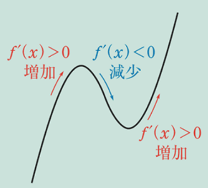
※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（各２点）、２回目は宿題の取り組み状況（各２点）、３回目は最終評価（各２点）です。

第3節　積　分

ひらく

関数 $f(x)$ を微分すると導関数 $f'(x)$ が得られる。この $f'(x)$ を調べることで，$f(x)$ の増減の様子がわかり，$y=f(x)$ のグラフをかくことができた。

それでは，その逆に導関数 $f'(x)$ が与えられたとき，もとの関数 $f(x)$ を求めることはできるだろうか。



1　不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち，

$$F'(x)=f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の **原始関数** という。たとえば，

$$x^2,\quad x^2+4,\quad x^2-6$$

などは，微分すればいずれも $2x$ となるから，これらはすべて $2x$ の原始関数である。このように，１つの関数の原始関数は無数にある。

いま，$f(x)$ の２つの原始関数を $F(x)$，$G(x)$ とすると，

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

導関数が０になる関数は定数関数であるから，その定数を C とすると，

$$G(x)-F(x)=C \text{ より，}\quad G(x)=F(x)+C$$

したがって，$F(x)$ と $G(x)$ は定数だけしか違わない。

よって，$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の原始関数は，

$$F(x)+C \qquad \text{ただし，} C \text{ は任意の定数}$$

と書ける。これらをまとめて $f(x)$ の **不定積分** といい，$\int f(x)\,dx$ で表す。

不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき，$\int f(x)\,dx=F(x)+C$

注　$\int$ は，sum（和）の頭文字 s に由来する記号で，インテグラルと読む。

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する** といい，定数 C を **積分定数** という。

今後，とくに断らなくても，C は積分定数を表すものとする。

例 13　**1，x，x^2 を積分してみよう。**

$(x)'=1$，$\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x$，$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$

$$x \underset{\text{微分する}}{\overset{\text{積分する}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{2}x^2+C$$

であるから，

$$\int 1\,dx=x+C,\quad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C,\quad \int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

注　$\int 1\,dx$ は $\int dx$ と書くことが多い。

一般に，次のことが成り立つ。

x^n の不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n \text{ は } 0 \text{ または正の整数})$$

注　$n=0$ のとき，$\int x^0dx$ は $\int 1dx$ を表すものとする。

$f(x)$，$g(x)$ の原始関数を１つずつ選び，それぞれ $F(x)$，$G(x)$ とすると，

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=g(x)$$

であるから，k が定数のとき，次のようになる。

$$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$$
$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$
$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$$

以上のことから，次のページの公式が成り立つ。

定数倍，和，差の不定積分

1　$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$　　（k は定数）

2　$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

　　$\int \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

例 14

$$\int (3x^2-4x+2)\,dx=3\int x^2\,dx-4\int x\,dx+2\int dx$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+2\cdot x+C=x^3-2x^2+2x+C$$

注　例 14 のように複数の関数に分けて積分する場合，積分定数は１つにまとめて書いておけばよい。

例 15

$$\int (x-1)(x-2)\,dx=\int (x^2-3x+2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

注　変数が x 以外の関数についても，同様に不定積分を考える。

たとえば，$\int (t-1)(t-2)\,dt=\int (t^2-3t+2)\,dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t+C$　である。

問 23　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 7\,dx$　(2) $\int (6x^2+x-5)\,dx$　(3) $\int (x^3+4)\,dx$

(4) $\int (x+1)(x+3)\,dx$　(5) $\int (3t+2)^2\,dt$

例題 9　**次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。**

$$F'(x)=4x-3,\quad F(1)=2$$

解　$F'(x)=4x-3$ であるから，$F(x)=\int (4x-3)\,dx=2x^2-3x+C$

$F(1)=2$ であるから，$F(1)=2\cdot1^2-3\cdot1+C=2$ より，　$C=3$

よって，求める関数は，　$F(x)=2x^2-3x+3$

問 24　次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=5x-2$，$F(0)=-2$　(2) $F'(x)=(x+1)(x-3)$，$F(-1)=0$

空欄を埋めて重要キーワードを確認しよう！

- 関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の［原始関数］という。
  - $F(x)$ を微分すれば $f(x)$ になる。
  - つまり・・・$F'(x)=$［$f(x)$］
  - 原始関数は無数にある。その違いは定数部分のみであり，これらをまとめて C と表す。
  - $F(x)+C$ をまとめて $f(x)$ の［不定積分］といい，［$\int f(x)\,dx$］で表す。
- $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を［積分する］といい，定数 C を［積分定数］という。
  - とくに断らなくても，C は積分定数を表す。

積分する　① x 増やす ② 増やした数で割る ③ 必要なら約分 ④ $+C$

※ 微分も積分も「展開」してから！

微分する　① x の係数と指数をかける ② x 減らす ③ 定数は消す

例 14,15

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (3x^2-4x+2)\,dx$

(2). $\int (x-1)(x-2)\,dx$

上の例を参考に不定積分の手順を確認しよう！

例 14,15

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (3x^2-4x+2)\,dx$

(2). $\int (x-1)(x-2)\,dx$

問 23

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int 7\,dx$

(2). $\int (6x^2+x-5)\,dx$

(3). $\int (x^3+4)\,dx$

(4). $\int (x+1)(x+3)\,dx$

(5). $\int (3t+2)^2\,dt$

※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。

※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（各２点）、２回目は宿題の取り組み状況（各２点）、３回目は最終評価（各２点）です。

Axis 420　解き終わったらスクリーンショットを撮って Libry に登録！

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (-5)\,dx$

(2). $\int (2x-1)\,dx$

(3). $\int (x^2-3x-2)\,dx$

(4). $\int (4x^3-3x^2-2x-1)\,dx$

Axis 421　解き終わったらスクリーンショットを撮って Libry に登録！

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (x-1)(x+2)\,dx$

(2). $\int (2x+3)^2\,dx$

(3). $\int (x+1)^3\,dx$

2　定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とするとき，$x=a$ から $x=b$ までの $F(x)$ の値の変化 $F(b)-F(a)$ について考えてみよう。

たとえば，関数 $f(x)=2x+3$ の原始関数 $F(x)$ は，

$$F(x)=x^2+3x+C$$

と表される。このとき，

$$F(b)-F(a)=(b^2+3b+C)-(a^2+3a+C)$$
$$=b^2+3b-a^2-3a$$

となり，原始関数の値の差 $F(b)-F(a)$ は，積分定数 C のとり方によらない。

一般に，関数 $f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，$F(b)-F(a)$ は，原始関数の選び方に関係なく定まる。

この値 $F(b)-F(a)$ を，関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分** といい，

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と表す。そして，a をこの定積分の **下端**，b を **上端** という。

また，この定積分を求めることを **$f(x)$ を a から b まで積分する** という。

関数 $F(x)$ に対し，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表す。

定積分の定義

$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

定積分の値は，原始関数の選び方によらないので，積分定数を０として計算すればよい。

例 16　$\int_1^4 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4=\frac{1}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{3}\cdot 1^3=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=\frac{63}{3}=21$

空欄を埋めて重要キーワードを確認しよう！

- $f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，
  - $F(b)-F(a)$ は，原始関数の選び方に関係なく［定まる］。
  - $F(b)-F(a)$ を，関数 $f(x)$ の a から b までの［定積分］という。
  - ［$\int a^b f(x)\,dx$］ $=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$
  - a をこの定積分の［下端］，b を［上端］という。
  - この定積分を求めることを

    $f(x)$ を a から b まで［積分する］という。
- 積分にも［線形性］あり！

例 16

$\int_1^4 x^2\,dx$

例 17　$\int_{-1}^{3}(2t^2-5t)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2\right]_{-1}^{3}$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 3^3-\frac{5}{2}\cdot 3^2\right)-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-1)^3-\frac{5}{2}\cdot(-1)^2\right\}$$
$$=\left(18-\frac{45}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)=-\frac{4}{3}$$

問 25　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx$　(2) $\int_3^0 (1-2t^2)\,dt$　(3) $\int_{-1}^{1}(y^2+2y+1)\,dy$

定積分の性質

定積分においても，不定積分の場合と同様に次のことが成り立つ。

定積分の性質（Ⅰ）

1　$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$　（k は定数）

2　$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$

証明　1　$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，$kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数であるから，

$$\int_a^b kf(x)\,dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b$$
$$=kF(b)-kF(a)$$
$$=k\{F(b)-F(a)\}$$
$$=k\int_a^b f(x)\,dx$$

問 26　上の性質 2 が成り立つことを証明せよ。

※ 線形性を意識すれば覚えることが減る！

例 17

$\int_{-1}^{3}(2t^2-5t)\,dt$

問 25

次の定積分を求めよ。

(1). $\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx$

(2). $\int_3^0 (1-2t^2)\,dt$

(3). $\int_1^{-1} (y^2+2y+1)\,dy$

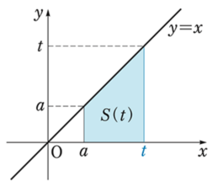
※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。

※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（各２点）、２回目は宿題の取り組み状況（各２点）、３回目は最終評価（各２点）です。

3　面積と定積分

面積と定積分の関係を調べてみよう。

$f(x)=x$, $0<a\leqq t$ とする。右の図のように，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および２直線 $x=a$, $x=t$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を考えると，



$$S(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}a^2$$

である。$S(t)$ を t について微分すると，

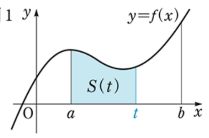
$$S'(t)=t$$

であるから，$S'(t)=f(t)$ が成り立つ。

より一般の関数でも同様のことが成り立つか考えてみよう。

区間 $a\leqq x\leqq b$ で，$f(x)\geqq 0$ とする。

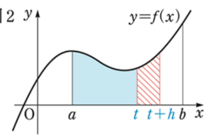
図１のように，実数 t を，$a\leqq t\leqq b$ の範囲にとり，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および２直線 $x=a$, $x=t$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を考える。

図１


$h>0$ として，x が t から $t+h$ まで変化したとき，面積は図２の斜線部分だけ変化し，その量は

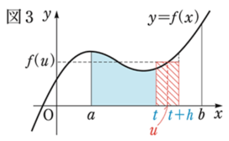
$$S(t+h)-S(t)$$

となる。

図２


ここで，図３のように，t と $t+h$ の間に u をうまくとって，幅 h，高さ $f(u)$ の長方形の面積が，図２の斜線部分の面積に等しくなるようにすると，

$$S(t+h)-S(t)=hf(u)$$

図３


したがって，

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=f(u)$$

となる。この式は，$h<0$ のときにも成り立つ。

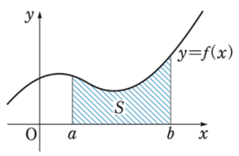
ここで，$h\to 0$ のとき，$u\to t$ であるから，$f(u)\to f(t)$ となり，

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=f(t)$$

したがって，　$S'(t)=f(t)$

が成り立つ。よって，$S(t)$ は $f(t)$ の原始関数の１つである。

このことを利用して，区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと，x 軸および２直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。



$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の１つであり，定義より $S(a)=0$ であるから，

$$\int_a^t f(x)\,dx=\Big[S(x)\Big]_a^t=S(t)-S(a)=S(t)$$

である。$t=b$ のとき，$S(b)=S$ であるから，

$$S=S(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

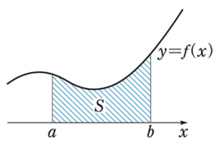
以上から，次のことが成り立つ。

面積と定積分

区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ とする。

$y=f(x)$ のグラフと，x 軸および２直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

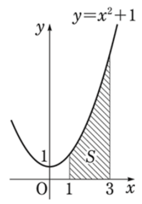


例 21　**放物線 $y=x^2+1$ と x 軸および２直線 $x=1$, $x=3$ で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。**

$1\leqq x\leqq 3$ で $y=x^2+1>0$ であるから，

$$S=\int_1^3 (x^2+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^3=\frac{32}{3}$$

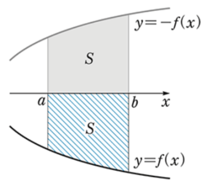


問 33　放物線 $y=6x-2x^2$ と x 軸および２直線 $x=1$, $x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

x 軸に関して曲線 $y=f(x)$ と対称な曲線は $y=-f(x)$ である。これを利用すると，次のことが成り立つ。

区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq 0$ とする。
曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$



例 22　**放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。**

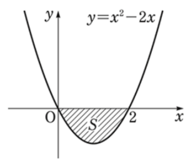
放物線と x 軸の交点の x 座標は，

$x^2-2x=0$ を解いて，　$x=0$, 2

$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で $y\leqq 0$ であるから，

$$S=-\int_0^2 (x^2-2x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$



問 34　次の放物線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2-3x-4$, x 軸

(2)　放物線 $y=x^2-2$, x 軸，y 軸，直線 $x=1$

2 曲線間の面積

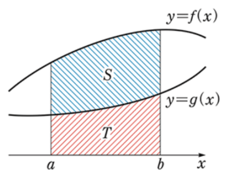
２曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が，区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)$ を満たすとき，これらの２曲線と２直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

(i)　$g(x)\geqq 0$ の場合

曲線 $y=g(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積を T とすると，右の図からわかるように，

$$S=(S+T)-T=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$



(ii)　$g(x)\geqq 0$ とは限らない場合

正の数 k を十分大きくとり，曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ をともに y 軸方向に k だけ平行移動した２曲線

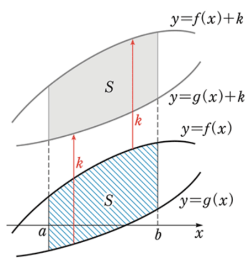
$$y=f(x)+k,\ y=g(x)+k$$

を考えれば，区間 $a\leqq x\leqq b$ において，

$$f(x)+k\geqq g(x)+k\geqq 0$$

とすることができる。よって，(i) より，

$$S=\int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}\,dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$



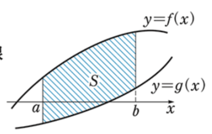
以上より，次のことが成り立つ。

2 曲線間の面積

区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)$ とする。

２曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ および２直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$



The 面積の公式！

① 簡単なグラフをかいて求めたい面積を確認！

② x 座標の**左**端と**右**端、グラフの**上下**を確認して

③ 公式にセット！

$$面積=\int_{左}^{右}(上-下)\,dx$$

面積の公式はこれ１つで十分！　グラフは上下左右が分かる簡単なもので OK！

例 23

放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=x+1$ および２直線 $x=0$, $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

問 35

放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=x+5$ および２直線 $x=1$, $x=3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

例題 12

次の２つの放物線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$y=x^2+2x,\quad y=-x^2+4$$

問 36

次の２つの放物線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$y=x^2-1,\quad y=-x^2+x$$

※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。

例 21

放物線 $y = x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = 1, x = 3$ で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

グラフは右のようになるから

$$S = \int_1^3 \left\{(x^2 + 1) - 0\right\} dx$$

問 33

放物線 $y = 6x - 2x^2$ と x 軸および 2 直線 $x = 1, x = 2$ で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

左右が分からないときは連立！

$y = 6x - 2x^2$ と x 軸（$y = 0$）を連立して

$$6x - 2x^2 = 0$$
$$2x^2 - 6x = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0,\ 3$$

グラフは右のようになるから

$$S = \int_1^2 \left\{(6x - 2x^2) - 0\right\} dx$$

例 22

放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

左右が分からないときは連立！

$y = x^2 - 2x$ と x 軸（$y = 0$）を連立して

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x - 2) = 0$$
$$x = 0,\ 2$$

グラフは右のようになるから

$$S = \int_0^2 \left\{0 - (x^2 - 2x)\right\} dx$$

問 34

次の放物線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1). 放物線 $y = x^2 - 3x - 4$, x 軸

左右が分からないときは連立！

$y = x^2 - 3x - 4$ と x 軸（$y = 0$）を連立して

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x + 1)(x - 4) = 0$$
$$x = -1,\ 4$$

グラフは右のようになるから

$$S = \int_{-1}^4 \left\{0 - (x^2 - 3x - 4)\right\} dx$$

(2). 放物線 $y = x^2 - 2$ と x 軸, y 軸, 直線 $x = 1$

左右が分からないときは連立！

$y = x^2 - 2$ と x 軸（$y = 0$）を連立して

$$x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = -\sqrt{2},\ \sqrt{2}$$

グラフは右のようになるから

$$S = \int_0^1 \left\{0 - (x^2 - 2)\right\} dx$$

おつかれさまでした。

すべて取り組んだら今回の学びを「振り返り」ましょう。

・評価２点・・・記入できた。
・評価２点・・・文章で書けた。
・評価２点・・・２文以上書けた。

Y. やったこと

今回の課題で学んだことを自分のことばでまとめよう

W. わかったこと

今回の課題で理解したことを自分のことばでまとめよう

T. 次にやること

次の課題に向けて何をすべきか自分のことばで残しましょう