三次样条插值法上机报告

计试 81 白思雨 2186123935

一、算法原理

1.1 定义：在区间$[a,b]$上给定$\mathrm{n}+1$个节点$x_i(a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b)$，在节点$x_i$处的函数值为$y_i=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$。若函数$S(x)$满足以下三条：

（1）在每子区间$[x_{i-1},x_i](i=0,1,\cdots,n)$ 上，$S(x)$是三次多项式；

（2）$S(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$；

（3）在区间$[a,b]$上，$S(x)$的二阶导函数$S''(x)$连续；

则称$S(x)$为函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的三次样条插值函数。

由定义知，$S(x)$上有4个待定参数，共有n个子区间，所以$S(x)$共有$4n$个待定参数。由条件知

$$\begin{cases} S_-(x_i)=S_+(x_i)\,(i=1,2,\cdots,n-1) \\ S'_-(x_i)=S'_+(x_i)\,(i=1,2,\cdots,n-1) \\ S''_-(x_i)=S''_+(x_i)\,(i=1,2,\cdots,n-1) \\ S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n) \end{cases}$$

共有$4n-2$个条件，还需要增加两个条件才能确定$4n$个待定参数，即才能确定$S(x)$。所增加的条件称为边界条件或端点条件。

下面为三种常见的边界条件：

(1)已知$f(x)$在区间$[a,b]$两端点a,b处的二阶导数值$f''(a),f''(b)$；

(2)已知$f(x)$在区间$[a,b]$两端点a,b处的一阶导数值$f'(a),f'(b)$

(3)已知$f(x)$是以$T=b-a$为周期的周期函数。

1.2 三次样条插值函数的导出

1. 导出在子区间$[x_{i-1},x_i](i=0,1,\cdots,n)$上的$S(x)$表达式

由于$S(x)$的二阶导数连续，设$S(x)$在节点x_i处的二阶导数值$S''(x_i)=M_i(i=0,1,\cdots,n)$。由于$S(x)$是分段三阶多项式知，$S''(x)$是分段线

性函数，则

$$S''(x_i)=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}M_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}M_i=\frac{x_i-x}{h_i}M_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{h_i}M_i(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,h_i=x_i-x_{i-1})$$

$$\rightarrow S(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+b_i(x_i-x)+c_i(x-x_{i-1})$$

$$\xrightarrow{S(x_{i-1})=y_{i-1},S(x_i)=y_i}b_i=\frac{\left(y_{i-1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i-1}\right)}{h_i},c=\frac{\left(y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i\right)}{h_i}$$

$$\rightarrow S(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+\frac{\left(y_{i-1}-\frac{h_i^2}{6}M_{i-1}\right)}{h_i}(x_i-x)+\frac{\left(y_i-\frac{h_i^2}{6}M_i\right)}{h_i}(x-x_{i-1})\,(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$$

2. 建立关于参数M_i的方程组 对$S(x)$求导得

$$S'(x)=\frac{-(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1}+\frac{(x_{i-1}-x)^2}{2h_i}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_i(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x=x_i}S_-(x)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\\ \xrightarrow{x=x_{i-1},x_{i-1}\longrightarrow x_i,x_i\longrightarrow x_{i+1}}S_+(x_i)=-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}-\frac{h_{i+1}}{3}M_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\end{cases}$$

由于$S(x)$在节点x_i的一阶导数连续性知

$$S'_-(x_i)=S'_+(x_i)\ \ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

化简得

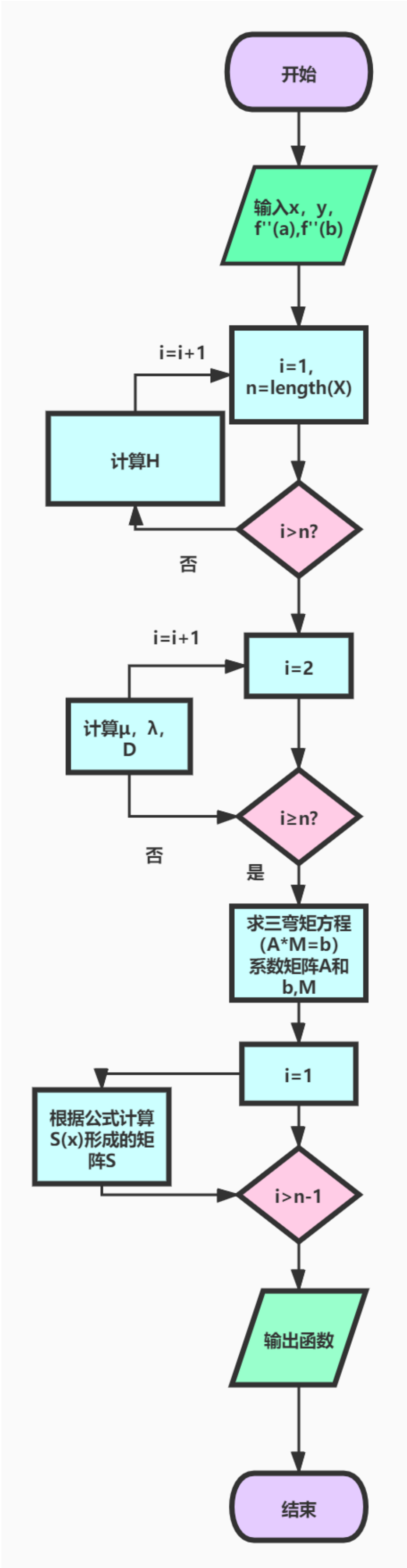
$$\begin{cases}\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i\ \ (i=1,2,\cdots,n-1)\\ \mu_i=\frac{h_i}{h_{i+1}},\lambda_i=1-\mu_i\\ d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]\end{cases}$$

3. 三种边界条件的三弯矩方法

此处使用第一种边界条件：已知$f''(a),f''(b)$. 取$M_0=f''(a),M_n=f''(b)$, 这时三弯矩方程可变为

$$\begin{cases}2M_1+\lambda_1M_2=d_1-\mu_1M_0\\ \mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i\\ \mu_{n-1}M_{n-2}+2M_{n-1}=d_{n-1}-\lambda_{n-1}M_n\end{cases}$$

二、程序框图



开始
输入x，y，f''(a),f''(b)
i=1,
n=length(X)
i=i+1
计算H
i>n?
否
i=i+1
i=2
计算μ，λ，D
i≥n?
否
是
求三弯矩方程(A*M=b)系数矩阵A和b,M
i=1
根据公式计算S(x)形成的矩阵S
i>n-1
输出函数
结束

三、程序及使用说明

```
%首先导入节点 xi,yi 数据值,及 f" (a) , f" (b) 。
X=input('请用户输入节点 xi (i=0,1...n)所组成的矩阵:');
Y=input('请用户输入节点 yi (i=0,1...n)所组成的矩阵:');
M0=input('请输入 f" (a) 的值: ');
Mn=input('请输入 f" (b) 的值: ');

%求 hi 并放入 H 中
n=length(X);
H=zeros(1,n);
for i=2:n
    H(i)=X(i)-X(i-1);
end
%把 miu i 放入 miu 中,把 lanmuda i 放入 lanmuda 中,把 di 放入 D 中
miu=ones(1,n-1);lanmuda=ones(1,n-1);D=zeros(1,n-1);
for i=2:(n-1)
    miu(i)=H(i)/(H(i)+H(i+1));
    lanmuda(i)=1-miu(i);
    D(i)=6/(H(i)+H(i+1))*((Y(i+1)-Y(i))/H(i+1)-(Y(i)-Y(i-1))/H(i));
End

%求三弯矩方程 (A*M=b) 系数矩阵 A 和 b,M

%求 A;
A=zeros(n-2);
for i=1:(n-2)
    A(i,i)=2;
end
for i=1:(n-3)
    A(i,i+1)=lanmuda(i+1);
end
for i=2:(n-2)
    A(i,i-1)=miu(i+1);
End

%求 b;
b=zeros(1,(n-2))';
b(1)=D(2)-miu(2)*M0;
for i=2:(n-3)
    b(i)=D(i+1);
end
b(n-2)=D(n-1)-lanmuda(n-1)*Mn;
M=[M0,(inv(A)*b)',Mn];
```

```matlab
%S(x)形成的矩阵 S
S=zeros(n-1,4);
for  i=1:(n-1)
     syms  x;
   p=((X(i+1)-x)^3)/(6*H(i+1))*M(i)+((x-X(i))^3)/(6*H(i+1))*M(i+1)...
        +(Y(i)-(H(i+1)^2)/6*M(i))*(X(i+1)-x)/H(i+1)+...
        (Y(i+1)-(H(i+1)^2)/6*M(i+1))*(x-X(i))/H(i+1);
   S(i,:)=coeffs(p,x);
End

%输出函数
for  i=1:n-1
     fprintf('从 x(%d)到 x(%d):%f+(%f)*x+(%f)*x^2+(%f)*x^3\n',...
          i-1,i,S(i,1),S(i,2),S(i,3),S(i,4))
end
```

matlab 代码使用说明如注释，直接输入即可

四、算例及计算结果

例题 4.6.1

结果如下

```
命令行窗口
不熟悉 MATLAB? 请参阅有关快速入门的资源。
  请用户输入节点xi (i=0,1,...,n)所组成的矩阵:[-3,-1,0,3,4]
  请用户输入节点yi (i=0,1,...,n)所组成的矩阵:[7,11,26,56,29]
  请输  f″(a) 的值：0
  请输  f″(b) 的值：0
  从x(0)到x(1):28.000000+(25.000000)*x+(9.000000)*x^2+(1.000000)*x^3
  从x(1)到x(2):26.000000+(19.000000)*x+(3.000000)*x^2+(-1.000000)*x^3
  从x(2)到x(3):26.000000+(19.000000)*x+(3.000000)*x^2+(-2.000000)*x^3
fx 从x(3)到x(4):-163.000000+(208.000000)*x+(-60.000000)*x^2+(5.000000)*x^3
```

可见实验结果与原结果相符，实验成功，