

多波束测深系统的测线布置与重合率矫正

摘要

多波束测深常应用于采集海底地形大数据资源,本文优化多波束测深系统测线布置方案时,分析了二维及三维条件的几何特征,给出在一定误差下有应用价值的海域探测布线方案,分析测线方向固定和可变情况,建立测量模型,给出测线分布调整策略。

针对问题一:首先,在固定测线方向的条件下,综合分析多波束换能器参数、坡面角度和海水深度的几何关系,通过平面几何分析,利用三角函数构建不同未知量与已知量之间的函数关系,将几何问题转化为代数问题。其次,根据方程组所求一般解,分别建立测线固定情况下的海水深度和覆盖宽度的模型,并将已知数据代入模型解出对应海水深度和覆盖宽度,使用重叠率公式计算相邻测线间的重叠率。最后对模型计算结果进行可视化分析,同原始题目条件进行比较,验证了所建模型及解法的正确性和有效性。

针对问题二:在第一问的模型基础上,将模型扩展至三维,引入测线方向夹角这一新的变量,分析测线方向与海底坡面法向量在海平面投影所构成的夹角与测量点海水深度之间的几何关系,对夹角为锐角、钝角、直角三种情况展开分类讨论,建立测线方向可变时的海水深度模型以及不同测线方向和位置条件下的覆盖宽度模型。探索出测线方向角 β 、距中心海域距离 d 、换能器开角 θ 、坡度角 α 与覆盖宽度的函数关系,并进行可视化的分析检验,同问题一进行比较,验证了模型的可靠性以及广泛适用性。

针对问题三:在前两问的基础上,通过勾股定理和正弦定理找到重叠率和题中所给夹角 β 的关系,建立各方向重叠率的模型。根据重叠率模型求出在离中心海域距离 x 相同的情况下,不同的 β 和重叠率的对应数值,经过可视化分析,发现变化趋势。找到最佳位置即 $\beta = 90^\circ$ 和一个特殊位置 $\beta = 0^\circ$,从而分情况讨论其最佳性。在使用单目标规划求解 $\beta = 0^\circ$ 时,发现矩形海域中,最浅点和最深点距离较远,导致无法满足所有重叠率均在10% - 20%内,故舍弃该情况。通过二分查找法确定 $\beta = 90^\circ$ 时第一条测线位置,按照重叠率10%循环计算剩余条数。最终结果为33条和南北走向平行的、每条长度为2海里的测线组,总最小长度为66海里。

针对问题四:该问贴近实际测量情况,绘出海底平面图,用最小二乘拟合将海底平面近似为三个不同坡度角的斜面,根据国标文件确定测线方向沿待测矩形区域的长边布置测线。由三个斜面不同坡度角及在海底的投影面积的加权平均,近似得中心海域深度及坡面平均坡度角等数据,代入第三问模型,知所需测线条数及布置间距。采用投影法判断每条测线覆盖范围,形成测量矩阵,统计分析未测区及重叠率 $\eta > 20\%$ 的区域,最终测线沿东西方向共置20根,间距0.2海里,测线总长度100海里,漏测区域2.956%,重叠率超过20%的总面积为19.85%。符合测量要求,进一步验证了模型的可靠性。

关键字: 多波束测深系统 最小二乘法 最优化模型 测线布置 海床探测

一、问题重述

1.1 问题背景

多波束测深系统的研发是为了提高海底地形的测量效率，与传统一次只能测量船体垂直下方一个点的单波束测深系统相比，多波束测深系统能够测量出一条以测线为轴的一个条带覆盖水深，实现“点——线”测量向“线——面”的跨越[?]。基于多波束测深系统能够对航道水底的地形进行大范围覆盖扫测的优点，多波束测深系统多被应用于为工程建设提供丰富的海底地形大数据资源[?]。在测量的实际应用中，多波束测深系统受限于测量条带随地形起伏变化和经济成本等多方面因素，必须根据测量海域实际情况进行合理测线布置，保证总测量范围对待测海域的覆盖程度、相邻条带的合理重叠率和测量总成本最低（即测线总长度最短）的规划成果[?]

1.2 问题提出

基于上述题目背景和附件数据，要求建立模型解决如下问题：

在题目所给测量环境中，测量条带的覆盖宽度随多波束换能器开角大小、测线方向、测量时海水深度和海底面坡度大小而改变。

(1) 问题一：测线方向不变、海底坡面与侧线所在直线平行的情况下，已知多波束换能器开角大小、海底坡度及海域中心处深度。要求建立多波束测深覆盖宽度及相邻条带重叠率的数学模型，解出距中心点不同距离的测线所测海水深度、条带覆盖宽度和相邻条带重叠率。

(2) 问题二：测线方向可变、海底地形为坡面的矩形待测海域的情况下，已知多波束换能器开角大小、海底坡度及海域中心处深度。要求在三维空间建立多波束测深覆盖宽度的数学模型，解出各方向测线距海域中心点处不同距离的条带覆盖宽度。

(3) 问题三：测线方向可变、海底地形为西深东浅的矩形坡面，已知待测海域长宽、多波束换能器开角大小、海底坡度及海域中心处深度。要求设计出测线总长度最短、覆盖全海域且相邻条带重叠率在 10%~20% 的测量布线规划。

(4) 问题四：根据附件所提供已知长宽的矩形海域海水深度数据，要求在测量范围尽可能覆盖整个海域，且相邻条带重叠率尽量控制在 20% 以下，对多波束测深的测线分布方案求解测线总长度最短的规划策略，并标明所设计方案的测线总长度、漏测海域面积占比和重叠率超过 20% 的测线总长度。

二、问题分析

2.1 对问题一分析

问题一要求求解测线距中心点不同距离下的所测的海水深度以及条带覆盖宽度，并求解相邻条带后一条测线对前一条测线的重叠率。实质上是进行几何建模，使用平面几何等相关知识建立起不同变量之间的函数模型，代值求解。在测线方向固定的条件下建立起不同位置海水深度模型，利用三角函数进行求解。然后通过所求出的海水深度建立起测量条带覆盖宽度的模型，利用正切关系分别建立较深侧以及较浅侧条带覆盖宽度模型，二者相加可得到该位置的测线条带覆盖宽度。最终通过两条测线间距，代入重叠率计算公式解出对应条件下的重叠率。

2.2 对问题二分析

问题二将情形扩展至三维空间，引入了测线方向与海底坡面的法向量在水平面上的投影夹角 β 这一新的变量，需要在三维空间中建立并求解出不同测线方向、距海域中心点不同距离的测量条带覆盖宽度，是对第一问的扩展和延伸。根据第一问的求解结果可知，条带覆盖宽度与海水深度、海底平面坡度以及多波束换能器开角存在函数关系，这些变量中只有海水深度与新变量 β 有关，故需要在三维条件下进行几何建模找到海水深度与 β 角的函数关系，建立起求解测线与海底横截面的海水深度模型，将新的变量代入第一问的测量条带覆盖宽度模型对深侧和浅侧分别进行求解，二者相加即可得到该位置以及该角度的测量条带覆盖宽度。

2.3 对问题三分析

问题三要求在测线方向可变、海底地形为西深东浅的矩形坡面，设计出测线总长度最短、覆盖全海域且相邻条带重叠率在 10%~20% 的测量布线规划。根据问题二可以推得测线分布方案主要受到测线方向夹角、测线距中心点处距离及相邻测线间距三个变量影响，根据测线方向夹角大小对测线分布按照锐角、钝角、直角、平角不同情况展开分类讨论，建立各方向测线重叠率模型。结合问题二所建模型及推导可得到测线总长度规划方案，对比不同测线分布策略，选择最优测线分布方案。

2.4 对问题四分析

问题四要求根据附件所提供已知长宽的矩形海域海水深度数据，对多波束测深方法的测线分布方案求解测线总长度最短的规划策略，同时尽可能覆盖整个海域，尽量控制重叠率在 20% 以下，并标明所设计方案的测线总长度、漏测海域面积占比和重叠率超过 20% 的测线总长度。首先，对数据处理后的海水深度数据进行可视化分析，绘制海底

地形三维曲面图，直观分析待测海域海底地形。接着利用最小二乘法对海底地形三维曲面图进行平面几何拟合，得出若干海底坡面，对不同方向测线布线方案展开分类讨论，最后结合问题三建立模型拓展进行测线布线策略求解，结合实际应用中多波束测深系统测量的行业标准，对比不同测线分布策略，选择最优测线分布方案。

三、基本假设与符号说明

3.1 基本假设

为了构建更加精确的数学模型，本文结合实际情况作出以下合理假设：

假设一：假设相邻测线均相互平行。

假设二：假设测线间的距离不算入测量总长度内。

假设三：假设海域中心为海洋区域的几何中心。

假设四：由于问题二中待测海域的长宽尺寸不明确，故假设问题二的矩形海域是一个具有无限长度和宽度的矩形海域。

假设五：题目假设添加船只视为质点，仅在海平面运动，不会波动起伏。

3.2 符号说明

本文涉及到的符号如表 1 所示：

表 1 符号说明

| 符号 | 含义 | 单位 |
|---------------|-----------------------------|-------|
| η | 相邻条带重叠率 | / |
| D | 海水深度 | 米 (m) |
| d | 相邻测线间距 | 米 (m) |
| W | 条带的覆盖宽度 | 米 (m) |
| W_{deep} | 较深测条带的覆盖宽度 | 米 (m) |
| $W_{shallow}$ | 较浅测条带的覆盖宽度 | 米 (m) |
| x | 测量船距海域中心点的距离 | 米 (m) |
| L_T | 测线总长度 | 米 (m) |
| θ | 多波束换能器开角 | 度 (°) |
| α | 海底面坡度角 | 度 (°) |
| β | 测线方向在水平面投影与海底坡面法向量在水平面投影的夹角 | 度 (°) |

四、模型建立与求解

4.1 问题一：测线方向不变时水深模型和条带覆盖宽度模型

4.1.1 模型建立

本问题要求在二维条件下对坡面海底进行建模分析，测线始终方向垂直该平面，建立距中心点不同距离的测线所测海水深度、条带覆盖宽度以及相邻条带重叠率的函数关系。根据题意可先求解出海水深度模型和条带覆盖宽度的数学模型，最终代入重叠率公式对相邻条带重叠率进行计算。

Step1. 水深模型建立

根据问题描述，已知量分别为多波束换能器开角大小 θ 、海底坡度角 α 以及海域中心处的海水深度 D ，因变量为测量船距海域中心点的距离，记作 d （单位：m），该处海水深度记作 D' ，构建如图 1 所示的海水深度模型。

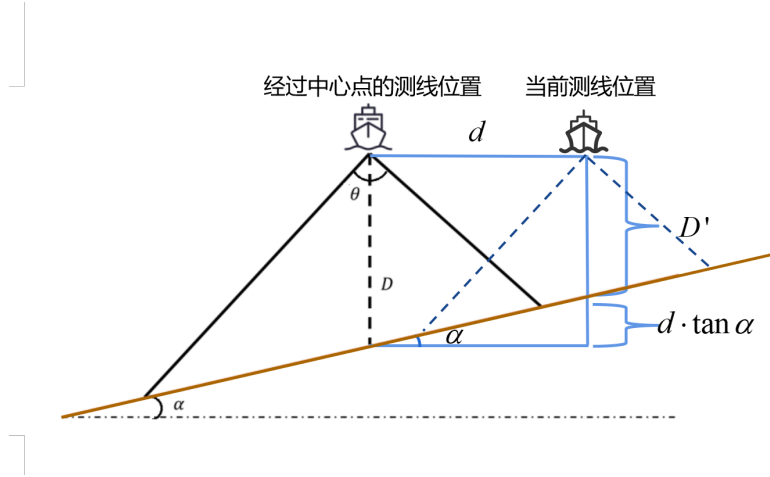


图 1 问题一水深模型示意

根据几何关系可得第二条测线测量海水深度 D' 的表达式:

$$D' = f(d, D) = D - d \cdot \tan \alpha \quad (1)$$

Step2. 条带覆盖宽度模型建立

根据问题分析，结合海水深度模型，已知换能器开角 θ 、海底平面坡度角 α ，海水深度 D ，对待测海域内方向不变的一组测线，可求解出较深侧条带覆盖宽度 W_{deep} 、较浅侧条带覆盖宽度 $W_{shallow}$ ，相加即可求得条带覆盖宽度 W 。

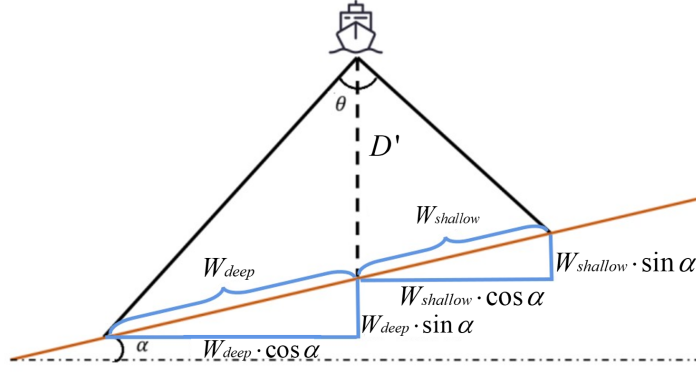


图 2 问题一覆盖宽度模型示意

如图 2 所示，测线处的海水深度为 D' 时，通过法线将测量范围分为较深侧及较浅侧，分别通过三角函数进行求解，可得：

$$\begin{cases} \frac{W_{deep} \cdot \cos \alpha}{D' + W_{deep} \sin \alpha} = \tan \frac{\theta}{2} \\ \frac{W_{shallow} \cdot \cos \alpha}{D' - W_{shallow} \sin \alpha} = \tan \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2)$$

将所解 W_{deep} 和 $W_{shallow}$ 表达式代入 $W_{deep} + W_{shallow}$ 可得

$$W = f(D', \theta, \alpha) = \begin{cases} W_{deep} = \frac{D' \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \\ W_{shallow} = \frac{D' \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \end{cases} \quad (3)$$

Step3. 相邻测线重叠率计算

根据相邻测线间距 d ，利用题目所给重叠率计算公式

$$\eta = 1 - \frac{d}{W} \quad (4)$$

解出对应测线条带重叠率 η 。

4.1.2 模型求解与结果分析

根据提供的数据，以测量船距中心点处的距离为自变量，海水深度和覆盖宽度分别为因变量，建立海水深度模型（式（1））和覆盖宽度模型。将（2）式化简得到较深侧条带覆盖宽度 W_{deep} 和较浅侧条带覆盖宽度 $W_{shallow}$ 表达式，即

$$\begin{cases} W_{deep} = \frac{D' \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \\ W_{shallow} = \frac{D' \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \end{cases} \quad (5)$$

将所解 W_{deep} 和 $W_{shallow}$ 表达式代入

$$W = W_{deep} + W_{shallow}$$

求得条带覆盖宽度 W 表达式为：

$$W = \frac{D' \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{D' \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \tag{6}$$

使用 C++ 编程语言作为实现工具，通过编写代码实现所提出的计算公式，解决模型的数值求解问题。通过输入对应的测线距中心点距离参数值，可以输出所求测量点海水深度、条带覆盖宽度和同上一条带重叠率的解。

模型运算结果如表 2 所示：

表 2 问题一模型运算结果

| 测线距中心点处的距离/m | -800 | -600 | -400 | -200 | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------|
| 海水深度/m | 90.9487 | 85.7116 | 80.4744 | 75.2372 | 70 | 64.7628 | 59.5256 | 54.2884 | 49.0513 |
| 覆盖宽度/m | 315.813 | 297.628 | 279.442 | 261.256 | 243.07 | 224.884 | 206.699 | 188.513 | 170.327 |
| 与前一条测线的重叠率/% | —— | 36.6715 | 32.8019 | 28.4287 | 23.4467 | 17.7193 | 11.0655 | 3.24081 | -0.060935(漏测) |

我们根据表 2 数据利用可视化工具绘制折线图进行分析，可视化结果如图 3 所示：

分析图表可得，当测线距中心距离为负值时，海水深度、覆盖宽度和与前一条测线重叠率都随着测线距中心距离绝对值的增大而逐渐增大；当测线距中心距离为正值时，海水深度、覆盖宽度和与前一条测线重叠率都随着测线距中心距离绝对值的增大而逐渐减小。结合题目条件及图 1、图 2 所构建模型分析，当测线距中心距离为负值时，即为测线平移至深海方向；当测线距中心距离为正值时，即为测线平移至浅海方向。

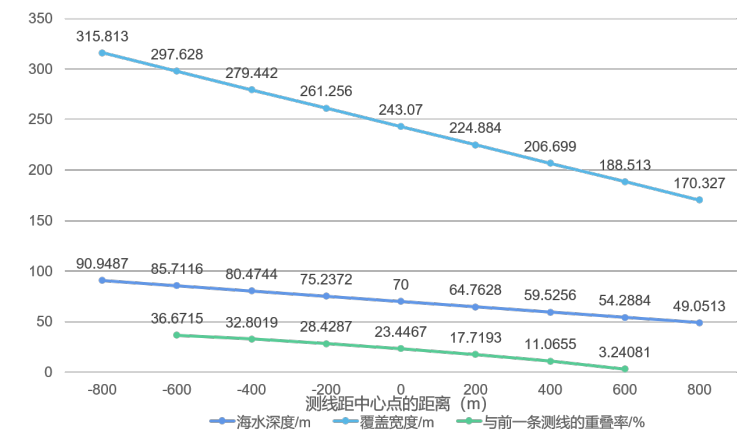


图 3 问题一运算结果折线图

由于题目所给海底地形为一坡度角为 α 的坡面，故该结果折线图所示海水深度同测线距中心点距离的值呈一次线性负相关，可推出海底地形为一坡面，验证了所构建海水深度模型的正确性。

同时，模型计算结果反映覆盖宽度和相邻测线重叠率都与海水深度呈正相关，随海水深度的加深而逐渐变大，同样能够反向验证题目所设环境，验证了所构建条带覆盖宽度模型的正确性。

4.2 问题二：测线方向可变时水深模型和条带覆盖宽度模型

4.2.1 模型建立

本问题要求在测线方向可变、海底地形为坡面的矩形待测海域，已知多波束换能器开角大小 θ 、海底平面坡度角 α 、海域中心处海水深度 D 、测量船距海域中心点处的距离 x 及测线方向与海底坡面的法向量在水平面上投影的夹角 β 。要求建立多波束测深条带覆盖宽度的数学模型，解出各方向测线距海域中心点处不同距离的条带覆盖宽度。突破口是通过投影的夹角 β 和测量船距海域中心点处的距离 x ，建立各方向测量船所测位置的海水深度（ D' ）模型。

Step1. 夹角 β 为钝角时的水深模型

将在海底坡面上的法线和测线投影到水平面，二者的夹角即为 β ，由几何关系可知，某条直线在水面的投影若与法线在水面的投影垂直时，在此直线上的各个位置的海水深度相同。利用这一关系，通过对测线方向在水平面的投影再一次进行投影，将其投影到法线在水面的投影上。计算此时投影点至海域中心点的距离，记为 x' 。根据 x' 可以看作第一问的测量方向固定时，测量位置距海域中心点的距离，并且向水浅地方移动。

具体流程如下图所示：

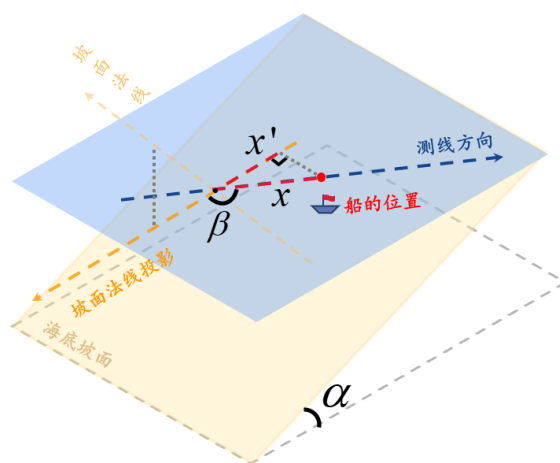


图 4 夹角 β 为钝角时的水深模型示意

得到 x' 的表达式:

$$x' = x \cdot \cos(\pi - \beta) \quad (7)$$

结合问题一的水深模型, 即:

$$D' = D - x' \cdot \tan \alpha \quad (8)$$

代入 x' 得到此情况的水深模型:

$$D' = D - x \cdot \cos(\pi - \beta) \tan \alpha \quad (9)$$

Step2. 夹角 β 为直角时的水深模型

思路同 **Step1**, 但此时投影点至海域中心点的距离 $x' = 0$ 。

具体流程如下图所示:

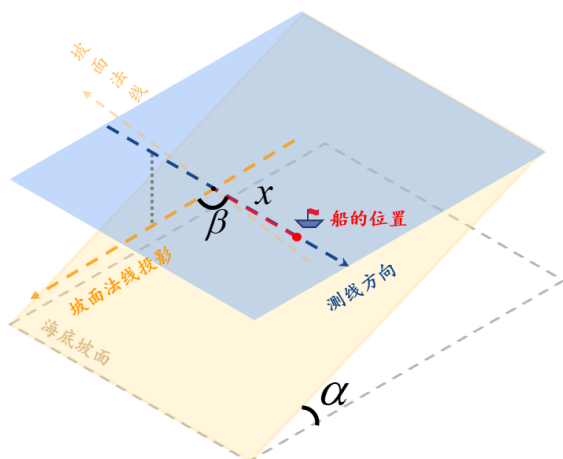


图 5 夹角 β 为直角时的水深模型示意

得到 x' 的表达式:

$$x' = x \cdot \cos(\pi - \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (10)$$

结合问题一的水深模型, 即:

$$D' = D - x' \cdot \tan \alpha \quad (11)$$

代入 x' 得到此情况的水深模型:

$$D' = D - x \cdot \cos(\pi - \frac{\pi}{2}) \tan \alpha = D \quad (12)$$

Step3. 夹角 β 为锐角时的水深模型

思路同 Step1，方向沿水深的方向。

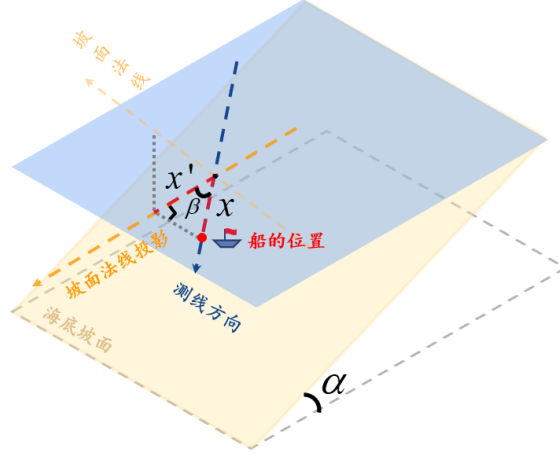


图 6 夹角 β 为锐角时的水深模型示意

得到 x' 的表达式:

$$x' = -x \cdot \cos \beta \quad (13)$$

结合问题一的水深模型，即：

$$D' = D - x' \cdot \tan \alpha \quad (14)$$

代入 x' 得到此情况的水深模型:

$$D' = D + x \cdot \cos \beta \tan \alpha = D - d \cdot \cos(\pi - \beta) \tan \alpha \quad (15)$$

Step4. 由水深模型计算条带覆盖宽度模型

结合 Step1-Step3 所建海水深度模型和问题一，对于待测海域内任意方向的测线，已知多波束换能器开角大小 θ 、海底平面坡度角 α ，求解条带覆盖宽度 W ，记任意侧线测量海水深度为 D' 、测量时较深侧覆盖宽度为 W_{deep} 、测量时较浅侧覆盖宽度为 $W_{shallow}$ ，构建条带覆盖宽度模型。

$$\begin{cases} \frac{W_{deep} \cdot \cos \alpha}{D' + W_{deep} \sin \alpha} = \tan \frac{\theta}{2} \\ \frac{W_{shallow} \cdot \cos \alpha}{D' - W_{shallow} \sin \alpha} = \tan \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (16)$$

将所解 $W_{deep}W_{shallow}$ 表达式代入

$$W = W_{deep} + W_{shallow}$$

求得测量覆盖宽度 W 表达式。

4.2.2 模型求解与结果分析

对上述几种情况进行总结分析，发现覆盖面积大小与当前船只位置的海底深度有关，海底深度又与沿着坡面的移动距离有关。

沿坡面移动距离 x' 与船只行进距离 x 的关系为：

$$|x'| = x \cdot \cos(\pi - \beta) \quad (17)$$

将 x' 的值代入到深度计算公式中可得：

$$D' = D - x \cdot \cos(\pi - \beta) \tan \alpha \quad (18)$$

在 C++ 程序中对深度计算公式进行修改，进行不同情况下的循环运算，最终可以得出结果：

表 3 问题二结果 result2

| 覆盖宽度/m | | 测量船距海域中心点处的距离/海里 | | | | | | | |
|----------|-----|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.1 |
| 测线方向夹角/° | 0 | 416.692 | 467.212 | 517.732 | 568.252 | 618.772 | 669.292 | 719.812 | 770.332 |
| | 45 | 416.692 | 452.415 | 488.138 | 523.861 | 559.584 | 595.307 | 631.03 | 666.753 |
| | 90 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 |
| | 135 | 416.692 | 380.969 | 345.246 | 309.523 | 273.8 | 238.076 | 202.353 | 166.63 |
| | 180 | 416.692 | 366.172 | 315.652 | 265.132 | 214.612 | 164.092 | 113.571 | 63.0514 |
| | 225 | 416.692 | 380.969 | 345.246 | 309.523 | 273.8 | 238.076 | 202.353 | 166.63 |
| | 270 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 |
| | 315 | 416.692 | 452.415 | 488.138 | 523.861 | 559.584 | 595.307 | 631.03 | 666.753 |

使用绘图工具对上述表格进行三维数据可视化，可以得到如下图表：

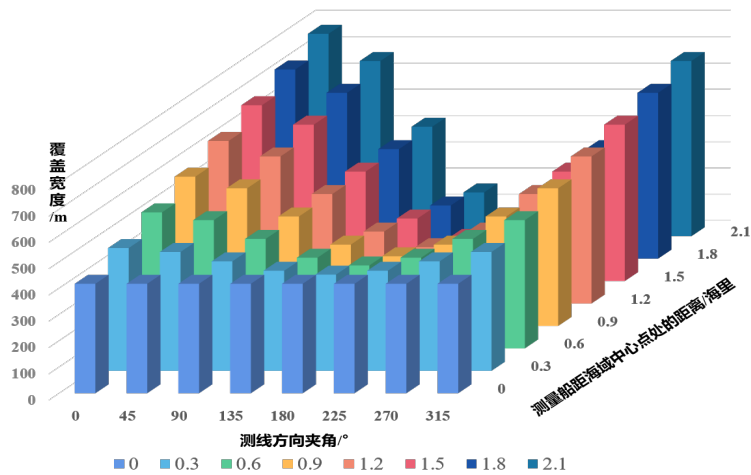


图 7 问题一覆盖宽度模型示意

观察结果可以发现，大致以 $\beta = 90^\circ$ 和 $\beta = 270^\circ$ 为分界线，将覆盖宽度分为上坡和下坡两种情况。在 $\beta \in [0^\circ, 90^\circ) \cup (270^\circ, 360^\circ)$ 区间中为向坡下方向移动，覆盖宽度会随着测量船距海域中心点处的距离增大而逐渐增大，在 $\beta \in (90^\circ, 270^\circ)$ 区间中为向坡上方向移动，覆盖宽度会随着测量船距海域中心点处的距离增大而逐渐减小。而在 $\beta = 90^\circ$ 和 $\beta = 270^\circ$ 时，覆盖宽度不随距离变化，始终保持为 416.692m。

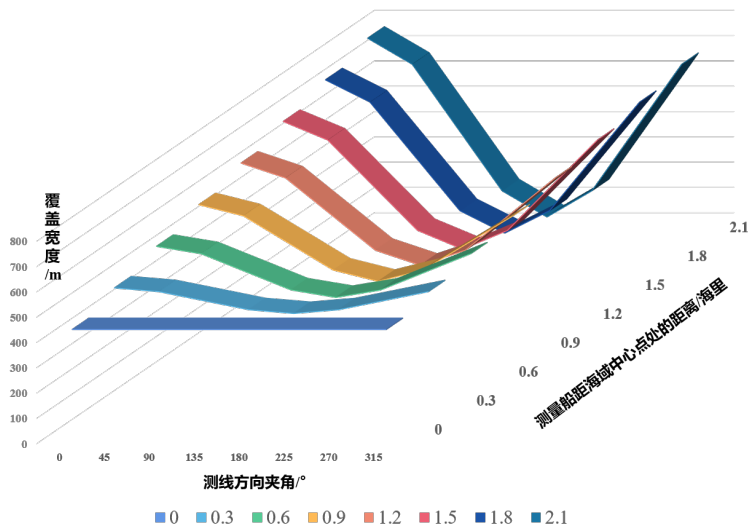


图 8 问题一覆盖宽度模型折线示意图

观察折线图可发现，当测量船距海域中心点处的距离固定时，覆盖宽度会随着测线方向的夹角而改变。覆盖宽度在 $\beta \in [0^\circ, 90^\circ) \cup (270^\circ, 360^\circ)$ （即下坡方向区间）会高于海域中心点处的覆盖宽度，在 $\beta \in (90^\circ, 270^\circ)$ （即上坡方向区间）会低于海域中心点处的覆盖宽度。每条折线的数值最高点都落在了在 0° 处，最低点都落在了 180° 处，可以得知在测量船距海域中心点处的距离固定时， 0° 处的覆盖宽度最大， 180° 处的覆盖宽

度最小。

4.3 问题三：测线方向可变时对确定海域的测线分布规划

4.3.1 模型建立

本问题要求在海底地形为坡面且南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域中，设计出测线总长度最短、覆盖全海域且相邻条带重叠率在 10%~20% 的布线规划。在该问题背景下，假设测线分布为有一定间距的一组平行测线，由问题二求解可得，测线分布规划的方案选择主要受到测线方向夹角 β 、测量船距中心点距离 x 及相邻测线间距 d 三个变量影响。突破口是根据测线方向夹角 β 展开分类讨论，结合测量船至海域中心点处的距离 x ，建立各方向测线的重叠率 η 模型。

* 定义海底坡面法向量投影由浅到深的方向为负方向。

Step.1 建立夹角 β 为钝角时的重叠率模型

首先对测线方向夹角为钝角的情况展开分析，当测线方向夹角成钝角时，当前测线可以在上一条测线的上方或者下方，分别对上下两种不同状态展开进一步讨论分析。

(1) 当前测线位于上一条测线下方

测线方向夹角为钝角时，当前测线位于上一条测线下方的一般情况如图 9 所示。

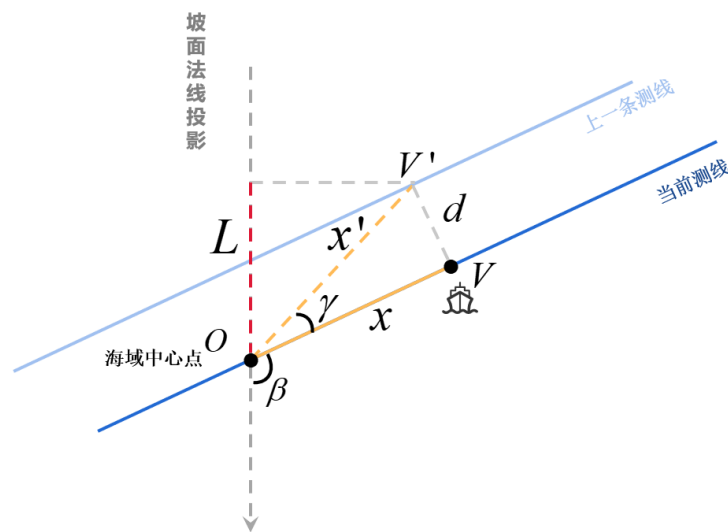


图 9 当前测线位于上一条测线下方的一般情况 (A)

其中 V 为当前测量船所在位置，为计算相邻测线间重叠度，从当前测线经过点 V 向上一条测线做中垂线得到对应测量船位置 V' 和测线间距离 d 。通过几何分析，运用勾股定理和余弦定理得 $V'O$ 与 OV 夹角 γ 的大小。

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{d_1}{x'} \\ \cos \gamma = \frac{x}{x'} \end{cases}$$

接着利用三角函数求出 $V'O$ 在坡面法线上的投影长度 L ，代入问题二所建水深模型解得 V' 处水深。

利用公式

$$\eta = 1 - \frac{d}{W}$$

建立测线的重叠率 η 模型：

$$\frac{L}{x'} = \cos(\pi - \beta - \gamma)$$

化简得到：

$$L = x'(\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) \quad (19)$$

对测线方向夹角为钝角时，如图 10 所示对当前测线位于上一条测线上方分类分析：

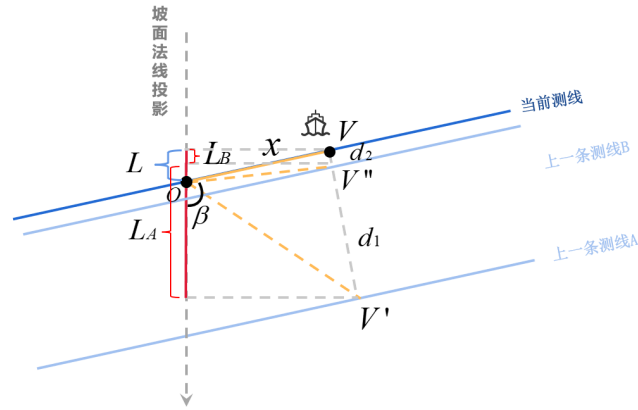


图 10 当前测线位于上一条测线上方分类分析示意 (A)

当前测线位于上一条测线上方时， V 处测量船位置相对于 V' 处测量船位置存在向坡面法线投影正向或负向移动两种情况。已知船当前位置到中心点距离在坡面法线投影上的投影为 L 。

(a) 情况一：对于上一条测线 A， d_1 在坡面法线投影线上的投影为 L_A 。

(b) 情况二：对于上一条测线 B， d_2 在坡面法线投影线上的投影为 L_B 。

由正弦定理可得：

$$\frac{L_B}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{d_1}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

化简得，

$$L_B = d_1 \cdot \sin(\pi - \beta) = d_1 \cdot \sin \beta$$

同理可得，

$$L_A = d_2 \cdot \sin(\pi - \beta) = d_2 \cdot \sin \beta$$

由

$$\frac{L}{d} = \cos(\pi - \beta)$$

得出,

$$L = d \cdot \cos(\pi - \beta) = -d \cdot \cos \beta$$

分别比较 L_A 与 L , L_B 与 L , 由 $L_A < L$ 可知 V 相对于 V' 所处位置向坡面法线投影正向移动; 由 $L_B > L$ 可知 V 相对于 V'' 所处位置向坡面法线投影负向移动。

(2) 当前测线位于上一条测线上方

测线方向夹角为钝角时, 当前测线位于上一条测线上方的一般情况如图 11 所示。

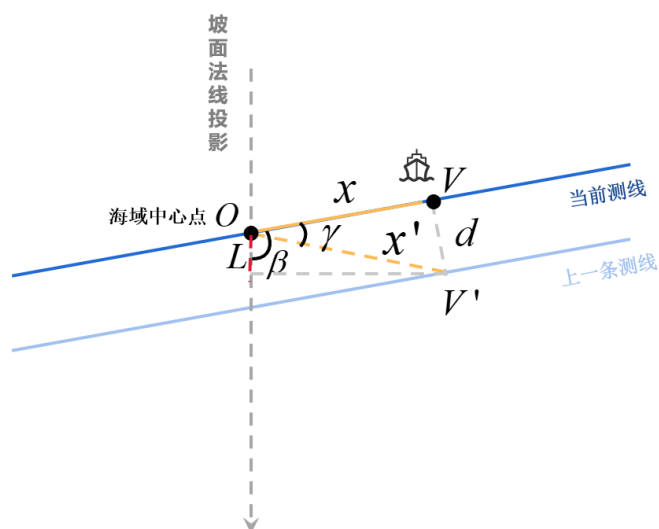


图 11 当前测线位于上一条测线上方的一般情况 (A)

同当前测线位于上一条测线下方的一般情况分析方法相同, 利用公式

$$\eta = 1 - \frac{d}{W}$$

建立测线的重叠率 η 模型:

$$\frac{L}{x'} = \cos(\beta - \gamma)$$

化简得到:

$$L = x'(\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma) \quad (20)$$

Step.2 建立夹角 β 为锐角时的重叠率模型

(1) 当前测线位于上一条测线下方

测线方向夹角为锐角时, 当前测线位于上一条测线下方的一般情况如图 12 所示。

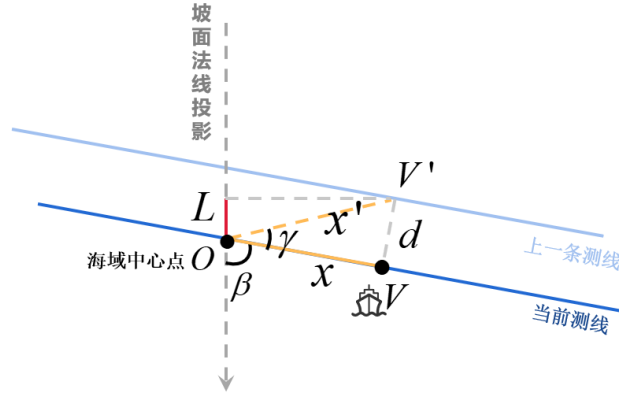


图 12 当前测线位于上一条测线下方的一般情况 (B)

同当前测线位于上一条测线下方的一般情况且方向夹角为钝角情况下分析方法相同，同样解得 γ 的正弦余弦，

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{d_1}{x'} \\ \cos \gamma = \frac{x}{x'} \end{cases}$$

利用公式

$$\eta = 1 - \frac{d}{W}$$

建立测线的重叠率 η 模型：

$$\frac{L}{x'} = \cos(\beta + \gamma)$$

化简得到：

$$L = x'(\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) \quad (21)$$

(2) 当前测线位于上一条测线上方

测线方向夹角为锐角时，当前测线位于上一条测线上方的一般情况如图 13 所示。

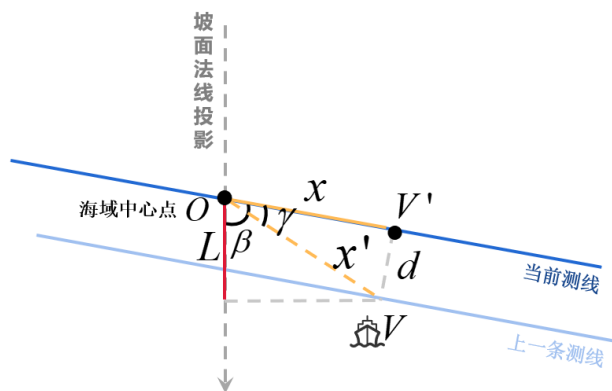


图 13 当前测线位于上一条测线上方的一般情况 (B)

同当前测线位于上一条测线下方的一般情况分析方法相同, 利用公式

$$\eta = 1 - \frac{d}{W}$$

建立测线的重叠率 η 模型:

$$\frac{L}{x'} = \cos(\beta - \gamma)$$

化简得到:

$$L = x'(\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \quad (22)$$

对测线方向夹角为锐角时, 如图 14 所示对当前测线位于上一条测线上方分类分析:

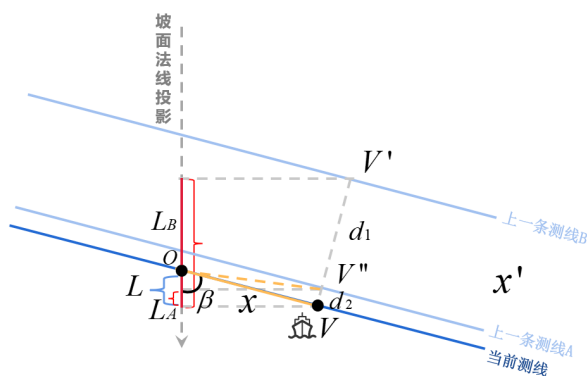


图 14 当前测线位于上一条测线上方的分类分析 (B)

当前测线位于上一条测线下方时， V 处测量船位置相对于 V' 处测量船位置，存在向坡面法线投影正向或负向移动两种情况。已知船当前位置到中心点距离在坡面法线投影上的投影为 L 。

(a) 情况一：对于上一条测线 A， d_1 在坡面法线投影线上的投影为 L_A 。

(b) 情况二：对于上一条测线 B， d_2 在坡面法线投影线上的投影为 L_B 。

与测线方向夹角为钝角时计算方法相同，由正弦定理可得：

$$\begin{cases} L_A = d_2 \cdot \sin(\pi - \beta) = d_2 \cdot \sin \beta \\ L_B = d_1 \cdot \sin(\pi - \beta) = d_1 \cdot \sin \beta \\ L = d \cdot \cos(\pi - \beta) = d \cdot \cos \beta \end{cases}$$

分别比较 L_A 与 L ， L_B 与 L ，由 $L_A > L$ 可知 V 相对于 V' 所处位置向坡面法线投影负向移动；由 $L_B < L$ 可知 V 相对于 V'' 所处位置向坡面法线投影正向移动。

4.3.2 模型求解与结果分析

4.3.2.1 海面各位置重叠率求解

Step1. 决定因素分析

由第二问可知，覆盖宽度 W 与测线方向夹角 β 和测量船距海域中心点处的距离 d 有关

$$\begin{aligned} W &= f(\beta, d) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 0 \leq \beta < 360^\circ \\ 0 \leq d < \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

由题知，重叠率 η 与覆盖宽度 W 和两相邻平行测线之间的距离 d_1 有关

$$\begin{aligned} \eta &= g(W, d_1) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} W > 0 \\ 0 \leq d_1 < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

故重叠率 η 与测线方向夹角 β 、测量船距海域中心点处的距离 d 和相邻平行测线之间的距离 d_1 有关

$$\begin{aligned} \eta &= g(f(\beta, d), d_1) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 0 \leq \beta < 360^\circ \\ 0 \leq d < \sqrt{5} \\ 0 \leq d_1 < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

按建模去寻找 η 与上述三个变量的关系。

Step2. 关键点重叠率计算

关键点重叠率的计算分为钝角和锐角两种情况编写，在海域平面上均匀选取测试点进行计算，得出了 6070 条结果。

* 见附件: 重叠率与三变量的关系.xlsx

当对计算得出的数据进行单变量分析时，观察到在给定船距海域中心点距离 (d) 和相邻平行测线之间的距离 ($d1$) 的固定条件下，测线方向夹角 (β) 与重叠率 (η) 之间存在相关性。

以 $d = 0.6$ 海里且 $d1 = 0.162$ 海里的不同测线方向夹角情况下的重叠率分布为例，在 0° 出现了 0.378842 的重叠率，在 90° 出现了 0.26689 的重叠率，而在 10° 出现了 -0.0446528 的漏测情况，与之类似的还有 15° 、 20° 、 140° 等等。

* 具体见附件: 问题三斜向规律探索.xlsx

其中存在着一定的分布规律。

Step3. 结果分析于总结

根据上一步结果绘制可视化图表进行观察，如下图所示：

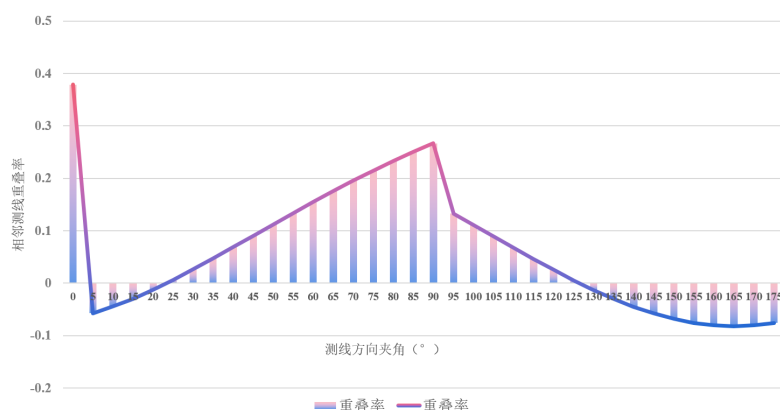


图 15 等间距旋转不同角度的重叠率变化分析图

根据图像的观察结果，我们可以注意到最高的重叠率出现在 $\beta = 0^\circ$ 时，而极大值则对应 $\beta = 90^\circ$ 的夹角。这表明，在相对移动距离保持不变的情况下，当测线方向接近 90° 夹角时，重叠率达到最高。这也意味着相邻测线之间的距离可以进一步增加，从而减少测线的总数，而不影响测量的覆盖范围。考虑到这样整体测线稀疏程度增加，这意味着总测量长度可以减少。因此，我们将重点分析两种情况，即 $\beta = 0^\circ$ 和 $\beta = 90^\circ$

情况一. 夹角 β 为 0° 时

当夹角 β 为 0° 时，即：让测线从北向南布设。此时测线上的任意点两侧的覆盖宽度相同。

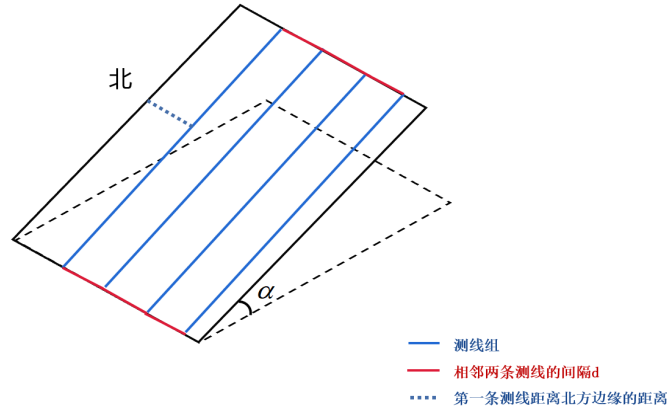


图 16 夹角 β 为 0° 示意图

Step1. 夹角 β 为 0° 的优化模型

(1) 由前两问水深和覆盖宽度的关系可知，当水深越深时，覆盖宽度越大；水深越浅时，覆盖宽度越小。此时对于重叠率必须满足 10%-20% 的条件，可以考虑两种极限情况，即：当水深最深、船在最西边，重叠率应小于 20%；当水深最浅、船在最东边，重叠率应大于 10%。

由此得出相邻测线的间隔 d 范围：

$$\begin{cases} 1 - \frac{d}{W_{deep}} \leq 0.2 \\ 1 - \frac{d}{W_{shallow}} \geq 0.1 \end{cases} \quad (26)$$

其中， d 为相邻两条测线的间隔， W_{deep} 为船在最西边时即处在最深处的覆盖宽度的大小， $W_{shallow}$ 为船在最东边时即处在最浅处的覆盖宽度的大小。

(2) 为保证测线可完全覆盖整个待测海域，在每条测线均平行的情况下，每条测线的长度相同。由此可以得出测量总长度公式：

$$L_T = n \cdot l_{single} \quad (27)$$

其中 L_T 为一组测线的总长度， n 为该组测线的条数， l_{single} 为该组测线中的单条测线长度。

(3) 为保证测线组的测量总长度最短，则要充分利用第一条测线即在边缘的测线的覆盖宽度。由题可知，南北宽 2 海里，由此可以设，从北向南第一条测线距离北方边缘的距离为 X_{first} 。同时为了保证全覆盖， X_{first} 的最大值不能大于最浅处覆盖宽度的一半。从而得到 X_{first} 的范围：

$$0 \leq X_{first} \leq \frac{W_{shallow}}{2} \quad (28)$$

最终根据（1）-（3）的分析，建立单目标规划模型进行优化：

$$\min L_T = n \cdot l_{single} = l_{single} \cdot \frac{2 - X_{first}}{d} \quad (29)$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \leq X_{first} \leq \frac{W_{shallow}}{2} \\ 1 - \frac{d}{W_{deep}} \leq 0.2 \\ 1 - \frac{d}{W_{shallow}} \geq 0.1 \end{cases} \quad (30)$$

Step2. 夹角 β 为 0° 的优化模型求解

当 $\beta = 0^\circ$ 时，根据题中所给的数据、第二问及第三问的模型求解，可以得出以下数据的值：

表 4 问题三已知数据

| 符号 | 含义 | 数值 |
|---------------|-----------------------------|-------------|
| D | 海域中心点处的海水深度 | 110 m |
| W_{deep} | 测量时较深测覆盖宽度 | 718.768m |
| $W_{shallow}$ | 测量时较浅测覆盖宽度 | 45.1671m |
| θ | 多波束换能器开角 | 120° |
| α | 海底平面坡度角 | 1.5° |
| β | 测线方向在海平面投影与海底坡面法向量在海平面投影的夹角 | 0° |

在化简 d 的范围时，得到如下公式：

$$0.8 \times W_{deep} \leq d \leq 0.9 \times W_{shallow} \quad (31)$$

代入数值 W_{deep} 和 $W_{shallow}$ 时发现存在矛盾，即：

$$460.01 \leq d \leq 40.65 \quad (32)$$

显然不成立。

这一结果显示，当夹角 β 为 0° 时，在南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，浅水处和深水处的距离间隔过大，无法满足相邻条带之间的重叠率在 10%-20% 的要求。

情况二. 夹角 $\beta = 90^\circ$ 时

当夹角 β 为 90° 时，即：测线在东西方向上布设，此时测线上任意一点的总覆盖宽度都相同。

Step1. 夹角 β 为 90° 的优化模型

根据所提供海域的地形特征，即西部水深相对较大而东部水深较浅，考虑到多波束换能器的固定开角为 120° ，海底坡面的固定坡度为 1.5° ，则根据第二问结果分析可推断：测量船所在区域的水深与相应的覆盖宽度呈正相关。换言之，随着水深的增加，覆盖区域的宽度也随之增加。

在海域的边界区域，船只的航行范围受到一定限制。若测线的覆盖范围过于广阔，可能导致与前一测线的重叠率超过 20%，并且难以进行有效的调整。因此，在选择测线的起点时，宜从相对较深的海域开始，即自西向东逐渐确定测线的位置，以确保测量的精确性和可管理性。

Step2. 夹角 β 为 90° 的优化模型求解

在题目所给的形状大小固定的海域中自西向东确认测线的分布位置，根据公式 $L_T = n \cdot l_{single}$ ，在 $\beta = 90^\circ$ 的情况下， l_{single} 的值为固定的 2 海里，要最小化总测量长度 L_T ，则需找到 n 的最小值 n_{min} ，参照以下数学表达式：

$$n_{min} = \min \{n \in \mathbb{N} \mid L_T = n \cdot l_{single}, n > 0\} \quad (33)$$

对于第一条测线来说，当覆盖面的西侧边缘线与西侧海岸线重合时， n_{min} 取得最优解。

最优解模拟情况如下图所示：

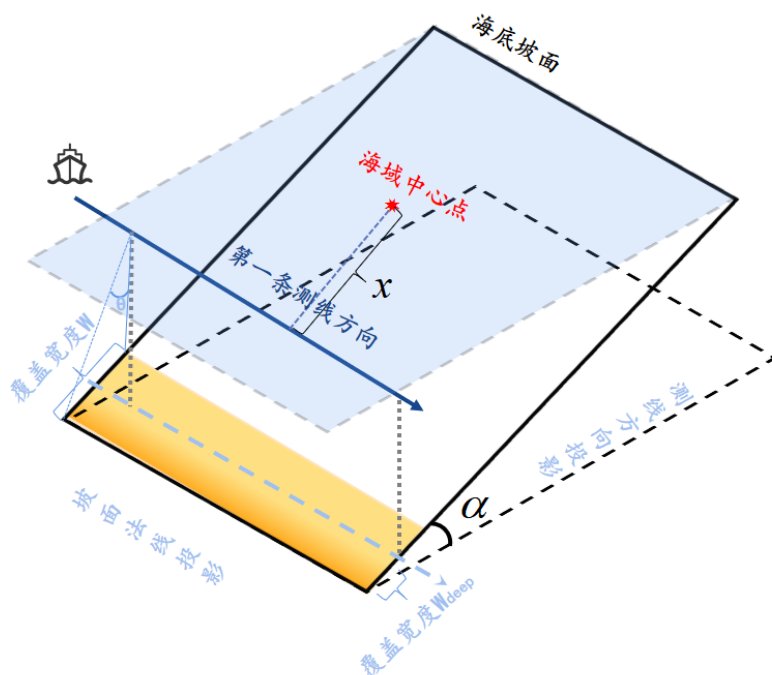


图 17 第一条测线最优位置示意图

利用射影几何学来考虑，将示意图中绘制的三维海域空间中的 x 和 W_{deep} 投影到坡的上部到下部的横截面二维空间中，海的東西向长度为 L_{Width} 。若符合几何性质的一致性，则应满足以下关系式：

$$\frac{L_{Width}}{2} = x + W_{deep} \cdot \cos \alpha \quad (34)$$

利用二分法迭代循环对 x 值进行计算，最终输出满足条件的测线位置为-3345.48m。

中间测线需要根据前一侧线的位置进行求解, n 与 d 为负相关，为保证 n 值较小，在 $10\% \leq \eta \leq 20\%$ 的范围内应找出每次的最大 d 值并得到相应测线位置。计算结果如下表：

表 5 $\beta = 90^\circ$ 时测线分布结果

| 测线位置 | 与上一条测线的距离 | 测线位置 | 与上一条测线的距离 |
|----------|-----------|---------|-----------|
| -3345.48 | —— | 2275.62 | 171.585 |
| -2727.93 | 617.551 | 2433.16 | 157.543 |
| -2160.92 | 567.014 | 2577.81 | 144.651 |
| -1640.31 | 520.612 | 2710.62 | 132.813 |
| -1162.3 | 478.007 | 2832.56 | 121.945 |
| -723.411 | 438.889 | 2944.53 | 111.966 |
| -320.439 | 402.972 | 3047.33 | 102.802 |
| 49.5552 | 369.994 | 3141.72 | 94.3896 |
| 389.271 | 339.715 | 3228.39 | 86.6651 |
| 701.185 | 311.914 | 3307.96 | 79.5724 |
| 987.574 | 286.389 | 3381.02 | 73.0607 |
| 1250.53 | 262.952 | 3448.1 | 67.0818 |
| 1491.96 | 241.432 | 3509.69 | 61.5922 |
| 1713.63 | 221.675 | 3566.24 | 56.552 |
| 1917.16 | 203.534 | 3618.16 | 51.9241 |
| 2104.04 | 186.878 | 3665.84 | 47.6752 |

Step3. 求解结果分析与总结

基于固定位置海域重叠率结果，可得出以下结论：当相邻测线之间的 d 值保持在限制范围内的最大值时，重叠率接近于 10%, 表明此时的测线分布是最疏松的状态。

对此时测线分布进行可视化：

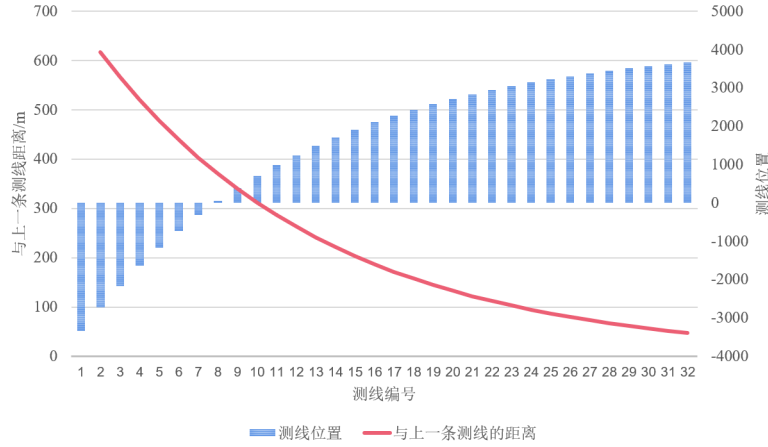


图 18 整体测线位置可视化

由图可观察到，随着测试编号的增加（由深及浅的方向），该测线与上一测线之间的距离越来越小。说明水浅的地方需要进行密度更高的采样。

观察整体数据可发现，第 32 条测线距离最东侧海岸 38.16m，东侧的覆盖面宽度为 23.2155m，有宽度为 14.94m 的海域漏测，由于所有测线的距离都比较疏松，重叠率较低，应该增加一条测线，并调整临近的几条测线使他们相对紧凑，保证 $10\% \leq \eta \leq 20\%$ 。

在此情况下，最短的一组测线共 33 根，总测量长度 66 海里，可以覆盖所有海域。

4.4 问题四：测线方向可变时对确定海域的测线分布规划

问题要求在实际问题中，利用一组真实数据为多波束测量船设计测线。由前三问的分析结果可以推得测线分布方案主要受到测线方向夹角、测量船距中心点距离及相邻测线间间距三个变量影响，易知，测线总长度 L_T 随测线总条数 n 和测线方向夹角 β 两个变量的值的变化而改变，可得关系表达式

$$L_T = f_1(n, \beta)$$

又知，测线总条数 n 的值在题目背景限定下，受相邻测线重叠率 η 和相邻侧线间隔 d 影响，可得关系表达式

$$n = f_2(\eta, d)$$

$$\beta = f_3(\eta, W)$$

结合上述公式推导得出，

$$L = f_L(\eta, d, W) \quad (35)$$

明确了变量之间的关系，设计出最符合实际且各方面相对较优的测线组。

4.4.1 海底曲面拟合

Step1. 数据预处理

基于题目给出的附件数据，通过 MATLAB 编写数据预处理程序，导入文件后，获取矩阵大小，使用两个 while 循环来检测和删除矩阵中的空值（NaN）。

具体流程如下图所示：

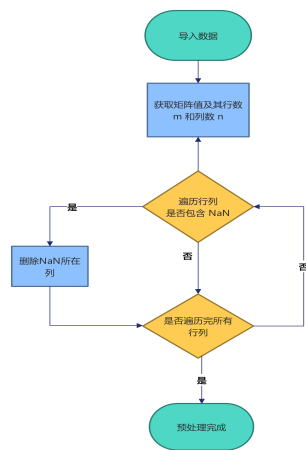


图 19 数据缺失值处理流程图

在处理完缺失值之后，分析数据含义：数据为海底深度，选取海平面为零点，向上为正，对数据进行负向化处理。

Step2. 海底三维地图可视化

由于题目所给的数据是离散的，故使用 MATLAB 进行插值处理，接着创建坐标网格从而得到连续的海底三维地图。

如下图所示：

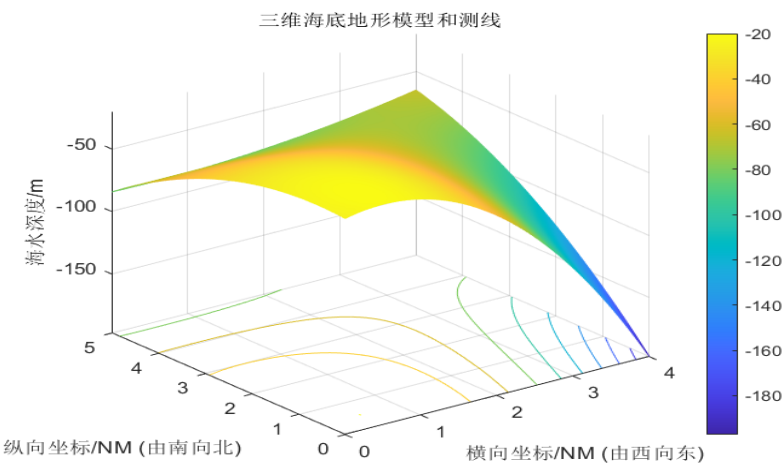


图 20 海底三维地图

Step3. 海底曲面拟合地图

通过将数据按照变化趋势分成三个子集，对每个子集应用最小二乘法，得到每个平面的拟合参数。使用这三个平面的参数来构建整个曲面模型。

得到了下图所示的三个平面：

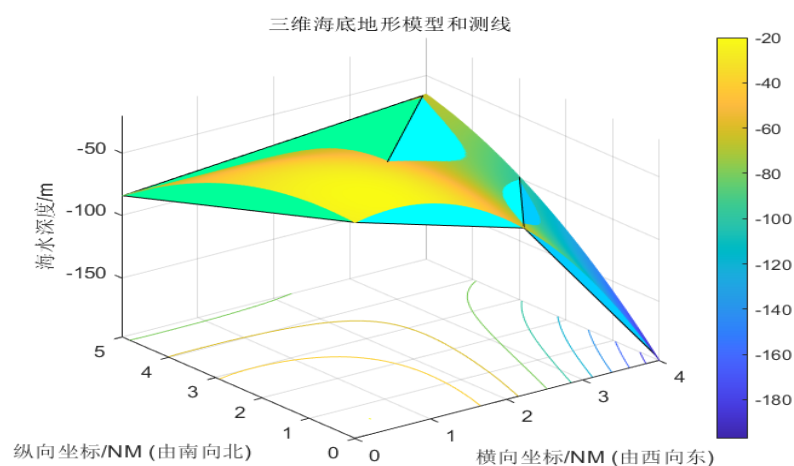


图 21 海底三维平面拟合地图

4.4.2 不同方向测线布线方案的分类

《海洋工程地形测量规范》中要求在调查海区情况时的扫测测线布设应当满足测线方向平行于工程海区的海流方向、平行于测区的长边、平行于测区的等深线方向[?]. 通过分析附件中待测海域海底地形数据，发现待测海域海底地形起伏复杂，不适用于平行测区等深线方向的测线规划，同时由于缺少待测海区的海流方向数据，我们在本问对测线方向是否平行于测区边界的情况展开分类讨论。

Step1. 不平行海域边界的测线规划

在已知长宽且海底地形复杂的矩形海域中，测线方向不平行于待测海域边界的情况下，对测线分布方案规划进行讨论。

首先，不平行于海域边界的测线方案简单规划示意图如图 22，分析可知，在该测线方向条件限制下达成对海域的完全覆盖时，必然存在实际测量区域大量超出待测海域的现象。超出矩形边框区域的测深数值将成为海底地形数据采集的冗余数据，加大海底地形数据处理难度，降低海底地形信息采集效率。

同时，由上文模型分析结果已知，在多波束测深系统中测量点海水深度 D 和波束覆盖宽度 W 成正相关。所以，根据图 22 分析题目所给海域海底地形数据发现海底地形起伏大，海水深度最浅处与最深处数值差距过大，可知最深处波束覆盖宽度同最浅处波束覆盖宽度同样差距过大，易出现深水处覆盖宽度过大导致深水处重叠率过大时浅水处覆盖宽度过小导致浅水处漏测的现象，测量效率低，不利于测线间隔的合理规划。

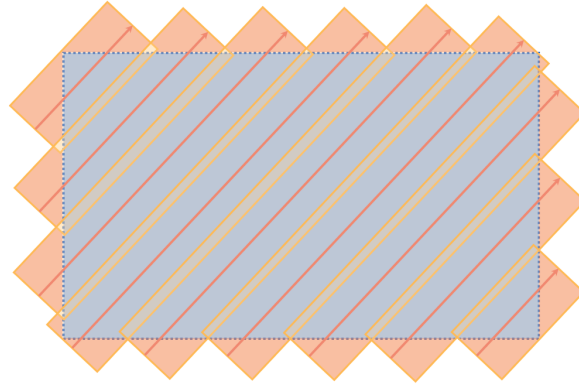


图 22 不平行于海域边界的测线方案简单规划

Step2. 平行海域边界方向的测线规划

(1) 当测线方向平行与海域东西边界方向时

由拟合地图可知，当测线方向平行与海域东西边界方向时，测线会穿过三截平面，然而平面的坡度不同，会导致平面的重叠率增加，从而导致实际工作中的效率低下。

(2) 当测线方向平行与海域南北边界方向时

由拟合地图可知，在拟合的三个平面之间，有两个平面的坡度相差不大，当测线方向平行与海域南北边界方向时，测线只会同时穿过两个平面，此时重叠率要相对小于测线方向平行与海域东西边界方向时的重叠率。而且在一定程度上，沿着最长的边界方向进行测量，会相对减少测量的条数，从而节约实际的人力和物力消耗。

4.4.3 模型求解与结果分析

根据上述讨论，选择沿南北走向平行且均匀地布置测线，根据对曲面的拟合结果，分别计算出三个坡面的坡角，再根据其在平面上的投影面积进行加权平均，可得到一个新的坡面，采用第三问的求解方法计算得出布线根数。平均坡角计算过程如下：

取斜面上任意不共线的三点记作 P_1, P_2, P_3 ，分别计算向量：

$$\begin{aligned} \vec{V}_{12} &= P_1 - P_2 \\ \vec{V}_{13} &= P_1 - P_3 \end{aligned} \quad (36)$$

则该平面法向量：

$$\vec{N} = \vec{V}_{12} \times \vec{V}_{13} \quad (37)$$

则其坡度：

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{N \cdot (0, 0, 1)}{|N|}\right) \quad (38)$$

计算结果如下：

表 6 坡度结果

| 平面编号 | 坡度 deg (°) | 投影面积 s (平方海里) |
|------|------------|---------------|
| 1 | 0.39695 | 10.00 |
| 2 | 1.06689 | 3.25 |
| 3 | 2.52421 | 6.75 |

通过加权计算海底的平均坡度为：

$$\frac{1}{3} \sum_i s_i \deg_i = 1.22376^\circ \quad (39)$$

计算平均海域深度 $D=62.538\text{m}$ ，作为中心海域深度。由第三问的模型可计算得，测线根数：

$$N = f(\alpha = 1.22376^\circ, \beta = 90^\circ, D = 62.538, \eta = 10\%) = 20 \quad (40)$$

可得布线间距为：

$$d = \frac{4 * 1852}{N} = 0.2HM \quad (41)$$

布线示意图如下：

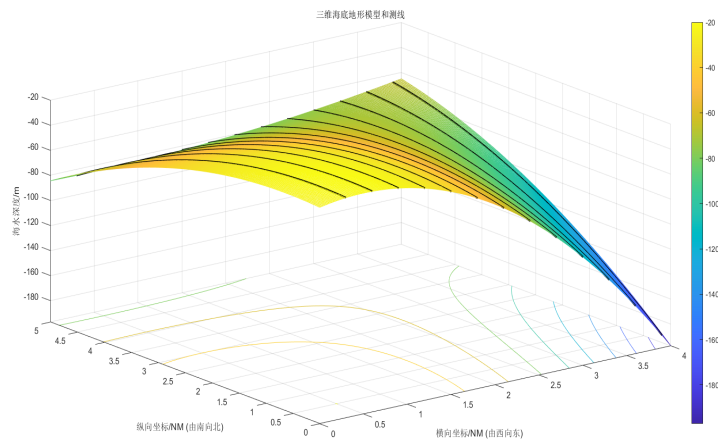


图 23 布线示意图

相关指标计算：

(1) 测线总长度

测线总长度 = 测线数量 * 单根测线的距离

即：

$$L_T = N \cdot l_{long} = 100 \quad (42)$$

(2) 漏测海域占待测海域面积的百分比

漏测百分比 = (未覆盖区域面积/总代测区域面积) * 100%

为计算覆盖区域，建立覆盖矩阵，计算每条测线的覆盖区域，与每个元素进行对比，判断其是否被覆盖，最终可以算出未覆盖区域的百分比为 2.956%

(3) 在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度可继续使用覆盖矩阵，通过检查覆盖矩阵中值大于 1 的元素寻找重叠超过 20% 的区域。最终得到重叠率超过 20% 的总面积为 19.85%

五、模型分析检验

5.1 模型泛用性检验

5.1.1 检验说明

本文我们讨论了坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ 时的船只在不同海域位置的海水深度、覆盖宽度、与前一条测线的重叠率，但 $\alpha = 1.5^\circ$ 是考虑到较深海域处海地坡面角度较小的浅坡情况。由于海底地形变换莫测，应考虑几种特殊的不同坡度情况来判断模型能否是适用于常见的所有海域。

我们将常见海域坡度按照坡度范围分为以下三种：

坡度分类：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{浅坡: } 0^\circ < \alpha < 15^\circ \\ \text{中坡: } 15^\circ \leq \alpha < 30^\circ \\ \text{陡坡: } 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ \end{array} \right. \quad (43)$$

在浅坡中选取 $\alpha = 1.5^\circ$ ，在中坡中选取 $\alpha = 20^\circ$ ，在深坡中选取 $\alpha = 88.5^\circ$ 作为检验对象。

覆盖宽度、与前一条测线的重叠率都与海水深度息息相关，当海域中心点深度固定时，深度又与离中心点的距离相关，故可以更换方式通过距离与坡面角度、检测夹角等边角几何关系对覆盖宽度进行验证。此处引入正弦定理作为检验方法，针对上述三个对象进行验证。

5.1.2 检验值比对

浅坡检验: 规定海域中心点深度为 70m，浅坡通过上述论文中所列公式求得的结果见”result1.xlsx”，用正弦定理计算出的结果见下表：

表 7 浅坡检验数值统计

| | | | | | | | | | |
|--------------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 测线距中心点处的距离/m | -800 | -600 | -400 | -200 | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
| 覆盖宽度/m | 315.813 | 297.628 | 279.442 | 261.256 | 243.07 | 224.884 | 206.699 | 188.513 | 170.327 |

两者比对结果一致。

中坡检验:

规定海域中心点深度为 110m，中坡通过上述论文中所列公式求得的结果见下表：

表 8 中坡检验数值统计

| | | | | | | | | | |
|--------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 测线距中心点处的距离/m | -800 | -600 | -400 | -200 | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
| 覆盖宽度/m | 2454.3 | 2008.96 | 1563.63 | 1118.29 | 428.243 | 227.617 | -217.719 | -663.056 | -1108.39 |

两者比对结果一致。

陡坡检验:

规定海域中心点深度为 1110m，陡坡通过上述论文中所列公式求得的结果见下表：

表 9 陡坡检验数值统计

| | | | | | | | | | |
|--------------|---------|---------|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 测线距中心点处的距离/m | -800 | -600 | -400 | -200 | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
| 覆盖宽度/m | 3616.67 | 3171.34 | 2726 | 2280.66 | 1835.33 | 1389.99 | 944.655 | 499.318 | 53.9819 |

两者比对结果一致。

5.1.3 检验结果总结

由上述计算可知，最终得出的结果与检验模型计算的结果在各个坡度上都基本一致，说明模型具有较强的泛用性。

5.2 边界值准确度检验

5.2.1 检验说明

在有偏角潜线重叠率计算中，我们在建模时大致分成了锐角和钝角两种情况，并没有对直角情况进行过多考虑。但将建模套用至问题一上，刚好是直角时的情形，故可以将数据对标问题一进行统一，借助检验好的正确答案对有偏角的测线重叠率进行检验。

5.2.2 检验值比对

将对应数值分别代入到适用于锐角和钝角情况的计算代码中，可以得到两个相同的结果，证明直角的情况放在锐角和钝角代码中是通用的，其结果如下表：

表 10 β 为直角时相邻测线之间的覆盖率

| 测线距中心点处的距离/m | -800 | -600 | -400 | -200 | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
|--------------|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------|
| 与前一条测线的重叠率/% | —— | 36.6715 | 32.8019 | 28.4287 | 23.4467 | 17.7193 | 11.0655 | 3.24081 | -0.060935（漏测） |

对比问题一中的《result1.xlsx》发现结果一致。证明在边界值处的程序运算结果是正确的。

5.2.3 检验结果总结

所写程序可以包含较难定义的特殊边界值，说明模型建模无误，考虑情况周全，可以排斥特殊临界值的干扰，可用性较强。

六、 模型的评价与推广

6.1 模型优点

6.1.1 模型的创新性

（1）本文模型以多波束测深系统为基础，深刻考虑了其在地形测量中的几何特性，深入而全面地探讨了问题的多个层面。包括对测线方向的静态和动态变化情况的详细研究，以及相邻测线之间的复杂重叠率关系的深刻分析。

（2）在问题一中，本文巧妙地将问题的几何性质巧妙地转化为代数问题，运用了三角函数以及已知参数，成功建立了深度和覆盖宽度的模型，而后通过精确的可视化分析验证了模型的正确性。

（3）在问题二中，基于问题一的模型，进一步拓展了模型的适用性，通过深入研究测线方向的可变性，构建关于海水深度的模型，使得模型在更广泛的情境下可以有效应用。

（4）对于问题三，运用勾股定理和正弦定理等几何原理，成功地推导出重叠率与法线方向与海底坡面法向量之间夹角的关系，从而解决了多条测线的最佳位置选择问题，具有高度创新和学术价值。

6.1.2 模型的可行性

(1) 本文模型运用适当的数学工具和几何原理,在数学上严密。在特定误差范围内有效地规划多波束测深系统的测线,并在实际应用中表现出一定的容忍度,从而增加了模型的可应用性。

(2) 本文模型充分考虑了问题的复杂性,进行了多方面的深入分析,全面性和系统性的分析为问题,包括对夹角分类讨论等多种情形的详细研究,提供了更为综合和全面的解决方案。

(3) 本文模型经过了仔细的可视化分析和验证,将数学原理直观地展示出来,并将模型的结果与实际情况进行比较,从而验证了其在实际应用中的可靠性,确保了模型的正确性和有效性。

6.2 模型缺点

(1) 本文模型中采用的参数和假设受到了实际情况中潜在误差的影响,这些误差可能对模型的准确性构成潜在挑战。

(2) 模型的复杂性可能导致在实际应用中需要较高的计算成本,这包括计算资源和时间的投入,应当在实际部署和应用模型时予以谨慎考虑。

6.3 模型推广

(1) 将模型中的海水深度参数替换成潮汐和季节性变化参数,可以更好地应对季节性海水深度变化的问题。

(2) 可以进一步考虑海底地形的动态变化对模型的影响。引入更复杂的地形变化模型,如海底沉降或地震引起的地形变化,可以得到更为合理和精确的模型,使得模型在不同环境和情境下的更广泛应用。

(3) 未考虑海面上的实际情况,海面波动会导致水深变化,从而影响模型的准确性。

参考文献

- [1] 杨卓,刘彤,刘永辉等.多波束测深系统在沉管隧道水下地形测量中的应用研究[J].广州建筑,2023,51(04):97-100.
- [2] 冯正茂,陈桃红,李忠文.多波束技术在智慧航道建设中的应用[J].大众科技,2022,24(04):1-6.
- [3] 张旭,叶小心,洪德玫.多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究[J].中国水运.航道科技,2017(01):52-55.DOI:10.19412/j.cnki.42-1395/u.2017.01.011.

- [4] 成芳, 胡迺成. 多波束测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术学报, 2016, 35(02): 87-91.
- [5] GB/T 17501-2017. 海洋工程地形测量规范 [S].

附录 A: 程序源代码

Listing 1: 第一问求深度计算代码

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846 // 自定义PI值

int main() {
    // double bottomBase = 3; // 下底边长度
    // double bottomAngle = 45; // 底角之补
    double bottomBase = 70; // 下底边长度
    double bottomAngle = 1.5; // 底角之余
    double x;           // 高
    double y;           // 上底边长度

    // 输入高
    std::cout << "请输入高: ";
    std::cin >> x;

    // 将底角从度转换为弧度
    double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

    double z=x*tan(angleInRadians) ;
    y=bottomBase-z ;
    std::cout<<y;

    return 0;
}
```

Listing 2: 第一问求覆盖面大小计算代码

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846 // 自定义PI值
using namespace std;

int main() {
    // double bottomBase = 3; // 下底边长度
    // double bottomAngle = 45; // 底角之补
    double bottomBase = 70; // 下底边长度
    double bottomAngle = 1.5; // 底角之余
    double x;           // 高
    double y;           // 上底边长度
    double senta= 60;
```

```

// 输入高
std::cout << "请输入高: ";
std::cin >> x;

// 将底角从度转换为弧度
double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

// 将一半的开角 转换为弧度
double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0;

double z=x*tan(angleInRadians) ;
y=bottomBase-z ;
std::cout<<y<<endl;

//左边为l1右边为l2

double
    l1=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)-sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l1<<endl;
double
    l2=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)+sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l2<<endl;
std::cout <<l2+l1<<endl;

return 0;
}

```

Listing 3: 第一问重叠率计算代码

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846 // 自定义PI值
using namespace std;

int main() {
    // double bottomBase = 3; // 下底边长度
    // double bottomAngle = 45; // 底角之补
    double bottomBase = 70; // 下底边长度
    double bottomAngle = 1.5; // 底角之余
    double x;           // 高
    double y;           // 深度
    double y2;          // 前一个深度
    double senta= 60;
    double d = 200; //相邻浅线的距离
    double coverage;

```

```

// 输入高
std::cout << "请输入高: ";
std::cin >> x;

// 将底角从度转换为弧度
double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

// 将一半的开角 转换为弧度
double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0;

double z=x*tan(angleInRadians) ;
y=bottomBase-z ;
std::cout<<y<<endl;

// 写一个y2来计算前面的覆盖率
double z2=(x-200)*tan(angleInRadians) ;
y2=bottomBase-z2 ;
std::cout<<y2<<endl;

//左边为l1右边为l2

double
    l1=y2*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)-sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));

double
    l2=y2*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)+sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));

std::cout <<l2+l1<<endl;
coverage=1-200/(l2+l1);
std::cout<<coverage<<endl;

return 0;
}

```

Listing 4: 第一问覆盖面大小检验代码

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846
using namespace std;
int main() {
    double y; // 已知深度
    double bottomAngle = 20;
    double angle_B = 60; // 已知角度 B, 单位为度
    double angle_A = 30-bottomAngle; // 已知角度 A, 单位为度

```

```

double angle_C = 30 + bottomAngle;
double x;

cout << "请输入" ;
cin >> x; // 输入深度

double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;
double angleInRadians2 = (angle_B * PI) / 180.0;
double z = x * tan(angleInRadians) ;
y = 300 - z ;
// 将角度从度转换为弧度
double angle_A_radians = (angle_A * M_PI) / 180.0;
double angle_B_radians = (angle_B * M_PI) / 180.0;
double angle_C_radians = (angle_C * M_PI) / 180.0;

// 使用正弦定理计算夹边 a 的长度
double a = (y * sin(angle_B_radians)) / sin(angle_A_radians);
double c = (y * sin(angle_B_radians)) / sin(angle_C_radians);
std::cout << "覆盖面宽度: " << a + c << std::endl;

return 0;
}

```

Listing 5: 第二问覆盖面求解关键代码

```

double bottomBase = 110; // 下底边长度
double bottomAngle = 1.5; // 底角之余
double x; // 高
double y; // 上底边长度
double senta = 60;

double beita;

// 将底角从度转换为弧度
double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

// 将一半的开角 转换为弧度
double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0;

// 小船行走的偏角 转换为弧度
double angleInRadians3 = (beita * PI) / 180.0;

```

```

double z=-x*(1852)*tan(angleInRadians)*cos(angleInRadians3) ;

y=bottomBase-z ;
std::cout<<y<<endl;

//左边为l1右边为l2

double
    l1=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)-sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l1<<endl;
double
    l2=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)+sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l2<<endl;
std::cout <<l2+l1<<endl;

```

Listing 6: 第三问求重叠率钝角情况代码

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846 // 自定义PI值
using namespace std;

int main() {
    double bottomBase =110; // D
    double bottomAngle = 1.5; //
    double x;           // d
    double y;           // D'
    double z;           //深浅计算辅助 -d'tan
    double senta= 60; // / 2

    double beita; //中心浅线的行走偏角
    double d1;//目标浅线与中心测线之间的距离
    double d2;//转换到目标浅线上的移动距离

    double d3;// 两浅线之间的距离 （不算变量自行键入） 上边的两条

    double r;//新产生的小夹角
    double sinr;
    double cosr;

    double coverage;

    // 输入高

```

```

std::cout << "请输入移动距离";
std::cin >> x;
std::cout << "请输入测线方向夹角";
std::cin >> beita;

std::cout << "请输入前一潜线与中心测线之间的距离（在中心潜线之下输入负值）";
std::cin >> d1;

std::cout << "请输入两潜线之间的距离（必须为正值）";
std::cin >> d3;

// 将底角从度转换为弧度
double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0; //

// 将一半的开角 转换为弧度
double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0; // / 2

// 小船行走的偏角 转换为弧度
double angleInRadians3 = (beita * PI) / 180.0; //

//将小船的行走偏角和行走距离都转化一下
d2=sqrt(x*x+d1*d1 );
sinr=abs(d1)/d2;
cosr=x/d2;

// 对投影在上还是在下进行判断
double h1 = abs(d1)*sin(angleInRadians3);
double h = -x*cos(angleInRadians3);
if(d1<=0){
    if(h1<h){
        std::cout<<"投影在上"<<endl;
        // 投影在上的
        // double z=d'*(1852)*tan(angleInRadians) ;
        //d'=d2(sin(angleInRadians3)*sinr-cos(angleInRadians3)cosr),将d'进行代入
        z =
            (d2*(sin(angleInRadians3)*sinr+cos(angleInRadians3)*cosr))*1852*tan(angleInRadians);
        if(z>=0){
            cout<<"z="<<z<<endl;
            cout<<"z大于零，在往水浅的地方走"<<endl;
        } else{
            cout<<"z="<<z<<endl;
            cout<<"z小于零，在往水深的地方走"<<endl;
        }
    }

    y=bottomBase-z ;
    std::cout<<y<<endl;

```

```

}
else if(h1>h){
    std::cout<<"投影在下"<<endl;
    // 投影在下的
    // double z=d'*(1852)*tan(angleInRadians) ;
    //d'=d2(sin(angleInRadians3)*sinr+cos(angleInRadians3)cosr),将d'进行代入
    z =
        (d2*(sin(angleInRadians3)*sinr+cos(angleInRadians3)*cosr))*1852*tan(angleInRadians);
    if(z>=0){
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z为正, 在往水深的地方走"<<endl;
    } else{
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z为负, 在往水浅的地方走"<<endl;
    }
    y=bottomBase+z ;
    std::cout<<y<<endl;
}
else{
    std::cout<<"error"<<endl;
}
}
else{
    std::cout<<"正常向上"<<endl;
    z = (d2*(sin(angleInRadians3)*sinr-cos(angleInRadians3)*cosr))*1852*tan(angleInRadians);
    if(z>=0){
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z正常情况为正, 往水浅的地方走"<<endl;
    } else{
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z正常情况为负, 往水深的地方走"<<endl;
    }

    y=bottomBase-z ;
    std::cout<<y<<endl;
}

//左边为l1右边为l2

double
    l1=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)-sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l1<<endl;
double
    l2=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)+sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l2<<endl;

```



```

std::cout << l2 + l1 << endl;

coverage = 1 - d3 * (1852) / (l2 + l1);
std::cout << coverage << endl;

return 0;
}

```

Listing 7: 第三问求重叠率锐角情况代码

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846 // 自定义PI值
using namespace std;

int main() {
    // double bottomBase = 3; // 下底边长度
    // double bottomAngle 2= 45; // 底角之补
    double bottomBase = 110; // 下底边长度
    double bottomAngle = 1.5; // 底角之余
    double x; // 移动距离
    double y; // 深度
    double z; // 深浅计算辅助
    double senta = 60;

    double beita; // 中心浅线的行走偏角
    double d1; // 目标浅线与中心测线之间的距离
    double d2; // 转换到目标浅线上的移动距离

    double d3; // 两浅线之间的距离 (不算变量自行键入)

    double r; // 新产生的小夹角
    double sinr;
    double cosr;

    double coverage;

    // 输入高
    std::cout << "请输入移动距离";
    std::cin >> x;
    std::cout << "请输入测线方向夹角";
    std::cin >> beita;

    std::cout << "请输入前一潜线与中心测线之间的距离 (在中心潜线之下输入负值)";

```

```

std::cin >> d1;

std::cout << "请输入两潜线之间的距离（必须为正值）";
std::cin >> d3;

// 将底角从度转换为弧度
double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

// 将一半的开角 转换为弧度
double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0;

// 小船行走的偏角 转换为弧度
double angleInRadians3 = (beita * PI) / 180.0;

//将小船的行走偏角和行走距离都转化一下
d2=sqrt(x*x+d1*d1 );
sinr=abs(d1)/d2;
cosr=x/d2;

//对投影在上还是在下进行判断
double h1 = abs(d1)*sin(angleInRadians3);
// double h2 = d2*sin(angleInRadians3);
double h = x*cos(angleInRadians3);//跟钝角相反数
if(d1<=0){
    std::cout<<"正常向下"<<endl;
    // 投影在下的
    // double z=d'*(1852)*tan(angleInRadians) ;
    //d'=d2*(sin(angleInRadians3)*sinr+cos(angleInRadians3)*cosr),将d'进行代入
    z = (d2*(sin(angleInRadians3)*sinr+cos(angleInRadians3)*cosr))*1852*tan(angleInRadians);
    if(z>=0){
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z大于零，在往水深的地方走"<<endl;
    } else{
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z小于零，在往水浅的地方走"<<endl;
    }
    y=bottomBase+z ;
    std::cout<<y<<endl;
}
else{
    if(h1<h){
        std::cout<<"投影在下"<<endl;
        z =
            (d2*(sin(angleInRadians3)*sinr-cos(angleInRadians3)*cosr))*1852*tan(angleInRadians);
        if(z>=0){

```

```

        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z大于零，在往水深的地方走"<<endl;
    }
    else{
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z小于零，在往水浅的地方走"<<endl;
    }
    y=bottomBase+z ;
    std::cout<<y<<endl;
}
else if(h1>h){
    std::cout<<"投影在上"<<endl;
    z =
        (d2*(cos(angleInRadians3)*cosr-sin(angleInRadians3)*sinr))*1852*tan(angleInRadians);
    if(z>=0){
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z大于零，在往水深的地方走"<<endl;
    }
    else{
        cout<<"z="<<z<<endl;
        cout<<"z小于零，在往水浅的地方走"<<endl;
    }
    y=bottomBase-z ;
    std::cout<<y<<endl;

}
else{
    cout<<"error"<<endl;
}

}

//左边为l1右边为l2

double
    l1=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)-sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l1<<endl;
double
    l2=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)+sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
std::cout <<l2<<endl;
std::cout <<l2+l1<<endl;

coverage=1-d3*(1852)/(l2+l1);

```

```

std::cout<<coverage<<endl;

return 0;
}

```

Listing 8: 第三、四问特殊情况第一条测线位置计算

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846 // 自定义PI值
using namespace std;

int main() {
    double bottomBase = 110; // 下底边长度
    double bottomAngle = 1.5; // 底角之余
    double senta = 60;

    double x_min = 0.0; // x的最小值
    double x_max = 3704.0; // x的最大值
    double x_mid = 0.0; // x的中间值
    double epsilon = 0.01; // 精度要求

    while (x_max - x_min > epsilon) {
        x_mid = (x_min + x_max) / 2.0;

        // 将底角从度转换为弧度
        double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

        // 将一半的开角转换为弧度
        double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0;

        double z = x_mid * tan(angleInRadians);
        double y = bottomBase + z;

        double l1 = y * tan(angleInRadians2) / (cos(angleInRadians) - sin(angleInRadians) *
            tan(angleInRadians2));

        if (x_mid + l1*cos(angleInRadians) < 3704.0) {
            x_min = x_mid;
        } else {
            x_max = x_mid;
        }
    }

    cout << "满足 x + l1 == 3704 的 x 值为: " << x_mid << endl;
}

```

```

    return 0;
}

```

Listing 9: 第三、四问各条测线位置计算

```

#include <iostream>
#include <cmath>
#define PI 3.14159265358979323846// 自定义PI值
using namespace std;

int main() {
    // double bottomBase = 3; // 下底边长度
    // double bottomAngle = 45; // 底角之补
    double bottomBase = 62.538; // 下底边长度
    double bottomAngle = 1.22376; // 底角之余
    double x; // 高
    double y; // 上底边长度
    double senta= 60;

    double d; //两条航线之间的距离

    // 输入高
    std::cout << "请输入上一条潜线的位置: ";
    std::cin >> x;

    // 将底角从度转换为弧度
    double angleInRadians = (bottomAngle * PI) / 180.0;

    // 将一半的开角 转换为弧度
    double angleInRadians2 = (senta * PI) / 180.0;

    double z=x*tan(angleInRadians) ;
    y=bottomBase-z ;
    std::cout<<y<<endl;

    //左边为l1右边为l2

    double
        l1=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)-sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
    std::cout <<l1<<endl;
    double
        l2=y*tan(angleInRadians2)/(cos(angleInRadians)+sin(angleInRadians)*tan(angleInRadians2));
    std::cout <<l2<<endl;
    std::cout <<"上一条的覆盖宽度: "<<l2+l1<<endl;
}

```

```

d=(1-0.1)*(l2+l1);
std::cout <<d<<endl;
std::cout <<x+d<<endl;

return 0;
}

```

Listing 10: 你的代码标题

```

clc;
clear;
tic;
url='F:\数模\附件.xlsx';%读取文件
height=xlsread(url,1);%导入Excel文件的sheet1所有信息
[m,n]=size(height);
i=1;
while i<=m
if isnan(height(i,:))%判断第i行元素是否为空
height(i,:)=[];%删除为空的
m=m-1;%减少了一行
continue;
end
i=i+1;
end
t=1;
while t<=n
if isnan(height(:,t))%判断第t列元素是否为空
height(:,t)=[];%删除为空的
n=n-1;%减少了一行
continue;
end
t=t+1;
end
h_z=reshape(height,1,m*n);
x=0:0.02:4;
y=0:0.02:5;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
zz=height;
zz=-zz;
%检查xx/yy/zz维度
disp(size(xx));
disp(size(yy));
disp(size(zz));
%zz = reshape(zz, 251, 201);

```

```

%zz = zz(1:251, 1:201);

set(gcf, 'Renderer', 'ZBuffer')
%surf(xx,yy,zz);
meshc(xx,yy,zz)

X1 = [0;3.96;0];
Y1 = [4.98;5;0];
Z1 = [-83.84,-65.65,-24.4]; % 左侧斜面拟合点

X2=[4;2.22;0;3.96];
Y2=[3;0;0;5];
Z2=[-98.8;-63.4;-24.4;-65.65]; %右侧斜面一拟合点

X3=[4;2.22;4];
Y3=[3;0;0.06];
Z3=[-98.8;-63.4;-194.67]; %右侧斜面二拟合点

%[X,Y,Z]=griddata(x,y,z,linspace(min(x),max(x))',linspace(min(y),max(y))',"v4");
%三维地形图部分
image1=meshc(xx,yy,zz);
%image1.FaceAlpha=0.5;
colorbar;
hold on
%fill3(X1, Y1, Z1, [0, 1, 0.6])
%fill3(X2, Y2, Z2, [0, 1, 1])
%fill3(X3, Y3, Z3, [0, 0.8, 1])

title('海底地形图');

```

附录 B: 详细表格

表 11 问题一模型运算结果 result1

| | | | | | | | | | |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------|
| 测线距中心点处的距离/m | -800 | -600 | -400 | -200 | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
| 海水深度/m | 90.9487 | 85.7116 | 80.4744 | 75.2372 | 70 | 64.7628 | 59.5256 | 54.2884 | 49.0513 |
| 覆盖宽度/m | 315.813 | 297.628 | 279.442 | 261.256 | 243.07 | 224.884 | 206.699 | 188.513 | 170.327 |
| 与前一条测线的重叠率/% | —— | 36.6715 | 32.8019 | 28.4287 | 23.4467 | 17.7193 | 11.0655 | 3.24081 | -0.060935（漏测） |

表 12 问题二结果 result2

| 覆盖宽度/m | | 测量船距海域中心点处的距离/海里 | | | | | | | |
|----------|-----|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.1 |
| 测线方向夹角/° | 0 | 416.692 | 467.212 | 517.732 | 568.252 | 618.772 | 669.292 | 719.812 | 770.332 |
| | 45 | 416.692 | 452.415 | 488.138 | 523.861 | 559.584 | 595.307 | 631.03 | 666.753 |
| | 90 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 |
| | 135 | 416.692 | 380.969 | 345.246 | 309.523 | 273.8 | 238.076 | 202.353 | 166.63 |
| | 180 | 416.692 | 366.172 | 315.652 | 265.132 | 214.612 | 164.092 | 113.571 | 63.0514 |
| | 225 | 416.692 | 380.969 | 345.246 | 309.523 | 273.8 | 238.076 | 202.353 | 166.63 |
| | 270 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 | 416.692 |
| | 315 | 416.692 | 452.415 | 488.138 | 523.861 | 559.584 | 595.307 | 631.03 | 666.753 |

附录 C: 支撑材料内容组成

| 文件夹 | 文件名 | 主要功能/用途 |
|-----|-----------------|------------------------------|
| 源代码 | 第一问求深度.cpp | 根据第一问给定的三维空间情况求解不同位置处的海域深度 |
| | 第一问求覆盖面.cpp | 根据第一问给定的不同位置求覆盖面宽度 |
| | 第一问重叠率.cpp | 根据第一问给定的不同位置求重叠率 |
| | 第一问覆盖面大小检验.cpp | 检验求得的覆盖面宽度是否准确 |
| | 第二问求覆盖面.cpp | 求第二问中在具体偏角和位移下的覆盖面宽度 |
| | 第三问求重叠率锐角.cpp | 求得偏角为锐角的情况下，不同位移和测线距离时的重叠率 |
| | 第三问求重叠率钝角.cpp | 求得偏角为钝角的情况下，不同位移和测线距离时的重叠率 |
| | 第三问表格填充.cpp | 将估算的 6070 条不同位置覆盖率数据快速输入到表格中 |
| | 第一条位置计算.cpp | 计算第三问九十度的情况下第一条测线的位置 |
| | 第一条位置检验.cpp | 检测第三问九十度的情况下第一条测线的位置正确性 |
| | 测线位置计算.cpp | 计算第三问所有测线的大致分布 |
| | 测线位置重叠率检测计算.cpp | 检测第三问所有测线的大致分布的正确性 |
| | 第四问第一条位置计算.cpp | 计算第四问第一条测线的位置 |
| | 第四问其余测线位置计算.cpp | 检测第四问第一条测线的位置正确性 |
| | sea_plot.m | 附件海底数据处理及三维可视化 |
| | 第三问反映线性关系代码.py | 第三问线性关系绘制 |
| | v60.m | 单目标规划代码 |
| 数据 | result1.xlsx | 第一问求解结果 |
| | result2.xlsx | 第二问求解结果 |
| | 问题三斜向规律探索.xlsx | 6070 条不同位置覆盖率数据 |
| | 重叠率与三变量的关系.xlsx | 寻找重叠率与某变量的相关关系 |
| | 90 度结果最新记录.xlsx | 记录第三问所有测线的大致分布 |
| | 第四问测线分布.xlsx | 记录第四问所有测线的大致分布 |