

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt – Abgabe 28.01, Übung 29.01

Aufgabe 41: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X .¹ Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 42: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Hinweis: Variiere den Beweis zu Satz 8.3.

Bemerkung: Da letzte Woche eine Vorlesung entfallen ist, hängen wir leicht hinterher. Deshalb sind die nächsten beiden Aufgaben erst mit der Vorlesung am Freitag lösbar. Man kann dann auch Aufgabe 42 mit der langen exakten Kohomologiesequenz lösen.

Aufgabe 43: Ziel dieser Aufgabe ist $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$ (und damit auch $\text{Pic}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z}$, vgl. Bemerkung Blatt 12) zu zeigen. Wir gehen folgendermaßen vor:

i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Sequenz von Garben auf \mathbb{CP}^1 exakt ist:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz: $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$

iii) Zeige schließlich: $\check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$.

Dafür betrachte die *Mayer-Vietoris-Sequenz* für die offene Überdeckung (U_0, U_∞) von \mathbb{CP}^1 :

$$\dots \longrightarrow \check{H}^{q-1}(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^q(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \dots$$

Diese ist eine lange exakte Kohomologiesequenz². Außerdem gilt³ $\check{H}^r(U, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ für $r \geq 1$ und $U \cong \mathbb{C}$.

Aufgabe 44: Zeige, dass der kanonische Divisor auf \mathbb{CP}^1 äquivalent zu

$$K = -2 \cdot \infty$$

ist (was heißt das eigentlich?).

¹Eine solche heißt exakt, wenn sie halmweise exakt ist, d.h. $\forall p \in X : 0 \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{H}_p \rightarrow 0$ ist exakt.

²Das ist eine sehr bekannte Tatsache, welche wir an dieser Stelle nicht zeigen werden.

³Da wir nie mit \check{H}^r für $r \geq 2$ gearbeitet haben, sei diese Aussage auch ohne Beweis gegeben.