

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

8. Blatt – Abgabe 10.12, Übung 11.12

Aufgabe 25: Sei X eine Riemannsche Fläche und $z : U \rightarrow U'$ eine Karte um p . Zeige, dass für das maximale Ideal $m_p \triangleleft \mathcal{E}_p$ der bei $p \in X$ verschwindenden C^∞ -Funktionen gilt:

$$m_p^2 = \left\{ \varphi \in m_p \mid \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p \varphi = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p \varphi \right\}.$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde folgendes Lemma gezeigt:

Lemma. Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig um 0, sowie $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ eine C^∞ -Funktion mit $f(0) = 0$, dann existieren C^∞ -Funktionen $f_j : V \rightarrow \mathbb{C}$ für $j = 1, 2$, so dass

$$f(x + iy) = x \cdot f_1(x + iy) + y \cdot f_2(x + iy).$$

Aufgabe 26: Betrachte die holomorphe 1-Form $\frac{dz}{1+z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Zeige, dass diese eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\pm i\}$ hat. Wie schreibt man diese in der üblichen Karte für \mathbb{CP}^1 bei ∞ ?

Aufgabe 27: Ist $f : X \rightarrow Y$ holomorph, dann hat man für offenes $V \subset Y$ den pull-back:

$$f^* : \mathcal{E}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(f^{-1}(V)), \quad \varphi \mapsto f^*\varphi := \varphi \circ f.$$

i) Zeige, dass man in folgender Weise ein f^* für holomorphe 1-Formen hat:

Ist $\omega \in \Omega^1(V)$ und $z : W \rightarrow W'$ eine Karte für Y mit $W \subset V$, so schreibe $\omega|_W = \varphi(z) dz$ und setze

$$f^*(\omega|_W) := f^*(\varphi(z)) d(f^*z).$$

Wie ist das zu lesen und warum ist das unabhängig von der Wahl der Karte? Hat man letzteres gesehen, folgt, dass man damit $f^*\omega \in \Omega^1(f^{-1}(V))$ wohldefiniert erhalten hat.

ii) Sei $f : X \rightarrow Y$ holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen und $\omega \in \Omega^1(V)$ eine homomorphe 1-Form auf einer offenen Teilmenge $V \subset Y$. Zeige, dass für eine stückweise C^1 -Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \subset f^{-1}(V)$ gilt:

$$\int_{\gamma} f^* \omega = \int_{f \circ \gamma} \omega$$

iii) Sei X eine Riemannsche Fläche und γ ein geschlossener Weg in X , der weder Null- noch Polstelle einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ trifft. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} \frac{df}{f} \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

gilt.