

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt – Abgabe 04.02, Übung 05.02

Aufgabe 45: Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X . Zeige:

- i) Die Garbe \mathcal{O}_D ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).
- ii) $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ (als \mathcal{O} -Modulgarben) $\Leftrightarrow D \sim 0$.

Hinweis: Die Rückrichtung folgt schnell mit der Bemerkung unter 10.5. Für die Hinrichtung muss man sich vorher überlegen, was es für zwei \mathcal{O} -Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$ und damit ein $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$, man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene $U \subset X$, also auch auf Kartengebiete. Die Behauptung verlangt dann nach einem meromorphen g mit $(g) = D$ bzw. f mit $(f) = -D$.

Aufgabe 46: Zeige:

- i) Die Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)$ aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.
- ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf \mathbb{CP}^1 ein Hauptdivisor ist und folgere daraus, dass für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{CP}^1$ als Divisoren $P \sim Q$ gilt.

Hinweis: Man kann dafür z.B. Riemann-Roch verwenden.

- iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form $m \cdot \infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.
- iv) Ist D ein beliebiger Divisor, dann existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$.

Hinweis: Dafür muss man sehen, dass $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m) \cong \mathcal{O}_E$ für $E = m \cdot \infty$ ist.

Aufgabe 47:

- i) Zeige, dass jedes holomorphe Geradenbündel \mathcal{L} auf \mathbb{CP}^1 einen von 0 verschiedenen globalen meromorphen Schnitt besitzt und folgere daraus, dass es einen Divisor D gibt mit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D.^1$$

- ii) Die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \text{Div}(\mathbb{CP}^1) \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{CP}^1).$$

Wir wollen nun folgern, dass²

$$\text{Pic}(\mathbb{CP}^1) \cong \text{Div}(\mathbb{CP}^1) / \text{Prin}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z}$$

gilt.

Hinweis: Die Abbildung nach \mathbb{Z} ist natürlich induziert von der Gradabbildung für Divisoren.

¹Riemann-Roch

²Prin bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.