

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

**Aufgabe 35:** Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf  $X$  und  $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$  die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{ \sigma : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ stetig} \mid \pi \circ \sigma = \text{id}_U \}.$$

Zeigen Sie, dass

- i)  $\mathcal{G}$  eine Garbe ist
- ii) und es einen kanonischen Isomorphismus  $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  für jedes  $p \in X$  gibt.

**Aufgabe 36:** Seien  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$  paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$$

gilt.

*Hinweis:* (Aus dem Buch von Otto Forster) finde eine Überdeckung  $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$  mit einfach zusammenhängenden  $U_1, U_2$ , so dass  $U_1 \cap U_2$  genau  $n + 1$  Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man (mittels Satz von Leray) die Aufgabe lösen.

**Aufgabe 37:** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$  eine endliche offene Überdeckung. Zeigen Sie, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}_{\text{alt}}^r(\mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

*Hinweis:* Das gilt auch allgemein für alle  $\check{H}^r$  und ohne Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen.

**Aufgabe 38:** Zeigen Sie für einen Torus  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  mit Hilfe einer geeigneten Leray-Überdeckung, dass

$$\check{H}^1(T, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2.$$

*Hinweis:* Man benutzt natürlich die vorhergehenden Aufgaben. Dennoch ist das immer noch eine ziemliche Erbsenzählerei.