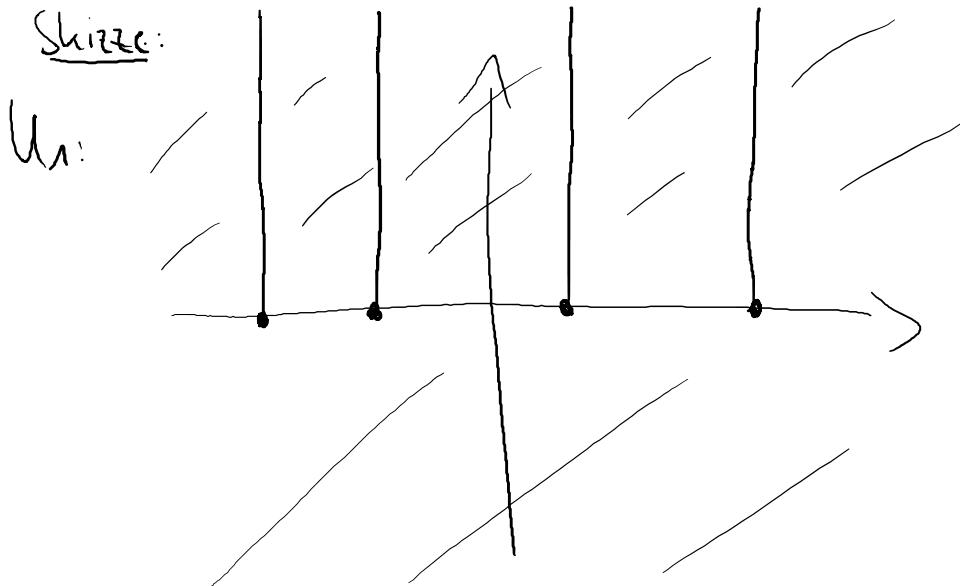


$$A3j) \quad \text{zu zeigen: } H^1(C \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$$

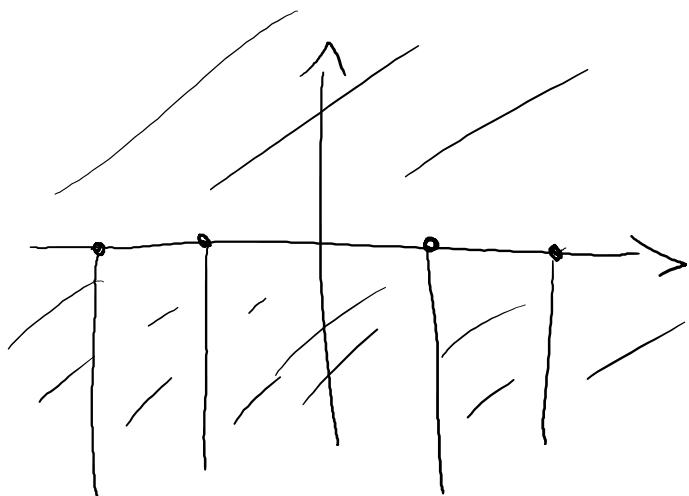
Bew: Finde $U = (U_1, U_2)$ mit einf. zsg. U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ hat genau ein zshgskrpt.

Skizze:

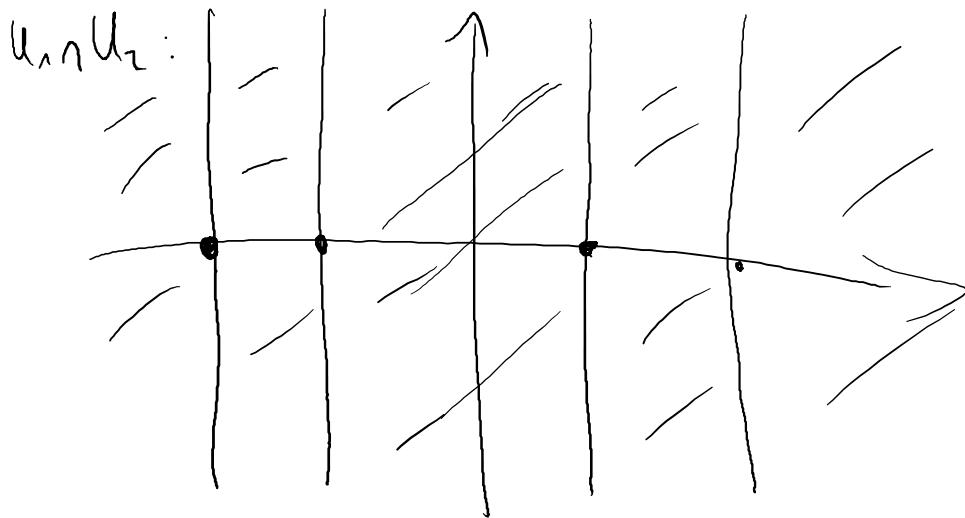
$U_1:$



$U_2:$



Da geschlitzte Ebenen einf. zsgd sind, sind es auch U_1 und U_2



$n+1$ Zshgsknpl.

Bely: $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ Leray-UD

Ber: U_1, U_2 einf. zshg. RF, also mit

$$\text{Satz 7.3} \quad \check{H}^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0, \quad i=1,2$$

Also mit Satz 7.11:

$$\check{H}^1(C(\{p_1, \dots, p_n\}), \mathbb{Z}) \cong \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

$$\check{C}_{\text{alt}}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{i \in \{1,2\}} \mathbb{Z}(\mathcal{U}_i) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$\check{C}_{\text{alt}}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{\substack{i,j \in \{1,2\} \\ i < j}} \mathbb{Z}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

$$= \mathbb{Z}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

$$\cong \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \check{C}_{\text{alt}}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) &= \prod_{\substack{i,j,k \in \{1,2\} \\ i < j < k}} \mathbb{Z}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{im } S: \check{C}_{\text{alt}}^0 &\rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^1 \\ (f_1, f_2) &\mapsto (g_{1,2}) \end{aligned}$$

mit $g_{11} = 0$, $g_{22} = 0$, $g_{12} = -g_{21} \equiv k \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow in $S \cong \mathbb{Z}$

$$\text{Ker}(S: \check{C}_{\text{all}}^1 \rightarrow \check{C}_{\text{all}}^2 = 0) = \check{C}_{\text{all}}^1 \cong \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$\Rightarrow H^1 \cong \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^n$$

136) X kpl RF

(1) $\underline{\text{zu}}$: $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}})$ (induz. von $\mathbb{Z} \hookrightarrow \underline{\mathbb{C}}$)

Bew: Sei $U = (U_1, \dots, U_N)$ molt. off. \overline{U} von X mit U_i einf. zsgjd

Dann U Leray- \overline{U} zu $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ und $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}})$

$$\Rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) = \check{H}^1(U, \mathbb{Z}) \text{ und } \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}) = \check{H}^1(U, \underline{\mathbb{C}})$$

$$\phi: \check{H}^1(U, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^1(U, \underline{\mathbb{C}})$$

$$[(c_{ij})_{i,j \in I}] \mapsto [(c_{ij})_{i,j \in I}]$$

Sei $[(c_{ij})_{i,j}] \in \ker \phi$, d.h.

$(c_{ij}) \in S(\check{C}^0(U, \underline{\mathbb{C}}))$, d.h.

$$\forall i, j \in I \exists a_i \in \underline{\mathbb{C}}(U_i), a_j \in \underline{\mathbb{C}}(U_j) : c_{ij} = a_j - a_i|_{U_{ij}}$$

Wenn wir $a_j - a_i \in \mathbb{Z}$ zeigen sind wir fertig.

Sei $i_0 \in I$ fest. Wähle nun $\overset{\text{für } i \in I}{\text{v}}$ Folge von Indizes

$$i_0 = i(0), i(1), \dots, i(r) = i$$

mit $U(i_k) \cap U(i_{k+1}) \neq \emptyset$ für alle $k = 0, \dots, r$

Auf jedem Schnitt $U(i_k) \cap U(i_{k+1})$ gilt

... - zwei Minuten ~ drei Minuten -- 10 Minuten

Auf jedem Schritt $(U_{i(k)}) \cap (U_{i(k+1)})$ gilt

$$c_{i(k)} \cap i(k+1) = a_{i(k+1)} - a_{i(k)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_i - a_{i_0} &= (a_{i(r)} - a_{i(r-1)}) + (a_{i(r-1)} - a_{i(r-2)}) + \\ &\quad \cdots + (a_{i(1)} - a_{i(0)}) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (a_{i(k+1)} - a_{i(k)}) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_{i,j} \in \mathbb{Z}$$

Für beliebige $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_j - a_i = (c_{j,i_0} + a_{i_0}) - (c_{i,i_0} - a_{i_0}) \\ &= \underbrace{c_{j,i_0}}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{c_{i,i_0}}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

(iii) zu: $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endl. v. z. freier \mathbb{Z} -Modul

Bew.: 1. $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endl. v. z.

2. $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ frei

zu 1: Sei $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_N)$ endl. off.- \bar{U} von X
mit U_i einf. zsgbd.

Dann \mathcal{U} Leray- \bar{U} und $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$

$$C_{\text{all}}(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \underline{\mathbb{Z}}(U_{ij}) \quad (N^2 \text{ Faktoren})$$

$\Rightarrow C_{\text{all}}^1$ hat Erz-system vom Länge $\leq N^2$

$\Rightarrow C_{\text{aff}}^1$ hat Erz-system von Länge $\leq N^2$

$\Rightarrow H^1$ hat Erz-system von Länge $\leq N^2$

$\pi: C^1 \rightarrow H^1, s \mapsto [s]$

(\mathbb{K} noethersch, also hat jeder endl. erz. \mathbb{K} -Modul nur endl. erz. Untermoduln)

zu 2: $H^1(X, \mathbb{K}) = \bigoplus_{t \leq N^2} \text{Tor}(H^1(X, \mathbb{K}))$

Es reicht zu $\text{Tor}(H^1) = 0$

Sei $x \in \text{Tor}(H^1)$, d.h. $\exists n > 0 : n \cdot x = 0$

Betrachte Abbildung (i):

$$0 = \phi(nx) = n \cdot \phi(x)$$

Da $H^1(X, \mathbb{K})$ end.-dim C-VR, damit Torsionsfrei, folgt $\phi(x) = 0$, also $x = 0$, weil ϕ inj.

Folge Beweis aus Forster (sollte mit der Bew. aus VL übereinstimmen evtl. andere Benennungen)

A37) $\Delta := \{z \mid |z| < 1\}$

Ex: $\forall g \in \mathcal{E}(\Delta^*) \exists f \in (\Delta^*) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$

Bew: Wollen Auschöpfungsargument, wie im Beweis aus der Vorlesung.

Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $n \in \mathbb{N} : 0 < r_n < 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$

und $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $n \in \mathbb{N} : 0 < R_n < R_n + r_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1$

OBdA $\forall n \in \mathbb{N}: r_n < R_n$ (sonst schnelle Folgenglieder ab)

Setze $X_n := \{z \in \mathbb{C} \mid r_n < |z| < R_n\}$.

Dann $\Delta^X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $\overline{X}_n \subseteq X_{n+1}$.

Wähle $\psi_n \in \mathcal{E}(\Delta^X)$, $\psi_n|_{X_n} = 1$, $\text{Supp } \psi_n \subseteq X_{n+1}$

Dann hat $g_n := \psi_n g$ kmp Träger in Δ^X

Erster Schritt aus Beweis im VL liefert $f_n \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$

mit $\frac{\partial f_n}{\partial z} = g_n$ auf X_n

Auf X_n gilt auch $\bar{\partial}(f_{n+1} - f_n) = 0$, d.h.

$h_n := f_{n+1} - f_n$ ist holomorph auf X_n (Ring)

$\Rightarrow h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n z^k$ in glm. Konv.

Wähle Laurent-Polyynom $P_n(z) = \sum_{k=N}^M a_k z^k$ mit

$$\|h_n - P_n\|_{X_n} \leq 2^{-n}$$

Definiert rekursiv $\tilde{f}_n := f_n + P_n$

Dann gilt: • $\bar{\partial} \tilde{f}_n = g$ auf X_n

• $\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n$ ist holom auf X_n

$$\bullet \|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{X_{n+1}} \leq 2^{-n}$$

Für jedes n konv. die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{n+k} - \tilde{f}_n)$ glm auf X_n .

Def. $f(z) = \lim \tilde{f}_n(z)$

$$\text{Def. } f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$$

$$\text{Dann } f \in \mathcal{E}(A^*) \text{, } \frac{\partial f}{\partial z} = g.$$