A8| $\tau \in \mathbb{H}$ gegeben und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}) = \{A \in Mat(2\times 2, \mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$$

Beh: $\tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d} \Rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_\tau \cong \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$

Vorab: $\tau' \in \mathbb{H}$?

$$\operatorname{Im}(\tau') = \frac{1}{2i}(\tau' - \overline{\tau'}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d} - \frac{a\overline{\tau}+b}{c\overline{\tau}+d}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{(a\tau+b)(c\overline{\tau}+d) - (a\overline{\tau}+b)(c\tau+d)}{|c\tau+d|^2}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{\overbrace{(ad-bc)}^{=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1}(\tau - \overline{\tau})}{|c\tau+d|^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(\tau') = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2} > 0$$

Jetzt zum eigentlichen Beweis:

Betrachte lin. Abb. $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z}{c\tau+d}$

Wir zeigen $\phi(\Lambda_\tau) = \Lambda_{\tau'}$.

Für $m,n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\phi(m\tau+n) = \frac{m\tau+n}{c\tau+d}$$

Suchen $m',n' \in \mathbb{Z}$ mit $\phi(m\tau+n) = m'\tau' + n'$

$$\Leftrightarrow m\tau+n = m'\tau'(c\tau+d) + n'(c\tau+d)$$
$$= m'(a\tau+b) + n'(c\tau+d)$$

Erhalten Gleichungen

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{matrix} am' + bn' \\ bm' + dn' \end{matrix}$$

Da $\det\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$,

existiert genau eine ganzzahlige Lsg $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ und damit $\phi(m\tau+n) \in \Lambda_{\tau'}$.

$\Rightarrow \Phi(\Lambda_\tau) \subseteq \Lambda_{\tau'}$

Die gleiche Argumentation ist auch umgekehrt möglich (mit inverser Matrix), also $\Phi(\Lambda_\tau) = \Lambda_{\tau'}$

Folglich induziert $\Phi$ eine wohldefinierte Abb.

$$\bar{\Phi}: \mathbb{C}/\Lambda_\tau \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'},$$
$$[z] \mapsto \left[\frac{z}{c\tau+d}\right]$$

welche $\mathbb{C}$-linear & bijektiv ist, d.h. $\bar{\Phi}$ ist Iso.

$\square$

A4) $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Morphismus von Garben auf $X$.

(i) Sei $x \in X$. Suchen von $\alpha$ induz. Gruppenhom. $\alpha_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ auf Halmen.

Sei $[s]_x \in \mathcal{F}_x$ mit $s \in \mathcal{F}(U)$, $x \in U$.
Setze $\alpha_x([s]_x) = [\alpha(U)(s)]_x$
Wohldefiniertheit folgt aus komm. Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d, "{}^{\mathcal{F}}\rho^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{}^{\mathcal{G}}\rho^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

denn: Seien $[s]_x = [t]_x$ für $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(\tilde{U})$ mit $x \in U \cap \tilde{U}$
d.h. $\exists V \subseteq U \cap \tilde{U}: {}^{\mathcal{F}}\rho^U_V(s) = {}^{\mathcal{F}}\rho^{\tilde{U}}_V(t)$

$$\Rightarrow \alpha(V)\left({}^{\mathcal{F}}\rho^U_V(s)\right) = \alpha(V)\left({}^{\mathcal{F}}\rho^{\tilde{U}}_V(t)\right)$$

$$\Rightarrow {}^{\mathcal{G}}\rho^U_V\left(\alpha(U)(s)\right) = {}^{\mathcal{G}}\rho^{\tilde{U}}_V\left(\alpha(\tilde{U})(t)\right)$$

$$\Rightarrow [\alpha(U)(s)]_x = [\alpha(\tilde{U})(t)]_x$$

(Gruppenhom klar) $\square$

(ii) Sei $U \subseteq X$ offen mit $\forall x \in U: \alpha_x$ injektiv

<u>ZZ</u>: $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv

<u>Bew:</u> Sei $s \in \ker \alpha(U)$, d.h.

$$\alpha(U)(s) = 0 \in \mathcal{G}(U)$$

Für jedes $x \in U$ gilt dann

$$\alpha_x([s]_x) = [\alpha(U)(s)]_x = [0]_x = 0 \in \mathcal{G}_x$$

$\overset{\alpha_x \text{ inj}}{\Longrightarrow}$ $\forall x \in U: [s]_x = 0$.

Also ex. zu jeden $x \in U$ eine off. Umg $V_x \subseteq U$ mit ${}^{\mathcal{F}}\rho^U_{V_x}(s) = 0$. Die $V_x$ überdecken $U$ und da $s$ auf jeder dieser Mengen $0$ ist, folgt $s = 0$ ($\mathcal{F}$ Garbe)

$\square$

A10) Auf $\mathbb{C}P^1$: $U_0 := \mathbb{C}$, $U_\infty := \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}$

(i) <u>ZZ</u> Für $m \in \mathbb{Z}$ definiert

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(m): U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(m)(U) := \{(f_0, f_\infty) \mid f_j: U \cap U_j \to \mathbb{C} \text{ holomorph mit } \forall z \in U \cap U_0 \cap U_\infty: f_0(z) = z^m f_1(z)\}$$

eine Garbe von $\mathbb{C}$-VR'en auf $\mathbb{C}P^1$.

<u>Bew:</u> <u>Was sind die Restriktionen?</u>

Sei $V \subseteq U \subseteq \mathbb{C}P^1$ offen. Dann

$$\rho^U_V((f_0, f_\infty)) := (f_0, f_\infty)|_V := (f_0|_{V \cap U_0}, f_\infty|_{V \cap U_\infty})$$

Für $W \subseteq V \subseteq U$:

$$\rho^V_W \circ \rho^U_V((f_0, f_\infty)) = \rho^V_W((f_0|_{V \cap U_0}, f_\infty|_{V \cap U_\infty}))$$

$$= \left(f_0|_{W\cap U_0}, f_\infty|_{W\cap U_\infty}\right)$$

$$= \rho^U_W\left((f_0, f_\infty)\right)$$

<u>Garbenaxiome:</u> Sei $(U^{(i)})_{i\in I}$ off. Überd. zu $U\subseteq\mathbb{CP}^1$ off.

① Sei $(f_0, f_\infty)\in \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(U)$ mit

$$\forall i\in I: \quad (f_0, f_\infty)|_{U^{(i)}} = 0$$

Haben $f_0 : \underbrace{U\cap U_0}_{\subseteq\mathbb{C}\text{ off.}} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\forall i\in I: \quad f_0|_{U^{(i)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_0 = 0$$

Betrachte Karte $w: U_\infty \to \mathbb{C}^*$
$z \mapsto \frac{1}{z}$

$$f_\infty(w^{-1}(z)) = f_\infty\left(\frac{1}{z}\right): \underbrace{w(U_\infty)}_{\subseteq\text{ offen}} \to \mathbb{C} \quad \text{holomorph}$$

$\Rightarrow f_\infty = 0$ (Gleiches Argument)

② Seien nun $(f_0^{(i)}, f_\infty^{(i)})\in \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(U^{(i)})$ geg. mit

$$\forall i,j\in I: (f_0^{(i)}, f_\infty^{(i)})|_{U^{(i)}\cap U^{(j)}} = (f_0^{(j)}, f_\infty^{(j)})|_{U^{(i)}\cap U^{(j)}}$$

Klar: kriegen holomorphe Fkt. $f_0 : U\cap U_0 \to \mathbb{C}$ mit
$f_0|_{U^{(i)}} = f_0^{(i)}$

Wieder vermöge Karte $w: U_\infty\to\mathbb{C}, z\mapsto \frac{1}{z}$
erhalten wir holomorphes $f_\infty: U\cap U_\infty \to \mathbb{C}$ mit
$f_\infty|_{U^{(i)}} = f_\infty^{(i)}$

Haben also $(f_0, f_\infty)$ mit $(f_0, f_\infty)|_{U^{(i)}} = (f_0^{(i)}, f_\infty^{(i)})$.

Damit auch klar, dass $\forall z\in U\cap U_0\cap U_\infty: f_0(z) = z^m f_\infty(z)$,
denn wir finden $U^{(i)}$ mit $x\in U^{(i)}$.

$\square$

(ii) <u>ges.</u> Globale Schnitte $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(\mathbb{CP}^1)$ in Abh. von $m\in\mathbb{Z}$.

Dazu: Sei $(f_0, f_\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(\mathbb{CP}^1)$, d.h. insb.

$f_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, also

$\forall z \in \mathbb{C}: \; f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für passende $a_k \in \mathbb{C}$.

Auf $\mathbb{C}^* = U_0 \cap U_\infty$ gilt:

$$f_0(z) = z^m f_\infty(z)$$

$$\Leftrightarrow \; f_\infty(z) = z^{-m} f_0(z)$$

$$\Leftrightarrow \; f_\infty\left(\tfrac{1}{z}\right) = z^m f_0\left(\tfrac{1}{z}\right) = z^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

Da $f_\infty\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorph auf $\mathbb{C}^*$ gilt:

- falls $m < 0$: $\quad f_0 = 0 \Rightarrow f_\infty = 0$
- falls $m = 0$: $\quad f_0 = a_0 \Rightarrow f_\infty = a_0$
- falls $m > 0$: $\quad \forall k > m: a_k = 0$

$$\Rightarrow f_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

$$\Rightarrow f_\infty\left(\tfrac{1}{z}\right) = z^m \sum_{k=0}^{m} a_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} z^k$$

Haben also:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(\mathbb{CP}^1) = \begin{cases} 0 & , m < 0 \\ \mathbb{C} & , m = 0 \\ \underbrace{\mathbb{C}[x]_{\leq m}}_{\text{Polynome von höchstem Grad } m} & , m > 0 \end{cases}$$

$\square$

A11) $\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$

definiert merom. Fkt auf $T := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$

ZZ: (i) $\wp$ hat Pol der Ordnung 2 bei $z = 0 + \Lambda_\tau$

(ii) $\wp$ hat mind. 1 Nst auf T.

zu (i): Laurentreihenentwicklung bei $z=0$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

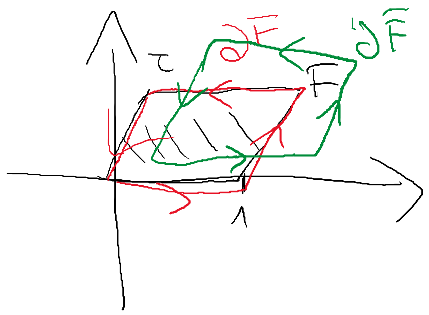
Pol von Ordnung 2 bei 0

Weil $\wp$ doppelt-periodisch mit Gitter $\Lambda_\tau$ ist hat $\wp$ an jedem Gitterpkt $z = 0 + \Lambda_\tau$ einen Pol von Ord. 2.

zu (ii): Aus Laurentreihenentw. folgt, dass das Residuum von $\wp$ bei 0 verschwindet.

Sei $F := \{ s + t\tau \mid s,t \in [0,1] \}$

Skizze:




Fundamentalbereich

$F' = \{ s + t\tau \mid s,t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \}$

Null- und Polstellen zählendes Integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F'} \frac{\wp'}{\wp} = \underbrace{N}_{\text{Nst. mit Vielf.}} - \underbrace{P}_{\text{Pole mit Ord.}} = \operatorname{res}_{1+\tau} \wp = 0$$

$\Rightarrow N - 2 = 0$

$\Rightarrow \wp$ hat entweder 2 einfache oder eine 2-fache

Mst. auf T.

$\square$