Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt – Abgabe 28.01, Übung 29.01

Aufgabe 41: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X.[1] Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 42: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Hinweis: Variiere den Beweis zu Satz 8.3.

Aufgabe 43: Zeige Aufgabe 42 nochmal mithilfe der langen exakten Kohomologiesequenz.

Aufgabe 44: Ziel dieser Aufgabe ist $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$ (und damit auch $\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z}$, vgl. Bemerkung Blatt 12) zu zeigen. Wir gehen folgendermaßen vor:

i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Sequenz von Garben auf $\mathbb{CP}^1$ exakt ist:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \overset{\cdot 2\pi i}{\to} \mathcal{O} \overset{\exp}{\to} \mathcal{O}^\times \to 0$$

ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz: $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$

iii) Zeige schließlich: $\check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.
Dafür betrachte die *Mayer-Vietoris-Sequenz* für die offene Überdeckung (U_0, U_∞) von $\mathbb{CP}^1$:

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^{q-1}(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^q(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \cdots$$

Diese ist eine lange exakte Kohomologiesequenz[2]. Außerdem gilt[3] $\check{H}^r(U, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ für $r \geq 1$ und $U \cong \mathbb{C}$.

[1] Eine solche heißt exakt, wenn sie halmweise exakt ist, d.h. $\forall p \in X : 0 \to \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \to \mathcal{H}_p \to 0$ ist exakt.
[2] Das ist eine sehr bekannte Tatsache, welche wir an dieser Stelle nicht zeigen werden.
[3] Da wir nie mit $\check{H}^r$ für $r \geq 2$ gearbeitet haben, sei diese Aussage auch ohne Beweis gegeben.