Blatt 9

Thursday, November 27, 2025 12:06 PM

A28) $f: X \to \mathbb{CP}^1$ holom, nicht-konst., X kpt RF

zz: $\forall c \in \mathbb{CP}^1$: c wird von f gleich oft ang. (mit Vielf.)

Bew: Für $c \neq \infty$:

$$\omega := \frac{df}{f-c} \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$$

ist holom. außer in Polstellen von f bzw. Nullstellen von $f-c$ (c-Stellen von f)

Ist $p \in X$ k-fache Nst. von $f-c$ dann gilt in Umg. von p (mit Karte z)

$f(z) = (z-p)^k \cdot g(z)$, g holom. $g(p) \neq 0$

$df = d(f-c)$

$$\Rightarrow \frac{df}{f-c} = \frac{d\left((z-p)^k g(z)\right)}{(z-p)^k g(z)}$$

$$= \frac{k(z-p)^{k-1} g(z)}{(z-p)^k g(z)} dz + \frac{(z-p)^k g'(z)}{(z-p)^k g(z)} dz$$

$$= \frac{k}{z-p} dz + \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}_p f = k$

Ist $p \in X$ k-facher Pol von f, dann $\operatorname{Res}_p(\omega) = -k$ (analog)

Da X kpt gilt $\sum_{p \in X} \operatorname{Res}_p(\omega) = 0$

$\Rightarrow$ mit Vielf. gezählt wird c genauso oft von f angenommen wie ∞.

Da $c \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$ beliebig, wird jeder Wert in $\mathbb{CP}^1$ genauso oft ang wie ∞

$\square$

A29) $T = \mathbb{C}/\Lambda$, $f \in \mathcal{M}(T)$

zz: $\sum_{p \in T} \nu_p(f) \cdot p = 0 \in T$

Bew: Fasse f als doppelt-periodische Fkt

Bew: Fasse f als doppelt-periodische Fkt

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ auf. Sei F der Fundamentalbereich

Lokal um eine Null- bzw. Polstelle $p \in F$

gilt $f(z) = (z-p)^{\nu_p(f)} g(z)$, $g(p) \neq 0$, g holom.

$$\omega = \frac{z f'(z)}{f(z)} = \frac{z \nu_p(f) (z-p)^{\nu_p(f)-1} g(z)}{(z-p)^{\nu_p(f)} g(z)} + \frac{z (z-p)^{\nu_p(f)} g'(z)}{(z-p)^{\nu_p(f)} g(z)}$$

$$= \frac{z \nu_p(f)}{z-p} + h(z) \quad , h \text{ holom bei } p.$$

$\Rightarrow \mathrm{Res}_p(\omega) = p \cdot \nu_p(f)$

OBdA ∂F enthält weder Pol- noch Nst-stellen von f

(sonst Verschiebe F geeignet)

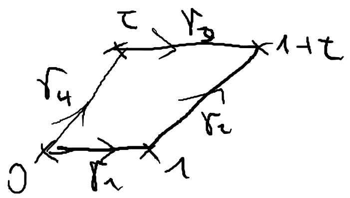
$$\sum_{p \in F} \mathrm{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \omega = \sum_{p \in F} p \nu_p(f).$$

ω nicht dopp-period!

$$\omega(z+\lambda) = (z+\lambda) \frac{f'(z+\lambda)}{f(z+\lambda)} dz = (z+\lambda) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \omega(z) + \lambda \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Parametrisiere ∂F:



$\gamma_1: t \mapsto t \quad , t \in [0,1]$

$\gamma_2: t \mapsto 1 + \tau t$

$\gamma_3: t \mapsto 1 + \tau - t$

$\gamma_4: t \mapsto \tau - \tau t$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 t \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 (\tau + t) \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \tau \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt + \int_0^1 t \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_3} \omega = -\tau \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt = -\tau \int_{f \circ \gamma_1} \frac{dt}{t} \in \tau \cdot 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\int \omega = \int^1 (1+\tau t) \frac{f'(1+\tau t)}{f(1+\tau t)} d(1+\tau t) = \int_0^1 (1+\tau t) \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} \tau dt = \tau \int_0^1 \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} dt + \int_0^1 \tau^2 t \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} dt$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 (1+\tau t) \frac{f'(1+\tau t)}{f(1+\tau t)} \, d(1+\tau t) = \int_0^1 (1+\tau t) \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} \tau \, dt = \tau \int_0^1 \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} dt + \int_0^1 \tau^2 t \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} dt$$

$$\int_{\gamma_4} \omega = \int_0^1 \tau t \, \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} \, d(\tau t) = \int_0^1 \tau^2 t \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_4} \omega = \tau \int_0^1 \frac{f'(\tau t)}{f(\tau t)} dt = \tau \int_{f \circ \gamma_4} \frac{dt}{t} \in \tau \cdot 2\pi i \, \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \omega =: \lambda \in \tau \mathbb{Z} \subseteq \Lambda$$

Also folgt $\sum\limits_{p \in F} p \cdot \nu_p(f) = \lambda \underset{\text{analog}}{\in} \Lambda$

Jeder Pkt. $[p] \in T$ hat einen Repräsentanten $p \in F$, d.h.

$$\sum_{[p] \in T} [p] \, \nu_{[p]}(f) = \Big[\sum_{p \in F} p \, \nu_p(f) \Big] = [\lambda] = [0]$$

$$\Rightarrow \sum_{p \in T} p \, \nu_p(f) = 0 \in T$$

A30) $\mathfrak{U}$ off. Überdeckung von X, $\mathcal{F}$ Garbe ab. Gruppen auf X.

<u>z.z.</u>: $\delta \circ \delta : \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ is Null-Morph.

<u>Bew:</u> $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, $f \in \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, d.h. $f = (f_i)_{i \in I}$ mit $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$.

$$\delta f = g = (g_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{mit} \quad g_{ij} = f_j|_{U_{ij}} - f_i|_{U_{ij}} \in \mathcal{F}(U_{ij})$$

$$\delta g = h = (h_{ijk})_{i,j,k \in I} \text{ mit}$$

$$h_{ijk} = g_{jk}|_{U_{ijk}} - g_{ik}|_{U_{ijk}} + g_{ij}|_{U_{ijk}} \quad (\in \mathcal{F}(U_{ijk}))$$

$$= f_k|_{U_{ijk}} - f_j|_{U_{ijk}} - (f_k|_{U_{ijk}} - f_i|_{U_{ijk}}) + f_j|_{U_{ijk}} - f_i|_{U_{ijk}}$$

$$= f_k|_{U_{ijk}} - f_k|_{U_{ijk}} - f_j|_{U_{ijk}} + f_j|_{U_{ijk}} + f_i|_{U_{ijk}} - f_i|_{U_{ijk}}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \delta\circ\delta(f) = 0$ $\square$

A31) $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ Verfeinerung

zz: $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ inj.

Bew: $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$, $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$

$\mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \tau : J \to I$ mit $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$

$\Rightarrow \psi : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$

$(f_{ab}) \mapsto (g_{cd})$

mit $g_{cd} = f_{\tau(c)\tau(d)}|_{V_{cd}}$

zz: $\psi_\tau[(f_{ab})] = 0 \Rightarrow [(f_{ab})] = 0$

$$\begin{array}{c} \psi_\tau[(f_{ab})] \\ \parallel \\ [\psi_\tau(f_{ab})] \\ \parallel \\ [(f_{\tau(c)\tau(d)}|_{V_c\cap V_d})] = 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \exists \underset{\in C^0(\mathcal{V},\mathcal{F})}{(g_c)}$ mit $f_{\tau(c)\tau(d)}|_{V_c\cap V_d} = \overbrace{g_d - g_c}^{\delta(g_c)}|_{V_c\cap V_d}$

Auf $V_c \cap V_d \cap U_a$ ist

$f_{\tau(c)\tau(d)} \underset{\substack{\uparrow \\ f\in \operatorname{im}\delta}}{=} f_{\tau(c),a} + f_{a,\tau(d)} = f_{a,\tau(d)} - f_{a,\tau(c)}$

$\Rightarrow g_d - f_{a,\tau(d)}|_{U_a\cap V_c\cap V_d} = g_c - f_{a\tau(c)}|_{U_a\cap V_c\cap V_d}$

Betrachte nun off. ÜD $\bigcup_{c\in J}(U_a \cap V_c)$ von U_a.

Dann $\exists h_a \in \mathcal{F}(U_a) : h_a|_{U_a\cap V_c} = g_c - f_{a,\tau(c)}|_{U_a\cap V_c}$

Auf $U_a \cap U_b \cap V_c$ gilt:

$f_{ab} = f_{a,\tau(c)} + f_{\tau(c),b} = f_{a\tau(c)} - g_c + g_c - f_{b\tau(c)}$

$= h_b - h_a \in \operatorname{Im} \delta$

$\Rightarrow [(f_{ab})] = 0 \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ $\square$

lokal, weil $\mathcal{F}$ Garbe global