Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

7. Blatt

Auf diesem Blatt sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen. Sind dann $S \subset X$ die Verzweigungspunkte und $S' = f(S)$, so ist $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \to Y \setminus S'$ eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei mit $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet.

Definition: Der *Verzweigungsindex* von f bei $x \in X$ ist definiert als

$$b_x(f) := \deg_x(f) - 1.$$

Der *totale Verzweigungsgrad* von f ist definiert als

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_x(f).$$

(Beachte, dass endlich viele Summanden ungleich Null sind.)

Riemann–Hurwitz–Formel: Ist $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen mit totalem Verzweigungsgrad $b(f)$, so gilt für die Geschlechter von X und Y:

$$g(X) = \frac{b(f)}{2} + m \cdot (g(Y) - 1) + 1.$$

Aufgabe 22: Wir wollen in dieser Aufgabe die Riemann-Hurwitz-Formel beweisen.

Dabei gehen wir wie folgt vor:

i) Es gibt Triangulierungen von X und Y, so dass f Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen der Triangulierung abbildet.

ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y), \quad K(X) = m \cdot K(Y), \quad E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#S.$$

iii) Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

iv) In obiger Situation gilt:

$$\chi(X) = m \cdot \chi(Y) - b(f).$$

v) Folgere nun die Riemann-Hurwitz-Formel.