prereq:

def: Случайная величина (СВ) $X = X(\omega), \omega \in \Omega$:

the **value** of the random variable. Mathematically, **a random variable is a real-valued function of the experimental outcome.**

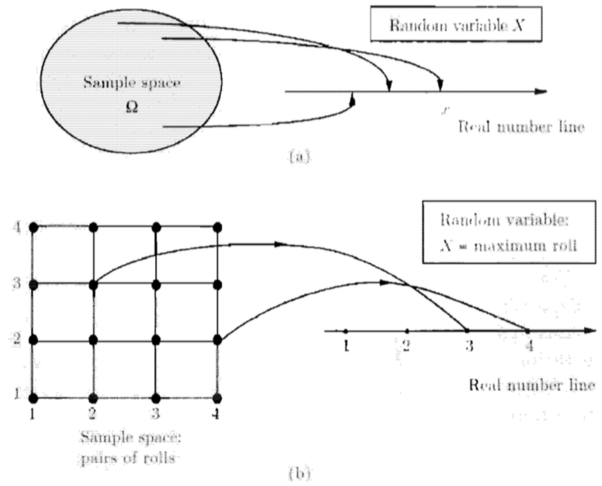


Figure 2.1: (a) Visualization of a random variable. It is a function that assigns a numerical value to each possible outcome of the experiment. (b) An example of a random variable. The experiment consists of two rolls of a 4-sided die, and the random variable is the maximum of the two rolls. If the outcome of the experiment is (4, 2), the value of this random variable is 4.

def: A stochastic process is a mathematical model of a probabilistic experiment that evolves in time and generates a sequence of numerical values. For example. a stochastic process can be used to model:

1. the sequence of daily prices of a stock;
2. the sequence of scores in a football game:
3. the sequence of failure times of a machine:

Each numerical value in the sequence is modeled by a random variable, so a stochastic process is simply a (finite or infinite) sequence of random variables and does not represent a major conceptual departure from our basic framework.

def: Случайная функция == случайное поле, неслучайная функция == $\xi(t, w_0)$.

Примем ещё одно соглашение об обозначениях. Мы будем часто обозначать как $\xi(t)$ и сечение, и сам случайный процесс, просто оговаривая (если есть риск непонимания природы $\xi(t)$ в каждом конкретном случае), о чём идёт речь; для случайных процессов мы также часто будем указывать, что t не фиксировано, а пробегает некое множество, т. е. писать $\xi(t), t \in T$.

1 Случайные процессы и их основные характеристики.

def: Случайный процесс (случайная функция, вероятностный процесс, стохастический процесс) $\xi(t) = \xi(t,\omega), \omega \in \Omega, t \in T$ - семейство случайных величин $\{\xi(t,\omega), t \in T\}$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$, где T – некоторое параметрическое множество.

def: СП называется **действительным (вещественным)**, если СВы $\xi(t,\omega)$ являются действительными для любого $t \in T$.

def: СП называется **комплексным**, если его можно представить в виде: $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$, где $\xi_1(t) = \xi_1(t,w), \xi_2(t) = \xi_2(t,w)$ - действительные СПы, $i^2 = -1$.

def: Если $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots,\}$ или T - некоторое подмножество из $\mathbb{Z}$, например, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ или $T = \{3, 4, 5, \dots\}$, то в этом случае говорят, что $\xi(t)$ **- СП с дискретным временем (временной ряд, случайность последовательность)**.

def: Если $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ или T - некоторое подмножество из $\mathbb{R}$, например, вида $T = [0,1]$ или $T = [0, +\infty)$, то в этом случае говорят, что $\xi(t)$ **- СП с непрерывным временем**.

def: СП называется $r-$**мерным**, если он $\xi^r(t) = \{\xi_a(t), a = \overline{1,r}\}, t \in T, r \in \mathbb{N}$.

Если в определение СПа вместо параметра t подставить $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, то $\xi(\underline{t}) = \xi(\underline{t},\omega)$ называется **n-мерным случайным полем (случайной функцией)**.

Если $T = \mathbb{Z}^n$ или некоторое подпространство из $\mathbb{Z}^n$, то $\xi(\underline{t})$ **- n-мерное случайное поле с дискретным временем**.

Если $T = \mathbb{R}^n$ или некоторое подпространство из $\mathbb{R}^n$, то $\xi(\underline{t})$ **- n-мерное случайное поле с непрерывным временем**.

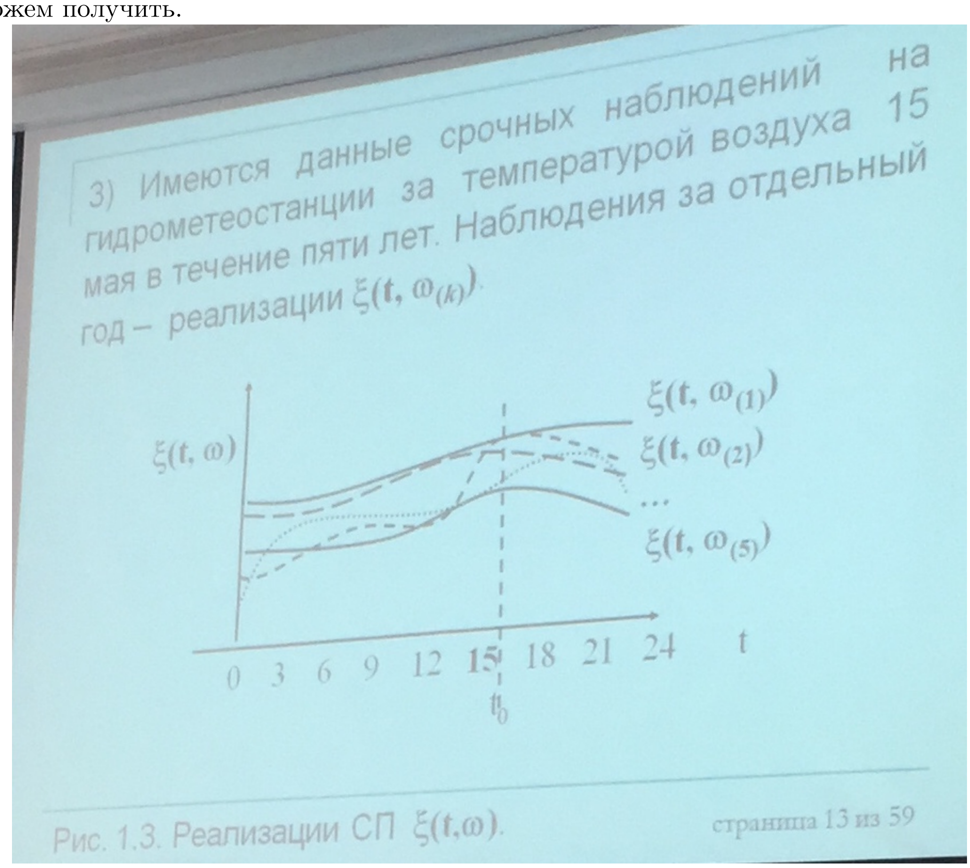
Пусть $t_0 \in T$ - фиксированный момент времени.

def: СВ $\xi(t_0,\omega), \omega \in \Omega$, называется **сечением (отсчетом)** процесса в точке t_0.

def: При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ неслучайная функция $\xi(t,\omega_0), t \in T$, называется **траекторией**, соответствующей элементарному исходу $\omega_0 \in \Omega$. Траектории называются **реализациями или выборочными функциями** случайного процесса.

Представить СП на практике можно с помощью совокупности реализаций (графически).

Чем больше сечений (траекторий) будет рассматриваться, тем более подробнее представление о СП мы можем получить.



2 Конечномерные распределения случайных процессов. Теорема Колмогорова.

Способы задания СП:

1. аналитический: $\xi(t,\omega) = g(t, \eta_1(\omega), \ldots, \eta_k(\omega))$;
2. рекуррентный: зависит от предшествующих значений процесса;
3. с помощью конечномерных распределений;
4. моментами первого и второго порядков.

Для любого $n \in \mathbb{N}$, произвольных $t_1, \ldots, t_n \in T$ функцию

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n\}, \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$, будем называть $n-$**мерной функцией распределения** СП $\xi(t)$.

Consider a set of sampling times $t_1, t_2, \ldots, t_k \in I$, and let $X_i = X(t_i)$ denote the random variable obtained by fixing the value of the process at each time $t_i, i = 1, \ldots, k$. For any finite value k, we have a vector of random variables $\underline{X} = [X_1 \cdots X_k]^T$, and we can completely specify this vector through specification of its joint probability distribution function:

$$\begin{aligned} P_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_k) &= P(\{\omega : X_1(\omega) \le x_1, \ldots, X_k(\omega) \le x_k\}) \\ &= P(\{\omega : X(t_1, \omega) \le x_1, \ldots, X(t_k, \omega) \le x_k\} \\ &= P_{X(t^k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k), \end{aligned} \tag{3.1}$$

def: Совокупность функций (1) для различных $n = 1, 2, \ldots$ и всевозможных моментов времени $t_i \in T$ называется **семейством конечномерных распределений** СПа $\xi(t)$.

Свойства $n-$мерной функции распределения:

1. $0 \leqslant F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \leqslant 1$.
2. $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ непрерывна слева по совокупности переменных x_i.
3. $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ является неубывающей, т.е. $\Delta_1 \ldots \Delta_n F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \geqslant 0$, где Δ_i - оператор конечной разности по переменной x_i,

   $\Delta_i F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) - F_\xi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n),$
4. Если хотя бы одна из переменных $x_i \to -\infty$, то $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \to 0$.
5. Если все переменные $x_i \to +\infty$, то $F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \to 1$.
6. Для любой перестановки $\{k_1, \ldots, k_n\}$ индексов $\{1, \ldots, n\}$

   $$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n}).$$
7. Для любых $1 \leqslant k < n$:

   $$F_\xi(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_k, +\infty, \ldots, +\infty; t_1, \ldots, t_n)$$

Теорема Колмогорова. Если задано некоторое семейство конечномерных функций распределения

$$F = \{F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), x_i \in \mathbb{R}, t_i \in T, i = \overline{1,n}, n \geqslant 1\},$$

удовлетворяющих условиям $1-7$, то существует ВП $\{\Omega, F, P\}$ и СП $\xi(t), t \in T$, определенный на этом ВП такой, что семейство конечномерных распределений процесса $\xi(t)$ совпадет с F.

def: Пусть существует неотрицательная функция $p_\xi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n), t_i \in T$, такая, что справедливо представление:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p_\xi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) du_1 \ldots du_n,$$

$x_i \in \mathbb{R}$, тогда $p_\xi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n)$ называют **плотностью $n-$мерной функции распределения или $n-$мерной плотностью распределения вероятностей** процесса $\xi(t), t \in T$.

Свойства $n-$мерной плотности распределения вероятностей

1. $p_\xi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n)$ - неотрицательная функция.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) du_1 \ldots du_n = 1.$

3 Стохастически эквивалентные случайные процессы; утверждение Колмогорова. Тождественные случайные процессы.

def: Процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются **стохастически эквивалентными в широком смысле**, если семейства конечномерных распределений процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ совпадают, т.е. $\forall n \geqslant 1$ и $\forall t_k \in T, k = 1, \ldots, n$ выполняется равенство:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\eta(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n),$$

где $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$.

def: Процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются **стохастически эквивалентными (эквивалентными)**, если:

$$\text{при } \forall t : P\{\xi(t) = \eta(t)\} = 1.$$

def: Любой СП $\eta(t)$, стохастически эквивалентный $\xi(t)$, называют **модификацией или версией** СП $\xi(t)$.

Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ стохастически эквивалентные, то они являются и стохастически эквивалентными в широком смысле (но не наоборот).

Утверждение Колмогорова. Пусть $\eta(t), t \in T = [a, b]$, и существуют постоянные $r, \alpha, c > 0$, такие, что при $\forall s, t \in T$:

$$M\{|\xi(t) - \xi(s)|^r\} \leqslant c|t - s|^{1+\alpha}.$$

Тогда существует стохастически эквивалентный данному СП $\xi(t)$, обладающий непрерывными траекториями.

Зам. Если $\xi(t)$ – СП, определенный на неограниченном промежутке времени, то для существования непрерывной модификации достаточно, чтобы утверждение выше было выполнено для $|t - s| \leqslant h$, где h – положительная постоянная.

def: Процессы $\xi(t)$ и $\eta(t), t \in T$, называют **тождественными (неразличимыми)**, если

$$P\{\omega : \xi(t, \omega) = \eta(t, \omega), \forall t \in T\} = 1,$$

т.е. вероятность совпадений траекторий равна 1.

4 Моментные характеристики действительных случайных процессов: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, корреляционная функция, ковариационная функция, нормированная ковариационная функция. Простейшие свойства моментных характеристик.

Пусть $\xi(t), t \in T$, - действительный СП.

def: Неслучайная функция $m_\xi(t), t \in T$, определяемая соотношением

$$m_\xi(t) = M\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x;t),$$

называется **математическим ожиданием (МО)** процесса $\xi(t)$.

def: Неслучайная функция $D_\xi(t), t \in T$ вида

$$D_\xi(t) = M\{\xi(t) - m_\xi(t)\}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{x - m_\xi(t)\}^2 dF_\xi(x;t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_\xi(x;t) - m_\xi^2(t) = M\{\xi^2(t)\} - \{m_\xi(t)\}^2.$$

называется **дисперсией** процесса $\xi(t)$.

def: Среднеквадратическим отклонением (стандартным отклонением) СП $\xi(t)$ называется функция

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)}$$

def: Неслучайная функция

$$R_\xi^0(t, \tau) = M\{\xi(t)\xi(\tau)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 dF_\xi(x_1, x_2; t, \tau),$$

$t, \tau \in T$, называется **корреляционной функцией** СП $\xi(t)$.

def: Неслучайная функция

$$R_\xi(t, \tau) = \mathrm{cov}\{\xi(t), \xi(\tau)\} = M\{(\xi(t) - m_\xi(t))(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))\} =$$

$$= M\{\xi(t)\xi(\tau)\} - M\{\xi(t)\} \cdot M\{\xi(\tau)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 dF_\xi(x_1, x_2; t, \tau) - m_\xi(t) m_\xi(\tau),$$

$t, \tau \in T$, называется **коварицонной функцией (КФ)** СП $\xi(t)$.

def: Нормированной ковариационной функцией СП $\xi(t), t \in T$, называется функция вида:

$$\rho_\xi(t, \tau) = \frac{R_\xi(t, \tau)}{\sqrt{D_\xi(t) D_\xi(\tau)}},$$

$t, \tau \in T$.

5 Моментные характеристики действительных случайных процессов: взаимная ковариационная функция, совместная ковариационная функция, смешанный момент k-го порядка, смешанный семиинвариант k-го порядка. Простейшие свойства моментных характеристик.

def: Взаимной ковариационной функцией СП $\xi(t)$ и $\eta(t), t \in T$, называется неслучайная функция вида:

$$R_{\xi\eta}(t,\tau) = \mathrm{cov}\{\xi(t), \eta(\tau)\} = M\{(\xi(t) - m_\xi(t))(\eta(\tau) - m_\eta(\tau))\} = M\{\xi(t)\eta(t)\} - m_\xi(t)m_\eta(\tau),$$

$t, \tau \in T$.

def: Совместная КФ процессов $\xi(t)$ и $\eta(t), t \in T$, определяется как

$$\begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(t,s) & R_{\xi\eta}(t,s) \\ R_{\eta\xi}(t,s) & R_{\eta\eta}(t,s) \end{pmatrix}$$

def: СП $\xi(t), t \in T$, удовлетворяющей условию

$$M\{|\xi(t)|^2\} < \infty, \forall t \in T,$$

называется **процессом с конечным моментом второго порядка**.

def: Детерминированная функция

$$m_\xi(t_1, \dots, t_k) = M\{\xi(t_1) \cdot \dots \cdot \xi(t_k)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \dots x_k dF_\xi(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)$$

называется **смешанным моментом порядка** k СП $\xi(t), t \in T$.

def: Детерминированная комплексная функция

$$\Psi_\xi(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k) = M\{\exp(i\sum_{j=1}^{k} z_j \xi(t_j))\} = \int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\sum_{j=1}^{k} z_j x_j) dF_\xi(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k),$$

$z_j \in \mathbb{R}, t_j \in T, j = \overline{1,k}$, называется **характеристической фунцкией (ХФ)** $k-$мерного распредления СП $\xi(t), t \in T$.

def: Смешанным семиинвариантом (кумулянтом) k-го порядка СП $\xi(t), t \in T$, называется функция

$$\mathrm{cum}\{\xi(t_1), \dots, \xi(t_k)\} = c_\xi(t_1, \dots, t_k) = i^{-k} \frac{\partial^k \ln \Psi_\xi(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k)}{\partial z_1 \dots \partial z_k}\bigg|_{z_1 = \dots = z_k = 0}$$

где $\Psi_\xi(z_1, \dots, z_k; t_1, \dots, t_k)$ – ХФ k-мерного распределения СП $\xi(t)$, $(z_1, \dots, z_k)^T$ – действительный ненулевой вектор.

6 Ковариационная функция действительного случайного процесса. Ее свойства. Критерий.

def: Неслучайная функция

$$R_\xi(t,\tau) = \operatorname{cov}\{\xi(t),\xi(\tau)\} = M\{(\xi(t)-m_\xi(t))(\xi(\tau)-m_\xi(\tau))\} =$$

$$= M\{\xi(t)\xi(\tau)\} - M\{\xi(t)\}\cdot M\{\xi(\tau)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 dF_\xi(x_1,x_2;t,\tau) - m_\xi(t)m_\xi(\tau),$$

$t,\tau \in T$, называется **коварицонной функцией (КФ)** СП $\xi(t)$.

def: Нормированной ковариационной функцией СП $\xi(t), t\in T$, называется функция вида:

$$\rho_\xi(t,\tau) = \frac{R_\xi(t,\tau)}{\sqrt{D_\xi(t)D_\xi(\tau)}},$$

$t,\tau \in T$.

КФ $R_\xi(t,s)$ действительного СП $\xi(t), t\in T$, обладает следующими свойствами:

1. $R_\xi(t,t) = D_\xi(t) \geqslant 0$,
2. $R_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(t_2,t_1)$,
3. $|R_\xi(t_1,t_2)|^2 \leqslant R_\xi(t_1,t_1)\cdot R_\xi(t_2,t_2), \forall t,t_1,t_2\in T$.

Критерий. Для того чтобы функция $R_\xi(t,s), t,s\in T$, была КФ действительного СП $\xi(t), t\in T$, необходимо и достаточно, чтобы она являлась **симметричной и неотрицательно определенной**, т.е. для $\forall\, n\geqslant 1$, любых $t_1,\ldots,t_n\in T$ и произвольного ненулевого набора действительных чисел $\{z_1,\ldots,z_n\}$, имело место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j R_\xi(t_i,t_j) \geqslant 0.$$

7 Моментные характеристики комплексных случайных процессов. Свойства ковариационной функции комплексного случайного процесса. Критерий.

Рассмотрим комплексный СП $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$.

$$M\xi(t) = M\xi_1(t) + iM\xi_2(t)$$

$$D_\xi(t) = M\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\xi(t) - m_\xi(t))}\}$$

$$R_\xi(t, \tau) = M\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\xi(\tau) - m_\xi(\tau))}\}$$

$$R_{\xi\eta}(t, \tau) = M\{(\xi(t) - m_\xi(t))\overline{(\eta(\tau) - m_\eta(\tau))}\}$$

Свойства КФ $R_\xi(t, s)$ комплексного СП $\xi(t), t \in T$:

1. $R_\xi(t, t) = D_\xi(t) \geqslant 0$;
2. КФ является эрмитовой, т.е. $R_\xi(t_1, t_2) = \overline{R_\xi(t_2, t_1)}$;
3. $|R_\xi(t_1, t_2)|^2 \leqslant R_\xi(t_1, t_1)R_\xi(t_2, t_2)$ для $\forall\ t, t_1, t_2 \in T$.

Критерий. Для того чтобы функция $R_\xi(t, s), t, s \in T$, была КФ комплексного СП $\xi(t), t \in T$, необходимо и достаточно, чтобы она являлась **эрмитовой и неотрицательно определенной**, т.е. для $\forall\ n \geqslant 1$, любых $t_1, \dots, t_n \in T$ и произвольного ненулевого набора действительных чисел $\{z_1, \dots, z_n\}$, имело место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z_j} R_\xi(t_i, t_j) \geqslant 0.$$

8 Примеры случайных процессов. Гауссовский случайный процесс (ГСП). Свойства ГСП. Свойства приращений ГСП. Применение линейных операторов к ГСП.

def: СП $\xi(t), t \in T$ называется **гауссовским**, если его любые конечномерные законы распределения являются нормальными.

def: СП $\xi(t), t \in T$ называется **гауссовским**, если его ХФ имеет вид:

$$\Psi_\xi(z_1, \ldots, z_k; t_1, \ldots, t_k) = \exp\{i \sum_{j=1}^{k} z_j m_\xi(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} z_m z_j R_\xi(t_m, t_j)\},$$

где $z_j \in \mathbb{R}, t_j \in T, j = \overline{1, k}$.

Утверждение. Для произвольной функции $m(t)$ и любой функции $R(t, s)$, удовлетворяющей условию симметричности и неотрицательной определенности, существует **действительный** гауссовский СП с МО $m(t)$ и КФ $R(t, s)$.

9 Процессы броуновского движения. Простейшие свойства. Вид плотности распределения. Ковариационная функция процесса броуновского движения.

Процесс броуновского движения = винеровский СП.

def: Винеровским процессом (ВП), выходящим из нуля, называется $\omega(t), t \in T = [0, \infty)$, обладающий свойствами:

1. $\omega(0) = 0$ п.н.;
2. Для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ СВ

$$\omega(t_1) - \omega(t_0), \omega(t_2) - \omega(t_1), \ldots, \omega(t_n) - \omega(t_{n-1})$$

   независимы в совокупности.
3. СВ $\omega(t) - \omega(s), 0 \leqslant s \leqslant t$, имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2(t-s))$.

Постоянную σ^2 называют **коэффициентом диффузии**.

Свойства стандартного винеровского СП:

1. $\omega(t) \sim N(0, t)$.
2. k-мерная плотность распределения имеет вид:

$$p_\omega(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_k) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} e^{-\dfrac{(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})}},$$

   $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$.
3. КФ процесса броуновского движения

$$R_\omega(t, s) = \sigma^2 \min\{t, s\},$$

   где σ^2 - коэффициент диффузии.

10 Свойства процесса броуновского движения: переход к непрерывной модификации, сходимость в СК-смысле суммы квадратов приращений. Броуновский мост.

def: Гауссовский СП $\omega(t), t \in [0, \infty)$, выходящий из нуля, т.е. $\omega(0) = 0$, с моментными характеристиками:

$$M\{\omega(t)\} = 0,$$

$$R_\omega(t, s) = \sigma^2 \min\{t, s\},$$

$t, s \geqslant 0$, называется **процессом броуновского движения**.

Свойства (тоже будут свойствами стандартного винеровского СП):

1. От ВП можно перейти к стохастически эквивалентному процессу, обладающему непрерывной траекторией.
2. Пусть осуществлено разбиение отрезка $[a, b] \subseteq T, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i))^2 \xrightarrow{\text{ср. кв.}} b - a,$$

при $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0, n \to \infty$.

3. ВП описывает симметричное блуждание частицы:

$$P\{\omega(t) > 0\} = P\{\omega(t) < 0\} = 0.5,$$

при $t > 0$.

Если τ_x - случайный момент первого пересечения траекторией $\omega(t)$ уровня x, то

$$P\{\omega(t) > x | \tau_x < t\} = P\{\omega(t) < x | \tau_x < t\} = 0.5.$$

def: Броуновский мост - процесс, задаваемый равенством

$$\omega^0(t) = \omega(t) - t\omega(1), t \in [0, 1].$$

Очевидно, что:

1. $\omega^0(0) = \omega^0(1) = 0$;
2. $M\{\omega^0(t)\} = 0$;
3. $R(t, s) = \sigma^2(\min\{t, s\} - ts)$;
4. $D\omega^0(t) = \sigma^2 t(1 - t)$.

11 Процессы Пуассона, процессы Коши. Свойства. Ковариационная функция процесса Пуассона.

def: СП $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$, называется **процессом Пуассона**, выходящим из нуля, с параметром $\lambda (\lambda > 0)$, если он обладает свойствами:

1. $\xi(0) = 0$ п.н.;
2. Для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ СВ
$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}),$$
независимы в совокупности;
3. СВ $\xi(t) - \xi(s), 0 \leqslant s \leqslant t$, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda(t-s)$, т.е.
$$P\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},$$
λ - интенсивность, $k = 0, 1, 2, \ldots$

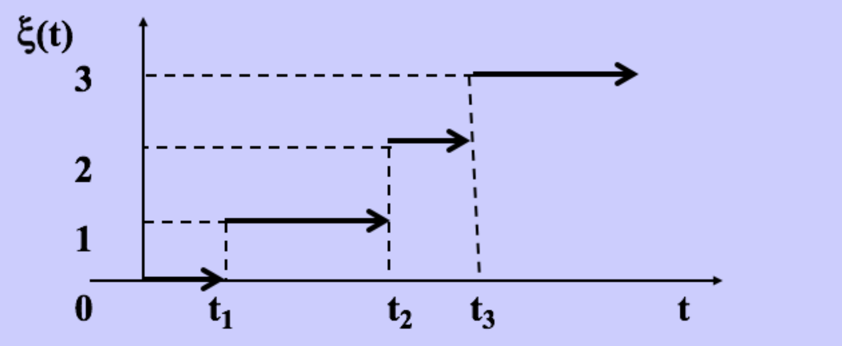


Рис. 3. Типичная траектория пуассоновского процесса.

Свойства пуассоновского процесса.

1. СП $\xi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt.
2. $M\{\xi(t)\} = D\{\xi(t)\} = \lambda t$.
3. $\xi(t)$ принимает целые неотрицательные значения.

def: СП $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$, называется **процессом Коши**, выходящим из нуля, с параметром $\lambda (\lambda > 0)$, если он обладает свойствами:

1. $\xi(0) = 0$ п.н.;
2. Для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ СВ
$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}),$$
независимы в совокупности;
3. СВ $\xi(t+h) - \xi(t)$, имеет распределение с плотностью.
$$p(x) = \frac{h}{\pi(h^2 + x^2)}.$$

T	Дискретное множество состояний X	Непрерывное множество состояний X
Дискретное время	ЦМ с ДВ	Марковская последовательность
Непрерывное время	ЦМ с НВ	Марковский СП

12 Процессы Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.

def: СП $\xi(t), t \in T$, называется **процессом Маркова**, если для $\forall\ k \in \mathbb{N}$, для $\forall\ t_j \in T : t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, $j = 0, \ldots, k$, и любого борелевского множества $B \in B(\mathbb{R})$ имеет место:

$$P\{\xi(t_k) \in B | \xi(t_0), \ldots, \xi(t_{k-1})\} = P\{\xi(t_k) \in B | \xi(t_{k-1})\}.$$

$$P\{\xi(t_k) = x_k | \xi(t_0) = x_0, \ldots, \xi(t_{k-1} = x_{k-1}\} = P\{\xi(t_k) = x_k | \xi(t_{k-1}) = x_{k-1}\},$$

где $x_m \in \mathbb{R}$ - состояние процесса в момент времени t_m.

Для $\forall\ B_1, B_2 \in B(\mathbb{R})$ и $s < u < t$:

$$P\{\xi(s) \in B_1, \xi(t) \in B_2 | \xi(u)\} = P\{\xi(s) \in B_1 | \xi(u)\} \cdot P\{\xi(t) \in B_2 | \xi(u)\}.$$

def: Переходная функция (переходная вероятность) марковского процесса определяется как

$$P(s, x, t, B) = P\{\xi(t) \in B | \xi(s) = x\}, t \geqslant s, x \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

и удовлетворяет соотношению

$$P(s, x, t, B) = \int\limits_{\mathbb{R}} P(s, x, u, dy) P(u, y, t, B),$$

которое выполняется для всех $s, u, t \in T : s \leqslant u \leqslant t$, и называется **уравнением Колмогорова-Чепмена**.

Критерий. Центрированный гауссовский СП $\xi(t), t \in T$, является марковским $\Leftrightarrow$ его КФ $R_\xi(t, s), s, t \in T$, удовлетворяет при $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$ равенству:

$$R_\xi(t_1, t_3) = \frac{R_\xi(t_1, t_2) R_\xi(t_2, t_3)}{R_\xi(t_2, t_2)}.$$

def: Марковский процесс называется **однородным**, если

$$P\{\xi(t) \in B | \xi(s) = x\} = P(0, x, t - s, B) = P(x, t - s, B).$$

13 Диффузионные процессы.

def: Случайный $n-$мерный однородный марковский процесс $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, называется **диффузионным процессом**, если его переходная вероятность $P(x,t,B)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|>\delta} P(x,t,dy) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\leqslant\delta} (y-x)P(x,t,dy) = a(x),$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\leqslant\delta} (y-x)(y-x)^T P(x,t,dy) = \sum(x),$$

для любых $\delta > 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Первое условие - достаточное условие для существования марковского семейства с данными переходными вероятностями, с непрерывными траекториями.

Функция $a(x)$ характеризует среднюю скорость смещения за малое время из состояния $\xi(0) = x$ и называется **вектором сноса (дрейфа)**.

Функция $\sum(x)$ характеризует отклонение процесса от его усредненного движения, определяемого вектором сноса, и называется **матрицей диффузии**.

Замечание. В случае $a(x) = 0$, $\sum(x) = 1$ процесс $\xi(t)$ совпадает со стандартным винеровским процессом.

14 Случайные процессы с некоррелированными, ортогональными и независимыми приращениями. Однородные случайные процессы. Случайные процессы со стационарными приращениями.

Действительный СП $\xi(t), t \in T \subset \mathbb{R}, M\left|\xi(t)\right|^2 < \infty$.

На $\{\Omega, F, P\}$ определим скалярное произведение: $\langle \xi, \eta \rangle = M\xi\overline{\eta}$.

def: Приращением СП $\xi(t)$ на промежутке $[s, t)$ называется СВ $\Delta\xi(s,t) = \xi(t) - \xi(s)$.

def: $\xi(t), t \in T$, называется процессом **с некоррелированными приращениями**, если для произвольных $t_0 < t_1 \leqslant t_2 < t_3$ выполняется соотношение:

$$\operatorname{cov}\{\Delta\xi(t_0, t_1), \Delta\xi(t_2, t_3)\} = 0.$$

Замечание. Из некоррелированности приращений **не** следует независимость соответствующих приращений.

def: $\xi(t), t \in T$, называется процессом **с ортогональными приращениями**, если для произвольных $t_0 < t_1 \leqslant t_2 < t_3$ выполняется соотношение:

$$M\{\Delta\xi(t_0, t_1) \cdot \Delta\xi(t_2, t_3)\} = 0.$$

Замечание. Если $\xi(t)$ имеет некоррелированные приращения, то процесс $\xi_1(t) = \xi(t) - M\{\xi(t)\}$ является процессом как с некоррелированными, так и с ортогональными приращениями.

def: $\xi(t), t \in T$, называется процессом **с независимыми приращениями**, если для $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и произвольных $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ СВ

$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}),$$

независимы в совокупности.

$$\xi(t_n) - \xi(t_0) = \sum_{i=1}^{n} (\xi(t_i) - \xi(t_{i-1})),$$

Замечания.

1. СП с независимыми приращениями является процессом с некоррелированными приращениями;
2. Гауссовский СП с некоррелированными приращениями является процессом с независимыми приращениями;
3. Всякий процесс с независимыми приращениями является марковским процессом.

def: $\xi(t), t \geqslant 0$ называется **однородным**, если для $\forall\ s > 0$ распределение приращения $\xi(t+s) - \xi(t)$ зависит только от s.

Например, процессы Пуассона, ВП.

def: $\xi(t), t \in T$, называется называется процессом **со стационарными приращениями в узком смысле**, если у него не меняются при сдвиге на h совместное распределение приращений

$$\xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}),$$

где $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$.

Другими словами, для $\forall\ h$:

$$\mathrm{Law}\{\xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})\} = \mathrm{Law}\{\xi(t_1 + h) - \xi(t_0 + h), \ldots, \xi(t_n + h) - \xi(t_{n-1} + h)\}.$$

Например, процессы Пуассона, ВП.

def: $\xi(t), t \in T$ называется **процессом со стационарными приращениями в широком смысле**, если для $\forall\ h$:

1. $M\{\xi(t_1) - \xi(t_2)\} = f(t_1 - t_2)$, где f – некоторая детерминированная функция;
2. $M\left|\xi(t_1) - \xi(t_2)\right|^2 < \infty$;
3. $M\{(\xi(t_1) - \xi(t_2))\overline{(\xi(t_3) - \xi(t_4))}\} = M\{(\xi(t_1 + h) - \xi(t_2 + h))\overline{(\xi(t_3 + h) - \xi(t_4 + h))}\}$.

15 Стационарные в узком смысле случайные процессы.

def: СП $\xi(t), t \in T$ называется **стационарным в узком смысле**, если для $\forall\ n \in \mathbb{N}$, произвольного набора $t_1, \ldots, t_n \in T$, и $\forall\ \tau$ такого, что $t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau \in T$, имеет место соотношение:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau),$$

или

$$p_\xi(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = p_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau),$$

где $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$.

Часто полагают $\tau = -t_n$, тогда:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau) =$$

$$= F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 - t_n, \ldots, t_{n-1} - t_n, 0) = F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1 - t_n, \ldots, t_{n-1} - t_n).$$

В частности, $F_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_\xi(x_1, x_2; t_1 - t_2), F_\xi(x; t) = F_\xi(t)$.

Если существует МО стационарного в узком смысле СП, то оно постоянно и равно $M\{\xi(t)\} = M\{\xi(0)\}$, а КФ (при условии $M\{|\xi(t)|^2\} < \infty$) зависит лишь от разности $(t - s)$, т.е. $R_\xi(t, s) = R_\xi(t - s)$.

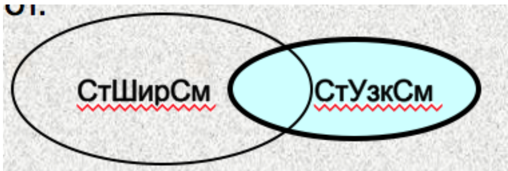
16 Стационарные в широком смысле случайные процессы. Свойства ковариационной функции стационарного случайного процесса. Стационарно связанные процессы. Эффективный интервал корреляции.

def: СП $\xi(t), t \in T$ называется **стационарным в широком смысле**, если для $M\{|\xi(t)|^2\} < \infty$ и выполняются соотношения :

1. $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = const$,
2. $R_\xi(t,s) = R_\xi(t-s), \forall\, t,s \in T$.

Замечания.

1. Если СП стационарный в узком смысле и для него существует конечный второй момент, то СП является и стационарным в широком смысле, но не наоборот.



2. Для действительного гауссовского СП понятия стационарности в широком и узком смыслах эквивалентны.

Свойства КФ $R_\xi(t,s), t \in T$ стационарного в широком смысле СП $\xi(t), t \in T$:

1. $R_\xi(0) = D_\xi \geqslant 0$,
2. $R_\xi(t) = R_\xi(-t)$ или $R_\xi(t) = \overline{R_\xi(-t)}$,
3. $|R_\xi(t)| \leqslant R_\xi(0)$,
4. $R_\xi(t)$ является неотрицательно определенной функцией, т.е. для $\forall\ n \geqslant 1$, любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ и произвольного ненулевого набора действительных чисел $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, имеет место:

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j R_\xi(t_i - t_j) \geqslant 0.$$

def: Пусть $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, стационарный в широком смысле СП с абсолютно интегрируемой КФ, тогда **временем корреляции** СП $\xi(t)$ называется величина

$$t_0 = \frac{1}{R_\xi(0)} \int\limits_0^{+\infty} |R_\xi(t)| dt.$$

Сечения $\xi(s+t)$ и $\xi(s)$, отстоящие друг от друга на расстоянии $t > t_0$, считают некоррелированными.
def: Случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t), t \in T$, называются **стационарно связанными**, если

$$R_{\xi\eta}(t,s) = R_{\xi\eta}(t-s).$$

Не всякие два стационарные СП стационарно связаны. Два нестационарных процесса могут быть стационарно связанными.

17 Спектральные характеристики случайных процессов с непрерывным и дискретным временем.

def: Спектральной плотностью СП $\xi(n), n \in \mathbb{Z}$, называется функция вида

$$f_\xi(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} R_\xi(n_1, n_2) e^{-i(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi = [-\pi; \pi]$, при условии, что $\sum\limits_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} |R_\xi(n_1, n_2)| < \infty$.

def: Спектральной плотностью СП $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, называется функция вида

$$f_\xi(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} R_\xi(t, s) e^{-i(\lambda_1 t + \lambda_2 s)} dtds,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, при условии, что $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |R_\xi(t, s)| dtds < \infty$.

def: Взаимной спектральной плотностью СП $\xi(n), \eta(n), n \in \mathbb{Z}$, называется функция вида

$$f_{\xi\eta}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(n_1, n_2) e^{-i(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, при условии, что $\sum\limits_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} |R_{\xi\eta}(n_1, n_2)| < \infty$.

def: Взаимной спектральной плотностью СП $\xi(t), \eta(t), t \in \mathbb{R}$, называется функция вида

$$f_{\xi\eta}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} R_{\xi\eta}(t, s) e^{-i(\lambda_1 t + \lambda_2 s)} dtds,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, при условии, что $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |R_{\xi\eta}(t, s)| dtds < \infty$.

def: Спектральной функцией СП $\xi(t), t \in Z(R)$, называется функция вида

$$F_\xi(\lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{-\pi(-\infty)}^{\lambda_1} \int\limits_{-\pi(-\infty)}^{\lambda_2} f_\xi(v_1, v_2) dv_1 dv_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi(\mathbb{R})$,

18 Спектральные характеристики стационарных случайных последовательностей. Свойства спектральной плотности. Спектральное представление ковариационной функции.

def: Функция

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\xi(n) e^{-i\lambda n},$$

$\lambda \in \Pi$, называется **спектральной плотностью стационарного** СП $\xi(n), n \in \mathbb{Z}$, при условии, что:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_\xi(n)| < \infty.$$

def: Взаимной спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных СП $\xi(n), \eta(n), n \in \mathbb{Z}$, называется функция вида

$$f_{\xi\eta}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(n) e^{-i\lambda n},$$

где $\lambda \in \Pi$, при условии, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |R_{\xi\eta}(n)| < \infty$.

Теорема. Для того чтобы последовательность $R_\xi(n), n \in \mathbb{Z}$, являлась четной и неотрицательно определенной $\Leftrightarrow$ чтобы для $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ она представлялась в виде

$$R_\xi(n) = \int\limits_\Pi e^{i\lambda n} dF_\xi(\lambda),$$

где $F_\xi(\lambda), \lambda \in \Pi$ - однозначно определенная неубывающая вещественная функция, $F_\xi(-\pi) = 0$.

Следствия из теоремы Бохнера-Хинчина.

1. КФ стационарного СП $\xi(n), n \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$R_\xi(n) = \int\limits_\Pi e^{i\lambda n} f_\xi(\lambda) d\lambda,$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $f_\xi(n), \lambda \in \Pi$ - спектральная плотность $\xi(n)$.

Свойства спектральной плотности $f_\xi(\lambda), \lambda \in \mathbf{\Pi}(\mathbb{R})$.

1. $f_\xi(\lambda) \geqslant 0, \lambda \in \Pi(\mathbb{R})$.
2. $f_\xi(\lambda) = f_\xi(-\lambda), \lambda \in \Pi(\mathbb{R})$.
3. $f_\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty R_\xi(t) \cos \lambda t dt, f_\xi(\lambda) = \frac{R_\xi(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} R_\xi(n) \cos \lambda n.$
4. $R_\xi(t) = 2 \int\limits_0^{\pi(\infty)} f_\xi(\lambda) \cos \lambda t d\lambda, D_\xi = R_\xi(0) = 2 \int\limits_0^{\pi(\infty)} f_\xi(\lambda) d\lambda, t \in Z(R).$

Замечание. На практике спектральная плотность используется в основном для определения периода:

$$T^* = \frac{2\pi}{\lambda^*}$$

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda \in [0,\pi]} f_\xi(\lambda)$$

Величина * называется **главным периодом** и в некоторых случаях достаточно адекватно характеризует промежуток времени, через который свойства СП «статистически повторяются».

19 Спектральные характеристики стационарных случайных процессов с непрерывным временем. Свойства спектральной плотности. Спектральное представление ковариационной функции. Ширина спектра.

def: Спектральной плотностью стационарного СП $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, называется функция вида

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} R_\xi(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, при условии, что $\int\limits_{\mathbb{R}} |R_\xi(t)| dt < \infty$.

def: Спектральной функцией стационарного СП $\xi(t), t \in Z(R)$, называется функция вида

$$F_\xi(\lambda) = \int\limits_{-\pi(-\infty)}^{\lambda} f_\xi(v) dv,$$

где $\lambda \in \Pi\,(\mathbb{R})$.

def: Нормированной спектральной плотностью стационарного СП $\xi(t), t \in Z(R)$, называется

$$f_\xi^{\text{норм}}(\lambda) = \frac{f_\xi(\lambda)}{D_\xi}.$$

def: Взаимной спектральной плотностью двух стационарных и стационарно связанных СП $\xi(t), \eta(t), t \in \mathbb{R}$, называется функция вида

$$f_{\xi\eta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} R_{\xi\eta}(t) e^{-i\lambda t} dt,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, при условии, что $\int\limits_{\mathbb{R}} |R_{\xi\eta}(t)| dt < \infty$.

Теорема Бохнера-Хинчина. Для того чтобы непрерывная функция $R_\xi(t), t \in \mathbb{R}$, была четной и неотрицательно определенной $\Leftrightarrow$ чтобы она представлялась в виде

$$R_\xi(t) = \int\limits_{\Pi} e^{i\lambda t} dF_\xi(\lambda),$$

где $F_\xi(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ - однозначно определенная вещественная монотонно неубывающая ограниченная функция, $F_\xi(-\infty) = 0, t \in \mathbb{R}$.

Следствия из теоремы Бохнера-Хинчина.

1. КФ стационарного СП $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$R_\xi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} f_\xi(\lambda) d\lambda,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $f_\xi(\lambda), \lambda \in \mathrm{R}$ - спектральная плотность $\xi(t)$.

Свойства спектральной плотности $f_\xi(\lambda), \lambda \in \mathbf{\Pi}(\mathbb{R})$.

1. $f_\xi(\lambda) \geqslant 0, \lambda \in \Pi(\mathbb{R})$.
2. $f_\xi(\lambda) = f_\xi(-\lambda), \lambda \in \Pi(\mathbb{R})$.
3. $f_\xi(\lambda) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty R_\xi(t) \cos \lambda t dt, f_\xi(\lambda) = \dfrac{R_\xi(0)}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} R_\xi(n) \cos \lambda n.$
4. $R_\xi(t) = 2 \int\limits_0^{\pi(\infty)} f_\xi(\lambda) \cos \lambda t d\lambda, D_\xi = R_\xi(0) = 2 \int\limits_0^{\pi(\infty)} f_\xi(\lambda) d\lambda, t \in Z(R).$

Замечание. На практике спектральная плотность используется в основном для определения периода:

$$T^* = \frac{2\pi}{\lambda^*}$$

$$\lambda^* = \arg\max_{\lambda \in [0,\pi]} f_\xi(\lambda)$$

Величина * называется **главным периодом** и в некоторых случаях достаточно адекватно характеризует промежуток времени, через который свойства СП «статистически повторяются».

Содержательный смысл спектральной плотности.

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), 0 \leqslant |t| \leqslant T, \\ 0, |t| > T. \end{cases}$$

Обозначим

$$X_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} x_T(t) e^{-i\lambda t} dt, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Справедливо соотношение

$$f_\xi(\lambda) \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\lambda)|^2}{2T}.$$

Ширина спектра

$$L = \frac{1}{f_\xi(0)} \int\limits_0^{+\infty} f_\xi(\lambda) d\lambda,$$

Т.к. $\int\limits_0^{+\infty} f_\xi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} R_\xi(0)$, то $L = \dfrac{R_\xi(0)}{2 f_\xi(0)}$.

$$t_0 = \frac{1}{R_\xi(0)} \int\limits_0^{+\infty} |R_\xi(t)| dt \geqslant \frac{\pi f_\xi(0)}{R_\xi(0)}.$$

Поэтому справедливо неравенство: $t_0 \geqslant \dfrac{\pi}{2L}$ или $t_0 L \geqslant \dfrac{\pi}{2}$.

20 Каноническое разложение случайных функций. Спектральное разложение стационарных случайных функций.

Простейший СП определяется: $X(t) = X \cdot \phi(t)$, где X - СВ с МО m_X и дисперсией D_X, $\phi(t)$ - произвольная неслучайная функция.

$$m_X(t) = M\{X \cdot \phi(t)\} = \phi(t) \cdot M\{X\} = \phi(t) \cdot m_X.$$

Если $m_X = 0$, то СП $X(t)$ называется **элементарным**.

$$R_X(t_1, t_2) = M\{X(t_1)X(t_2)\} = \phi(t_1)\phi(t_2) \cdot M\{X^2\} = \phi(t_1)\phi(t_2) \cdot D_X.$$

Центрированный СП $\xi^0(t)$ можно представить суммой взаимно некоррелированных элементарных случайных процессов:

$$\xi^0(t) = \sum_{n=1}^{N} X_n \phi_n(t), N \leqslant \infty.$$

$$M\{\xi^0(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t) M\{X_n\} = 0.$$

$$R_{\xi^0}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t_1)\phi_n(t_2) D\{X_n\}. \qquad (2)$$

Произвольный нецентрированный СП $\xi(t)$ может быть представлен в виде

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \xi^0(t) = m_\xi(t) + \sum_{n=1}^{N} X_n \phi_n(t) \qquad (3)$$

с МО $m_\xi(t)$ и КФ вида (2).

Выражение (3) является **каноническим разложением** функции $\xi(t)$.

СВ X_n называются **коэффициентами разложения**, функции $\phi_n(t)$ - **координатными функциями (базисом)** разложения.

Из (2) получаем $D_\xi(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n^2(t) D\{X_n\}$.

Замечание. Каноническое разложение стационарного СП имеет вид

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(U_n \cos \lambda_n t + V_n \sin \lambda_n t\right), \qquad (4)$$

где U_n, V_n - центрированные некоррелированные СВ с попарно равными дисперсиями $D\{U_n\} = D\{V_n\} = D_n, \lambda_n$ - константы.

Разложение (4) называется **спектральным**.

Спектральное разложение в ряд его КФ и дисперсии:

1. $R_\xi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n \cos \lambda_n t$,
2. $D_\xi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n$.

21 Элементы стохастического анализа. Сходимости случайных функций (по вероятности, в среднеквадратическом смысле). Критерии.

$\xi(t), t \in T \subset \mathbb{R}$ - действительный СП.

Пусть $M\{|\xi(t)|^2\} < \infty$ для $\forall\ t \in T$.

def: СП $\xi(t)$ сходится в **среднеквадратическом смысле (СК-смысле)** к СВ η при $t \to t_0, t_0 \in T$, если $\lim\limits_{t \to t_0} M\{|\xi(t) - \eta|^2\} = 0$.

Далее будем обозначать

$$\eta = \lim_{t \to t_0} \xi(t) \tag{5}$$

Критерий Коши. Предел (5) существует $\Leftrightarrow$ когда существует $\lim\limits_{t,s \to t_0} M\{|\xi(t) - \xi(s)|^2\} = 0$.

Теорема. Для того чтобы существовал предел (5) $\Leftrightarrow$ чтобы существовал конечный предел функции $M\{\xi(t)\xi(s)\}$ при $t, s \to t_0$.

Замечание. В случае комплексного СП $\Leftrightarrow$ существование конечного предела функции $M\xi(t)\overline{\xi(s)}$ при $t, s \to t_0$.

Следствие. Предел (5) существует $\Leftrightarrow$ существуют и конечны пределы

$$\lim_{t \to t_0} M\{\xi(t)\} = m_0, \lim_{t,s \to t_0} R_\xi(t, s) = R_0.$$

Теорема. Для того чтобы существовал предел $\xi(t)$ в смысле сходимости по вероятности при $t \to t_0 \Leftrightarrow$ чтобы существовал конечный предел при $t, s \to t_0$ двумерных распределений $F_\xi(x_1, x_2; t, s)$ в смысле слабой сходимости.

Замечание. Из сходимости в СК-смысле $\xi(t)$ к η вытекает сходимость по вероятности и по распределению.

22 Непрерывность случайных функций (стохастическая, СК-непрерывность, потраекторная). Критерии.

def: СП $\xi(t)$ называется **стохастически непрерывным** в точке t_0, если $\xi(t) \xrightarrow[t \to t_0]{P} \xi(t_0)$.

Теорема. Для того чтобы СП $\xi(t), t \in T$ был стохастически непрерывным на множестве $T \Leftrightarrow$ чтобы двумерное распределение $F_\xi(x_1, x_2; t, s)$ было слабо непрерывно по паре (t, s) на множестве $T \times T$.

Например, **процессы Пуассона, Коши**.

def: СП $\xi(t)$ называют **непрерывным в среднеквадратическом смысле (СК – непрерывным)** в точке t_0, если существует предел $\lim\limits_{t \to t_0} \xi(t) = \xi(t_0)$.

В противном случае процесс называется **разрывным в СК-смысле** в точке t_0.

Если $\xi(t)$ является непрерывным в СК-смысле в каждой точке $t \in T$, то его называют непрерывным на всем множестве T.

Процесс Пуассона непрерывен в СК-смысле. **Процесс Коши не** является СК-непрерывным.

Теорема. Для СК-непрерывности СП $\xi(t)$ в точке $t_0 \Leftrightarrow$ чтобы $M\xi(t)$ было непрерывно в точке t_0, а $R_\xi(t, s)$ непрерывна в точке (t_0, t_0).

Следствие. Для того чтобы стационарный СП $\xi(t)$ был непрерывен в СК-смысле в точке $t \Leftrightarrow$ чтобы его КФ $R_\xi(t)$ была непрерывна в точке $t = 0$.

Следствие. Если функция $R\xi(t, s)$ непрерывна в точках $t = s$, то она непрерывна во всех точках.

Теорема. Для того чтобы $\xi(t)$ был непрерывен в СК-смысле на множестве $T \Leftrightarrow$ чтобы была непрерывна по (t, s) на $T \times T$ функция $M\{\xi(t)\xi(s)\}$. В случае комплексного СП $\Leftrightarrow$ непрерывность по (t, s) на $T \times T$ функции $M\{\xi(t)\overline{\xi(s)}\}$.

Теорема. $\xi(t), t \in T$, непрерывен в СК-смысле на множестве $T \Leftrightarrow$ когда на T непрерывно его $M\xi(t)$, а на $T \times T$ непрерывна его КФ $R_\xi(t, s)$.

Пусть $\xi(t, \omega), t \in T$, – некоторая траектория СП $\xi(t)$.

def: СП называется **непрерывным** на T, если $P\{\omega : \xi(t, \omega) -$ непрерывная на T функция$\} = 1$.

Для $\forall\ t_0 \in T\ P\{\omega : \xi(t, \omega) \to \xi(t_0, \omega), t \to t_0\} = 1$.

Далее будем обозначать $\xi(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi(t_0), t \to t_0$.

Т.о., непрерывный СП $\xi(t)$ является также **почти наверное** непрерывным в каждой точке t_0.

Однако из **п.н.-непрерывности** $\xi(t)$ на T в общем случае не следует его непрерывность, т.е. непрерывность почти всех его траекторий.

23 Дифференцирование случайных функций. Критерии. (СК-дифференцируемость, потраекторная).

def: СП $\xi(t)$ называется **дифференцируемым в среднеквадратическом смысле (СК-дифференцируемым)** в точке t_0, если существует СВ $\xi^{'}(t_0)$, для которой $\lim\limits_{t\to t_0} M\left\{\left|\dfrac{\xi(t)-\xi(t_0)}{t-t_0} - \xi^{'}(t_0)\right|^2\right\} = 0$

Иногда удобнее запись $\lim\limits_{\tau\to 0} M\left\{\left|\dfrac{\xi(t_0+\tau)-\xi(t_0)}{\tau} - \xi^{'}(t_0)\right|^2\right\} = 0$

Если $\xi(t)$ является дифференцируемым в СК-смысле в точке t_0, то СВ $\xi^{'}(t_0)$ называют его **СК-производной в этой точке**. В противном случае СП не является СК-дифференцируемым в точке t_0.

Если $\xi(t)$ СК-дифференцируем в каждой точке t множества T, то $\xi(t)$ **СК-дифференцируем на множестве** T, а семейство СВ $\{\xi^{'}(t), t\in T\}$ называют СК-производной СП $\xi(t)$ на T. Из дифференцируемости в СК-смысле вытекает соответствующая непрерывность.

Критерий. Для того чтобы действительный СП $\xi(t)$ был непрерывно дифференцируем в СК-смысле на $\Leftrightarrow$ чтобы функция $M\{\xi(t)\xi(s)\}$ (для комплексного СП функция $M\{\xi(t)\overline{\xi(s)}\}$ обладала на множестве $T\times T$ непрерывной смешанной производной второго порядка по t и s.

Критерий. Для того чтобы СП $\xi(t)$ был СК-дифференцируем в точке t_0, а для СВ $\xi^{'}(t_0)$ существовали МО и КФ $\Leftrightarrow$ чтобы существовали производная $\dfrac{dM\xi(t)}{dt}$ в точке t_0 и смешанная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 R_\xi(t,s)}{\partial t\partial s}$ в точке (t_0,t_0).

Следствие. Если $\xi(t)$ СК-дифференцируем на T, то его производная в СК-смысле $\xi^{'}(t)$ имеет МО $M\xi^{'}(t)$ и КФ $R_{\xi^{'}}(t,s)$, определенные формулами:

$$M\xi^{'}(t) = \frac{dM\xi(t)}{dt}, R_{\xi^{'}}(t,s) = \frac{\partial^2 R_\xi(t,s)}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2 R_\xi(t,s)}{\partial s\partial t} \tag{6}$$

Следствие. Пусть $\xi(t)$ – СК-дифференцируемый на множестве Т стационарный СП с постоянным МО и КФ $R_\xi(t)$. Тогда его производная в СК-смысле $\xi^{'}(t)$ имеет математическое ожидание $M\xi^{'}(t)=0$ и ковариационную функцию $R_{\xi^{'}}(t) = -R_\xi^{''}(t)$.

Совместная КФ процесса и его производной:

$$\begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(t,s) & R_{\xi\xi^{'}}(t,s) \\ R_{\xi^{'}\xi}(t,s) & R_{\xi^{'}\xi^{'}}(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\xi(t,s) & \dfrac{\partial R_\xi(t,s)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial R_\xi(t,s)}{\partial t} & \dfrac{\partial^2 R_\xi(t,s)}{\partial s\partial t} \end{pmatrix}$$

Для стационарного СП:

$$\begin{pmatrix} R_{\xi\xi}(t) & R_{\xi\xi^{'}}(t) \\ R_{\xi^{'}\xi}(t) & R_{\xi^{'}\xi^{'}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\xi(t) & -R_\xi^{'}(t) \\ R_\xi^{'}(t) & -R_\xi^{''}(t) \end{pmatrix}$$

def: $\xi(t)$ называется **дифференцируемым потраекторно на** T, если почти все его траектории $\xi(t,\omega)$ – дифференцируемые функции, т.е. $\{\omega : \xi(t,\omega)$дифференцируема на $T\} = 1$.

Если $\xi^{'}(t), t\in T$, – СК-производная СП $\xi(t)$, а $\dot{\xi}(t), t\in T$ - потраекторная производная, то $P\{\xi^{'}(t) = \dot{\xi}(t)\} = 1$, т.е. СП $\xi^{'}(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ стохастически эквивалентны.

24 Интегрирование случайных функций. Критерий. (СК-интегрируемость, потраекторная).

Пусть СП $\xi(t)$ определен на отрезке $[a,b] = T \subseteq \mathbb{R}$. Построим некоторое разбиение

$$a = t_0 < t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1} \leqslant t_n = b,$$

и на каждом из промежутков этого разбиения выберем произвольную точку $\tau_i = [t_{i-1}, t_i), i = \overline{1,n}$.

def: Если при $n \to \infty$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$ существует $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{\text{с.к.}} \eta$, не зависящий от способа разбиения $\{t_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$, то СП $\xi(t)$ называется **СК-интегрируемым** на $[a,b]$, а СВ η называется его СК-интегралом и обозначается $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)dt$.

Критерий. Для существования СК-интеграла $\int\limits_a^b \xi(t)dt \Leftrightarrow$ чтобы существовали следующие интегралы Римана:

$$I_1 = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt, \tag{7}$$

$$I_2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b R_\xi(t,s)dtds, \tag{8}$$

Теорема. Пусть $\xi(t)$ - СК-непрерывный СП, тогда:

1. $M\int\limits_a^b \xi(t)dt = \int\limits_a^b m_\xi(t)dt = I_1$,
2. $\text{cov}\{\int\limits_a^b \xi(t)dt, \xi(s)\} = \int\limits_a^b R_\xi(t,s)dt, s \in T$,
3. $\text{cov}\{\int\limits_a^b \xi(t)dt, \int\limits_a^b \xi(s)ds\} = \int\limits_a^b \int\limits_c^d R_\xi(t,s)dtds, [c,d] \subseteq T$,
4. $D\int\limits_a^b \xi(t)dt = \int\limits_a^b \int\limits_a^b R_\xi(t,s)dtds = I_2$.

Утверждение. Если $\xi(t)$ – гауссовский СП, то СК-интеграл $\int\limits_a^b \xi(t)dt$ есть гауссовская СВ со средним I_1 и дисперсией I_2, определенными в (7), (8).

Утверждение. Всякий СП $\xi(t)$ СК-непрерывный на конечном промежутке $[a,b]$, является СК-интегрируемым на $[a,b]$.

Утверждение. Кусочно-непрерывная на отрезке функция СК-интегрируема на нем.

25 Интегрирование случайных функций с весом. Критерий.

def: $\xi(t), t \in T = [a, b]$, называется **интегрируемым в СК-смысле на множестве T с весом** $\phi(t, s), t, s \in T$, где $\phi(t, s)$ - неслучайная функция, если существует СП $\eta(t), t \in T$ такой, что независимо от способа разбиения $\{s_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$, существует

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(t, \tau_i)\xi(\tau_i)(s_i - s_{i-1}) \xrightarrow{\text{с.к.}} \eta(t),$$

при $n \to \infty, \max\limits_{i=1,\dots,n}(s_i - s_{i-1}) \to 0$.

Обозначают $\eta(t) = \int\limits_a^b \phi(t, s)\xi(s)ds, t \in T$.

Теорема. СП $\xi(t), t \in T = [a, b]$, является СК-интегрируемым на множестве с весом $\phi(t, s) \Leftrightarrow$ когда на T с весом $\phi(t, s)$ интегрируемо его МО и на $T \times T$ с весом $\phi(t, s_1) \cdot \phi(t, s_2)$ интегрируема его КФ.

1. $M\eta(t) = \int\limits_a^b \phi(t, s)m_\xi(s)ds$,
2. $R_\eta(t_1, t_2) = \int\limits_T \int\limits_T \phi(t_1, s_1)\phi(t_2, s_2)R_\xi(s_1, s_2)ds_1 ds_2$,
3. $D\eta(t) = \int\limits_T \int\limits_T \phi(t, s_1)\phi(t, s_2)R_\xi(s_1, s_2)ds_1 ds_2 \geqslant 0$,
4. $R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int\limits_T \phi(t_2, s)R_\xi(t_1, s)ds$.

def: Пусть почти все реализации $\xi(t, \omega)$ СП $\xi(t)$ интегрируемы по Риману на множестве T, т.е.

$$P\{\omega : \exists \text{ интеграл Римана } \eta(\omega) = \int\limits_T \xi(t, \omega)dt\} = 1. \tag{9}$$

Тогда η – потраекторный интеграл

26 Операторы. Действие линейного оператора на случайный процесс. Примеры операторов.

def: Линейным однородным оператором L_O (ЛОО) называтся оператор, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $L_O[C\xi(t)] = CL_O[\xi(t)], C = const.$
2. $L_O[\xi_1(t) + \xi_2(t)] = L_O[\xi_1(t)] + L_O[xi_2(t)].$

def: Линейным неоднородным оператором L_H (ЛНО) называется сумма линейного однородного оператора L_O и некоторой заданной неслучайной функции $\phi(t)$, т.е.

$$L_H[\xi(t)] = L_O[\xi(t)] + \phi(t).$$

def: Операторы N, которые не удовлетворяют указанным выше условиям, называются **нелинейными**.

Если $\xi(t)$ – СП с МО $m_\xi(t)$ и КФ $R_\xi(t,s)$ преобразуется ЛОО L_O в СП $\eta(t)$, т.е. $\eta(t) = L_O[\eta(t)]$, то его МО $m_\eta(t)$ получается из $m_\xi(t)$ при помощи того же оператора L_O: $m_\eta(t) = L_O[m_\eta(t)]$, а для нахождения КФ $R_\eta(t,s)$ нужно применить к $R_\eta(t,s)$ ЛОО L_O один раз по t, другой раз, к вновь полученному выражению, по s:

$$R_\eta(t,s) = L_O^S[L_O^T[R_\xi(t,s)]] = L_O^T[L_O^S[R_\xi(t,s)]] \tag{10}$$

Утверждение. Если $\xi(t)$ – СП с МО $m_\xi(t)$ и КФ $R_\xi(t,s)$ преобразуется ЛНО L_H, соответствующим однородному оператору L_O, в СП $\eta(t)$, т.е. $\eta(t) = L_H[\xi(t)]$, то

$$m_\eta(t) = L_H[m_\eta(t)] = L_O[m_\xi(t)] + \phi(t),$$

$$R_\eta(t,s) = L_O^S[L_O^T[R_\xi(t,s)]].$$

27 Линейный однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Примеры.

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}.$$

Пусть $\xi(t)$ - стационарный СП с $M\xi(t) = m_\xi$ и $R_\xi(t)$.
Оператор переводит его также в стационарный СП

$$\eta(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t).$$

$$M\eta(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)M\xi(t) = a_0 m_\xi,$$

$$R_{\eta\eta}(t-s) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{P}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)R_{\xi\xi}(t-s),$$

$$R_{\xi\eta}(t-s) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)R_{\xi\xi}(t-s),$$

где $\overline{P}\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\frac{d^k}{dt^k}$.

$$R_{\eta\eta}(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\overline{P}\left(-\frac{d}{dt}\right)R_{\xi\xi}(t),$$

$$R_{\eta\xi}(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)R_{\xi\xi}(t),$$

$$R_{\xi\eta}(t) = \overline{P}\left(-\frac{d}{dt}\right)R_{\xi\xi}(t).$$

28 Линейный однородный оператор интегрирования. Примеры.

ЛОО интегрирования применим к действительному СП $\xi(t), t \in T = [a, b]$.

$$\eta(t) = A\left[\xi(t)\right] = \int\limits_a^b A(t, s)\xi(s)ds,$$

где $A(t, s)$ - **весовая функция**.

$$m_\eta(t) = M\int\limits_a^b A(t, s)\xi(s)ds = \int\limits_a^b A(t, s)m_\xi(s)ds = A\left[m_\xi(t)\right],$$

$$R_\eta(t, s) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b A(t, t_1)\overline{A(s, s_1)}R_\xi(t_1, s_1)dt_1 ds_1 = \overline{A^S}\left[A^t\left[R_\xi(t, s)\right]\right],$$

$$R_{\eta\xi}(t, s) = \operatorname{cov}\left\{\int\limits_a^b A(t, t_1)\xi(t_1)dt_1, \xi(s)\right\} = \int\limits_a^b A(t, t_1)R_\xi(t_1, s)dt_1 = A^t\left[R_\xi(t, s)\right],$$

где $\overline{A}\left[R_\xi(t)\right] = \int\limits_a^b \overline{A(t, s)}\xi(s)ds$.

29 Дифференциальные уравнения со случайной правой частью.

$$\eta^{'}(t) = a(t) \cdot \eta(t) + b(t) \cdot \eta(t), t \geqslant 0, \tag{11}$$

$$\eta(0) = v, \tag{12}$$

где $\eta^{'}(t)$ – СК-производная $\eta(t)$, $\xi(t)$ – СК-непрерывная СФ, $a(t), b(t)$ – непрерывные неслучайные функции, v - некоторая СВ.

СП $\eta(t), t \geqslant 0$ является решением уравнения (11) с начальным условием (12), если при $\forall\ t \geqslant 0$ выполнено

$$\eta(t) = v + \int\limits_0^t a(\tau)\eta(\tau)d\tau + \int\limits_0^t b(\tau)\xi(\tau)d\tau.$$

$$\Theta^{'}(t) = a(t) \cdot \Theta(t), t \geqslant 0; \Theta(0) = 1. \tag{13}$$

$\Theta(t) \neq 0$ при $\forall\ t \geqslant 0$, если $a(t)$ кусочно-непрерывна.

Общее решение уравнения (11) имеет вид:

$$\eta(t) = \Theta(t)v + \Theta(t)\int\limits_0^t \Theta^{-1}(\tau)b(\tau)\xi(\tau)d\tau, \tag{14}$$

где $\Theta(t)$ – решение уравнения (13).

30 Эргодические по отношению к математическому ожиданию случайные процессы.

$\xi(t), t \in T = [0, m]$, - действительный СП с $M\{\xi^2(t)\} < \infty$.

$$m_\xi(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi_k(t_1),$$

$$R^0_\xi(t_1, t_1+\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi_k(t_1)\xi_k(t_1+\tau),$$

$$m_{\xi_k} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int\limits_0^m \xi_k(t)dt,$$

$$R^0_{\xi_k}(\tau) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int\limits_0^m \xi_k(t)\xi_k(t+\tau)dt,$$

def: СП $\xi(t)$, СК-интегрируемый на множестве T с весом $\dfrac{1}{m}$ и обладающий постоянным МО m_ξ , называется **эргодическим** по отношению к МО m_ξ, если существует

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int\limits_0^m \xi(t)dt = m_\xi,$$

или

$$\lim_{m\to\infty} M\left[\left|\frac{1}{m}\int\limits_0^m \xi(t)dt - m_\xi\right|^2\right] = 0.$$

Теорема. Пусть $\xi(t)$ – СК-интегрируемый СП на множестве T с весом $\rho(t)$, где $\rho(t)$ – некоторая произвольная неслучайная интегрируемая на T функция. Необходимым и достаточным условием для эргодичности $\xi(t)$ относительно МО m_ξ является

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_0^m \int\limits_0^m \rho(t_1)\rho(t_2)R_\xi(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0.$$

Следствие. Если в условиях теоремы (предыдущей) $\rho(t) = \dfrac{1}{m}, t \in T = [0, m]$, то необходимое и достаточное условие эргодичности $\xi(t)$ относительно МО принимает вид

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2} \int\limits_0^m \int\limits_0^m R_\xi(t_1,t_2)dt_1dt_2 = 0. \tag{15}$$

Теорема. Пусть СП $\xi(t)$, СК-интегрируемый на множестве T с весом $\dfrac{1}{m}$, имеет постоянное МО m_ξ. Тогда для его эргодичности относительно МО достаточно существование предела

$$\lim_{|t_1-t_2|\to\infty} R_\xi(t_1,t_2) = 0. \tag{16}$$

Замечания.

1. Необходимым и достаточным условием для эргодичности относительно МО стационарного СП является $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m} \int\limits_0^m \left[1 - \dfrac{t}{m}\right] R_\xi(t)dt = 0,$
2. Достаточным условием для эргодичности относительно МО стационарного СП является $\lim\limits_{t\to\infty} R_\xi(t) = 0.$

Замечание. Пусть $\xi(t, w)$ известная реализация эргодического по отношению к МО процесса $\xi(t)$. Тогда в качестве оценки МО можно использовать: $m_\xi = \dfrac{1}{m} \int\limits_0^m \xi(t,\omega)dt.$

Замечание. $\xi(t)$, СК-интегрируемый на множестве T с весом $\frac{1}{m}$, называется **эргодическим по отношению к некоторой функции** $f(x)$, если существует

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^m f(\xi(t))dt = M\{f(\xi(t))\}.$$

31 Эргодические по отношению к дисперсии случайные процессы.

Если $\xi(t)$ – действительный стационарный СП с $m_\xi = const, D_\xi = D\xi(t) = const$, то СП $(\xi(t) - m_\xi)^2$ имеет постоянное МО D_ξ и при выполнении соответствующих условий является эргодическим по отношению к МО.

Т.о., исходный СП $\xi(t)$ является **эргодическим по отношению к дисперсии**, и имеется возможность построения качественной оценки для его дисперсии по одной реализации.

def: Стационарный СП $\xi(t), t \in T = [0, m]$, СК-интегрируемый на множестве T с весом $\dfrac{1}{m}$ и обладающий постоянными МО m_ξ и дисперсией D_ξ, называют **эргодическим по отношению к дисперсии** D_ξ, если существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int\limits_0^m \left[\xi(t) - m_\xi\right]^2 dt = D_\xi.$$

Если $\xi(t)$ эргодический по отношению к дисперсии D_ξ, то СП $\eta(t) = \left[\xi(t) - m_\xi\right]^2$ эргодический относительно МО $\{\eta(t)\} = D_\xi$.

Т.о., условие

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2} \int\limits_0^m \int\limits_0^m R_\eta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

необходимо и достаточно, а условие

$$\lim_{|t_1 - t_2|\to\infty} R_\eta(t_1, t_2) = 0$$

достаточно для эргодичности исходного СП $\xi(t)$ относительно дисперсии.

Для надежного определения искомых характеристик по одной единственной реализации необходимо брать интервал осреднения m во много раз больше, чем время корреляции

$$t_0 = \frac{1}{R_\xi(0)} \int\limits_0^{+\infty} |R_\xi(t)| dt.$$