

BÀI 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Vấn đề 1 : TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG α VÀ β :

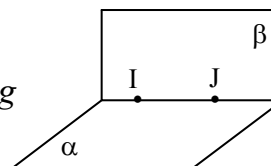
Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng α và β ta đi tìm hai điểm chung I ; J của α và β $\alpha \cap \beta = IJ$

Khi tìm điểm chung ta chú ý :

• Cách gọi tên hai mặt phẳng để phát hiện điểm chung

• $M \in d$ và $d \subset \alpha$ $M \in \alpha$

• $\begin{cases} a \cap b = M \text{ trong } (P) \\ a \subset \alpha; b \subset \beta \end{cases}$ M là điểm chung



1. 1: 1) Cho tứ diện ABCD có E là trung điểm của AB. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (ECD) với các mặt phẳng (ABC) ; (ABD) ; (BCD) ; (ACD)

2) Cho tứ diện SABC và một điểm I trên đoạn SA; d là đường thẳng trong (ABC) cắt AB; BC tại J ; K. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (I,d) với các mặt phẳng sau : (SAB) ; (SAC) ; (SBC)

1. 2: 1) Cho tứ giác lồi ABCD và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa tứ giác. Tìm giao tuyến của :

a) (SAC) và (SBD) b) (SAB) và (SCD) c) (SAD) và (SBC)

2) Cho hình chóp S.ABCDE. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAC) với các mặt phẳng (SAD) ; (SCE)

1. 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi ; M là điểm trên cạnh CD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng :

a) (SAM) và (SBD) b) (SBM) ; (SAC)

1. 4: Cho tứ diện ABCD; M là điểm nằm trong ΔABC ; N là điểm nằm trong ΔACD . Tìm giao tuyến của : a) (AMN) và (BCD) b) (CMN) và (ABD)

1. 5: Cho tứ diện ABCD .M nằm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}MB$; N nằm trên AC sao cho $AN = 3NC$; điểm I nằm trong ΔBCD . Tìm giao tuyến của :

a) (MNI) và (BCD) b) (MNI) và (ABD) c) (MNI) và (ACD)

1. 6: Cho tứ diện ABCD ; gọi I ; J lần lượt là trung điểm của AD; BC .

a) Tìm giao tuyến của : (IBC) và (JAD)

b) M là điểm trên AB; N là điểm trên AC. Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN)

1. 7: Cho hai đường thẳng a ; $b \in (P)$ và điểm S không thuộc (P). Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng chứa a và S với mặt phẳng chứa b và S ?

1. 8: Cho tứ diện ABCD ; trên AB ; AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho :

$\frac{AM}{MB} \neq \frac{AN}{NC}$. Tìm giao tuyến của (DMN) và (BCD)

1. 9; Cho bốn điểm ABCD không đồng phẳng ; gọi I ; K là trung điểm AD ; BC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) ?

1. 10 : Trong mặt phẳng α cho hình thang ABCD có đáy là AB ; CD ; S là điểm nằm ngoài mặt phẳng hình thang. Tìm giao tuyến của :

a) (SAD) và (SBC) b) (SAC) và (SBD)

1.11. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang hai đáy là AD ; BC .Gọi M ; N là trung điểm AB ; CD và G là trọng tâm ΔSAD . Tìm giao tuyến của :

a) (GMN) và (SAC) b) (GMN) và (SBC)

Vấn đề 2:

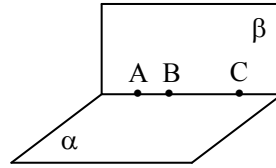
**CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG
VÀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY**

Chứng minh A ; B ; C thẳng hàng :

Chỉ ra $A ; B ; C \in \alpha$

Chỉ ra $A ; B ; C \in \beta$

Kết luận : $A ; B ; C \in \alpha \cap \beta \Rightarrow A ; B ; C$ thẳng hàng

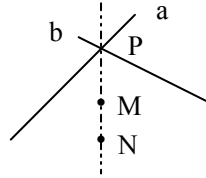


Chứng minh a ; b ; MN đồng quy :

Đặt $a \cap b = P$

Chứng minh M ; N ; P thẳng hàng

Kết luận : MN ; a ; b đồng quy tại P



2. 1: Cho hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo giao tuyến d .Trên α lấy hai điểm A ; B nhưng không thuộc d. O là điểm ở ngoài hai mặt phẳng . Các đường thẳng OA ; OB lần lượt cắt β tại A' ; B' . AB cắt d tại C

a)Chứng minh O; A; B không thẳng hàng ?

b)Chứng minh A' ; B' ; C' thẳng hàng ? Từ đó suy ra AB ; A'B' ; d đồng quy

2. 2: Trong không gian cho ba tia Ox ; Oy ; Oz không đồng phẳng. Trên Ox lấy A ; A' ; trên Oy lấy B ; B' trên Oz lấy C ; C' sao cho AB cắt A'B' tại D ; BC cắt B'C' tại E ; AC cắt A'C' tại F. Chứng minh D; E ; F thẳng hàng ?

2. 3: Cho A; B; C không thẳng hàng ở ngoài mặt phẳng α . Gọi M ; N ; P lần lượt là giao điểm AB ; BC ; AC với α . Chứng minh M; N; P thẳng hàng ?

2. 4: 1) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành ; O là giao điểm hai đường chéo ; M ; N lần lượt là trung điểm SA ; SD. Chứng minh ba đường thẳng SO ; BN ; CM đồng quy

2)Cho tứ diện ABCD.Mặt phẳng α không song song AB cắt AC ; BC ; AD ; BD lần lượt tại M ; N ; R ; S . Chứng minh AB ; MN ; RS đồng quy ?

2. 5: Chứng minh trong một tứ diện các đường thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện đồng quy ?

2.6. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang hai đáy là AD ; BC .Gọi M ; N là trung điểm AB ; CD và G là trọng tâm ΔSAD . Tìm giao tuyến của :

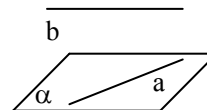
a) (GMN) và (SAB) b) (GMN) và (SCD)

c) Gọi giao điểm của AB và CD là I ; J là giao điểm của hai giao tuyến của câu a và câu b. Chứng minh S ; I ; J thẳng hàng ?

Vấn đề 3: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU, VÀ CÁC ĐIỂM ĐỒNG PHẪNG

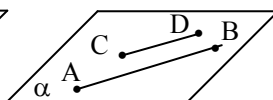
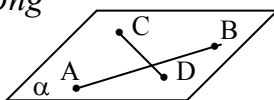
Chứng minh 2 đường thẳng a ; b chéo nhau :

- Giả sử : a không chéo b
- Từ đó suy ra hai đường thẳng a và b nằm trong cùng mặt phẳng α (đồng phẳng)
- Từ đó suy ra điều mâu thuẫn với giả thiết hoặc mâu thuẫn với một điều đúng nào đó



Chứng minh A, B, C, D nằm trong cùng một mặt phẳng – đồng phẳng

- Chứng minh hai đường thẳng tạo thành từ bốn điểm đó cắt nhau hoặc song song với nhau



- 3. 1:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng
- Chứng minh ba trong số 4 điểm này không thẳng hàng
 - Chứng minh AB chéo với CD ?
- 3. 2:** Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Trên a lấy hai điểm A, B ; trên b lấy hai điểm C, D
- Chứng minh AC chéo BD ?
 - Lấy M nằm trên đoạn AC ; N nằm trên đoạn BD . Đường thẳng MN có song song AB hoặc CD không ?
 - O là trung điểm MN . Chứng minh A, O, C, N đồng phẳng
- 3. 3:** Cho đường thẳng a cắt hai đường thẳng b và c . Hỏi ba đường thẳng a, b, c có đồng phẳng không ? Tại sao ?
- 3. 4:** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I ; J là trung điểm AD ; BC .
- Chứng minh AB chéo CD ?
 - Chứng minh IB chéo JA ?

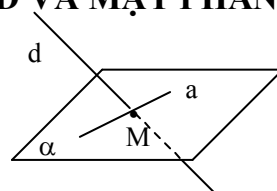
Vấn đề 4: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG d VÀ MẶT PHẪNG α

Giả sử phải tìm giao điểm $d \cap \alpha = ?$

Phương pháp 1:

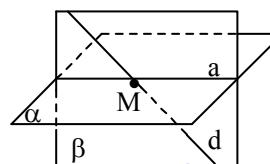
Tìm $a \subset \alpha$

Chỉ ra được a, d nằm trong cùng mặt phẳng và chúng cắt nhau tại M $d \cap \alpha = M$ (hình vẽ)



Phương pháp 2:

Tìm β chứa d thích hợp



Giải bài toán tìm giao tuyến a của α và β

Trong β : $a \cap d = M$ $d \perp \alpha = M$ (hình vẽ b)

4. 1: Cho tứ diện SABC; M ; N lần lượt là các điểm nằm trong λ_{SAB} ; λ_{SBC} . MN cắt (ABC) tại P. Xác định giao điểm P

4. 2: Cho tứ diện ABCD ; M là trung điểm AB; N và P lần lượt là các điểm nằm trên AC; AD sao cho $AN : AC = 3 : 4$; $AP : AD = 2 : 3$. Tìm giao điểm :

- a) MN với (BCD) b) BD với (MNP)
c) Gọi Q là trung điểm NP. Tìm giao điểm của MQ với (BCD)

4. 3: A; B ; C ; D là bốn điểm không đồng phẳng. M; N lần lượt là trung điểm của AC; BC. Trên đoạn BD lấy P sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của :

- a) CD với (MNP) b) AD với (MNP)

4. 4: Cho hình chóp SABC ; O là điểm trong λ_{ABC} ; D và E là các điểm nằm trên SB ; SC. Tìm giao điểm của a) DE với (SAO) b) SO với (ADE)

4. 5: Cho tứ diện SABC. I ; H lần lượt là trung điểm SA; AB. Trên đoạn SC lấy điểm K sao cho $CK = 3KS$.

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng BC với (IHK) ?
b) Gọi M là trung điểm HI. Tìm giao điểm của đường thẳng KM với (ABC) ?

4. 6: Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang ABCD đáy lớn AB. I; J; K là ba điểm trên SA; SB; SC .Tìm giao điểm IK và (SBD); giao điểm (IJK) và SD; SC

4. 7: Gọi I ; J lần lượt là hai điểm nằm trong λ_{ABC} ; λ_{ABD} của tứ diện ABCD. M là điểm tùy ý trên CD. Tìm giao điểm IJ và mặt phẳng (AMB)

4. 8: Hình chóp SABCD đáy là hình bình hành ABCD. M là trung điểm SD

- a) Tìm giao điểm I của BM và (SAC) ? Chứng minh : $BI = 2IM$?
b) Tìm giao điểm J của SA và (BCM) ? Chứng minh J là trung điểm SA ?
c) N là điểm tùy ý trên BC. Tìm giao điểm của MN với (SAC) ?

Vấn đề 5:
DIỆN

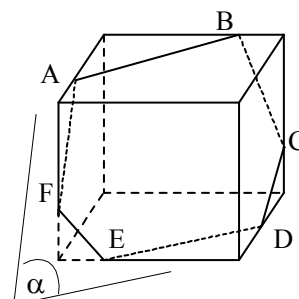
THIẾT DIỆN TẠO BỞI MẶT PHẪNG α VỚI KHỐI ĐA

Lần lượt xét giao tuyến của $\alpha \rightarrow$ với các mặt của khối đa diện đồng thời xét giao điểm của các cạnh của đa diện với mặt phẳng $\alpha \rightarrow$

Khi các đoạn giao tuyến tìm được khép kín thành đa giác ta được thiết diện phải tìm.

Việc chứng minh tiết diện có hình dạng đặc biệt như hình bình hành; hình thang ; . . . trong mặt phẳng α cũng nhờ vào quá trình đi tìm giao tuyến và giao điểm ở trên

Trong phần này ta chỉ xét hai cách làm cơ bản :



I. Xác định thiết diện bằng cách kéo dài các giao tuyến

II. Xác định thiết diện bằng cách vẽ giao tuyến phụ

5. 1: 1) Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Gọi M ; N ; P lần lượt là trung điểm AA' ; AD ; DC . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua M; N; P với hình lập phương ?

2) Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Gọi M ; N ; P lần lượt là trung điểm DC ; AD ; BB'. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp và giao tuyến của (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D')

5. 2: 1) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành . Gọi E; F; K lần lượt là trung điểm của SA ; AB ; BC. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng đi qua ba điểm E; F ; K

2) Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A' ; B' ; C' lần lượt là các điểm nằm trên SA ; SB; SC. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (A'B'C') với hình chóp

***5. 3:** Cho tứ diện ABCD ; điểm I nằm trên BD và ở ngoài BD sao cho ID = 3IB; M ; N là hai điểm thuộc cạnh AD ; DC sao cho $MA = \frac{1}{2} MD$; $ND = \frac{1}{2} NC$

a) Tìm giao tuyến PQ của (IMN) với (ABC) ?

b) Xác định thiết diện tạo bởi (IMN) với tứ diện ?

c) Chứng minh MN ; PQ ; AC đồng qui ?

***5. 4:** 1) Cho tứ diện ABCD ; điểm I ; J lần lượt là trọng tâm ΔABC ; ΔBDC ; M là trung điểm AD. Tìm tiết diện tạo bởi (MIJ) và tứ diện ?

2) Cho hình chóp S.ABCDE. Lấy ba điểm M ; N ; K trên SA ; BC ; SD. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNK) với hình chóp

5.5: Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy . Gọi M ; N là trung điểm SB ; SC .

- a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) ?
- b) Tìm giao điểm của SD với mặt phẳng (AMN) ?
- c) Tìm tiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMN) với hình chóp

***5.6:** Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành . M là trung điểm SC

- a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD) ? Chứng minh $IA = 2IM$
- b) Tìm giao điểm F của SD với (AMB) ? Chứng minh F là trung điểm SD ?
- c) Xác định hình dạng tiết diện tạo bởi (AMB) với hình chóp
- d) Gọi N là một điểm trên cạnh AB . Tìm giao điểm của MN với (SBD) ?

***5.7.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M ; N ; P lần lượt là trung điểm SB ; SD ; OC

- a) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) ?
- b) Dựng thiết diện của (MNP) với hình chóp ?
- c) Tính tỉ số mà (MNP) chia cạnh SA ; BC ; CD ? ĐS: c) $3 : 1 ; 1 : 1 ; 1 : 1$

5.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành; gọi M là trung điểm SB ; G là trọng tâm ΔSAD

- a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD) ?
- b) Chứng minh (CGM) chứa đường thẳng CD ?
- c) Chứng minh (CGM) đi qua trung điểm SA ?
- d) Dựng tiết diện của (CGM) với hình chóp ?

***5.9.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O ; I ; J là trọng tâm $\Delta SAB ; \Delta SAD$

- a) Tìm giao điểm của IJ với (SAC) ?
- b) Dựng thiết diện tạo bởi (JIO) với hình chóp

5.10. Cho hình chóp SABCD. Gọi I ; M ; N là ba điểm trên SA ; AB ; CD

- a) Tìm giao tuyến của (SAN) và (SDM) ?
- b) Hãy xác định thiết diện tạo bởi (IMN) với hình chóp

BÀI TẬP TỔNG HỢP

1: Cho tứ diện ABCD ; I là điểm nằm ngoài đoạn BD. Mặt phẳng (α) qua I cắt AB; BC; CD; DA tại M; N; P; Q.

- a) Chứng minh I ; M ; Q thẳng hàng và ba điểm I ; N ; P cũng thẳng hàng ?
- b) Chứng minh MN; AC; PQ đồng qui ?

2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành . M là trung điểm SD; E là điểm trên cạnh BC

- a) Tìm giao điểm N của SC với (AME) ?
- b) Tìm giao tuyến của (AME) với (SAC) ?

c) Tìm giao điểm của K của SA với (MBC) ? Chứng minh K là trung điểm SA

3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .F là trung điểm CD; E là điểm trên cạnh SC sao cho $SE = 2EC$.Tìm tiết diện tạo bởi (AEF) với hình

4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành .I là trung điểm SD; E là điểm trên cạnh SB sao cho $SE = 3EB$.

a) Tìm giao điểm F của CD với mặt phẳng (AIE) ?

b) Tìm giao tuyến d của (AIE) với (SBC) ?

c) Chứng minh BC ; AF ; d đồng qui ?

5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi .F là trung điểm SC; E là điểm trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.

a)Tìm tiết diện tạo bởi (AEF) với hình chóp ?

b) Tìm giao điểm của SB với (AEF) ?

6: Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O ; M là trung điểm SB; G là trọng tâm ΔSAD

a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD) và chứng minh I nằm trên đường thẳng CD và $IC = 2ID$?

b) Tìm giao điểm J của (OMG) với AD ? Tính tỉ số $\frac{JA}{JD}$

c)Tìm giao điểm K của (OMG) với SA ? Tính $\frac{KA}{KS}$ HD: b) 2 c) 2

7: Cho tứ diện ABCD; trên AD lấy N sao cho

$AN = 2ND$; M là trung điểm AC ; trên BC lấy Q sao cho $BQ = \frac{1}{4}BC$

a) Tìm giao điểm I của MN với (BCD) ? Tính $IC:ID$

b) Tìm giao điểm J của BD với (MNP) ? Tính $JB:JD$

8 Cho tứ diện ABCD. Gọi I ; J là hai điểm cố định nằm trên AB ; AC và IJ không song song với BC. Mặt phẳng α quay quanh IJ cắt cạnh CD ; BD tại M ; N

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định ?

b) Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM ?

c)Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN ?

9. Cho hình chóp SABC. Gọi A' ; B' ; C' là các điểm di động trên SA ; SB ; SC thỏa :

$$SA' = \frac{1}{n+1} SA ; SB' = \frac{1}{2n+1} SB ; SC' = \frac{1}{3n+1} SC$$

a) Chứng minh A'B' đi qua một điểm cố định I và A'C' đi qua điểm cố định J khi n thay đổi ?

b) Chứng minh (A'B'C') chứa một đường thẳng cố định

HD: a) dùng định lí menelaus b) đường IJ

BÀI 2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Vấn đề 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Phương pháp :

Có thể dùng một trong các cách sau :

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng , rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lý đảo của định lý Ta-lét ...)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ 3.
- Áp dụng định lý về giao tuyến .

Bài1. Cho tứ diện SABC có I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. CMR: với $\forall M \in SB$ ($M \neq B$) ta đều có $IJ \parallel (ACM)$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD gọi M và N lần lượt là trọng tâm ΔABD và ΔACD . CMR: $MN \parallel (BCD)$ và $MN \parallel (ABC)$

Bài 3. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Trên các cạnh AD, BE lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BE} = k$ ($0 < k < 1$).

1). Chứng minh rằng $MN \parallel (CDE)$

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh $IJ \parallel CD$

Bài 2: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang với các cạnh đáy AB và CD ($CD > AB$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB

a, Chứng minh $MN \parallel CD$

b, Tìm giao điểm P của SC và mp(AND). Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác SABI là hình gì?

Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD

a, Chứng minh MNPQ là hình bình hành

b, Chứng minh MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn

Bài 4: Cho tam giác ABC nằm trong mp(P). Gọi Bx; Cy là 2 nửa đường thẳng song song và nằm về cùng phía đối với mp(P). M và N là 2 điểm di động lần lượt trên x, Cy sao cho $CN = 2BM$

a, Chứng minh rằng MN luôn đi qua điểm cố định I khi M, N di động

b, E là điểm thuộc đoạn AM và $EM = \frac{1}{3}EA$. Gọi F là giao điểm của IE và AN, Q là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng $AQ \parallel Bx \parallel Cy$ và (QMN) chứa đường thẳng cố định khi M, N di động

Bài 5: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm trên BC, SC, SD và AD sao cho $MN \parallel SB$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$

a, Chứng minh $PQ \parallel SA$

b, Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$

c, Qua Q dựng $Qx \parallel SC$; $Qy \parallel SB$. Tìm giao điểm của Qx và mp(SAB); giao điểm của Qy và mp(SCD)

Bài 6: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong mặt phẳng. Trên hai đường thẳng chéo nhau AC và BF lần lượt lấy hai điểm M ; N sao cho $AM : AC = BN : BF = 1 : 3$. Chứng minh $MN \parallel DE$

Bài 7: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong mặt phẳng. Trên hai đường thẳng chéo nhau AC và BF lần lượt lấy hai điểm M ; N sao cho $AM : AC = BN : BF = 5$. Dựng $MM' \perp AB$ với M' trên AD; $NN' \perp AB$ với N' trên AF. Chứng minh : a) MM' và $NN' \parallel CD$ b) $M'N \parallel DF$

Vấn đề 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG – THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐIỂM VÀ SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Bài 1: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang với các cạnh đáy AB và CD. Gọi I; J là trung điểm của AD và BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG)
- Xác định thiết diện của hình chóp với mp(IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành

Bài 2: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác SAB và SAD và M là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(IJM)

Bài 3: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang với các cạnh đáy $AD = a$; $BC = b$. Gọi I; J là trọng tâm các tam giác SAD và SBC

- Tìm đoạn giao tuyến của mp(ADJ) với mp(SBC); của (BCI) và (SAD)
- Tìm độ dài đoạn giao tuyến của 2 mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi 2 mp (SAB) và (SCD)

Bài 4: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$.

- Xác định thiết diện của tứ diện với mp(IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân
- Tính diện tích của thiết diện theo a

Bài 5: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, $\widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

- Tìm giao điểm I của Dx và mp(SAB). Chứng minh $AI \parallel SB$
- Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(AIC) và tính diện tích của thiết diện đó

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành; I, J lần lượt là trung điểm của SA và AB. M là điểm bất kì trên nửa đường thẳng Ax chứa C. Biện luận theo vị trí của M trên Ax các dạng của thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(IJM)

Bài 7: Cho hình chóp SABCD đáy là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác đều; $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA; SB. M là điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N

- Chứng minh HKMN là hình thang cân
- Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Tính diện tích tứ giác HKMN theo a và x. Tìm x để diện tích này nhỏ nhất
- Tìm tập hợp giao điểm của HM và KN; HN và KM

Bài 8: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, lấy M trên cạnh BA; P trên cạnh CD sao cho $AM = DP = \frac{a}{3}$. Xác định thiết diện của tứ diện và mặt phẳng qua MP và song song với AC. Tính diện tích thiết diện đó

BÀI 3: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Vấn đề 1: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng P

Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với đường thẳng a chứa trong (P) .

Ghi chú : Nếu a không có sẵn trong hình thì ta chọn một mặt phẳng (Q) chứa d và lấy a là giao tuyến của (P) và (Q) .

Bài 1: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

a, Chứng minh $MN \parallel mp(SBC)$ và $MN \parallel mp(SAD)$

b, Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC song song với $mp(MNP)$

c, Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh $G_1G_2 \parallel mp(SAC)$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm tam giác ABD, M trên BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG \parallel mp(ACD)$

Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh:

a, Điều kiện cần và đủ để $OO' \parallel mp(BCD)$ là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}$

b, Điều kiện cần và đủ để $OO' \parallel mp(BCD)$ và $mp(ACD)$ là $BC = BD$ và $AC = AD$

Bài 4: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng

a, Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh $OO' \parallel (ADF)$; $OO' \parallel (BCE)$

b, Trên AE và BD lấy M và N sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$; $BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh $MN \parallel mp(CDEF)$

Bài 5: Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy trung điểm M; trên BC lấy điểm N bất kì. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD.

a) Tìm tiết diện của tứ diện ABCD với (α) ?

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho tiết diện là hình bình hành?

Bài 6: Cho hình chóp SABCD với đáy ABCD là hình thang có đáy lớn là AD. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh AB. (α) là mặt phẳng qua M và song song AD và SD.

a) Mặt phẳng (α) cắt SABCD theo tiết diện là hình gì?

b) Chứng minh $SA \parallel (\alpha)$

Bài 7: Cho hình chóp SABCD. có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (α) di động luôn luôn song song BC và đồng thời đi qua trung điểm C' của SC.

a) Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA; SB; SD lần lượt tại A'; B'; D' tiết diện A'B'C'D' là hình gì?

b) Chứng minh rằng (α) khi chuyển động luôn luôn chứa một đường thẳng cố định

c) Gọi M là giao điểm của A'C' và B'D'. Chứng minh khi (α) di động thì M di động trên đường thẳng cố định

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy là bình hành. Gọi M là điểm di động trên cạnh SC; mặt phẳng (α) chứa AM và \sphericalangle BD

- a) Chứng minh (α) luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh SC
- b) (α) cắt SB và SD tại E ; F . Trình bày cách dựng E và F ?
- c) Gọi I là giao điểm của ME và CB; J là giao điểm của MF và CD . Chứng minh ba điểm I ; J ; A thẳng hàng

Vấn đề 2: . TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG –

THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Bài 1: Cho hình chóp SABCD. Gọi M và N là hai điểm bất kì trên SB và CD. (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC

- a, Tìm giao tuyến của mp (α) với các mặt phẳng (SBC); (SCD); (SAC)
- b, xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α)

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có AB = a; CD = b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua M trên IJ và song song với AB và CD

- a, Tìm giao tuyến của mp(P) với mp(IJD)
- b, Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(P). Thiết diện là hình gì?

Bài 3: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC; M là điểm di động trên SA, (P) là mặt phẳng đi động luôn đi qua C' M và song song với BC

- a, Chứng minh (P) luôn chứa đường thẳng cố định
- b, Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(P). Xác định điểm M để thiết diện là hình bình hành
- c, Tìm tập hợp giao điểm của hai cạnh đối của thiết diện khi M di chuyển trên cạnh SA

Bài 4: Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang với đáy lớn BC = 2a; AD = a và AB = b. Mặt bên SAD là tam giác đều, (P) là mặt phẳng qua điểm M trên đoạn AB và song song với SA và BC, mp(P) cắt CD; SC; SB lần lượt tại I; J; K

- a, Chứng minh MIJK là hình thang cân
- b, Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(P) theo a và x = AM.

Bài 5: Cho hình chóp SABCD. Gọi M và N là hai điểm trên AB và CD và (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SA

- a, Tìm các giao tuyến của (P) với (SAB) và (SAC)
- b, Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(P)
- c, Tìm điều kiện của M; N để thiết diện là hình thang

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành tâm O; M là điểm di động trên SC và (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD

- a, Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định
- b, Tìm các giao điểm H và K của (P) với SB và SD. Chứng minh $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} - \frac{SC}{SM}$ là một hằng số
- c, Thiết diện của hình chóp với mp(P) có thể là hình thang được hay không

Bài 7: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a; M và P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM=CP=x$ ($0 < x < a$). Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện

- Chứng minh thiết diện thông thường là hình thang cân
- Tính x để diện tích thiết diện nhỏ nhất

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD gọi M, N là hai điểm bất kì trên SB và CD. (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC

- Tìm giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC), (SCD), và (SAC)
- Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α)

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là trung điểm của SB. Xác định thiết diện của hình chóp SABCD tạo bởi mặt phẳng (α) biết

- (α) qua M và song song SO và AD
- (α) qua O và song song AM và SC

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD; G là trọng tâm ΔABC ; M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG

- Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và $SH = 2MH = 4RG$
- G_1 là trọng tâm ΔSBC . Chứng minh rằng $GG_1 \parallel (SAB)$; $GG_1 \parallel (SAC)$
- mặt phẳng (α) qua GG_1 và song song BC. Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α)

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD. Một điểm M bất kì nằm trên AB, (α) là mặt phẳng qua M và song song AD và SB

- Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?
- Chứng minh SC song song (α) .

Bài 12. Cho tứ diện ABCD đều cạnh a. I là trung điểm của AC, $J \in AD$ sao cho $AJ = 2JD$. M là một điểm di động trong ΔBCD sao cho mặt phẳng (MIJ) luôn song song AB

- Tìm tập hợp điểm M
- Tính diện tích thiết diện của tứ diện tạo bởi mặt phẳng (MIJ)

BÀI 4: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Vấn Đề 1: MẶT PHẪNG SONG SONG

Phương pháp Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp :

** Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia .*

Bài 1: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD

- Chứng minh: $mp(OMN) \parallel mp(SBC)$
- I là trung điểm của SC và J là điểm nằm trên $mp(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ \parallel mp(SAB)$

c, Giả sử các tam giác SAB và ABC cân tại A. Gọi AE và AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF \parallel mp(SAD)$

Bài 2: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AC và BF lấy M và N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD; AF tại M', N'

a, Chứng minh: $(CBE) \parallel (ADF)$

b, Chứng minh: $mp(DEF) \parallel mp(MNN'M')$

c, Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp I khi M, N di động

Bài 3: Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ đồng phẳng

Bài 4: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của SA, SD

a, Chứng minh $mp(OMN) \parallel mp(SBC)$

b, Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và ON. Chứng minh $PQ \parallel mp(SBC)$

Bài 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J là hai điểm di động lần lượt trên AD và BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$. Chứng minh IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành với $AB = a; AD = 2a$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại A. Trên AD lấy M, đặt $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Mặt phẳng (α) qua M và song song với $mp(SAB)$ cắt BC; SC; SD tại N, P, Q

a, Chứng minh MNPQ là hình thang vuông

b, Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp I khi M chạy trên AD

c, Tính diện tích MNPQ theo a và x

Bài 7: Cho 2 đường thẳng a và b chéo nhau. Tìm tập hợp các điểm I trên đoạn MN và chia MN theo tỉ số k cho trước trong 2 trường hợp:

a, M, N di động lần lượt trên a, b

b, M, N di động trên a, b và MN luôn song song với 1 mặt phẳng hoặc nằm trên mặt phẳng cho trước cắt a và b

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Chứng minh $(HIK) \parallel (ABCD)$.

b) Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI. Chứng minh $(SMN) \parallel (HIK)$.

Bài 9: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh $(BA'D) \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh AC' qua trọng tâm G và G' của tam giác A'BD và CB'D'

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD.

a) Cm: $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Giả sử tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của tam giác ACD và SAB. Cm: $EF \parallel (SAD)$.

Bài 11: Cho hai hình vuông ABCD, ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng $EF \parallel AB$ vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, BF tại M', N' .

a) CM: $(CBE) \parallel (ADM')$.

b) CM: $(DE) \parallel (MNN'M')$.

VẤN ĐỀ 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG – THIẾT DIỆN CẮT BỞI MẶT PHẪNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG CHO TRƯỚC

Bài 1: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$; $BD = b$; tam giác SBD đều. Mặt phẳng (α) đi động song song với mp(SBD) qua I trên đoạn AC

a, Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α)

b, Tính diện tích của thiết diện theo a, b và $x = AI$

Bài 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn $(P) \parallel (Q)$, $\triangle ABC \subset \text{mp}(P)$; $MN \subset (Q)$

a, Tìm giao tuyến của mp(MAB) và mp(Q); giao tuyến của mp(NAC) và mp(Q)

b, Tìm giao tuyến của mp(MAB) và mp(NAC)

Bài 3: Từ 4 đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ 4 nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax; By; Cz; Dt không nằm trong mp(ABCD). Một mp (α) cắt 4 nửa đường thẳng tại A'; B'; C'; D'

a, Chứng minh $(Ax; By) \parallel (Cz; Dt)$

b, Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành

c, Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$

Bài 4: Cho tứ diện ABCD, gọi G_1 ; G_2 ; G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD

a, Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel \text{mp}(BCD)$

b, Tìm thiết diện của tứ diện cắt bởi mp $(G_1G_2G_3)$. Tính diện tích thiết diện theo diện tích của tam giác BCD

c, M đi động trong tứ diện sao cho $G_1M \parallel (ACD)$. Tìm tập hợp điểm M

Bài 5: Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang, đáy lớn $AB = 3a$; $AD = CD = a$, tam giác SAB cân tại S và $SA = 2a$. Mặt phẳng (α) đi động song song với mp(SAB) cắt AD; BC; SC; SD tại M; N; P; Q

a, Chứng minh MNPQ là hình thang cân

b, Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$). Tìm x để MNPQ ngoại tiếp một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó

c, Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp I khi M đi động trên AD

Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh IJ có phương không đổi và J đi động trên 1 mp cố định

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành tâm O, E là trung điểm của SB. Biết tam giác ACE đều và $AC = OD = a$. Mp (α) đi động song song với mp(ACE) và qua I trên OD, mp (α) cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R

a, Nhận xét gì về tam giác PQR và tứ giác MNPR

b, Tìm tập hợp giao điểm của MP và NR khi I đi động trên đoạn OD

c, Tính diện tích MNPQR theo a và $x = DI$. Xác định x để diện tích đó lớn nhất

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt SA; SB; SC; SD lần lượt tại A'; B'; C'; D'. Chứng minh điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình bình hành là $mp(P) \parallel (ABCD)$

Bài 8: Cho hình chóp SABCD, mp(P) di động song song với mp(ABC) cắt SA; SB; SC lần lượt tại A'; B'; C'. Tìm tập hợp điểm chung của 3 mặt phẳng (A'BC), (B'AC), (C'AB)

Bài 9: Cho tứ diện ABCD. Gọi E; F; J theo thứ tự là trung điểm của BC; BD; AD. Mp(α) qua EF và song song với BJ, mp(β) qua BJ và song song với CD

a, Thiết diện do mp(α) cắt tứ diện là hình gì?

b, Xác định thiết diện do mp(β) cắt tứ diện. Chứng minh $(\alpha) \parallel (\beta)$

c, AC và AD cắt mp(α) lần lượt tại H, K. Gọi I là giao điểm của AC và mp(β). Chứng minh HE; KF và AB đồng quy tại M

d, Giả sử các tam giác ABC và ABD vuông tại B. Tính chu vi tam giác MHK biết chu vi tam giác ACD bằng a

Bài 10: Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy AB; CD với $CD = pAB$ ($0 < p < 1$). Gọi S_0 là diện tích tam giác SAB và (α) là mặt phẳng qua M trên cạnh AD và song song với mp(SAB). Đặt $\frac{DM}{AD} = x$ ($0 < x < 1$).

a, Xác định thiết diện của hình chóp SABCD với mp(α). Tính diện tích thiết diện theo S_0, p, x

b, Tính x để diện tích thiết diện bằng $\frac{1}{2} S_0$

Bài 11: Cho hình chóp SABCD, I là trung điểm của SB và J nằm trên đoạn SC sao cho $JC = \frac{1}{2} JS$ và O là trọng tâm tam giác ABC

a, Xác định thiết diện của hình chóp với mp(OIJ), gọi s là diện tích của thiết diện này

b, (α) là mặt phẳng qua M trên nửa đường thẳng BC và mp(α) song song hoặc trùng với mp(OIJ). Đặt $\frac{BM}{BC} = x$ ($x > 0$). Tìm x để mp(α) cắt hình chóp

c, Biện luận theo x các dạng của thiết diện của hình chóp với mp(α)

d, Gọi H(x) là diện tích của thiết diện nói ở câu c. Tính H(x) theo s và x

Bài 12: Cho hình chóp SABCD có E là giao điểm của AD và BC. Mp(P) song song với SE cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại J, K, H, I

a, Tứ giác IJKH là hình gì?

b, Tìm điều kiện cần và đủ để tứ giác IJKH là hình bình hành

Bài 13: Cho tứ diện ABCD có $AD = a$; $BC = b$; $AB = c$. Lấy M trên AB, mặt phẳng qua M song song với AD và BC cắt các cạnh AC, CD, BD tại N, P, Q

a, Tứ giác MNPQ là hình gì?

b, Đặt $AM = x$. Tính các cạnh của tứ giác MNPQ

c, Muốn tứ giác MNPQ là hình chữ nhật phải có thêm điều kiện gì? Tìm diện tích tứ giác trong trường hợp này. Tìm vị trí của M trên AB để tứ giác có diện tích lớn nhất

Bài 14: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, Mp(P) qua A song song với BC, cắt BD và CD tại M, N, đặt $BM = x$. Tính $AM^2 + MN^2 + AN^2$

BÀI 5: PHÉP CHIẾU SONG SONG – HÌNH LĂNG TRỤ – HÌNH HỘP

Bài 1: Cho lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Mp qua đường chéo $A'C$ và song song với đường chéo BC' chia AB theo tỉ số nào?

Bài 2: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Lấy $M \in A'B'$, $N \in AB$, $P \in CC'$ thoả mãn:

$$\frac{AM'}{MB'} = \frac{BN}{NA} = \frac{C'P}{PC} = \frac{1}{2}.$$

Mp(MPN) cắt $B'C'$ tại Q. Tìm $\frac{C'Q}{B'C'}$

Bài 3: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$

a, Chứng minh $C'B \parallel mp(AHC')$

b, Tìm giao điểm của AC' và $mp(BCH)$

c, Mp(P) qua trung điểm của CC' và song song với AH và CB' . Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ

Bài 4: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$

a, Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(BA'C')$

b, Gọi M và N là 2 điểm bất kì trên AA' và BC . Tìm giao điểm của $B'C'$ với $mp(AA'N)$, của MN với $(AB'C')$

Bài 5: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC') , (BCA') và (CAB') có 1 điểm chung O trên GG' . Tính tỉ số $OG : OG'$

Bài 6: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$

a, Chứng minh $mp(BDA') \parallel mp(B'D'C)$

b, Chứng minh đường chéo AC' qua trọng tâm G_1 ; G_2 của các tam giác BDA' và $B'D'C$. Chứng minh G_1 ; G_2 chia AC' làm 3 phần bằng nhau

Bài 7: Chứng minh rằng trong hình hộp, tổng các bình phương của 4 đường chéo bằng tổng bình phương tất cả các cạnh

Bài 8: Cho lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$

a, Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC ; $A'B'C'$ và ACC' . Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'KG) \parallel (AIB')$

b, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Hãy dựng đường thẳng qua trọng tâm tam giác ABC cắt AB' và MN

Bài 9: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Gọi M, N là trung điểm của BC và CC' , P đối xứng với C qua A

a, Xác định thiết diện của lăng trụ với $mp(A'MN)$

b, Xác định thiết diện của lăng trụ với $mp(MNP)$

Bài 10: Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB , $B'C'$; DD'

a, Chứng minh $mp(MNP) \parallel mp(A'B'D)$ và (BDC')

b, Xác định thiết diện của hình lập phương với $mp(MNP)$? Thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó

Bài 11: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh a, $ABB'A'$, $ACC'A'$ là các hình vuông. Gọi I, J là tâm của $ABB'A'$, $ACC'A'$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

a, Chứng minh $IJ \parallel mp(ABC)$

b, Xác định thiết diện của lăng trụ với $mp(IJO)$. Chứng minh thiết diện là hình thang cân

ÔN TẬP TỔNG HỢP

Bài1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABDC$ là hình thoi cạnh a ; $SA = SB = a$; $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB ; M là một điểm trên cạnh BC .

1) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MEF) . Thiết diện là hình gì?

2) Đặt $BM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Tính FM và diện tích thiết diện trên theo a và x

$$KQ: S = \frac{3a}{16} \sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}$$

Bài2: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó AB vuông góc với CD và $AB = AC = CD = a$; M là một điểm trên cạnh AC với $AM = x$ ($0 < x < a$); (α) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD .

1) Xác định thiết diện của tứ diện tạo bởi mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?

2) Tính diện tích thiết diện theo a và x . Xác định x để diện tích thiết diện này lớn nhất.

$$S = x(a - x) \quad 0 < x < a \quad x = \frac{a}{2}$$

Bài3: Trong mặt phẳng (α) cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , gọi O là trung điểm của cạnh AC ; lấy điểm S ở ngoài (α) sao cho $SA = a$ và $SA \perp BO$; (α) là mặt phẳng chứa BO và song song với SA .

1) (α) cắt tứ diện $SABC$ theo thiết diện là hình gì?

2) Tính diện tích thiết diện trên theo a .

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$$

Bài4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành với $AB = 2a, AD = a$. SAB là tam giác vuông cân tại A . Gọi M là một điểm trên cạnh AD với $AM = x$ ($0 < x < a$). (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB) .

1) (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

2) Tính diện tích thiết diện trên theo a và x .

$$S = 2(a^2 - x^2)$$

Bài5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, CB . M là một điểm trên đoạn BD , mặt phẳng (IJM) cắt AD tại N .

1) Chứng minh $IJMN$ là hình thang. Xác định vị trí của M để $IJMN$ là hình bình hành.

2) Gọi K là giao điểm của IM và JN . Tìm tập hợp các điểm K khi M di động trên đoạn BD .

Bài6: Từ bốn điểm của hình bình hành $ABCD$ vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz , đứng thẳng sao cho chúng cắt mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng đó lần lượt tại A', B', C', D' .

- 1) Chứng minh: $(Ax; By) // (Cz; Dt)$
- 2) Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- 3) Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D'$. Chứng minh đường thẳng $OO' // AA'$ và $AA' + CC' = BB' + DD'$

Bài7: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp CD$, $\triangle ABC$ vuông tại C có $\widehat{BDC} = 30^\circ$. M là điểm di động trên cạnh BD , (α) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD .

- 1) (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình gì?
- 2) Giả sử $AB = BD = a, BM = x$. Tính diện tích S của thiết diện theo a và x .
- 3) Vẫn lấy giả thiết trong câu 2). Xác định x để thiết diện có 2 đường chéo vuông góc.

$$\text{KQ: 2) } S = \frac{\sqrt{3}}{2} x(a-x) \quad 3) x = 2(2 - \sqrt{3}a)$$

Bài8: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm $\in AB$, (α) là mặt phẳng qua M song song với (SAD) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q .

- 1) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.
- 2) Gọi I là giao điểm của MQ và NP . Tìm tập hợp các điểm I khi M chạy từ A đến B .
- 3) Đặt $AM = x$. Tính diện tích thiết diện $MNPQ$ theo a và x

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 - x^2)$$

Bài9: Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh a . Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của AB, AI, SB . (α) là mặt phẳng qua KL và song song với CI . Tính diện tích thiết diện của (α)

với tứ diện.

$$S = \frac{a^2 \sqrt{5}}{8}$$

Bài10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O .

- 1) Từ một điểm M di động trên đoạn SA dựng đường thẳng song song với AD cắt SD tại N , NB cắt SO tại P . Chứng minh MP đi qua một điểm cố định

- 2) Trên cạnh CD lấy điểm Q sao cho: $\frac{CQ}{CD} = \frac{SM}{SA}$. Chứng minh MQ luôn song song

với một mặt phẳng cố định.

- 3) Tìm vị trí của M trên SA để $\triangle MNQ$ có diện tích lớn nhất?

Bài11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; E, F, G lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' . Chứng minh rằng:

- 1) $(EFG) // (ABCD)$
- 2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và $(C'D'D)$.
- 3) Tìm giao điểm của $A'C$ và $(C'DB)$
- 4) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng AO' và $C'O$ chia $A'C$ thành ba đoạn bằng nhau

Bài12: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$; I là trung điểm của AC .

- 1) CM: $G_1G_2 // (ABC); G_1G_2 // (ACD)$
- 2) mặt phẳng (α) đi qua G_1, G_2 và song song với BC . Tìm thiết diện của (α) và tứ diện $ABCD$. Thiết diện là hình gì? Tại sao?

3) G là trọng tâm của tứ diện ABCD. K là trung điểm của G_1G_2 . Chứng minh rằng G, I, K thẳng hàng.

Bài13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang mà đáy lớn là cạnh AD. Một điểm M bất kỳ trên cạnh AB và một mặt phẳng (α) qua M và $\parallel AD$ và SB

1) mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì?

2) CM: $SC \parallel (\alpha)$.

Bài14: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có Q là trung điểm cạnh DD', I là một điểm trên đoạn BD sao cho $DI = 3IB$. Tìm thiết diện của hình hộp ABCD.A'B'C'D' tạo bởi mặt phẳng (α) qua IQ và $\parallel AC$.

Bài15: Cho tứ giác ABCD nằm trong mp (P). Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E; AD và BC cắt nhau tại F. Một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) đi động cắt SA, SB, SC tại I, J, K.

1) Tìm giao điểm K của (Q) và SD

2) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $IJ \parallel KL$ là $SE \parallel (Q)$

3) Tìm điều kiện giữa SF và (Q) để $IL \parallel JK$. Chứng minh rằng nếu IJKL luôn là hình bình hành thì (Q) luôn song song với một mặt phẳng cố định

Bài16: Cho hình vuông ABCD có cạnh a và tam giác vuông cân ADF ($AD = AF$) nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Biết $BF = a\sqrt{2}$, trên các đoạn AC, FD lần lượt lấy hai điểm M, N đi động sao cho: $AM = FN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

1) Chứng minh rằng $MM \parallel (ABF)$.

2) Chứng minh: $AN = MN = BM$.

c) Tính độ dài MN theo a và x. Xác định x để MN có độ dài nhỏ nhất