

Mestrado Profissional em Economia

Disciplina: Métodos Quantitativos Computacionais Aplicados a Economia e Finanças

Professor: Ernesto Coutinho Colla

Exercício: Otimização de Fluxo de Caixa

Número de Participantes: Exercício Individual

1. Descrição do Problema

Uma empresa tem objetivo de construir um novo centro de distribuição e para isto pretende criar um fundo de investimento exclusivo para financiar o projeto que receberá um único aporte no instante inicial. A expectativa é que a construção seja executada em 1 ano e meio, 540 dias corridos, e que custe \$ 15.000 mil. Os pagamentos serão feitos 3 parcelas a cada 180 dias nos valores de \$ 2.500 mil, \$ 5.000 mil e \$ 7.500 mil.

O fundo de investimento pode investir apenas em operações de renda fixa e por este motivo buscou no mercado 4 opções de investimento em CDB com diferentes prazos, conforme tabelas abaixo. Os CDBs têm liquidez apenas nos respectivos vencimentos e podem ser contratado a termo, ou seja, para iniciar no futuro. Na cotação a rentabilidade do CDB é indicada em %CDI, mas no momento da contratação da operação será definida a taxa prefixada de retorno do CDB calculada aplicando-se o %CDI no FRA (*Forward Rate Agreement*) da curva de prefixada de mercado.

O objetivo é determinar um plano de investimento: Quando e quanto investir em cada operação de renda fixa para que o fundo de construção tenha liquidez para atender os pagamentos e exija o menor aporte inicial no fundo de investimento.

As tabelas e os diagramas abaixo detalham os dados do problema.

Nome	Taxa %CDI	Prazo (DC)
CDB 01	105,00%	90
CDB 02	107,50%	180
CDB 03	110,00%	270
CDB 04	112,50%	540

Tabela 01: Aplicações de CDBs disponíveis para investimento

t	Data	DC	Pagamentos	Aplicações CDB			
				CDB 01	CDB 02	CDB 03	CDB 04
0	23/06/2020	1	0	105,00%	107,50%	110,00%	112,50%
1	21/09/2020	90	0	105,00%			
2	21/12/2020	180	2.500	105,00%	107,50%		
3	19/03/2021	270	0	105,00%		100,00%	
4	17/06/2021	360	5.000	105,00%			
5	15/09/2021	450	0	105,00%			
6	14/12/2021	540	7.500				

Tabela 02: Detalhamento de datas, pagamentos e disponibilidade investimento em CDB

Os diagramas abaixo ilustram os detalhes da operação, nos quais:

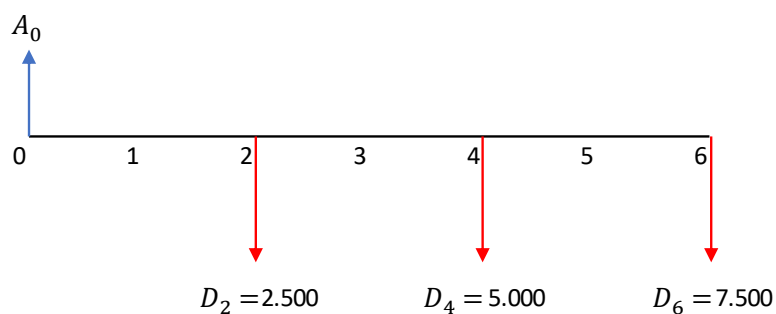
A_t : Aporte no instante t

D_t : Pagamento ou Desembolso instante t

$M_{i,t}$: Montante aplicado no i – ésimo investimento instante t e $M_{i,t} \geq 0$

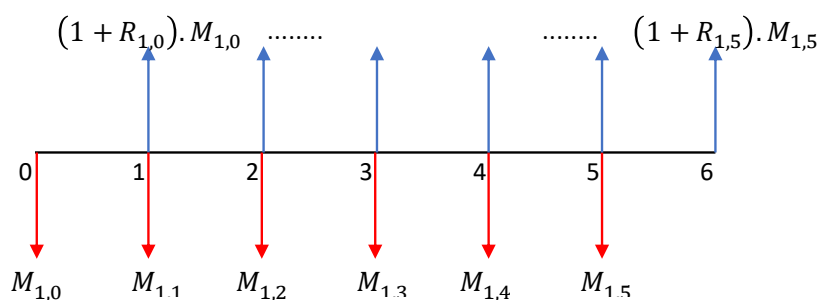
$R_{i,t}$: retorno no período do i – ésimo investimento no instante t

Fundo do Projeto



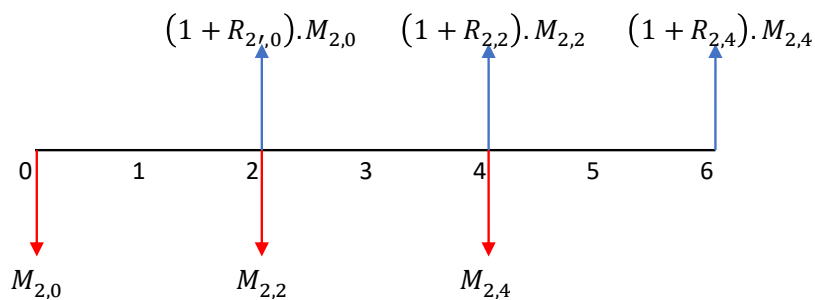
CDB 01

Taxa: 105,00% CDI
Prazo: 90 dc



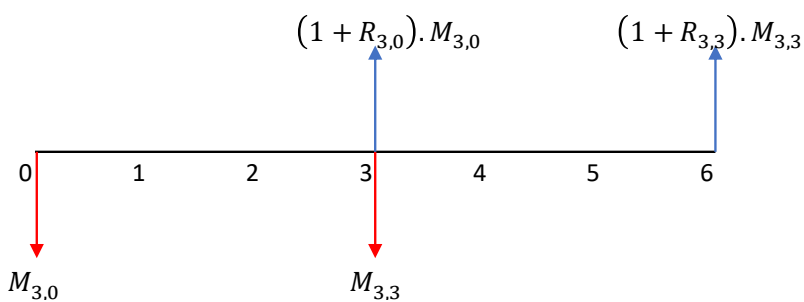
CDB 02

Taxa: 107,50% CDI
Prazo: 180 dc



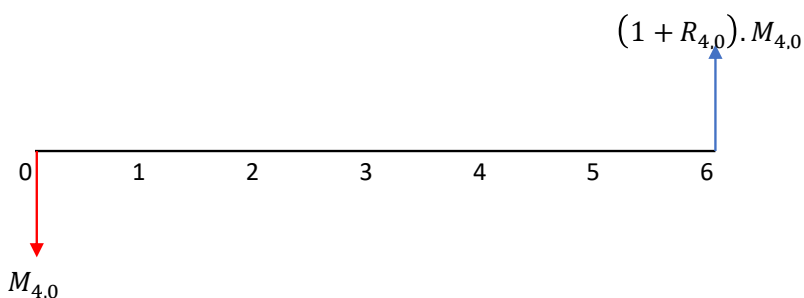
CDB 03

Taxa: 110,00% CDI
Prazo: 270 dc



CDB 04

Taxa: 112,50% CDI
Prazo: 540 dc



Observe que a cada instante do tempo em relação do Fundo do Projeto devemos ter:

$$\sum Entradas_t = \sum Saídas_t$$

Ou seja,

$$\sum Aportes_t + \sum ResgatesCDB_t = \sum AplicaçõesCDB_t + \sum Pagamentos_t$$

Por exemplo, no instante $t = 4$:

$$(1 + R_{1,3}) \cdot M_{1,3} + (1 + R_{2,2}) \cdot M_{2,2} = M_{1,4} + M_{2,4} + D_4$$

2. Formulário

Fórmula de cálculo da taxa prefixada a partir de um percentual do CDI

$$TxPre_{PerctCDI} = \left(\left((1 + TxPre_{mkt})^{\frac{1}{252}} - 1 \right) * PerctCDI + 1 \right)^{252} - 1$$

$TxPre_{mkt}$: Taxa prefixada de mercado em %aa252 du

$PerctCDI$: Percentual de CDI

$TxPre_{PerctCDI}$: taxa prefixada calculada a partir do percentual de CDI em %aa252 du

Exemplo:

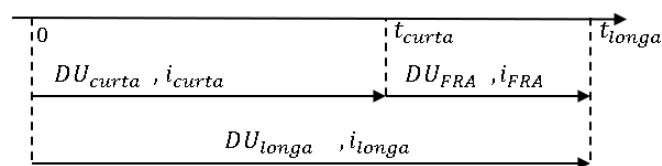
$TxPre_{mkt}$: 2,74%

$PerctCDI$: 107,50%

$TxPre_{PerctCDI}$: 2,95%

$$TxPre_{PerctCDI} = \left(\left((1 + 0.0274)^{\frac{1}{252}} - 1 \right) * 1.075 + 1 \right)^{252} - 1 = 0.0295$$

Fórmula do cálculo da taxa prefixada do FRA



$$(1 + i_{longa})^{\frac{DU_{longa}}{252}} = (1 + i_{curta})^{\frac{DU_{curta}}{252}} \cdot (1 + i_{FRA})^{\frac{DU_{FRA}}{252}}$$

$$i_{FRA} = \left(\frac{(1 + i_{longa})^{\frac{DU_{longa}}{252}}}{(1 + i_{curta})^{\frac{DU_{curta}}{252}}} \right)^{\frac{252}{DU_{FRA}}}$$

i_{curta} : taxa de juros da ponta curta %aa 252 du

DU_{curta} : Dias úteis ponta curta

i_{longa} : taxa de juros da ponta longa %aa 252 du

DU_{longa} : Dias úteis ponta longa

i_{FRA} : taxa de juros do FRA %aa 252 du

DU_{FRA} : Dias úteis do FRA

Exemplo de cálculo do FRA:

	Data Inicio	DU Inicio	DU Gap	Taxa	Taxa FRA
Ponta Curta	21/12/2020	127		2,04%	
Ponta Longa	19/03/2021	187	60	2,15%	2,38%

$$i_{FRA} = \left(\frac{(1 + 2,15\%)^{\frac{187}{252}}}{(1 + 2,04\%)^{\frac{127}{252}}} \right)^{\frac{252}{60}} = 2,38\%$$

3. Diretrizes e Dicas para a Implementação da Solução

- Todo o código, incluindo todas as funções deverão ser feitos no arquivo:

`R/scripts/ExOtimizacaoCashFlow.r`

O programa deve usar referência relativas e deve ser executável a partir do diretório: `R/scripts`

- O script de solução pode ser desenvolvido para este problema de otimização, não há a necessidade de generalizar a solução.
- O único arquivo de entrada de dados deve ser a planilha fornecida com o exercício:

`R/database/ExOtimizacaoCachFlow.xlsx`

Todos os demais cálculos deverão ser feitos no script que deverá ser desenvolvido.

- Para os cálculos de remuneração das aplicações utilizar a curva de juros de mercado fornecida na planilha de entrada de dados
- Se o problema for modelado corretamente, a função objetivo, as equações e as inequações serão todas lineares. A solução deste tipo de problemas de otimização faz parte de uma área mais ampla da matemática chamada de Programação Linear ou (*Linear Programming*). Existe um algoritmo muito eficiente para resolver esta classe de problemas, chamado de *Simplex*.
- Recomendo fortemente utilizar o pacote chamado *lpSolve* do R e a função *lp*.
- Colocar comentários no programa explicando o que está sendo feito em cada trecho do código – isto será considerado como um critério na avaliação.

Apresentação do resultado:

Ao final da execução o código deve imprimir um *dataframe* com as colunas:

Aplicacao: Nome da aplicação de CDB. Exemplo: CDB 01, CDB 02, etc...

DataAplicacao: Data em que inicia a aplicação, conforme fornecido no exercício

RetornoPeriodo: Retorno no período da aplicação. Ou seja, o valor da rentabilidade da operação durante o período da operação

Montante: O quanto deve ser aplicado em cada aplicação e em que data.

Exemplo de output:

```
> print(output)
  Aplicacao DataAplicacao RetornoPeriodo Montante
1      CDB 01    2020-06-23    0.005418608    0.000
2      CDB 01    2020-09-21    0.005210112    0.000
3      CDB 01    2020-12-21    0.005905528    0.000
4      CDB 01    2021-03-19    0.007760632  4961.496
5      CDB 01    2021-06-17    0.010015677    0.000
6      CDB 01    2021-09-15    0.011155209    0.000
7      CDB 02    2020-06-23    0.010913748  2473.010
8      CDB 02    2020-12-21    0.014040730    0.000
9      CDB 02    2021-06-17    0.021794780    0.000
10     CDB 03    2020-06-23    0.017420879  4876.542
11     CDB 03    2021-03-19    0.030620260    0.000
12     CDB 04    2020-06-23    0.049668018  7145.116
```

4. Descrição da Estruturação da Solução

Juntamente com a script que implementa a solução deverá ser entregue o arquivo:

ExOtimizaçãoCashFlow-Solução.docx

Este arquivo de conter:

- 1) Descrição resumida (*bullet points*) dos *Inputs*, dos *Drivers* e *Outcomes* do problema
- 2) Descrição do processo de estruturação da solução

Descrição do processo de estruturação da solução:

Descrição em *bullet-points* do Passo-a-passo que você utilizou para pensar na solução do problema e para implementá-la. O ideal é que este arquivo seja criado para ajudar você a raciocinar e a construir a solução do problema. Ele não precisa ser escrito todo de uma vez, mas ao longo da solução para planejar próximos passos ou registrar passos executados.

Da mesma forma como fizemos em sala de aula: primeiro as macro-tarefas e depois a subtarefas intermediárias.

A sugestão é que a descrição seja criada à medida que você avança na solução.

Utilize uma lista de bullet points itens e sub-itens para organizar o raciocínio.

Exemplo:

Solução do problema de otimização do CashFlow

- Carregar os dados da planilha XYZ
 - Carregar curva de juros
 - Carregar dados das aplicações
- Calcular a Fórmula A
 - Criar planilha para validação A

(....)

- Escrever manualmente em uma reascunho (planilha) as equações esperada do Problema Z
 - Criar planilha de testes para entrada da matriz de coeficientes de Z
 - Validar da matriz de equações do problema Z
- Teste da função X do pacote Y
 - Script de teste do função X do pacote Y
- etc...

5. O que deve ser entregue

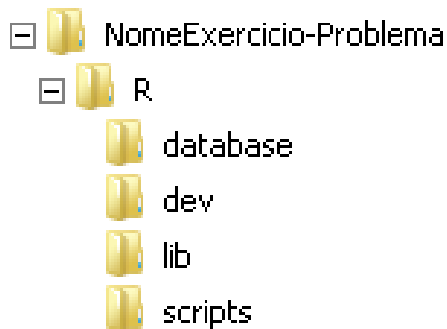
Arquivos

- 1) Arquivo com a implementação da solução.
`R/scripts/ExOtimizacaoCashFlow.r`
- 2) Arquivo com a descrição da estruturação da solução:
`ExOtimizaçãoCashFlow-Solução.docx`

Os arquivos com a solução do problema devem ser enviados compactados (**formato: zip**).

O arquivo deve ser compactado no diretório raiz do exercício.

Por exemplo o exercício `NomeDoExercicio-Problema` vai ter a estrutura de diretórios:



O arquivo compactado deve ser renomeado para: `<NomeDoAluno>-<NomeExercício-Problema>.zip`

Por exemplo: O aluno “*Johnny Allen Hendrix*” resolveu o exercício “*CastlesMadeOfSand*” o arquivo terá o nome “*JohnnyHendrix-CastlesMadeOfSand.zip*”.

Spoiler.....

Como o objetivo é que você aprendam a pensar e a estruturar o problema vou passar algumas informações dos resultados para que vocês possam validar alguns resultados intermediários e validar o resultado final para ter a certeza que vocês resolveram corretamente o exercício.

...mas não se acostumem mal, pois nos problemas da vida real normalmente isto não acontece, então, como fizemos ao longo do curso, primeiro testamos a solução em um problema sobre o qual temos controle.

Aplicacao	Aplic	Resgate	RetornoPeriodo	DataAplicacao	Montante
CDB 01	0	1	0,5419%	2020-23-06	0,00
CDB 01	1	2	0,5210%	2020-21-09	0,00
CDB 01	2	3	0,5906%	2020-21-12	0,00
CDB 01	3	4	0,7761%	2021-19-03	4.961,50
CDB 01	4	5	1,0016%	2021-17-06	0,00
CDB 01	5	6	1,1155%	2021-15-09	0,00
CDB 02	0	2	1,0914%	2020-23-06	2.473,01
CDB 02	2	4	1,4041%	2020-21-12	0,00
CDB 02	4	6	2,1795%	2021-17-06	0,00
CDB 03	0	3	1,7421%	2020-23-06	4.876,54
CDB 03	3	6	3,0620%	2021-19-03	0,00
CDB 04	0	6	4,9668%	2020-23-06	7.145,12