Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathscr{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}^r_{\mathrm{alt}}(\mathscr{U}, \mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \cdots < i_r \leq n} \mathcal{F}\big(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}\big)$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Bemerkung: Das gilt auch allgemein für alle $\check{H}^r$ und ohne Kompaktheit und Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen. Das darf aber ab jetzt für Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 36: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{CP}^1$ aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathscr{U} = (U_0, U_1)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf $\mathbb{CP}^1$). Zeige, dass[1]

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}(m)) \; = \; \begin{cases} -m-1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

[1] Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar $\mathbb{C}$-linear.