

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt

**Aufgabe 41:** Sei  $X$  ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf  $X$ . Zeige, dass für jedes offene  $U \subset X$  die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

**Aufgabe 42:** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Zeige:

- i) Folgende kurze Sequenz von Garben ist exakt:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

$$\text{ii) } \check{H}^1(X, \mathcal{O}) \cong H_{\bar{\partial}}^1(X) := \frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{\bar{\partial}(\mathcal{E}(X))}$$

*Hinweis:* Die Garben-Sequenz aus (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz.

**Aufgabe 43:** Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11) und der vorhergehenden Aufgabe:

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

**Aufgabe 44:**

- i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Garbensequenz exakt ist:

$$0 \rightarrow \underline{2\pi i \mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

$$\text{ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz: } \check{H}^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$$

$$\text{iii) Zeige schließlich mit (ii): } \check{H}^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$$