Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

6. Blatt – Abgabe 26.11, Übung 27.11

Aufgabe 19:

i) Sei $\pi : \widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche und $f : Z \to X$ eine weitere normale(!) Überlagerung. Wie könnte man eine ,,Einschränkung"

$$\rho : \mathrm{Deck}(\widetilde{X}|X) \to \mathrm{Deck}(Z|X)$$

definieren? Was ist deren Kern?

ii) Nutze die vorhergehende Teilaufgabe, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz: *Ist X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es zu jedem surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_0) \to G$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) normale Überlagerung $f : Z \to X$ durch eine zusammenhängende Riemannsche Fläche Z, so dass $\mathrm{Deck}(Z|X) \cong G$.*

Aufgabe 20: Sei $X := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$, $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und

$$f : X \to Y, \quad z \mapsto (z^2 + 1)^2.$$

Zeige, dass f eine unverzweigte, 4-blättrige Überlagerung ist, die aber nicht normal ist, und dass

$$\mathrm{Deck}(X|Y) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$$

gilt.

Hinweis: Die Teilmengenbeziehung $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \subseteq \mathrm{Deck}(X|Y)$ ist einfach zu zeigen. Für die andere Teilmengenbeziehung: Angenommen wir haben $\phi \in \mathrm{Deck}(X|Y)$, d.h. $\phi(z)^2 + 1 = \pm(z^2 + 1)$. Der positive Fall liefert $\phi \in \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. Der negative Fall ist viel schwieriger: ϕ ist also das Quadrat einer Abbildung $\psi : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. ϕ ist der Lift von ψ unter der Überlagerung $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^2$. Jetzt betrachtet man die induzierten Abbildungen auf den Fundamentalgruppen. Man kann $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, z_0)$ direkt ausrechnen. Was macht p_* damit? Mit einer geschickt gewählten Schleife in X bekommen wir einen Widerspruch.
Dass die Überlagerung nicht normal ist, ist dafür wieder einfach zu zeigen.

Aufgabe 21: Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Sind dann $S \subset X$ die Verzweigungspunkte und $S' = f(S)$, so ist $f|_{X \setminus f^{-1}(S')} : X \setminus f^{-1}(S') \to Y \setminus S'$ eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei mit $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Zeige:

i) Es gibt Triangulierungen von X und Y, so dass f Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen abbildet.

ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y), \quad K(X) = m \cdot K(Y), \quad E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#f^{-1}(S').$$