Derivação Numérica e Processos Iterativos

Temas:

- Derivação numérica
- Processos Numéricos Iterativos
- Cálculo de Raízes de uma Função
- Simulação e Cálculo da Taxa Interna de Retorno

Problema: Cálculo da Taxa Interna de Retorno

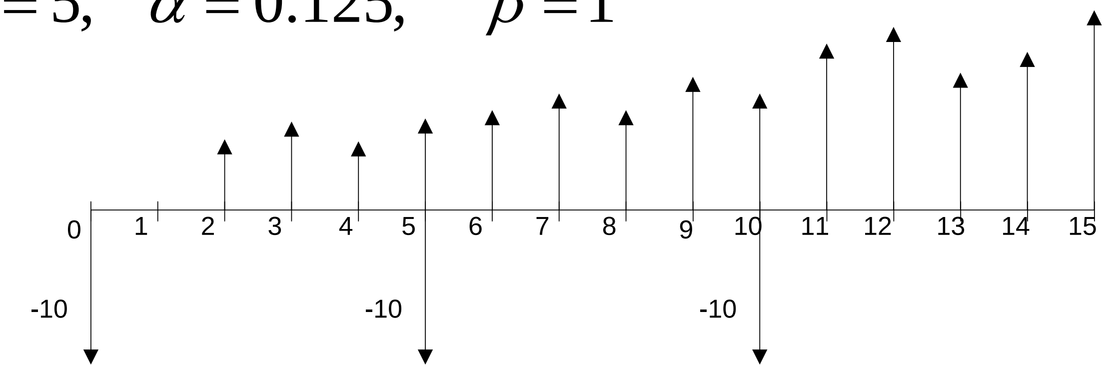
Considere um projeto de investimento cuja vida útil é de 15 anos. Considere ainda que os investimento necessários estão definidos e serão feitos nos instantes 0, 5 e 10 no valor de 10 unidades monetárias. Com uma carência de 2 anos para inicio da receita.

O fluxo de caixa livre (*free cash flow*) estimado para o projeto apresenta um tendência estocástica e uma tendência determinística, data pela equação:

$$y_t = y_{t-1} + \alpha + \beta.\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

Admita:

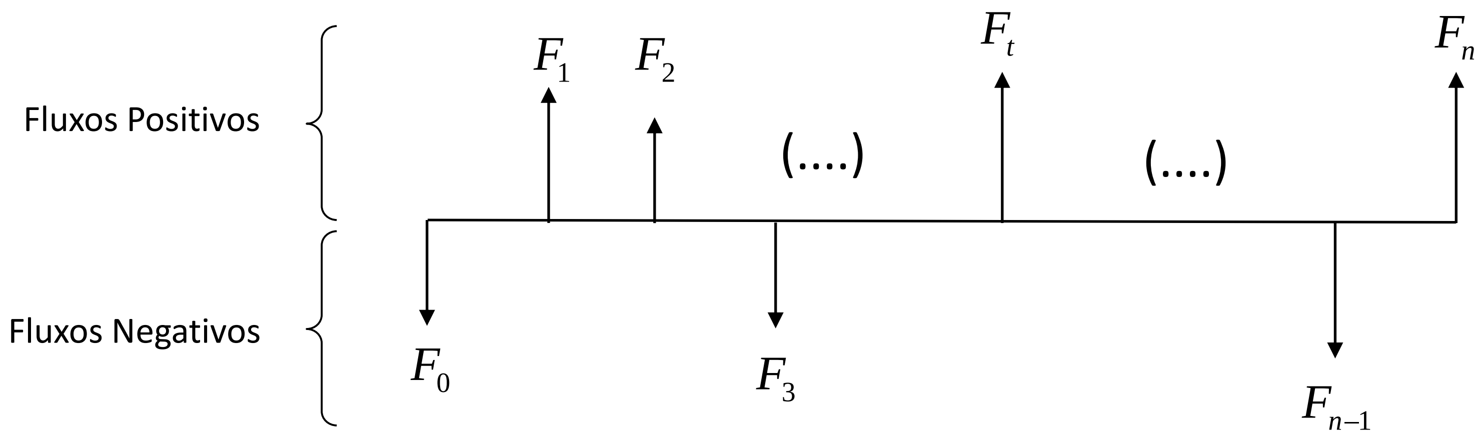
$$y_0 = 5, \quad \alpha = 0.125, \quad \beta = 1$$



Faça 1000 simulações e obtenha a distribuição de probabilidade da Taxa Interna de Retorno (TIR) para o projeto.

Considere que a taxa mínima de atratividade para o investimento deve ser de 10%.

Valor Presente Líquido e Taxa Interna de Retorno



Valor Presente Líquido:

$$VPL = \sum_{t=0}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

Taxa Interna de Retorno:

$$VPL = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{F_t}{(1+TIR)^t} = \frac{F_1}{(1+TIR)^0} + \frac{F_1}{(1+TIR)^1} + \frac{F_2}{(1+TIR)^2} + \ldots + \frac{F_n}{(1+TIR)^n}$$

Modelagem Quantitativa do Problema

Fazer as simulações de fluxo de caixa

Calcular a TIR para cada fluxo de caixa

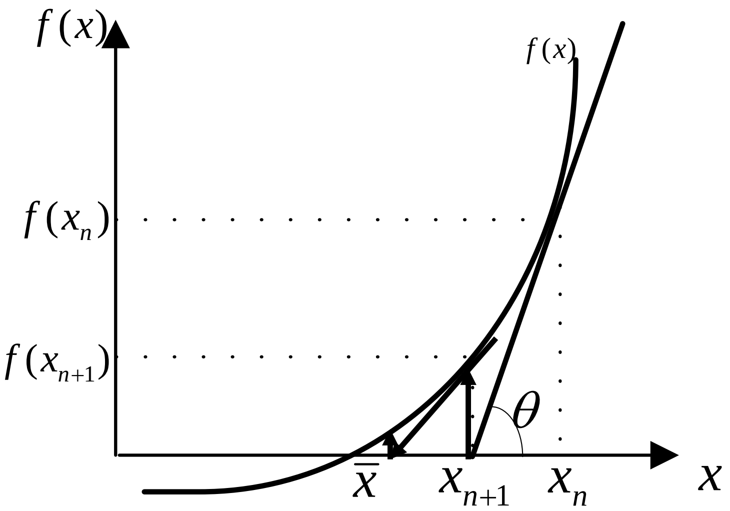
Função de Calcula TIR

Problema de encontrar a raiz de uma função

Método de Newton Raphson

Função que calcula o Valor Presente dos Fluxos de Caixa

Dada uma função *f(x)* queremos encontrar em um intervalo aberto *I* o valor que anula a função.



Pseudocódigo:

1. Iniciar $x_n = x_0$
2. Inicializar o contador de iteração $n = 0$
3. Enquanto $|f(x_n)| > \varepsilon$ e $n < n_{\max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n = x_{n+1}$$

$$n = n + 1$$

fim enquanto

$$tg\theta = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Importante: A raiz encontrada depende do ponto de partida

Processos Numéricos Iterativos

Um processo iterativo calcula uma sequência iterações ou de aproximações de uma variável desejada sendo que o cálculo da aproximação seguinte é feito utilizando as aproximações anteriores.

Exemplo de problemas:

- Simulação de séries temporais
- Encontrar as raízes de uma função
- Resolver uma equação recursiva

Critérios de Parada ou Interrupção das Iterações:

1. Critério de Convergência ou precisão desejada
2. Número máximo de iterações ou simulações

Derivada Numérica

Seja x uma variável e $f(x)$ uma função, a primeira derivada é definida como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Aproximação numérica da primeira derivada (1o modo):**

Escolher h "pequeno" e calcular:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Qual o erro da aproximação ?

Considere a expansão da Série de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2!}.f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!}.f^{(3)}(x) + \ldots$$

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)} + \underbrace{\frac{h}{2!}.f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{3!}.f^{(3)}(x) + \ldots}_{\text{erro da aproximação da ordem de grandeza da } h}$$

Derivada Numérica

- **Aproximação numérica da primeira derivada (2o modo):**

Escolher h "pequeno" e calcular:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2.h}$$

Qual o erro da aproximação ?

Considere as expansões da Série de Taylor:

subtrair

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2!}.f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!}.f^{(3)}(x) + \ldots$$

$$f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + \frac{h^2}{2!}.f^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3!}.f^{(3)}(x) + \ldots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h.f'(x) + \frac{2.h^3}{3!}.f^{(3)}(x) + + \frac{2.h^5}{5!}.f^{(5)}(x)\ldots$$

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2.h} = f'(x)} + \underbrace{\frac{h^2}{3!}.f^{(2)}(x) + \frac{h^4}{5!}.f^{(3)}(x) + \ldots}_{\text{erro da aproximação da ordem de grandeza da } h^2}$$

Exercício – Cálculo Numérico da Derivada

1. Escrever a função `user_f(x)`, uma função $f: R \to R$ qualquer.

Para teste, considere o polinômio de 3o grau:

$$f(x) = (x-1).(x+2).(x-3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Testar a função para os dados: `x = c(-4,0,-1,2,-2,1,3);`

Resultado: `-70, 6, 8, -4, 0, 0, 0`

2. Escrever a função que calcula numericamente a derivada de uma função qualquer definida pelo usuário:

```
df(f, x, h=1e-6)
```

Argumentos:

`f` : Função definida pelo usuário

`x`: ponto no qual queremos calcular a derivada

`h`: precisão desejada no cálculo da derivada

Retorno:

Valor da derivada no ponto `x`

Exercício – Método de Newton Raphson

Escrever a função que calcula a raiz de um função a partir de um ponto dado.

```
root_f(f, x0, eps=1e-6, nmax=1e3)
```

Argumentos:

`f` : Função definida pelo usuário

`x0`: ponto inicial para as iterações

`eps`: precisão desejada no cálculo da raiz

`nmax`: número máximo de iterações

Retorno:

Valor da raiz ou `NaN` caso nenhuma raiz seja encontrada

Retomando o Problema.....

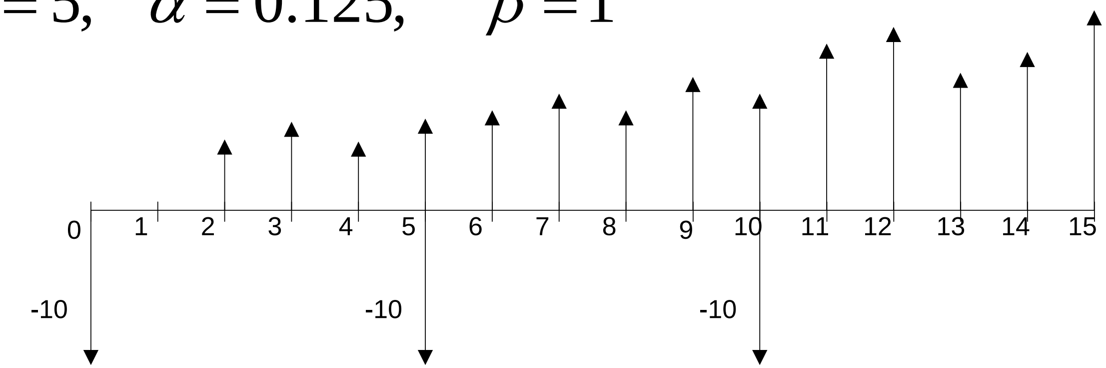
Considere um projeto de investimento cuja vida útil é de 15 anos. Considere ainda que os investimento necessários estão definidos e serão feitos nos instantes 0, 5 e 10 no valor de 10 unidades monetárias. Com uma carência de 2 anos para inicio da receita.

O fluxo de caixa livre (*free cash flow*) estimado para o projeto apresenta um tendência estocástica e uma tendência determinística, data pela equação:

$$y_t = y_{t-1} + \alpha + \beta.\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

Admita:

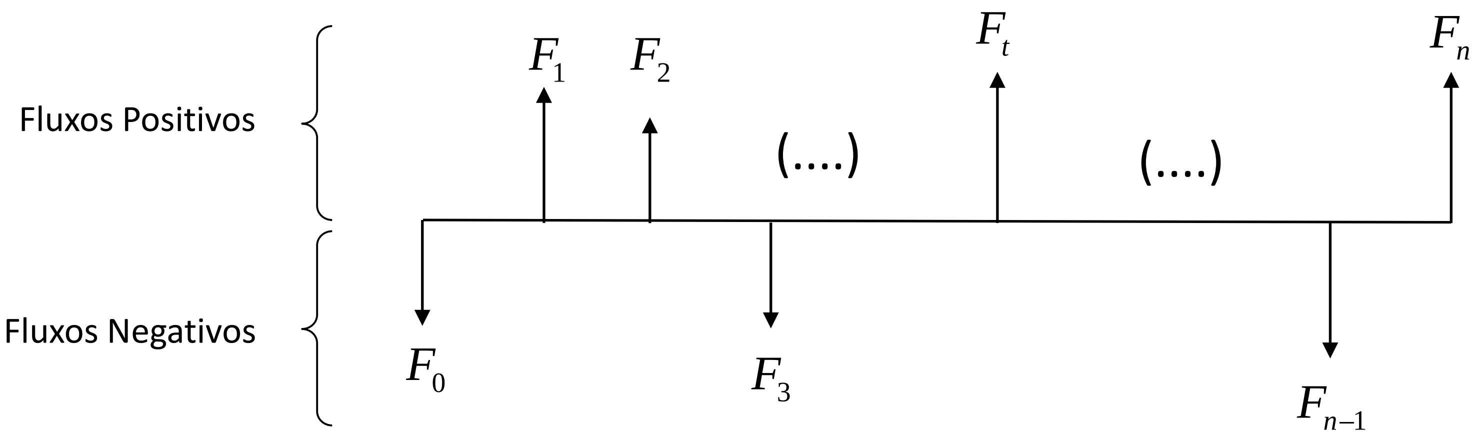
$$y_0 = 5, \quad \alpha = 0.125, \quad \beta = 1$$



Faça 1000 simulações para a TIR e obtenha a distribuição de probabilidade da Taxa Interna de Retorno (TIR) para o projeto.

Considere que a taxa mínima de atratividade para o investimento deve ser de 10%.

Valor Presente Líquido e Taxa Interna de Retorno



Valor Presente Líquido:

$$VPL = \sum_{t=0}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

Taxa Interna de Retorno:

$$VPL = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{F_t}{(1+TIR)^t} = \frac{F_1}{(1+TIR)^0} + \frac{F_1}{(1+TIR)^1} + \frac{F_2}{(1+TIR)^2} + \dots + \frac{F_n}{(1+TIR)^n}$$

Modelagem Quantitativa do Problema

Fazer as simulações de fluxo de caixa

Calcular a TIR para cada fluxo de caixa

- Função de Calcula TIR
  - Problema de encontrar a raiz de uma função
    - Método de Newton Raphson
- Função que calcula o Valor Presente dos Fluxos de Caixa

Modelagem Quantitativa do Problema

Criar uma biblioteca `AnaliseProjetos.r`:

1. Escrever uma função que calcula o valor presente líquido:

```
VPL(cf, r)
```

Argumentos:

- `cf:` vetor com o fluxo de caixa
- `r:` taxa de juros ou taxa de desconto

Retorno:

- `v:` Valor presente

Referência:

		r(%):	TIR(%):
		10%	15,24%
i	VF	VP	VP TIR
0	-75.000,00	-75.000,00	-75.000,00
1	22.500,00	20.454,55	19.524,77
2	22.500,00	18.595,04	16.942,96
3	22.500,00	16.904,58	14.702,55
4	22.500,00	15.367,80	12.758,40
5	22.500,00	13.970,73	11.071,32
	VLP	10.292,70	0,00

		r(%):	TIR(%):
		10%	12,86%
i	VF	VP	VP TIR
0	-120.000,00	-120.000,00	-120.000,00
1	34.000,00	30.909,09	30.126,23
2	34.000,00	28.099,17	26.693,82
3	34.000,00	25.544,70	23.652,47
4	34.000,00	23.222,46	20.957,64
5	34.000,00	21.111,32	18.569,84
	VLP	8.886,75	0,00

Modelagem Quantitativa do Problema

2. Escrever a função que calcula a TIR utilizando o Método de Newton-Raphson

```
TIR(cf, r0, eps=1e-6, nmax=1e3)
```

Argumentos:

- `cf`: vetor com o fluxo de caixa
- `r0`: taxa de juros inicial ou "chute inicial" para iterações
- `eps`: precisão das aproximações (1e-6)
- `nmax`: número máximo de iterações

Retorno:

- `tir`: taxa interna de retorno

Referência:

		r(%):	TIR(%):
		10%	**15,24%**
i	**VF**	**VP**	**VP TIR**
0	-75.000,00	-75.000,00	-75.000,00
1	22.500,00	20.454,55	19.524,77
2	22.500,00	18.595,04	16.942,96
3	22.500,00	16.904,58	14.702,55
4	22.500,00	15.367,80	12.758,40
5	22.500,00	13.970,73	11.071,32
	VLP	**10.292,70**	**0,00**

		r(%):	TIR(%):
		10%	**12,86%**
i	**VF**	**VP**	**VP TIR**
0	-120.000,00	-120.000,00	-120.000,00
1	34.000,00	30.909,09	30.126,23
2	34.000,00	28.099,17	26.693,82
3	34.000,00	25.544,70	23.652,47
4	34.000,00	23.222,46	20.957,64
5	34.000,00	21.111,32	18.569,84
	VLP	**8.886,75**	**0,00**

Modelagem Quantitativa do Problema

3. Escrever um **script** que faça a simulação do fluxo de caixa
 - Para cada simulação calcular e armazenar o valor da TIR
 - Gerar as estatísticas descritivas básicas
 - Plotar o histograma da TIR