※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（２点)、２回目は宿題の取り組み状況（２点)、３回目は最終評価（２点）です。

4　確率変数の和と期待値

ここでは 2 つの確率変数 X, Y の確率分布について考えてみよう。

同時分布

2 つの確率変数 X, Y について, $X=a$ かつ $Y=b$ となる確率を $P(X=a,\ Y=b)$ で表すことにする。

例 6　1, 2 の数が書かれたカードが, それぞれ 5 枚, 3 枚ある。この 8 枚のカードから 1 枚を引き, カードに書かれた数をXとする。引いたカードをもとに戻さずにもう 1 回引き, カードに書かれた数をYとする。このとき,

$$P(X=a,\ Y=b)\quad(a,\ b=1,\ 2)$$

の値を求めると, 上の表のようになる。

X \ Y	1	2	計
1	$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}$	$\frac{35}{56}$
2	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$	$\frac{21}{56}$
計	$\frac{35}{56}$	$\frac{21}{56}$	1

一般に, 2 つの確率変数 X, Y について, $X=x_i$ かつ $Y=y_j$ となる確率を

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$$

$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とおくと, 右の表のように, すべての組 $(x_i,\ y_j)$ に対して, 確率 p_{ij} が定まる。この対応関係をXとYの **同時分布** という。

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	p_m
計	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

右の表から, 各 x_i, y_j に対して,

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=p_i,\qquad P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=q_j$$

となる。したがって, X, Y の確率分布は, それぞれ次の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

これらの対応関係をそれぞれ **X の周辺分布**, **Y の周辺分布** という。

例 6

1,2 の数が書かれたカードが, それぞれ 5 枚, 3 枚ある。この 8 枚のカードから 1 枚を引き, カードに書かれた数を X とする。引いたカードを**もとに戻さずに**もう 1 回引き, カードに書かれた数を Y とする。

※ ステップを踏みながら例 6 を理解しよう。

(1). 確率 $P(X=1, Y=1)$ を求めよう。

$\boxed{X=1}$ 8 枚のカードから 1 枚引いたときに 1 が出るのは $\frac{5}{8}$

$\boxed{Y=1}$ 残り 7 枚のカードから 1 枚引いたときに 1 が出るのは $\frac{4}{7}$

よって, $P(X=1,Y=1)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$

※ 分布を考えるときは約分しない。

(2). 確率 $P(X=1,Y=2)$ を求めよう。

(3). 確率 $P(X=2,Y=1)$ を求めよう。

(4). 確率 $P(X=2,Y=2)$ を求めよう。

(5). ここまでの結果を利用して, 下の表を埋めよう。

	$Y=1$	$Y=2$	計
$X=1$	$\frac{20}{56}$		
$X=2$			
計			

※ この表を X と Y の同時分布という。

(6). X と Y の同時分布から,X,Y の確率分布を探して表を埋めよう。

X	1	2	計
p			

Y	1	2	計
p			

※ X の周辺分布 $=$ X の確率分布　※ Y の周辺分布 $=$ Y の確率分布

確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y の和 $X+Y$ もまた確率変数である。$X+Y$ の確率分布と期待値について考えてみよう。

たとえば, X, Y の確率分布が, それぞれ次の表で与えられたとする。

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

このとき, X, Y の期待値は, それぞれ次のようになる。

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2,\qquad E(Y)=y_1q_1+y_2q_2$$

また, 確率変数 X, Y を同時に考えたとき, その同時分布が右の表のようになっているとすると,

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$p_{11}+p_{12}=p_1,\qquad p_{21}+p_{22}=p_2$$
$$p_{11}+p_{21}=q_1,\qquad p_{12}+p_{22}=q_2$$

である。

このとき, X, Y の和 $X+Y$ の確率分布は, 次の表のようになる。

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2	計
P	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	1

これより, $X+Y$ の期待値は, 次のように計算できる。

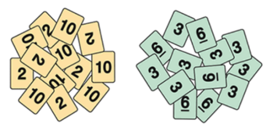
$$\begin{aligned}E(X+Y)&=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}\\&=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\\&=x_1p_1+x_2p_2+y_1q_1+y_2q_2\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

一般に, 確率変数の和の期待値について, 次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

$$\boldsymbol{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

例 7　**表に 2 または 10, 裏に 3 または 6 の数が書かれたカードが 13 枚あり, その表と裏の内訳は, 次の表のようになっているとする。**



(表)

数	2	10	計
枚数	6	7	13

(裏)

数	3	6	計
枚数	8	5	13

この 13 枚のカードの中から 1 枚を引くとき, 表に書かれた数Xと裏に書かれた数Yの和 $X+Y$ の期待値を求めてみよう。

X, Y の確率分布と期待値は, それぞれ次のようになる。

X	2	10	計
P	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}$	1

Y	3	6	計
P	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

$$E(X)=2\times\frac{6}{13}+10\times\frac{7}{13}=\frac{82}{13},\qquad E(Y)=3\times\frac{8}{13}+6\times\frac{5}{13}=\frac{54}{13}$$

よって,　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{82}{13}+\frac{54}{13}=\frac{136}{13}$

補足　右の表のように例 7 の確率を考えるとき, 確率 p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} は定まらない。このように, XとYの同時分布が定まらない場合でも, X の周辺分布とYの周辺分布だけから $X+Y$ の期待値を求めることができる。

X \ Y	3	6	計
2	p_{11}	p_{12}	$\frac{6}{13}$
10	p_{21}	p_{22}	$\frac{7}{13}$
計	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

問 8　1 個のさいころを 2 回投げるとき, 出る目の和の期待値を求めよ。

3 つ以上の確率変数についても, 前ページと同様の性質が成り立つ。たとえば, 3 つの確率変数 X, Y, Z に対して,

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

問 9　500 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 1 枚, 10 円硬貨 1 枚を投げるとき, 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

例 7

表に 2 または 10, 裏に 3 または 6 の数が書かれたカードが 13 枚あり, その表と裏の内訳は, 次の表のようになっているとする。

(表)

数	2	10	計
枚数	6	7	13

(裏)

数	3	6	計
枚数	8	5	13

この 13 枚のカードの中から 1 枚を引くとき, 表に書かれた数 X と裏に書かれた数 Y の和 $X+Y$ の期待値を求めてみよう。

※ ステップを踏みながら例 7 を理解しよう。

(1). $X+Y$ の取り得る値を下の表を使って求めよう。

	$Y=3$	$Y=6$
$X=2$		
$X=10$	13	

※ よって, $X+Y=5,8,13,16$

(2). 下の表を利用して $X+Y$ の確率分布を求めよう。

と思ったけど, 何もわかりません。orz

$X+Y$	5	8	13	16	計
p					1

例えば, カードは全部で 13 通り。

$X+Y=5$ になるのは $X=2,Y=3$ のときだけ。

よって表が 2, 裏が 3 のカードを数えればいいのですが・・・何枚あるか分かりますか。まったく分かりません。つまり $P(X+Y=5)$ は求められない！

この方法では $E(X+Y)$ を求めることはできません。

条件を満たす 13 枚のカードを実際に作れば求められます。が・・・大変です。

そこで $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ の登場です！

(3). 下の表を埋めて確率分布を作り, 期待値 $E(X)$, $E(Y)$ を求めよう。

X	2	10	計
p			1

$E(X)=$

Y	3	6	計
p			1

$E(Y)=$

(4). $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ を求めよう。

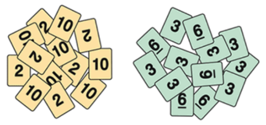
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ より

※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。

第２章「統計的な推測」＞　第１節「確率分布」＞　４「確率変数の和と期待値」

※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（２点）、２回目は宿題の取り組み状況（２点）、３回目は最終評価（２点）です。

例 7　**表に 2 または 10，裏に 3 または 6 の数が書かれたカードが 13 枚あり，その表と裏の内訳は，次の表のようになっているとする。**



(表)

数	2	10	計
枚数	6	7	13

(裏)

数	3	6	計
枚数	8	5	13

この 13 枚のカードの中から 1 枚を引くとき，表に書かれた数 X と裏に書かれた数 Y の和 $X+Y$ の期待値を求めてみよう。

X，Y の確率分布と期待値は，それぞれ次のようになる。

X	2	10	計
P	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}$	1

Y	3	6	計
P	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

$$E(X)=2\times\frac{6}{13}+10\times\frac{7}{13}=\frac{82}{13},\quad E(Y)=3\times\frac{8}{13}+6\times\frac{5}{13}=\frac{54}{13}$$

よって，　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{82}{13}+\frac{54}{13}=\frac{136}{13}$

補足　右の表のように例 7 の確率を考えるとき，確率 p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} は定まらない。このように，X と Y の同時分布が定まらない場合でも，X の周辺分布と Y の周辺分布だけから $X+Y$ の期待値を求めることができる。

X＼Y	3	6	計
2	p_{11}	p_{12}	$\frac{6}{13}$
10	p_{21}	p_{22}	$\frac{7}{13}$
計	$\frac{8}{13}$	$\frac{5}{13}$	1

問 8　1 個のさいころを 2 回投げるとき，出る目の和の期待値を求めよ。

3 つ以上の確率変数についても，前ページと同様の性質が成り立つ。たとえば，3 つの確率変数 X，Y，Z に対して，

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

問 9　500 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 1 枚，10 円硬貨 1 枚を投げるとき，表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

問 8

1 個のサイコロを 2 回投げるとき, 出る目の和の期待値を求めよ。

※ 数学 A 風に解いてみよう。

(1). 下の表を埋めよう。また, 出る目の和 Z のとり得る値を求めよう。

和	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$Z=$

(2). 下の表を埋めて出る目の和 Z の確率分布を作ろう。

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
p												

(3). 出る目の和の期待値を求めよう。

和の期待値

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$X+Y$ の期待値が欲しいなら,X,Y の期待値を求めればいい！

問 8

1 個のサイコロを 2 回投げるとき, 出る目の和の期待値を求めよ。

※ 和の期待値の公式を使ってみよう。

(1). サイコロ 1 個目を投げるとき, 出る目 X の期待値を求めよう。

X	1	2	3	4	5	6	計
p							

$E(X)=$

(2). サイコロ 2 個目を投げるとき, 出る目 Y の期待値を求めよう。

Y	1	2	3	4	5	6	計
p							

$E(Y)=$

(3). 2 個のサイコロを投げるとき, 出る目の和 X,Y の期待値を求めよう。

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ より

和の期待値

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

・・・つまり何個でも OK！

問 9

500 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 1 枚, 10 円硬貨 1 枚を投げるとき, 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

※確率変数が何個になっても和の期待値の公式が使えます♪

(1). 500 円硬貨 1 枚を投げるとき, 表が出た硬貨の金額 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

X	0	500	計
p			

$E(X)=$

(2). 100 円硬貨 1 枚を投げるとき, 表が出た硬貨の金額 Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ。

Y	0	100	計
p			

$E(Y)=$

(3). 10 円硬貨 1 枚を投げるとき, 表が出た硬貨の金額 Z の期待値 $E(Z)$ を求めよ。

Z	0	10	計
p			

$E(Z)=$

(4). $E(X+Y+Z)$ を求めよ。

$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$ より

おつかれさまでした。

すべて取り組んだら今回の学びを「振り返り」ましょう。

- 評価２点・・・記入できた。
- 評価２点・・・文章で書けた。
- 評価２点・・・２文以上書けた。

Y. やったこと

今回の課題で学んだことを自分のことばでまとめよう

W. わかったこと

今回の課題で理解したことを自分のことばでまとめよう

T.

次にやること

次の課題に向けて何をすべきか自分のことばで残しましょう

※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。