A2.1) $f: X \to Y$ hol., X, Y kpkt. RF

$S \subseteq X$ Verzwpkte, $S' := f(S)$

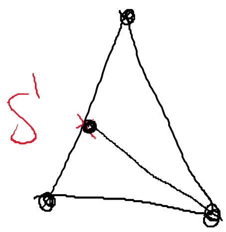
$f|_{X \setminus f^{-1}(S)}: X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S'$ unverzw. ÜL, mit N Blättr

(i) zz: Es ex Triang. von X und Y, s.d. Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten, Flächen auf Flächen abg.

Bew: Sei T_Y beliebige Triang von Y mit der Anforderung, dass alle Pkte in S' Ecken dieser Triang. sind. Möglich, denn wir $\# S' < \infty$ und wir können endl. Menge an Pkten immer zu Ecken hinzufügen

Wähle T_Y außerdem so fein, dass kein Kanteninnenpunkt in S' liegt.

Bsp:



Bemerkung: $f|_{X\setminus f^{-1}(S)}: X\setminus f^{-1}(S) \to Y\setminus S'$ unverzw. ÜL, d.h.
$\forall y\in Y\setminus S'\ \exists U_y\subseteq Y: f^{-1}(U_y) = \coprod_{i=1}^{m} V_i$
Liegt ein Simplex also vollst. im nichtverzweigten Bereich, kann dieser mit solchen Umgebungen überdeckt werden und die Hebung existiert eindt.

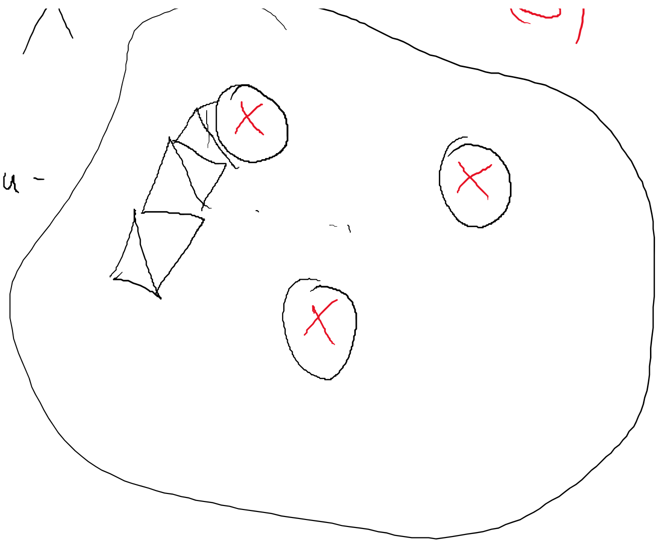
Für jede Ecke $e\in E(Y\setminus S')$ existieren genau m unterschiedliche Urbilder $(\tilde{e}_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ in X mit $f(\tilde{e}_i)=e\ \forall i=1,\dots,m$.
Für jede Kante $k\in K(Y\setminus S)$ und jedes Dreieck $\Delta\in F(Y\setminus S)$ gilt: das Urbild $f^{-1}(k)$ zerfällt in genau m disjunkte Kanten in X und analog für $f^{-1}(\Delta)$ m disj. Dreiecke

Konstruktion von T_X:

Definiere $T_{X\setminus S} := \{$Urbilder aller Simpl. in $T_{Y\setminus S}\}$
$= \{$Urbilder aller Simpl. in T_Y, die keine Ecke in S' haben$\}$

Skizze:

Kleine Triangu-lierung von $X \setminus S$!



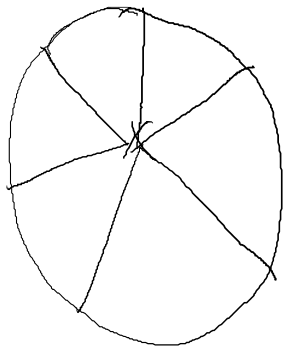
Lokal um $p \in f^{-1}(S)$:

Sei $q = f(p) \in S'$. Es ex. Kartengebiete $U \ni p$, $V \ni q$ mit Koord. z auf U und w auf V, s.d.

$$f(z) = w = z^k, \quad k \geq 2 \text{ (Verzw.-Ordnung bei } p\text{)}$$

in diesen Karten

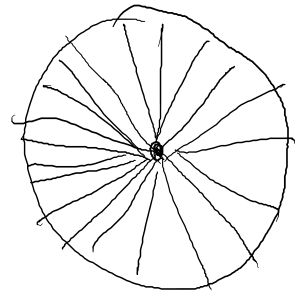
Sei $\bar{D} \subseteq V$ geschlossene Kreisscheibe mit $q \in D$ so klein, dass $\bar{D} \cap S' = \{q\}$ und so klein, dass $\bar{D}$ die Vereinigung Vereinigung ganzer Dreiecke aus T_Y ist, genauer:
unterteile $\bar{D}$ in r Keile durch Auswahl von r Strahlen vom Zentrum q zu Punkten auf ∂D, sodass die Strahlen Kanten aus T_Y sind:



Hebung unter $z \mapsto z^k$:

- $f^{-1}(\partial D)$ is wieder Kreis um p
- jeder Keil in $\bar{D}$ hebt sich zu k Keilen

Alle Keile füllen $f^{-1}(\partial D)$



Zusammensetzen:

Für alle $p \in f^{-1}(S)$ wähle also U_p um p so, dass $f(U_p) \cap S' = \{f(p)\}$ und T_Y auf $f(U_p)$ radial mit Zentrum q als Ecke aller Dreiecke ist.

Hebe diese Triang. von $f(U_p)$ auf U_p zurück und erhalte Triang. von U_p

Auf $X \setminus \bigcup_{p \in S} U_p$ benutze $T_{X \setminus S}$ als Triang (Urbilder der Simpl. in $X \setminus S'$)

$\Rightarrow$ Erhalten Triangulierung $\mathcal{T}$ auf X mit geforderten Eig.

(ii) ZZ: $F(X) = m \cdot F(Y)$, $K(X) = m \cdot K(Y)$,

$$E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \# f^{-1}(S')$$

Beweis: Jedes Dreieck $\Delta \subseteq Y$ liegt

- entweder komplett in $Y \setminus S'$ $\rightsquigarrow$ m Urbilder
- oder hat eine Ecke in S', dann hat jedes Dreieck um den den Pkt in $f^{-1}(S)$ trotzdem m Urbilder (Korollar 3.5), d.h. die k die wir oben gesehen haben und noch $m-k$ weitere an anderer Stelle (andere Verzw.pkte oder auch reguläre Pkte)

(Sieht man beispweise an der vorherigen Aufgabe)

Insgesamt: $F(X) = m \cdot F(Y)$

und analog: $K(X) = m \cdot K(Y)$

Nun die Ecken: Jede Ecke in $Y \setminus S'$ hat genau m Urbilder $\Rightarrow$ $E(X \setminus f^{-1}(S)) = m \cdot E(Y \setminus S)$

Also: $E(X) = E(X \setminus f^{-1}(S)) + E(f^{-1}(S)) = mE(Y \setminus S') + \# f^{-1}(S')$

$\square$