Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

Hinweis: Finde $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

Aufgabe 36: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung
$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}),$$
induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

ii) $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ ist ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ frei ist.

Aufgabe 37: Zeige, dass $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit $U_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $U_2 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ eine Leray-Überdeckung für $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$ ist und versuche damit $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$ zu bestimmen.

Aufgabe 38: Sei $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

genau dann eine Lösung $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit kompaktem Träger hat, wenn

$$\int_{\mathbb{C}} z^n g(z)\, dz \wedge d\bar{z} = 0 \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$