Bài thu hoạch tuần 3

Ứng dụng thực tiễn của các cấu trúc đại số

Ngô Duy Anh - MSSV 20220069 - IT-TN K67

Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội
Ngày 20 tháng 10 năm 2022

1 Đặt vấn đề

Trong quá trình phát triển những bộ môn của Toán học, rất nhiều những đối tượng đã được nghiên cứu rất nhiều từ xưa đến nay. Có những đối tượng có sự tương đồng lớn, do đó dẫn đến việc chúng có nhiều tính chất và ứng dụng giống nhau.

Do vậy, trong toán học xuất hiện rất nhiều những định lý với cách chứng minh y hệt nhau, chỉ khác nhau về đối tượng đang được xem xét. Để giảm thiểu đi những công sức thừa này, một ngành toán học ra đời, đó là **đại số trừu tượng**.

Thay vì nghiên cứu đến những đối tượng cụ thể, ngành toán học này nghiên cứu các **cấu trúc đại số** như nhóm (group), vành (ring[1]), trường (field).

Khi đó nhiều loại đối tượng sẽ cùng tương ứng với cùng một loại cấu trúc đại số, tạo ra mối quan hệ giữa nhiều mảng khác nhau của toán (nói riêng) và các ngành khoa học khác (nói chung).

Những cấu trúc nhóm và vành, do có những tính chất thú vị và nhiều ứng dụng thực tiễn, đã có riêng cho mình một ngành toán học, lần lượt là lý thuyết nhóm (group theory) và lý thuyết vành (ring theory). Lý thuyết nhóm được nghiên cứu rất kĩ và mang lại nhiều ứng dụng quan trọng trong vật lý (nghiên cứu mô hình hạt nhân nguyên tử, mô hình chuẩn của vật lý hạt nhân), khoa học máy tính (thuật toán giải Rubik, thuật toán đẳng cấu đồ thị). hóa học (những đối xứng trong hóa học nguyên tử).

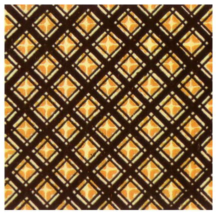
2 Những ứng dụng cụ thể

2.1 Bài toán lát sàn nhà

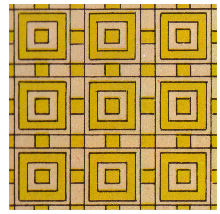
Trong xã hội hiện đại ngày nay, đi đâu cũng có thể nhìn thấy những viên gạch lát sàn nhà. Dù muôn hình vạn trạng, tất cả các phép lát này (ta chỉ tính những phép lát đối xứng) đều chỉ là một trong 17 loại, nằm trong 17 "nhóm lát nền" (tạm dịch từ *wallpaper group*).

Những nhóm này được xây dựng bằng các tập phép biến hình trên mặt phẳng, với phép toán hai ngôi là phép hợp. Chẳng hạn nhóm $p0$ là nhóm chỉ

[1] Trong chương trình đại số của Trường Đai Học Bách Khoa Hà Nội, tương ứng với khái niệm vành trong tiếng Anh là các **rngs**, còn **rings** là những vành có đơn vị.



(a) Vải, Tahiti



(b) Tranh trang trí, Nineveh, Assyria

Hình 1: Hai cách lát cùng thuộc nhóm **p4m**

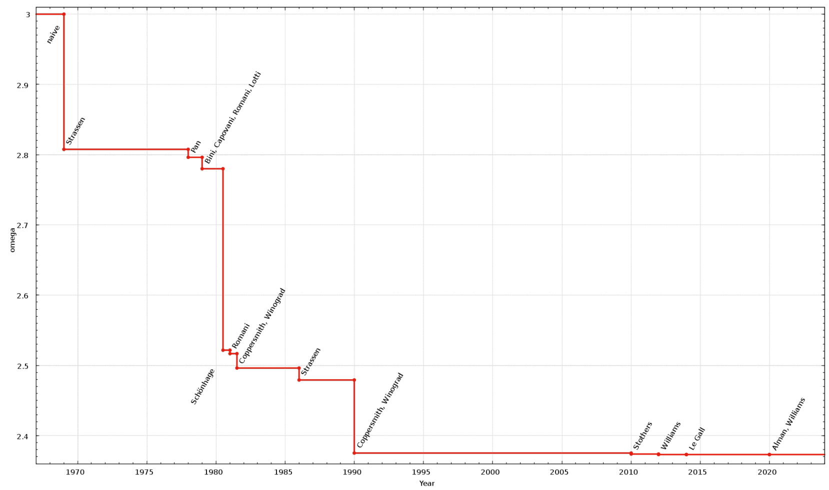
gồm có các phép tịnh tiến, nhóm $p4m$, gồm có các hợp của các phép tịnh tiến, đối xứng gương và quay 90 độ.

2.2 Thuật toán nhân ma trận

Trong thời đại hiện nay, làm việc với ma trận là một công việc quen thuộc của bất cứ chiếc máy tính hiện đại nào. Ứng dụng của những phép toán với ma trận có nhiều ứng dụng rộng rãi, trong các ứng dụng đồ họa 3D (bao gồm game) cũng như những hệ thống trí tuệ nhân tạo phức tạp. Trong đó, một phép toán được sử dụng nhiều chính là phép nhân ma trận. Chính vì thế, phép toán này trở thành một đề tài nghiên cứu vô cùng sôi nổi.

Đa số các thuật toán nhân ma trận có độ phức tạp tính toán (computational complexity) thuộc dạng $O(n^\omega)$, với ω càng nhỏ, thuật toán càng nhanh (theo lý thuyết). Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh được rằng tồn tại một thuật toán với ω thỏa mãn $2 \leq \omega \leq 3$. Hiện tại, ω nhỏ nhất (tương đương với thuật toán nhanh nhất) là khoảng 2.37.

Tuy nhiên, ứng dụng lý thuyết nhóm, Henry Cohn, Robert Kleinberg, Balázs Szegedy và Chris Umans đưa ra một một số phỏng đoán (conjecture), mà nếu đúng thì sẽ suy ra sự tồn tại của một thuật toán với ω bằng 2. Trong số các giả thuyết đó, một vài phỏng đoán đã bị chứng minh là không đúng.



Hình 2: Quá trình tối ưu hóa thuật toán nhân ma trận (theo ω) đến nay

2.3 Các hành động lên một vật thể

Ví dụ tiêu biểu nhất của ứng dụng này là trong việc xoay Rubik. Tổng quát nhất, có thể dễ thấy rằng tập các hành động có thể đảo ngược lên một vật thể (bao gồm hành động "không làm gì") cùng với phép "hợp" của các hành động là một nhóm.

Thật vậy, phép "hợp" này có tính chất kết hợp (bạn đọc có thể dễ dàng nhận ra điều này khi xoay một khối Rubik), có phần tử trung hòa/đơn vị là hành động "không làm gì", phần tử đối xứng với một hành động là hành động đảo ngược của hành động đó.

Ứng dụng này được sử dụng trong việc tạo ra thuật toán tối ưu cho giải Rubik, dù là 3x3 hay 1000x1000.

Trong lý thuyết nhóm cũng có một khái niệm liên quan đến hiện tượng này, đó chính là hành động nhóm (group action).

2.4 Sự đối xứng

Lý thuyết nhóm được sử dụng nhiều trong việc nghiên cứu những cấu trúc đối xứng, như hạt nhân nguyên tử, các orbital trong hóa học, và mã hóa của các DNA.

3 Mở rộng: Lý thuyết phạm trù

Một bước phát triển tương đối mới (xuất hiện từ giữa thế kỷ XX) của các lý thuyết về các cấu trúc đại số là lý thuyết phạm trù (category theory). Tại đây, những phạm trù và những mối quan hệ giữa chúng được nghiên cứu. Ta có những phạm trù của tập hợp, của nhóm, và thậm chí phạm trù của các phạm trù.

Ngành toán học này trở thành góp phần tạo nên nền tảng của các hệ thống kiểu (type system) trong nhiều ngôn ngữ lập trình hiện đại, đặc biệt là những ngôn ngữ lập trình hàm (functional programming language) như Haskell. Một điều thú vị là một khái niệm của ngành này: "a monad is a monoid in the category of endofunctors" (một monad là một vị nhóm trong phạm trù của các endofunctor) cũng đã trở thành một Internet meme vì sự ngắn gọn mà khó hiểu của nó.

Một ngành toán học khác (mà không liên quan lắm đến các cấu trúc đại số) cũng trở thành một phần không thể thiếu được trong nhiều ngôn ngữ khác là **phép tính lambda** (lambda calculus), và có lẽ cái tên sẽ gợi ra sự quen thuộc đến nhiều lập trình viên.