Ответы к экзамену по курсу "Методы Численного анализа"
(1-ый семестр 2016/2017 учебного года, специальность "Информатика")

Содержание

Краткий план:

1. пока пусто

1 Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности

Интерполяционный многочлен Лагранжа.
Будем предполагать, что $f(x_i)$ известна в т. $x_i, i = \overline{0, n} \Rightarrow$ будем рассматривать интерполяционный многочлен n-ой степени.

Надо построить $P_n(x)$, чтобы $P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$.

Получаем СЛАУ, которую решать в лоб не будем. Коэффициенты a_i будем искать в виде ЛК $f(x_i)$, т.е. будем искать многочлен $P_n(x)$ в виде:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i),$$

где $l_i(x)$ - многочлены n-ой степени.

Должно выполняться: $P_n(x_k) = f(x_k), k = \overline{0, n},$, подставляем в предыдущее равенство:

$$P_n(x_k) = f(x_k) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x_k) f(x_i), k = \overline{0, n}.$$

Неравенство выше выполняется, если $l_i(x_k) = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k. \end{cases}$

По теореме Виетта:

$$l_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \cdot C_i.$$

C_i найдем из условия $l_i(x_i) = 1$.

$$(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) \cdot C_i = 1.$$

$$C_i = \Big[(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)\Big]^{-1}.$$

Обозначим через $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Легко видеть, что $w^{'}(x_i) = \left.\dfrac{dw(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$.

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i) w'(x_i)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{w(x)}{(x - x_i) w'(x_i)} f(x_i) \text{ - интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.}$$

Какова же разность

$$f(x) - P_n(x), x \in [a, b], x \neq x_i?$$

Оценка погрешности.
Будем рассматривать функцию

$$\phi(z) = f(z) - P_n(z) - K w(z).$$

Постоянную K выберем так, чтобы $\phi(x) = 0$.

Возможность такого выбора обусловлена следующим:

$$K = \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)}, .$$

где деление возможно, т.к. $w(x) \neq 0, x \neq x_i$.

$\phi(z)$ на отрезке $[a, b]$ обращается в ноль $n+2$ раза при всех $x_i, i = \overline{0, n}$ и кроме того в точке x.

Предположим, что $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно-дифференцируема на $[a, b]$. Тогда из теоремы Ролля:

Теорема (*Ролля*).

Если вещественная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемая на интервале (a, b), принимает на концах отрезка $[a, b]$ одинаковые значения, то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

$\Rightarrow$

1. $\phi^{'}(z)$ обращается в ноль $n+1$ раз,
2. $\phi^{''}(z)$ обращается в ноль n раз,
3. $\ldots$,
4. $\phi^{(n+1)}(z)$ обращается в ноль по крайней мере 1 раз, т.е. $\exists\, \xi \in [a, b] \mid \phi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

$$\phi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)! \Rightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

$$0 = f(x) - P_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot w(x) \Rightarrow f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot w(x).$$

Краткий план:

1. пока пусто

2 Оценка погрешности на равномерной сетке узлов

Лемма.

На равномерной сетке узлов

$$w_n = \{x_i = a + ih : i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n}\}$$

$\forall\, x \in [a, b]$ выполняется оценка

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \frac{1}{4} h^{n+1} n!$$

Доказательство. Зафиксируем x и выберем индекс j такой, что $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$. Тогда справедливо неравенство:

$$|x - x_j|\, |x - x_{j+1}| \leqslant \frac{h^2}{4} \text{ (док-ть самостоятельно).}$$

Используя неравенство выше, находим оценку:

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \frac{h^2}{4} \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \prod_{i=j+2}^{n} (x_i - x).$$

Т.к. сетка равномерная, то $x_i = a + ih, x_{j+1} = a + (j+1)h \Rightarrow$

$$x_{j+1} - x_i = (j - i + 1)h,$$

$$x_i - x_j = (i - j)h.$$

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \frac{h^2}{4} \prod_{i=0}^{j-1} (x_{j+1} - x_i) \prod_{i=j+2}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \frac{h^2}{4} h^j h^{n-j-1} \prod_{i=0}^{j-1} (j - i + 1) \prod_{i=j+2}^{n} (i - j) \leqslant \frac{1}{4} h^{n+1} (j+1)!(n-j)!$$

$$(j+1)!(n-j)! \leqslant n!, 0 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ (док-ть самостоятельно).}$$

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \frac{1}{4} h^{n+1} n!$$

□

Теорема.

Пусть функция $f \in \mathbb{C}^{n+1}([a, b])$ и $\left|f^{(n+1)}\right| \leqslant M$. Если $P_n(x)$ - интерполяционный полином степени не выше n на равномерной сетке узлов, то погрешность

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{4(n+1)} M h^{n+1}.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ из оценки погрешности интерполяционного полинома Лагранжа

$$f - P_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) w(x), \text{ где } w(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$$

и доказанной леммы. □

Из доказанной теоремы следует, что если сетка равномерна, то мы легко можем оценить погрешность интерполяционного полинома.

Краткий план:

1. пока пусто

3 Разделённые разности и их свойства

Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функциями $f(x_i) = f_i$. Разделенная разность первого порядка записывается как

$$f(x_i, x_j) = \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i}.$$

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Разделенная разность k-ого порядка:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_2, \dots, x_{k+1}) - f(x_1, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_1}.$$

Лемма.
Разделенную разность можно представить в виде суммы

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j}{w'_n(x_j)},$$

где $w(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Доказательство. ММИ.

1. $n = 1$. $f_1 = f_1$.
2. $n = 2$. $f(x_1, x_2) = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f_1}{x_1 - x_2} + \dfrac{f_2}{x_2 - x_1}$.
3. $n = k$. $k - 1$ порядка:
$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f_j}{w'_k(x_j)}$$
$$f(x_2, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j=2}^{k+1} \frac{f_j}{w'_k(x_j)}$$
4. докажем для $n = k + 1$. k-ый порядок:
$$f(x_1, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_2, \dots, x_{k+1}) - f(x_1, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{x_1 - x_{k+1}} \sum_{j=1}^{k} \frac{f_j}{w'(x_j)} + \frac{1}{x_{k+1} - x_1} \sum_{j=2}^{k+1} \frac{f_j}{w'(x_j)} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{}{w'_k}$$
Найдем коэффициент при f_j:
$$\frac{1}{x_{k+1} - x_1} \left(\frac{1}{\prod\limits_{i=2, i\neq j}^{k+1} (x_j - x_i)} - \frac{1}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{k} (x_j - x_i)} \right) = \frac{1}{x_{k+1} - x_1} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{k+1} (x_j - x_i)} ((x_j - x_i) - (x_j - x_{k+1})) =$$
$$= \frac{1}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{k+1} (x_j - x_i)} = \frac{1}{w'_{k+1}(x_j)}$$

$\square$

Следствия:

1. Разделенная разность - линейный оператор функции f:

$$(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 f_1(x_1, \ldots, x_n) + \alpha_2 f_2(x_1, \ldots, x_n).$$

2. Разделенная разность симметрична относительно своих аргументов, т.е. не меняется от перестановки $\forall\ x_i, x_j$.

3. Разделенные разности удобно записывать в виде таблицы:

x_1	f_1		
		$f(x_1, x_2)$	
x_2	f_2		$f(x_1, x_2, x_3)$
		$f(x_2, x_3)$	
x_3	f_3		$f(x_2, x_3, x_4)$
		$f(x_3, x_4)$	
x_4	f_4		

Краткий план:

1. пока пусто

4 Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона представляет собой другую форму записи интерполяционного многочлена.

Она полезна, т.к. позволяет легко увеличивать или уменьшать число использованных узлов без повторных числений.

Пусть есть набор точек $(x_i, f_i), i = \overline{0, n}$. Построим интерполяционный многочлен для этой сеточной функции:

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0)P_{n-1}(x) \Rightarrow P_{n-1}(x) = \frac{P_n(x) - f_0}{x - x_0},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ в качестве x. Для задания $P_{n-1}(x)$ нужно n коэффициентов $= n$ уравнений.

$$P_{n-1}(x_i) = \frac{P_n(x_i) - f_0}{x_i - x_0} = \frac{f_i - f_0}{x_i - x_0}, i = \overline{1, n}.$$

Значит, искомый полином проходит через точки $\left(x_i, \dfrac{f_i - f_0}{x_i - x_0}\right)$, где $\dfrac{f_i - f_0}{x_i - x_0}$ - разделенная разность первого порядка.

Обозначим $\dfrac{f_i - f_0}{x_i - x_0} = f(x_0, x_i)$.

Значит, $P_{n-1}(x)$ можно представить в виде:

$$P_{n-1}(x) = f(x_0, x_1) + (x - x_1)P_{n-2}(x).$$

Для нахождения $P_{n-2}(x)$ проделаем те же действия, что и для $P_{n-1}(x)$:

$$P_{n-2}(x) = \frac{P_{n-1}(x) - f(x_0, x_1)}{x - x_1}$$

$$\frac{f(x_1, x_i) - f(x_0, x_1)}{x_i - x_1} = f(x_0, x_1, x_i), i = \overline{2, n}.$$

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

Погрешность интерационного многочлена через разделенные разности:

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \underbrace{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}_{w(x)} \underbrace{\left[\frac{f(x)}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x - x_j)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{(x_i - x)\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}\right]}_{f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)} =$$

$$= [\text{для } f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ см Лемму о представлении РР в виде суммы в пред вопросе}] =$$

$$= w(x)f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)w(x).$$

Отсюда получаем, что $f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Замечания:

1. При построении формулы Ньютона порядок расположения узолв $x_0, \ldots, x_n$ значения не имеет. В качестве точки x_0 мы можем взять и точу x_n. Пусть $x_0 := x_n$. Тогда:

   $$P_n(x) = f_n + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1) f(x_n \tag{2}$$

   Если узлы упорядочены по возрастанию $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то формула записи (1) носит название формула записи Ньютона для начала таблицы, а (2) - форма записи Ньютона для конца таблицы.

2. Хотя теоретически нет необходимости упорядочивать множество узлов $\{x_i\}$ по возрастанию и убыванию, гладкость в таблице разделенных разностей нарушается, если такого порядка нет. Поэтому, программируя, используется упорядоченное множество сетки.

Краткий план:

1. пока пусто

5 Конечные разности и их свойства

Основным оператором в исчислении конечных разностей является оператор Δ, который определяется как:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Из определения следует, что оператор Δ - линейный, т.е.

$$\Delta\left[af(x) + bg(x)\right] = a\Delta f(x) + b\Delta g(x).$$

Исследуем $\Delta\left[f(x)g(x)\right]$.

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = [def.] = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) =$$

$$= f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x) = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = [def.] = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\Big[f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)\Big] = \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \Big[\Delta f(x)g(x) - \Delta g(x)f(x)\Big]$$

В формуле выше f и g можно поменять местами.

$$\Delta\left(\Delta f\right) = \Delta^2 f.$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta\left(\Delta^{n-1} f(x)\right) = \Delta^{n-1}\left(\Delta f(x)\right).$$

Теорема (*основная теорема исчисления конечных разностей*).

Для многочлена степени n:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n,$$

где $\alpha_n \neq 0$, конечная разность n-ого порядка равна:

$$\Delta^n f = \alpha_n n! h^n, \Delta^{n+1} f = 0.$$

Лемма.

Если $f(x)$ - многочлена степени n, то Δf есть многочлен степени $n-1$.

Доказательство. Рассмотрим в качестве $f = x^n$, тогда

$$\Delta f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^{n-k} x^k - x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{n-2} + \ldots + h^n,$$

т.е. $\Delta f(x)$ - полином степени $n-1$.

Т.о., Δx^n является полиномом степени $n-1$.

Используя свойство линейности, определяем, что оператор Δ уменьшает степень каждого члена полинома на 1.

Кроме того, член $nx^{n-1}h\alpha_n$, которые получаем в результате применения Δ к последнему слагаемому, отличен от нуля, т.к. $\alpha_n \neq 0$. □

Доказательство. теоремы перед леммой. Применим к многочлену n-ой степени лемму n раз и убедимся, что n-ая разность постоянна, а коэффициент при α_n - $(n!h^n)$, а все следующие разности превращаются в ноль. □

Краткий план:

1. пока пусто

6 Интерполяционный многочлен Ньютона на равномерной сетке узлов

Если функция задана на равномерной сетке узлов, это означает, что:

$$\begin{cases} \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h \forall\ i, \\ \Delta f_i = f_{i+1} - f_i. \end{cases}$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i.$$

$$f(x_i) = f_i.$$

Эти конечные разности соответствуют разделенным разностям:

$$\underbrace{f(x_1, x_2)}_{\text{разделенная разность}} = [x_2, x_1] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{f_2 - f_1}{h} = \underbrace{\frac{1}{h}\Delta f_1}_{\text{конечная разность}}.$$

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_3, x_2, x_1] = \frac{1}{x_3 - x_1}\Big(f(x_3, x_2) - f(x_1, x_2)\Big) = \frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta f_2}{h} - \frac{\Delta f_1}{h}\right) = \frac{\Delta^2 f_1}{2! h^2}.$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^{n-1} f}{(n-1)! h^{n-1}}.$$

Конечные разности можно использовать для аппроксимации конечных производных.

1. $\Delta f_1 \sim h f' \left(x_1 + \dfrac{h}{2}\right)$,
2. $\Delta^2 f_1 \sim h^2 f^{(2)}(x_1 + h)$,
3. $\ldots$,
4. $\Delta^n f_1 \sim h^n f^{(n)}(x_1 + \dfrac{nh}{2})$.

Формула Ньютона для начала таблицы для равномерной сетки узлов имеет вид:

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{\Delta f_0}{h} + \ldots + (x - x_0)(x - x_0 - h)\ldots(x - x_0 - (n-1)h)\frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}.$$

$$t = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x - x_0 = th, x - x_1 = x - x_0 - h = h(t-1).$$

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0.$$

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Запишем представления разделённых разностей в конце таблицы: $\begin{cases} f(x_n, x_{n-1}) = \dfrac{\Delta f_{n-1}}{1! n}, \\ f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = \dfrac{\Delta^2 f_{n-2}}{2! h^2}, \\ f(x_n, \ldots, x_0) = \dfrac{\Delta^n f_0}{n! h^n}. \end{cases}$

$$t = \frac{x - x_n}{h},$$

$$P_n(x_n + th) = f_n + \frac{t}{1!}\Delta f_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n f_0,$$

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Краткий план:

1. пока пусто

7 Многочлен Чебышева

В классе ортогональных функций ортогональные многочлены имеют ряд свойств.

Пусть $f(x), g(x)$ - полиномы.

$(f, g) = 0$ и $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$ - полиномы ортогональны.

Свойства:

1. Ортогональные многочлены удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению.
2. Их легко вычислить и превращать в степенной ряд.
3. Их нули разделяют друг друга (чередование нулей).

Многочлены Чебышева обладают как свойствами рядов Фурье, так и ортогональных полиномов. В сущности они являются функциями Фурье.

$$T_n(x) = \cos\Big(n\Theta(x)\Big), \Theta(x) = \arccos(x).$$

Покажем, что $T_n(x)$ является многочленом

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, x \in [-1, 1]. \tag{1}$$

$$\cos\Big((n+1)\Theta\Big) + \cos\Big((n-1)\Theta\Big) = 2\cos(\Theta)\cos\Big(n\Theta\Big).$$

$$\Theta = \arccos x.$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n - T_{n-1}(x), x \in [-1, 1]. \tag{2}$$

Равенство выше называется трехчленной рекуррентной формулой.

Корни полинома Чебышева:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}{n}\right), k = \overline{0, n-1}. \tag{3}$$

Покажем, что полиномы Чебышева $T_l(x), l = \overline{0, n-1}$ на множестве $\{x_k\}$ из (3) являются ортогональными.

$$(T_l, T_m) = \sum_{k=0}^{n-1} T_l(x_k)T_m(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi l}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi m}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi(l-m)}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi(l+m)}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \delta_{lm}M_l,$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

$$M_l = (1 + \delta_{lm})\frac{\pi}{2}.$$

$$(T_l, T_m) = 0 \ \forall \ l \neq m.$$

Если функция $f(x)$ задана на множестве узлов $\{x_k\}$ по формуле (3), то можно построить интерполяционный полином.

$$P_{n-1}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} C_l T_l, \tag{4}$$

где $C_l = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f_k T_l(x_k)}{M_l}$.

Доказательство.

$$(P_{n-1}(x), T_m) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(x_k) T_m(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k T_m(x_k)$$

$$(P_{n-1}(x), T_m) = (\sum_{l=0}^{n-1} C_l T_l(x_l), T_m) = \sum_{l=0}^{n-1} C_l (T_l, T_m) = C_m M_m.$$

$$C_m = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k T_m(x_k)}{M_m}$$

□

Из (1), (2) следует, что

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \ldots (n \geqslant 1).$$

$$\left| \cos \left(n \arccos x \right) \right| = 1.$$

$$n \arccos x = \pi m, m = \overline{0, n}, x \in [-1, 1].$$

Отсюда находим $x_m = \cos \left(\dfrac{\pi m}{n} \right)$.

$$T_n(x_m) = \cos \left(n \arccos \frac{\pi m}{n} \right) = \cos \left(\pi m \right) = (-1)^m.$$

Краткий план:

1. пока пусто

8 Минимизация остатка интерполирования

Критерий.
Чебышев показал, что из всех полиномов степени n, $P_n(x)$ со старшим коэффициентом равным 1, у полинома

$$2^{1-n}T_n(x) = \overline{T}(x).$$

точная верхняя грань абсолютных значений на $[-1,1]$ наименьшая и равна 2^{1-n}, т.к. $\max\limits_{[-1,1]}|T_n(x)| = 1$.

$\left|\left|\overline{T_n} - 0\right|\right|_{\infty,[-1,1]} = 2^{1-n} \Rightarrow \overline{T_n}(x)$ - полином, наименее отклоняющийся от нуля.

В случае отрезка произвольной длины $x \in [a,b]$ сделаем линейную замену переменных, которая отображает $[a,b]$ на $[-1,1]$.

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} = \psi(t), t \in [-1,1]. \tag{1}$$

$$P_n(x) = x^n + P_{n-1}(x) = \psi^n(t) + P_{n-1}\Big(\psi(t)\Big) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \overline{P_n}(t).$$

$$||P_n(x)||_{\infty,[a,b]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \left|\left|\overline{P_n}(t)\right|\right|_{\infty,[-1,1]} \geqslant 2^{1-n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n = (b-a)^n 2^{1-2n}.$$

Равенство в этой формуле достигается при

$$\overline{T_n}^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right).$$

$\overline{T_n}^{[a,b]}(x)$ называется наименее отклоняющимся от нуля на отрезке $[a,b]$.

В силу замены переменных (1) корни $\overline{T_n}^{[a,b]}(x)$ находятся по формуле:

$$x_m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\Big(\frac{\pi(m+\frac{1}{2})}{n}\Big), m = \overline{0, n-1}.$$

Для оценки остатка интерполирования функции $f(x)$ на Чебышевской сетке узлов $\{x_m\}$ будем использовать равномерную норму:

$$||f(x)||_\infty = \sup_{[a,b]}|f(x)|.$$

Из представления остатка в общем виде следует

$$||f(x) - P_{n-1}(x)|| \leqslant \frac{1}{n!}\left|\left|f^{(n)}(x)\right|\right| ||w_n(x)||.$$

Будем минимизировать правую часть в неравенстве выше.

$$w_n = (x-x_1)\dots(x-x_n), \deg\, w_n = n, \text{ старший коэффициент равен 1.}$$

Поэтому в качестве узлов интерполирования $x_1, \dots, x_n$ мы можем взять корни многочлена Чебышева. В этом случае w_n будет иметь вид:

$$w_n = \overline{T_n}^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right).$$

Из равенства выше следует что $||w_n(x)|| = (b-a)^n 2^{1-2n} \Rightarrow$ на Чебышевском наборе узлов оценка погрешности интерполирования имеет вид:

$$||f(x) - P_{n-1}(x)|| \leqslant \frac{1}{n!} \left|\left|f^{(n)}(x)\right|\right| (b-a)^n 2^{1-2n}.$$

Мы получили неуменьшаемую оценку погрешности интерполяции.

Краткий план:

1. пока пусто

9 Интерполирование с кратными узлами

Задача кратного интерполирования заключается в построении полинома наименьшей степени n, который удовлетворяет условиям:

$$H_m^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, i = \overline{0,n}, j = \overline{0, m_i - 1}. \tag{1}$$

Все узлы x_i будем считать различнымми. Через m_i будем обозначать кратность i-того узла.

Полином $H_m(x)$, удовлетворяющий условию (1), называется полиномом Эрмита.

Число заданных условий в (1) равно:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i = m + 1.$$

Теорема.

Интерполяционный полином $H_m(x)$, удолетворяющий условию (1), определяется единственным образом.

Теорема.

Полином Эрмита $H_m(x)$, определенный условиями (1), существует.

Рассмотрим погрешность интерполирования $R_m(x) = f(x) - H_m(x)$.

Теорема.

Пусть узлы $x_i, i = \overline{0,n}$ и точка $x \in [a,b], f(x) \in \mathbb{C}^{m+1}[a,b]$.

Тогда

$$\exists\, \overline{x} \in [a,b] \mid R_m(x) = \frac{w_{m+1}(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\overline{x}),$$

где $w_{m+1}(x) = (x - x_0)^{m_0} \dots (x - x_n)^{m_n}$.

Построим $H_m(x)$ на основе расширенной таблицы разделенных разностей. Введем набор узлов

$$x_{ij} = x_i + j\varepsilon, \varepsilon > 0, i = \overline{0,n}, j = \overline{0, m_i - 1}.$$

Очевидно, что все x_{ij} различны и стремятся к x_i при $\varepsilon \to 0$ (по построению).

Таблица разделенных разностей для расширенного набора узлов будет иметь вид:

$f(x_{00})$			
	$f(x_{00}, x_{01})$		
$f(x_{01})$		$f(x_{00}, x_{01}, x_{02})$	
	$f(x_{01}, x_{02})$		
$\dots$			$f(x_{00}, \dots, x_{nm_n-1})$
$f(x_{0m_0-1})$			
$f(x_{10})$			
$f(x_{1m_1-1})$			
$f(x_{x_nm_n-1})$			

Выражая разделенные разности через производные и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x_{il}, \dots, x_{ik}) = \frac{f^{(k-l)}(x_i)}{(k-l)!}.$$

Краткий план:

1. пока пусто

10 Интерполяционный сплайн второго порядка

Поскольку интерпретация многочленами высокой степени не желательна, то в случае большого числа узлов сетки используют кусочно-полиномиальную интерполяцию. В этом случае исходный отрезок (интервал) разбивают на подынтервалы, затем на каждом подынтервале строится интерполяционный полином второй или третьей степени. Недостаток такого подхода состоит в том, что производная аппроксимирующей функции на стыках интервалах терпит разрыв.

Такая интерполяция называется кусочно-параболической (если аппроксимирующий полином - парабола ($P_2(x)$)) или кусочно-кубической (в случае $P_3(x)$).

Добиться необходимой гладкости можно с помощью сплайн-функции. Рассмотрим на $[a, b]$ сетку узлов $w = \{a = x_0 < \ldots < x_m = b\}$ и введем опредление.

Функция $S(x) \in \mathbb{C}^{p-1}[a, b]$ - сплайн степени p, если на каждом отрезке $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, m-1}$, является полиномом степени $p \geqslant 2$.

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k^{(i)} (x - x_i)^k, i = \overline{0, m-1},$$

где (i) означает, что a_k принадлежит Δ_i.

Условие непрерывности сплайн-функции означает непрерывность $S(x)$ и ее производной вплоть до порядка $p - 1$ во всех внутренних узлах сетки. Т.о., это условие дает $p(m - 1)$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_k^{(i)}$.

В задачах интерполяции $S(x)$ должна совпадать со значениями функции $f(x)$ в узлах сетки: $S(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, m}$. Получаем еще $(m + 1)$ уравнение (условие).

Не хватает еще $(p-1)$ уравнения. Эти уравнения обычно находят из известных граничных условий на отрезке $[a, b]$.

Краткий план:

1. пока пусто

11 Интерполяционный кубический сплайн

Интерполяционным кубическим сплайном называется функция

$$S(x) = S_i(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x - x_i) + a_2^{(i)}(x - x_i)^2 + a_3^{(i)}(x - x_i)^3, i = \overline{0, m-1},$$

где $S(x) \in \mathbb{C}^2[a, b], x \in [x_i, x_{i+1}]$.

$$S(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, m}. \tag{1}$$

Условия непрерывности сплайна $S(x)$ и ее производных $S^{'}(x), S^{''}(x)$ во внутренних узлах сетки дают $3(m-1)$ условия. Условие интерполяции (1) дают еще $m+1$ условие. Для однозначного определения сплайна $S(x)$ всего требуется $4m$ условий. Недостающие 2 условия определяют из граничных условий.

Типичные граничные условия:

Если известны $f^{'}(a), f^{'}(b)$, тогда

$$\begin{cases} S^{'}(a) = f^{'}(a), \\ S^{'}(b) = f^{'}(b). \end{cases}$$

Если известны $f^{''}(a), f^{''}(b)$, тогда

$$\begin{cases} S^{''}(a) = f^{''}(a), \\ S^{''}(b) = f^{''}(b). \end{cases}$$

Если $f(x)$ - периодическая с длиной периода $b - a$, то тогда полагают:

$$\begin{cases} S(a) = S(b), \\ S^{'}(a) = S^{'}(b), \\ S^{''}(a) = S^{''}(b) \end{cases}.$$

Рассмотрим построение сплайн-функции на i-том отрезке:

Введем обозначения: $M_i = S^{''}(x_i), i = \overline{0, n}$.

Т.к. вторая производная сплайна является линейной функцией, то ее можно представлять в виде интерполяционного полинома Лагранжа.

$$S_{i-1}^{''}(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \tag{2}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$.

M_i, M_{i-1} называются моментами.

Интегрируя дважды (2), получаем:

$$S_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + B_{i-1}. \tag{3}$$

Найдем константы C и B. Для определения B_i положим $x = x_{i-1}$, а для определния C_i положим $x = x_i$, тогда из (3) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} B_{i-1} = f_{i-1} - \dfrac{h_i^2}{6}M_{i-1}, \\ C_{i-1} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \dfrac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}). \end{cases}$$

Первая производная сплайна должна быть непрерывна в точке x_i. Имеем:

$$S_{i-1}'(x_i) = \frac{h_i}{6} \cdot M_{i-1} + \frac{h_i}{3} \cdot M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}. \tag{4}$$

Для сплайна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ получаем:

$$S_i(x) \overset{(3)}{=} M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + C_i(x - x_i) + B_i.$$

Продифференцируем и получим $S_i'(x_i)$:

$$S_i'(x_i) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}, i = \overline{1, m-1}. \tag{5}$$

Приравнивая (4) и (5), получаем систему из $m-1$ уравнения относительно неизвестных моментов, которую можно записать в виде:

$$\nu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i = \overline{1, m-1}, \tag{6}$$

где

$$\begin{cases} d_i = \dfrac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \\ \nu_i = \dfrac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \\ \lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}. \end{cases}$$

Система (6) содержит $m+1$ неизвестных коэффициентов M_i и состоит из $m-1$ уравнения, значит, система (6) недоопределена.

Недостающие 2 уравнения находят из граничных условий.

Будем их записывать в общем виде:

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0,$$

$$\nu_m M_{m-1} + 2M_m = d_m.$$

В матричной форме система уравнений относительно моментом M_m имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{m-1} & 2 & \lambda_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{m-1} \\ M_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

Система (7) решается методом прогонки.

Определив моменты M_i из системы (7), находим по формулам (4) C_i, B_i, затем - сами сплайны по формуле (3).

$$S_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - \frac{1}{6} h_i^2 M_{i-1} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{1}{6} h_i^2 M_i \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \tag{8}$$

где $x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, m}$.

Определим параметры $\lambda_0, \nu_m, d_0, d_m$ для случая, когда известны $f'(a), f'(b)$.

Продифференцируем (8):

$$S_{i-1}'(x) = M_{i-1} \left[\frac{h_i}{6} - \frac{1}{2h_i} (x_i - x)^2 \right] + M_i \left[\frac{1}{2h_i} (x - x_{i-1})^2 - \frac{h_i}{6} \right] + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, i = \overline{1, m}. \tag{9}$$

1. $i = 1$:
$$S_0'(a) = M_0\left[\frac{h_1}{6} - \frac{h_1}{2}\right] + M_1\left[-\frac{h_1}{6}\right] + \frac{f_1 - f_0}{h_1} = f'(a) = f_0', \text{т.к. } a = x_0.$$

2. $i = m$:
$$S_{m-1}'(b) = M_{m-1}\left[\frac{h_m}{6}\right] + M_m\left[-\frac{h_m}{6} + \frac{h_m}{2}\right] + \frac{f_m - f_{m-1}}{h_m} = f'(b) = f_m'.$$

Запишем эти коэффициенты как:

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0\right), \\ M_{m+1} + 2M_m = \dfrac{6}{h_m}\left(f_m' - \dfrac{f_m - f_{m-1}}{h_m}\right). \end{cases}$$

Очевидно, что:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 1, \\ d_0 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0\right), \\ \nu_m = 1, \\ d_m = \dfrac{6}{h_m}\left(f_m' - \dfrac{f_m - f_{m-1}}{h_m}\right). \end{cases}$$

Та же самая схема для известных значений вторых производных и для периодической функции.

Краткий план:

1. пока пусто

12 Наилучшее приближение в линейном векторном пространстве

В ряде случаев функцию следует аппроксимировать (приближать) не путем интерполяции, а с помощью построения наилучшего приближения.

Пусть H - линейное нормированное пространство.

Требуется найти наилучшие приближения элемента $f \in H$ с помощью ЛК $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j g_j$, которые являются линейно-независимыми $g_j \in H, j = \overline{1, n}$.

Т.о., требуется найти элемент $\phi = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j g_j$ такой, что $\Delta = ||f - \phi|| = \inf\limits_{c_1, \ldots, c_n} \left|\left| f - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j g_j \right|\right|$.

Если такой элемент существует $\phi \in H$ существует, то он называется элементом наилучшего приближения.

Теорема.

Элемент наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве существует.

Замечание.

Элемент наилучшего приближения может быть не единственным.

Пространство H называется строго нормированным, если из условия $||f+g|| = ||f||+||g||, ||f||||g|| \neq 0$, следует $f = \alpha g, \alpha \neq 0$.

Теорема.

Если пространство H строго нормированно, то элемент наилучшего приближения единственен.

Краткий план:

1. пока пусто

13 Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве

Гильбертовое пространство является полным нормированным, $||x||^2 = (x_1, \dots, x_n)$.

Для Гилбертова пространства H элемент наилучшего приближения единственен и его построение сводится к решению системы линейных уравнений.

Обозначим $G = \text{span}\ \{g_1, \dots, g_n\}, g_i \in H, i = \overline{1, n}, f \in H.$

$||f - \phi|| = \inf\limits_{h \in G} ||f - h||.$

G называется линейным многообразием.

Лемма.

Пусть $\phi \in H$ - элемент наилучшего приближения. Тогда $(f - \phi) \perp G$ (ортогонален всем элементам).

Лемма.

Если погрешность $(f-\phi) \perp G$, где G - линейная оболочка гилбертова пространства, то ϕ - элемент наилучшего приближения.

Пусть элемент наилучшего приближения ϕ имеет представление $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j g_j$. Коэффициенты α_j пока неизвестны:

$$f - \phi = f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j$$

$$\left(f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j, g_i \right) \overset{\text{п. 1}}{=} 0, \tag{1}$$

где $j = \overline{1, n}$ - свойство ортогональности, т.е. $(f - \phi) \perp G$.

(1) - СЛАУ относительно α.

Запишем систему (1) в классической форме:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (g_i, g_i) = (f, g_j), j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Матричная система (2) - матрица Грама. В силу того, что базисные элементы $g_1, \dots, g_n$ линейно-независимы, определитель матрицы Грама $\neq 0 \Rightarrow$ (2) имеет единственное решение относительно коэффициента α.

Замечания:

1. Если элементы $g_1, \dots, g_n$ является ортонормированными, т.е. $(g_i, g_j) = \delta_{i,j}, i, j = \overline{1, n}$, то система (1) имеет диагональную матрицу и решение находится как $d_j = (f, g_j), j = \overline{1, n}$. Тогда элемент наилучшего приближения $\phi = \sum\limits_{i=1}^{n} (f, g_i) g_i$.

   Коэффициент α_j имеет название коэффициента Фурье, а сам многочлен ϕ носит название многочлена Фурье.

2. Если $(f, \phi) = ||\phi||^2$, тогда для элемента наилучшего приближения имеем

   $$||f - \phi||^2 = ||f||^2 - ||\phi||^2.$$

   В силу равенства Парсеваля $\left(||f||^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)$ имеем:

$$||f-\phi||^2 = \int\limits_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Значит, при $n \to \infty$ норма погрешности $||f-\phi||$ неограниченно убывает, т.е. элемент наименьшего приближения ϕ среднеквадратичного сходится к f.

3. Типичным примером гилбертова пространства является пространство $L_2[a,b]$ - пространство функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$, причем:

$$(f,g)_{L_2} = \int\limits_a^b \rho(x) f(x) \overline{g(x)} dx,$$

$$||f||^2_{L_2} = \left(\int\limits_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

   $\rho(x) \geqslant 0$ - весовая функция.

   $\rho(x) = 0$ на граничном числе точек, мера которого равна 0.

4. Коэффициенты Фурье α_i дают наилучшие в системе наименьших квадратов приближения, когда $f(x)$ разлагается по ортогональному базису элементов g_i.

   Т.о., ортогональные функции g_i, нахождение коэффициентов Фурье и идея приближения в смысле наименьших квадратов тесно взаимосвязаны.

Краткий план:

1. пока пусто

14 Метод наименьших квадратов

Если функция $f(x)$ задана на конечном множестве узлов x_j, другими словами, $f(x)$ - сеточная функция, то скалярное произведение определяется не интегралом, а суммой:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i f_i g_i, f_i = f(x_i),$$
$$\rho_i > 0 - \text{ весовые коэффициенты.} \tag{1}$$

Будем рассматривать полиномиальную аппроксимацию многочлена. Тогда базисные функции -

$$g_k(x) = x^k, k = \overline{0, n} \tag{2}$$

Если значения f задаются в $(n+1)$ разных точках, то существует единственный интерполяционный полином степени не выше n.

Во многих случаях значения f находят в результате измерений и содержат ошибки. При этом число измерений проводят гораздо большее число раз, чем $(n + 1)$, надеясь при этом в результате измерения уменшить эти ошибки.

Обычно в качестве такого метода усреднения выбирают метод наименьших квадратов.

Для базиса из полиномов (2) система определяет элемент наилучшего определения.

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i (g_i, g_j) = (f_i, g_j), \forall j = \overline{0, n} \tag{3}$$

Имеет следующий вид: $[(g_0, g_0) = (1, 1) = m]$.

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_i \\ \sum x_i f_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n f_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

Уравнения в (4) называются нормальными.

$$\phi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n.$$

На практике, когда $n \geqslant 5$ нормальные уравнения обычно становятся плохо обусловленными. Решить эту проблему можно с помощью ортогональных полиномов.

Будем говорить, что полиномы g_j, где j - степень полинома, образуют на множестве точек $x_1, \ldots x_m$ ортогональную систему, если

$$(g_k, g_j) = \sum_{i=1}^{m} g_k(x_i) g_j(x_i) = 0, \forall k \neq j, k, j = \overline{0, n}. \tag{5}$$

Тогда система (3) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{m} g_k^2(x_i) \alpha_k = \sum_{i=1}^{m} g_k(x_i) f_i, k = \overline{0, n}. \tag{6}$$

Из (6)

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} g_k(x_i) f_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} g_k^2(x_i)} \tag{7}$$

Для полинома Чебышева: $T_p = 1, T_1 = x, \ldots. T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$ - частный случай ортогональных полиномов с $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Элемент наилучшего приближения

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k g_k(x) \tag{8}$$

Геометрический смысл -проекция.

Краткий план:

1. пока пусто

15 Метод Пикара и метод рядов Тейлора

15.1 Метод Пикара

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), u = u(x), x \in [x_0, x_l] \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Проинтегрируем уравнение (1)

$$u(x) = u(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \tag{2}$$

y - приближённое решение, s - номер итерации.

$$\begin{cases} y_s(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{s-1}(t))dt \\ y_0(t) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

Этот метод удобен, если интеграл можно вычислить аналитически. Докажем сходимость метода Пикара.

Пусть в некоторой ограниченной области G функция $f(x, u)$ непрерывная и удовлетворяет условию Лившица по переменной u:

$$|f(x_1, u_1) - f(x_1, u_2)| \leqslant L\,|u_1 - u_2| \tag{4}$$

$$\begin{cases} |x - x_0| \leqslant E, \forall x \in G \\ |u - u_0| \leqslant V, E, V - \mathrm{const} \end{cases} \tag{5}$$

(5) - условия ограниченности, выполняются в силу ограниченности области G.

$$(2), (3) \Rightarrow |y_s(x) - u(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{s-1}(t))dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \right| \tag{6}$$

$$|y_s(x) - u(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_{s-1}(t)) - f(t, u(t))|\, dt \tag{7}$$

Обозначим $z_s(x) = y_s(x) - u(x)$ - погрешность в точке x.

$$|z_s(x)| \leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} |z_{s-1}(t)|\, dt \tag{8}$$

Если $s = 0$, то

$$
\begin{aligned}
&|z_0(x)| = |u_0 - u(x)| \leqslant V \text{ - погрешность начального приближения.}\\
&|z_1(x)| \leqslant LV\,|x - x_0|\\
&|z_2(x)| \leqslant \frac{1}{2}L^2V\left|(x - x_0)^2\right|\\
&\dots\\
&|z_s(x)| \leqslant \frac{1}{s!}L^sV\,|(x - x_0)^s|
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Формула Стирлинга:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1 + \varepsilon_n), \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$(9) \Leftrightarrow |z_s(x)| \leqslant \frac{1}{s!}L^sVE^s \tag{10}$$

Используя формулу Стирлинга

$$|z_s(x)| \leqslant \frac{v}{\sqrt{2\pi s}}\left(\frac{eEL}{s}\right)^s \tag{11}$$

$(11) \Rightarrow |z_s(x)| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ итерационный процесс сходится.

15.2 Метод рядов Тейлора

Рассмотрим

$$
\begin{cases}
u' = f(x, u), x \in [x_0, x_l]\\
u(x_0) = u_0
\end{cases}
\tag{1}
$$

Продифференцируем (1) по x:

$$
\begin{aligned}
&u'' = f_x + f_u \cdot u' = f_x + f \cdot f_u\\
&u''' = f_{xx} + 2f_{xu}u' + f_{uu}u'^2 + f_uu''\\
&\dots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Подставим в формулу (2) в качестве $x = x_0, u = u_0$, последовательно находим значения $u'(x_0), u''(x_0), u'''$ и т. д. Получаем ряд Тейлора:

$$u(x) \approx y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \tag{3}$$

Если $|x - x_0|$ не превышает радиуса сходимости ряда Тейлора, то приближенное решение $y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$.

Иногда полезно разбить исходный отрезок $[x_0, x_l]$ на N частей $[x_{j-1}, x_j], j = \overline{1, N}, x_N = x_l$. Отрезки не обязательно равные. На каждом отрезке применим метод рядов Тейлора для более точного решения.

Рассмотрим произвольный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$. Будем считать, что y_j найдено. Значит, мы можем найти $u^{(i)}(x_j)$. Тогда применяя метод рядов, можно приблизить на этом отрезке

$$
\begin{aligned}
&u(x) \approx v_j(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u_j^{(i)}}{i!}(x - x_j)^i\\
&y_{j+1} = v_j(x_{j+1})
\end{aligned}
\tag{4}
$$

При использовании метода рядов необходимо находить значения $\approx \dfrac{n(n+1)}{2}$ различных функций, поэтому на практике обычно ограничиваются первым и вторым порядком точности (2-3 производные).

Краткий план:

1. пока пусто

16 Методы Эйлера, трапеций, средней точки

$$\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Проинтегрируем (1) на отрезке $[x_n, x_{n+1}], x_{n+1} - x_n = h$.

$$u_{n+1} = u_n + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t))dt, u_n \equiv u(x_n) \tag{2}$$

Используем для вычисления интеграла в формуле (2) правило левых прямоугольников

$$\int\limits_A^B f dx \approx f(A)(B - A)$$

$$u_{n+1} = u_n + hf_n + R_2(f) \tag{3}$$

Отбрасывая в (3) $R_2(f)$, получаем **явную формулу Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hf_n \tag{4}$$

Если для вычисления интеграла в формуле (2) применить формулу правых прямоугольников

$$\int\limits_A^B f dx \approx f(B)(B - A)$$

получим **неявную формулу Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + hf_{n+1} \tag{5}$$

В общем случае неявный метод Эйлера представляет собой неявное уравнение относительно искомого значения y_{n+1}. Для решения неявного уравнения можно использовать итерационный метод (например, метод простой итерации).

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^k), k = 0, 1, \ldots; n = \overline{0, N-1}. \tag{6}$$

Чтобы итерационный метод сходился, достаточно потребовать, чтобы

$$h\left|\frac{\delta f}{\delta y_{n+1}}\right| < 1, \forall n \tag{7}$$

В качестве нулевого приближения возьмём:

1. $y_{n+1}^0 = y_n$
2. $y_{n+1}^0 = y_n + hf_n$

Локальная погрешность явного и неявного метода Эйлера (это погрешность нахождения $u(x+h)$ при известном значении $u(x)$) имеет порядок $O(h^2)$.

Рассмотрим для неявного метода Эйлера:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= u(x_n+h) - u(x_n) - hf(x_n+h, u(x_n+h)) = \\ &= u_n + hu'_n + \frac{h^2}{2}u''_n + O(h^3) - u_n - h(u'_n + hu''_n + O(h^2)) = \\ &= -\frac{h^2}{2}u''_n + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Неявный метод Эйлера сложнее в реализации, но имеет значительное преимущество перед явным за счёт своей устойчивости.

Если интеграл в правой части вычислить по формуле трапеций, то получим:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \\ y_0 = u_0, n = 0, 1, \ldots \end{cases} \quad r_{n+1} = O(h^3) \tag{9}$$

Применим для вычисления (2) правило средних прямоугольников (формулу средней точки)

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+\frac{1}{2}}; y_0 = u_0, n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Чтобы вычислить $f_{n+\frac{1}{2}}$ необходимо знать значение $y_{n+\frac{1}{2}}$. Способы вычисления:

$$y_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \tag{11}$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f_n \tag{12}$$

Если применять (10) и (11), то получим

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right) \tag{13}$$

Если применять (10) и (12), то получим

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n\right) \tag{14}$$

Краткий план:

1. пока пусто

17 Сходимость явного метода Эйлера

При использовании приближённых методом основным является вопрос о сходимости. Сформулируем понятие сходимости, когда $h \to 0$. Зафиксируем некоторую точку x и будем строить последовательность сеток ω_h таких, что $h \to 0, x_n = x_0 + nh = x$.

Определение: Говорят, что методя сходится в точке x, если разностное решение $|y_n(x) - u(x)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Определение: Метод сходится на отрезке $[x_0, x]$, если он сходится в каждой точке этого отрезка.

Определение: Говорят, что метод имеет порядок точности $p > 0$, если $|y_n(x) - u(x)| = O(h^p), h > 0$.

Исследуем сходимость явного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \tag{1}$$

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n), \tag{2}$$

$$x_n < \xi_n < x_{n+1}, u(x) \in C^2[x_0, x]$$

$$u' = f(x, u) \tag{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow u(x_{n+1}) = u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n) \tag{4}$$

$$u(x_{n+1}) - y_{n+1} = u(x_n) - y_n + h(f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, y_n)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n) \tag{5}$$

Введём обозначение погрешности в n-ой точке

$$E_n = u(x_n) - y_n \tag{6}$$

Будем полагать, что функция f удовлетворяет условию Липшица с const L по второму аргумент, тогда (5) $\Rightarrow$

$$|E_{n+1}| \leqslant |E_n| + hL(|u(x_n) - y_n|) + \frac{h^2}{2}\left|u''(\xi_n)\right|. \tag{7}$$

Определение: $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |u''(x)|$

$$|E_{n+1}| \leqslant |E_n|(1 + hL) + \frac{h^2}{2}M_2, n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Слагаемое $\frac{h^2}{2}M_2$ - оценка локальной погрешности метода, которая возникает на очередном шаге.

Для оценки погрешности E_n рассмотрим обобщение неравенства (8). Будем полагать, что $\exists \delta > 0, M > 0$, такие, что последовательность $d_0, d_1, \ldots$ удовлетворяет неравенству

$$d_{n+1} \leqslant (1 + \delta)d_n + M, n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Тогда

$$d_1 \leqslant (1 + \delta)d_0 + M$$

$$d_2 \leqslant (1 + \delta)d_1 + M \leqslant (1 + \delta)^2 d_0 + M(1 + (1 + \delta))$$

$$\ldots$$

$$d_n \leqslant (1 + \delta)^n + M(1 + (1 + \delta) + \ldots + (1 + \delta)^{n-1}) \tag{10}$$

$$d_n \leqslant (1 + \delta)^n d_0 + M\frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} \tag{11}$$

Из разложения экспоненты:

$$e^{\delta} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} e^{\xi}, 0 < \xi < \delta \Rightarrow 1 + \delta \leqslant e^{\delta} \tag{12}$$

$$(1 + \delta)^n \leqslant e^{n\delta} \tag{13}$$

Подставим (13) в (11) и получим оценку:

$$d_n \leqslant e^{n\delta} d_0 + M \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \tag{14}$$

Применим неравенство (14) к формуле (8)

$$|E_n| \leqslant e^{nhL} |E_0| + \frac{hM_2}{2L} \left(e^{nhL} - 1\right) \tag{15}$$

$$nh = x_n - a, E_0 = u_0 - y_0 = 0$$

$$|u(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM_2}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1\right) \tag{16}$$

$$\max_h |u(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM_2}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1\right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \tag{17}$$

В общем случае следует учитывать погрешность округления. На практике, когда вычисляется $f(x_n, y_n)$, на самом деле мы находим $f(x_n, y_n) + \varepsilon_n$. Кроме этого, когда по формуле Эйлера мы находим

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + \varepsilon_n) + \rho_n \tag{18}$$

появляется погрешность ρ_n.

Будем полагать, что $|\rho_n| \leqslant \rho, |\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon, \forall h \leqslant h_0$. Тогда формулу (17) надо изменить следующим образом

$$\max_h |u(x_n) - y_n| \leqslant \frac{1}{L} \left(e^{L(b-a)} - 1\right) \left(\frac{hM_2}{2} + \varepsilon + \frac{\rho}{h}\right) \tag{19}$$

Из оценки (19) следует, что повышать точность за счёт уменьшения шага h можно только до некоторого предела, за которым погрешность округления будет доминировать.

Краткий план:

1. пока пусто

18 Методы последовательного повышения порядка точности

Будем рассматривать уравнение $u' = f(x, y)$. Проинтегрируем на $[x_n, x_{n+1}]$

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \int\limits_0^1 f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) d\alpha \tag{1}$$

Заменим $t = x_n + \alpha h$. Заменим в (1) интеграл квадратурной суммой общего вида, получим

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^{q} A_i f(x_n + \alpha_i h, y(x_n + \alpha_i h) \tag{2}$$

Получим 2 набора параметров A_i и $\alpha_i, i = \overline{0, q}$. В (2) $2q + 2$ параметров.

Параметры A_i и α_i выбираем так, чтобы квадратурная формула, которую мы использовали

$$\int\limits_0^1 f_{n+\alpha} d\alpha \approx \sum_{i=0}^{q} A_i f_{n+\alpha_i}, \tag{3}$$

была точна для всех полиномов степени $k - 1$, где $0 < k \leqslant 2q + 2$.

В результате получим систему из k уравнений, в которые входят $2q+2$ неизвестных параметров.

$$\sum_{i=0}^{q} A_i \alpha_i^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0, k-1} \tag{4}$$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$f_{n+\alpha}^{[m]} = f(x_n + \alpha h, y^{[m]}(x_n + \alpha h)),$$

где $y_{n+\alpha}^{[m]}$ - приближённое решение в точке $x_n + \alpha h$ с погрешностью $O(h^m)$.

Систему (4) можно получить также из требования, чтобы разложить в ряд Тейлора по степеням h

$$u(x_n + h) - u(x_n) \approx h \sum_{i=0}^{q} A_i u'(x_n + \alpha h) \tag{5}$$

совпадающее до членов при h^k включительно. При этом локальная погрешность

$$\psi_{n+1} = u_{n+1} - u_n - h \sum_{i=0}^{q} A_i f_{n+\alpha_i} \tag{6}$$

будет иметь вид

$$\psi_{n+1} = h^{k+1} u_n^{(k+1)} \left[\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{q} A_i d_i^k \right] + O(h^{k+2}) \tag{7}$$

Поскольку весовая функция в формуле (3) в среднем равна 1, то квадратурная формула может быть построена единственным образом с НАСТ $= 2q + 1, \forall q \geqslant 0$, то когда $k = 2q + 2$, то система (4) имеет единственное решение, причём $0 \leqslant A_i \leqslant 1, 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, i = \overline{0, q}$.

Для определения неизвестных величин $y_{n+\alpha_i}$ в (2) можно строить аналогичные методы

$$y_{n+\alpha_i}^{[k]} = y_n + \alpha_i h \sum_{j=0}^{q_1} B_j f_n + \alpha_i \beta_j, q_1 \leqslant q \tag{8}$$

Значение $y_{n+\alpha_i\beta_j}$ также определяется по аналогичным формулам с погрешностью $O(h^{k-1})$. Неизвестные параметры β_j, B_j будут определятся из систем, аналогичных (4). С каждым шагом порядок точности будет понижаться, т.е. $q \geqslant q_1 \geqslant \ldots \geqslant 1$.

$$\sum_{i=0}^{q_1} B_i \beta_i^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0, k-2} \tag{9}$$

Завершать данную схему будут явные формулы Эйлера

$$y^{[2]}_{n+\alpha_i\beta_j\cdot\ldots\cdot\gamma_m} = y_n^{[k+1]} + \alpha_i\beta_j \cdot \ldots \cdot \gamma_m h f_n^{[k+1]} \tag{10}$$

Построим в качестве примера метод второго порядка точности, т.е. $k = 2$. Если взять $q = 0$, то система (4) имеет единственное решение $A_0 = 1, \alpha_0 = \dfrac{1}{2}$. Получаем формулу

$$y^{[3]}_{n+1} = y^{[3]}_n + h f^{[2]}_{n+\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$y^{[2]}_{n+1} = y^{[3]}_n + \frac{h}{2} f^{[3]}_n \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Краткий план:

1. пока пусто

19 Методы Рунге-Кутта

Исходное уравнение $u' = f(x, u)$. Интегрируем на отрезке $[x_n, x_n + h]$.

$$u_{n+1} = u_n + h \int\limits_0^1 f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h))d\alpha \tag{1}$$

Для вычисления интеграла предлагается использование следующего набора параметров

$$\begin{array}{c|c|ccccc} A_0 & & & & & \\ A_1 & \alpha_1 & \beta_{10} & & & \\ A_2 & \alpha_2 & \beta_{20} & \beta_{21} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_q & \alpha_q & \beta_{q0} & \beta_{q1} & \dots & \beta_{qq-1} \end{array}$$

При помощи параметров α и β последовательно находим

$$\begin{aligned} &\phi_0 = hf(x_n, y_n) \\ &\phi_1 = hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_{10}\phi_0) \\ &\dots \\ &\phi_q = hf(x_n + \alpha_q h, y_n + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_{qj}\phi_j) \end{aligned} \tag{2}$$

Параметры $\phi_0, \phi_1, \dots \phi_q$ находится последовательно. После этого интеграл в (1) заменяется на $\sum\limits_{i=0}^{q} A_i\phi_i$. В результате получим формулу

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^{q} A_i\phi_i \tag{3}$$

Неизвестные параметры A, α, β выбираются таким образом, чтобы при заданном значении q построить метод максимально высокого порядка точности.

Определение: Формулы (2), (3) - метод Рунге-Кутты.

Локальная погрешность

$$r_q(h) = u(x_n + h) - u(x_n) - \sum_{i=0}^{q} A_i\phi_i \tag{4}$$

Считая функцию f достаточно гладной, запишем разложение в ряд Тейлора

$$r_q(h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)}(0) + O(h^{k+1}) \tag{5}$$

Если параметры A, α, β выбрать таким образом, чтобы производные

$$r_q^{(j)} = 0, \forall j = \overline{0, k} \tag{6}$$

то метод будет иметь k-ый порядок погрешности.

Примеры:

1. $q = 0$.

$$r_0(h) = u(x_n + h) - u(x_n) - hA_0 f_n$$
$$r_0'(h) = u'(x_n + h) - A_0 f_n$$
$$r_0''(h) = u''(x_n + h)$$

Условие (6) выполняется, когда $A_0 = 1, j = \overline{0,1}$.

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$
$$u'(x_n) = f_n$$

В итоге приходим к формуле явного метода Эйлера - метода первого порядка точности.

2. $q = 1$.

$$u_{n+1} - u_n = hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_u)_n + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2 f_{uu} + f(f_x + ff_u))_n + O(h^4) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &A_0\phi_0 + A_1\phi_1 = h(A_0 f_n + A_1 f(x_n + \alpha_1 h, u + h\beta_{10} f_n)) = \\ &= h(A_0 + A_1) f_n + h^2 A_1 (\alpha_1 f_x + \beta_{10} ff_u)_n + \frac{h^3}{2} A_1 (\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1\beta_{10} ff_{xu} + \beta_{10}^2 f^2 f_{uu}) + O(h^4) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} hf: &\qquad A_0 + A_1 = 1 \\ h^2 f_x: &\qquad A_1\alpha_1 = \frac{1}{2} \\ h^2 ff_u: &\qquad A_1\beta_{10} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

При выполнении условий (9) нельзя добиться совпадения коэффициентов (7) и (8) формулы при h^3. Поэтому при $q = 1$ метод Рунге-Кутты имеет второй порядок точности

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_{10} = \dfrac{1}{2A_1} \\ A_0 = 1 - A_1 \end{cases} \tag{10}$$

Формула (10) даёт семейство методов Рунге-Кутты второго порядка точности, где A_1 - свободный параметр. Возьмём $A_1 = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{\phi_0 + \phi_1}{2} \\ \phi_1 = hf(x_n + h, y_n + \phi_0) \\ \phi_0 = hf_n \end{cases} \tag{11}$$

Если $A_1 = 1$.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \phi_1 \\ \phi_1 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{\phi_0}{2}\right) \\ \phi_0 = hf_n \end{cases} \tag{12}$$

Краткий план:

1. пока пусто

20 Экстраполяционные методы Адамса

Данный метод относится к многошаговым, которые имеют следующий вид

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{q} A_i f_{n-i} \tag{1}$$

Неизвестные параметры A_i можно определить также, как и при построении методов последовательного повышения порядка точности, т.е. из системы

$$\sum_{i=0}^{q} A_i(-i)^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0,q} \tag{2}$$

Система (2) имеет единственное решение.

Погрешность явного метода Адамса можно также получить из формулы для метода последовательного повышения порядка точности

$$r_{n+1} = h^{q+2}u_n^{(q+2)}\left(\frac{1}{(q+2)!} - \frac{1}{(q+1)!}\sum_{i=0}^{q} A_i(-i)^{q+1}\right) + O(h^{q+3}) = O(h^{q+2}) \tag{3}$$

Параметры A_i можно построить, не решая систему (2). Рассмотрим интегральное уравнение (получено интегрированием исходного уравнения на $[0,1]$)

$$u_{n+1} = u_n + h\int_0^1 f_{n+\alpha}d\alpha \tag{4}$$

Подинтегральную функцию f можно заменить интерполяционным полиномом, построенным по точкам $0, -1, \ldots -q$. Поскольку узлы интерполирования $x_n, \ldots x_{n-q}$ (или $\alpha = 0, -1, \ldots -q$) располагаются вне отрезка $[x_n, x_{n+h}]$, то такая процедура интерполирования называется **экстраполированием**.

Если интерполяционный полином взять в форме Лагранжа, то коэффициенты A_i находятся по формуле

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!(q-i)!}\int_0^1 \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+q)}{\alpha+i}d\alpha, i = \overline{0,q} \tag{5}$$

Для организации счёта по формуле (1) одного известного условия $y_0 = u_0$ не достаточно. Необходимо также задать значения $y_1, \ldots y_q$ с той же точностью, которую имеет метод Адамса. Эти начальные значения находят по одношаговым методам (например Рунге-Кутта). Эти одношаговые методы называются стартовыми.

Примеры:

1. $q = 0, A_0 = 1.$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \tag{6}$$

совпадает с явным методом Эйлера.

2. $q=1, A_0+A_1=1, A_1=\frac{1}{2} \Rightarrow A_0=\frac{3}{2}$. Получаем метод Адамса второго порядка точности

$$\begin{aligned} &y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1}) \\ &y_0=u_0 \end{aligned} \tag{7}$$

Получился явный двухшаговый метод. y_1 необходимо посчитать по формуле Рунге-Кутты. Локальная погрешность

$$r_{n+1}=\frac{5}{12}h^3u_n^{(3)}+O(h^4)=O(h^3)$$

3. $q=2$.

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=1 \\ A_1+2A_2=-\frac{1}{2} \\ A_1+4A_2=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$A_0=\frac{23}{12}, A_1=-\frac{4}{3}, A_2=\frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(23f_n-16f_{n-1}+5f_{n-2}) \\ y_0=u_0 \end{aligned} \tag{8}$$

Получился трёхшаговый метод.

Если подынтегральную функцию в (4) аппроксимировать интерполяционным полиномом в форме Ньютона, то экстраполяционный метод Адамса примет вид

$$\begin{aligned} &y_{n+1}=y_n+\phi_n+\frac{1}{2}\Delta\phi_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\phi_{n-2}+\ldots+C_q\Delta^q\phi_{n-q} \\ &\phi_i=hf_i, C_q=\frac{1}{q!}\int\limits_0^1\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+q-1)d\alpha \\ &\Delta \text{ - оператор конечной разности} \\ &\Delta\phi_{n-1}=\phi_n-\phi_{n-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Погрешность

$$r_{n+1}=h^{q+2}u_n^{(q+2)}C_{q+1}+O(h^{q+3})=O(h^{q+2}) \tag{10}$$

Краткий план:

1. пока пусто

21 Интерполяционные методы Адамса

Являются неявными методами и определяются расчётной формулой

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=-1}^{q} A_i f_{n-i} \tag{1}$$

Параметры A_i определяются также, как и в методе последовательного повышения порядка точности.

$$\begin{aligned} &\alpha_i = -i, i = \overline{1,q} \\ &\sum_{i=-1}^{q} A_i(-i)^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0,q+1} \end{aligned} \tag{2}$$

Система имеет единственное решение при $q \geqslant -1$.

Параметры A_i можно найти, используя интерполяционный полином Лагранжа, который строится по значениям функции f в узлах

$$\begin{aligned} &x : x_{n+1}, x_n, \dots x_{n-q} \\ &\alpha : 1, 0, \dots -q \end{aligned}$$

Получим полином $(q+1)$-ой степени, где

$$A_i = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!(q-i)!}\int_0^1 \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+1)}{(\alpha+i)}d\alpha \tag{3}$$

$$r_{n+1} = h^{q+3}u_n^{(q+3)}\left(\frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+2)!}\sum_{i=-1}^{q} A_i(-i)^{q+2}\right) + O(h^{q+4}) = O(h^{q+3}) \tag{4}$$

Т.е. метод имеет порядок точности $(q+2)$.

Примеры:

1. $q = -1$.

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} \text{ совпадает с неявным методом Эйлера} \tag{5}$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{2}h^2u_n'' + O(h^3) = O(h^2)$$

Для случая, когда сетка равномерная, можно подынтегральную функцию заменить интерполяционным полиномом Ньютона.

2. $q = 0$.

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \text{ - формула трапеций} \\ &r_{n+1} = -\frac{1}{12}h^3u_n^{(3)} + O(h^4) = O(h^3) \end{aligned} \tag{6}$$

В общем виде:

$$y_{n+1} = y_n + \phi_{n+1} - \frac{1}{2}\Delta\phi_n - \frac{1}{12}\Delta^2\phi_{n-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\phi_{n-2} - \dots - C_{q+1}\Delta^{q+1}\phi_{n-q} \tag{7}$$

$$\phi_i = hf_i, C_{q+1} = \frac{1}{(q+1)!}\int\limits_0^1 \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q)d\alpha$$

$$r_{n+1} = h^{q+3}u_n^{(q+3)}C_{q+2} + O(h^{q+4}) \quad (8)$$

Поскольку отрезок $[x_n, x_{n+1}]$, на котором аппроксимируется функция f входит в отрезок $[x_{n-q}, x_{n+1}]$, на котором расположены узлы интерполяции...

Интерполяционные формулы Адамса представляют собой в общем случае неявное уравнение относительно y_{n+1}. Значение y_{n+1} находится с помощью некоторого итерационного метода.

В качестве нулевой итерации обычно берут приближённое значение, полученной с помощью экстраполяционного метода Адамса или методом Рунге-Кутты. При этом часто ограничиваются только одной итерацией. В этом случае вычислительный процесс относится к типу **предиктор-корректор**.

Краткий план:

1. пока пусто

22 Усточивость линейных многошаговых методов

Будем рассматривать задачу Коши

$$\begin{cases} u' = f(x,u), x > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Возьмём равномерную сетку узлов $\omega_h = \{x_n = nh, n = 0, 1, \ldots\}$. Будем рассматривать линейный m-шаговый метод.

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_m y_{n-m} = h \sum_{k=0}^{m} b_k f_{n-k} \tag{2}$$
$$n = m, m+1, \ldots$$

Коэфициенты $a_k, b_k = \text{const}, a_0 \neq 0$. Для счёта по формуле (2) необходимо задать m начальных значений $y_0 = u_0, y_1, \ldots y_{m-1}$. Обычно они находятся с помощью одношагового метода Рунге-Кутты того же порядка точности, что и метод (2).

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$a_0 \delta_n + a_1 \delta_{n-1} + \ldots + a_m \delta_{n-m} = 0 \tag{3}$$
$$n = m, m+1, \ldots$$

Будем искать частные решения (3) в виде $\delta_n = q^n, q = \text{const}$, тогда для опредления постоянной q получим уравнение

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \tag{4}$$

Определение: Уравнение (4) - характеристическое уравнение метода (2).
Определение: (2) - линейный двухшаговый метод, удовлетворяет условию корней, если все корни $q_1, \ldots q_m$ характеристического уравнения (4) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости. Причём на границе этого круга нет кратных корней.
Определение: Однородное уравнение (3) устойчиво по начальным данным, если $\exists \operatorname{const} M > 0$, независящая от номера узла n, такая, что при любых начальных данных $\delta_0, \ldots \delta_{m-1}$ выполняется следующая оценка решения

$$|\delta_n| \leqslant M \max_{0 \leqslant i \leqslant m-1} |\delta_i|, n = m, m+1, \ldots \tag{5}$$

Таким образом устойчивость по начальным данным означает равномерную по n ограниченность решения задачи Коши.
Теорема.
Условие корней необходимо и достаточно для устойчивости метода (3) по начальным данным.

Доказательство. 1. $\Rightarrow$. Пусть имеется корень $|q| > 1$. Зададим начальные данные $\delta_i = q^i (i = \overline{0, m-1})$. Тогда уравнение (3) имеет решение в точке $\delta_n = q^n (n \geqslant m)$, которое неограничено возрастает при $n \to \infty$. Оценка (5) не выполняется.

Следовательно, условие $|q_k| \leqslant 1, k = \overline{1, m}$ - необходимое условие устойчивости. Пусть характеристическое уравнение (4) имеет корень q с кратностью $r > 1$, причём этот корень находится на границе единичного круга на комплексной плоскости $|q| = 1$. В этом случае однородное уравнение (3) имеет решение вида

$$\delta_n = q^n \cdot n^{r-1}$$

и оценка (5) снова не выполняется.

2. $\Leftarrow$. Без доказательства.

$\square$

Можно показать, что если уравнение (3) устойчиво по начальным данным, то для неоднородного случая

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_m y_{n-m} = h g_{n-m}, n = m, m+1, \ldots \tag{6}$$

выполняется оценка

$$|y_n| \leqslant M_1 \underset{1 \leqslant j \leqslant m}{|y_j|} + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h\, |g_k| \tag{7}$$

которая означает устойчивость (6) по правой части и по начальным данным.

Краткий план:

1. пока пусто

23 Простейшие разностные операторы

Область решения $\overline{\Omega} = [0, l]$.

Сетка узлов на этой области

$$\overline{\omega_h} = \left\{x_i = ih, i = \overline{0, n}, hn = l\right\}$$

Построим аппроксимацию производной

$$Lu = u'$$

Функцию u будем считать достаточно гладкой: $u(x) \in C^k(\Omega), k > 2$. Поставим в соответствие оператору Lu разностный оператор Λ_h.

Определение: Множество узлов сетки, которое используется для построения оператора Λ_h называется **шаблоном**.

Погрешность аппроксимации оператора Lu разностным оператором Λ_h в i-ом узле определяется как

$$\psi_i = \Lambda_h u_i - (Lu)_i$$

Будем использовать разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x_i, где

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' \pm \frac{1}{6}h^3 u_i''' + O(h^3)$$

Используя это разложение можно построить разностную схему оператора левой разностной производной:

$$u_{\overline{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) \tag{1}$$

Оператор правой разностной производной

$$u_{\overline{x}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u_i' + \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) \tag{2}$$

Минимальный шаблон - 2 узла. $u_{\overline{x},i+1} = u_{x,i}$. Если будем использовать шаблон из трёх узлов, то можно построить центральную разностную производную

$$u_{\mathring{x}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}(u_{\overline{x},i} + u_{x,i}) = u_i' + \frac{h^2}{6}u''' + O(h^3) \tag{3}$$

Для оператора второй производной можно применить линейную комбинацию левой и правой производной.

$$\begin{aligned} &Lu = u'' \\ &(u_{\overline{x}})_x = \frac{1}{h}(u_x - u_{\overline{x}}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \end{aligned} \tag{4}$$

Погрешность аппроксимации оценивалась в отдельном i-ом узле. Для оценки на всей сетке ω_h необходимо использовать сеточные нормы

$$\begin{aligned} &||\psi||_{C,h} = \max_{x\in\omega_h} |\psi(x)| \\ &||\psi||_{2,h} = \left(\sum_{x\in\omega_h} \psi^2(x)h\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5}$$

(1) - (4) имеют одинаковый порядок аппроксимации. В общем случае порядок аппроксимации может быть разным в различных сеточных нормах.

В качестве альтернативного подхода можно использовать определение производной как решение интегралного уравнения и применения некоторой квадратурной формулы

$$\frac{d^k u}{dx^k} = f(x)$$

$$u(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{k-1} f(t)dt \tag{6}$$

Таким образом, можно определить производную как решение интегрального уравнения (6) при известной функции $u(x)$.

Пример. $k = 1$.

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t)dt \tag{7}$$

Если для вычисления (7) использовать формулу центральных прямоугольников, то получим

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i + O(h^2) \tag{8}$$

Есть и другие варианты построения. Например, строить интерполяционный полином и брать производную. Использование квадратур с многими внутренними узлами приводит к так называемым **компактным разностным операторам**.

Если в формулы (7) вычислять интеграл с использованием трёхточечной формулы Симпсона, то получим

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) + O(h^4). \tag{9}$$

В этом случае без расширения шаблона достигается более высокий порядок аппроксимации, но при этом вычисление связано с обращением трёхдиагональной матрицы.

Краткий план:

1. пока пусто

24 Основные понятия теории разностных схем

Сеточные (разностные) методы основаны на переходе от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. Например, если на отрезке $[0, 1]$ ввести точки-узлы x_i, которые образуют множество

$$\omega_h = \left\{x_i = ih, i = \overline{0, h}, nh = l\right\}, h \text{ - шаг сетки}$$

то приближённое решение ищется в узлах сетки ω_h и обозначается $y_h(x_i), i = \overline{0, n}$ (y_n - функция дискретного аргумента).

Для нахождения этой сеточной функции формулируется разностная задача. Запишем её в операторном виде

$$Lu = F \tag{1}$$

где u - искомая функция, F - вектор правой части, содержащий входные данные задачи.

Например, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

соответствующая разностная задача записывается в следующем виде

$$Lu = \begin{cases} u' - f, x > 0 \\ u(0), x = 0 \end{cases} \quad F = \begin{cases} 0, x > 0 \\ u_0, x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Одна из аппроксимирующих эту задачу разностных схем имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i, i = \overline{0, n-1} \\ y_0 = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

Операторная форма записи

$$\Lambda_h y_n = \phi_h \text{ - в общем случае} \tag{5}$$

$$\Lambda_h y_n = \begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} \\ y_0 \end{cases} \quad \phi_h = \begin{cases} f_i \\ u_0 \end{cases} \tag{6}$$

Введём норму сеточной функции

$$||y_n||_h = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i| \tag{7}$$

Определение: Решение разностной задачи (5) сводится при $h \to 0$ к решению исходной задачи (1), если

$$||(u)_h - y_h||_h \to 0 \tag{8}$$

$(u)_h$ означает некоторую проекцию точного решения u на сетку ω_h. Самая простая проекция: u_i. Если

$$||(u)_h - y_h||_h \leqslant ch^p, \tag{9}$$

где $c = \text{const}$, не зависит от h, то имеет место сходимость порядка p.

Определение: Задача (5) аппроксимирует исходную задачу (1) на её решение, если невязка

$$||\psi_h||_h \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \tag{10}$$

$$\psi_h = \Lambda_h (u)_h - \phi_h$$

Если при этом имеет место оценка

$$||\psi_h||_h \leqslant C_1 h^p, \tag{11}$$

где $C_1 = \text{const}$ не зависящая от h, то схема (5) имеет порядок аппроксимации p.

Определение: Разностная схема (5) называется устойчивой, если для любых достаточно малых h, z_h возмущённая разностная схема

$$\Lambda_h v_h = \phi_h + z_h \tag{12}$$

однозначно разрешима и $\exists \, \text{const} \, c_2 > 0$ не зависящая от $h, ||z_h||_h$, такая, что выполняется оценка

$$||v_h - y_h||_h \leqslant c_2 \, ||z_h||_h \tag{13}$$

Другими словами, малые возмущения правой части разностной схемы приводят к равномерно малому по h изменению решения.

Поскольку

$$(5) \Rightarrow y_h = \Lambda_h^{-1}(\phi_h), v_h = \Lambda_h^{-1}(\phi_h + z_h),$$

то условие устойчивости можно записать следующим образом

$$\left|\left|\Lambda_h^{-1}(\phi_h + z_h) - \Lambda_h^{-1}(\phi_h)\right|\right|_h \leqslant c_2 \, ||z_h||_h \tag{14}$$

(14) означает непрерывность обратного оператора Λ_h^{-1} в точке ϕ_h.

Теорема (*Лакса*).

Любая устойчивая разностная схема p-го порядка аппроксимации на решении является схемой p-го порядка сходимости.

Краткий план:

1. пока пусто

25 Интегро-интерполяционный метод

Вывод основных дифференциальных уравнений основан на записи соответствующих законов сохранения для элементарных объёмов и стягивания этих объёмов к нулю. Разностные схемы, выражающие законы сохранения на сетке, нызываются **консервативными**. При этом законы сохранения для всей сетки должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений. Для построения консервативных разностных схем естественно исходить из законов сохранения для отдельных ячеек разностной сетки. Такой метод называется методом балланса или интегрально- интерполяционным методом.

Будем рассматривать этот подход на примере одномерного стационарного уравнения диффузии.

$$\begin{aligned} &-(k(x)u'(x))' = f(x), 0 < x < l \qquad (1)\\ &k(x) \geqslant k_1 > 0, k_1 = \text{const} \end{aligned}$$

В качестве граничных условий на левой границе возьмём условие третьего рода

$$-k(0)u'(0) + \sigma u(0) = g_1 \qquad (2)$$

на правой границе - условие Дирихле.

$$u(l) = g_2 \qquad (3)$$

Введём обозначения

$$q \equiv -k(x)u'(x) \qquad (4)$$

Будем строить разностную схему на равномерной сетке $\overline{\omega_h}$. Проинтегрируем уравнение (1) на отрезке $x_{i-\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant x_{i+\frac{1}{2}}$.

$$q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}} = \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(t)dt \qquad (5)$$

(5) отражает закон сохранения количества тепла для отрезка $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$. Величина $q_{i-\frac{1}{2}}$ даёт количество тепла, вытекшего через сечение $x_{i-\frac{1}{2}}$, а $q_{i+\frac{1}{2}}$ - количество тепла, втекающее через сечение $x_{i+\frac{1}{2}}$. Дисбаланс этих потоков обусловлен распределением источников тепла.

Из определения потока находим

$$u' = -\frac{q}{k} \qquad (6)$$

Интегрируем (6) на $[x_{i-1}, x_i]$

$$u_i - u_{i-1} = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q}{k} dx = -q_{i-\frac{1}{2}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k} \qquad (7)$$

Введём обозначение

$$a_i \equiv \left(\frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k} \right)^{-1} \qquad (8)$$

Из (7), (8)

$$\begin{aligned} &q_{i-\frac{1}{2}} = -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i \cdot u_{\overline{x},i} \\ &q_{i+\frac{1}{2}} = -a_{i+1} u_{x,i} \end{aligned} \qquad (9)$$

Если применим формулу средних прямоугольников, по получим $a_i = k(x_i - \frac{h}{2})$.

Если применим формулу трапеций, то получим $a_i = \frac{1}{2}(k_i + k_{i-1})$. Погрешность аппроксимации: $O(h^2)$.

Подставляем (9) в (5), получим

$$-(a u_{\overline{x}})_x = \phi \tag{10}$$

$$\phi = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f dx \tag{11}$$

На правой границе было условие Дирихле

$$u(l) = g_2 \tag{12}$$

Для аппроксимации значения на левой границе используем интегрально-интерполяционный подход. Интегрируем уравнение (1) на отрезке $\left[0, \dfrac{h}{2}\right]$.

$$q_{\frac{1}{2}} - q_0 = \int\limits_0^{x_{\frac{1}{2}}} f dx \tag{13}$$

$$q_{\frac{1}{2}} = -a_1 u_{x,0} \text{ - аппроксимация в дробном узле} \tag{14}$$

$$(2) \Rightarrow q_0 = g_1 - \sigma u_0 \tag{15}$$

В итоге получаем следующую разностную аппроксимацию граничных условий (2)

$$-a_1 u_{x,0} + \sigma u_0 = g_1 + \frac{h}{2}\phi_0 \tag{16}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{h}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} f dx \tag{17}$$

Аналогично строится ϕ на правой границе (там будут заданы условия второго или третьего рода).

Краткий план:

1. пока пусто

26 Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации

Если коэффициенты и решение дифференциальной азадчи являются достаточно гладкими функциями, то можно строить разностные схемы повышенного порядка аппроксимации

$$Lu = -u''(x) = f(x) \tag{1}$$

Первая возможность построения разностной схемы повышенного порядка связана с использванием расширенного шаблона. Например, вместо минимального трёхточечного шаблона можно использовать пятиточечный шаблон следующего вида

$$\Lambda_u = -\frac{1}{12h^2}\left(-u_{i-2} + 15u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}\right) \tag{2}$$

$$\psi = Lu - \Lambda u = O(h^4) \tag{3}$$

Вторая возможность потсроения разностной схемы повышенного порядка аппроксимации: можно получить без расширения шаблона засчёт использования компактных аппроксимаций

$$u_{\overline{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) \tag{4}$$

$$u_{\overline{x}x} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = u'' + O(h^2) \tag{5}$$

$$(4), (5) \Rightarrow u_{\overline{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u''_{xx} + O(h^4) \tag{6}$$

$$\Delta u_i \equiv u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \tag{7}$$

$$(6), (7) \Rightarrow \frac{\Delta u_i}{h^2} = \left(1 + \frac{\Delta}{12}\right) u''_i \tag{8}$$

$$u''_i = \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{\Delta}{12}\right)^{-1} \Delta u_i \tag{9}$$

Формула (9) представляет собой неявную аппроксимацию второй производной. Формулу (8) можно записать в виде

$$\Lambda u = -u_{\overline{x}x}, \phi = \frac{1}{12}\left(f(x_i - h) + 10f(x_i) + f(x_i + h)\right) \tag{10}$$

TODO: Способ повышения порядка аппроксимации на решении исходного ду.

Краткий план:

1. пока пусто

27 Разностные схемы для уравнения Пуассона

Будем рассматривать задачу Дирихле для двумерного уравнения диффузии

$$Lu = f(x), x = (x_1, x_2) \in \Omega \tag{1}$$
$$u(x) = -g(x), x \in \sigma\Omega \tag{2}$$
$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u, L_\alpha u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \tag{3}$$

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

Поставим в соответствие разностную схему

$$\Lambda y = \phi(x), x \in \omega, \omega \text{ - множество узлов} \tag{4}$$
$$y(x) = g(x), x \in \sigma\Omega \tag{5}$$
$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \Lambda_\alpha y, \Lambda_\alpha y = -(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})x_\alpha \tag{6}$$
$$\overline{\omega} = \left\{x | x = x_{ij} = (ih_1, jh_2), i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, h_1 N_1 = l_1, h_2 N_2 = l_2\right\}$$

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= k(x_1 - 0.5h_1, x_2) \\ a_2(x_1, x_2) &= k(x_1, x_2 - 0.5h_2) \end{aligned} \tag{7}$$

Если коэффициенты $k(x)$ и решение задачи (1) - (2) являются гладкими функциями, то схема (4) - (6) имеет второй порядок аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Рассмотрим оператор Lu в (1), который содержит смешанные производные

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} L_{\alpha\beta} u, \quad L_{\alpha\beta} u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) \tag{8}$$

$$\Lambda y = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \Lambda_{\alpha\beta} y$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} y = -\frac{1}{2}((k_{\alpha\beta y_{\overline{x}\beta}})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x\beta})_{\overline{x}_\alpha}) \tag{9}$$
$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\alpha\beta}^- + \Lambda_{\alpha\beta}^+\right); \Lambda_{\alpha\beta}^- = -(k_{\alpha\beta y_{\overline{x}\beta}})_{x_\alpha}, \Lambda_{\alpha\beta}^+ = (k_{\alpha\beta} y_{x\beta})_{\overline{x}_\alpha}) \tag{10}$$

$\Lambda_{\alpha\beta}^- + \Lambda_{\alpha\beta}^+$ имеют первый порядок аппроксимации.

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} y &= -\frac{1}{2}((k_{11} y_{\overline{x_1}})_{x_1} + (k_{11} y_{x_1})_{\overline{x_1}}) = -(a_{11} y_{\overline{x_1}})_{x_1} \\ \Lambda_2 y &= -\frac{1}{2}((k_2 y_{\overline{x_2}})_{x_2} + (k_{22} y_{x_2})_{\overline{x_2}}) = -(a_{22} y_{\overline{x_2}})_{x_2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$a_{11}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(k_{11}(x_1-h_1,x_2)+k_{11}(x_1,x_2))$$
$$a_{22}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(k_{22}(x_1,x_2-h_2)+k_{22}(x_1,x_2)) \tag{12}$$

$$\Lambda_{\alpha\alpha}u - L_{\alpha\alpha}u = O(|h|^2) = O(h_1^2+h_2^2) = O(h^2) \text{ - погрешность}$$

С разными индексами:

$$\Lambda_{12}^{-}y = -(k_{12}y_{\overline{x_2}})_{x_1} \tag{13}$$
$$u_{\overline{x_2}} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O(h_2^2) \text{ - левая разностная производная} \tag{14}$$
$$\delta_{x_1} = \frac{\partial \delta}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial x_1^2} + O(h_1^2) \text{ - правая разностная производная} \tag{15}$$

В качестве $\delta = k_{12}u_{\overline{x_2}}$. Подставим (14) в (15)

$$\Lambda_{12}^{-}u = L_{12}u + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}L)12u - \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}L_{12}u + O(h^2) \tag{16}$$
$$\Lambda_{12}^{+}u = L_{12}u - \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}L)12u + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}L_{12}u + O(h^2) \tag{17}$$
$$(16),(17) \Rightarrow \Lambda_{12} - L_{12}u = O(h^2) \tag{18}$$

Замечание.

Можно использовать другой семиточечный шаблон

$$\Lambda_{\alpha\beta}y = -\frac{1}{2}((k_{\alpha\beta y_{x\beta}})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\overline{x}\beta})_{\overline{x}_\alpha})$$

Рассмотрим оператор Λ, когда $k(x) = 1$:

$$\Lambda u = Lu - \frac{h_1^2}{12}L_1^2u - \frac{h_2^2}{12}L_2^2u + O(h^2) \tag{19}$$
$$L_1^2u = L_1f - L_1L_2u; \qquad L_2^2u = L_2f - L_1L_2u \tag{20}$$

Подставляем (20) в (19), получаем

$$\Lambda u = Lu - \frac{h_1^2}{12}L_1f - \frac{h_2^2}{12}L_2f + \frac{1}{12}(h_1^2+h_2^2)L_1L_2u + O(h^4) \tag{21}$$

Заменяя L_1L_2u разностным выражением получаем

$$L_1L_2u \approx \Lambda_1\Lambda_2u = u_{\overline{x_1}x_1\overline{x_2}x_2} \tag{22}$$
$$\Lambda_1y + \Lambda_2y - \frac{1}{12}(h_1^2+h_2^2)\Lambda_1\Lambda_2y = \phi(x) \tag{23}$$
$$\phi(x) = f(x) + \frac{1}{12}h_1^2f_{\overline{x_1}x_1} + \frac{1}{12}h_2^2f_{\overline{x_2}x_2} \tag{24}$$

(23), (24) аппроксимирует уравнение Пуассона на решении с четвёртым порядком аппроксимации. $u \in C^6(\Omega)$, $f \in C^4(\Omega)$ - гладкие функции.

Краткий план:

1. пока пусто

28 Аппроксимация краевых условий 2-го и 3-го рода

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

29 Монотонные разностные схемы

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

30 Явная левостороняя схема для уравнения переноса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

31 Неявная левостороняя схема для уравнения переноса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

32 Начальная краевая задача для уравнения переноса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

33 Явная схема для уравнения теплопроводности

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

34 Шеститочечная схема для уравнения теплопроводности

Замечания:

1. пока пусто