Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt

Aufgabe 32: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{CP}^1$ aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathscr{U} = (U_0, U_1)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf $\mathbb{CP}^1$). Zeige, dass[1]

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m-1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

Aufgabe 33: Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

Hinweis: Finde $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

Aufgabe 34: Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{\, \sigma : U \to |\mathcal{F}| \text{ stetig } \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U \,\}.$$

Zeige, dass

i) $\mathcal{G}$ eine Garbe ist

ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.

[1] Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar $\mathbb{C}$-linear.