2.24. Сферой радиуса r описывается пирамида $SABC$. Прямые AS, BS и CS касаются сферы соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Найдите объем пирамиды $SABC$, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

Рис. 27

Решение. Пусть $S_1 = S_{A_1B_1C_1}$, $S_2 = S_{ABC}$, $S_3 = S_{SAB} = S_{SAC} = S_{SBC}$. Тогда $S_2 = S_1 + 3S_3$. Пусть $x = SA_1$, $y = SB_1$, $z = SC_1$. Тогда $S_1 = \frac{1}{2}(xy + yz + zx)$, $S_3 = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$. Поэтому

$$S_2 = S_1 + 3S_3 = \frac{1}{2}(xy + yz + zx + 3ax + 3by + 3cz).$$

Объем пирамиды $SABC$ равен

$$V = \frac{1}{3}S_2 r = \frac{r}{6}(xy + yz + zx + 3ax + 3by + 3cz).$$

Теперь заметим, что

$$= r(xy + yz + zx) + \frac{r}{6}(3ax + 3by + 3cz) = r(xy + yz + zx + ax + by + cz) =$$

$$= \frac{r}{6}abc = \frac{1}{3}r.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}r = 0{,}333r.$$