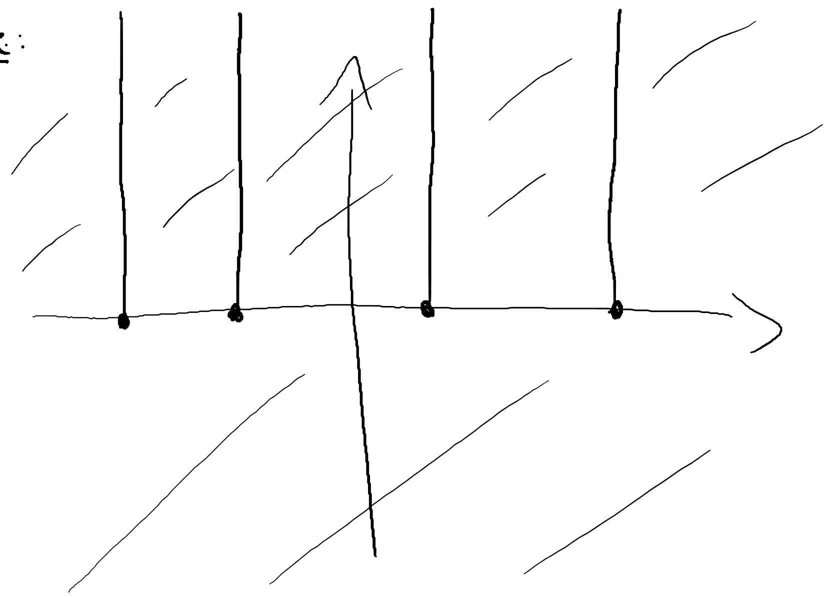
A3 J) zz: $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$

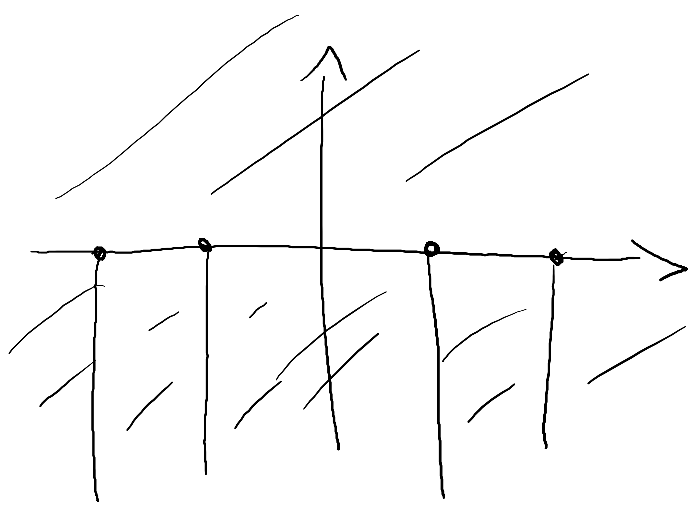
Bew: Finde $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ mit einf. zhg. U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ hat genau $n+1$ Zshgskmpt.

Skizze:

U_1:

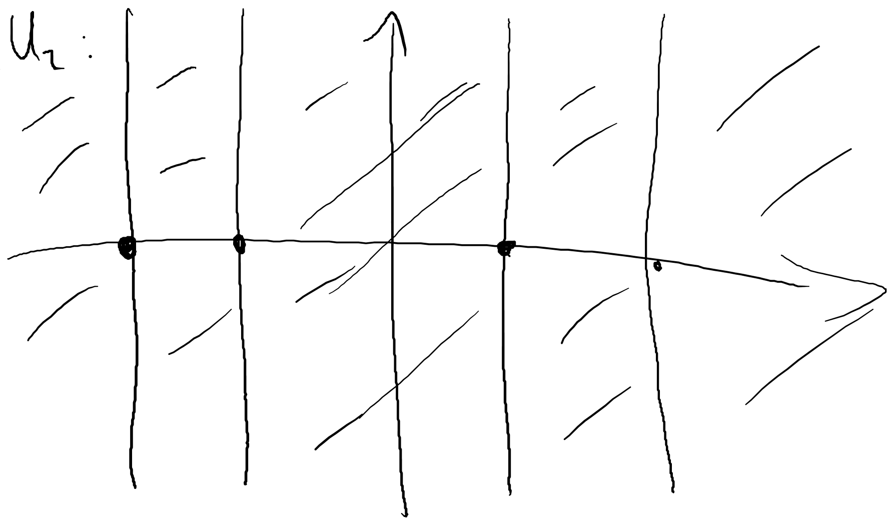


U_2:



Da geschlitzte Ebenen einf. zshgd sind, sind es auch U_1 und U_2

$U_1 \cap U_2$:



$n+1$ Zshgskmpt.

Beh: $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ Leray-ÜD

Bew: U_1, U_2 einf. zshg. RF, also mit Satz 7.9 $\check{H}^1(U_i, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$, $i = 1,2$

Also mit Satz 7.11:

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$$

$$\check{C}^0_{alt}(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \prod_{i \in \{1,2\}} \underline{\mathbb{Z}}(U_i) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$\check{C}^1_{alt}(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \prod_{\substack{i,j \in \{1,2\} \\ i<j}} \underline{\mathbb{Z}}(U_i \cap U_j)$$

$$= \underline{\mathbb{Z}}(U_1 \cap U_2)$$

$$\cong \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$\check{C}^2_{alt}(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \prod_{\substack{i,j,k \in \{1,2\} \\ i<j<k}} \underline{\mathbb{Z}}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

$$= 0$$

im δ: $\check{C}^0_{alt} \to \check{C}^1_{alt}$

$(f_1, f_2) \mapsto (g_{ij})$

mit $g_{11} = 0$, $g_{22} = 0$, $g_{12} = -g_{21} \equiv k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{im} \delta \cong \mathbb{Z}$

$\operatorname{Ker}(\delta : \check{C}^1_{alt} \to \check{C}^2_{alt} = 0) = \check{C}^1_{alt} \cong \mathbb{Z}^{n+1}$

$\Rightarrow H^1 \cong \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$

136) X kpt RF

(i) ZZ: $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}})$ (induz. von $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$)

<u>Bew:</u> Sei $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_N)$ endl. off. ÜD von X mit U_i einf. zshgd

Dann $\mathcal{U}$ Leray-ÜD zu $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ und $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}})$

$\Rightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$ und $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$

$\phi\ \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) \to \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$

$$[(c_{ij})_{i,j \in I}] \mapsto [(c_{ij})_{i,j \in I}]$$

Sei $[(c_{ij})_{i,j}] \in \ker \phi$, d.h.

$(c_{ij}) \in \delta(\check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}))$, d.h.

$\forall i,j \in I\ \exists a_i \in \underline{\mathbb{C}}(U_i), a_j \in \mathbb{C}(U_j) : c_{ij} = a_j - a_i|_{U_{ij}}$

Wenn wir $a_j - a_i \in \mathbb{Z}$ zeigen sind wir fertig.

Sei $i_0 \in I$ fest. Wähle nun für $i \in I$ Folge von Indizes

$i_0 = i(0), i(1), \dots, i(r) = i$

mit $U_{i(k)} \cap U_{i(k+1)} \neq \emptyset$ für alle $k = 0, \dots, r$

Auf jedem Schnitt $U_{i(k)} \cap U_{i(k+1)}$ gilt

[illegible]

Auf jedem Schnitt $U_{i(k)} \cap U_{i(k+1)}$ gilt

$$c_{i(k)\, i(k+1)} = a_{i(k+1)} - a_{i(k)}$$

$$\Rightarrow a_i - a_{i_0} = (a_{i(r)} - a_{(r-1)}) + (a_{(r-1)} - a_{i(r-2)}) + \dots + (a_{i(1)} - a_{i(0)})$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} (a_{i(k+1)} - a_{i(k)}) \in \underline{\mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow c_{i i_0} \in \mathbb{Z}$

Für beliebige $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$c_{ij} = a_j - a_i = (c_{j i_0} + a_{i_0}) - (c_{i i_0} - a_{i_0})$$

$$= \underbrace{c_{j i_0}}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{c_{i i_0}}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \qquad \square$$

(iii) <u>zz</u>: $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endl. erz. freier $\mathbb{Z}$-Modul

<u>Bew</u>: 1. $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endl. erz

2. $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ frei

<u>zu 1</u>: Sei $\mathfrak{U} = (U_0, \dots, U_N)$ endl. off. ÜD von X mit U_i einf. zshgd.

Dann $\mathfrak{U}$ Leray-ÜD und $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}})$

$$C^1_{alt}(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \coprod_{1 \le i < j \le N} \underline{\mathbb{Z}}(U_{ij}) \qquad (N^2 \text{ Faktoren})$$

$\Rightarrow C^1_{alt}$ hat Erz-system von Länge $\le N^2$

$\Rightarrow C^1_{alt}$ hat Erz-system von Länge $\leq N^2$

$\Rightarrow H^1$ hat Erz-System von Länge $\leq N^2$

$\pi: C^1 \to H^1, \; s \mapsto [s]$

($\mathbb{Z}$ noethersch, also hat jeder endl. erz. $\mathbb{Z}$-Modul nur endl. erz. Untermoduln)

<u>zu 2</u>: $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) = \underset{r \leq N^2}{\mathbb{Z}^r} \oplus \mathrm{Tor}(\check{H}^1(X, \mathbb{Z}))$

Es reicht zz $\mathrm{Tor}(H^1) = 0$

Sei $x \in \mathrm{Tor}(H^1)$, d.h. $\exists\, n > 0: n \cdot x = 0$

Betrachte Abb ϕ aus (i):

$0 = \phi(nx) = n\, \phi(x)$

Da $H^1(X, \mathbb{C})$ endl.-dim $\mathbb{C}$-VR, damit Torsionsfrei, folgt $\phi(x) = 0$, also $x = 0$, weil ϕ inj.

$\square$

Folge Beweis aus Forster (sollte mit der Bew. aus VL übereinstimmen evtl. andere Benennungen)

A37) $\Delta := \{|z| < 1\}$

<u>Zz</u>: $\forall g \in \mathcal{E}(\Delta^*) \; \exists f \in (\Delta^*): \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$

<u>Bew</u>: Wollen Ausschöpfungsargument, wie im Beweis aus der Vorlesung.

Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < r_{n+1} < r_n < 1$ und $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$

und $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < R_n < R_{n+1}$ und $\lim_{n \to \infty} R_n = 1$

OBdA $\forall n \in \mathbb{N}$: $r_n < R_n$ (sonst schneide Folgenglieder ab)

Setze $X_n := \{ z \in \mathbb{C} \mid r_n < |z| < R_n \}$.

Dann $\Delta^\times = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $\overline{X_n} \subseteq X_{n+1}$.

Wähle $\psi_n \in \mathcal{E}_c(\Delta^\times)$, $\psi_n|_{X_n} \equiv 1$, $\operatorname{supp} \psi_n \subseteq X_{n+1}$

Dann hat $g_n := \psi_n g$ kmp Träger in $\Delta^\times$

Erster Schritt aus Beweis in VL liefert $f_n \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = g_n$ auf X_n

Auf X_n gilt auch $\bar{\partial}(f_{n+1} - f_n) = 0$, d.h.

$h_n := f_{n+1} - f_n$ ist holomorph auf X_n (Ring)

$\rightsquigarrow h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n z^k$ in glm. Konv.

Wähle Laurent-Polynom $P_n(z) = \sum_{k=-N}^{M} a_k z^k$ mit

$\| h_n - P_n \|_{X_n} \leq 2^{-n}$

Definiere rekursiv $\tilde{f}_1 := f_1$, $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P_n$

Dann gilt:
- $\bar{\partial} \tilde{f}_n = g$ auf X_n
- $\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n$ ist holom auf X_n
- $\| \tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n \|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}$

Für jedes n konv. die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$ glm auf X_n.

Def. $f(z) = \lim \tilde{f}_n(z)$

Def. $f(z) = \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(z)$

Dann $f \in \mathcal{E}(\Delta^\times)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.