

Cours: *Recherche Opérationnelle*

Présenté par: Pr. EL GOUMI Badreddine

Plan du cours:

1. *Introduction à la recherche opérationnelle*
2. *Applications de la programmation linéaire*
3. *Programmation en nombres entiers et optimisation combinatoire*
4. *Graphes orientés et non orientés*
5. *Problème de transport, exemples d'algorithmes de recherche opérationnelle*

Introduction à la recherche opérationnelle

Après le succès remarquable qu'a eu la *Recherche Opérationnelle* dans le domaine militaire lors de la deuxième guerre mondiale, c'était au tour des milieux industriels de s'intéresser à cette nouvelle science. Depuis, la recherche opérationnelle est de plus en plus présente dans le quotidien des gestionnaires : planification de la production, affectation du personnel, gestion des stocks, problèmes de transport (routier, ferroviaire, aérien...), élaboration d'horaires... Tous ces problèmes font appel explicitement ou implicitement à des techniques de recherche opérationnelle. Cet intérêt à cette science, qui a été freiné au début par la complexité des calculs et la lenteur des ordinateurs de la première génération, a eu un essor considérable au cours des dernières décennies avec la puissance remarquable des ordinateurs. Mieux encore, les décideurs et les gestionnaires disposent désormais de plusieurs logiciels de recherche opérationnelle et d'aide à la prise de décision, disponibles sur des ordinateurs personnels de plus en plus rapides. Les utilisateurs de ces logiciels doivent en plus s'assurer que les modèles mathématiques proposés reflètent bien la réalité des problèmes à résoudre.

L'une des disciplines les plus exploitées de la recherche opérationnelle est celle de la *programmation mathématique* qui a comme objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation ainsi que la conception et l'utilisation d'algorithmes de résolution. La programmation mathématique regroupe plusieurs classes de problèmes dont :

- *Programmation linéaire*, (G.B. Dantzig 1949, [1]), pour l'étude des problèmes d'optimisation de fonctions linéaires sous contraintes linéaires.
- *Programmation non linéaire*, (H.W. Kuhn et A.W. Tucker 1951, [2]), pour l'étude des problèmes d'optimisation non linéaires avec ou sans contraintes.
- *Programmation en nombres entiers*, (R.E. Gomory, 1958 [3]), pour l'étude des problèmes d'optimisation où les variables sont astreindre à ne prendre que des valeurs entières
- *Programmation dynamique*, (R. Bellman, 1957, [4]), qui est une approche générale d'optimisation de problèmes dynamiques...

1 Quelques exemples de modèles mathématiques

Un premier problème

Exemple 1 (problème de fleuriste).

Un fleuriste dispose de 45 roses, 36 tulipes et 27 marguerites achetées à M DH. Il veut offrir à ses clients deux types de bouquets de fleurs :

Type 1 : bouquet à 80 DH composé de 10 roses, 4 tulipes et 2 marguerites.

Type 2 : bouquet à 60 DH composé de 6 roses, 6 tulipes et 6 marguerites.

Question

Comment déterminer le nombre de bouquets de chaque type afin de maximiser le revenu total du fleuriste.

Aide à la décision

Problème d'aide à la décision

1. Quelles sont les alternatives possibles ?
2. Quelles sont les restrictions à cette décision ?
3. Quel est l'objectif utilisé pour évaluer les alternatives ?

Modèle de recherche opérationnelle

Ingrédients principaux

- Alternatives (variables, inconnues du problème).
- Restrictions (contraintes).
- Fonction objectif à optimiser (minimiser ou maximiser).

Définition 1 (Solution admissible). Une solution admissible est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes.

Définition 2 (Solution optimale). Une solution optimale est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.

Définition 3 (Modèle de recherche opérationnelle). Maximiser ou minimiser (fonction objectif) Sujet à { contraintes }

Variables : continues (réelles), entières, booléennes (0/1), . . .

Objectif : linéaire / non-linéaire, concave / convexe, . . .

Contraintes : linéaire / non-linéaire, concave / convexe, égalités / inégalités, . . .

Paramètres : connus avec certitude (modèles déterministes) / incertains (modèles stochastiques)

Exemple 2 (Maximisation de la surface d'un rectangle). Supposons que l'on veut plier un fil de fer de longueur L en rectangle de manière à maximiser la surface du rectangle.

Formulation

$$\begin{array}{ll} \max & A = lw \\ \text{s.t.} & l + w = \frac{L}{2} \end{array}$$

Solution

- $A = \left(\frac{L}{2} - w\right) w = \frac{Lw}{2} - w^2$
- $\frac{dA}{dw} = \frac{L}{2} - 2w = 0$
- Solution optimale : $w = l = \frac{L}{4}$

Méthodes de résolution

- Dans l'exemple, solution analytique au problème.
- La plupart des problèmes pratiques sont trop grands ou trop complexes pour être résolus analytiquement.

Méthodes itératives

Déplacement de solution en solution pour atteindre l'optimum (méthodes exactes) ou une "bonne" solution (heuristiques).

- Importance des algorithmes et des solutions informatiques.

2. Tour d'horizon des techniques de recherche opérationnelle

Recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle est une technique d'aide à la décision.

Etapes pratiques

1. Définition du problème
2. Construction d'un modèle
3. Solution du modèle
4. Validation du modèle
5. Implémentation de la solution

Méthodologie

- Les étapes les plus importantes sont la définition du problème (suppose un dialogue avec le décideur) et la construction du modèle (prendre conscience des hypothèses simplificatrices et de leur impact).
- La phase de validation doit permettre de remettre en cause la validité du modèle.
- Une approche globale nécessite donc un aller-retour constant entre le modèle et les attentes du décideur.

Techniques principales

- Programmation linéaire
- Programmation en nombres entiers
- Optimisation dans les réseaux
- Programmation non linéaire
- "Optimisation" multi-critères
- Programmation dynamique
- Modèles stochastiques
- Simulation

Deuxième partie

Applications de la programmation linéaire

3. Définition, exemples et méthodes de résolution

3.1 Notions de bases

Programmation linéaire

Définition 4 (Programme linéaire). Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Applications

Optimisation de l'usage de ressources limitées dans les domaines militaire, industriel, agricole, économique, ...

Existence d'algorithmes très efficaces pour résoudre des problèmes de très grande taille (simplexe, points intérieurs)

3.2 Exemples de modèles linéaires

Exemple 3 (Production de peinture). Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.
- La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

Formulation (Production de peinture)

Alternatives (variables, inconnues du problème)

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur
produites par jour

x_2 = tonnes de peinture
d'intérieur produites par jour

Fonction objectif à optimiser

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

Contraintes:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solutions et méthodes de résolution

- Solution admissible : satisfait toutes les contraintes.

$$x_1 = 3; x_2 = 1 \text{ Alors } z = 19$$

- Nous voulons trouver la solution (admissible) optimale.
- Infinité de solutions admissibles !

Méthodes pour trouver l'optimum

- Méthode graphique
- Simplexe
- (Ellipsoïde, points intérieurs)

Exemple 4 (Diet problem). – On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge et arachide.

- La quantité nécessaire par portion est de 400g.
- L'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30% de protéines et au plus 5% de fibres.

Données

Aliment	Quantité par gramme d'aliment		Coût (EUR / kg)
	Protéines	Fibres	
Orge	0.09	0.02	1.5
Arachide	0.60	0.06	4.5

Formulation (Diet problem)

Variables

x_1 = grammes d'orge par portion

x_2 = grammes d'arachide par portion

Objectif

$$\min z = 0,0015x_1 + 0,0045x_2$$

Contraintes

Quantité totale : $x_1 + x_2 \geq 400$

Protéines : $0,09x_1 + 0,6x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2)$

Fibres : $0,02x_1 + 0,06x_2 \leq 0,05(x_1 + x_2)$

Non-négativité : $x_1; x_2 \geq 0$

Exemple 1 (problème de fleuriste).

Un fleuriste dispose de 45 roses, 36 tulipes et 27 marguerites achetées à M DH. Il veut offrir à ses clients deux types de bouquets de fleurs :

- Type 1 : bouquet à 80 DH composé de 10 roses, 4 tulipes et 2 marguerites.
- Type 2 : bouquet à 60 DH composé de 6 roses, 6 tulipes et 6 marguerites.

Le souci du fleuriste est de déterminer le nombre de bouquets de chaque type afin de maximiser son revenu total.

3.3 Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

Forme standard

Définition 5 (Forme standard). Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

n variables, m contraintes, $m < n$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Forme canonique

Définition 6 (Forme canonique). Un programme linéaire est sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non-négatives.

Représentation matricielle

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

n variables, m contraintes, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Théorème 1 (Equivalence des formes standard et canonique). Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique.

Démonstration.

– Une contrainte d'inégalité $a^T x \leq b$ peut être transformée en égalité par l'introduction d'une variable d'écart :

$$\begin{array}{l}a^T x + s = b, \\ s \geq 0.\end{array}$$

– Une contrainte d'égalité $a^T x = b$ peut être remplacée par deux inégalités :

$$\begin{array}{l}a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b\end{array}$$

- $a^T x \geq b \Leftrightarrow -a^T x \leq -b$.
- $\min c^T x = -\max -c^T x$.
- Variable x non restreinte : substitution par deux variables (partie positive et négative)

$$x = x^+ - x^-$$

$$x^+, x^- \geq 0.$$

Il existe toujours une solution optimale telle que $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$.

Forme standard du problème de production de peinture

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} \quad 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forme standard

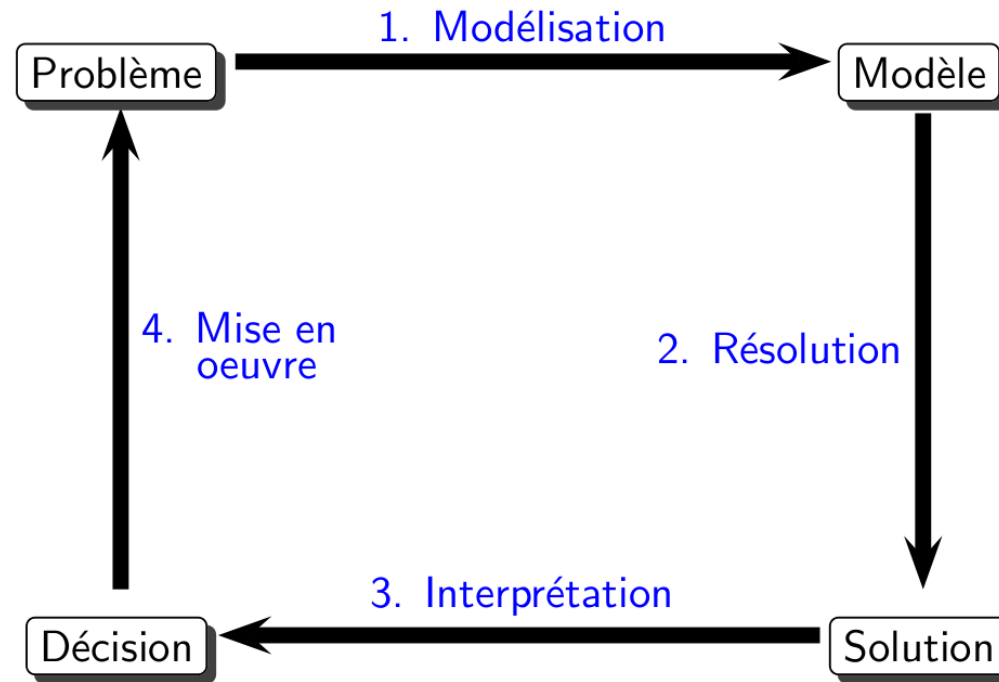
$$\begin{array}{llllll} \max z = & 5x_1 & +4x_2 & & & \\ \text{s.c.} & 6x_1 & +4x_2 & +s_1 & & = 24 \\ & x_1 & +2x_2 & & +s_2 & = 6 \\ & & x_2 & & +s_3 & = 2 \\ & -x_1 & +x_2 & & & +s_4 = 1 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \geq 0 \end{array}$$

Forme matricielle

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Processus d'optimisation



- Analyse du problème
- Modélisation et choix de méthode
- Résolution
- Interprétation des résultats

❖ Exemple de l'agriculteur

- Un agriculteur possède un certain nombre d'hectares (T), d'engrais (E) et d'insecticide (I)
- Possibilité de planter du maïs x_1 ou du blé x_2
- Les cultures requièrent des quantités différentes d'engrais et d'insecticide (E_1, I_1, E_2, I_2)
- Les cultures fournissent un revenu différent (S_1, S_2)
- Objectif : maximiser le revenu net

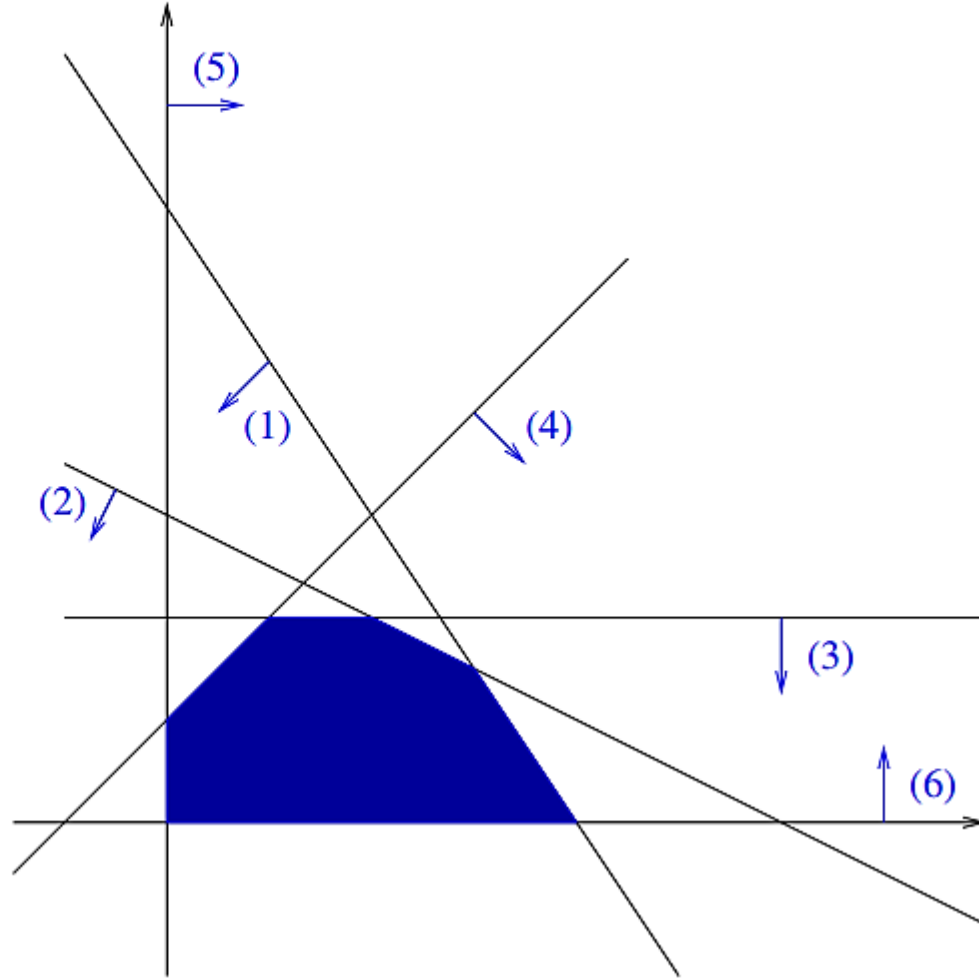
Maximiser	$S_1x_1 + S_2x_2$	(fonction objectif)
soumis à	$x_1 + x_2 \leq T$	(limite terrain)
	$E_1x_1 + E_2x_2 \leq E$	(limite engrais)
	$I_1x_1 + I_2x_2 \leq I$	(limite insecticide)
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	(terrain positif!)

3.4 Résolution de programmes linéaires

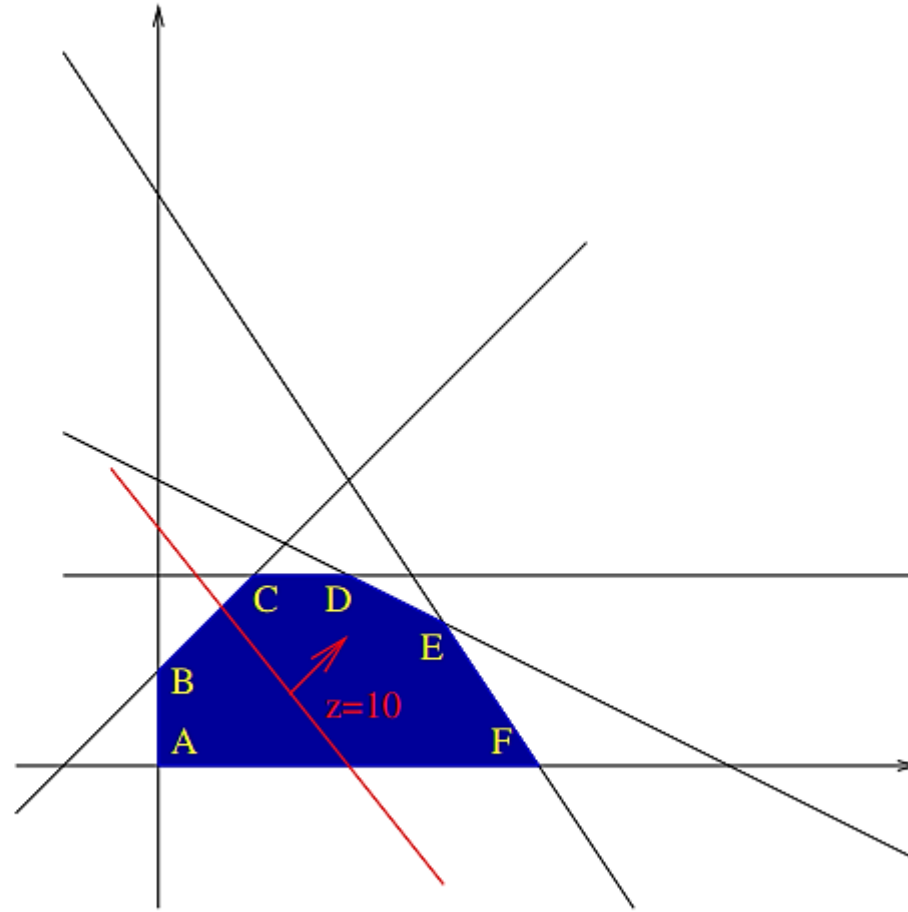
3.4.1 Résolution graphique

Représentation graphique (*Problème de production de peinture*)

$$\begin{aligned}\max z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c. } 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



Géométrie des solutions



Ensemble des solutions admissibles

Polyèdre (ABCDEF)

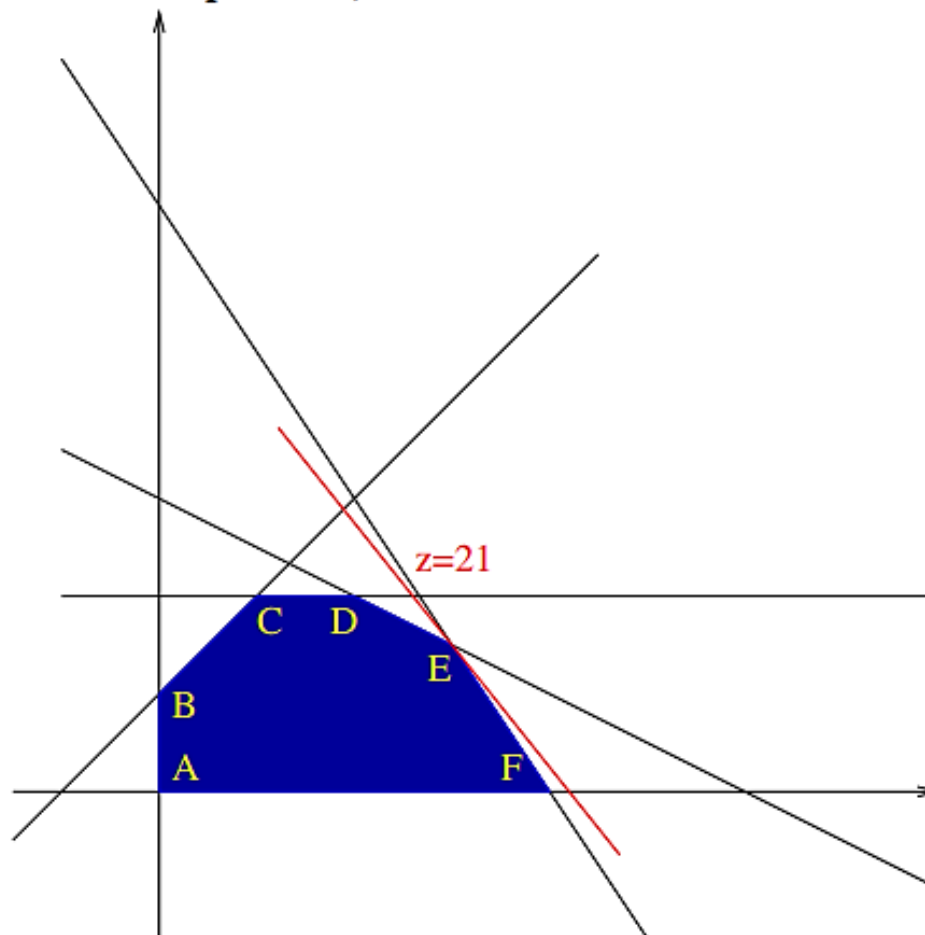
Courbes de niveaux de l'objectif

Ensemble de solutions ayant un profit (valeur de l'objectif) donné : intersection entre une droite et le polyèdre.

Amélioration de la solution

Recherche d'une direction dans laquelle le profit z augmente.

Résolution graphique (Production de peinture)



Recherche de la solution optimale

- La droite mobile doit garder une intersection avec l'ensemble des solutions admissibles.
- Solution optimale : $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ (E)
- La solution optimale est un *sommet du polyèdre*.
- Cette observation est la base de l'algorithme du simplexe.

Diet problem

$$\min z = 0.0015x_1 + 0.0045x_2$$

sous les contraintes

$$x_1 + x_2 \geq 400$$

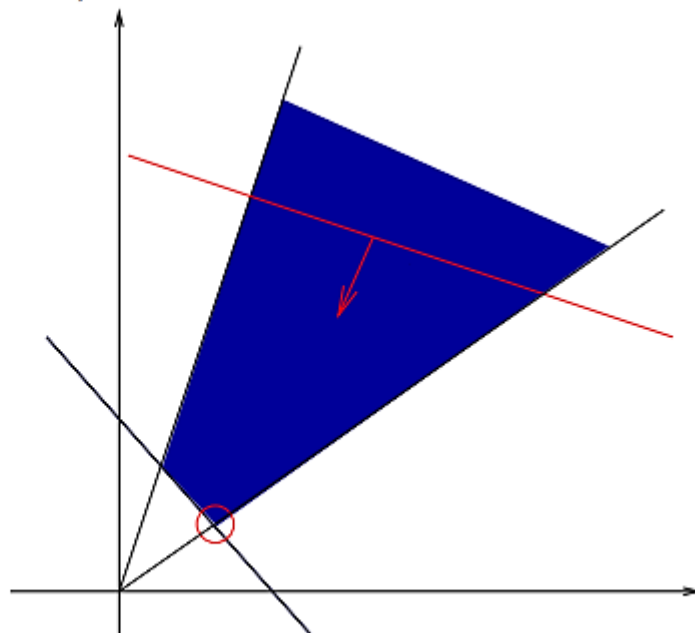
$$0.21x_1 - 0.30x_2 \leq 0$$

$$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Résolution graphique (Diet problem)



Solution optimale

$$x_1 = \frac{4000}{17} \simeq 235.3 \quad x_2 = \frac{2800}{17} \simeq 164.7 \quad z = \frac{186}{170} \simeq 1.094$$

3.4.2 La méthode du simplexe

Idées de base

- Solution optimale : *sommet (point extrême)*.
- Idée fondamentale du simplexe : déplacement de sommet en sommet adjacent de manière à améliorer la fonction objectif.
- Transformation des inégalités en égalités : *forme standard* du programme linéaire - système de m équations à n inconnues ($m < n$).
- Identification algébrique des sommets : correspondance avec les bases d'un système d'équations.

Solutions de base

- Système de m équations linéaires à n inconnues ($m < n$) : infinité de solutions.
- Si on fixe à zéro $n - m$ variables : système de m équations à m inconnues possédant une solution unique (si la matrice est inversible). C'est une *solution de base*.

Définition 7 (Solution de base). Une *solution de base* d'un programme linéaire est la solution unique du système de m équations à m inconnues obtenu en fixant à zéro $n - m$ variables (pourvu que la matrice du système soit inversible).

Les variables fixées à zéro sont appelées *variables hors base* et les autres *variables en base*.

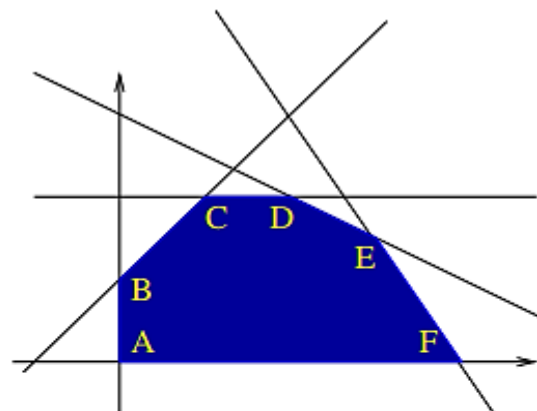
Exemple 6 (Production de peinture). Prenons $B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

$$\begin{aligned} z &= 0 + 5x_1 + 4x_2 \\ s_1 &= 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 &= 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 &= 2 - x_2 \\ s_4 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, alors $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$. Toutes ces valeurs sont non-négatives et la solution est réalisable.

Définition 8 (Solution de base réalisable). Une solution de base telle que toutes les variables prennent des valeurs non-négatives est appelée *solution de base réalisable*.

Géométrie des solutions de base



- Prenons $B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$.
- Cette solution de base réalisable correspond au sommet $(0, 0)$.

Base	Solution	Objectif	Sommet
$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$(0, 0)$	0	A
$\{x_1, s_2, s_3, s_4\}$	$(4, 0)$	20	F
$\{s_1, x_1, s_3, s_4\}$	$(6, 0)$	–	Non réalisable
$\{x_1, x_2, s_3, s_4\}$	$(3, 1.5)$	21	E

Théorème 2. Toute solution de base réalisable correspond à un sommet du polyèdre.

Détermination de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solutions de base : $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
- Algorithme "bête et méchant" : énumération de toutes les bases.
- Méthode du simplexe : partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif.
- Solution voisine : changement d'une variable en base.
- 3 étapes :
 1. Détermination de la variable entrante.
 2. Détermination de la variable sortante.
 3. Pivotage.

L'algorithme du simplexe

Variable entrante

$$\begin{aligned}z &= 0 + 5x_1 + 4x_2 \\s_1 &= 24 - 6x_1 - 4x_2 \\s_2 &= 6 - x_1 - 2x_2 \\s_3 &= 2 \quad \quad -x_2 \\s_4 &= 1 + x_1 - x_2\end{aligned}$$

- Si x_1 (ou x_2) augmente (*entre en base*), la valeur de la fonction objectif z augmente.
- Quelle est la valeur maximale de x_1 ?
- Contraintes : les autres variables doivent rester positives.

Variable sortante

$$\begin{array}{llll} s_1 = & 24 - 6x_1 \geq 0 & \rightarrow x_1 \leq 4 \\ s_2 = & 6 - x_1 \geq 0 & \rightarrow x_1 \leq 6 \\ s_3 = & 2 \geq 0 & \rightarrow 2 \geq 0 & \text{toujours!} \\ s_4 = & 1 + x_1 \geq 0 & \rightarrow x_1 \geq -1 & \text{toujours!} \end{array} \quad \Rightarrow x_1 \leq 4$$

Pivotage

- Si $x_1 = 4$, alors $s_1 = 0$.
- x_1 entre en base, s_1 sort de la base.
- Substitution :

$$x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2$$

- Nouveau système :

$$\begin{array}{llll} z = & 20 & -\frac{5}{6}s_1 & +\frac{2}{3}x_2 \\ x_1 = & 4 & -\frac{1}{6}s_1 & -\frac{2}{3}x_2 \\ s_2 = & 2 & +\frac{1}{6}s_1 & -\frac{4}{3}x_2 \\ s_3 = & 2 & & -x_2 \\ s_4 = & 5 & -\frac{1}{6}s_1 & -\frac{5}{3}x_2 \end{array}$$

Equations du simplexe

- B = indices des variables en base, N = indices des variables hors base.

Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sous les contraintes :

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Présentation en tableau

Présentation compacte pour effectuer les calculs sans répéter les systèmes d'équations.

Itération 1

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
z	-1	5	4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	0	1	0	0	1	0	2
s_4	0	-1	1	0	0	0	1	1

Itération 2

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
z	-1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	0	0	-20
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
s_2	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
s_3	0	0	1	0	0	1	0	2
s_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	5

Itération 3

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
z	-1	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{5}{2}$