

# Ответы к экзамену по курсу “Методы Численного анализа”

(1-ый семестр 2016/2017 учебного года, специальность “Информатика”)

## Содержание

1	Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности	3
2	Оценка погрешности на равномерной сетке узлов	4
3	Разделённые разности и их свойства	5
4	Интерполяционный многочлен Ньютона	6
5	Конечные разности и их свойства	7
6	Интерполяционный многочлен Ньютона на равномерной сетке узлов	8
7	Многочлен Чебышева	9
8	Минимизация остатка интерполирования	10
9	Интерполирование с кратными узлами	11
10	Интерполяционный сплайн второго порядка	12
11	Интерполяционный кубический сплайн	13
12	Наилучшее приближение в линейном векторном пространстве	14
13	Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве	15
14	Метод наименьших квадратов	16
15	Метод Пикара и метод рядов Тейлора	17
	15.1 Метод Пикара . . . . .	17
	15.2 Метод рядов Тейлора . . . . .	18
16	Методы Эйлера, трапеций, средней точки	19
17	Сходимость явного метода Эйлера	21
18	Методы последовательного повышения порядка точности	23
19	Методы Рунге-Кутты	25
20	Экстраполяционные методы Адамса	27
21	Интерполяционные методы Адамса	29
22	Устойчивость линейных многошаговых методов	30
23	Простейшие разностные операторы	31
24	Основные понятия теории разностных схем	33
25	Интегро-интерполяционный метод	34
26	Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации	35
27	Разностные схемы для уравнения Пуассона	36
28	Аппроксимация краевых условий 2-го и 3-го рода	37
29	Монотонные разностные схемы	38

<b>30 Явная левосторонняя схема для уравнения переноса</b>	<b>39</b>
<b>31 Неявная левосторонняя схема для уравнения переноса</b>	<b>40</b>
<b>32 Начальная краевая задача для уравнения переноса</b>	<b>41</b>
<b>33 Явная схема для уравнения теплопроводности</b>	<b>42</b>
<b>34 Шеститочечная схема для уравнения теплопроводности</b>	<b>43</b>

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **1 Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **2 Оценка погрешности на равномерной сетке узлов**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

### **3 Разделённые разности и их свойства**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **4 Интерполяционный многочлен Ньютона**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **5 Конечные разности и их свойства**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **6 Интерполяционный многочлен Ньютона на равномерной сетке узлов**

**Замечания:**

1. пока пусто



**Краткий план:**

1. пока пусто

## **7 Многочлен Чебышева**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **8 Минимизация остатка интерполирования**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **9 Интерполирование с кратными узлами**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **10 Интерполяционный сплайн второго порядка**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **11 Интерполяционный кубический сплайн**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **12    Наилучшее приближение в линейном векторном пространстве**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **13    Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве**

**Замечания:**

1. пока пусто

## Краткий план:

1. пока пусто

## 14 Метод наименьших квадратов

Если функция  $f(x)$  задана на конечном множестве узлов  $x_j$ , другими словами,  $f(x)$  - сеточная функция, то скалярное произведение определяется не интегралом, а суммой:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^m \rho_i f_i g_i, f_i = f(x_i), \quad (1)$$

$\rho_i > 0$  – весовые коэффициенты.

Будем рассматривать полиномиальную аппроксимацию многочлена. Тогда базисные функции -

$$g_k(x) = x^k, k = \overline{0, n} \quad (2)$$

Если значения  $f$  задаются в  $(n + 1)$  разных точках, то существует единственный интерполяционный полином степени не выше  $n$ .

Во многих случаях значения  $f$  находят в результате измерений и содержат ошибки. При этом число измерений проводят гораздо большее число раз, чем  $(n + 1)$ , надеясь при этом в результате измерения уменьшить эти ошибки.

Обычно в качестве такого метода усреднения выбирают метод наименьших квадратов.

Для базиса из полиномов (2) система определяет элемент наилучшего определения.

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i (g_i, g_j) = (f, g_j) \quad (3)$$

Имеет следующий вид:  $[(g_0, g_0) = (1, 1) = m]$ .

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_i \\ \sum x_i f_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n f_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

Уравнения в (4) называются нормальными.

$$\phi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n.$$

На практике, когда  $n \geq 5$  нормальные уравнения обычно становятся плохо обусловленными. Решить эту проблему можно с помощью ортогональных полиномов.

Будем говорить, что полиномы  $g_j$ , где  $j$  - степень полинома, образуют на множестве точек  $x_1, \dots, x_m$  ортогональную систему, если

$$(g_k, g_j) = \sum_{i=1}^m g_k(x_i) g_j(x_i) = 0, \forall k \neq j, k, j = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Тогда система (3) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^m g_k^2(x_i) \alpha_k = \sum_{i=1}^m g_k(x_i) f_i, k = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Из (6)

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^m g_k(x_i) f_i}{\sum_{i=1}^m g_k^2(x_i)} \quad (7)$$

Для полинома Чебышева:  $T_p = 1, T_1 = x, \dots, T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$  - частный случай ортогональных полиномов с  $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Элемент наилучшего приближения

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k g_k(x) \quad (8)$$

Геометрический смысл - проекция.



## Краткий план:

1. пока пусто

# 15 Метод Пикара и метод рядов Тейлора

## 15.1 Метод Пикара

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), u = u(x), x \in [x_0, x_l] \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

Проинтегрируем уравнение (1)

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \quad (2)$$

$y$  - приближённое решение,  $s$  - номер итерации.

$$\begin{cases} y_s(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{s-1}(t)) dt \\ y_0(t) = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

Этот метод удобен, если интеграл можно вычислить аналитически. Докажем сходимость метода Пикара.

Пусть в некоторой ограниченной области  $G$  функция  $f(x, u)$  непрерывная и удовлетворяет условию Лившица по переменной  $u$ :

$$|f(x_1, u_1) - f(x_1, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad (4)$$

$$\begin{cases} |x - x_0| \leq E, \forall x \in G \\ |u - u_0| \leq V, E, V - \text{const} \end{cases} \quad (5)$$

(5) - условия ограниченности, выполняются в силу ограниченности области  $G$ .

$$(2), (3) \Rightarrow |y_s(x) - u(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{s-1}(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \right| \quad (6)$$

$$|y_s(x) - u(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{s-1}(t)) - f(t, u(t))| dt \quad (7)$$

Обозначим  $z_s(x) = y_s(x) - u(x)$  - погрешность в точке  $x$ .

$$|z_s(x)| \leq L \int_{x_0}^x |z_{s-1}(t)| dt \quad (8)$$

Если  $s = 0$ , то

$|z_0(x)| = |u_0 - u(x)| \leq V$  - погрешность начального приближения.

$$|z_1(x)| \leq LV |x - x_0|$$

$$|z_2(x)| \leq \frac{1}{2} L^2 V |(x - x_0)^2| \quad (9)$$

...

$$|z_s(x)| \leq \frac{1}{s!} L^s V |(x - x_0)^s|$$

Формула Стирлинга:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} (1 + \varepsilon_n), \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$
$$(9) \Leftrightarrow |z_s(x)| \leq \frac{1}{s!} L^s V E^s \quad (10)$$

Используя формулу Стирлинга

$$|z_s(x)| \leq \frac{v}{\sqrt{2\pi s}} \left( \frac{eEL}{s} \right)^s \quad (11)$$

(11)  $\Rightarrow |z_s(x)| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$  итерационный процесс сходится.

## 15.2 Метод рядов Тейлора

Рассмотрим

$$\begin{cases} u' = f(x, u), x \in [x_0, x_l] \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

Продифференцируем (1) по  $x$ :

$$\begin{aligned} u'' &= f_x + f_u \cdot u' = f_x + f \cdot f_u \\ u''' &= f_{xx} + 2f_{xu}u' + f_{uu}u'^2 + f_u u'' \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

Подставим в формулу (2) в качестве  $x = x_0, u = u_0$ , последовательно находим значения  $u'(x_0), u''(x_0), u'''(x_0)$  и т. д. Получаем ряд Тейлора:

$$u(x) \approx y_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{u^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \quad (3)$$

Если  $|x - x_0|$  не превышает радиуса сходимости ряда Тейлора, то приближенное решение  $y_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ .

Иногда полезно разбить исходный отрезок  $[x_0, x_l]$  на  $N$  частей  $[x_{j-1}, x_j], j = \overline{1, N}, x_N = x_l$ . Отрезки не обязательно равные. На каждом отрезке применим метод рядов Тейлора для более точного решения.

Рассмотрим произвольный отрезок  $[x_j, x_{j+1}]$ . Будем считать, что  $y_j$  найдено. Значит, мы можем найти  $u^{(i)}(x_j)$ . Тогда применяя метод рядов, можно приблизить на этом отрезке

$$\begin{aligned} u(x) &\approx v_j(x) = \sum_{i=0}^n \frac{u_j^{(i)}}{i!} (x - x_j)^i \\ y_{j+1} &= v_j(x_{j+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

При использовании метода рядов необходимо находить значения  $\approx \frac{n(n+1)}{2}$  различных функций, поэтому на практике обычно ограничиваются первым и вторым порядком точности (2-3 производные).

## Краткий план:

1. пока пусто

## 16 Методы Эйлера, трапеций, средней точки

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Проинтегрируем (1) на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$ ,  $x_{n+1} - x_n = h$ .

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t)) dt, u_n \equiv u(x_n) \quad (2)$$

Используем для вычисления интеграла в формуле (2) правило левых прямоугольников

$$\int_A^B f dx \approx f(A)(B - A)$$

$$u_{n+1} = u_n + hf_n + R_2(f) \quad (3)$$

Отбрасывая в (3)  $R_2(f)$ , получаем **явную формулу Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hf_n \quad (4)$$

Если для вычисления интеграла в формуле (2) применить формулу правых прямоугольников

$$\int_A^B f dx \approx f(B)(B - A)$$

получим **неявную формулу Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + hf_{n+1} \quad (5)$$

В общем случае неявный метод Эйлера представляет собой неявное уравнение относительно искомого значения  $y_{n+1}$ . Для решения неявного уравнения можно использовать итерационный метод (например метод простой итерации).

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^k), k = 0, 1, \dots; n = \overline{0, N-1}. \quad (6)$$

Чтобы итерационный метод сходил, достаточно потребовать, чтобы

$$h \left| \frac{\delta f}{\delta y_{n+1}} \right| < 1, \forall n \quad (7)$$

В качестве нулевого приближения возьмём:

1.  $y_{n+1}^0 = y_n$
2.  $y_{n+1}^0 = y_n + hf_n$

Локальная погрешность явного и неявного метода Эйлера (это погрешность нахождения  $u(x+h)$  при известном значении  $u(x)$ ) имеет порядок  $O(h^2)$ .

Рассмотрим для неявного метода Эйлера:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= u(x_n + h) - u(x_n) - hf(x_n + h, u(x_n + h)) = \\ &= u_n + hu'_n + \frac{h^2}{2}u''_n + O(h^3) - u_n - h(u'_n + hu''_n + O(h^2)) = \\ &= -\frac{h^2}{2}u''_n + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Неявный метод Эйлера сложнее в реализации, но имеет значительное преимущество перед явным за счёт своей устойчивости.

Если интеграл в правой части вычислить по формуле трапеций, то получим:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \\ y_0 = u_0, n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad r_{n+1} = O(h^3) \quad (9)$$

Применим для вычисления (2) правило средних прямоугольников (формулу средней точки)

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+\frac{1}{2}}; y_0 = u_0, n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Чтобы вычислить  $f_{n+\frac{1}{2}}$  необходимо знать значение  $y_{n+\frac{1}{2}}$ . Способы вычисления:

$$y_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \quad (11)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f_n \quad (12)$$

Если применять (10) и (11), то получим

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right) \quad (13)$$

Если применять (10) и (12), то получим

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}f_n\right) \quad (14)$$

## Краткий план:

1. пока пусто

## 17 Сходимость явного метода Эйлера

При использовании приближённых методом основным является вопрос о сходимости. Сформулируем понятие сходимости, когда  $h \rightarrow 0$ . Зафиксируем некоторую точку  $x$  и будем строить последовательность сеток  $\omega_h$  таких, что  $h \rightarrow 0, x_n = x_0 + nh = x$ .

**Определение:** Говорят, что метода сходится в точке  $x$ , если разностное решение  $|y_n(x) - u(x)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

**Определение:** Метод сходится на отрезке  $[x_0, x]$ , если он сходится в каждой точке этого отрезка.

**Определение:** Говорят, что метод имеет порядок точности  $p > 0$ , если  $|y_n(x) - u(x)| = O(h^p), h > 0$ .

Исследуем сходимость явного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \quad (1)$$

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n), \quad (2)$$

$$x_n < \xi_n < x_{n+1}, u(x) \in C^2[x_0, x] \\ u' = f(x, u) \quad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow u(x_{n+1}) = u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n) \quad (4)$$

$$u(x_{n+1}) - y_{n+1} = u(x_n) - y_n + h(f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, y_n)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n) \quad (5)$$

Введём обозначение погрешности в  $n$ -ой точке

$$E_n = u(x_n) - y_n \quad (6)$$

Будем полагать, что функция  $f$  удовлетворяет условию Лившица с  $\text{const } L$  по второму аргумент, тогда (5)  $\Rightarrow$

$$|E_{n+1}| \leq |E_n| + hL(|u(x_n) - y_n|) + \frac{h^2}{2}|u''(\xi_n)|. \quad (7)$$

**Определение:**  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |u''(x)|$

$$|E_{n+1}| \leq |E_n|(1 + hL) + \frac{h^2}{2}M_2, n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Слагаемое  $\frac{h^2}{2}M_2$  - оценка локальной погрешности метода, которая возникает на очередном шаге.

Для оценки погрешности  $E_n$  рассмотрим обобщение неравенства (8). Будем полагать, что  $\exists \delta > 0, M > 0$ , такие, что последовательность  $d_0, d_1, \dots$  удовлетворяет неравенству

$$d_{n+1} \leq (1 + \delta)d_n + M, n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_1 &\leq (1 + \delta)d_0 + M \\ d_2 &\leq (1 + \delta)d_1 + M \leq (1 + \delta)^2d_0 + M(1 + (1 + \delta)) \\ &\dots \\ d_n &\leq (1 + \delta)^n + M(1 + (1 + \delta) + \dots + (1 + \delta)^{n-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$d_n \leq (1 + \delta)^n d_0 + M \frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} \quad (11)$$

Из разложения экспоненты:

$$e^\delta = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2}e^\xi, 0 < \xi < \delta \Rightarrow 1 + \delta \leq e^\delta \quad (12)$$

$$(1 + \delta)^n \leq e^{n\delta} \quad (13)$$

Подставим (13) в (11) и получим оценку:

$$d_n \leq e^{n\delta} d_0 + M \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \quad (14)$$

Применим неравенство (14) к формуле (8)

$$|E_n| \leq e^{nhL} |E_0| + \frac{hM_2}{2L} (e^{nhL} - 1) \quad (15)$$

$$nh = x_n - a, E_0 = u_0 - y_0 = 0$$

$$|u(x_n) - y_n| \leq \frac{hM_2}{2L} (e^{L(b-a)} - 1) \quad (16)$$

$$\max_h |u(x_n) - y_n| \leq \frac{hM_2}{2L} (e^{L(b-a)} - 1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (17)$$

В общем случае следует учитывать погрешность округления. На практике, когда вычисляется  $f(x_n, y_n)$ , на самом деле мы находим  $f(x_n, y_n) + \varepsilon_n$ . Кроме этого, когда по формуле Эйлера мы находим

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + \varepsilon_n) + \rho_n \quad (18)$$

появляется погрешность  $\rho_n$ .

Будем полагать, что  $|\rho_n| \leq \rho, |\varepsilon_n| \leq \varepsilon, \forall h \leq h_0$ . Тогда формулу (17) надо изменить следующим образом

$$\max_h |u(x_n) - y_n| \leq \frac{1}{L} (e^{L(b-a)} - 1) \left( \frac{hM_2}{2} + \varepsilon + \frac{\rho}{h} \right) \quad (19)$$

Из оценки (19) следует, что повышать точность за счёт уменьшения шага  $h$  можно только до некоторого предела, за которым погрешность округления будет доминировать.

## Краткий план:

1. пока пусто

## 18 Методы последовательного повышения порядка точности

Будем рассматривать уравнение  $u' = f(x, y)$ . Проинтегрируем на  $[x_n, x_{n+1}]$

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) d\alpha \quad (1)$$

Заменяем  $t = x_n + \alpha h$ . Заменяем в (1) интеграл квадратурной суммой общего вида, получим

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^q A_i f(x_n + \alpha_i h, y(x_n + \alpha_i h)) \quad (2)$$

Получим 2 набора параметров  $A_i$  и  $\alpha_i, i = \overline{0, q}$ . В (2)  $2q + 2$  параметров.

Параметры  $A_i$  и  $\alpha_i$  выбираем так, чтобы квадратурная формула, которую мы использовали

$$\int_0^1 f_{n+\alpha} d\alpha \approx \sum_{i=0}^q A_i f_{n+\alpha_i}, \quad (3)$$

была точна для всех полиномов степени  $k - 1$ , где  $0 < k \leq 2q + 2$ .

В результате получим систему из  $k$  уравнений, в которые входят  $2q + 2$  неизвестных параметров.

$$\sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0, k-1} \quad (4)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$f_{n+\alpha}^{[m]} = f(x_n + \alpha h, y^{[m]}(x_n + \alpha h)),$$

где  $y_{n+\alpha}^{[m]}$  - приближённое решение в точке  $x_n + \alpha h$  с погрешностью  $O(h^m)$ .

Систему (4) можно получить также из требования, чтобы разложить в ряд Тейлора по степеням  $h$

$$u(x_n + h) - u(x_n) \approx h \sum_{i=0}^q A_i u'(x_n + \alpha_i h) \quad (5)$$

совпадающее до членов при  $h^k$  включительно. При этом локальная погрешность

$$\psi_{n+1} = u_{n+1} - u_n - h \sum_{i=0}^q A_i f_{n+\alpha_i} \quad (6)$$

будет иметь вид

$$\psi_{n+1} = h^{k+1} u_n^{(k+1)} \left[ \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^q A_i \alpha_i^k \right] + O(h^{k+2}) \quad (7)$$

Поскольку весовая функция в формуле (3) в среднем равна 1, то квадратурная формула может быть построена единственным образом с НАСТ  $= 2q + 1, \forall q \geq 0$ , то когда  $k = 2q + 2$ , то система (4) имеет единственное решение, причём  $0 \leq A_i \leq 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = \overline{0, q}$ .

Для определения неизвестных величин  $y_{n+\alpha_i}$  в (2) можно строить аналогичные методы

$$y_{n+\alpha_i}^{[k]} = y_n + \alpha_i h \sum_{j=0}^{q_1} B_j f_n + \alpha_i \beta_j, q_1 \leq q \quad (8)$$

Значение  $y_{n+\alpha_i \beta_j}$  также определяется по аналогичным формулам с погрешностью  $O(h^{k-1})$ . Неизвестные параметры  $\beta_j, B_j$  будут определяться из систем, аналогичных (4). С каждым шагом порядок точности будет понижаться, т.е.  $q \geq q_1 \geq \dots \geq 1$ .

$$\sum_{i=0}^{q_1} B_i \beta_i^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0, k-2} \quad (9)$$

Завершать данную схему будут явные формулы Эйлера

$$y_{n+\alpha_i\beta_j\cdots\gamma_m}^{[2]} = y_n^{[k+1]} + \alpha_i\beta_j\cdots\gamma_m hf_n^{[k+1]} \quad (10)$$

Построим в качестве примера метод второго порядка точности, т.е.  $k = 2$ . Если взять  $q = 0$ , то система (4) имеет единственное решение  $A_0 = 1, \alpha_0 = \frac{1}{2}$ . Получаем формулу

$$y_{n+1}^{[3]} = y_n^{[3]} + hf_{n+\frac{1}{2}}^{[2]} \quad (11)$$

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n^{[3]} + \frac{h}{2}f_n^{[3]} \quad (12)$$

$$(13)$$



## Краткий план:

1. пока пусто

## 19 Методы Рунге-Кутты

Исходное уравнение  $u' = f(x, u)$ . Интегрируем на отрезке  $[x_n, x_n + h]$ .

$$u_{n+1} = u_n + h \int_0^1 f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) d\alpha \quad (1)$$

Для вычисления интеграла предлагается использование следующего набора параметров

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_0 & & & & & \\ A_1 & \alpha_1 & \beta_{10} & & & \\ A_2 & \alpha_2 & \beta_{20} & \beta_{21} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_q & \alpha_q & \beta_{q0} & \beta_{q1} & \dots & \beta_{qq-1} \end{array}$$

При помощи параметров  $\alpha$  и  $\beta$  последовательно находим

$$\begin{aligned} \phi_0 &= hf(x_n, y_n) \\ \phi_1 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_{10} \phi_0) \\ &\dots \\ \phi_q &= hf(x_n + \alpha_q h, y_n + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_{qj} \phi_j) \end{aligned} \quad (2)$$

Параметры  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_q$  находятся последовательно. После этого интеграл в (1) заменяется на  $\sum_{i=0}^q A_i \phi_i$ . В результате получим формулу

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^q A_i \phi_i \quad (3)$$

Неизвестные параметры  $A, \alpha, \beta$  выбираются таким образом, чтобы при заданном значении  $q$  построить метод максимально высокого порядка точности.

**Определение:** Формулы (2), (3) - метод Рунге-Кутты.

Локальная погрешность

$$r_q(h) = u(x_n + h) - u(x_n) - \sum_{i=0}^q A_i \phi_i \quad (4)$$

Считая функцию  $f$  достаточно гладкой, запишем разложение в ряд Тейлора

$$r_q(h) = \sum_{j=0}^k \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)}(0) + O(h^{k+1}) \quad (5)$$

Если параметры  $A, \alpha, \beta$  выбрать таким образом, чтобы производные

$$r_q^{(j)} = 0, \forall j = \overline{0, k} \quad (6)$$

то метод будет иметь  $k$ -ый порядок погрешности.

**Примеры:**

1.  $q = 0$ .

$$\begin{aligned} r_0(h) &= u(x_n + h) - u(x_n) - h A_0 f_n \\ r'_0(h) &= u'(x_n + h) - A_0 f_n \\ r''_0(h) &= u''(x_n + h) \end{aligned}$$

Условие (6) выполняется, когда  $A_0 = 1, j = \overline{0, 1}$ .

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f_n \\ u'(x_n) &= f_n \end{aligned}$$

В итоге приходим к формуле явного метода Эйлера - метода первого порядка точности.

2.  $q = 1$ .

$$u_{n+1} - u_n = hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + f f_u)_n + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2ff_{xu} + f^2 f_{uu} + f(f_x + f f_u))_n + O(h^4) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A_0 \phi_0 + A_1 \phi_1 &= h(A_0 f_n + A_1 f(x_n + \alpha_1 h, u + h\beta_{10} f_n)) = \\ &= h(A_0 + A_1)f_n + h^2 A_1(\alpha_1 f_x + \beta_{10} f f_u)_n + \frac{h^3}{2} A_1(\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1 \beta_{10} f f_{xu} + \beta_{10}^2 f^2 f_{uu}) + O(h^4) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} hf : \quad A_0 + A_1 &= 1 \\ h^2 f_x : \quad A_1 \alpha_1 &= \frac{1}{2} \\ h^2 f f_u : \quad A_1 \beta_{10} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

При выполнении условий (9) нельзя добиться совпадения коэффициентов (7) и (8) формулы при  $h^3$ . Поэтому при  $q = 1$  метод Рунге-Кутты имеет второй порядок точности

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2A_1} \\ A_0 = 1 - A_1 \end{cases} \quad (10)$$

Формула (10) даёт семейство методов Рунге-Кутты второго порядка точности, где  $A_1$  - свободный параметр. Возьмём  $A_1 = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{\phi_0 + \phi_1}{2} \\ \phi_1 = hf(x_n + h, y_n + \phi_0) \\ \phi_0 = hf_n \end{cases} \quad (11)$$

Если  $A_1 = 1$ .

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \phi_1 \\ \phi_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\phi_0}{2}\right) \\ \phi_0 = hf_n \end{cases} \quad (12)$$

## Краткий план:

1. пока пусто

## 20 Экстраполяционные методы Адамса

Данный метод относится к многошаговым, которые имеют следующий вид

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^q A_i f_{n-i} \quad (1)$$

Неизвестные параметры  $A_i$  можно определить также, как и при построении методов последовательного повышения порядка точности, т.е. из системы

$$\sum_{i=0}^q A_i (-i)^j = \frac{1}{j+1}, j = \overline{0, q} \quad (2)$$

Система (2) имеет единственное решение.

Погрешность явного метода Адамса можно также получить из формулы для метода последовательного повышения порядка точности

$$r_{n+1} = h^{q+2} u_n^{(q+2)} \left( \frac{1}{(q+2)!} - \frac{1}{(q+1)!} \sum_{i=0}^q A_i (-i)^{q+1} \right) + O(h^{q+3}) = O(h^{q+2}) \quad (3)$$

Параметры  $A_i$  можно построить, не решая систему (2). Рассмотрим интегральное уравнение (получено интегрированием исходного уравнения на  $[0, 1]$ )

$$u_{n+1} = u_n + h \int_0^1 f_{n+\alpha} d\alpha \quad (4)$$

Подинтегральную функцию  $f$  можно заменить интерполяционным полиномом, построенным по точкам  $0, -1, \dots, -q$ . Поскольку узлы интерполирования  $x_n, \dots, x_{n-q}$  (или  $\alpha = 0, -1, \dots, -q$ ) располагаются вне отрезка  $[x_n, x_{n+h}]$ , то такая процедура интерполирования называется **экстраполированием**.

Если интерполяционный полином взять в форме Лагранжа, то коэффициенты  $A_i$  находятся по формуле

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!(q-i)!} \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q)}{\alpha+i} d\alpha, i = \overline{0, q} \quad (5)$$

Для организации счёта по формуле (1) одного известного условия  $y_0 = u_0$  не достаточно. Необходимо также задать значения  $y_1, \dots, y_q$  с той же точностью, которую имеет метод Адамса. Эти начальные значения находят по одношаговым методам (например Рунге-Кутты). Эти одношаговые методы называются стартовыми.

### Примеры:

1.  $q = 0, A_0 = 1$ .

$$y_{n+1} = y_n + h f_n \quad (6)$$

совпадает с явным методом Эйлера.

2.  $q = 1, A_0 + A_1 = 1, A_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{3}{2}$ . Получаем метод Адамса второго порядка точности

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} (3f_n - f_{n-1}) \\ y_0 &= u_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Получился явный двухшаговый метод.  $y_1$  необходимо посчитать по формуле Рунге-Кутты.

Локальная погрешность

$$r_{n+1} = \frac{5}{12} h^3 u_n^{(3)} + O(h^4) = O(h^3)$$

3.  $q = 2$ .

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 + 2A_2 = -\frac{1}{2} A_1 + 4A_2 = -\frac{1}{3} \\ A_0 = \frac{23}{12}, A_1 = -\frac{4}{3}, A_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

$$y_0 = u_0$$
(8)

Получился трёхшаговый метод.

Если подынтегральную функцию в (4) аппроксимировать интерполяционным полиномом в форме Ньютона, то экстраполяционный метод Адамса примет вид

$$y_{n+1} = y_n + \phi_n + \frac{1}{2}\Delta\phi_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\phi_{n-2} + \dots + C_q\Delta^q\phi_{n-q}$$

$$\phi_i = hf_i, C_q = \frac{1}{q!} \int_0^1 \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+q-1) d\alpha$$
(9)

$\Delta$  - оператор конечной разности

$$\Delta\phi_{n-1} = \phi_n - \phi_{n-1}$$

Погрешность

$$r_{n+1} = h^{q+2} u_n^{(q+2)} C_{q+1} + O(h^{q+3}) = O(h^{q+2})$$
(10)

## Краткий план:

1. пока пусто

## 21 Интерполяционные методы Адамса

Являются неявными методами и определяются расчётной формулой

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=-1}^q A_i f_{n-i} \quad (1)$$

Параметры  $A_i$  определяются также, как и в методе последовательного повышения порядка точности.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -i, i = \overline{1, q} \\ \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^j &= \frac{1}{j+1}, j = \overline{0, q+1} \end{aligned} \quad (2)$$

Система имеет единственное решение при  $q \geq -1$ .

Параметры  $A_i$  можно найти, используя интерполяционный полином Лагранжа, который строится по значениям функции  $f$  в узлах

$$\begin{aligned} x &: x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-q} \\ \alpha &: 1, 0, \dots, -q \end{aligned}$$

Получим полином  $(q+1)$ -ой степени, где

$$A_i = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!(q-i)!} \int_0^1 \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+1)}{(\alpha+i)} d\alpha \quad (3)$$

$$r_{n+1} = h^{q+3} u_n^{(q+3)} \left( \frac{1}{(q+3)!} - \frac{1}{(q+2)!} \sum_{i=-1}^q A_i (-i)^{q+2} \right) + O(h^{q+4}) = O(h^{q+3}) \quad (4)$$

Т.е. метод имеет порядок точности  $(q+2)$ .

### Примеры:

1.  $q = -1$ .

$$y_{n+1} = y_n + h f_{n+1} \text{ совпадает с неявным методом Эйлера} \quad (5)$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{2} h^2 u_n'' + O(h^3) = O(h^2)$$

Для случая, когда сетка равномерная, можно подынтегральную функцию заменить интерполяционным полиномом Ньютона.

2.  $q = 0$ .

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n) - \text{формула трапеций} \quad (6)$$

$$r_{n+1} = -\frac{1}{12} h^3 u_n^{(3)} + O(h^4) = O(h^3)$$

В общем виде:

$$y_{n+1} = y_n + \phi_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \phi_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \phi_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \phi_{n-2} - \dots - C_{q+1} \Delta^{q+1} \phi_{n-q} \quad (7)$$

$$\phi_i = h f_i, C_{q+1} = \frac{1}{(q+1)!} \int_0^1 \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q) d\alpha$$

$$r_{n+1} = h^{q+3} u_n^{(q+3)} C_{q+2} + O(h^{q+4}) \quad (8)$$

Поскольку отрезок  $[x_n, x_{n+1}]$ , на котором аппроксимируется функция  $f$  входит в отрезок  $[x_{n-q}, x_{n+1}]$ , на котором расположены узлы интерполяции...

Интерполяционные формулы Адамса представляют собой в общем случае неявное уравнение относительно  $y_{n+1}$ . Значение  $y_{n+1}$  находится с помощью некоторого итерационного метода.

В качестве нулевой итерации обычно берут приближённое значение, полученной с помощью экстраполяционного метода Адамса или методом Рунге-Кутты. При этом часто ограничиваются только одной итерацией. В этом случае вычислительный процесс относится к типу **предиктор-корректор**.

## Краткий план:

1. пока пусто

## 22 Устойчивость линейных многошаговых методов

Будем рассматривать задачу Коши

$$\begin{cases} u' = f(x, u), x > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

Возьмём равномерную сетку узлов  $\omega_h = \{x_n = nh, n = 0, 1, \dots\}$ . Будем рассматривать линейный  $m$ -шаговый метод.

$$\begin{aligned} a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} &= h \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k} \\ n &= m, m+1, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты  $a_k, b_k = \text{const}, a_0 \neq 0$ . Для счёта по формуле (2) необходимо задать  $m$  начальных значений  $y_0 = u_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ . Обычно они находятся с помощью одношагового метода Рунге-Кутты того же порядка точности, что и метод (2).

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$\begin{aligned} a_0 \delta_n + a_1 \delta_{n-1} + \dots + a_m \delta_{n-m} &= 0 \\ n &= m, m+1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать частные решения (3) в виде  $\delta_n = q^n, q = \text{const}$ , тогда для определения постоянной  $q$  получим уравнение

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (4)$$

**Определение:** Уравнение (4) - характеристическое уравнение метода (2).

**Определение:** (2) - линейный двухшаговый метод, удовлетворяет условию корней, если все корни  $q_1, \dots, q_m$  характеристического уравнения (4) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости. Причём на границе этого круга нет кратных корней.

**Определение:** Однородное уравнение (3) устойчиво по начальным данным, если  $\exists \text{const } M > 0$ , независимая от номера узла  $n$ , такая, что при любых начальных данных  $\delta_0, \dots, \delta_{m-1}$  выполняется следующая оценка решения

$$|\delta_n| \leq M \max_{0 \leq i \leq m-1} |\delta_i|, n = m, m+1, \dots \quad (5)$$

Таким образом устойчивость по начальным данным означает равномерную по  $n$  ограниченность решения задачи Коши.

### Теорема.

Условие корней необходимо и достаточно для устойчивости метода (3) по начальным данным.

**Доказательство.** 1.  $\Rightarrow$ . Пусть имеется корень  $|q| > 1$ . Зададим начальные данные  $\delta_i = q^i (i = \overline{0, m-1})$ . Тогда уравнение (3) имеет решение в точке  $\delta_n = q^n (n \geq m)$ , которое неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ . Оценка (5) не выполняется.

Следовательно, условие  $|q_k| \leq 1, k = \overline{1, m}$  - необходимое условие устойчивости. Пусть характеристическое уравнение (4) имеет корень  $q$  с кратностью  $r > 1$ , причём этот корень находится на границе единичного круга на комплексной плоскости  $|q| = 1$ . В этом случае однородное уравнение (3) имеет решение вида

$$\delta_n = q^n \cdot n^{r-1}$$

и оценка (5) снова не выполняется.

2.  $\Leftarrow$ . Без доказательства. □

Можно показать, что если уравнение (3) устойчиво по начальным данным, то для неоднородного случая

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = h g_{n-m}, n = m, m+1, \dots \quad (6)$$

выполняется оценка

$$|y_n| \leq M_1 |y_j| + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h |g_k| \quad (7)$$

которая означает устойчивость (6) по правой части и по начальным данным.

## Краткий план:

1. пока пусто

## 23 Простейшие разностные операторы

Область решения  $\bar{\Omega} = [0, l]$ .

Сетка узлов на этой области

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, n}, hn = l\}$$

Построим аппроксимацию производной

$$Lu = u'$$

Функцию  $u$  будем считать достаточно гладкой:  $u(x) \in C^k(\Omega), k > 2$ . Поставим в соответствие оператору  $Lu$  разностный оператор  $\Lambda_h$ .

**Определение:** Множество узлов сетки, которое используется для построения оператора  $\Lambda_h$  называется **шаблоном**.

**Погрешность аппроксимации** оператора  $Lu$  разностным оператором  $\Lambda_h$  в  $i$ -ом узле определяется как

$$\psi_i = \Lambda_h u_i - (Lu)_i$$

Будем использовать разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_i$ , где

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm hu'_i + \frac{1}{2}h^2u''_i \pm \frac{1}{6}h^3u'''_i + O(h^3)$$

Используя это разложение можно построить разностную схему оператора левой разностной производной:

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u'_i - \frac{h}{2}u''_i + O(h^2) \quad (1)$$

Оператор правой разностной производной

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u'_i + \frac{h}{2}u''_i + O(h^2) \quad (2)$$

Минимальный шаблон - 2 узла.  $u_{\bar{x}, i+1} = u_{x, i}$ . Если будем использовать шаблон из трёх узлов, то можно построить центральную разностную производную

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}(u_{\bar{x}, i} + u_{x, i}) = u'_i + \frac{h^2}{6}u'''_i + O(h^3) \quad (3)$$

Для оператора второй производной можно применить линейную комбинацию левой и правой производной.

$$Lu = u''$$
$$(u_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h}(u_x - u_{\bar{x}}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (4)$$

Погрешность аппроксимации оценивалась в отдельном  $i$ -ом узле. Для оценки на всей сетке  $\omega_h$  необходимо использовать сеточные нормы

$$\|\psi\|_{C, h} = \max_{x \in \omega_h} |\psi(x)|$$
$$\|\psi\|_{2, h} = \left( \sum_{x \in \omega_h} \psi^2(x) h \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

(1) - (4) имеют одинаковый порядок аппроксимации. В общем случае порядок аппроксимации может быть разным в различных сеточных нормах.

В качестве альтернативного подхода можно использовать определение производной как решение интегрального уравнения и применения некоторой квадратурной формулы

$$\frac{d^k u}{dx^k} = f(x)$$
$$u(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} f(t) dt \quad (6)$$

Таким образом, можно определить производную как решение интегрального уравнения (6) при известной функции  $u(x)$ .

**Пример.**  $k = 1$ .

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t) dt \quad (7)$$

Если для вычисления (7) использовать формулу центральных прямоугольников, то получим

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i + O(h^2) \quad (8)$$

Есть и другие варианты построения. Например, строить интерполяционный полином и брать производную. Использование квадратур с многими внутренними узлами приводит к так называемым **компактным разностным операторам**.

Если в формулы (7) вычислять интеграл с использованием трёхточечной формулы Симпсона, то получим

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) + O(h^4). \quad (9)$$

В этом случае без расширения шаблона достигается более высокий порядок аппроксимации, но при этом вычисление связано с обращением трёхдиагональной матрицы.



**Краткий план:**

1. пока пусто

## **24 Основные понятия теории разностных схем**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **25 Интегро-интерполяционный метод**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **26 Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **27 Разностные схемы для уравнения Пуассона**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **28    Аппроксимация краевых условий 2-го и 3-го рода**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **29    Монотонные разностные схемы**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **30 Явная левосторонняя схема для уравнения переноса**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **31 Неявная левосторонняя схема для уравнения переноса**

**Замечания:**

1. пока пусто



**Краткий план:**

1. пока пусто

## **32 Начальная краевая задача для уравнения переноса**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **33 Явная схема для уравнения теплопроводности**

**Замечания:**

1. пока пусто

**Краткий план:**

1. пока пусто

## **34 Шеститочечная схема для уравнения теплопроводности**

**Замечания:**

1. пока пусто