Precificação de Opções e Processos Iterativos

Temas:

- Planejamento de desenvolvimento de biblioteca de funções
- Simulação de Monte Carlo

Referência:

- *Future Options and Other Derivatives*

John Hull

- *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*

Espen Gaarder Haug

Simulação de Monte Carlo

Conhecida a distribuição de probabilidades ou o comportamento da variável estocástica:

1. Fazer Simulações ou Extrair amostras .
- Mínimo 10.000 -

↓

2. Para cada simulação ou amostra, calcular o resultado

↓

3. Para o conjunto de resultados calcular o valor esperado ponderado pela probabilidade
- Média Estatística -

Exemplo: Simulação de Monte Carlo

Exemplo de Aplicação:

Considere o evento de lançamento de um dado de seis faces. Utilizando o método de simulação de Monte Carlo e a função `sample(.)` do R responder as perguntas abaixo fazendo 5, 100 e 1000 simulações:

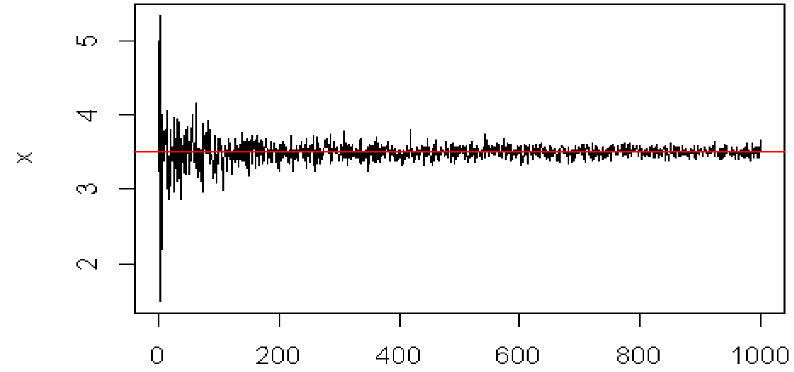
1. Qual o valor esperado para o lançamento de um dados.
2. Calcular a probabilidade do valor sorteado ser maior ou igual a 2.
3. Considerando que cada ponto do dado tem o valor de $ 100. Calcular o preço o preço justo da opção de compra (*call*) de strike 2, ou seja, cujo payoff seja:

payoff = Max (0, ValorSorteado – Strike) * 100

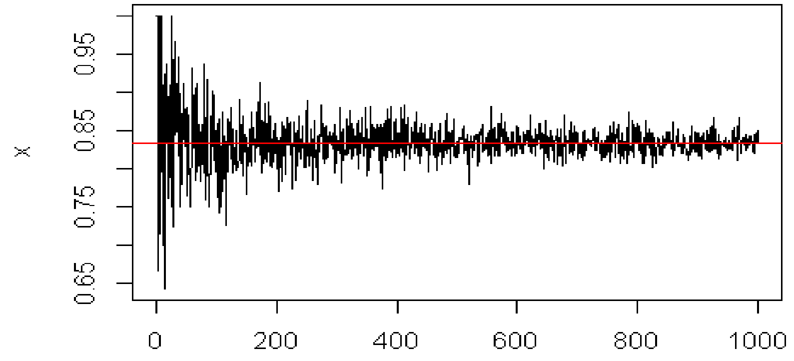
Exemplo: Simulação de Monte Carlo

Solução:

1. Qual o valor esperado para o lançamento de um dados.



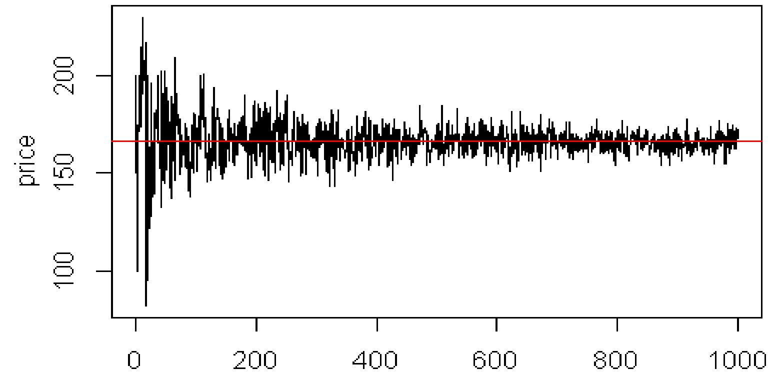
2. Calcular a probabilidade do valor sorteado ser maior ou igual a 2.



3. Considerando que cada ponto do dado tem o valor de $100. Calcular o preço o preço justo da opção de compra (*call*) de strike 2, ou seja, cujo payoff seja:

payoff = Max (0, ValorSorteado – Strike) * 100

strike/valor	1	2	3	4	5	6	Price
1	0	1	2	3	4	5	250,00
2	0	0	1	2	3	4	166,67
3	0	0	0	1	2	3	100,00
4	0	0	0	0	1	2	50,00
5	0	0	0	0	0	1	16,67
6	0	0	0	0	0	0	0,00



Simulação de Monte Carlo

- Processo Estocástico

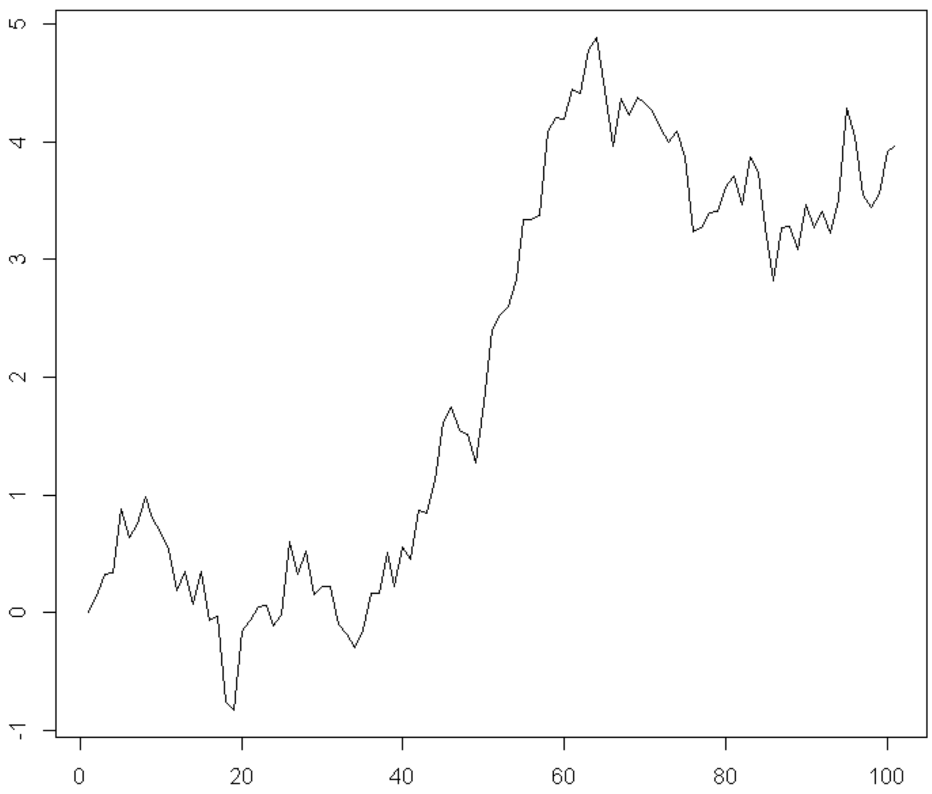
Qualquer variável cujo valor mude ao longo do tempo de maneira aleatória, segue um processo estocástico.

Classificação do Processos Estocásticos:

- **Variável**: Contínua ou Discreta
- **Tempo**: Contínuo ou Discreto

Hipótese:

Preços de uma ativo é uma variável contínua e segue um processo estocástico contínuo no tempo



Simulação de Monte Carlo

- Propriedade de Markov

Um **processo de Markov** é um processo estocástico particular no qual apenas o valor presente da variável é relevante para prever o futuro

- **Processo de Wiener**

Um processo estocástico de Markov particular cuja média da variável aleatória é Zero, e o desvio padrão de 1.0 no período

$$\Delta z = \varepsilon.\sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1)$$

Também chamado de *Movimento Browniano*

Simulação de Monte Carlo

Decorre da definição do processo de Wiener que Δz tem também Distribuição Normal:

$$\left.\begin{array}{l} \text{média de } \Delta z = 0 \\ \text{dev. padrão de } \Delta z = \sqrt{\Delta t} \\ \text{variância de } \Delta z = \Delta t \end{array}\right\} \Delta z \sim N(0, \sqrt{\Delta t}\,)$$

Portanto a variável z segue um processo Markoviano pois:

$$z(t+\Delta t) - z(t) = \varepsilon.\sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + \varepsilon.\sqrt{\Delta t}$$

Considerando um período mais longo: $T = n.\Delta t \Rightarrow n = \dfrac{T}{\Delta t}$

Como z segue um processo Markoviano podemos escrever:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=i}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1)$$

Exercício: Processos Estocásticos

Criar uma biblioteca de processos estocásticos e implementar as seguintes funções:

Escrever uma função que simula o Processo de Wiener

```
WienerProcess (z0,T,dt)
```

Argumentos:

`z0`: valor inicial da variável *z*

`T`: Período de tempo de execução do processo

`dt`: Incremento de tempo entre atualizações

Retorno:

`z`: Vetor com os valores de *z* no tempo

Utilizar a função desenvolvida com `z0=0`, `T=10` e `dt =0.1` e

a) Utilizar a função `plot()` para plotar a trajetória da variável.

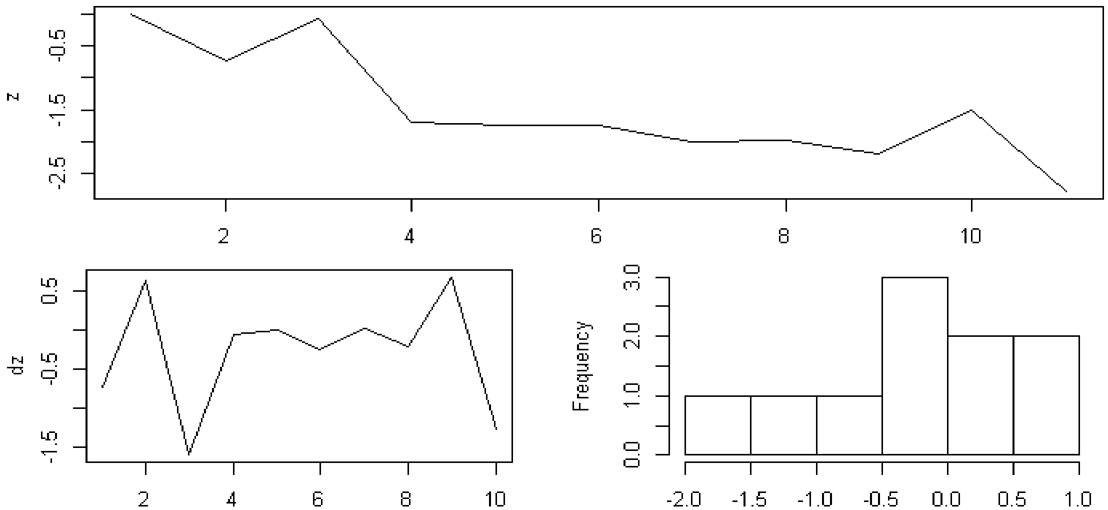
b) Utilizar as funções `hist()` ee `diff()` e verificar que:

i) média de $\Delta z = 0$ ii) variância de $\Delta z = \Delta t$ iii) $\Delta z \sim N(0, \sqrt{\Delta t}\,)$

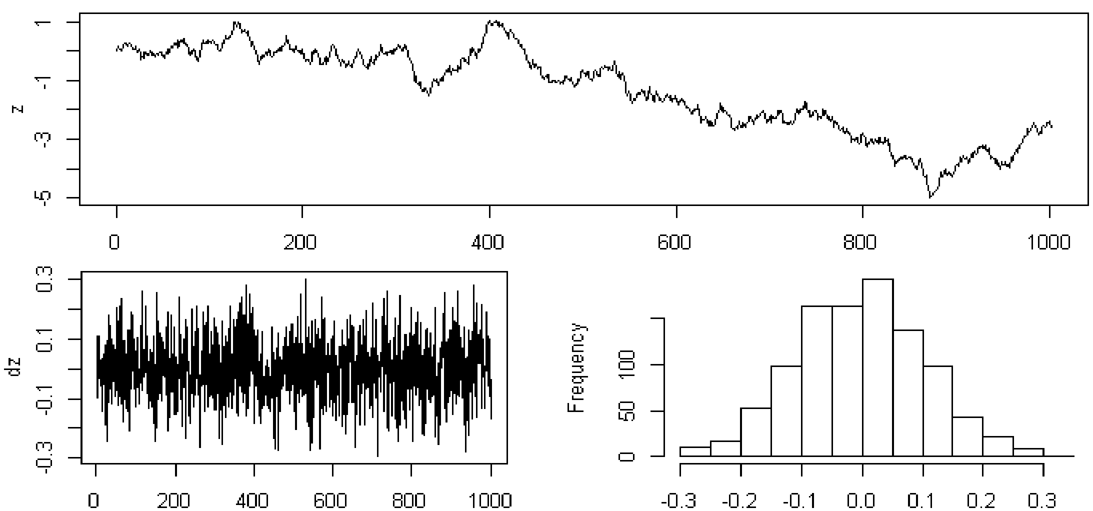
c) Verificar o comportamento da variável para valores menores de `dt`

Exercício: Processos Estocásticos

Solução: z0=0 T=10 dt=1.0000 mean(dz)=-0.2790 var(dz)=0.5528



z0=0 T=10 dt=0.0100 mean(dz)=-0.0026 var(dz)=0.0110



Simulação de Monte Carlo

- **Processo de Wiener Generalizado**

drift: a média de mudança por unidade de tempo de um processo estocástico

taxa de variação: Taxa de variação por unidade de tempo de um processo estocástico

$$dx = a.dt + b.dz$$

onde

$$a : \text{drift constante}$$

$$b : \text{taxa de variação constante}$$

$$dz : \text{variável segue o processo de Wiener}$$

- **Processo de Wiener Generalizado – Versão Discreta**

$$\Delta x = a.\Delta t + b.\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{média de } \Delta x = a\Delta t \\ \text{dev. padrão de } \Delta x = b\sqrt{\Delta t} \\ \text{variância de } \Delta x = b^2\Delta t \end{array}\right\} \quad \Delta x \sim N(a\Delta t, b\sqrt{\Delta t}\,)$$

Para um intervalor de tempo $T = n.\Delta t \Rightarrow n = \dfrac{T}{\Delta t}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{média de } \Delta x = aT \\ \boxed{\text{dev. padrão de } \Delta x = b\sqrt{T} = b\sqrt{n.\Delta t}} \\ \text{variância de } \Delta x = b^2T = b^2 n.\Delta t \end{array}\right\} \quad \Delta x \sim N(aT, b\sqrt{T}\,)$$

Exercício: Processos Estocásticos

Escrever uma função que simula o Processo Generalizado de Wiener

```
GeneralWienerProcess = function(z0,a,b,T,dt)
```

Argumentos:

- `z0`: valor inicial da variável *z*
- `a`: valor inicial da variável *a*
- `b`: valor inicial da variável *b*
- `T`: Período de tempo de execução do processo
- `dt`: Incremento de tempo entre atualizações

Retorno:

- `z`: Vetor com os valores de *z* no tempo

Utilizar a função desenvolvida com `z0=0`, `T=10` e `dt =0.1` e

a) Utilizar a função `plot()` para plotar a trajetória da variável.

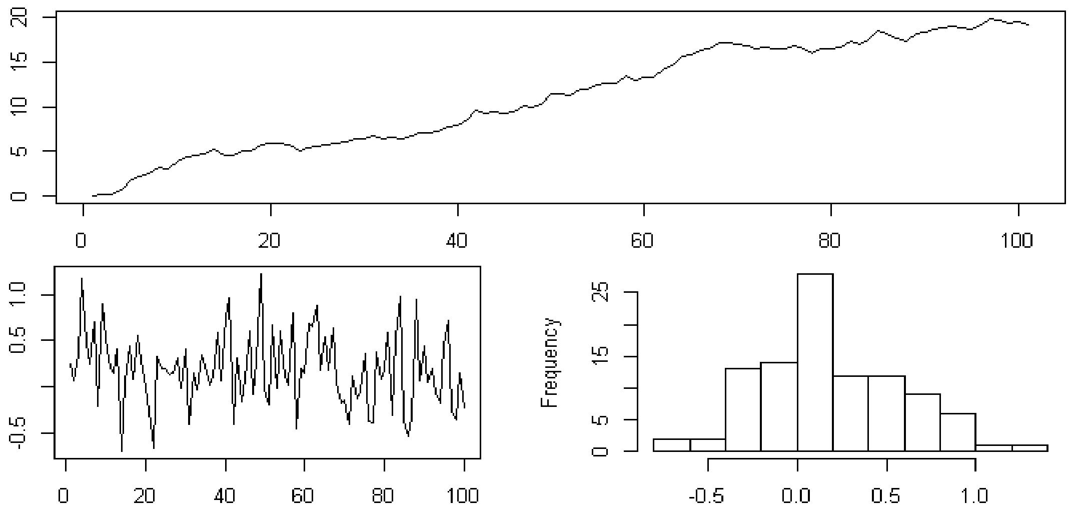
b) Utilizar as funções `hist()` e `diff()` e verificar que:

i) média de $\Delta x = a\Delta t$ ii) variância de $\Delta x = b^2\Delta t$

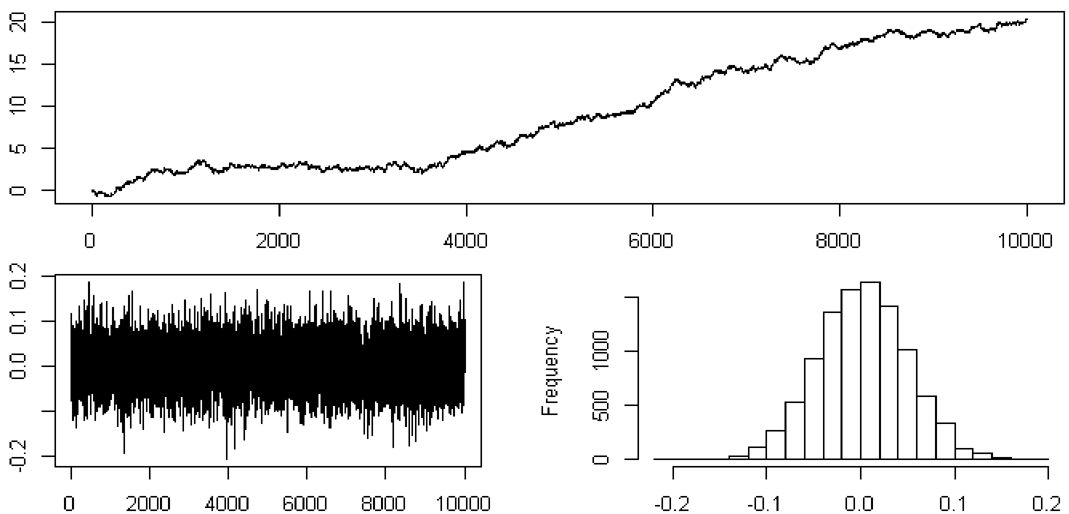
c) Verificar o comportamento da variável para valores menores de `dt`

Exercício: Processos Estocásticos

Solução: z0=0 T=10 dt=0.1000 a=2.00 b=1.50 mean(dz)=0.1915 var(dz)=0.1614



z0=0 T=10 dt=0.0010 a=2.00 b=1.50 mean(dz)=0.0020 var(dz)=0.0023



Simulação de Monte Carlo

- **Processo de Itô**

Generalização do processo de Wiener no qual os *drift* e a *taxa de variação* da variável estocástica <u>não são constantes</u> , e variam em função do:

1) Valor da variável

2) Tempo

Matematicamente:

$$dx = \underbrace{a(x,t)}_{\text{drift}}.dt + \underbrace{b(x,t)}_{\text{Taxa de variação}}.dz$$

Versão discreta:

$$\Delta x = a(x,t).\Delta t + b(x,t).\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1)$$

Simulação de Monte Carlo

Preço de uma Ação

A taxa de retorno esperado pelo investidor μ , por exemplo 10%, e a incerteza, indicada pelo desvio padrão, σ, por exemplo 12,5%, independente do preço da ação. Ou seja, esteja a ação \$10 ou \$50, a taxa de retorno espera e a incerteza serão as mesmas.

Portanto, podemos esperar que a <u>variação absoluta</u> do preço seja proporcional a variação do preço da ação.

$$dx = \underbrace{a(x,t)}_{}.dt + \underbrace{b(x,t)}_{}.dz$$

$$dS = \overbrace{\mu\, S}^{}\, dt + \overbrace{\sigma\, S}^{}\, dz$$

Onde:

S : Preço da ação

μ : Retorno percentual esperado por unidade de tempo (%)

σ : Volatilidade da ação (%) – Desvio Padrão

Simulação de Monte Carlo

Modelo Discreto para o Preço de uma Ação

O modelo do comportamento do preço da ação descrito é conhecido como *Movimento Browniano Geométrico* cuja versão discreta:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1)$$

ΔS : Variação do preço da ação em um pequeno intervalo de tempo Δt

μ : Retorno percentual esperado por unidade de tempo (%)

σ : Volatilidade da ação (%) – Desvio Padrão

Retomando a propriedade do Processo Generalizado de Wiener:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})}$$

Conclusão: O retorno de uma ação segue uma Distribuição Normal

Simulação de Monte Carlo

Exercício:

Considere que o preço de uma ação siga um *Movimento Browniano Geométrico.*

$$ds = \mu S\, dt + \sigma S\, dz$$

onde dz é um processo de Wiener.

Escrever uma função que receba como argumentos o preço spot da ação S_0, o retorno esperado μ e a volatilidade σ ao ano, em %, a unidade de tempo Δt e o período de tempo T ambos fração de ano e o número de simulações.

E retorna uma matriz na qual cada linha é uma simulação.

Fazer a simulação para:

```
S0 = 10;
r = 13,25%;
sigma = 20%;
T = 63 dias (252 du);
dt = 0.001;
N. simulações =1000;
```

Lema de Itô

Suponha que uma variável x siga um processo de Itô.

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dz$$

onde dz é um processo de Wiener e a e b sejam funções de x e t .

A variável x terá *drift* a e taxa de variância b^2. O Lema de Itô demonstra que a função G de x e t segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} . \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b\, dz$$

Com *drift*

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} . \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 z$$

e taxa de variância

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

Aplicação para o Preço de um Ativo

Suponha que preço de um ativo S siga um processo de Itô.

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dz$$

onde μ e σ são constantes. O Lema de Itô demonstra que a função G segue o processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} . \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} \sigma S\, dz$$

Para $G = \ln S$ temos $\dfrac{\partial G}{\partial S} = \dfrac{1}{S}$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{S^2}$, $\dfrac{\partial G}{\partial t} = 0$

portanto,

$$dG = d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma\, dz$$

Aplicação para o Preço de um Ativo – Versão Discreta

Segue portanto,

$$\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Portanto

$$S(t+\Delta t) = S(t)\,e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}$$

Como o preço $d\ln S$ segue um processo generalizado de Wiener então:

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}$$

logo

$$\ln S(T) = S(0)\,e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}$$

Exercício:

Considere que o preço de uma ação siga um *Movimento Browniano Geométrico.*

$$ds = \mu S\, dt + \sigma S\, dz$$

onde dz é um processo de Wiener.

Escrever uma função que receba como argumentos o preço spot da ação S_0, o retorno esperado μ e a volatilidade σ ao ano, em %, a unidade de tempo Δt e o período de tempo T ambos fração de ano e o número de simulações.

E retorna uma matriz na qual cada linha é uma simulação.

Fazer a simulação para:

```
S0 = 10;
r = 13,25%;
sigma = 20%;
T = 63 dias (252 du);
dt = 0.001;
N. simulações =1000;
```

Simulação de Monte Carlo

Aplicação para o Preço de um Ativo – Versão Discreta

$$S(t+\Delta t) = S(t)\, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\,\varepsilon\,\sqrt{\Delta t}}$$

onde

$u = r$: para ação que não paga dividendo

$u = r - r_f$: para moeda

r : taxa livre de risco

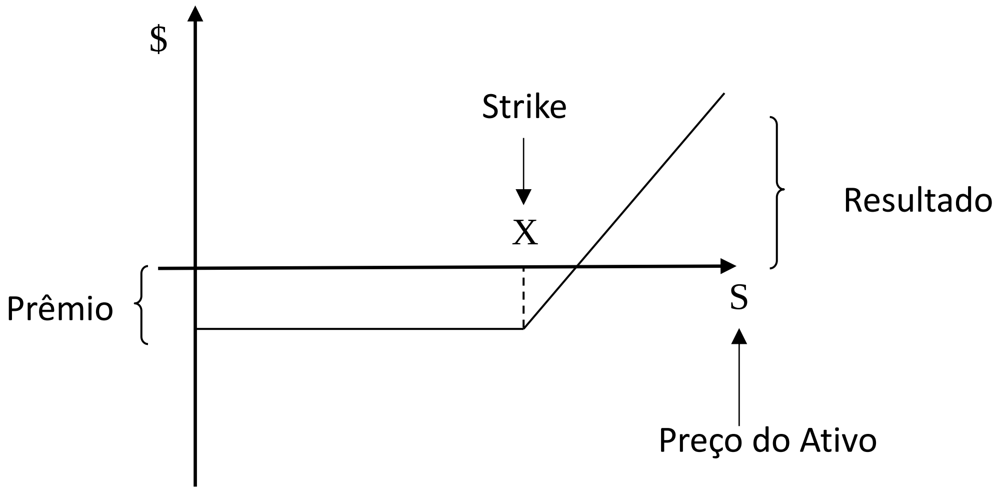
r_f : cupom da moeda estrangeira

Problema: Precificação de Opções

Payoffs do comprador da opção no vencimento:

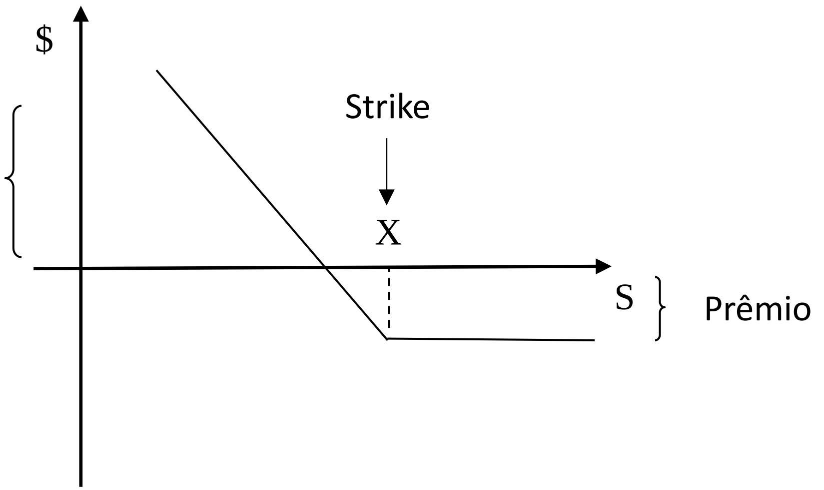
- Opção de Compra: ***Call***

$$payoff = e^{-rT}.\max(0, S_T - X)$$



- Opção de Venda: ***Put***

$$payoff = e^{-rT}.\max(0, X - S_T)$$



Problema: Precificação de Opções

Utilizar o modelo de Monte Carlo para precificar opções de compra (*call*) e venda (*put*) considerando dados:

$type$: Tipo *call* ou *put*

S_0 :Preço Spot do ativo

X : Strike da opção

T : Tempo em anos

$Tvol$: Tempo de Volatilidade em anos

r : Taxa de juros livre de risco (% contínua)

r_f : Cupom de moeda estrangeira (% contínua)

σ : Volatilidade ao ano

$nsim$: Número de simulações

dt : Fração de tempo

Utilzar para testes as opções da planilha: `MCOption-Validacao.xlsx`