※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（２点）、２回目は宿題の取り組み状況（２点）、３回目は最終評価（２点）です。

4　確率変数の和と期待値

ここでは2つの確率変数 X, Y の確率分布について考えてみよう。

同時分布

2つの確率変数 X, Y について，$X=a$ かつ $Y=b$ となる確率を $P(X=a,\ Y=b)$ で表すことにする。

例6　1, 2の数が書かれたカードが，それぞれ5枚，3枚ある。この8枚のカードから1枚を引き，カードに書かれた数を X とする。引いたカードをもとに戻さずにもう1回引き，カードに書かれた数を Y とする。このとき，

$$P(X=a,\ Y=b)\quad (a,\ b=1,\ 2)$$

の値を求めると，上の表のようになる。

$X \backslash Y$	1	2	計
1	$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}$	$\frac{35}{56}$
2	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$	$\frac{21}{56}$
計	$\frac{35}{56}$	$\frac{21}{56}$	1

一般に，2つの確率変数 X, Y について，$X=x_i$ かつ $Y=y_j$ となる確率を

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$$

$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

とおくと，右の表のように，すべての組 $(x_i,\ y_j)$ に対して，確率 p_{ij} が定まる。この対応関係を X と Y の **同時分布** という。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	p_m
計	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

右の表から，各 x_i, y_j に対して，

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=p_i,\qquad P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=q_j$$

となる。したがって，X, Y の確率分布は，それぞれ次の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

これらの対応関係をそれぞれ **X の周辺分布**，**Y の周辺分布** という。

例 6

1,2 の数が書かれたカードが, それぞれ 5 枚, 3 枚ある。この 8 枚のカードから 1 枚を引き, カードに書かれた数を X とする。引いたカードをもとに戻さずにもう 1 回引き, カードに書かれた数を Y とする。

※ ステップを踏みながら例６を理解しよう。

(1). 確率 $P(X=1, Y=1)$ を求めよう。

$\boxed{X=1}$ 8 枚のカードから 1 枚引いたときに 1 が出るのは $\frac{5}{8}$

$\boxed{Y=1}$ 残り 7 枚のカードから 1 枚引いたときに 1 が出るのは $\frac{4}{7}$

よって, $P(X=1, Y=1)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$

(2). 確率 $P(X=1, Y=2)$ を求めよう。

(3). 確率 $P(X=2, Y=1)$ を求めよう。

(4). 確率 $P(X=2, Y=2)$ を求めよう。

(5). ここまでの結果を利用して, 下の表を埋めよう。

	$Y=1$	$Y=2$	計
$X=1$	$\frac{20}{56}$		
$X=2$			
計			

※ この表を X と Y の同時分布という。

(6). X と Y の同時分布から,X,Y の確率分布を探して表を埋めよう。

X	1	2	計
p			

Y	1	2	計
p			

※ X の周辺分布 = X の確率分布　　※ Y の周辺分布

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X, Y の和 $X+Y$ もまた確率変数である。$X+Y$ の確率分布と期待値について考えてみよう。

たとえば，X, Y の確率分布が，それぞれ次の表で与えられたとする。

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

このとき，X, Y の期待値は，それぞれ次のようになる。

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2,\qquad E(Y)=y_1q_1+y_2q_2$$

また，確率変数 X, Y を同時に考えたとき，その同時分布が右の表のようになっているとすると，

$$p_{11}+p_{12}=p_1,\qquad p_{21}+p_{22}=p_2$$
$$p_{11}+p_{21}=q_1,\qquad p_{12}+p_{22}=q_2$$

である。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

このとき，X, Y の和 $X+Y$ の確率分布は，次の表のようになる。

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2	計
P	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	1

これより，$X+Y$ の期待値は，次のように計算できる。

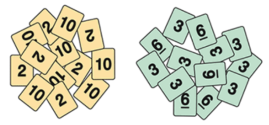
$$\begin{aligned}E(X+Y)&=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}\\&=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\\&=x_1p_1+x_2p_2+y_1q_1+y_2q_2\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

一般に，確率変数の和の期待値について，次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

$$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

例7　**表に2または10，裏に3または6の数が書かれたカードが13枚あり，その表と裏の内訳は，次の表のようになっているとする。**



(表)

数	2	10	計
枚数	6	7	13

(裏)

数	3	6	計
枚数	8	5	13

この13枚のカードの中から1枚を引くとき，表に書かれた数 X と裏に書かれた数 Y の和 $X+Y$ の期待値を求めてみよう。

X, Y の確率分布と期待値は，それぞれ次のようになる。

X	2	10	計
P	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}$	1

Y	3	6	計
P	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

$$E(X)=2\times\frac{6}{13}+10\times\frac{7}{13}=\frac{82}{13},\qquad E(Y)=3\times\frac{8}{13}+6\times\frac{5}{13}=\frac{54}{13}$$

よって，$\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{82}{13}+\frac{54}{13}=\frac{136}{13}$

補足　右の表のように例7の確率を考えるとき，確率 p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} は定まらない。このように，X と Y の同時分布が定まらない場合でも，X の周辺分布と Y の周辺分布だけから $X+Y$ の期待値を求めることができる。

$X \backslash Y$	3	6	計
2	p_{11}	p_{12}	$\frac{6}{13}$
10	p_{21}	p_{22}	$\frac{7}{13}$
計	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

問8　1個のさいころを2回投げるとき，出る目の和の期待値を求めよ。

3つ以上の確率変数についても，前ページと同様の性質が成り立つ。たとえば，3つの確率変数 X, Y, Z に対して，

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

問9　500円硬貨1枚，100円硬貨1枚，10円硬貨1枚を投げるとき，表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

例 7

表に 2 または 10, 裏に 3 または 6 の数が書かれたカードが 13 枚あり, その表と裏の内訳は, 次の表のようになっているとする。

(表)

数	2	10	計
枚数	6	7	13

(裏)

数	3	6	計
枚数	8	5	13

この 13 枚のカードの中から 1 枚を引くとき, 表に書かれた数 X と裏に書かれた数 Y の和 $X+Y$ の期待値を求めてみよう。

※ ステップを踏みながら例７を理解しよう。

(1). $X+Y$ の取りうる値を下の表を使って求めよう。

	$Y=3$	$Y=6$
$X=2$		
$X=10$	13	

※ よって, $X+Y=5,8,13,16$

(2). 下の表を利用して $X+Y$ の確率分布を求めよう。

$X+Y$	5	8	13	16	計
p					1

と思ったけど, 何もわかりません。orz

※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。