Blatt 10

Donnerstag, 4. Dezember 2025 15:13

A32) $\mathcal{F}$ Prägarbe auf X, $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ Proj. vom Etalen Raum

$\mathcal{G} : U \mapsto \{ \sigma : U \to |\mathcal{F}| \text{ stetig} \mid \pi \circ \sigma = id_U \}$

(i) ZZ: $\mathcal{G}$ def. Garbe

Bew: Prägarbe: Restriktionen sind einfach Einschränkungen von stetigen Abb.

Garbe: Separiertheit:

$U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $s \in \mathcal{G}(U)$ mit $\forall i \in I: s|_{U_i} = 0$

Sei $p \in U$ bel. Dann ex. $i_0 \in I$ mit $p \in U_{i_0}$

$s(p) = s|_{U_{i_0}}(p) = 0 \in \mathcal{F}_p$

$\Rightarrow s = 0 \in \mathcal{G}(U)$

Verkleben: $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ mit $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$

Def. $s \in \mathcal{G}(U)$ durch:

Für $p \in U$ bel. ex. $i_0 \in I$ mit $p \in U_{i_0}$

$s(p) := s_{i_0}(p)$

Wohldef weil $s_i|_{U_{ij}} = s_j|_{U_{ij}}$

Stetigkeit & $\pi \circ s = id$ klar.

$\square$

(ii) ZZ: $\exists$ kan. Iso $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ für alle $p \in X$

Bew:

Konstruiere $\phi : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$.

Sei $[s]_p \in \mathcal{F}_p$ mit $s \in \mathcal{F}(U)$, $p \in U$.

Def. $\sigma_s : U \to |\mathcal{F}|$ durch $\sigma_s(p) = [s]_p$

$\pi \circ \sigma_s = id_U$ klar

σ stetig?

$[V, f] \subseteq |\mathcal{F}|$ basisoffene Menge, d.h. $V \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{F}(V)$ und $[V,f] = \{ \gamma \in |\mathcal{F}| \mid \gamma \in \mathcal{F}_p \wedge \gamma = [f]_p \}$

$\sigma_s^{-1}([V,f]) = \{ p \in U \cap V \mid [s]_p = [f]_p \}$

$= \bigcup_{\substack{W \subseteq U \cap V \text{ offen} \\ s|_W = f|_W}} W$

Setze nun: $\phi([s]_p) = [\sigma_s]_p \in \mathcal{G}_p$

Wohldef: Für anderen Repr. $\tilde{s}$ ex. $V \subseteq U$ mit $p \in V$ und $s|_V = \tilde{s}|_V \Rightarrow \sigma_s|_V = \sigma_{\tilde{s}}|_V$

$\Rightarrow [\sigma_s]_p = [\sigma_{\tilde{s}}]_p$

Surj.: Sei $[\sigma]_p \in \mathcal{G}_p$ beliebig.

Also $\sigma : U \to |\mathcal{F}|$ stetig mit $\pi \circ \sigma = id_U$.

Für $\sigma(p)$ ex $[W, f]$ mit $\sigma(p) \in [W, f]$

Da σ stetig ex. $V \subseteq U \cap W$ mit $p \in V$ s.d.

$\sigma(V) \subseteq [W, f]$. Für $x \in V$ ist $\sigma(x) \in [W, f]$

Für $\sigma(p)$ ist $[W,f]$ mit $\sigma(p) \in [W,f]$

Da σ stetig ex. $V \subseteq U \cap W$ mit $p \in V$ s.d.
$\sigma(V) \subseteq [W,f]$. Für $x \in V$ ist $\sigma(x) \in [W,f]$
also insb. $\sigma(x) = [f]_x \Rightarrow \sigma|_V = \sigma_f|_V$

$$\Rightarrow \phi([f]_p) = [\sigma_f]_p = [\sigma]_p$$

inj: Seien $[s]_p, [\tilde{s}]_p \in \mathcal{F}_p$ mit

$$\phi([s]_p) = \phi([\tilde{s}]_p)$$

Dann ex off. U von p mit

$$\sigma_s|_U = \sigma_{\tilde{s}}|_U$$

D.h. $\forall p \in U: \sigma_s(p) = [s]_p = [\tilde{s}]_p = \sigma_{\tilde{s}}(p)$

$\Rightarrow \phi$ Iso

Was heißt hier kanonisch?
Die Konstruktion braucht nur $s \mapsto \sigma_s$ und ist somit mit den Einschränkungen kompatibel, d.h.
$s \in \mathcal{F}(U)$, $V \subseteq U$
$$s|_V = \sigma_{s|_V} = \sigma_s|_V.$$

$\square$

A33) X kpt RF $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ endl. ÜD
z.z.: $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \dfrac{\ker(\delta: \check{C}^1_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^2_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F}))}{\mathrm{im}(\delta: \check{C}^0_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^1_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F}))}$,

wobei $\check{C}^r_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$

Bew:

$$\mathrm{im}(\delta: \check{C}^0_{alt} \to \check{C}^1_{alt}) = \{(g_{ij})_{\substack{i<j \\ ij \in I}} \mid g_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij}) \wedge g_{ij} = f_j - f_i|_{U_{ij}}\}$$
$$\downarrow \Phi_0$$
$$\mathrm{im}(\delta: \check{C}^0 \to \check{C}^1)$$

mit $\Phi_0((g_{ij})_{i<j}) := (\tilde{g}_{ij})_{i,j}$ mit

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ij} & , i<j \\ 0 & , i=j \\ -g_{ji} & , i<j \end{cases}$$

$(\tilde{g}_{ij}) \in \mathrm{im}(\delta: \check{C}^0 \to \check{C}^1)$?

Für bel. $(g_{ij}) \in$ gilt $g_{ij} = f_j - f_i|_{U_{ij}}$
also • $g_{ij} = -g_{ji}$
• $g_{ii} = 0$
$\Rightarrow (\tilde{g}_{ij}) \in \mathrm{im}\,\delta$ und damit Φ_0 wohldef.

Φ_0 inj?
$\Phi((g_{ij})) = (\tilde{g}_{ij}) = 0$, d.h. $g_{ij} = 0$ für $i<j$
$\Rightarrow (g_{ij})_{i<j} = 0$

Φ_0 surj? Sei $(\tilde{g}_{ij})_{i,j \in I} \in \mathrm{im}(\delta: \check{C}^0 \to \check{C}^1)$

- -

Φ_0 surj? Sei $(\tilde g_{ij})_{i,j\in I} \in \operatorname{im}(\delta : \check C^0 \to \check C^1)$ bel.. Dann def.

$(g_{ij})_{i<j}$ durch $g_{ij} = \tilde g_{ij}$

Dann $\Phi_0((g_{ij})) = (\tilde{\tilde g}_{ij})_{ij}$ mit

$$\tilde{\tilde g}_{ij} = \begin{cases} g_{ij} = \tilde g_{ij} & i<j \\ 0 = \tilde g_{ij} & i=j \\ -g_{ji} = -\tilde g_{ji} = \tilde g_{ij}, & i>j \end{cases}$$

$\Rightarrow (\tilde{\tilde g}_{ij}) = (\tilde g_{ij})$

$\Rightarrow \Phi_0$ Iso

Nun zu $\ker(\delta : \check C^1_{alt} \to \check C^2_{alt}) = \{ (g_{ij})_{i<j} \mid \delta(g_{ij}) = (h_{ijk})_{i<j<k} = 0$ mit $h_{ijk} = g_{jk} - g_{ik} + g_{ij}|_{U_{ijk}} \}$

$$\big\downarrow \Phi_1$$

$\ker(\delta : \check C^1 \to \check C^2)$

$\Phi_1((g_{ij})) = (\tilde g_{ij})_{ij}$ mit

$$\tilde g_{ij} = \begin{cases} g_{ij} & i<j \\ 0 & i=j \\ -g_{ji} & i>j \end{cases}$$

Wohldef.?

$\delta(\tilde g_{ij}) = (\tilde h_{ijk})$ mit

$\tilde h_{ijk} = \tilde g_{jk} - \tilde g_{ik} + \tilde g_{ij}$

1. Fall: $i<j<k$

$\tilde h_{ijk} = h_{ijk} = 0$

2. Fall: $i>j$, $j<k$

$\tilde h_{ijk} = \tilde g_{jk} - \tilde g_{ik} + \tilde g_{ij}$

2.1. Fall $i<k$

$\tilde h_{ijk} = g_{jk} - g_{ik} - g_{ji} = -(g_{ik} - g_{jk} + g_{ji})$

$= -h_{jik} = 0$

2.2. Fall $i=k$

$\tilde h_{iji} = g_{ji} - \underset{0}{\tilde g_{ii}} - \underset{-\tilde g_{ij}}{g_{ji}} = 0$

2.3. Fall $i>k$

$\tilde h_{ijk} = \tilde g_{jk} - \tilde g_{ik} + \tilde g_{ij} = g_{jk} + g_{ki} - g_{ji}$

$= g_{ki} - g_{ij} + g_{jk}$

$= h_{kji} = 0$

$= g_{ki} - g_{ij} + g_{jk}$
$= h_{jki} = 0$

Alle anderen Fälle analog

$\Rightarrow \Phi_1$ wohldef

Φ_1 bijektiv analog zu Φ_0.

Damit:

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker(\delta : \check{C}^1 \to \check{C}^2)}{\operatorname{im}(\delta : \check{C}^0 \to \check{C}^1)}$$

$$\cong \frac{\ker(\delta : \check{C}^1_{alt} \to \check{C}^2_{alt})}{\operatorname{im}(\delta : \check{C}^0_{alt} \to \check{C}^1_{alt})}$$

$\square$

A34) $\mathcal{O}(m)(U) := \{ (f_0, f_\infty) \mid f_j : U \cap U_j \to \mathbb{C}$ holom. $(j \in \{0, \infty\})$ und
$\forall z \in U \cap U_0 \cap U_\infty : f_0(z) = z^m f_\infty(z) \}$

Z.z.: Für $\mathcal{U} = (U_0, U_\infty)$ gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m-1, & m \leq -2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew: Wir benutzen alt. Komplex

$\check{C}^0_{alt} = \check{C}^0 = \mathcal{O}(m)(U_0) \oplus \mathcal{O}(m)(U_\infty)$

$\check{C}^1_{alt} = \mathcal{O}(m)(U_0 \cap U_\infty)$

$\check{C}^2_{alt} = 0 \quad \rightsquigarrow \ker(\delta : \check{C}^1_{alt} \to \check{C}^2_{alt}) = \check{C}^1_{alt}$

$$\Rightarrow \check{H}^1 = \frac{\mathcal{O}(m)(U_0 \cap U_\infty)}{\delta(\mathcal{O}(m)(U_0) \oplus \mathcal{O}(m)(U_\infty))}$$

Sei $s := ((f_0, f_\infty), (g_0, g_\infty)) \in \mathcal{O}(m)(U_0) \oplus \mathcal{O}(m)(U_\infty)$

$\delta(s) = (g_0 - f_0|_{U_0 \cap U_\infty}, g_\infty - f_\infty|_{U_0 \cap U_\infty})$

$= (g_0 - z^{-m} f_\infty|_{U_0 \cap U_\infty}, z^m g_0 - f_\infty|_{U_0 \cap U_\infty})$

$f_\infty\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \rightsquigarrow f_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$

$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$

$\delta_0 : (g_0 - z^{-m} f_\infty)(z) = \sum^{\infty} b_k z^k - \sum^{\infty} a_k z^{-k-m}$

$$\mathrm{Sei:}\ \left(g_0 - z^{-m} f_\infty\right)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k-m}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{m} -a_{-k+m} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Für $m \geq -1$ können so beliebige Laurentreihen erhalten werden. Da $\mathcal{O}(m)(U_0 \cap U_\infty)$ beliebige Laurentreihen enthält folgt in diesem Fall $\dim \check{H}^1 = 0$

Für $m \leq -2$ verschwinden die Koeffizienten für $k = m+1, \dots, -1$. Also enthält $\check{H}^1$ Reihen die genau diese haben, also $\sum_{k=1}^{-m-1} c_k z^{-k}$

$\Rightarrow \dim \check{H}^1 = -m-1$ $\square$