

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt

Aufgabe 41: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X . Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 42: Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige:

- i) Folgende kurze Sequenz von Garben ist exakt:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

$$\text{ii) } \check{H}^1(X, \mathcal{O}) \cong H_{\bar{\partial}}^1(X) := \frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{\bar{\partial}(\mathcal{E}(X))}$$

Hinweis: Die Garben-Sequenz aus (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz.

Aufgabe 43: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Aufgabe 44: Ziel dieser Aufgabe ist $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$ zu zeigen. Wir gehen folgendermaßen vor:

- i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Sequenz von Garben auf \mathbb{CP}^1 exakt ist:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

$$\text{ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz: } \check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$$

$$\text{iii) Zeige schließlich: } \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}.$$

Dafür betrachte die *Mayer-Vietoris-Sequenz* für die offene Überdeckung (U_0, U_∞) von \mathbb{CP}^1 :

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^{q-1}(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^q(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \cdots$$

Diese ist eine lange exakte Kohomologiesequenz¹, wobei die Garbe $\underline{\mathbb{Z}}$ jeweils die passende ist, z.B für $\check{H}^q(U, \underline{\mathbb{Z}})$ ist dies die Garbe welche auf U die konstante Garbe ist und auf dem Komplement von U 0 ist. Die Kohomologie verhält sich aber wie gewohnt. Außerdem gilt $\check{H}^r(U, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ für $r \geq 1$ und $U \cong \mathbb{C}^2$.

¹Das ist eine sehr bekannte Tatsache, welche wir an dieser Stelle nicht zeigen werden.

²Das wissen wir bisher nur für $r = 1$. Da wir nie mit \check{H}^2 gearbeitet haben, sei diese Aussage auch ohne Beweis gegeben.