Syroid

Collective work

25 июля 2013 г.

Содержание

Часть I

Семестр 1

1 Действительные числа

1.1 Введение

Определение понятия действительного числа, начнем с определения множества натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Множество натуральных чисел определяется пятью аксиомами Пеано (акиомами арифметики) индуктивно:

1. 1 является натуральным числом;
2. Число, следующее за натуральным, тоже является натуральным;
3. 1 не следует ни за каким натуральным числом;
4. Если натуральное число a непосредственно следует как за числом b, так и за числом c, то b и c тождественны;
5. (Аксиома индукции. Принцип математической индукции.) Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа (индукционное предположение), то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Упражнение !Здесь нужна красивая и точная формулировка задачи про лошадей.

0 в множество натуральных чисел не входит, однако зачастую достаточно удобным оказывается ввести множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ определим следующим образом:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Рациональные числа. Множество целых чисел порождает множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+,\ \textbf{НОД}(m, n) = 1\}.$$

Иными словами множество рациональных чисел, составляем множество отношений таких пар m и n, что m и n являются целыми взаимно простыми числами и n положительное.

На множестве $\mathbb{Q}$ определена операция сложения:

$$r + r' = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + mm'}{mm'},\ r, r' \in \mathbb{Q}$$

и операция умножения

$$rr' = \frac{m}{n}\frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'},\ r, r' \in \mathbb{Q}.$$

В множестве $\mathbb{Q}$ выполняются все четыре арифметические операции (кроме деления на 0) и есть соотношение порядка: $r < r'$ означает, что $mn' < m'n$. Всякому рациональному числу можно поставить в соответсвие символ бесконечной десятичной переодической дроби. Каждой бесконечной десятичной переодической дроби ставится символ рационального числа. У рациональных чисел, которые являются десятичными дробями ($n = 10^k, k \in \mathbb{N}$) и только у них, есть два десятичных представления:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5(0) = 0,4(9)$$

Покажем это

$$0,4(9) = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots) = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\frac{10}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

1.2 Определение действителных чисел. Сравнение действительных чисел

Множество $\mathbb{Q}$ – множество всевозможных *периодических* десятичных дробей. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ – множество всевозможных десятичных дробей.

$$R = \{\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots} | a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$

Если мы имеем бесконечную десятичную непериодическую дробь, то число иррационально.

Теорема 1.1. *Критерий равенства действительных чисел (необходимое и достаточное условие): Для того чтобы число a равнялось числу b необходимо и достаточно, чтобы $|\Delta_n(a,b)|$ не превосходила 10^{-n} для всех $n \in \mathbb{N}_0$, т.е*

$$a = b \Leftrightarrow |\Delta_n(a,b)| \leq 10^{-n},\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Delta_n(a,b) = \overline{b_0, b_1 \ldots b_n} - \overline{a_0, a_1 \ldots a_n}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Очевидно. Если a, а значит и b не десятичная дробь, то все знаки a_i совпадают со знаками b_i $(\forall i \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow \Delta_n(a,b) = 0$.

Если a и b десятичные дроби, то у них есть два представления: с 9 в периоде и 0 в периоде. Пусть a имеет 9 в периоде, а b имеет 0 в периоде. Тогда существует такое m, что $\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_m} + 10^{-m} = \overline{b_0, b_1 b_2 \ldots b_m}$ $\Rightarrow |\Delta_m(a,b)| = 0$.

Так как далее у a идут 9, а у b 0, то $\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots a_n} + 10^{-m} = \overline{b_0, b_1 b_2 \ldots b_n},\ \forall n > m \Rightarrow |\Delta_n(a,b)| = 0$.
$\Leftarrow$

Если $|\Delta_n(a,b)| = 0$. $\forall n \Rightarrow a_i = b_i,\ \forall i \Leftarrow a = b$.

Если $|\Delta_m(a,b)| = 0,\ \forall n < m, |\Delta_m(a,b)| = 10^{-m} \Rightarrow |\Delta_n(a,b)| = 10^{-n},\ \forall n \geq m$

Тогда после m-ого места у одного числа идут 9, а у другого 0 $\Rightarrow a = b$ ☐

1.2.1 Сравнение действительных чисел

$$a < b \Leftrightarrow \overline{a_0, a_1 \ldots a_n} \leq \overline{b_0, b_1 \ldots b_n} \forall n$$

1.3 Числовые последовательности

Числовая последовательность *— любая функция, определённая на $\mathbb{N}$, то есть, функция вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Обозначается $(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

a_n — n-ный элемент последовательности.

$\{a_n\}$ — множество элементов последовательности.

$(a_n) = 1, 2, 1, 2, \ldots$

$\{a_n\} = \{1, 2\}$

Остатком *последовательности a_n с индексом m (m-м остатком) называют последовательность $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$*

*Последовательность называется **ограниченной**, когда ограничено множество её элементов, то есть*

$$\exists m\ \exists M : m \leq a_n \leq M\ \forall n$$

или по-другому

$$\exists M : |a_n| \leq M\ \forall n$$

Очевидно, что ограниченность последовательности вызывает ограниченность любого его остатка. Когда ограничен хотя бы один остаток, ограничена вся последовательность.

1.3.1 Бесконечно малые последовательности

*(a_n) — **БМП**, если $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| \leq \epsilon$.*

Отрицание: $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \nu_\epsilon, \exists n_0 \geq \nu_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| > \epsilon_n$.

*α_n - **стационарная** (сохраняет постоянное значение), если $\alpha_n = a, \forall n$.*

Свойства:

1. *Когда БМП стационарная, $a_n = 0, \forall n$.*

Доказательство. **От противного:** пусть $a_n = a \neq 0, \forall n$.

$\epsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$. Раз последовательность бесконечно малая, $\exists \nu_\epsilon, |\alpha_n| \leq \epsilon_0 . |a| \leq \frac{|a|}{2} \Rightarrow a = 0$.

Противоречие, так что $a = 0$. □

2. *Любая БМП ограничена.*

   (α_n) *бесконечно малая* $\Rightarrow$ (α_n) *- ограниченная.*

   Доказательство. $\epsilon_0 = 1, 1 > 0$

   Тогда $\exists \nu_{\epsilon_0}, |\alpha_n| \leq 1, \forall n \geq \nu_{\epsilon_0}$. □

3. *Произведение БМП и ограниченной последовательности – снова БМП.*

   (α_n) *– бесконечно малая и* (a_n) *– ограниченная* $\Rightarrow$ $(\alpha_n \cdot a_n)$ *- бесконечно малая.*

   Доказательство. (α_n) – бесконечно малая $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| \leq \epsilon$.

   (a_n) – ограниченная $\Rightarrow \exists M : |a_n| \leq M$.

   тогда $|\alpha_n \cdot a_n| \leq M \cdot \epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon$, что и доказывает, что произведение будет БМП (*M-лемма*).

   М-лемма. $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon : \forall n \geq \nu_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| \leq M \cdot \epsilon$.

   Где M не зависит ни от ϵ, ни от n. Тогда (α_n) – бесконечно малая.

   $M = 0 \Rightarrow |\alpha_n| \leq 0 \Rightarrow |\alpha_n| = 0 \ \forall n$, то есть (α_n) – БМП.

   $M \neq 0, \epsilon > 0$. Строим $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M} > 0$, по условию $\exists \nu_{\epsilon'}, \forall n \geq \nu_{\epsilon'} : |\alpha_n| \leq M \cdot \epsilon' = \epsilon$

   $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_{\epsilon'}, \forall n \geq \nu_{\epsilon'} \Rightarrow |\alpha_n| \leq \epsilon$ □

4. *Произведение конечного числа БМП – снова БМП.*

   Доказательство. (α_n) и (β_n) – БМП. По свойству 2 β_n ограничена, по свойству 3 $(\alpha_n) \cdot (\beta_n)$ – БМП. □

5. *Сумма конечного числа БМП есть БМП.*

   Доказательство. (α_n) и (β_n) – БМП.

   $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon : |\alpha_n| \leq \epsilon$

   $\exists \nu_{\epsilon'}, \forall n \geq \nu_{\epsilon'} : |\beta_n| \leq \epsilon$

   Тогда $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| \leq 2 \cdot \epsilon, \forall n \leq \max\{\nu_\epsilon, \nu_{\epsilon'}\}$.

   Тогда по *M-лемме* сумма – БМП. □

1.3.2 Бесконечно большие последовательности

(A_n) – ***ББП***, *если* $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon : |A_n| \geq \epsilon$.

Связь ББП и БМП:

1. *Если* (α_n) *– БМП и* $\alpha_n \neq 0, \forall n$, *то* $(A_n) = (\frac{1}{\alpha_n})$ *– ББП.*

2. *Если* (A_n) *– ББП и* $A_n \neq 0, \forall n$, *то* $(\alpha_n) = (\frac{1}{A_n})$ *– БМП.*

   Доказательство. (α_n) – БМП $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \epsilon' = \frac{1}{\epsilon} > 0, \exists \nu_{\epsilon'}, \forall n \geq \nu_{\epsilon'} : |\alpha_n| \leq \epsilon' \Rightarrow |A_n| = |\frac{1}{\alpha_n}| = \frac{1}{|\alpha_n|} \geq \frac{1}{\epsilon'} = \epsilon$. □

1.3.3 Сходящиеся последовательности

(a_n) — ***сходящаяся***, *когда* $\exists a \in \mathbb{R}$, *что* $a_n = a + \alpha_n$, *где* α_n *– БМП,* a *– предел последовательности* (a_n).

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *или* $a_n \to a$, $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon : |a - a_n| = |\alpha_n| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq a_n - a \leq \epsilon$.

В частности, БМП сходящаяся, а её предел равен 0.

Свойства сходящихся последовательностей:

1. *Любая сходящаяся последовательность ограничена.*

   (a_n) *- сходящаяся* $\Rightarrow$ (a_n) *- ограниченная.*

   $|a_n| \leq |a| + 1 = M, \forall n \geq \nu_1$.

   Замечание: *когда последовательность ограниченная, она необязательно будет сходящейся (пример:* $1, -1, 1, -1, \dots$*)*

2. *Сумма сходящихся последовательностей тоже сходится.*

   $(a_n) \to a, (b_n) \to b, (a_n + b_n) \to a + b$

   $lim(a_n + b_n) = lim(a_n) + lim(b_n)$

   Доказательство. $\begin{cases} a_n = a + \alpha_n \\ b_n = b + \beta_n \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$ □

3. *Произведение сходящихся последовательностей – сходящаяся последовательность, а её предел равен произведению пределов.*

   Доказательство. $\begin{cases} a_n = a + \alpha_n \\ b_n = b + \beta_n \end{cases} \Rightarrow a_n \cdot b_n = a \cdot b + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot b + \alpha_n \cdot \beta_n$ □

4. $(a_n) \to a, (b_n) \to b \neq 0, b_n \neq 0, \forall n$

   $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

   Доказательство. $\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n} = \frac{(a+\alpha_n)\cdot b - a\cdot(b+\beta_n)}{b\cdot b_n} = \frac{\alpha_n \cdot b - a \cdot \beta_n}{b \cdot b_n}$

   Докажем, что $\frac{1}{b \cdot b_n}$ – ограниченная, потому что $b_n \to b \neq 0$ и $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$. Тогда $|\frac{1}{b\cdot b_n}| = \frac{1}{|b|\cdot|b_n|} \leq \frac{2}{|b^2|} = M$ □

   Примечание: *арифметические операции для сходящихся последовательностей дают сходящиеся последовательности (для частного предел делителя не равен нулю).*

5. *Предельный переход в неравенствах.* $(a_n) \to a, (b_n) \to b$

   $a_n \leq b_n \ \forall n \Rightarrow a \leq b$

   Доказательство. от противного: Пусть $a > b$. $b_n < a_n$ - противоречие. (**!!!** тут явно не всё). □

6. *Лемма про двух милиционеров (сжатой последовательности).*

   $\begin{cases} a_n \to a \\ b_n \to b \\ a_n \leq c_n \leq b_n \end{cases} \Rightarrow c_n \to a$

1.3.4 Монотонная последовательность

(a_n) — **возрастающая**, *когда* $a_{n+1} \geq a_n, \forall n$.

(a_n) — **строго возрастающая**, *когда* $a_{n+1} > a_n, \forall n$.

Аналогично – **убывающая** *и* **строго убывающая** *последовательность.*

Теорема 1.2 (Критерий сходимости монотонной последовательности)**.** *Чтобы монотонная последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.*

Доказательство.

$\Leftarrow$ **(необходимость):**

дано: сходящаяся

доказать: ограниченная

Выполняется по свойству 1 сходящейся последовательности.

$\Rightarrow$ **(достаточность):**

дано: ограниченная

доказать: сходящаяся

$a = sup\{a_n\}$ (множество непустое и ограниченное, a существует по теореме о гранях).

Тогда $\forall n : a_n \leq a$.

$\forall \epsilon > 0, \exists N : a - \epsilon < a_N$

$\forall n > N : a - \epsilon < a_n < a + \epsilon, -\epsilon < a_n - a < \epsilon$

$|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq N = \nu_\epsilon$.

Сходящаяся по определению.

$\square$

1.3.5 Натуральное основание e. Число Непера

По определению $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Докажем, что $(a_n), a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *- сходящаяся, для чего убедимся, что* a_n *возрастающая и ограниченная* $(M = 3)$.

Доказательство. $a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k(\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})$ Забираем по $\frac{1}{n}$ к каждому $n, n-1, \ldots, n-k+1$.

1. Монотонность (a_n). При переходе от n к $n+1$ каждое слагаемое увечивается и появляется ещё одно положительное слагаемое. $a_{n+1} > a_n, \forall n$.

2. Ограниченность (a_n). $a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots) = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$. $a_n < 3, \forall n, 0 < e \leq 3$.

Упражнение

$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

Доказать, что она убывающая и стремится к e.

Таким образом, последовательность стремится к e справа.

$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, \forall n$ $\square$

!!! *Доказать, что e можно записать как:* $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\Theta\cdot n}{n\cdot n!}, 0 < \Theta_n < 1$

Иррациональность e.

Доказательство. Пусть $e \in \mathbb{Q}$, тогда можно написать $e = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$.

$p = e\cdot q$

$p\cdot(q-1)! = e\cdot q! = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\cdot q! = \sum_{k=0}^\infty \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0} q\frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^\infty \frac{q!}{k!}$

$\sum_{k=q+1}^\infty \frac{q!}{k!} = p\cdot(q-1)! - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$

Отсюда имеем, что $\sum_{k=q+1}^\infty \frac{q!}{k!}$ - целое число.

Но с другой стороны,

$$\sum_{k=q+1}^\infty \frac{q!}{k!} = [m = k-q] = \sum_{m=1}^\infty \frac{q!}{(q+m)!} = \sum_{m=1}^\infty \frac{q!}{q!\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+m)} < \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(q+1)^m} = \frac{1}{q} < 1$$

Противоречие, так что e – иррациональное число. $\square$

Логарифмируя (выбираем натуральный логарифм)

$$n\cdot log(1+\frac{1}{n}) < 1 < (n+1)\cdot log(1+\frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{n+1} < ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$\ln x = \log_e x$$

1.3.6 Принцип выбора

У меня всё очень криво, чуть-чуть позже.

1.3.7 Фундаментальная последовательность

(a_n) - *фундаментальная последовательность (последовательность Коши), когда* $\forall\epsilon > 0, \exists\nu_\epsilon, \forall n, m : |a_n - a_m| \leq \epsilon$.

Фундаментальность следует из сходимости.

Теорема 1.3 (Критерий Коши)**.** (a_n) - *сходящаяся* $\Leftrightarrow$ (a_n) - *фундаментальная.*

Доказательство.

$\Leftarrow$ **(необходимость):**

$a = \lim a_n, \forall\epsilon > 0\exists\nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon : |a_n - a| \leq \epsilon\forall n, m \geq \nu_\epsilon \Rightarrow |a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \epsilon + \epsilon = 2 \cdot \epsilon$

$\Rightarrow$ **(достаточность):**

если последовательность фундаментальная, она ограничена. Действительно, если если $\epsilon = 1, \exists\nu_1, \forall n, m \geq \nu_1 \Rightarrow |a_n - a_m| \leq 1$.

Выбираем произвольным образом $m \geq \nu_1$ и фиксируем его. Из предыдущей оценки $-1 + a_m \leq a_n \leq 1 + a_m, \forall n \geq \nu_1$.

Двойное неравенство значит, что существуют ограниченный остаток, то есть вся последовательность ограничена.

Тогда по принципу выбора из (a_n) можно выделить (a_{n_k}), a - предел (a_{n_k}).

Докажем, что $a = \lim a_n$. (a_n) - фундаментальная, так что $\forall\epsilon > 0\exists\nu_\epsilon : \forall n, m \geq \nu_\epsilon \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \epsilon \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| \leq \epsilon\forall n, n_k \geq \nu_\epsilon$

$-\epsilon + a_{n_k} \leq a_n \leq \epsilon + a_{n_k}$

Зафиксируем $n \geq \nu_\epsilon$ и переходим к пределу $n_k \to +\infty$.

Пользуемся свойством "предельный переход под знаком неравенства".

$-\epsilon + a \leq a_n \leq \epsilon + a\forall n \geq \nu_\epsilon|a_n - a| \leq \epsilon \Rightarrow a_n$ - сходящаяся, $a = \lim a_n$.

□

Замечание: *фундаментальность последовательности формулируется на языке только элементов последовательности и поэтому проще, чем сходимость последовательности, в опредении которой появляется a – предел, который неизвестен. Поэтому по крайней мере теоретически доказать сходимость последовательности проще, доказав её фундаментальность.*

Например: $a_n = 1 + \frac{sin(1)}{2} + \frac{sin(2)}{2^2} + \cdots + \frac{sin(n)}{2^n}$.

Исследуем на сходимость. Проверим, фундаментальная ли она. $|a_n - a_m| = [n = m + p] = |\frac{sin(m+1)}{2^{m+1}} + \frac{sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{sin(m+p)}{2^{m+p}}| \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+p}} \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^m} \leq \epsilon\forall m \geq \nu_\epsilon$. $\forall n, m \geq \nu_\epsilon|a_n - a_m| \leq \epsilon$. *Значит, последовательность фундаментальная, и по критерию Коши она сходится.*