gọi P là trung điểm của cạnh SA. Chứng minh $SB \parallel (M\hat{A}P)$ và $SC \parallel (M\hat{A}P)$.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD. M, ã là hai điểm bất kì trên SB và CD. (α) là mặt phẳng qua $M\hat{A}$ và song song với SC.

1. Tìm các giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SAC).
2. Xác định thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng (α) .

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành .Gọi M, \hat{A} là trung điểm SA,SB. Điểm P thay đổi trên cạnh BC

1. Chứng minh rằng $CD \parallel (M\hat{A}P)$
2. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng $(M\hat{A}P)$.
Chứng minh rằng thiết diện là 1 hình thang.
3. Gọi I là giao điểm 2 cạnh bên của thiết diện ,tìm quỹ tích điểm I

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD. M, ã là hai điểm trên AB, CD, (α) là mặt phẳng qua $M\hat{A}$ và song song với SA.

1. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) .
2. Tìm điều kiện của $M\hat{A}$ để thiết diện là hình thang.

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Từ điểm M trên AC ta dựng một mp (α) song song AB và CD. Mp này lần lượt cắt BC, BD, AD tại ã , P, Q.

1. Tứ giác $M\hat{A}QG$ là hình gì?

Bài 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases} ; \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng u_n bị chặn trên bởi $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi 1.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases} ; \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng u_n là dãy giảm và bị chặn.

Bài 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases} ; \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng :

1. (u_n) là dãy tăng.
2. $u_n = 1 + (n-1).2^n, \forall n \geq 1.$

CẤP SỐ CỘNG

Bài 1. Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng, biết :

1. $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_{15} = 75 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_1 + u_4 + u_5 = 25 \\ u_2 - u_8 = -24 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$

Bài 2.

1. Cho cấp số cộng có $a_1 = 10, d = -4$.Tính a_{10} và S_{10} .

2. Một cấp số cộng hữu hạn có số hạng đầu bằng 2, công sai bằng -5 và tổng các số hạng bằng -205. Hỏi cấp số cộng đó có bao nhiêu số hạng?

3. Cho cấp số cộng có số hạng đầu bằng -2, công sai bằng 3. Hỏi 55 là số hạng thứ bao nhiêu của CSC. Tính tổng của 20 số hạng liên tiếp kể từ số hạng thứ 15.

4. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình:
 $\sin^2 3x - 5\sin 3x + 4 = 0$ trên khoảng $(0; 50\pi)$.

Bài 3. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết

$$\text{rằng: } \begin{cases} u_{23} - u_{17} = 30 \\ (u_{17})^2 + (u_{23})^2 = 450 \end{cases}$$

Bài 4. Hãy tìm tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n)

có $u_2 + u_{15} = 30$.

Bài 5. Tính các tổng sau:

1. $S_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 999$
2. $S_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2010$
3. $S_3 = 3 + 6 + 9 + \dots + 3003$

Bài 6. góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc của tam giác đó.

Bài 7. Một cấp số cộng có 11 số hạng. Tổng các số hạng là 176. Hiệu giữa số hạng cuối và số hạng đầu là 30. Tìm cấp số cộng đó.

Bài 8. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 22. Tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

Bài 9. Ân gười ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,.... Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng?

Bài 10. Tìm x để 3 số sau lập thành cấp số cộng theo thứ tự đó:

1. $10 - 3x$; $2x^2 + 3$; $7 - 4x$
2. $3x + 2$; $x^2 + 5x + 4$; $x^3 + 8x + 6$

2. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Bài 6. Hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Lấy một điểm M thuộc cạnh SC. Mặt phẳng (ABM) cắt cạnh SD tại điểm A'. Chứng minh A'M // CD.

Bài 7. Hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mp. Trên AC lấy một điểm M và trên BF lấy một điểm A' sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = k$. Một mp(α) qua M và song song với AB, cắt cạnh AD tại M' và cạnh AF tại A'.

1. Chứng minh: M'A' // DF.

2. Cho $k = \frac{1}{3}$, chứng minh M'A' // DE.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB và CD ($AB > CD$). Gọi M, A' lần lượt là trung điểm của SA và SB.

1. Chứng minh: M'A' // CD

2. Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ADA')

3. Kéo dài AA' và DP cắt nhau tại I. Chứng minh SI // AB // CD, tứ giác SABI là hình gì?

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, A', P, Q là các điểm nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho M'A' // BS, A'P // CD, MQ // CD

1. Chứng minh: PQ // SA.

2. Gọi K là giao điểm của M'A' và PQ, chứng minh SK // AD // BC.

3. Qua Q dựng các đường thẳng Qx // SC và Qy // SB. Tìm giao điểm của Qx với (SAB) và của Qy với (SCD).

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, A' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ACD.

2. Tìm giao điểm của SD với mặt phẳng (AM \hat{A}) ?
3. Tìm tiết diện tạo bởi mặt phẳng (AM \hat{A}) với hình chóp

Bài 18: Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành . M là trung điểm SC

1. Tìm giao điểm I của AM với (SBD) ? Chứng minh IA = 2IM .
2. Tìm giao điểm F của SD với (AMB) ? Chứng minh F là trung điểm SD ?
3. Xác định hình dạng tiết diện tạo bởi (AMB) với hình chóp.
4. Gọi \hat{A} là một điểm trên cạnh AB .Tìm giao điểm của M \hat{A} với (SBD) ?

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K, L theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC ,CD ,DA Chứng minh : IJ//KL và JK//IL .

Bài 2. Cho tứ diện ABCD .Gọi H, K là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD .Chứng minh rằng HK//AB.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M , \hat{A} ,E ,F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SC, SB, SC và SD.

1. Chứng minh rằng ME//AC , \hat{A} F//BD
2. Chứng minh rằng ba đường thẳng ME , \hat{A} F ,và SO(O là giao điểm của AC và BD) đồng qui
3. Chứng minh rằng 4 điểm M, \hat{A} ,E,F đồng phẳng

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi H, K là trung điểm SA, SB.

1. Chứng minh rằng HK//CD
2. Trên cạnh SC lấy điểm M. Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MKH).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của DA và BC và G là trọng tâm tam giác SAB.

1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG)

Bài 11. Chứng minh rằng ba số dương a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi các số: $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ lập

thành cấp số cộng.

Bài 12. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là 20 và tích của chúng là 348.

CẤP SỐ NHÂN

Bài 1. Trong các cấp số nhân dưới đây, hãy tính số hạng u_n đã chỉ ra:

1. 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... $u_7 = ?$
2. -3; 6; -12; 24; ... $u_{10} = ?$
3. 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; ... $u_8 = ?$

Bài 2. Tìm số hạng đầu, công bội của các cấp số nhân, biết :

1. $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -21 \\ u_2 + u_4 = 10 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$

Bài 3. Tìm cấp số nhân (u_n) biết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$

Bài 4. Hãy tìm số hạng của cấp số nhân, biết cấp số nhân đó:

1. Có 5 số hạng với công bội dương, số hạng thứ hai bằng 3 và số hạng thứ tư bằng 6.

2. Có 5 số hạng với công bội bằng $\frac{1}{4}$ số hạng thứ nhất và tổng của hai số hạng đầu bằng 24.

Bài 5. Cho một cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ bảy gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số nhân đó.

Bài 6. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) có

$$\begin{cases} 6u_2 + u_5 = 1 \\ 3u_3 + 2u_4 = -1 \end{cases}$$

Bài 7. Tính tổng:

$$1. S = -1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$$

$$2. S = 1 + a^2 + a^3 + \dots \quad \text{với } a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Bài 8. Tính tổng tất cả các số hạng của cấp số nhân (u_n) biết:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_2 = -2 \\ u_n = 64\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 9. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\frac{9}{5}$. Tìm hai cấp số ấy.

Bài 10. Tìm hai số a, b biết rằng $1, a, b$ là cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là cấp số nhân.

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm nằm trên SA, AB, CD

1. Tìm giao điểm của IK và (SBD).
2. Tìm giao điểm của SD và (IJK).
3. Tìm giao điểm của SC và (IJK).

THIẾT DIỆN

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. P là điểm nằm trên cạnh AD nhưng không là trung điểm. Tìm thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 2: Cho tứ diện ABCD. Trên các đoạn AC, BC, BD lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB, NP không song song với CD. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và tứ diện ABCD.

Bài 6: Cho hình chóp SABCD. Gọi M là 1 điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
2. Tìm giao điểm của BM và mặt phẳng (SAC).
3. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài 9: Cho hình chóp SABCD đáy là hình bình hành tâm O. Một điểm M trên cạnh SD sao cho $SD = 3SM$.

1. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).
2. Xác định giao điểm I của BM và (SAC). Chứng tỏ I là trung điểm của SO.
3. Định thiết diện của hình chóp SABCD và (MAB).

Bài 14: Cho tứ diện ABCD ; điểm I nằm trên BD và ở ngoài BD sao cho $ID = 3IB$; M, N là hai điểm thuộc cạnh AD; DC sao cho $MA = \frac{1}{2}MD$; $ND = \frac{1}{2}NC$

1. Tìm giao tuyến PQ của (IMN) với (ABC) ?
2. Xác định thiết diện tạo bởi (IMN) với tứ diện ?
3. Chứng minh MN ; PQ ; AC đồng qui ?

Bài 17: Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy . Gọi M ; N là trung điểm SB ; SC .

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) ?

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là điểm tùy ý trên cạnh SD.

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).
2. Tìm giao điểm K của IM với mặt phẳng (SBC).
3. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJM).

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

1. Tìm giao điểm I của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD).
2. Chứng minh $IA = 2IM$.
3. Tìm giao điểm F của SD và (ABM).
4. Điểm A thuộc AB. Tìm giao điểm của MA và (SBD).

Bài 8: Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (P) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài (P) và M là trung điểm của đoạn SC.

1. Tìm giao điểm của SD và (MAB)
2. Gọi O là giao điểm của AC và BD. CMR: SO, AM, Bđ đồng qui

Bài 9: Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, A lần lượt nằm trong tam giác ABC và tam giác ABD. I là điểm tùy ý trên CD. Tìm giao của (ABI) và đường thẳng MA.

Bài 10: Cho hình chóp SABCD. Gọi I, J là hai điểm trên cạnh AD, SB

1. Tìm các giao điểm K, L của IJ và DJ với (SAC)
2. AD cắt BC tại O; OJ cắt SC tại M. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng

Bài 11: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, A lần lượt là trung điểm của AC, BC. K là điểm trên cạnh BD và không trùng với trung điểm của BD.

1. Tìm giao điểm của CD và (MAK).
2. Tìm giao điểm của AD và (MAK).

Bài 12: Cho tứ diện ABCD. M, A là 2 điểm trên cạnh AC, AD. O là 1 điểm bên trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của:

1. MA và (ABO).
2. AO và (BM).

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n - 1}{2n^2 + 9}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - n^5 + n^6}{-n^6 + 7n - 3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n + 2}{8n^5 + 10n}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 3n - 4}{-6n^5 - n^2 + 3}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 7n - 33}{100n^3 - 11n^2}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 3n^2)^2 n}{-3n^3 (2 + 3n^2)}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 - 2)^3 (-2n)}{(2 - 4n^3)^2}$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - 5n^3)^2 (n + 5)^3}{2n + 3 - 4n^7}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-2n}{2n+1}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt[3]{n^6+1} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt{6n^4+5n-7}}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n-n}}$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+1}}{3n+2}$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{2^n - 1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{(-3)^{n+1} + 5^{n+1}}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} - 4^{n+1}}{5.4^{n+2} - 2^{n+5}}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n)$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{1 - n^3})$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n})$

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 3}{2x^3 + 2x^2 + x + 6}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$
4. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$
5. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x(x+5) - 6}$
7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 6}$
8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x - 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sqrt{5} - \sqrt{x}}$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành ; O là giao điểm hai đường chéo; M ; Ân lần lượt là trung điểm SA; SD. Chứng minh ba đường thẳng SO; BÂ ; CM đồng quy.

GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, Ân lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD không phải là trung điểm. Tìm giao điểm của:

1. CD và mặt phẳng (MÂ K)
2. AD và mặt phẳng (MÂ K)

Bài 2: Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M, Ân sao cho MÂ không song song với BC. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD.

1. Tìm giao điểm của MÂ và (BCD)
2. Tìm giao tuyến của (OMÂ) và (BCD)
3. Mặt phẳng (OMÂ) cắt các đường thẳng BD và CD tại H và K. Xác định các điểm H và K.

Bài 3: Cho hình chóp SABCD. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, AB, BC. Giả sử đường thẳng JK cắt các đường thẳng AD, CD tại M, Ân. Tìm giao điểm của các đường thẳng SD và SC với mặt phẳng (IJK).

Bài 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, Ân, P là các điểm lần lượt trên các cạnh AC, BC, BD.

1. Tìm giao điểm của CP và (MÂ D).
2. Tìm giao điểm của AP và (MÂ D).

Bài 5: Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, Ân lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BD lấy điểm P sao cho BP=2PD.

1. Tìm giao điểm của các đường thẳng CD với mặt phẳng(MÂ P)
2. Tìm giao điểm của hai mặt phẳng (MÂ P) và (ACD).

SE, SB lần lượt tại M, \hat{A} . Một mặt phẳng (Q) qua BC cắt SD và SA lần lượt tại H và R.

1. Gọi I là giao điểm của AM và D \hat{A} , J là giao điểm của BH và ER. CMR bốn điểm S, I, J, G thẳng hàng.

2. Giả sử K là giao điểm của A \hat{A} và DM, L là giao điểm của BR và EH. CMR ba điểm S, K, L thẳng hàng.

Bài 9: Cho A; B; C không thẳng hàng ở ngoài mặt phẳng (α).

Gọi M; \hat{A} ; P lần lượt là giao điểm AB; BC; AC với α . Chứng minh M; \hat{A} ; P thẳng hàng ?

Bài 10: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang hai đáy là AD; BC. Gọi M; \hat{A} là trung điểm AB; CD và G là trọng tâm Δ SAD. Tìm giao tuyến của :

1. (GM \hat{A}) và (SAB)
2. (GM \hat{A}) và (SCD)
3. Gọi giao điểm của AB và CD là I; J là giao điểm của hai giao tuyến ở câu a và câu b. Chứng minh S; I; J thẳng hàng.
- 4.

CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI

Bài 1. Cho hình thang ABCD (AB// CD) điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa ABCD. Gọi M, \hat{A} lần lượt là trung điểm của SC, SD. Gọi I là giao điểm của AD và BC, J là giao điểm của A \hat{A} và BM.

1. CMR : S, I, J thẳng hàng.
2. Gọi O là giao điểm của AC và BD. CMR : SO, AM, B \hat{A} đồng quy.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. M, \hat{A} lần lượt là trung điểm BC, BD. Các điểm P và S lần lượt thuộc AD, AC sao cho $AR = \frac{1}{3}AD$;

$AS = \frac{1}{3}AC$. CMR : ba đường thẳng AB, MS, \hat{A} R đồng quy.

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}$$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{3x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$$

Bài 5. Giới hạn một bên:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-2}{x-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^4+1}{x^2+4x+3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ biết } f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \leq 1 \\ x^2+1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ biết } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & ; x \leq 1 \\ 6-5x & ; 1 < x < 3 \\ x-3 & ; x \geq 3 \end{cases}$$

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}$$

Bài 7. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{3x^5 - 4x^3 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^2(1-3x)}{(x+1)^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 1}{3x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

Bài 8. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 9x})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 \pm \sqrt{4x^2 + 4x + 3})$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x + 2})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 3} - x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2(\sqrt[3]{x^2 + 3} - x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 3x} - x + 1)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

Bài 9. Tính các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (4 + x) \cdot \sin \frac{3}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \cdot \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \cot 6x$$

Bài 7: Cho tứ diện SABC. Gọi M, N là các điểm trên các đoạn SB và SC sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AMN) và (ABC), mặt phẳng (ABN) và (ACM).

Bài 8: Cho tứ diện ABCD. Trên AB lấy M với $AM = \frac{1}{3}AB$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AC, AD. Định giao tuyến (d) của mặt phẳng (MIK) và (BCD).

Bài 9: Cho tứ diện SABC. Gọi I, J, K là ba điểm tùy ý trên SB, AB, BC sao cho JK không song song với AC và SA không song song với IJ. Định giao tuyến của (IJK) và (SAC).

Bài 10: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G là ba điểm trên AB, AC, BD sao cho (EF) cắt (BC) tại I, (EG) cắt (AD) tại H. Định giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với hai mặt phẳng (BCD) và (ACD).

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.

Bài 1: Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB và SC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Trong (P) lấy hai điểm A và B sao cho AB cắt d tại I. O là một điểm nằm ngoài (P) và (Q) sao cho OA và OB lần lượt cắt (Q) tại A' và B'.

1. Chứng minh ba điểm I, A', B' thẳng hàng.

2. Trong (P) lấy điểm C sao cho A, B, C không thẳng hàng. Giả sử OC cắt (Q) tại C', BC cắt B'C' tại J, CA cắt C'A' tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 8: Cho tứ diện SABC có D, E lần lượt là trung điểm AC, BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (P) qua AC cắt

CHƯƠNG II. QUAN H   SONG SONG

T M GIAO TUYẾN CỦA HAI M T PHƯƠNG.

B i 1: Cho S l  một điểm không thuộc m t phương h nh bình hành ABCD. T m giao tuyến của hai m t phương (SAC) và (SBD).

B i 2: Trong m t phương (α) cho t r giác ABCD sao cho AB, CD không song song. S l  điểm nằm ngoài (α). T m giao tuyến của c p m t phương sau:

1. (SAC) và (SBD).
2. (SAB) và (SCD).

B i 3: Trong m t phương (α) cho ba điểm A, B, C. S l  điểm không thuộc (α). M,   , I l n l t l  trung điểm của AB, BC, SA.

1. T m giao tuyến của (SA  ) v  (SCM).
2. T m giao tuyến của (SCM) v  (BIC).

B i 4: Cho t r diện ABCD và điểm M thuộc miền trong c a ΔACD . G i I v  J t ng  ng l  hai điểm tr n cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD.

1. H y xác định giao tuyến của hai m t phương (IJM) v  (ACD).
2. L y    l  điểm thuộc miền trong c a ΔABD sao cho J  c t đoạn AB t i L. T m giao tuyến của hai m t phương (M  J) và (ABC).

Bài 5: Cho h nh chóp S.ABCD có đ y l  t r giác ABCD có hai c nh đối diện không song song. L y điểm M thuộc miền trong c a ΔSCD . T m giao tuyến của hai m t phương:

1. (SBM) và (SCD).
2. (ABM) và (SCD).
3. (ABM) và (SAC).

Bài 6: Cho t r diện ABCD. M v     l n l t l  trung điểm AD v  BC. T m giao tuyến của hai m t phương (MBC) v  (   AD).

H M S  LIÊN TỤC

B i 1. Xét t nh liên tục c c h m s  sau t i x_0 :

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2 & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ t i } x_0 = -1$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ t i } x_0 = 2$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x \neq 5 \\ (x-5)^2 & \text{khi } x = 5 \end{cases} \text{ t i } x_0 = 5$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ t i } x_0 = 0$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ 5-x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \text{ t i } x_0 = 2$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ t i } x_0 = 1$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ -5 + \frac{4-x}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ t i } x_0 = 0$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2-1}{x^2+6x-7} & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

Bài 2. Tìm m để hàm số liên tục tại x_0 đã chỉ ra :

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ mx-4 & \text{khi } x = 4 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 4$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{x^2+m}{x-2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx + \frac{1}{3} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2$$

Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số sau trên R:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 5 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Bài 4. Định a để hàm số $f(x)$ liên tục trên R:

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $A(-3;2)$, $B(1;-2)$, $C(2;5)$, $D(-1;-3)$. Gọi A_1 là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ \overrightarrow{BC} . Gọi A_2 là ảnh của A_1 qua phép đối xứng tâm D. Tìm tọa độ A_2 .

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1,2); B(-3,0); C(3,-2)$.

1. Tìm ảnh của A, B, C qua phép đối xứng tâm O.
2. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
3. Viết phương trình đường tròn là ảnh của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua phép đối xứng tâm A.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(2;1). Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2;3)$ biến M thành điểm A. Tìm tọa độ điểm A.

Bài 4. Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 4 = 0$. Ảnh của (C) qua phép vị tự $V_{(0;-\frac{1}{2})}$ là đường tròn (C'), tìm phương trình của (C').

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy. Tìm ảnh của đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$ qua việc thực hiện liên tiếp D_{O_y} và $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (2;3)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(2,-2) và đường thẳng d có phương trình: $2x + y - 1 = 0$.

1. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc quay 90° .
2. Tìm ảnh của d qua phép quay tâm A góc quay 90° .

Bài 2. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E,F,H,I lần lượt là trung điểm của AB,CD,BC,EF. Hãy tìm một phép dời hình biến tam giác AEI thành tam giác FCH.

PHÉP VỊ TỰ

Bài 1. Xác định ảnh của điểm A(4;-5) qua phép vị tự tâm I(-2;6), tỉ số -2.

Bài 2. Cho điểm M(-1;5) và đường thẳng d: $2x-3y-8=0$. Xác định ảnh của M và d qua phép vị tự tâm O tỉ số bằng 2.

Bài 3. Cho điểm I(2;-1) và điểm J(7;4). Tìm tâm vị tự của 2 đường tròn (C)(I;2) và đường tròn (C')(J;3).

Bài 4. Cho tam giác OMI. Dựng ảnh của M, I qua phép vị tự tâm O, tỉ số k trong các trường hợp sau:

1. $k = 3$
2. $k = \frac{1}{2}$
3. $k = -\frac{3}{4}$

Bài 5. Tìm phép vị tự biến:

1. $d: \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ thành $d': 2x - y - 6 = 0$.
2. $(C): (x+4)^2 + y^2 = 2$ thành $(C'): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$

PHÉP ĐỒNG DẠNG

Bài 1. Cho điểm A(3;-4) và đường thẳng d: $9x+y-6=0$. Viết pt đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép \mathcal{D}_O và phép $V_{(A,1/3)}$.

Bài 2. Cho đường tròn (C) có tâm I(-1;3), bán kính bằng 2. Viết phương trình đường tròn ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép $V_{(O,3)}$ và phép \mathcal{D}_{Oy} .

Bài 3. Cho hình vuông ABCD tâm O, M là trung điểm cạnh AB. Xác định phép đồng dạng biến $\triangle OAM$ thành $\triangle DBC$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

Bài 5. Chứng minh phương trình:

1. $2x^2 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.
2. $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.
3. $\cos x - x = 0$ có nghiệm.

CHƯƠNG IV. ĐẠO HÀM

Bài 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + x$
2. $y = -6\sqrt{x} + \frac{3}{x}$
3. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$
4. $y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$
5. $y = (4x^3 - 2x^2)(x^2 - 7x)$
6. $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$
7. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $y = \frac{2x-3}{x+4}$
9. $y = \frac{5-3x-x^2}{x-2}$
10. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
11. $y = (x^7 - 5x^2)^3$
12. $y = (x + 3x^2 + 4x^3)^5$

Bài 2. Tính đạo hàm các hàm số sau:

1. $y = \frac{\sin x}{x}$
2. $y = \cos \frac{x}{x+1}$
3. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
4. $y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan \sqrt{x}$
5. $y = (x^2 - \sin 5x)^{10}$
6. $y = \sqrt{\sin^3 3x}$
7. $y = \cot \sqrt{x^2 - x + 1}$
8. $y = \sin^2(\cos 2x)$
9. $y = x^2 \sin \sqrt{3x}$
10. $y = \sin^3 \sqrt{x^2 + 1}$
11. $y = \tan^2 3x + \cot 2x^2$
12. $y = \sqrt{\sin 4x + x \cos x}$

Bài 3. Giải các bất phương trình:

1. $f'(x) > 0$ với $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$

PHÉP QUAY

Bài 1. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Tìm ảnh của tam giác OAB qua phép quay tâm C góc quay -90°

Bài 2. Tìm tọa độ các điểm ảnh của A(-3;4), B(-5;1), C(-2;3) qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$

Bài 3. Cho điểm M(3;-4) và đường thẳng d: $6x-y+10=0$. Xác định ảnh của M và d qua phép quay tâm O một góc 90° .

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, tìm phép quay Q biến điểm A(-1,5) thành điểm B(5,1).

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(0,3). Tìm $B = Q_{(O; -45^\circ)}(A)$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Tìm (C') = $Q_{(O; 90^\circ)}(C)$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn là ảnh của đường tròn đã cho qua phép quay tâm O góc quay 90° ; -90°

PHÉP DỜI HÌNH

Bài 1. Cho 2 điểm A(-2;1), B(3;5) và đường thẳng d: $4x-9y+6=0$.

1. Xác định ảnh của điểm A qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $Q_{(O, 90^\circ)}$ và phép Δ_B .
2. Xác định ảnh của điểm B qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép Δ_A và Δ_{Oy} .
3. Xác định ảnh của điểm A qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép $Q_{(O, 90^\circ)}$ và phép Δ_d .
4. Xác định ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép Δ_O và tịnh tiến $T_{\vec{AB}}$

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, hãy tìm ảnh của điểm M(2, 1) qua phép đối xứng trục Ox, rồi đối xứng trục Oy.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(-5; 6), đường thẳng d: $2x-3y-1=0$ và đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

1. Xác định ảnh của A và đường thẳng d qua phép \mathcal{D}_{Ox} .
2. Xác định đường tròn (C_o) sao cho (C) là ảnh của (C_o) qua phép \mathcal{D}_{Oy} .
3. Xác định ảnh của (C) qua phép \mathcal{D}_d .

Bài 3. Cho điểm M(2;-7) và đường cong (C) có phương trình $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

1. Xác định tọa độ các ảnh của điểm M qua phép \mathcal{D}_{Ox} , \mathcal{D}_{Oy} .
2. Viết phương trình đường cong (C') là ảnh của (C) qua phép \mathcal{D}_{Ox} .

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (Δ): $x-5y+7=0$ và (Δ'): $5x-y-13=0$. Tìm phép đối xứng qua trục biến (Δ) thành (Δ').

Bài 5. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Xác định ảnh của tam giác AOB qua phép đối xứng trục \mathcal{D}_{CD} .

PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Bài 1. Cho 2 điểm M(-2;9), I (1;4). Xác định các điểm M_1, M_2 lần lượt là ảnh của M qua phép $\mathcal{D}_O, \mathcal{D}_I$.

Bài 2. Cho điểm I(-4;3), đường thẳng d: $x-2y+5=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+6y+1=0$.

1. Xác định ảnh của I, d và (C) qua phép \mathcal{D}_O .
2. Viết phương trình đường thẳng D' là ảnh của D qua phép \mathcal{D}_I .
3. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép \mathcal{D}_I .

Bài 3. Chứng minh rằng (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có tâm đối xứng là gốc tọa độ O.

2. $g'(x) \leq 0$ với $g(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

3. $y' \geq 0$ với $y = \frac{x^2+3}{x^2+1}$

4. $y' \leq 0$ với $y = \frac{2x-1}{x^2+x+4}$

Bài 4. Chứng minh rằng:

1. Hàm số $y = \tan x$ thỏa hệ thức: $y^2 + 1 - y' = 0$.
2. Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa hệ thức: $2y^2 + 2 + y' = 0$.
3. Hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ thỏa hệ thức: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Bài 5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

1. $y = x^2 - x + \cos x$
2. $y = (2x+1)\tan x$
3. $y = \cos^2 x$
4. $y = x^4 - \cos 2x$

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

1. $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.
2. $y = \frac{x^2+2x-6}{x-1}$ biết có hoành độ tiếp điểm là 3.
3. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ biết hệ số góc $k = -3$.
4. $y = \frac{x^2-x-2}{x+2}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2-3x$.
5. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường

thẳng: $y = -\frac{1}{4}x + 5$.

6. $y = x^4 - 3x^2 - 4$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0, -4)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó :

1. Có tung độ tiếp điểm là 2.
2. Vuông góc với đường thẳng: $y = -4x + 10$.

Bài 8. Qua điểm $A(\frac{4}{9}, \frac{4}{3})$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến

đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$. Viết phương trình các tiếp tuyến đó.

PHẦN II. HÌNH HỌC

CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

PHÉP TỊ H TIẾ

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1,2)$, $B(0,1)$, $C(3,-1)$ và vector $\vec{v} = (-2,3)$. Hãy tìm ảnh của các điểm trên qua phép tịnh tiến theo vector \vec{v} .

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: $2x - 3y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Hãy tìm ảnh của d và (C) qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1,-2)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ cắt Ox tại $A(-1, 0)$ và cắt Oy tại $B(0, 2)$. Hãy tìm ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (2; -1)$.

Bài 4. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) : $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (-2;4)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(-5;2)$, $C(-1;0)$. Biết $B = T_{\vec{u}}(A)$, $C = T_{\vec{v}}(B)$. Tìm \vec{u} và \vec{v} để có thể biến A thành C.

Bài 6. Cho ΔABC có trọng tâm G. Dựng ảnh của :

1. Đoạn thẳng AB qua phép tịnh tiến $T_{\vec{GC}}$
2. ΔABC qua phép tịnh tiến $T_{2\vec{AG}}$

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Xác định :

1. Ảnh của ΔABD qua phép tịnh tiến $T_{3\vec{OC}}$
2. Điểm E sao cho phép tịnh tiến $T_{\vec{AC}}$ biến E thành D.

PHÉP ĐỐI XỨ G TRỰC