

Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Ciência da Computação
DCC059 - Teoria dos Grafos Semestre 2016-3

Cobertura de Vértices Ponderados

Helder Linhares Bertoldo dos Reis

Professor: Stênio Sã Rosário F. Soares

Relatório do trabalho final de Teoria dos Grafos, parte integrante da avaliação da disciplina.

Juiz de Fora

Dezembro de 2016

Sumário

1	Introdução	1
2	Metodologia utilizada	1
2.1	Estruturas de dados utilizadas	1
2.2	Abordagens algorítmicas usadas na solução	1
2.2.1	Algoritmo Construtivo Guloso	1
2.2.2	Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado	2
2.2.3	Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado Reativo	2
3	Experimentos computacionais	3
3.1	Instâncias	4
3.2	Experimento 1	4
3.3	Experimento 2	5
3.4	Experimento 3	5
4	Comparação de Resultados	6
5	Conclusões	7
A	Referências	8

Resumo

O Problema da Cobertura de Vértices Ponderado (PCVP) é um problema NP-Difícil com grande interesse prático. Muitos problema reais podem ser relacionados ao PCVP, por exemplo, instalação de equipamentos para monitoramento de vias e posicionamento de replicadores para distribuição de sinais digitais. Este trabalho busca tratar do problema utilizando de 3 abordagens heurísticas: Algoritmo Construtivo Guloso, Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado e Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado e Reativo. Ao final realizar uma análise dos resultados obtidos com os resultados encontrados na literatura, encontrados na biblioteca BHOSLIB.

1 Introdução

- Dados um grafo G e uma função de ponderação dos vértices de G , o problema de cobertura com vértices ponderados ou capacitados em G consiste em encontrar um subconjunto de vértices de G que constituam uma cobertura de vértices em G e, para todos os vértices da cobertura, a soma de seus pesos seja mínima.

2 Metodologia utilizada

- Dado que o problema encontra-se na categoria NP-Difícil, foi necessária a utilização de heurísticas construtivas gulosas para a solução do mesmo. Para aperfeiçoar a abordagem gulosa, foi desenvolvido dois algoritmos derivados: Construtivo Guloso Randomizado e Construtivo Guloso Randomizado Reativo.

2.1 Estruturas de dados utilizadas

Para o desenvolvimento do algoritmo foram utilizadas as seguintes Estruturas de Dados implementadas em C++ 11:

- Tabela Hash
- Vector
- List
- MultiSet
- Pair

2.2 Abordagens algorítmicas usadas na solução

2.2.1 Algoritmo Construtivo Guloso

Para a abordagem construtiva gulosa, a heurística ordena em ordem crescente os vértices de acordo com a função critério: Peso do Vértice dividido pelo seu Grau. Após a ordenação, utiliza sempre o vértice de menor custo, até que todas as arestas

estejam cobertas.

Algoritmo 1: Algoritmo Construtivo Guloso

Entrada: uma instância do problema;

Saída: uma solução sub-ótima;

```
1 início
2   Enquanto todas arestas não estiverem cobertas faça
3       ordene vértices segundo função critério;
4       adicione primeiro vértice ao conjunto solução do problema;
5       marcar arestas adjacentes ao vértice como cobertas;
6   fim-enquanto
7 fim
```

2.2.2 Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado

No algoritmo construtivo guloso randomizado, a heurística ordena em ordem crescente os vértices de acordo com a função critério: Peso do Vértice dividido pelo seu Grau. Após a ordenação, seleciona aleatoriamente um vértice dentro da faixa de menor custo limitada pelo alfa utilizado (Para os testes foram utilizados 3 valores para alfa: 0.15, 0.25 e 0.35). Repetindo o processo até que todas as arestas estejam cobertas.

Algoritmo 2: Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado

Entrada: uma instância do problema e o coeficiente \leftarrow ;

Saída: uma solução sub-ótima;

```
1 início
2   Enquanto todas arestas não estiverem cobertas faça
3       LC  $\leftarrow$  ordene vértices segundo função critério;
4       N  $\leftarrow \alpha * \text{Grau do Grafo}$ ;
5       selecione aleatoriamente um vértice dentro das N primeiras posições de LC
6       adicione o vértice ao conjunto solução do problema;
6       marcar arestas adjacentes ao vértice como cobertas;
7   fim-enquanto
8 fim
```

2.2.3 Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado Reativo

A abordagem reativa se baseia no algoritmo construtivo guloso randomizado, porém a heurística realiza ajustes baseados em cálculos de probabilidade para encontrar o melhor alfa para solucionar o problema. Para isso foram utilizados 10 valores a serem testados como alfa: 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50. Inicialmente todos os alfas tem a mesma probabilidade de serem escolhidos, porém

após um bloco de testes é realizado um ajuste na probabilidade de escolha do alfa a ser testado de forma a privilegiar os valores de que obtém melhores resultados.

Algoritmo 3: Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado Reativo

Entrada: uma instância do problema, número de iterações e número de bloco-iterações;

Saída: uma solução sub-ótima;

```
1 início
2   melhorSolução  $\leftarrow \infty$ ;
3    $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ ;
4    $p_i = 1/N, i=1, \dots, N$ ;
5   soma = { };
6   qtdeUso = { };;
7   Enquanto iteração < número de iterações faca
8       Selecionar aleatoriamente  $\alpha = \alpha_1$  usando as probabilidades  $p_i, 1/N, i=1, \dots, N$ ;
9       solução  $\leftarrow$  AlgoritmoConstrutivoGulosoRandomizado( $\alpha$ ) ;
10      if solução < melhorSolução then
11          | melhorSolução  $\leftarrow$  solução;
12      end
13      soma[indice  $\alpha$ ]  $\leftarrow$  soma +  $\sum$  pesos da solução;
14      qtdeUso[indice  $\alpha$ ]++;
15      if iteração % bloco-iteração == 0 then
16          | atualize probabilidades com base na relação soma e qtdeUso;
17      end
18  fim-enquanto
19 fim
```

3 Experimentos computacionais

Dados para os experimentos:

Notebook Acer

Processador: Intel Core I3 de 1.7 GHz

Memória RAM: 4 Gb

Sistema Operacional: Elementary OS Loki 64 bits.

Compilador: GCC 5.4

Linguagem: C++ 11

3.1 Instâncias

Para os testes foram utilizadas as seguintes instâncias, obtidas do site turing.cs.hbg.psu.edu. Deve se observar que a literatura disponibiliza resultados apenas para o problema da cobertura de vértices não ponderados, com isso foi necessário ponderar todos os vértices com valor igual.

Tabela 1: Instâncias

Instâncias	Nº de Vértices	Nº de Arestas
Frb30-15-3	450	17809
Frb30-15-4	450	17831
Frb35-17-2	595	27847
Frb40-19-3	760	41095
Frb45-21-1	945	59186
Frb45-21-4	945	58549
Frb50-23-5	1150	80035
Frb53-24-1	1272	94227
Frb56-25-2	1400	109401
Frb59-26-3	1534	126082

3.2 Experimento 1

No primeiro experimento com as instâncias foi executado teste utilizando o Algoritmo Construtivo Guloso e o resultado obtido pode ser observado a seguir:

Tabela 2: Resultados- Algoritmo Construtivo Guloso

Instâncias	Vértices	Arestas	CMC Literatura	CMC Algoritmo	Tempo(s)
Frb30-15-3	450	17809	420	429	0.19
Frb30-15-4	450	17831	420	429	0.17
Frb35-17-2	595	27847	560	570	0.28
Frb40-19-3	760	41095	720	733	0.45
Frb45-21-1	945	59186	900	913	0.72
Frb45-21-4	945	58549	900	913	0.73
Frb50-23-5	1150	80035	1100	1118	1.04
Frb53-24-1	1272	94227	1219	1240	1.27
Frb56-25-2	1400	109401	1344	1365	1.52
Frb59-26-3	1534	126082	1475	1501	1.83

*CMC = Cobertura de Menor Custo

3.3 Experimento 2

Para o segundo experimento as instâncias foram submetidas a testes utilizando o Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado, com sementes aleatórias variando entre 1 e 30 e utilizando 3 valores para Alfa (0.1, 0.2 e 0.3). Os resultados podem ser observados na tabela abaixo:

Tabela 3: Resultados- Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado							
Instâncias	Vértices	Arestas	CMC Literatura	CMC Algoritmo	Alfa	Semente	Tempo(s)
Frb30-15-3	450	17809	420	428	0.15	12	15.75
Frb30-15-4	450	17831	420	428	0.15	5	15.64
Frb35-17-2	595	27847	560	570	0.15	2	26.83
Frb40-19-3	760	41095	720	733	0.15	8	43.35
Frb45-21-1	945	59186	900	915	0.25	5	67.61
Frb45-21-4	945	58549	900	913	0.15	3	67.12
Frb50-23-5	1150	58549	1100	1116	0.15	2	98.31
Frb53-24-1	1272	94227	1219	1240	0.15	5	120.80
Frb56-25-2	1400	109401	1344	1364	0.15	27	146.71
Frb59-26-3	1534	126082	1475	1500	0.15	7	175.03

*CMC = Cobertura de Menor Custo

3.4 Experimento 3

O terceiro experimento as instâncias foram submetidas a testes utilizando o Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado Reativo, utilizando 10 valores para Alfa (0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50). Os resultados podem ser observados na tabela abaixo:

Tabela 4: Resultados- Algoritmo Construtivo Guloso Randomizado Reativo

Instâncias	Vértices	Arestas	CMC Literatura	CMC Algoritmo	Alfa	Tempo(s)
Frb30-15-3	450	17809	420	427	0.05	35.19
Frb30-15-4	450	17831	420	428	0.05	35.05
Frb35-17-2	595	27847	560	568	0.05	60.58
Frb40-19-3	760	41095	720	730	0.15	98.09
Frb45-21-1	945	59186	900	913	0.05	153.11
Frb45-21-4	945	58549	900	912	0.10	151.30
Frb50-23-5	1150	58549	1100	1115	0.05	222.52
Frb53-24-1	1272	94227	1219	1239	0.10	272.96
Frb56-25-2	1400	109401	1344	1362	0.10	330.70
Frb59-26-3	1534	126082	1475	1498	0.10	397.58

*CMC = Cobertura de Menor Custo

4 Comparação de Resultados

Desvio Percentual dos algoritmos em comparação ao melhor resultado dentre as 3 heurísticas.

Tabela 5: Desvios Percentuais do Algoritmo

Instâncias	Melhor Solução	DP Guloso (%)	DP Randomizado (%)	DP Reativo (%)
Frb30-15-3	427	0,47	0,23	0,00
Frb30-15-4	428	0,23	0,00	0,00
Frb35-17-2	568	0,35	0,35	0,00
Frb40-19-3	730	0,41	0,41	0,00
Frb45-21-1	913	0,00	0,22	0,00
Frb45-21-4	912	0,11	0,11	0,00
Frb50-23-5	1115	0,27	0,09	0,00
Frb53-24-1	1239	0,08	0,08	0,00
Frb56-25-2	1362	0,22	0,15	0,00
Frb59-26-3	1498	0,20	0,13	0,00

*DP = Desvio Percentual

Desvio Percentual dos Algoritmos em relação aos melhores valores encontrados na Literatura.

Tabela 6: Desvios Percentuais do Algoritmo em Relação à Literatura

Instâncias	Melhor Solução	DP Guloso (%)	DP Randomizado (%)	DP Reativo (%)
Frb30-15-3	420	2,14	1,90	1,67
Frb30-15-4	420	2,14	1,90	1,90
Frb35-17-2	560	1,79	1,79	1,43
Frb40-19-3	720	1,81	1,81	1,39
Frb45-21-1	900	1,44	1,67	1,44
Frb45-21-4	900	1,44	1,44	1,33
Frb50-23-5	1100	1,64	1,45	1,36
Frb53-24-1	1219	1,72	1,72	1,64
Frb56-25-2	1344	1,56	1,49	1,34
Frb59-26-3	1475	1,76	1,69	1,56

*DP = Desvio Percentual

5 Conclusões

Pode ser observado que o Algoritmo Construtivo Guloso obtém um resultado de cobertura de menor custo aproximado e satisfatório, porém abordagens complementares como a variação Randomizada e a Reativa são capazes de obter soluções ainda melhores, embora estes exijam tempo maior de processamento, estes ainda estão dentro de um limite aceitável.

Deve ser destacada a heurística Reativa que é capaz de encontrar os melhores valores para alfa e caso ela seja incrementada com algoritmos de aperfeiçoamento como busca local se torna uma excelente ferramenta para obter uma solução sub-ótima para esse tipo de problema que não tem solução em tempo polinomial.

Outro fator a ser considerado é o tempo reduzido na execução dos algoritmos. Isso se deve à implementação do grafo utilizando tabela hash.

Referências

A Referências

Wikipedia-Cobertura de Vértices, acesso em 02 de Dezembro de 2016

turing.cs.hbg.psu.edu, acesso em 02 de Dezembro de 2016