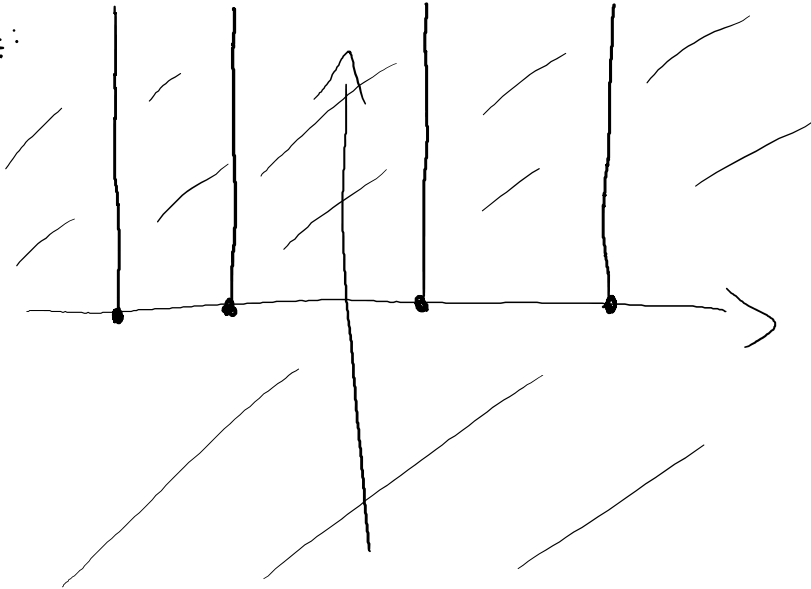


A3.5) zz: $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$

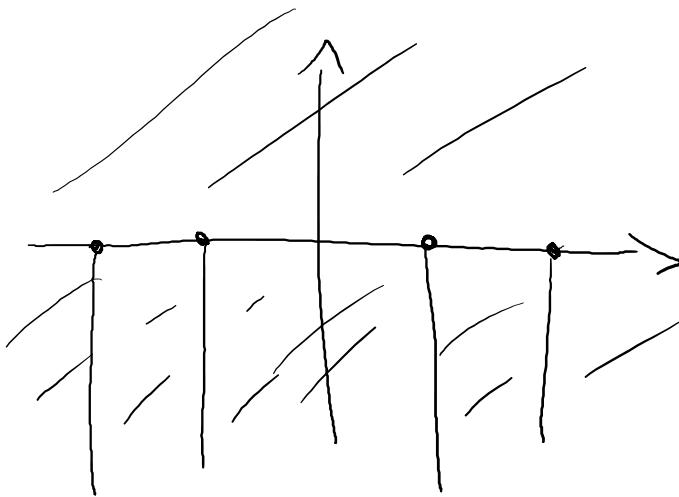
Bew: Finde $U = (U_1, U_2)$ mit einf. zgh. U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ hat genau ein Zshgskmpf.

Skizze:

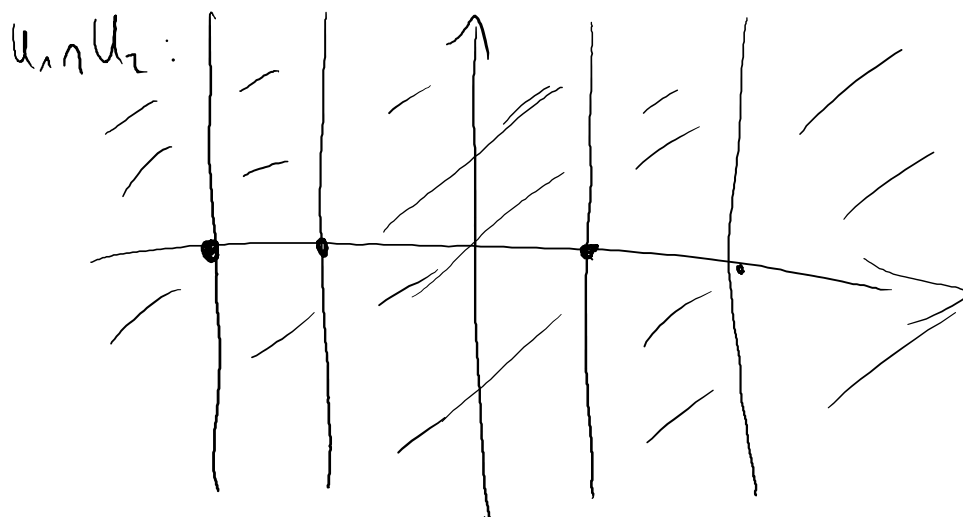
U_1 :



U_2 :



Da geschnittene Ebenen einf. zghd sind, sind es auch U_1 und U_2



$u+1$ Zshgskmpl.

Beh: $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ Leray-UD

Bew: U_1, U_2 einf. zshg. RF, also mit

Satz 7.9 $\check{H}^i(U_i, \mathbb{Z}) = 0, i=1,2$

Also mit Satz 7.11:

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

$$\check{C}_{\text{alt}}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{i \in \{1,2\}} \mathbb{Z}(U_i) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$\check{C}_{\text{alt}}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{\substack{i,j \in \{1,2\} \\ i < j}} \mathbb{Z}(U_i \cap U_j)$$

$$= \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)$$

$$\cong \mathbb{Z}^{u+1}$$

$$\check{C}_{\text{alt}}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{\substack{i,j,k \in \{1,2\} \\ i < j < k}} \mathbb{Z}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

$$= 0$$

im S : $\check{C}_{\text{alt}}^0 \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^1$

$$(f_1, f_2) \mapsto (g_{ij})$$

mit $g_{11} = 0$, $g_{22} = 0$, $g_{12} = -g_{21} \equiv k \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow in $S \cong \mathbb{Z}$

$$\text{Ker}(S: \check{C}_{\text{alt}}^1 \rightarrow \check{C}_{\text{alt}}^2 = 0) = \check{C}_{\text{alt}}^1 \cong \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$\Rightarrow H^1 \cong \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$$

136) X komp. RF

$$(1) \pm \mathbb{Z}: \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \hookrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \quad (\text{induz. von } \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C})$$

Bew: Sei $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_N)$ endl. off. $\bar{U}D$ von X mit U_i einfach zshg.

Dann \mathcal{U} Leray- $\bar{U}D$ zu $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ und $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}})$

$$\Rightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) \text{ und } \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$$

$$\phi: \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}})$$

$$[(c_{ij})_{i,j \in I}] \mapsto [(c_{ij})_{i,j \in I}]$$

Sei $[(c_{ij})_{i,j}] \in \ker \phi$, d.h.

$(c_{ij}) \in S(\check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{C}}))$, d.h.

$$\forall i,j \in I \exists a_i \in \underline{\mathbb{C}}(U_i), a_j \in \underline{\mathbb{C}}(U_j) : c_{ij} = a_j - a_i|_{U_{ij}}$$

Wenn wir $a_j - a_i \in \mathbb{Z}$ zeigen sind wir fertig.

Sei $i_0 \in I$ fest. Wähle nun ^{für $i \in I$} Folge von Indizes

$$i_0 = i(0), i(1), \dots, i(r) = i$$

mit $U(i(k)) \cap U(i(k+1)) \neq \emptyset$ für alle $k = 0, \dots, r$

Auf jedem Schritt $U(i(k)) \cap U(i(k+1))$ gilt

Auf jedem Schritt $U_i(u) \cap U_i(u_{i+1})$ gilt

$$c_i(u) + i(u_{i+1}) = a_i(u_{i+1}) - a_i(u)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_r - a_{i_0} &= (a_{i(r)} - a_{i(r-1)}) + (a_{i(r-1)} - a_{i(r-2)}) + \dots + (a_{i(1)} - a_{i(0)}) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (a_{i(k+1)} - a_{i(k)}) \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_{i_0} \in \mathcal{H}$$

Für beliebige $i, j \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_j - a_i = (c_{ji_0} + a_{i_0}) - (c_{ii_0} - a_{i_0}) \\ &= \underbrace{c_{ji_0}}_{\in \mathcal{H}} - \underbrace{c_{ii_0}}_{\in \mathcal{H}} \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

□

(iii) $\mathbb{Z}\mathcal{H}$: $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ endl. erz. freier \mathbb{Z} -Modul

Bew.: 1. $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ endl. erz.

2. $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ frei

zu 1.: Sei $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_N)$ endl. off. \bar{U} von X mit U_i einf. zshgd.

Dann \mathcal{U} Leray- \bar{U} und $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$

$$C_{\text{alt}}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \coprod_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{Z}(U_{ij}) \quad (N^2 \text{ Faktoren})$$

$$\Rightarrow C_{\text{alt}}^1 \text{ hat Erz-system von Länge } \leq N^2$$

$\Rightarrow C^1_{\text{alt}}$ hat Erz-System von Länge $\leq N^2$

$\Rightarrow H^1$ hat Erz-System von Länge $\leq N^2$

$$\pi: C^1 \rightarrow H^1, s \mapsto [s]$$

(\mathbb{K} noethersch, also hat jeder endl. erz. \mathbb{K} -Modul nur endl. erz. Untermoduln)

zu 2: $H^1(x, \mathbb{K}) = \bigoplus_{i \in N^2} \mathbb{K}^i \oplus \text{Tor}(H^1(x, \mathbb{K}))$

Es reicht $\text{Tor}(H^1) = 0$

Sei $x \in \text{Tor}(H^1)$, d.h. $\exists n > 0: n \cdot x = 0$

Betrachte Abbildung (i):

$$0 = \phi(nx) = n \phi(x)$$

Da $H^1(x, \mathbb{K})$ endl.-dim \mathbb{K} -VR, damit Torsionsfrei, folgt $\phi(x) = 0$, also $x = 0$, weil ϕ inj.

↓ Folge Beweis aus Forster (sollte mit der Bew. aus VL übereinstimmen evtl. andere Bezeichnungen)

A37) $\Delta := \{z \mid |z| < 1\}$

zz: $\forall g \in \mathcal{E}(\Delta^*) \exists f \in (\Delta^*) : \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$

Bew: Wollen Ausschöpfungsargument, wie im Beweis aus der Vorlesung.

Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < r_n < r_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$

und $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < R_n < R_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1$

obdA $\forall n \in \mathbb{N}: r_n < R_n$ (sonst schneide Folgenglieder ab)

Setze $X_n := \{z \in \mathbb{C} \mid r_n < |z| < R_n\}$.

Dann $\Delta^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ und $\overline{X_n} \subseteq X_{n+1}$.

Wähle $\psi_n \in \mathcal{E}_c(\Delta^*)$, $\psi_n|_{X_n} = 1$, $\text{supp } \psi_n \subseteq X_{n+1}$

Dann hat $g_n := \psi_n g$ komp. Träger in Δ^*

Erster Schritt aus Beweis in VL liefert $f_n \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$
mit $\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = g_n$ auf X_n

Auf X_n gilt auch $\bar{\partial}(f_{n+1} - f_n) = 0$, d.h.

$h_n := f_{n+1} - f_n$ ist holomorph auf X_n (Riem.)

$\leadsto h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ in glm. Konv.

Wähle Laurent-Polynom $P_n(z) = \sum_{k=-N}^M a_k z^k$ mit

$$\|h_n - P_n\|_{X_n} \leq 2^{-n}$$

Definiere rekursiv $\tilde{f}_1 := f_1$, $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P_n$

Dann gilt:

- $\bar{\partial} \tilde{f}_n = g$ auf X_n

- $\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n$ ist holom auf X_n

- $\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{X_{n+1}} \leq 2^{-n}$

Für jedes n konv. die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$
glm auf X_n .

Def. $f(z) = \lim \tilde{f}_n(z)$

Def. $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$

Dann $f \in \mathcal{E}(\Delta^*)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.