Интегрируя, мы получаем

$$p(x, R) = \frac{1}{\pi R^2}\left[\pi R^2 + (R^2 - x^2)(\pi - 2\alpha) - \frac{1}{2}(2R^2 + x^2)\sin 2\alpha\right],$$

где $x = 2R\cos\alpha$.

Тот же результат мог быть получен прямым вычислением. Такие вычисления были проделаны Борелем (Borel, 1925), который рассмотрел аналогичную задачу, когда P и Q суть случайные точки внутри треугольника, квадрата и прямоугольника вообще. Очевидно, что распределения расстояния PQ и его моменты могут рассматриваться лишь как некоторые из величин, которые можно использовать для характеристики выпуклых областей на плоскости (и, по аналогии, выпуклых областей в многомерных пространствах).

Задача Сильвестра

2.31 Несколько более сложная задача носит название задачи Сильвестра. Она состоит в нахождении вероятности того, что четыре точки A, B, C и D, взятые случайно внутри выпуклой области, составляют выпуклый четырехугольник, это означает, что ни одна из точек не попадает в треугольник, образованный тремя другими.

Рассмотрим вероятность, дополнительную к этому событию, т. е. вероятность того, что четыре точки не образуют выпуклого четырехугольника. Это может случиться четырьмя различными способами, согласно тому, какая из четы-