Matemática Aplicada a la Computación

Dr. Daniel Gutierrez Pachas (dgutierrezp@ucsp.edu.pe)
Departamento de Ciencia de la Computación - UCSP

Lista de Ejercicios N° 7

1. Determinar los autovalores y autovectores en cada caso:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c)) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Si los eigenvalores de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ ¿Cuáles son los posibles valores de a y d?

3. En los siguientes casos determine la dimensión del autoespacio correspondiente al autovalor $\lambda = 3$

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4. En los siguientes casos compruebe que A es diagonalizable y encuentre los autovalores de A.

(a) $A = \begin{bmatrix} -11 & 36 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5. En los siguientes casos demuestre que la matriz dada no es diagonalizable.

(a) $\begin{bmatrix} -0 & 30 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Resolver en cada caso:

(a) Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, obtener A^8.

(b) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, obtener A^5.

7. Encuentre los autovalores de la matriz simétrica dada. Para cada autovalor, determine la dimensión del autoespacio correspondiente.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Verifique que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

   (a) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9. En los siguientes casos demuestre que la matriz simétrica es diagonalizable.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$

10. En cada caso, diagonalizar ortogonalmente la matriz A

    (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. Determinar el signo de los autovalores de las siguientes matrices y clasificarlas

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

12. Considerando la matriz

    $$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

    (a) Determinar P tal que $A = PDP^T$.

    (b) Obtener $q(x) = x^T Ax$.

    (c) Clasificar la matriz A.

13. Supongamos que $q(x) = x^T Ax$, donde A es simétrica. Determinar A y clasificarla

    (a) $q(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3$.

    (b) $q(x) = 5x_1^2 - 9x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

    (c) $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 10x_2x_3$.

    (d) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4$.

    (e) $q(x) = 5x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 50x_4^2 + 3x_1x_2 - 6x_3x_4$.

    (f) $q(x) = -2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

    (g) $q(x) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.