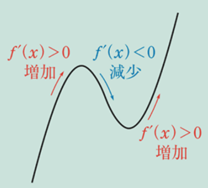
※３回チェックします。１回目は授業後の取り組み状況（各２点）、２回目は宿題の取り組み状況（各２点）、３回目は最終評価（各２点）です。

第3節　積　分

ひらく

関数 $f(x)$ を微分すると導関数 $f'(x)$ が得られる。この $f'(x)$ を調べることで，$f(x)$ の増減の様子がわかり，$y=f(x)$ のグラフをかくことができた。
それでは，その逆に導関数 $f'(x)$ が与えられたとき，もとの関数 $f(x)$ を求めることはできるだろうか。



1　不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち，

$$F'(x)=f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の **原始関数** という。たとえば，

$$x^2,\quad x^2+4,\quad x^2-6$$

などは，微分すればいずれも $2x$ となるから，これらはすべて $2x$ の原始関数である。このように，１つの関数の原始関数は無数にある。

いま，$f(x)$ の２つの原始関数を $F(x)$，$G(x)$ とすると，

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

導関数が０になる関数は定数関数であるから，その定数を C とすると，

$$G(x)-F(x)=C \text{ より，}\quad G(x)=F(x)+C$$

したがって，$F(x)$ と $G(x)$ は定数だけしか違わない。

よって，$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の原始関数は，

$$F(x)+C \qquad \text{ただし，}C\text{ は任意の定数}$$

と書ける。これらをまとめて $f(x)$ の **不定積分** といい，$\int f(x)\,dx$ で表す。

不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき，$\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+C$

注　$\int$ は，sum（和）の頭文字 s に由来する記号で，インテグラルと読む。

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する** といい，定数 C を **積分定数** という。

今後，とくに断らなくても，C は積分定数を表すものとする。

例13　**1，x，x^2 を積分してみよう。**

$(x)'=1$，$\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x$，$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$

であるから，

$$\int 1\,dx=x+C,\quad \int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C,\quad \int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

$x \xrightarrow{\text{積分する}} \frac{1}{2}x^2+C$，$\frac{1}{2}x^2+C \xrightarrow{\text{微分する}} x$

注　$\int 1\,dx$ は $\int dx$ と書くことが多い。

一般に，次のことが成り立つ。

x^n の不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\text{ は }0\text{ または正の整数})$$

注　$n=0$ のとき，$\int x^0dx$ は $\int 1dx$ を表すものとする。

$f(x)$，$g(x)$ の原始関数を１つずつ選び，それぞれ $F(x)$，$G(x)$ とすると，

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=g(x)$$

であるから，k が定数のとき，次のようになる。

$$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$$
$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$
$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$$

以上のことから，次のページの公式が成り立つ。

定数倍，和，差の不定積分

1　$\displaystyle\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$　（k は定数）

2　$\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

　$\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

例14

$$\int (3x^2-4x+2)\,dx=3\int x^2\,dx-4\int x\,dx+2\int dx$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+2\cdot x+C=x^3-2x^2+2x+C$$

注　例 14 のように複数の関数に分けて積分する場合，積分定数は１つにまとめて書いておけばよい。

例15

$$\int (x-1)(x-2)\,dx=\int (x^2-3x+2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

注　変数が x 以外の関数についても，同様に不定積分を考える。

たとえば，$\displaystyle\int (t-1)(t-2)\,dt=\int (t^2-3t+2)\,dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t+C$　である。

問23　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int 7\,dx$　(2)　$\int (6x^2+x-5)\,dx$　(3)　$\int (x^3+4)\,dx$

(4)　$\int (x+1)(x+3)\,dx$　(5)　$\int (3t+2)^2\,dt$

例題9　**次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。**

$$F'(x)=4x-3,\quad F(1)=2$$

解　$F'(x)=4x-3$ であるから，$F(x)=\int (4x-3)\,dx=2x^2-3x+C$

$F(1)=2$ であるから，$F(1)=2\cdot1^2-3\cdot1+C=2$ より，　$C=3$

よって，求める関数は，　$F(x)=2x^2-3x+3$

問24　次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1)　$F'(x)=5x-2$，$F(0)=-2$　(2)　$F'(x)=(x+1)(x-3)$，$F(-1)=0$

積分する　① x 増やす ② 増やした数で割る ③ 必要なら約分 ④ $+C$

微分する　① x の係数と指数をかける ② x 減らす

※ 微分も積分も「展開」してから！

例 14,15

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (3x^2-4x+2)\,dx$

(2). $\int (x-1)(x-2)\,dx$

例 14,15

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (3x^2-4x+2)\,dx$

(2). $\int (x-1)(x-2)\,dx$

問 23

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int 7\,dx$

(2). $\int (6x^2+x-5)\,dx$

(3). $\int (x^3+4)\,dx$

(4). $\int (x+1)(x+3)\,dx$

(5). $\int (3t+2)^2\,dt$

Axis420

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (-5)\,dx$

(2). $\int (2x-1)\,dx$

(3). $\int (x^2-3x-2)\,dx$

(4). $\int (4x^3-3x^2-2x-1)\,dx$

Axis421

次の不定積分を求めよ。

(1). $\int (x-1)(x+2)\,dx$

(2). $\int (2x+3)^2\,dx$

※青い枠が課題です。青い枠内で解いてください。　※赤い枠も課題です。こちらは記述問題としてチェックします。途中もしっかりと残しておこう。　※少しずつ〇付けをしていきます。１週間ぐらいしたら評価を行います。お早めに。

(3). $\displaystyle\int (x+1)^3\,dx$