

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

4. Blatt – Abgabe 12.11, Übung 13.11

Aufgabe 12: Bestimme die Verzweigungspunkte von

$$f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Hinweis: Es handelt sich hierbei um die *Joukowski Transformation*. Der unten abgebildete SageMath-Code plottet die Bilder von Kreisen unter dieser Transformation. Wer will, kann damit herumspielen und erklären, warum diese Transformation eine Rolle im Flugzeugbau spielen könnte.

Aufgabe 13: Zeige: Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Hausdorffräume, $x_0 \in X$ und $y_0 := f(x_0)$, so ist

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha]$$

injektiv.

Aufgabe 14: Betrachte $X := \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$ und $Y := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, sowie

$$p : X \rightarrow Y, \quad z \mapsto \sin(z).$$

- i) Zeige, dass p eine holomorphe Überlagerung ist.
- ii) Betrachte dann die Kurven $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow Y$, mit $\alpha(t) = 1 - e^{2\pi it}$ und $\beta(t) = -1 + e^{2\pi it}$. Bestimme die Endpunkte der Liftungen von $\alpha \cdot \beta$ und $\beta \cdot \alpha$ jeweils zum Startpunkt 0 und folgere, dass $\pi_1(Y, 0)$ nicht abelsch ist.

Aufgabe 15: Sei $p : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Überlagerung Riemannscher Flächen. Sei $\varphi : X \rightarrow X$ ein Homöomorphismus, so dass $p \circ \varphi = p$ (also eine sogenannte *Decktransformation*). Zeige, dass φ dann automatisch schon biholomorph ist.

SageMath-Code zu Aufgabe 12:

```
1  r = 1.10
2  x0 = -0.1
3  y0 = 0.08
4  var('t')
5
6  def kreisx(t):
7  return (x0 + r*cos(2*pi*t))
8
9  def kreisy(t):
10 return (y0 + r*sin(2*pi*t))
11
12 def jouko(x, y):
13 return (x + x/(x^2 + y^2), y - y/(x^2 + y^2))
14
15 parametric_plot(jouko(kreisx(t), kreisy(t)), (t, 0, 1))
```