Ответы к экзамену по курсу
“Методы Численного анализа”
(1-ый семестр 2016/2017 учебного года, специальность “Информатика”)

Содержание

Краткий план:

1. пока пусто

1 Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

2 Оценка погрешности на равномерной сетке узлов

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

3 Разделённые разности и их свойства

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

4 Интерполяционный многочлен Ньютона

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

5 Конечные разности и их свойства

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

6 Интерполяционный многочлен Ньютона на равномерной сетке узлов

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

7 Многочлен Чебышева

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

8 Минимизация остатка интерполирования

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

9 Интерполирование с кратными узлами

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

10 Интерполяционный сплайн второго порядка

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

11 Интерполяционный кубический сплайн

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

12 Наилучшее приближение в линейном векторном пространстве

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

13 Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

14 Метод наименьших квадратов

Если функция $f(x)$ задана на конечном множестве узлов x_j, другими словами, $f(x)$ - сеточная функция, то скалярное произведение определяется не интегралом, а суммой:

$$\begin{gathered}(f,g)=\sum_{i=1}^{m}\rho_i f_i g_i, f_i=f(x_i),\\ \rho_i>0-\text{ весовые коэффициенты.}\end{gathered} \tag{1}$$

Будем рассматривать полиномиальную аппроксимацию многочлена. Тогда базисные функции -

$$g_k(x)=x^k, k=\overline{0,n} \tag{2}$$

Если значения f задаются в $(n+1)$ разных точках, то существует единственный интерполяционный полином степени не выше n.

Во многих случаях значения f находят в результате измерений и содержат ошибки. При этом число измерений проводят гораздо большее число раз, чем $(n+1)$, надеясь при этом в результате измерения уменьшить эти ошибки.

Обычно в качестве такого метода усреднения выбирают метод наименьших квадратов.

Для базиса из полиномов (2) система определяет элемент наилучшего определения.

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(g_i,g_j)=(f_i,g_j) \tag{3}$$

Имеет следующий вид: $[(g_0,g_0)=(1,1)=m]$.

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \dots & \sum x_i^{2n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum f_i\\ \sum x_i f_i\\ \vdots\\ \sum x_i^n f_i\end{bmatrix} \tag{4}$$

Уравнения в (4) называются нормальными.

$$\phi=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n.$$

На практике, когда $n\geqslant 5$ нормальные уравнения обычно становятся плохо обусловленными. Решить эту проблему можно с помощью ортогональных полиномов.

Будем говорить, что полиномы g_j, где j - степень полинома, образуют на множестве точек $x_1,\ldots x_m$ ортогональную систему, если

$$(g_k,g_j)=\sum_{i=1}^{m}g_k(x_i)g_j(x_i)=0, \forall k\neq j, k,j=\overline{0,n}. \tag{5}$$

Тогда система (3) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{m}g_k^2(x_i)\alpha_k=\sum_{i=1}^{m}g_k(x_i)f_i, k=\overline{0,n}. \tag{6}$$

Из (6)

$$\alpha_k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}g_k(x_i)f_i}{\sum\limits_{i=1}^{m}g_k^2(x_i)} \tag{7}$$

Для полинома Чебышева: $T_p=1, T_1=x,\ldots.\ T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1}$ - частный случай ортогональных полиномов с $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Элемент наилучшего приближения

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k g_k(x) \tag{8}$$

Геометрический смысл -проекция.

Краткий план:

1. пока пусто

15 Метод Пикара и метод рядов Тейлора

15.1 Метод Пикара

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u), u = u(x), x \in [x_0, x_l] \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Проинтегрируем уравнение (1)

$$u(x) = u(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \tag{2}$$

y - приближённое решение, s - номер итерации.

$$\begin{cases} y_s(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{s-1}(t))dt \\ y_0(t) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

Этот метод удобен, если интеграл можно вычислить аналитически. Докажем сходимость метода Пикара.

Пусть в некоторой ограниченной области G функция $f(x,u)$ непрерывная и удовлетворяет условию Лившица по переменной u:

$$|f(x_1,u_1) - f(x_1,u_2)| \leqslant L\,|u_1 - u_2| \tag{4}$$

$$\begin{cases} |x - x_0| \leqslant E, \forall x \in G \\ |u - u_0| \leqslant V, E, V - \text{const} \end{cases} \tag{5}$$

(5) - условия ограниченности, выполняются в силу ограниченности области G.

$$(2),(3) \Rightarrow |y_s(x) - u(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{s-1}(t))dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \right| \tag{6}$$

$$|y_s(x) - u(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_{s-1}(t)) - f(t, u(t))|\,dt \tag{7}$$

Обозначим $z_s(x) = y_s(x) - u(x)$ - погрешность в точке x.

$$|z_s(x)| \leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} |z_{s-1}(t)|\,dt \tag{8}$$

Если $s = 0$, то

$$\begin{aligned} &|z_0(x)| = |u_0 - u(x)| \leqslant V \text{ - погрешность начального приближения.} \\ &|z_1(x)| \leqslant LV\,|x - x_0| \\ &|z_2(x)| \leqslant \frac{1}{2} L^2 V \left|(x - x_0)^2\right| \\ &\ldots \\ &|z_s(x)| \leqslant \frac{1}{s!} L^s V\,|(x - x_0)^s| \end{aligned} \tag{9}$$

Формула Стирлинга:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1 + \varepsilon_n), \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$(9) \Leftrightarrow |z_s(x)| \leqslant \frac{1}{s!} L^s V E^s \tag{10}$$

Используя формулу Стирлинга

$$|z_s(x)| \leqslant \frac{v}{\sqrt{2\pi s}} \left(\frac{eEL}{s}\right)^s \tag{11}$$

$(11) \Rightarrow |z_s(x)| \xrightarrow[s\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ итерационный процесс сходится.

15.2 Метод рядов Тейлора

Рассмотрим

$$\begin{cases} u' = f(x,u), x \in [x_0, x_l] \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Продифференцируем (1) по x:

$$\begin{aligned} &u'' = f_x + f_u \cdot u' = f_x + f \cdot f_u \\ &u''' = f_{xx} + 2f_{xu}u' + f_{uu}u'^2 + f_u u'' \\ &\dots \end{aligned} \tag{2}$$

Подставим в формулу (2) в качестве $x = x_0, u = u_0$, последовательно находим значения $u'(x_0), u''(x_0), u'''(x_0)$ и т. д. Получаем ряд Тейлора:

$$u(x) \approx y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \tag{3}$$

Если $|x - x_0|$ не превышает радиуса сходимости ряда Тейлора, то приближенное решение $y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x)$.

Иногда полезно разбить исходный отрезок $[x_0, x_l]$ на N частей $[x_{j-1}, x_j], j = \overline{1, N}, x_N = x_l$. Отрезки не обязательно равные. На каждом отрезке применим метод рядов Тейлора для более точного решения.

Рассмотрим произвольный отрезок $[x_j, x_{j+1}]$. Будем считать, что y_j найдено. Значит, мы можем найти $u^{(i)}(x_j)$. Тогда применяя метод рядов, можно приблизить на этом отрезке

$$\begin{aligned} &u(x) \approx v_j(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{u_j^{(i)}}{i!}(x - x_j)^i \\ &y_{j+1} = v_j(x_{j+1}) \end{aligned} \tag{4}$$

При использовании метода рядов необходимо находить значения $\approx \dfrac{n(n+1)}{2}$ различных функций, поэтому на практике обычно ограничиваются первым и вторым порядком точности (2-3 производные).

Краткий план:

1. пока пусто

16 Методы Эйлера, трапеций, средней точки

$$\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Проинтегрируем (1) на отрезке $[x_n, x_{n+1}], x_{n+1} - x_n = h$.

$$u_{n+1} = u_n + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, u(t))dt, u_n \equiv u(x_n) \tag{2}$$

Используем для вычисления интеграла в формуле (2) правило левых прямоугольников

$$\int\limits_A^B f dx \approx f(A)(B-A)$$

$$u_{n+1} = u_n + hf_n + R_2(f) \tag{3}$$

Отбрасывая в (3) $R_2(f)$, получаем **явную фомрулу Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hf_n \tag{4}$$

Если для вычисления интеграла в формуле (2) применить формулу правых прямоугольников

$$\int\limits_A^B f dx \approx f(B)(B-A)$$

получим **неявную формулу Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1, y_{n+1}}) = y_n + hf_{n+1} \tag{5}$$

В общем случае неявный метод Эйлера представляет собой неявное уравнение отностельно искомого значения y_{n+1}. Для решеня неявного уравнения можно использовать итерационный метод (например метод простой итерации).

$$y_{n+1}^{k+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^k), k = 0, 1, \ldots; n = \overline{0, N-1}. \tag{6}$$

Чтобы итерационный метод сходился, достаточно потребовать, чтобы

$$h \left| \frac{\delta f}{\delta y_{n+1}} \right| < 1, \forall n \tag{7}$$

В качестве нулевого приближения возьмём:

1. $y_{n+1}^0 = y_n$
2. $y_{n+1}^0 = y_n + hf_n$

Локальная погрешность явного и неявного метода Эйлера (это погрешность нахождения $u(x+h)$ при известном значении $u(x)$) имеет порядок $O(h^2)$.

Рассмотрим для неявного метода Эйлера:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= u(x_n + h) - u(x_n) - hf(x_n + h, u(x_n + h)) = \\ &= u_n + hu_n' + \frac{h^2}{2}u_n'' + O(h^3) - u_n - h(u_n' + hu_n'' + O(h^2)) = \\ &= -\frac{h^2}{2}u_n'' + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Неявный метод Эйлера сложнее в реализации, но имеет значительное преимущество перед явным за счёт своей устойчивости.

Если интеграл в правой части вычислить по формуле трапеций, то получим:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \\ y_0 = u_0, n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad r_{n+1} = O(h^3) \tag{9}$$

Применим для вычисления (2) правило средних прямоугольников (формулу средней точки)

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+\frac{1}{2}}; y_0 = u_0, n = 0, 1, \dots \tag{10}$$

Чтобы вычислить $f_{n+\frac{1}{2}}$ необходимо знать значение $y_{n+\frac{1}{2}}$. Способы вычисления:

$$y_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}) \tag{11}$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f_n \tag{12}$$

Если применять (10) и (11), то получим

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right) \tag{13}$$

Если применять (10) и (12), то получим

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2} f_n\right) \tag{14}$$

Краткий план:

1. пока пусто

17 Сходимость явного метода Эйлера

При использовании приближённых методом основным является вопрос о сходимости. Сформулируем понятие сходимости, когда $h \to 0$. Зафиксируем некоторую точку x и будем строить последовательность сеток ω_h таких, что $h \to 0, x_n = x_0 + nh = x$.

Определение: Говорят, что методя сходится в точке x, если разностное решение $|y_n(x) - u(x)| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Определение: Метод сходится на отрезке $[x_0, x]$, если он сходится в каждой точке этого отрезка.

Определение: Говорят, что метод имеет порядок точности $p > 0$, если $|y_n(x) - u(x)| = O(h^p), h > 0$.

Исследуем сходимость явного метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \tag{1}$$

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n), \tag{2}$$

$$x_n < \xi_n < x_{n+1}, u(x) \in C^2[x_0, x]$$

$$u' = f(x, u) \tag{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow u(x_{n+1}) = u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n) \tag{4}$$

$$u(x_{n+1}) - y_{n+1} = u(x_n) - y_n + h(f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, y_n)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_n) \tag{5}$$

Введём обозначение погрешности в n-ой точке

$$E_n = u(x_n) - y_n \tag{6}$$

Будем полагать, что функция f удовлетворяет условию Лившица с $\mathrm{const}\, L$ по второму аргумент, тогда (5) $\Rightarrow$

$$|E_{n+1}| \leqslant |E_n| + hL(|u(x_n) - y_n|) + \frac{h^2}{2}\left|u''(\xi_n)\right|. \tag{7}$$

Определение: $M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} |u''(x)|$

$$|E_{n+1}| \leqslant |E_n|(1 + hL) + \frac{h^2}{2}M_2, n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Слагаемое $\frac{h^2}{2}M_2$ - оценка локальной погрешности метода, которая возникает на очередном шаге.

Для оценки погрешности E_n рассмотрим обобщение неравенства (8). Будем полагать, что $\exists \delta > 0, M > 0$, такие, что последовательность $d_0, d_1, \ldots$ удовлетворяет неравенству

$$d_{n+1} \leqslant (1 + \delta)d_n + M, n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Тогда

$$d_1 \leqslant (1 + \delta)d_0 + M$$

$$d_2 \leqslant (1 + \delta)d_1 + M \leqslant (1 + \delta)^2 d_0 + M(1 + (1 + \delta))$$

$$\ldots$$

$$d_n \leqslant (1 + \delta)^n + M(1 + (1 + \delta) + \ldots + (1 + \delta)^{n-1}) \tag{10}$$

$$d_n \leqslant (1 + \delta)^n d_0 + M\frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta} \tag{11}$$

Из разложения экспоненты:

$$e^\delta = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2}e^\xi, 0 < \xi < \delta \Rightarrow 1 + \delta \leqslant e^\delta \tag{12}$$

$$(1 + \delta)^n \leqslant e^{n\delta} \tag{13}$$

Подставим (13) в (11) и получим оценку:

$$d_n \leqslant e^{n\delta}d_0 + M\frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \tag{14}$$

Применим неравенство (14) к формуле (8)

$$|E_n| \leqslant e^{nhL}|E_0| + \frac{hM_2}{2L}\left(e^{nhL} - 1\right) \tag{15}$$

$$nh = x_n - a, E_0 = u_0 - y_0 = 0$$

$$|u(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM_2}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) \tag{16}$$

$$\max_h |u(x_n) - y_n| \leqslant \frac{hM_2}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \tag{17}$$

В общем случае следует учитывать погрешность округления. На практике, когда вычисляется $f(x_n, y_n)$, на самом деле мы находим $f(x_n, y_n) + \varepsilon_n$. Кроме этого, когда по формуле Эйлера мы находим

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + \varepsilon_n) + \rho_n \tag{18}$$

появляется погрешность ρ_n.

Будем полагать, что $|\rho_n| \leqslant \rho, |\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon, \forall h \leqslant h_0$. Тогда формулу (17) надо изменить следующим образом

$$\max_h |u(x_n) - y_n| \leqslant \frac{1}{L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)\left(\frac{hM_2}{2} + \varepsilon + \frac{\rho}{h}\right) \tag{19}$$

Из оценки (19) следует, что повышать точность за счёт уменьшения шага h можно только до некоторого предела, за которым погрешность округления будет доминировать.

Краткий план:

1. пока пусто

18 Методы последовательного повышения порядка точности

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

19 Методы Рунге-Кутта

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

20 Экстраполяционные методы Адамса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

21 Интерполяционные методы Адамса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

22 Усточивость линейных многошаговых методов

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

23 Простейшие разностные операторы

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

24 Основные понятия теории разностных схем

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

25 Интегро-интерполяционный метод

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

26 Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

27 Разностные схемы для уравнения Пуассона

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

28 Аппроксимация краевых условий 2-го и 3-го рода

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

29 Монотонные разностные схемы

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

30 Явная левостороняя схема для уравнения переноса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

31 Неявная левостороняя схема для уравнения переноса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

32 Начальная краевая задача для уравнения переноса

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

33 Явная схема для уравнения теплопроводности

Замечания:

1. пока пусто

Краткий план:

1. пока пусто

34 Шеститочечная схема для уравнения теплопроводности

Замечания:

1. пока пусто