Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt

Aufgabe 45:

i) Zeige, dass ein kanonische Divisor auf $\mathbb{CP}^1$ äquivalent zu

$$K = -2 \cdot \infty$$

ist (was heißt das eigentlich?).

ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf $\mathbb{CP}^1$ ein Hauptdivisor ist.
Hinweis: Man kann dafür z.B. Riemann-Roch verwenden.

Aufgabe 46: Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Zeige:

i) Die Garbe $\mathcal{O}_D$ ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).

ii) $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ (als $\mathcal{O}$-Modulgarben) $\Leftrightarrow$ $D \sim 0$[1]

Aufgabe 47: Zeige:

i) Die Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)$ aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.

ii) Für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{CP}^1$ gilt $P \sim Q$ als Divisoren.

iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form $m \cdot \infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.

iv) Ist D ein beliebiger Divisor, dann existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$.

Aufgabe 48:

i) Zeige, dass die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \mathrm{Div}(\mathbb{CP}^1) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^1)$$

definiert.

ii) Zeige, dass jedes holomorphe Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{CP}^1$ einen von 0 verschiedenen meromorphen Schnitt besitzt und folgere daraus, dass es einen Divisor D gibt mit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D.$$ [2]

iii) Folgere:[3]

$$\mathrm{Pic}(X) \;\cong\; \mathrm{Div}(X)/\,\mathrm{Prin}(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 49: Eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt *rational*, wenn es zwei verschiedene Punkte $P \neq Q$ in X gibt, so dass $P \sim Q$ als Divisoren. Zeige, dass X genau dann rational ist, wenn $X \cong \mathbb{CP}^1$.

[1] Expertenaufgabe: Man muss sich vorher überlegen, was es für zwei $\mathcal{O}$-Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$ und damit ein $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$, man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene $U \subset X$.

[2] Riemann-Roch

[3] Prin bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.