I) HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC:

1) Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC. CMR:

a) $MN \perp RP$ b) $MN \perp RQ$ c) $AB \perp CD$

2) Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Biết: AB = CD = 2a; MN = $a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

3) Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Chứng minh: $AO \perp CD$.

II) ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG:

① Góc của đường thẳng và mặt phẳng:

1) Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, SA = $a\sqrt{6}$, SA ⊥ (ABCD). Tính góc của :

a) SC với (ABCD).
b) SC với (SAB).
c) SB với (SAC).

2) Cho ΔABC vuông cân tại B, AB = a, SA = a, SA ⊥ (ABC).

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).
b) Tính góc hợp bởi SB và (SAC).

3) Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a và SO ⊥ (ABCD) (O là tâm đáy). Gọi M, N là trung điểm của SA và BC. Biết góc của MN và (ABCD) là 60^0

a) Tính MN và SO.
b) Tính góc của MN với mặt phẳng (SBD)

4) Cho hình vuông ABCD và ΔSAB đều cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi I là trung điểm của AB.

a) CM: SI ⊥ (ABCD) và tính góc hợp bởi SC với (ABCD).
b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD). Suy ra góc của SC hợp với (SAD).
c) J là trung điểm của CD. CM: (SIJ) ⊥ (ABCD). Tính góc hợp bởi đường thẳng SI và (SDC).

②) Chứng minh đường vuông góc với mặt, đường vuông góc với đường

1) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O; SA ⊥ (ABCD). gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

a) Chứng minh rằng: BC ⊥ (SAB); CD ⊥ (SAD); BD ⊥ (SAC).
b) Chứng minh rằng: AH ⊥ SC; AK ⊥ SC. Từ đó suy ra AH, AI, AK đồng phẳng.
c) Chứng minh rằng: HK ⊥ (SAC); HK ⊥ AI

2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết SA = SC; SB = SD.

a) CM: SO $\perp$ (ABCD).

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC. CMR: IJ $\perp$ (SBD).

3) Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là hai tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.

a) CM: BC $\perp$ (AID).

b) Hạ AH $\perp$ ID (H $\in$ ID). CM: AH $\perp$ (BCD)

4) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. ΔSAB đều; ΔSCD vuông cân đỉnh S. I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ. CMR: SI $\perp$ (SCD); SJ $\perp$ (SAB)

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên IJ. CMR: SH $\perp$ AC.

5) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, SC = $a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD.

a) CMR: SH $\perp$ (ABCD)

b) CMR: AC $\perp$ SK; CK $\perp$ SD.

6) Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC). CMR:

a) BC $\perp$ (OAH)

b) H là trực tâm của ΔABC

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

d) Các góc của ΔABC đều nhọn.

7) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a; BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$

a) CM: SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

b) Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ đường thẳng qua A $\perp$ với AC cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC. Hãy Xác định các giao điểm K, N của SB, SD với mặt phẳng (HIJ). CMR: AK $\perp$ (SBC) AN $\perp$ (SCD)

c) Tính diện tích tứ giác AKHN.

8) Gọi I là một điểm bất kỳ ở trong đường tròn tâm O bán kính R. CD là dây cung của đường tròn (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với OS = R. gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). CMR:

a) ΔSDE vuông. b) SD $\perp$ CE. c) ΔSCD vuông.

9) Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (α). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) tại A ta lấy hai điểm C, D ở hai bên điểm A. Gọi C' là hình chiếu vuông góc của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC'.

a) CM: CC' $\perp$(MBD).

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB. CMR: K là trực tâm của ΔBCD.

10) Cho đường tròn (O) đường kính AB= 2R; (O) ở trong mặt phẳng (α). Dựng AS = 2R vuông góc với mặt phẳng (α). Gọi T là một điểm di động trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đặt $\widehat{ABT} = \varphi$. đường tròn BT gặp đường tròn (O) tại M. Gọi N là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

a) Chứng minh các mặt bên của tứ diện SAMB đều là các tam giác vuông.

b) CMR: khi T đi động đường thẳng TN luôn đi qua một điểm cố định H.

c) Tính φ để ΔAHN cân.

11) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B; SA $\perp$ (ABC). AH là đường cao kẻ từ A của ΔSAB . HK $\perp$ SB (K $\in$ SC). CM:

a) BC $\perp$ (SAB) b) AH $\perp$ (SBC) c) KH $\perp$ (SAB)

12) Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng đôi một vuông góc với nhau. A $\in$ Ox, B $\in$ Oy, C $\in$ Oz. Gọi H là trực tâm ΔABC. CMR: OH $\perp$ (ABC).

13) Cho tứ diện SABC có SA $\perp$ (ABC). H, K là trực tâm ΔABC và SBC. CMR:

a) AH, SK, BC đồng quy. b) SC $\perp$ (BHK). c) HK $\perp$ (SBC).

14) Cho tứ diện ABCD. SA $\perp$ (ABC). Dựng đường cao AE của ΔABC.

a) CM: SE $\perp$ BC.

b) H là hình chiếu vuông góc của A trên SE. CM: AH $\perp$ SC.

15) Cho tứ diện đều, CMR hai cạnh đối của tứ diện này vuông góc với nhau.

16) Cho mặt phẳng (α) và một đường tròn (C) đường kính AB chứa trong mặt phẳng đó. M $\in$ (C) không trùng với A và B. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) tại A ta lấy điểm S.

a) CM: các mặt bên của tứ diện SAMB là các tam giác vuông.

b) Một mặt phẳng (β) qua A vuông góc với SB tại D cắt SM tại E. CM: ΔAED vuông.

17) Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD) đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AD = DC = $\frac{AB}{2}$. I là trung điểm của AB.

a) CM: CI $\perp$ SB và DI $\perp$ SC.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp S.ABCD là các tam giác vuông.

③) Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước:

1) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = 2a. Gọi M là một điểm trên cạnh AB; (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với AB. Đặt x = AM (0 < x < a).

a) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện.

2) Cho tứ diện SABC có ΔABC đều cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = 2a. Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện của tứ diện tạo với mặt phẳng (α) và tính diện tích của thiết diện.

3) Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = a. Tìm thiết diện của tứ diện SABC với mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

a) (α) qua S và vuông góc với BC.

b) (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của ΔSBC.

c) (α) qua trung điểm M của SC và ⊥ AB

4) Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. SA ⊥ (ABC) và SA = $a\sqrt{3}$. M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB, Đặt AM = x (0 < x < a) Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a) Xác định thiết diện của tứ diện SABC tạo bởi mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích thiết diện này theo a và x.

5) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD và hình vuông cạnh a; SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$. Vẽ đường cao AH của ΔSAB.

a) CMR: $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB, (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

6) Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a; SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC; (α) cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a) CMR: AM ⊥ SB, AD ⊥ SD

$SM.SB = SN.SC = SP.SD = SA^2$

b) CM: tứ giác AMNP nội tiếp được và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD; K = AN ∩ MP. CMR: S, K, O thẳng hàng

d) Tính diện tích tứ giác AMNP.

7) Cho hình thoi ABCD có tâm O với các đường chéo AC = 4a, BD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O lấy điểm S với SO = $2a\sqrt{3}$. mặt phẳng (α) qua A và ⊥ SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) Chứng minh tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc với nhau.

b) Tính diện tích tứ giác AB'C'D'

c) CMR: ΔB'C'D' là tam giác đều

8) Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a. SA ⊥ (ABC) và SA = a. Gọi M là một điểm tuỳ ý trên AC, (α) là mặt phẳng qua M và ⊥ AC.

a) Tuỳ theo vị trí của điểm M trên cạnh AC, có nhận xét gì về thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với tứ diện SABC

b) Đặt CM = x (0 < x < a). Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x và Xác định x để diện tích này có GTLN. Tính diện tích lớn nhất đó.

9) Cho hình lăng trụ ABC.AB'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. AA' ⊥ (ABC) và AA' = a. Có nhận xét gì về thiết diện của lăng trụ tạo bởi mặt phẳng (α) trong mỗi trường hợp sau:

a) (α) qua A và ⊥ B'C

b) (α) qua B' và ⊥ A'I (I là trung điểm của BC).

III) HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC:

①) Nhị diện - góc của hai mặt phẳng:

1) Cho hình vuông ABCD cạnh a, vẽ SA = $a\sqrt{3}$, SA ⊥ (ABCD). Tính số đo của các nhị diện sau: a) (S, AB, C) b) (S, BD, A) c) (SAB, SCD)

2) Cho hình vuông ABCD cạnh a tâm O; SA ⊥ (ABCD). Tính SA theo a để số đo nhị diện (B, SC, D) bằng 120^0.

3) Cho hình thoi ABCD cạnh a có tâm O và OB = $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Vẽ SO ⊥ (ABCD) và SO = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) CM: góc ASC = 30^0.

b) Chứng minh các mặt phẳng (SAB); (SAD) ⊥ với nhau.

4) Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc và SA = SB = SC. Gọi I, J là trung điểm của AB, BC. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAJ) và (SCI).

5) Cho tứ diện ABCD có mặt ABC là tam giác đều, mặt DBC vuông cân tại D. Biết AB = 2a, AD = $a\sqrt{7}$. Tính số đo góc nhị diện cạnh BC.

6) Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz không đồng phẳng với góc xOy = 90^0 góc yOz = 60^0. Tính số đo nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng xOz, zOy.

7) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, ΔSAB đều và vuông góc (ABCD). Gọi H là trung điểm của AB.

a) CM: SH ⊥ (ABCD).

b) Gọi I là trung điểm của BC. CM: SC ⊥ DI. Tính số đo nhị diện (B, SC, D)

② Ứng dụng của định lý diện tích hình chiếu của đa giác

1) Cho ΔABC đều cạnh a ở trong mặt phẳng (α). Trên các đường thẳng vuông góc với (α) vẽ từ B và C lấy các đoạn BD = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; CE = $a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên với (α).

a) CM: ΔADE vuông. Tính $S_{\Delta ADE}$.

b) Tính góc của (ADE) và (α).

2) Cho hình thoi ABCD có đỉnh A ở trong mặt phẳng (α). Các đỉnh khác không ở trong mặt phẳng (α), BD = a, AC = $a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi xuống mặt phẳng (α) ta được hình vuông AB'C'D'.

a) Tính: $S_{ABCD}, S_{AB'C'D'}$. Từ đó suy ra góc của (ABCD) và (α).

b) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của CB và CD với mặt phẳng (α). Tính diện tích của tứ giác EFDB và EFD'B'.

3) Cho ΔABC đều cạnh a. Từ các đỉnh A, B, C ta vẽ các đường thẳng vuông góc mặt phẳng (ABC) lấy các điểm A', B', C' sao cho AA' = a, BB' = 2a, CC' = x (A', B', C' ở cùng một phía đối với mặt phẳng chứa tam giác)

a) Xác định x để ΔA'B'C' vuông tại A'.

b) Trong trường hợp đó tính góc của (ABC) và (A'B'C').

4) Cho ΔABC cân có đáy là BC = 3a, BC ⊂ (α) và tam giác có đường cao AH = $a\sqrt{3}$. A' là hình chiếu của A trên (α) sao cho ΔA'BCvuông tại A'. Tính góc của hai mặt phẳng (α) và (ABC).

③) Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

1) Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD). Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. trong mặt phẳng (ADC) vẽ DK ⊥ AC tại K.

a) CM: (ADC) ⊥ (ABE); (ADC) ⊥ (DFK)

b) Gọi H là trực tâm của ΔAOD. CM: OH ⊥ (ACD).

2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. (SAD) và (SAB) cùng vuông góc với (ABCD). Gọi (α) là mặt phẳng qua A và ⊥ với SC, (α) cắt SC tại I.

a) CMR: SA ⊥ (ABCD).

b) Xác định giao điểm K của (α) và SO.

c) CM: (SBD) ⊥ (SAO) và BD // (α).

d) Xác định giao tuyến d của (SBD) và (α).

3) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông, SA ⊥ (ABCD).

a) CM: (SAD) ⊥ (SCD)

b) Gọi BE, DF là hai đường cao của ΔSBD. CMR:

(ACF) ⊥ (SBC); (ACE) ⊥ (SDC); (AEF) ⊥ (SAC)

4) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Gọi M, N là hai điểm lần lượt ở trên cạnh BC, DC sao cho BM = $\frac{a}{2}$; DN = $\frac{3a}{4}$. CM: (SAM) ⊥ (SMN).

5) Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC).

a) CM: (ABB') ⊥ (ACC')

b) Gọi AH, AK là đường cao của ΔABC và ΔAB'C'. CMR:

(BCC'B') ⊥ (AHK)   (AB'C') ⊥ (AHK)

6) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB. CMR:

a) SI ⊥ (ABCD)   b) AD ⊥ (SAB)

7) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O; AB = a; SO $\perp$ (ABCD) và SO = $\frac{a}{2}$; Gọi I, J là trung điểm của AD và BC. CMR:

a) (SAC) $\perp$ (SBD) b) (SIJ) $\perp$ (SBC) c) (SAD) $\perp$ (SBC)

8) Cho hình vuông ABCD, I là trung điểm của AB. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại I ta lấy điểm S (S $\neq$ I).

a) CM: (SAD) $\perp$ (SAB). (SBC) $\perp$ (SAB).

b) J là trung điểm của BC. CM: (SBD) $\perp$ (SIJ).

9) Cho ΔABC vuông tại A; Gọi O, I, J lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC. Trên đường thẳng $\perp$ (ABC) tại O ta lấy điểm S (S $\neq$ O). CMR:

a) (SBC) $\perp$ (ABC) b) (SOI) $\perp$ (SAB) c) (SOI) $\perp$ (SOJ)

10) Cho tứ diện SABC có SA = SC. (SAC) $\perp$ (ABC). Gọi I là trung điểm của AC. CM: SI $\perp$ (ABC).

11) Cho tứ diện ABCD có AB $\perp$ (BCD). Gọi BE, DF là hai đường cao của ΔBCD ; DK là đường cao của ΔACD.

a) CM: (ABE) $\perp$ (ADC); (DFK) $\perp$ (ACD).

b) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của hai ΔBCD , ACD. CM: OH $\perp$ (ADC).

12) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, ΔSAB cân tại S và (SAB) $\perp$ (ABCD). I là trung điểm của AB. CMR: a) BC $\perp$ (SAB). b) AD $\perp$ (SAB). c) SI $\perp$ (ABCD).

④) Thiết diện qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước:

1) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a; SA $\perp$ (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và $\perp$ (SCD).

a) Xác định rõ mặt phẳng (α). mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện.

2) Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B; AB = a; SA $\perp$ (ABC) và SA = $a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SC và SB. M là một điểm trên AB, Đặt AM = x. (α) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc (SAB).

a) Xác định rõ mặt phẳng (α). mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABC theo thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

3) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D; AB = 2a, AD = DC = a. Hai mặt (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, SA = a. Gọi E là trung điểm của SA, M là một điểm trên AD với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc (SAD).

a) Xác định rõ mặt phẳng (α). mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

4) Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều cạnh a. AA' $\perp$ (ABC) và AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và A'C'. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (α) qua MN và vuông góc (BCC'B'). Tính diện tích thiết diện.

5) Cho hình chóp S.ABCD đáy là vuông cạnh a. SA $\perp$ (ABCD) và SA = 2a. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD tạo bởi mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) (α) qua tâm O của đáy, trung điểm M của SD và vuông góc (ABCD).

b) (α) qua A, trung điểm N của CD và $\perp$ (SBC).

IV) KHOẢNG CÁCH:

① Các bài toán về khoảng cách:

1) Cho tứ diện ABCD có BCD là tam giác đều cạnh a, AB $\perp$ (BCD) và AB = a. Tính khoảng cách:

a) Từ D đến (ABC)

b) Từ B đến (ACD)

2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), SA = h. Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Tính khoảng cách:

a) Từ B đến (SCD)

b) Từ O đến (SCD)

3) Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông vạnh a, mặt bên (SAB) $\perp$ đáy và SA = SB = b. Tính khoảng cách:

a) Từ S đến (ABCD)

b) Từ trung điểm I của CD đến (SHC), H là trung điểm của AB.

c) Từ AD đến (SBC).

② Xác đinh đoan vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

1) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA = h; SA $\perp$ (ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SB và CD.

b) SC và BD.

c) SC và AB.

d) SB và AD.

2) Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) OA và BC.

b) AI và OC.

3) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SA và BD.

b) SC và BD.

c) AC và SD.

4) Cho hai tam giác cân không đồng phẳng ABC và ABD có đáy chung AB.

a) CM: AB $\perp$ CD.

b) Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD.

5) Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABC) và SA = $a\sqrt{2}$. ΔABC vuông tại B với AB = a. M là trung điểm AB. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC

6) Cho hình vuông ABCD cạnh a. I là trung điểm của AB. Dựng IS $\perp$ (ABCD) và IS = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P là trung điểm của BC, SD, SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

VI) MẶT CẦU:

2) Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. OA = a, OB = b, OC = c. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

3) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC); SA = $\frac{3a}{2}$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

4) Cho hình chóp tứ giác đều ABCD, cạnh đáy AB = a, cạnh bên SA = a$\sqrt{2}$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

5) Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = 2a, AD = a, SA ⊥ (ABCD); SA = 3a. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

6) Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang cân ABCD ngoại tiếp với đường tròn tâm O bán kính a. Đường cao của hình chóp là SO = 2a.

a) CM: O cách đều các mặt bên của hình chóp S.ABCD.

b) Xác định tâm và bán kính của hình cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD.

7) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc của mặt bên với đáy là (α).

8) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, đường cao SH = h.

9) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O, SO ⊥ (ABCD).

a) CM: O cách đều các mặt bên của hình chóp. Từ đó suy ra hình chóp có mặt cầu nội tiếp.

b) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp biết SO = h, góc BAD = a, $\alpha < 90^0$ và AB = a

10) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, BC = 2a. các cạnh bên SA = SB = SC = b . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

11) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

12) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (BCD).

a) Tính AH.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

13) Cho tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, SA = a$\sqrt{2}$, SA ⊥ (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

14) Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) dựng từ tâm O của hình vuông lấy một điểm S sao cho OS = $\frac{a}{2}$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

15) Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và góc xOy = 90^0 góc yOz = 60^0 , góc zOx = 120. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho OA = OB = OC = a.

a) CM: ΔABC vuông tại B.

b) Gọi I là trung điểm của AC. <u>CM:</u> OI $\perp$ (ABC).

c) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC16) Cho ΔABC cân có góc BAC = 120^0 và đường cao AH = $a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng Δ vuông góc (ABC) tại A lấy hai điểm I, J ở hai bên điểm A sao cho ΔIBC đều và ΔJBC vuông cân.

a) Tính các cạnh của ΔABC.

b) Tính AI, AJ và CM: ΔBIJ, ΔCIJ là tam giác vuông.

c) Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện IJBC, IABC.

17) Cho ΔABC vuông cân tại B (AB = a). Gọi M là trung điểm của AB. Từ M dựng đường thẳng vuông góc (ABC) trên đó lấy điểm S sao cho ΔSAB đều.

a) Dựng trục của các đường tròn ABC và SAB.

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

VII) DIÊN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIÊN

1) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy AB = a và các mặt bên hợp với đáy một góc α. Tính thể tích và S_{xq} của hình chóp.

2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có AB = a, AD = b, SA = b, SA ⊥ (ABCD). M là điểm thuộc SA với AM= x, mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối đa diện ABCDMN theo a, b và x.

3) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là ΔABC vuông cân có AB = AC = a, cạnh bên AA' = a. gọi E là trung điểm của AB, F là hình chiếu vuông góc của E lên BC. mặt phẳng (C'EF) chia lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai phần đó.

4) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông có CA = CB = a; CC' = 2a. M, N là trung điểm của AB và AA', mặt phẳng (C'MN) cắt BC tại P.

a) CM: PC = 2PB.

b) Tính: $V_{AMNCPC'}$.

5) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi E, F là trung điểm của C'D' và C'B'. Mặt phẳng (AEF) chia hình lập phương thành hai phần. Tính thể tích của mỗi phần.

6) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD), SA = h. Gọi I, J, K là trung điểm của SA, BC, CD. Chứng minh mặt phẳng (IJK) chia hình chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

7) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng avà góc ASB = α.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

b) Chứng minh rằng đường cao của hình chóp bằng $\frac{a}{2}\sqrt{\cot g^2\frac{\alpha}{2}-1}$

c) Tính thể tích hình chóp.

8) Cho hình chóp S.ABC có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy.Đáy ABC là một tam gíc cân đỉnh A. Trung tuyến AD bằng a. Cạnh SB tạo với đáy góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc β.

a) Xác định các góc α và β.

b) Chứng minh rằng: $SB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$.

c) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp.

9) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. E và F lần lượt là trung điểm của C'B' và C'D'.

a) Xác định thiết diện của hình lập phương tạo bởi (AEF).

b) Tính thể tích hai phần của hình lập phương do mặt phẳng (AEF) cắt ra.

10) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Từ A hạ các đường vuông góc AE với SB và AF với SD.

a) Chứng minh: (AEF) ⊥ SC

b) Gọi P là giao điểm của (AEF) với SC. Tìm quỹ tích của P khi S chạy trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với đáy ABCD

c) Chứng minh rằng có hai vị trí của S trên Ax sao cho V_{PABCD} bằng một giá trị V cho trước với điều kiện V không vượt quá một giá trị V_1 nào đó mà ta phải xác định

VII) TOÁN TỔNG HỢP CÁC PHẦN:

1) Cho ΔABC đều có đường cao AH = 3a, lấy điểm O trên đoạn AH sao cho AO = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác tại O lấy điểm S sao cho OS = BC.

a) CM: BC ⊥ SA.

b) Tính SO, SA, SH theo a.

c) Qua I trên đoạn OH vẽ mặt phẳng (α) ⊥ OH. (α) cắt AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q. CM: MNPQ là hình thang cân.

d) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x = AI. Xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

2) Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABCD). Đáy ABC không phải là tam giác cân. Gọi B' và C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Chứng minh tứ giác BCC'B' nội tiếp được và các cạnh BC và B'C' không song song.

b) CM: 5 điểm A, B, C, B', C' ở trên một mặt cầu.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và B'C'. CM: góc IAB = góc ICA

3) Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By hợp với nhau một góc là 60^0, AB = a là đoạn vuông góc chung. Trên Ax, By lần lượt lấy các điểm C, D sao cho AC = 2a, BD = a. Gọi (α) là mặt phẳng chứa By // Ax, E là hình chiếu vuông góc của C lên (α).

a) CM: CD ⊥ By.

b) Chứng minh 5 điểm A, B, C, D, E ở trên một mặt cầu, tính bán kính mặt cầu đó.

c) Tính góc hợp bởi CD và mặt phẳng (ABC).

d) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của CE và AD.

4) Cho hai nửa đường thẳng Ax, By hợp với nhau góc nhọn α nhận AB = h làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a, gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên Ax. Gọi Az là nửa đường thẳng qua A và // By

a) Tính độ dài AD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

b) Xác định tâm của mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

c) Tính khoảng cách từ D đến By.

5) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng avà góc ASB = α.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

b) Chứng minh rằng đường cao của hình chóp bằng $\frac{a}{2}\sqrt{\cot g^2\frac{\alpha}{2}-1}$

c) Tính thể tích hình chóp.

6) Cho hình chóp S.ABC có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy.Đáy ABC là một tam gíc cân đỉnh A. Trung tuyến AD bằng a. Cạnh SB tạo với đáy góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc β.

a) Xác định các góc α và β.

b) Chứng minh rằng: $SB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$.

c) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp.

7) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB và là một điểm di động trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng SH $\perp$ (ABCD). Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

b) Tìm tập hợp các hình chiếu vuông góc của S lên DM.

c) Tính khoảng cách từ S đến DM theoa và x = CM.

8) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. E và F lần lượt là trung điểm của C'B' và C'D'.

a) Xác định thiết diện của hình lập phương tạo bởi (AEF).

b) Tính thể tích hai phần của hình lập phương do mặt phẳng (AEF) cắt ra.

9) Cho hình chóp SABCD đáy là hình vuông cạnh a; SA = a và SA $\perp$ (ABCD), AI, AJ và AE là các đường cao xuất phát từ A trong tam giác SAB, SAD và SAC

a) Chứng minh: AI, AJ, AE đồng phẳng

Chứng minh rằng tứ giác AIEJ có các đường chéo vuông góc nhau và tính diện tích của nó

10) Cho hình chóp SABCD đáy là hình chữ nhật cạnh; SA $\perp$ (ABCD). Dựng các đường cao AH, AK trong tam giác SAB và SAD. Chứng minh:

(AHK) $\perp$ (SBC) và (AHK) $\perp$ (SCD)

11) Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chữ nhật tại A lấy một điểm S. mặt phẳng qua CD cắt SA tại M và SB tại N

a) CDMN là hình gì?

Nói cách dựng đường vuông góc hạ từ S vuông góc với (CDMN)

12) Cho hình thang ABCD vuông tại A và D và AB = 2a; AC = DC = a; SA = a là đoạn thẳng vuông góc với (ABCD)

a) Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBC)

Tính góc nhị diện (A, SB, C)

13) Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Hai điểm M và N di động trên các cạnh BC và CD. Đặt Chứng minh: = x và CN = y. Trên đường thẳng At vuông góc với (P) lấy một điểm S. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:

a) Góc của các mặt phẳng (SAM) và (SAN) bằng 45^0

(SAM) $\perp$ (SMN)

14) Cho hình chóp SABCD đáy là hình vuông ABCD cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc với nhau; SA = a

a) Chứng minh: (SAB) $\perp$ (SBC) và (SBD) $\perp$ (SAC)

b) Xác định và tính góc nhị diện (S, BD, A)

c) Xác định và tính góc nhị diện (B, SC, D)

15) Cho hình vuông ABCD cạch a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình vuông tại A ta lấy một điểm S với AS = h. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SC và BD

b) SC và AD

16) Trên cạnh AD của hình vuông ABCD cạnh a lấy điểm M với AM = x (0 < x < a) và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mp(ABCD) tại A ta lấy điểm S sao cho AS = y > 0

a) Chứng minh rằng nhị diện cạnh SB của hình chóp SABCM là nhị diện vuông

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(SAC)

c) Gọi I là trung điểm của SC; H là hình chiếu vuông góc của I lên Chứng minh:. Tìm quỹ tích của H khi M chạy trên cạnh AD và S chạy trên Ax

17) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang vuông ABCD vuông tại A và B, AB = BC = a; AD = 2a; đường cao của hình chóp là SA = 2a

a) Xác định và tính đoạn vuông góc chung của AD và SC

b) Tính góc phẳng nhị diện cạnh SD

18) Cho hình chóp SABCD đáy là nửa lụa giác đều cạnh a, chiếu cao SA = h

a) Tính thể tích hình chóp SABCD

b) mặt phẳng qua A vuông góc với SD cắt SB, SC, SD đường thẳngại B', C' , D'. Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' nội tiếp

c) Chứng minh: A'B' > C'D'

19) Cho hình chóp SABCD, đáy là hình vuông ABCD cạnh a, chiều cao SA.

a) Hãy nêu cách dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC

b) Tính diện tích thiết diện

20) Cho hình chóp SABCD đáy là nửa lục giác đều ABCD với AD = 2a, AB = BC = CD = A. Cạnh SA = h vuông góc với đáy. (P) là mặt phẳng qua A vuông góc với SD cắt SB, SC, SD tại B', C', D'

a) Chứng minh rằng AB'C'D' là một tứ giác nội tiếp

b) Tính thể tích hình chóp SAB'C'D'

c) Tính diện tích tứ giác AB'C'D'

21) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Từ A hạ các đường vuông góc AE với SB và AF với SD.

d) Chứng minh: (AEF) ⊥ SC

e) Gọi P là giao điểm của (AEF) với SC. Tìm quỹ tích của P khi S chạy trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với đáy ABCD

f) Chứng minh rằng có hai vị trí của S trên Ax sao cho V_{PABCD} bằng một giá trị V cho trước với điều kiện V không vượt quá một giá trị V_1 nào đó mà ta phải xác định

22) Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trên đường thẳng Ox vuông góc với (P) ta lấy điểm S.

1/ Giả sử các mặt bên của hình chóp SABCD tạo với đáy một góc α

a) Xác định đường vuông góc chung của SA và CD . Tính độ dài đường vuông góc chung đó theo a và α

b) Một mặt phẳng đi qua AC và vuông góc với (SAD) chia hình cầu thành hai phần . Tính tỷ số thể tích của hai phần đó

2/ Giả sử điểm S thay đổi, hãy xác định vị trí của S trên Ox sao cho mặt phân giác của góc nhị diện ứng với cạnh đáy của mặt xung quanh của hình chóp SABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau

23) Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (r) bán kính R; A là điểm cố định trên (r), S là điểm trên đường thẳng (d) vuông góc với (P) tại A. ABCD là tứ giác nội tiếp trong (r) có hai đường cheo AC và BD vuông góc với nhau.

a) Giả sử S cố định, phải chọn đáy ABCD thế nào để hình chóp SABCD có thể tích lớn nhất

b) Với ABCD đã định chọn như ở câu a. Giả sử S di động trên (d). Trên đoạn AB lấy điểm M. Đặt AM = x ($0 \le x \le R\sqrt{2}$) và AS = y. Biết SM = $R\sqrt{2}$. Hãy xác định vị trí của M trên AB để hình chóp SAMBC có thể tích lớn nhất

24) Cho hình chóp SABCD trong đó đáy ABCD là hình chữ nhật. Cạnh bên SA ⊥ (ABCD). Một mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt SB ở B', cắt SD ở D'.

a) Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' có hai góc đối vuông góc nhau
b) Chứng minh rằng nếu S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại A thì mặt phẳng (AB'C'D') luôn đi qua một đường thẳng cố định. Chứng minh rằng các điểm A, B, B', C, C', D, D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định
c) Giả sử góc SC và mặt (SAB) bằng x. Tính tỷ số giữa thể tích của hình chóp SAB'C'D' và thể tích hình chóp SABCD theo x, biết rằng AB = BC

25) Cho hình chóp SABCD có mặt đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = b. Cạnh SA vuông góc với (ABCD) và SA = 2a. M là điểm trên SA vuông góc với (ABCD) và SA = 2a. M là điểm trên SA với AM = x
($0 \le x \le 2a$)

a) Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiế diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó.
b) Xác định x sao cho thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất
c) Xác định x sao cho mặt phẳng (MBC) chia hình chóp ra thành hai phần có thể tích bằng nhau

26) Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân, AB = AC = a, góc A = α. Biết rằng SA vuông góc với (ABC) và SA = h. cho biết tồn tại 3 điểm M, N, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho AM = AN = AP và các tam giác SMP, SNP, tương đương

a) Chứng minh P là trung điểm của BC
b) Tíng thể tích của hình chóp SAMPN
c) Chứng minh hình chóp SAMPN có mặt cầu nội tiếp. Tính bán kính của mặt cầu ấy

27) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA ⊥ (ABCD), AB = a, AD = b, SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SA.
Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì. Tính diện tích thiết diện ấy

ĐH ĐÀ LẠT – D - 2000

28) Cho hình vuông ABCD cạnh a, trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc vơi mặt phẳng (ABCD) lấy điểm S sao cho SA = a. Trên cạnh CD lấy điểm M di động. Hạ SH ⊥ BM và AK ⊥ SH. Đặt góc ABM = α

a) Chứng minh: AK ⊥ (SBM) và tính AK theo a và α

Hạ AI ⊥ SB. Chứng minh SB ⊥ (AKI) và tìm quỹ tích K khi M thay đổi trên cạnh CD

ĐH QG TPHCM – D - 2000

<u>① Kim tư tháp</u>

BÀI1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy là hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Mặt bên tạo với mặt đáy hình chóp 1 góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Cho biết góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt đáy của hình chóp là 30^0

a) Tứ giác ABMN là hình gì?
b) Tính V_{SABMN} theo a *ĐH SP TPHCM – A - 2000*

BÀI2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy là hình vuông ABCD có cạnh bằng a và SA = SB = SC = SD = a.

a) Tính S_{TP} và V_{SABCD} theo a *ĐH SP TPHCM – D - 2001*

b) Tính cosin của góc nhị diện (SAB, SAD)

BÀI3: Cho hình thoi ABCD tâm O; SO là đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng hình thoi

a) Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng phân giác của các nhị diện cạnh SA và SC. Suy ra O cách đều bốn mặt bên của hình chóp SABCD

Tìm một điểm cách đều năm mặt của hình chóp ấy

BÀI4: Cho hình chóp SABCD đáy là hình vuông cạnh a. Gọi O là tâm hình vuông; SO vuông góc với (ABCD); SA = b, SA tạo với (ABCD) và (SBC) hai góc bằng nhau và bằng α

a) Xác định hình chiếu H của A xuống mặt phẳng (SBC). Chứng minh SO = AH
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b rồi suy ra giá trị của tgα

BÀI5: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành ABCD, diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$ và góc giữa hai đường chéo bằng 60^0. Biết rằng các cạnh của hình chóp nghiêng đều trên mặt đáy một góc 45^0

a) Chứng minh: ABCD là hình chữ nhật
b) Tính thể tích hình chóp

BÀI6: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng a, đường cao h. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC tại C'

a) h phải thoả mãn điều kiện gì đối với a để C' $\in$ SC?
b) Trong điều kiện đó (P) còn cắt SB, SD lần lượt tại B', D'. Chứng minh B'C'D' là tam giác tù

BÀI7: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh a , đường cao SO = $a\sqrt{3}$

a) M là một điểm trên đoạn OC với AM = x. Qua M ta dựng mặt phẳng (P) song song với SA và BD. Nêu cách dựng thiết diện và tính diện tích của nó theo a và x
b) Nếu M thuộc đoạn AO, hãy lặp lại câu hỏi trên

BÀI8: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC

a) Dựng thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNE)
b) Tính tỷ số thể tích hai phần của hình chóp phân chia bởi thiết diện trên

BÀI9: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD đỉnh S, cạnh đáy bằng a, đường cao SH. Một điểm M bất kỳ thuộc AH, mặt phẳng (P) qua M song song với AD và SH cắt AB, DC, SD và SA lần lượt tại I, J, K, L

a) Cho biết SH = $a\sqrt{2}$. Xác định vị trí của M trên AH để thiết diện IJKL là một tứ giác ngoại tiếp
b) Xác định vị trí của M trên AH để thể tích khối đa diện DIJKLH đạt giá trị lớn nhât
c) mặt phẳng (P) cắt DB tại N. Tìm quỹ tích giao điểm P của hai đường chéo của tứ giác MNKL khi M thay đổi trên AH

BÀI10: Cho hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α. Qua một cạnh đáy ta dựng một mặt phẳng tạo với mặt đáy góc β. Tính diện tích thiết diện

BÀI11: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD trong đó ABCD là hình vuông cạnh a và SA = SB = SC = SD = a.

a) Tính chiếu cao và thể tích hình chóp
b) Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AD và SC. Mặt phẳng MNP cắt SB và SD tại Q và R. So sánh các đoạn QB và RD với SB
c) Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia hình chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau; kết quả đó có đúng không nếu SA = SB = SC $\neq$ a

BÀI 12: Chop hình chóp tứ giác đều SABCD có độ dài cạnh đáy AB = a và góc SAB = α . Tính thể tích hình chóp SABCD theo a và α

ĐH Y HN - 2000

BÀI 13: Cho hình chóp tứ giác đều: SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và đáy là α ($45^0 < \alpha < 90^0$)

a) Tính diện tích toàn phần và V_{SABCD}
b) Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ MK vuông góc với mp(SAD). Mặt phẳng (BCK) cắt hình chóp theo 1 thiết diện là hình gì?
Tính diện tích thiết diện theo a và α *ĐH NN - 2000*

BÀI 14: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đường cao SH, đường trung đoạn thuộc mặt bên (SBC) là SN = a và hợp với đường cao SH một góc α

a) Tính V_{SABCD} theo a và α *CĐ LĐ XH - 2000*
b) Trong mặt phẳng (SHN) và HK $\perp$ SN
Chứng minh: HK là khoảng cách từ H tới mặt (SBC)
Tính HK biết a = 3960 và $\alpha = 22^030'$
c) Tính HK biết diện tích toàn phần của hình chóp là:
$$S_{TP} = 8a^2\sin\alpha\cos^2(45^0 - \alpha/2)$$

② Chóp cụt:

BÀI 1: Một chóp cụt tứ giác đều có chiều cao h, cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh đáy nhỏ, cạnh bên tạo với cạnh đáy lớn xuất phát từ cùng một đỉnh góc α
Tính diện tích xung quanh và thể tích chóp cụt

BÀI 2: Biết hai đáy của một chóp cụt có diện tích B, B’. Tính diện tích thiết diện trung bình , tức kà thiết diện đi qua điểm giữa một cạnh bên và song song với hai đáy của chóp cụt

BÀI 3: Cho hình chóp cụt tam giác đều ngoại tiếp một hình cầu bán kính r cho sẵn. Tính thể tích hình chóp cụt biết rằng cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh đáy nhỏ

BÀI 4: Cho chóp cụt tứ giác đều ABCDA’B’C’D’. Tính tỷ số diện tích của hai tứ giác ACC’A’ và ABC’D’ biết rằng góc của mặt phẳng tạo bởi hai tứ giác đó là α

BÀI 5: Cho chóp cụt lục giác đều ngoại tiếp hình cầu tâm I bán kính R. Gọi O và O’ là tâm của hai đáy, x và y là trung đoạn của hai đáy

a) Chứng minh rằng với R cho sẵn thì tích xy không đổi
b) Tính thể tích chóp cụt theo x, y và R. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khi x, y thay đổi
c) Tính góc của mặt bên với đáy lớn khi x + y = 4R hoặc khi x – y = 2R

BÀI 6: Cho hình chóp cụt tam giác đều ABCA’B’C’ ngoại tiếp hình cầu tâm O bán kính R

a) Chứng minh hai mặt phẳng (OBC) và (OB’C’) vuông góc với nhau
b) H là giao điểm của BC’ và B’C’. Chứng tỏ OH vuông góc với mặt phẳng (BCC’B’)
c) Trong các hình chóp cụt nói trên xác định hình chóp cụt có thể tích nhỏ nhất, Chứng minh rằng trong điều kiện này diện tích toàn phần của hình chóp cụt cũng nhỏ nhất. Tính các giá trị nhỏ nhất nói trên

③ Hình chóp:

BÀI 1: Cho hình chóp SABCD với ABCD là nửa lục giác đều (AD > BC) và SA $\perp$ (ABCD). Một mặt phẳng qua A vuông góc với SD cắt D’ và cắt SB, SC tại B’, C’ . Chứng minh: AB’C’D’ là tứ giác nội tiếp

BÀI2: Cho hình vuông ABCD cạch a. Từ trung điểm I của AD ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và trên đó lấy điểm S sao cho ΔSAD là tam giác đều

a) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SD và AB
b) Dựng và tính độ dài của đoạn vuông góc chung của SA và CM trong đó M là trung điểm của AB

BÀI3: Trong mp(α) cho hình chữ nhật ABCD. Gọi (C) là đường tròn đường kính BD trong mặt phẳng qua BD và vuông góc với (α); M là một điểm di động trên (C)

a) Chứng minh: AM ⊥ MC
b) Có vị trí nào của M trên (C) để (MAB) ⊥ (MCD) không?
c) Gọi (β) là mặt phẳng qua CD và vuông góc với (α). đường thẳng AM cắt (β) tại M'. Gọi H' là hình chiếu vuông góc của M' lên CD. Chứng minh rằng: DH' = k^2M'H^2 với k là một hằng số không phụ thuộc vào M. Từ đó suy ra quỹ tích của M' khi M chuyển động trên (C)

BÀI4: Cho hình vuông ABCD nằm trong mp(P). Qua A dựng nửa đường thẳng Ax ⊥ (P). M là một điểm trên Ax. đường thẳng qua M vuông góc với mp(MCB) cắt (P) ở R. Đường thẳng qua M vuông góc với mp(MCD) cắt (P) ở S

a) Chứng minh: A, B, R thẳng hàng và A, D, S thẳng hàng
b) Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn RS khi M di chuyển trên Ax
c) Gọi H là chân đường cao kẻ từ A trong ΔMAI. Chứng minh AH là đường cao của tứ diện ARMS và H là trực tâm của ΔMRS

BÀI5: Cho hình chóp SABCD có các đặc điểm sau: Đáy là hình thang cân ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính a, AB // CD và CD = 4AB. SO = 2a là đường cao

a) Tính thể tích hình chóp
b) Chứng minh rằng O cách đều bốn mặt bên của hình chóp. Xác định tâm và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp

BÀI6: Cho tứ diện ABCD với AB = a; CD = b

a) Xác định hình dạng của thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) song song với AB và CD
b) Xác định vị trí của mặt phẳng (P) sao cho diện tích thiết diện lớn nhất
c) Xác định vị trí mặt phẳng (P) sao cho thiết diện là hình thoi

BÀI7: Cho hình chóp PQRS đáy là tam giác đều QRS cạnh bằng m, PQ = $m\sqrt{2}$; đường cao của hình chóp kẻ từ P đi qua trung điểm của RS. Người ta cắt hình chóp bằng một mặt phẳng song song với PQ và RS và cách đỉnh Q một đoạn bằng d

a) Nêu cách dựng thiết diện. Xác định hình dáng thiết diện
b) Tính diện tích thiết diện

BÀI8: Cho hình chóp tứ giác SABCD có cạnh SA = x, còn tất cả các cạnh khác độ dài bằng 1

a) Chứng minh SA ⊥ SC
b) Tính thể tích của hình chóp. Xác định x để bài toán có nghĩa. Xác định x để thể tích lớn nhất

BÀI9: Cho hình chóp SABCD có đáy là một hình bình hành ABCD. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại A', B', C', D'. Chứng minh hệ thức: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$

BÀI10: Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao, đỉnh, các cạnh bên của hình chóp trùng với tâm của hình chóp kia, các cạnh bên của hình chóp này cắt các cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên l của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao góc α. Cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao góc β . Tính thể tích phần chung của hai hình chóp

BÀI11: Trong mặt phẳng (α) cho ΔOAB và một điểm di động M trên đoạn AB. Từ M ta dựng hai đường thẳng song song với OB và OA, Lần lượt cắt OA, OB tại P và Q; Gọi I là giao điê,r của AQ và BP. Trên đường thẳng vuông góc với mp(α) tại M ta lấy điểm S ≠ M. Đặt OA = a, OB = b

a) Chứng minh: $\frac{OP}{a} + \frac{OQ}{b} = 1$. Từ đó suy ra thể tích hai hình chóp SOPIQ và SIAB bằng nhau
b) Cho góc AOB = 60^0, a = 2b và SM = $b\sqrt{3}$. Gọi φ_1, φ_2 lần lượt là góc phẳng của hai nhị diện tạo bởi (SOA) và (SOB) với mp(α). Chứng minh rằng: khi M đi động trên đoạn AB thì ta luôn có hệ thức: $\frac{2}{tg_{1}} + \frac{2}{tg_{2}} = 1$

BÀI12: Đáy của hình chóp là tam giác vuông có diện tích Q và góc nhọn α. Mặt bên qua cạnh đối với α vuông góc với mặt đáy; hai cạnh bên còn lại hợp với mặt đáy góc β

a) Tính thể tích hình chóp theo α, β, Q
b) Với giá trị nào của α thì tiếp tuyến đó lớn nhất (Q, β khônh đổi)

BÀI13: Trong mặt phẳng (P) cho hình thang cân ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính R, các cạnh đáy AB và CD thoả mãn điều kiện AB/CD = ả . Trên đường thẳng d vuông góc voíu (P) tại O lấy điểm S sao cho OS = 2R

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp SABCD
b) Chứng minh O cách đều bốn mặt của hình chóp SABCD từ đó tìm tâm và bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp

BÀI14: Chứng minh rằng nếu hình chóp có các mặt bên làm với mặt đáy một góc bằng nhau thì hình chóp có mặt cầu nội tiếp. Điều ngược lại có đúng không?

BÀI15: Cho hình chóp tam giác đều SABC có chân đường cao SH = h. Gọi I, J, K lần lượt là trực tâm các mặt bên của hình chóp

a) Chứng minh mặt cầu ngoại tiếp SIJK có tâm trên SH
b) Gọi r là bán kính của mặt cầu ấy. Tính thể tích của SABC theo r và h

BÀI16: Cho hình chóp tam giác đều SABC với cạnh đáy AB = a và đường cao SH = h

a) Tính theo a và h các bán kính r, R của các mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình chóp
b) Giả sử a cố định, h thay đổi. Xác định để r/R lớn nhất

BÀI17: Cho hình chóp tam giác đều có diện tích mặt cầu ngoại tiếp là S và diện tích mặt cầu nội tiếp là s

a) Chứng minh: S ≥ 9s
b) Tính thể tích hình chóp theo S và s