





Probabilités et statistiques



- 
- Nombre de crédits : 3
 - Contrôles des connaissances :
 - Première session (Examen terminal : 75%, TP : 25%)
 - Deuxième session (Examen terminal : 100%)
 - Régime Spécial d'Etude (RSE) (Examen terminal : 100%)
- 

SOMMAIRE:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

- *Introduction to Probability Theory with Contemporary Applications*, L.L.Helmes, Dover Publications, Inc., Mineola, New York
- *Basic Probability Theory*, R.B. Ash, Dover Publications, Inc., Mineola, New York
- *Introduction to Probability*, J.E. Freund, Dover Publications, Inc., New York
- *Cours de Probabilités et Statistiques*, A. Perrut, Université Claude Bernar Lyon 1
- *Cours de Probabilités*, F. Delarue, Université Sophia-Antipolis
- *Introduction au Calcul des Probabilités*, L. Mazliak, Université Paris VI
- *Probabilités et Statistiques*, S. Gire et A.R. Mahjoub, Université de Bretagne Occidentale

Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** (ou **épreuve**) est tout phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude

Exemples

- lancer d'une pièce
- lancer d'un dé à six faces
- lancer d'une pièce trois fois de rang

Ensemble fondamental Ω

L'**ensemble fondamental Ω** (ou **univers**) est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire

Exemples

- lancer d'une pièce $\Omega = \{P, F\}$
- lancer d'un dé à six faces $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- lancer d'une pièce trois fois de rang
 $\Omega = \{PPP, FPP, PFP, PPF, PFF, FPF, FFP, FFF\}$

Évènement élémentaire ω

Un **évènement élémentaire** ω est toute issue d'une expérience aléatoire, i.e., tout élément de Ω

Exemples

- lancer d'une pièce : P et F
- lancer d'un dé à six faces : 1, 2, 3, 4, 5 et 6
- lancer d'une pièce trois fois de rang :
 $PPP, FPP, PFP, PPF, PFF, FPF, FFP$ et FFF

Évènement

Un **évènement**, représenté par une lettre majuscule, est tout sous-ensemble de Ω , i.e., toute réunion d'éléments élémentaires

Exemples

- lancer d'une pièce: $A = \{P\}$ "obtenir un pile"
- lancer d'un dé : $B = \{2, 4, 6\}$ "obtenir un chiffre pair"
- lancer d'une pièce trois fois de rang : $C = \{PFP, PFF, FFP, FFF\}$
"obtenir un face au deuxième lancer"

- L'ensemble des évènements coïncide avec l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de l'ensemble fondamental Ω
- Un évènement est **réalisé** si un des évènements élémentaires le constituant est réalisé

notation	terme ensembliste	terme probabiliste
Ω	ensemble plein	évènement certain
\emptyset	ensemble vide	évènement impossible
ω	élément de Ω	évènement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	évènement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	union de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^C ou \bar{A}	complémentaire de A	évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

- Étant donnés
 - une expérience aléatoire d'univers Ω
 - un évènement $A \subset \Omega$
- Supposons que
 - l'expérience aléatoire est répétée N fois
 - $N(A)$ correspond au nombre de fois où l'évènement A est réalisé

Fréquence relative

La **fréquence relative** de A est égale au ratio $\frac{N(A)}{N}$

Probabilité de A

La fréquence relative semble se stabiliser près d'une valeur réelle **$P(A)$** lorsque N devient très grand (loi empirique) ; le nombre $P(A)$ est appelé la **probabilité de l'évènement A**

Probabilité

On appelle **(mesure de) probabilité** toute application P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que

- ① $P(A) \in [0, 1]$ pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
- ② $P(\Omega) = 1$ (i.e., propriété de normalisation)
- ③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour toute paire d'évènements incompatibles A et B (propriété d'additivité)

Espace de probabilité

Le couple (Ω, P) s'appelle **espace de probabilité**

Additivité : $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ pour toute séquence A_1, \dots, A_n
d'évènements deux à deux incompatibles

Probabilité (Definition #2)

Une **(loi de) probabilité** sur l'ensemble $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ est la donnée de
 $(p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

La probabilité d'un évènement est la somme de la probabilité des évènements élémentaires le composant

Un entraîneur de football pense qu'il y a 3 chances contre 2 que son équipe remporte le prochain match, tandis que les cotes contre un nul ou une défaite de son équipe sont de 4 contre 1 et de 9 contre 1, respectivement.

- ① Décrire l'ensemble des événements élémentaires.
- ② Quelles sont leurs probabilités ?
- ③ Définissent-elles une loi de probabilité ?

1. Ensemble des événements élémentaires : $\Omega = \{V, N, D\}$
2. Quelles sont leurs probabilités : $P(V) = \frac{3}{5}, P(N) = \frac{1}{5}, P(D) = \frac{1}{10}$
3. Somme des probabilités : $P(V) + P(N) + P(D) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$



- Expérience aléatoire avec un nombre infini d'issues (e.g., lancer un dé jusqu'à obtenir un Pile)
- Propriété d'additivité

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

pour toute séquence infinie $\{A_i\}$ d'évènements deux à deux incompatibles, est-elle valide ?

- Impossibilité de garantir à la fois
 - 1 propriété d'additivité ci-dessus est valide
 - 2 $P(A)$ a un sens pour tout évènement A
- Abandon du dernier point, i.e., $P(A)$ peut ne pas avoir de sens pour un évènement A

σ -algèbre

Une collection \mathcal{A} de sous-ensembles de Ω est un **σ -algèbre** (ou **tribu**) si

- 1 $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2 $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$
- 3 si $\{A_i\}$ est une séquence finie ou infinie de \mathcal{A} , alors $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Espace probabilisé

Un **espace probabilisé** est un triplet (Ω, \mathcal{A}, P) où \mathcal{A} est un σ -algèbre non-vide de sous-ensembles de Ω et P est une application de \mathcal{A} dans \mathbb{R} telle que

- 1 $P(\Omega) = 1$
- 2 $0 \leq P(A) \leq 1$ pour tout $A \in \mathcal{A}$
- 3 si $\{A_i\}$ est une séquence finie ou infinie d'évènements deux à deux incompatibles de \mathcal{A} , alors $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$ (propriété de σ -additivité)

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

$$P(A) \leq P(B) \text{ pour } A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Inégalité de Boole

Si $\{A_i\}$ est une séquence d'évènements, alors $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Formule de Poincaré

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_r})$$

- Consider n lancers d'une pièce et soit A l'évènement "Face a été obtenu au moins une fois". Quelle est la valeur de $P(A)$?

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

- Une carte est sélectionnée aléatoirement d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte sélectionnée soit un roi ou un pique ?

$$P(\text{pique}) = \frac{13}{52}, P(\text{roi}) = \frac{4}{52}, P(\text{pique}) \cap P(\text{roi}) = \frac{1}{52}$$

$$P(\text{pique}) + P(\text{roi}) - (P(\text{pique}) \cap P(\text{roi})) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

- Considérons trois évènements A , B et C pour lesquels $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(B \cap C) = \frac{5}{32}$ et $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{32}$. Calculer $P(A \cup B \cup C)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{65}{96} \end{aligned}$$

Loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Une loi est dite **uniforme** (ou **equiprobable**) si les probabilités de tous les évènements élémentaires sont les mêmes, i.e., valent $\frac{1}{|\Omega|}$

Propriété

Pour tout évènement A , $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exemple : Considérons un bol contenant cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4 et 5 et l'épreuve consistant à tirer sans remise deux jetons du bol. Quelle est la probabilité de l'évènement "le numéro du premier jeton tiré est inférieur à celui du deuxième" ?

$$\Omega = \{(i, j): 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j\}, |\Omega| = 20$$

$$A = \{(i, j): 1 \leq i < j \leq 5\}, |A| = 10$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis.

- ① $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (**multiplicité**)
- ② $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (**inclusion-exclusion**)

Suite de longueur r

Soit A un ensemble fini. Une **suite ordonnée de longueur r avec remise** constituée d'éléments de A est un r -uplet, ou r -liste, (a_1, \dots, a_r) avec $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. L'ensemble A est appelé **population**.

Théorème

Le nombre de suites de longueur r avec remise d'une population de cardinalité n est **n^r** .

Exemple: Un dé est lancé trois fois de rang.

- événements élémentaires?
- nombre d'évènements élémentaires?

Evènements élémentaires:

Suite ordonnée de longueur trois avec remise de la population $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Nombre d'évènements élémentaires: 6^3

Principe de dénombrement

Considérons deux expériences aléatoires produisant n et m issues différentes, respectivement. Au total, pour les deux expériences aléatoires prises ensembles, il existe nm issues possibles.

Permutation

Soit A un ensemble fini. Une **permutation** de A est une manière d'ordonner (i.e., arranger) les éléments de A .

Théorème (nombre de permutations)

Le nombre de permutations d'une population de cardinalité n est $n!$.

Exemple : Problème du voyageur de commerce - Un représentant commercial doit rendre visite à ses 50 clients . Combien de tours (i.e., trajets) différents sont possibles ?

Population $A = \{1, 2, \dots, 50\}$

Tour = permutation de A

$50! \approx 3 \times 10^{64}$

Arrangement

Soit A un ensemble fini. Un **arrangement de r éléments pris parmi A** est une suite ordonnée de longueur r constituée d'éléments de A sans remise, i.e., un r -uplet, ou r -liste, (a_1, \dots, a_r) avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

Théorème (nombre d'arrangements)

Le nombre d'arrangements de r éléments pris parmi n est $(n)_r = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple: Nombre de tiercés dans l'ordre pour 20 chevaux (pas d'ex aequo)

$$A = \{1, 2, \dots, 20\}, n = |A| = 20$$

$$\text{Tiercé } r = 3$$

$$(20)_3 = A_{20}^3 = 6\,840$$

Combinaison

Soit A un ensemble fini. Une **combinaison de r éléments pris parmi A** est un sous-ensemble de cardinalité r constitué d'éléments de A sans remise, i.e., $\{a_1, \dots, a_r\}$ avec $a_i \in A \setminus \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

Théorème (nombre de combinaisons)

Le nombre de combinaisons de r éléments pris parmi n est

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Exemple : Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?

L'ordre n'a pas d'importance

$$n = 52, r = 5$$

$$\binom{52}{5} = C_{52}^5 = 2\,589\,960$$

Proposition

Pour tout entier positif n et pour tout entier $r \leq n$

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{r} = 0$ si $r < 0$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$
- $\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}$

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels et n un entier strictement positif

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Théorème (nombre de parties d'un ensemble)

Soit Ω un ensemble fini de cardinalité n . Le nombre de parties de Ω , i.e., la cardinalité de $\mathcal{P}(\Omega)$, vaut 2^n .

Théorème

Considérons n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, n_2 sont indiscernables, \dots , n_p sont indiscernables. Le nombre de permutations différentes de ces n éléments est $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots,n_p!}$.

Exemple : Anagramme

- nombre d'anagrammes de PROBA? Nombre d'anagrammes de « PROBA »: $5! = 120$
- nombre d'anagrammes de STAT ? Nombre d'anagrammes de « STAT »: $\frac{4!}{2!} = 12$

Théorème

Le nombre de possibilités de distribuer r boules indiscernables dans n boîtes vaut $\binom{n+r-1}{r}$

Exemple : Quel est le nombre de dominos dans une jeu de dominos ?

$n = 7$ boîtes numérotées $0, 1, \dots, 6$

$r = 2$

$$\binom{7+2-1}{2} = 28$$

- Un dé est lancé n fois de rang. Quelle est la probabilité qu'aucun 1 n'apparaisse ?

$$\Omega = \{(i_1, \dots, i_n) : 1 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\} = \{1, \dots, 6\}^n, |\Omega| = 6^n$$

$$A = \{(i_1, \dots, i_n) : 2 \leq i_j \leq 6, 1 \leq j \leq n\}, |A| = 5^n$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5^n}{6^n}$$

- Une pièce est lancée $2n$ fois de rang. Quelle est la probabilité que les nombres de Face et Pile soit égaux ?

$$\Omega = \{P, F\}^{2n}, |\Omega| = 2^{2n}$$

$$A = \{nF\}, |A| = \binom{2n}{n}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

- Une main au poker est constituée de 5 cartes distribuées d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir une quinte flush royale, i.e., 10, valet, dame, roi, as de la même couleur ?

$$\Omega = \{5 \text{ cartes d'un jeu de } 52 \text{ cartes}\}, |\Omega| = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

$$A = \{\text{quinte flush royale}\}, |A| = 4$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{\binom{52}{5}} = 15,39 \times 10^{-7}$$

- Une machine produit 100 éléments quotidiennement. Supposons que 10 de ces éléments soit défectueux. Quelle est la probabilité qu'un échantillon aléatoire de 5 éléments de la production journalière contiennent 3 éléments défectueux ?

$$\Omega = \{5 \text{ éléments parmi les } 100\}, |\Omega| = \binom{100}{5} = 7,528752 \times 10^7$$

$$A = \{3 \text{ éléments défectueux parmi } 5\}, |A| = \binom{10}{3} \binom{90}{2} = 120 \times 4\,005 = 480\,600$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 0,006383528$$

Considérons le résultat du loto (i.e., trouver 6 numéros parmi 49)

- Première modélisation : on regarde le tirage en direct
 - arrangement de 6 nombres pris parmi $\{1, \dots, 49\}$
 - 6-uplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
 - nombre de tirages différents :
- Deuxième modélisation : on regarde le résultat du tirage sans considérer l'ordre de sortie des numéros
 - combinaison de 6 nombres parmi $\{1, \dots, 49\}$
 - sous-ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
 - nombre de tirages différents :

- ① Une pièce est lancée jusqu'à obtenir Face avec un maximum de deux lancers.

- Trois événements élémentaires $\Omega = \{F, PF, PP\}$
- Loi de probabilité #1 (M. de Roverbal) : $P(\omega) = \frac{1}{3}$ pour tout $\omega \in \Omega$
- Loi de probabilité #2 (Pascal) : $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(PF) = \frac{1}{4}$, $P(PP) = \frac{1}{4}$

Répétitions indépendantes

Supposons qu'une expérience aléatoire, modélisée par un univers Ω et une probabilité P , est répétée N fois. Le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times \dots \times \Omega$ et la probabilité associée est $P^N((\omega_1, \dots, \omega_N)) = P(\omega_1) \dots P(\omega_N)$

- ② Une paire de dés est lancée. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit supérieure ou égale à 8 ?

$$\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= \frac{1}{36}, P(3) = \frac{2}{36}, P(4) = \frac{3}{36}, P(5) = \frac{4}{36}, P(6) = \frac{5}{36}, P(7) \\ &= \frac{6}{36}, P(8) = \frac{5}{36}, P(9) = \frac{4}{36}, P(10) = \frac{3}{36}, P(11) = \frac{2}{36}, P(12) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

$$A = \{8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$P(A) = P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = \frac{5}{12}$$

Probabilité conditionnelle

Étant donnés deux évènements A et B avec $P(B) > 0$, la **probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé** est

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- La probabilité conditionnelle sachant B , $P(.|B)$ est une nouvelle probabilité
- Si $P(B) = 0$, alors on a usuellement $P(A|B) = 0$
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

Une urne contient 10 boules rouges et 10 boules blanches. Une expérience aléatoire consiste à sélectionner une boule dans l'urne, de la remplacer par une boule de l'autre couleur qui est mise dans l'urne, puis de sélectionner une deuxième boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

$$\Omega = \{(R, R), (R, B), (B, R), (B, B)\}$$

$$A_1 = \{\text{première boule est R}\}$$

$$A_2 = \{\text{deuxième boule est R}\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(R, R)\}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{9}{20}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{40}$$

Évènement indépendant

Deux évènements A et B , où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, sont **indépendants** si l'une des conditions suivantes est satisfaite

- (i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- (ii) $P(A|B) = P(A)$
- (iii) $P(B|A) = P(B)$

Exemple

- Considérons le lancer de deux dés, un rouge et un blanc.
- Soient R_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, l'évènement "le dé rouge tombe sur i " et B_j , $j \in \{1, \dots, 6\}$, l'évènement "le dé blanc tombe sur j ".
- Montrer que n'importe quelle paire R_i et B_j est indépendante.

$$P(R_i \cap B_j) = P(i, j) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(R_i)P(B_j)$$

Proposition

Il est équivalent de dire

- (i) A et B sont indépendants
- (ii) A^C et B sont indépendants
- (iii) A et B^C sont indépendants
- (iv) A^C et B^C sont indépendants

A et B indépendants \implies la connaissance de la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre

Remarque

Deux évènements incompatibles A et B , où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, ne sont jamais indépendants

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \text{ car incompatibilité implique } P(A \cap B) = 0$$

Famille d'évènements mutuellement indépendants

Soient A_i , $i \in I$ où I est un ensemble d'indices possiblement infini, une famille d'évènements. Les évènements A_i sont **mutuellement indépendants** si et seulement si pour chaque ensemble fini d'indices distincts $i_1, \dots, i_k \in I$, nous avons

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Remarque

La condition $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_n})$ n'implique pas la condition analogue pour toute sous-famille d'évènements

- lancer de deux dés
- univers $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 6\}$ avec $P(\omega) = \frac{1}{36}$ pour tout $\omega \in \Omega$
- 1. évènements $A = \{\text{premier dé} = 1, 2 \text{ ou } 3\}$,
 $B = \{\text{premier dé} = 3, 4 \text{ ou } 5\}$, $C = \{\text{somme des deux dés} = 9\}$

$$A = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 3 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}, P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(i, j) : 3 \leq i \leq 5 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}, P(B) = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(3, j) : 1 \leq j \leq 6\}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B)$$

$$C = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}, P(C) = \frac{1}{9}$$

$$A \cap B \cap C = \{(3, 6)\}, P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C)$$

Système complet d'évènements

Tout famille $A_i, i \in I$, finie ou pas, d'évènements vérifiant les conditions

- (i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$
- (ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

est appelé **système complet d'évènements**

Proposition

Soit $A_i, i \in I$, un système complet d'évènements. Alors $P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i)$.

$P(A)$ est calculée par un système complet d'évènements dans lequel A se réalise

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = P(\bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)) \\ &= \sum_{i \in I} P(A \cap A_i) \text{ car } (A \cap A_i)_{i \in I} \text{ sont incompatibles} \end{aligned}$$

Théorème des probabilités totales

Soit $A_i, i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A , nous avons

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(A|A_i)$$

$P(A)$ est la somme pondérée des probabilités conditionnelles $P(A|A_i)$

Exemple: Trois paniers U_1, U_2 et U_3 contiennent chacun a_i pommes sucrées et b_i pommes amères indiscernables, $i = 1, 2, 3$. On choisit un panier au hasard et trois pommes dans le panier choisi. Quelle est la probabilité d'avoir choisi exactement deux pommes amères ?

$\Omega = \{\text{choisir 3 pommes dans le même panier}\}$

$A = \{\text{avoir choisi 2 pommes amères}\}$

$U_i = \{\text{choisir 3 pommes dans le panier } i\}, P(U_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$

U_1, U_2, U_3 : système complet d'évènements

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|U_i)P(U_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \binom{b_i}{2}}{\binom{a_i + b_i}{3}}$$

Formule de Bayes

Soit $A_i, i \in I$, un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement A , nous avons

$$P(A_k|A) = \frac{P(A|A_k)P(A_k)}{\sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)}$$

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)}, P(A_k \cap A) = P(A|A_k)P(A_k), P(A) = \sum_{i \in I} P(A|A_i)P(A_i)$$

Corollaire

(i) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$

(ii) $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)}$

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(A \cap B) + P(A^C \cap B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)}$$

Deux opérateurs O_1 et O_2 saisissent 100 et 200 tableaux de données respectivement. Les tableaux saisis par O_1 comportent des fautes dans 5.2% des cas et ceux de O_2 dans 6.7% des cas. Un tableau est choisi au hasard et il comporte des fautes. Quelle est la probabilité que l'opérateur O_1 ait saisi ce tableau

$$\Omega = \{1 \text{ tableau parmi } 300\}$$

$$T_1 = \{\text{tableau saisi par } O_1\}, P(T_1) = \frac{1}{3}$$

$$T_2 = \{\text{tableau saisi par } O_2\}, P(T_2) = \frac{2}{3}$$

T_1, T_2 : système complet d'évènements

$F = \{\text{le tableau comporte des fautes}\},$

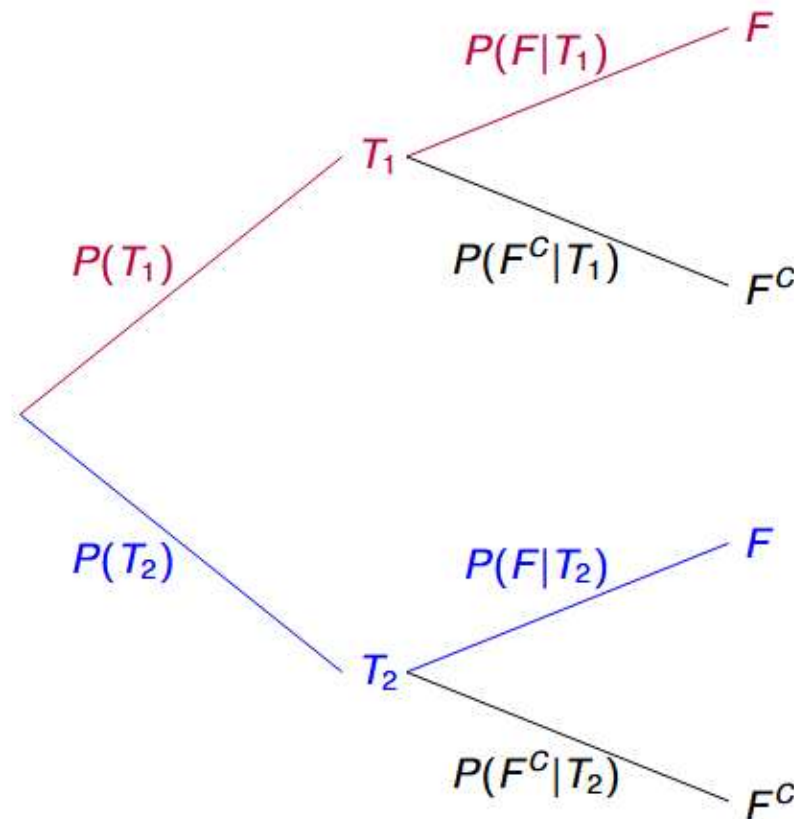
$$P(F|T_1) = \frac{52}{1000}$$

$$P(F|T_2) = \frac{67}{1000}$$

$$P(T_1|F) = \frac{P(F|T_1)P(T_1)}{P(F|T_1)P(T_1) + P(F|T_2)P(T_2)} = \frac{\frac{52}{1000} \times \frac{1}{3}}{\frac{52}{1000} \times \frac{1}{3} + \frac{67}{1000} \times \frac{2}{3}}$$

Structure arborescente

L'univers d'une expérience aléatoire est structurée en branches et les probabilités conditionnelles sont les probabilités de passer d'un noeud de l'arbre à un autre



$$P(F) = P(F \cap T_1) + P(F \cap T_2) = P(F|T_1)P(T_1) + P(F|T_2)P(T_2)$$