Probabilités et statistiques

Variables aléatoires discrètes

SOMMAIRE:

Objectif : Étudier des grandeurs numériques pendant une expérience aléatoire

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Exemples

- Choisir aléatoirement une personne dans la population et mesurer sa taille, son poids, ou son âge
- Pierre et Paul jouent à Pile ou Face. Si la pièce tombe sur Pile, Pierre donne 1 euro à Paul, sinon il reçoit 1 euro de Paul. Variable aléatoire : gain de Pierre. Application X : {Pile,Face} $\to \{1, -1\}$

Ensemble des valeurs

L'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire X sera noté $X(\Omega)$

- Un pièce est lancée trois fois et comptons le nombre X de fois où le côté Face apparaît.
- Ensemble fondamental : $\Omega = \{(e_1, e_2, e_3) : e_i \in \{P, F\}, i = 1, 2, 3\}$
- Pour tout évènement élémentaire ω, on associe $X(\omega)$

ω	(F,F,F)	(F,F,P)	(F,P,F)	(P,F,F)	(F,P,P)	(P,F,P)	(P,P,F)	(P,P,P)
valeur de X	3	2	2	2	1	1	1	0

- Pour chaque valeur x prise par X, on lui associe tous les évènements élémentaires associés

x	3	2	1	0
évènement	$\{(F,F,F)\}$	$\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\}$	$\{(F,P,P),(P,F,P),(P,P,F)\}$	$\{(P,P,P)\}$

Évènement assoié à une valeur de X

L'ensemble des évènements élémentaires associés à une valeur x d'une variable aléatoire X est l'évèvement $(X = x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

Autres évènements possibles : $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$, $(x_1 < X \leq x_2) = \{\omega \in \Omega : x_1 < X(\omega) \leq x_2\}$, etc.

Propriété

Les évènements $(X = x)$, $x \in X(\Omega)$, forment un système complet d'évènements

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable est dite discrète

Exemple :

- Lancer de deux dés successivement avec $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$
- $X : \Omega \to \{2,3,\ldots,12\}$ avec $X((i,j)) = i + j$ est une variable aléatoire discrète

Variable aléatoire continue

Une variable aléaoire qui n'est pas discrète est dite continue

Exemple :

- Choisir une personne dans une population et mesurer sa taille et son poids ; $\Omega = \{(t,p) \in \mathbb{R}_+^2\}$
- $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ avec $X_1((t,p)) = t$ est une variable aléatoire continue
- $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ avec $X_2((t,p)) = p$ est une variable aléatoire continue
- $X_3 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ avec $X_3((t,p)) = 2t + \sqrt[3]{p}$ est une variable aléatoire continue

Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire discrète X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ qui à toute valeur x possible associe la probabilité $P(X = x)$

Exemple

- Lancer de deux dés successivement

$\Omega = \{(i, j): 1 \leq i, j \leq 6\}$

$X\colon\ \Omega \to \{2, 3, \dots, 12\}$ avec $X((i, j)) = i + j$

$(X = 2) = \{(1,1)\}, (X = 3) = \{(1,2), (2,1)\}, (X = 4) = \{(1,3), (2,2), (3,1)\},$
$(X = 5) = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$, etc

Équiprobabilité: $P(\omega) = \frac{1}{36}\ \forall \omega \in \Omega$

- Loi de probabilité ?

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
proba	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Remarques

$(X = x)$, $x \in X(\Omega)$ forment un système complet d'évènements $\Longrightarrow$

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

Autre objet permettant de caractériser la loi d'une variable aléatoire

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est l'application F de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$

Exemple

- Lancer de deux dés successivement ; $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i, j)) = i + j$
- Fonction de répartition ?

$$F(X): \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \frac{1}{36} \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36} \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} \text{ si } 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36} \text{ si } 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36} \text{ si } 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36} \text{ si } 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36} \text{ si } 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36} \text{ si } 11 \leq x < 12 \\ 1 \text{ si } x \geq 12 \end{cases}$$

Supposons $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_n\}$ avec $x_k < x_{k+1}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ P(X = x_0) + \ldots + P(X = x_k) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Propriétés

(i) La fonction de répartition est finie et croissante

(ii) La fonction de répartition est une fonction en escalier. À chaque valeur de x dans $X(\Omega)$, la hauteur du saut est $P(X = x)$

Variables de même loi

Deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité si elles ont la même fonction de répartition

Remarque

$P(X \in [x, y]) = P(X \leq y) - P(X < x)$

- Variable aléatoire continue : Impossibilité de définir la probabilité pour un point

$\Longrightarrow$ impossibilité de définir une loi de probabilité

Densité de probabilité et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue et F sa fonction de répartition.
On appelle densité de probabilité la fonction f telle que $f(x) = F'(x)$ (en supposant que F soit dérivable) avec $f(x) > 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Remarques

1. f représente la manière dont les valeurs de X sont réparties
2. f ne représente pas la probabilité de l'évènement $(X = x)$ car $P(X = x) = 0$
3. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
4. Enlever un nombre d'un intervalle ne change pas la probabilité (pas vrai pour le cas discret)

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(u)du = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

- Espérance = indicateur de position

Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, fini ou infini. L'**espérance** de X, noté $E[X]$, est le réel

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

à condition que cette série converge absolument

- Espérance d'une variable aléatoire discrète X = moyenne des valeurs que peut prendre X pondérée par les probabilités de ces valeurs

$\Longrightarrow$ espérance correspond à une valeur moyenne autour de laquelle sont réparties les valeurs que peut prendre X

- Exemple : Lancer de deux dés successivement ; $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i, j)) = i + j$

$$\mathrm{E[X]} = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36}$$

- Série convergente mais pas absolument : un réarrangement des termes de la série peut changer la valeur de la série (on parle se série semi-convergente)
- Une série $\sum u_n$ converge absolutment si la série $\sum |u_n|$ converge
- Série absolument convergente $\Longrightarrow$ l'ordre dans lequel les valeurs de X sont listées n'a pas d'importance

Propriété

Toute variable aléatoire discrète finie admet une espérance

Remarque

Si X est une variable aléatoire et g est une fonction réelle sur $\mathbb{R}$, alors $Y = g(X)$ est aussi une variable aléatoire

Théorème du transfert

Pour toute fonction réelle g sur $\mathbb{R}$, on a

$$E[g(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

à condition que cette série converge absolument

Trois boules sont tirées aléatoirement dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules rouges.

- X nombre de boules blanches tirées
- $E[X]$?
- $E[X^2]$?

$\Omega = \{\text{sous ensemble de 3 boules}\}, |\Omega| = \binom{15}{3} = 455 \rightarrow$ équiprobabilité

$E[X]$ pour X le nombre de boules blanches tirées:

- $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ est fini $\Rightarrow E[X]$ existe
- $E[X] = 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3)$
- $P(X=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}}, P(X=2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}, P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{100 + 2 \times 255 + 3 \times 120}{455} = \frac{910}{455} = 2$$

$E[X^2]$ pour X le nombre de boules blanches tirées:

Théorème du transfert avec X et $g(x) = x^2$

- $E[X^2] = 0^2P(X=0) + 1^2P(X=1) + 2^2P(X=2) + 3^2P(X=3)$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{100 + 4 \times 255 + 9 \times 120}{455} = \frac{2080}{455} = \frac{440}{91}$$

Remarque

$E[X^2] \neq E[X]^2$

Remarque

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires sur un même espace de probabilité et ψ est une fonction réelle à n variables, alors $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire sur le même espace avec $\psi(X_1, \ldots, X_n)(\omega) = \psi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$

Exemple :

- X et Y variables aléatoires sur (Ω, P)
- $X^2 + \max(X, Y^3)$ variable aléatoire (Ω, P) avec

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & x^2 + \max(x, y^3) \end{array}$$

- $(X^2 + \max(X, Y^3))(\omega) = X(\omega)^2 + \max(X(\omega), Y(\omega)^3\}$ pour tout $\omega \in \Omega$

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé
- X et Y deux variables aléatoires discrètes

Loi conjointe

La loi conjointe de X et Y (ou loi du couple (X, Y)) est la fonction réelle $P_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0, 1]$ telle que

$$P_{X,Y}(x, y) = P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x, Y = y) \forall x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)$$

- Les évènements $(Y = y), y \in Y(\Omega)$, forment un système complet d'évènements

Loi marginale

La loi marginale de X (à partir de la loi conjointe) est la loi de X, c'est-à-dire pour tout $x \in \Omega(X)$

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Remarque

Il n'est pas possible en général de déduire la loi conjointe à partir des lois marginales

Deux dés sont lancés simulatanément. Soient

- X la variable aléatoire correspondant au plus grand des deux chiffres
- Y la variable aléatoire correspondant au plus petit des deux chiffres
- Loi conjointe ?
- Loi marginale ?

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Y(\Omega) = X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < y \\ \frac{1}{36} \text{ si } x = y \\ \frac{1}{18} \text{ si } x > y \end{cases}$$

Y \ X	1	2	3	4	5	6	P(Y = y)
	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$
	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$
	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
P(X = x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Suite de lancers d'une pièce non-équilibrée avec $P(Pile) = \frac{3}{4}$. Soient

- X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première suite de valeurs identiques
- Y la variable aléatoire correspondant à la longueur de la deuxième suite de valeurs identiques
- Lois marginales ?

$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \; et \; Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$P(X = x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^x \times \frac{3}{4} = \frac{3^x + 3}{4^x + 1}$$

Pour la loi marginale de Y, il est plus simple de passer par la loi conjointe

$$P(X = x, Y = y) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \times \left(\frac{1}{4}\right)^y \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^x \times \left(\frac{3}{4}\right)^y \times \frac{1}{4} = \frac{3^{x+1} + 3^y}{4^{x+y+1}}$$

$$P(Y = y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{3^{x+1} + 3^y}{4^{x+y+1}}$$

$$P(Y = y) = \frac{1}{4^y} \times \sum_{x=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^y \times \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{3^{x+1} + 3^y}{4^{x+y+1}}$$

$$P(Y = y) = \frac{1}{4^y} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^y \times \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3^2 + 3^{y-1}}{4^{y+1}}$$

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé
- $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes

Loi d'un vecteur

La loi du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est la fonction est la fonction réelle $P_{X_1,\dots,X_n} : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to [0,1]$ telle que $\forall\, x_i \in X_i(\Omega), i = 1, \dots, n,$

$$\begin{aligned} P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) &= P((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) \\ &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

Loi marginale

La loi marginale de X_1 (à partir de la loi de X) est la loi de X_1, c'est-à-dire pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2,\dots,x_n) \in X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé

Couple de variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $\forall\ x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Variables aléatoires indépendantes deux à deux

Les variables aléatories $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes deux à deux si $\forall\ 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ le couple (X_i, X_j) est indépendant

Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si $\forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n)$$

Remarque

Si X et Y ne sont pas indépendantes, connaître les lois de X et Y ne suffit pas pour connaître celle de (X, Y)

Considérons une séquence de deux bits et les trois variables aléatoires suivantes

- B_i la valeur du $i^{\text{ème}}$ bit, $i = 1, 2$
- $B_3 = B_1$ xor B_2

$\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ avec équiprobabilité

$B_i(\Omega) = \{0, 1\}\ \forall i = 1, 2, 3$

$$P(B_i = 0) = P(B_i = 1) = \frac{1}{2}\ \forall i = 1, 2, 3$$

- B_1, B_2 et B_3 sont indépendants-ils deux à deux ?

$$P\left(B_i = b_i, B_j = b_j\right) = \frac{1}{4}\ \forall\, 1 \leq i \leq j \leq 3, i \neq j,\ b_i \in B_i(\Omega), b_j \in B_j(\Omega)$$

$$P(B_i = b_i)P\left(B_j = b_j\right) = \frac{1}{4}\ \forall\, 1 \leq i \leq j \leq 3, i \neq j,\ b_i \in B_i(\Omega), b_j \in B_j(\Omega)$$

- B_1, B_2 et B_3 sont-il mutuellement indépendants ?

$$P(B_1 = 0, B_2 = 1, B_3 = 0) = 0 \neq P(B_1 = 0)P(B_2 = 1)P(B_3 = 0)$$

Variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle implique indépendance deux à deux, mais pas nécessairement le contraire

Exemple : Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes

$$\begin{aligned} P(X=x, Y=y) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} P(X=x, Y=y, Z=z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)P(Z=z) \\ &= P(X=x)P(Y=y) \sum_{z \in Z(\Omega)} P(Z=z) = P(X=x)P(Y=y) \end{aligned}$$

Extension aux intervalles

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles de réels. Alors

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)\ldots P(X_n \in A_n)$$

Exemple : $P(X \geq x, Y \geq y) = P(X \geq x)P(Y \geq y)$

Somme de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $Z = X + Y$. Alors

$$P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P(Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = z - y)P(Y = y)$$

Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $T = XY$. Alors

$$P(T = t) = \sum_{\substack{xy = t \\ (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}} P(X = x)P(Y = y)$$

Proposition

Considérons une collection $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles à n et m variables, respectivement. Alors $g(X_1, \dots, X_n)$ et $h(X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ sont des variables aléatoires indépendantes

- Lancer de deux dés, un rouge et un blanc
- Soient X le nombre de points du dé rouge et Y celui du dé blanc
- Soit $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?

L'évènement $(Y = y)$ pour $y \in \{1, \dots, 6\}$ est un système complet d'évènements
$\forall z \in \{2, \dots, 12\}$

$$P(Z = z) = \sum_{y=1}^{6} P(Z = z \mid Y = y)P(Y = y) = \frac{1}{6} \times \sum_{y=1}^{6} P(X + y = z \mid Y = y)$$

$$= \frac{1}{6} \times \sum_{y=1}^{6} P(X = y - z \mid Y = y) = \frac{1}{6} \times \sum_{y=1}^{6} P(X = z - y)$$

Car X et Y sont indépendants (pour la dernière égalité)

Proposition

Si X est une variable aléatoire ayant une espérance (finie) et c est un réel, alors

(i) Si $P(X \geq 0) = 1$ alors $E[X] \geq 0$

(ii) Si $P(X = c) = 1$ alors $E[X] = c$

(iii) $E[cX] = cE[X]$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires X et Y et tous réels a et b,
$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires indépendantes X et Y, $E[XY] = E[X]E[Y]$

Théorème du transfert

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors
$E[f(X, Y)] = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) f(x, y)$ à condition que cette série converge

- Variance = indicateur de dispersion

Variance

Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, fini ou infini, admettant une espérance. La variance de X, noté $\mathrm{var}(X)$, est le réel

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 P(X = x_i) = E[X^2] - E[X]^2$$

à condition que cette série converge

Écart type

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart type de X, noté σ_X, est le réel $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$

- Écart type (ou variance) d'une variable aléatoire discrète X = mesure (très grossière) de la dispersion des valeurs que peut prendre X autour de sa moyenne (espérance)

$\Longrightarrow$ plus l'écart type est petit, plus il y a des chances que X soit proche de son espérance

Lancer de deux dés successivement

- $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$
- $X : \Omega \to \{2, 3, \ldots, 12\}$ avec $X((i,j)) = i + j$
- Calculer la variance de X

Proposition

Si X est une variable aléatoire discrète finie ayant une variance nulle, alors X est une variable aléatoire constante

Proposition

Si X est une variable aléatoire admettant une variance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{var}(aX + y) = a^2\mathrm{var}(X)$

Proposition

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

Proposition

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires (deux à deux) indépendantes, alors $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i)$

- Covariance = mesure de comment deux variables aléatoires varient ensemble

Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $E[X^2]$ et $E[Y^2]$ existent. La covariance de X et Y, notée $\mathrm{cov}(X,Y)$, est définie par
$\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X - E[X])((Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

- Loi conjointe ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = (x - E[X])(y - E[Y])$)
$\mathrm{cov}(X,Y) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (x - E[X])(y - E[Y])P(X = x, Y = y)$
- Loi marginale

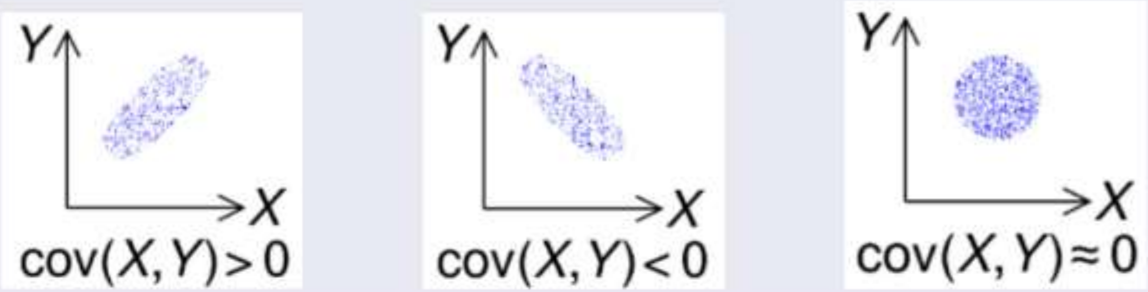
$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xP(X = x, Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = \left(\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y) \right) - E[X]E[Y]$$

Remarque

La covariance de deux variables aléatoires X et Y correspond à la direction de la relation linéaire entre ces deux variables

- $\text{cov}(X, Y) > 0$: X et Y évoluent dans le même sens (positivement corrélées)
- $\text{cov}(X, Y) < 0$: X et Y évoluent dans le sens contraire (négativement corrélées)
- $\text{cov}(X, Y) \approx 0$: X et Y ne sont liées entre elles (non-corrélée)



- $\text{cov}(X, Y)$ qualifie la relation des variables aléatoires X et Y
- l'unité de $\text{cov}(X, Y)$ est égale au produit des unités de X et Y
- $\text{cov}(X, Y)$ ne quantifie pas la force de la relation

- Soit X une variable aléatoire telle que $P(X = x) = \frac{1}{5}$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- Soit $Y = X^2$
- cov(X, Y) ?

Y \ X	-2	-1	0	1	2	P(Y = y)
0			1/5			1/5
1		1/5		1/5		2/5
4	1/5				1/5	2/5
P(X = x)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	

$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = 0$ et $\mathrm{E}[\mathrm{Y}] = 2$

Cov(X, Y) = 1/5(-8-1+1+8)-0 = 0

- X et Y indépendants ?

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = -2, \mathrm{Y} = 0) = 0 \neq \mathrm{P}(\mathrm{X} = -2)\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

Proposition

1. $\mathrm{cov}(X, c) = E[(X - E[X])((c - c)] = 0$
2. $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$
3. $\mathrm{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a.\mathrm{cov}(X_1, Y) + b.\mathrm{cov}(X_2, Y)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
4. $\mathrm{cov}(X, aY_1 + bY_2) = a.\mathrm{cov}(X, Y_1) + b.\mathrm{cov}(X, Y_2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
5. $\mathrm{cov}(aX, bY) = ab.\mathrm{cov}(X, Y)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$
6. $\mathrm{cov}(X, X) = E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{var}(X)$
7. Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ (pas le contraire)
8. $|\mathrm{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{var(X)} + \sqrt{var(Y)}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Proposition

Si $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ sont des variables aléatoires alors

- $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$
- $\mathrm{cov}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \mathrm{cov}(X_i, Y_j)$ pour $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$

Soient n boules, numérotées de 1 à n, aléatoirement mises dans n boîtes, numérotées de 1 à n, à raison de une boule par boîte

- $\Omega = \{\text{permutations}\}$
- Soit $S_n =$ le nombre de boules mises dans les boîtes de même numéro
- $S_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- $E[S_n]$?
- $\text{var}(S_n)$?

Soient $X_j = 1$ si boule j dans boîte j, 0 sinon $(j = 1, \ldots, n)$

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$P(X_j = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ et $E[X_j] = \frac{1}{n}$ pour $(j = 1, \ldots, n)$

$E[S_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = n \times \frac{1}{n} = 1$

Var(Sn) ?

$X_j^2 = X_j (j = 1, \ldots, n)$

$\text{var}(X_j) = E[X_j^2] - E[X_j]^2 = E[X_j] - E[X_j]^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \; (j = 1, \ldots, n)$

Matrice de covariance

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables alétoires. La $n \times n$ matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{var}(X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \mathrm{cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{var}(X_n) \end{bmatrix}$$

est appelée matrice de covariance de $(X_1, \dots, x_n)$

$$\mathbf{z}^T \Sigma \mathbf{z} = \sum_{1 \le i,j \le n} z_i \mathrm{cov}(X_i, X_j) z_j = \sum_{1 \le i,j \le n} \mathrm{cov}(z_i X_i, z_j X_j) = \mathrm{var}(\sum_{i=1}^{n} z_i X_i)$$

Propriétés

1. (i) La matrice de covariance est symétrique
2. (ii) La matrice de covariance est semi-définie positive (i.e., $\mathbf{z}^T \Sigma \mathbf{z} \ge 0$ pour tour vecteur non-nul $\mathbf{z}$ ou les valeurs propres de Σ sont positives ou nulles)
3. (iii) La matrice de covariance est inversible

- Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires
- Matrice de covariance $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\mathrm{var}(3X_1 + 4X_2)$?

$$\mathrm{var}(3X_1 + 4X_2) = [3\ 4] \sum \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= [3\ 4] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 92$$

- les valeurs de covariance ne sont pas normalisées (entre $-\infty$ et $+\infty$)

$\Rightarrow$
1. difficile de comparer des covariances
2. difficile de déterminer la force de la relation linéaire entre deux variables

- Coefficient de corrélation = covariance normalisée

$\Rightarrow$
1. plus de dépendance aux unités
2. mesure la force de la relation linéaire entre deux variables

Coefficient de Corrélation

Le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ de deux variables aéatoires X et Y, de variances non-nulles, est égale à la covariance de X et Y divisée par le produit de leur écart-type, i.e., $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Propriétés

(i) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
(ii) $\rho(X, Y) = 1$ si et seulement si $Y = aX + b$ avec $a > 0$
(iii) $\rho(X, Y) = -1$ si et seulement si $Y = aX + b$ avec $a < 0$
(iv) Si X et Y sont indépendantes alors $\rho(X, Y) = 0$ (pas le contraire)

- Lancer d'une pièce trois fois de rang
- $X =$ nombre de fois où Face est obtenu durant les deux premiers lancers
- $Y =$ nombre de fois où Face est obtenu durant les deux derniers lancers
- $\mathrm{cov}(X, Y)$?
- $\rho(X, Y)$?

Cov(X,

Y \ X	0	1	2	P(Y = y)
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	1/4	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	

E[X] = E[Y] = 1

E[XY] = sum(xyP(X = x, Y = y) = 1 fois $\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$

Cov(X, Y) = E[XY]-E[X]E[Y] = $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

Loi uniforme (cas discret)

Une variable aléatoire discrète X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, notée $\mathcal{U}(n)$, si $P(X = i) = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

Loi uniforme (cas discret) - Espérance et variance

(i) $E[X] = \frac{n+1}{2}$

(ii) $\mathrm{var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Exemple:

- Lancer d'un dé à six faces ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}$)
- X = numéro de la face supérieure ($X(\Omega) = \{1, \ldots, 6\}$)
- Espérance et variance de X ?

$X \sim \mathcal{U}(6)$

$$E[X] = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$$

Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=1) = p$

Loi de Bernoulli - Espérance et variance

(i) $E[X] = p$

(ii) $\mathrm{var}(X) = pq$ avec $q = 1 - p$

Exemple:

- Une carte est tirée dans un jeu de 52 cartes
- Gain de 1 euro si un as est tiré; gain nul si une autre carte est tirée
- X = gain

  $\Omega = \{\text{une carte parmi } 52\}$ – équiprobabilité

  $X(\Omega) = \{0,1\}$

  $P(X=1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

  $X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{13})$
- Espérance et variance de X ?

  $E[X] = \frac{1}{13}$

  $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{13} \times (1 - \frac{1}{13}) = \frac{12}{169}$

Loi binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{Z}_+^*$ et $0 \leq p \leq 1$, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $P[X = i] = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ où $q = 1 - p$

Loi binomiale - Espérance et variance

(i) $E[X] = np$

(ii) $\operatorname{var}(X) = npq$

Exemple:

- Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. On tire n boules une à une succèssivement avec remise.
- $X =$ nombre de boules blanches tirées
- Espérance et variance de X ?

$\Omega = \{(X_1, \ldots, X_n) : X_n$ appartient à $\{blanc, rouge\}, i = 1, \ldots, n$

$$P(X = 1) = \binom{n}{i}\left(\frac{a}{a+b}\right)^i, i = 1, \ldots, n$$

$$p = \frac{a}{a+b} \text{ et } X \sim \mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$$

$$E[X] = \frac{n \times a}{a+b}$$

$$\operatorname{var}(X) = n \times \frac{a}{a+b} \times (1 - \frac{a}{a+b}) = \frac{n \times a \times b}{(a+b)^2}$$

Propriété

Soient n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes et de de même paramètre $X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

- Schéma binomial : tirages successifs avec remise (obtention de i succès parmi n épreuves de Bernoulli identiques et mutuellement indépendantes)
- $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$
- $\mathrm{var}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

Proposition

Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, $i = 1, \ldots, k$, alors $X_1 + \cdots + X_k \sim \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_k, p)$

- Loi binomiale : on réalise un nombre fixé d'essais
- Loi géométrique : on s'arrête au premier succès

Loi géométrique

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, où $0 < p \leq 1$, notée $\mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{Z}_+^*$ et $P(X = i) = pq^{i-1}$ où $q = 1 - p$

Loi géométrique - Espérance et variance

$E[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{var}(X) = \frac{q}{p^2}$

- Schéma géométrique : temps d'attente du premier succès lors d'une répétition indépendante d'une expérience de Bernoulli
- Exemple: Une urne contient *a* boules blanches et *b* boules rouges. On tire des boules une à une succèssivement avec remise.
- $X =$ nombre de boules à tirer avant d'obtenir une boule blanche
- Espérance et variance de X ?

$$\Omega = \{(X_1, \ldots, X_n) n \geq 1, X_i = \text{rouge}, i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } X_n = \text{blanche}\}$$
$$X(\Omega) = Z(\text{ens})^*_+$$
$$p = \frac{a}{a+b} \text{ et } X \sim \mathcal{G}\left(\frac{a}{a+b}\right).$$
$$E[X] = \frac{a}{a+b} = 1 + \frac{b}{a}$$
$$\text{var}(X) = \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{a}\right)^2 = \frac{b \times (a+b)}{a^2}$$

- Loi de Pascal : on s'arrête au r$^{\text{ème}}$ succès

Loi de Pascal

Une variable aléatoire X suit une loi de Pascal de paramètre (r, p), où $0 < p \leq 1$, notée $\mathcal{G}(r, p)$, si $X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$ et $P(X = i) = \binom{i-1}{r-1} p^r q^{i-r}$ où $q = 1 - p$

Loi de Pascal - Espérance et variance

$E[X] = r\frac{1}{p}$ et $\mathrm{var}(X) = r\frac{q}{p^2}$

- Schéma de Pascal : temps d'attente du r$^{\text{ème}}$ succès lors d'une répétition indépendante d'une expérience de Bernoulli
- $X_i = 1$ obtenir un succès au i$^{\text{ème}}$ essai, $X_i = 0$ sinon
- $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$
- suite $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_+^*}$ est mutuellement indépendante
- $(X = k) = \{(r-1)$ succès en $(k-1)$ expériences de Bernoulli et $X_k = 1\}$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X_1 + \cdots + X_{k-1} = r - 1 \cap X_k = 1) \\ &= P(X_1 + \cdots + X_{k-1} = r - 1)P(X_k = 1) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} p \end{aligned}$$

Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, où $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{Z}_+$ et $P[X = i] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$

Loi de Poisson - Espérance et variance

$E[X] = \lambda$ et $var(X) = \lambda$

Utilisation de la loi de Poisson :

- nombre de tâches arrivant sur un serveur pendant une minute
- nombre de globules rouges par ml de sang
- nombre d'accidents de travail dans une entreprise pendant une année

Proposition

Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$, alors $X_1 + \cdots + X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)$

Un système électronique a un cycle d'opération périodique de 0.01 seconde. Dans chaque cycle, un évènement occure avec une probabilité 0.001. Quelle est la probabilité d'observer moins de 15 évènements dans un intervalle de 100 secondes ?

$X = \{\text{nombre d'évènements observés pendant } 100\text{s}\}$

$100\text{s} = 10000 \text{ cycles observés}$

$X_i = \{\text{nombre d'évènements pendant le } i - \text{ème cycle}\}, i = 1, \dots, 10000$

$X_i \sim \mathcal{P}(0,001), i = 1, \dots, 10000$

$X = X_1 + \cdots + X_{10000} \sim \mathcal{P}(10000 * 0,001) = P(10)$ (indépendance mutuelle)

$$P(X < 15) = P(X \leq 14) = \sum_{k=0}^{14} P(X = k) = \sum_{k=0}^{14} e^{-10} \times \frac{10^k}{k!} \approx 0,9165$$

Approximation

La loi de Poisson de paramètre np est une "approximation" de la loi binomiale de paramètres (n, p) quand np est petit (e.g., $np \leq 10$) et n est grand (e.g., $n \geq 50$)

- Loi de Poisson est généralement utilisée quand il y a
  - un large nombre n d'essais
  - une petite probabilité p qu'un évènement va se réaliser pendant un essai
  - np est modéré en magnitude (i.e., pas trop grand)
- Exemple: Si 5% de la population est gauchère, quelle est la probabilité qu'un échatillon aléatoire de 100 personnes contienne au moins 2 gauchers

$\Omega = \{100 \text{ personnes}\}$

$X = \text{nombre de gauchers}, X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 100\}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$

$$X \sim \mathcal{B}\left(100, \frac{5}{100}\right) : P(X \geq 2) = 1 - \binom{100}{0} \times \left(\frac{95}{100}\right)^{100} - \binom{100}{1} \times \left(\frac{95}{100}\right)^{99} \times \frac{5}{100} \approx 0{,}96292$$

$$X \sim \mathcal{P}\left(100 * \frac{5}{100}\right) : P(X \geq 2) = 1 - e^{-5} \times \frac{5^0}{0!} - e^{-5} \times \frac{5^1}{1!} \approx 0{,}95957$$