Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

6. Blatt

Aufgabe 19:

i) Sei $\pi : \widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche und $f : Z \to X$ eine weitere normale(!) Überlagerung. Wie könnte man eine ,,Einschränkung"

$$\rho : \mathrm{Deck}(\widetilde{X}|X) \to \mathrm{Deck}(Z|X)$$

definieren? Was ist deren Kern?

ii) Nutze die vorhergehende Teilaufgabe, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz: *Ist X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es zu jedem surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_0) \to G$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) normale Überlagerung $f : Z \to X$ durch eine zusammenhängende Riemannsche Fläche Z, so dass $\mathrm{Deck}(Z|X) \cong G$.*

Aufgabe 20: Sei $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $X := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$ und

$$f : X \to Y, \quad z \mapsto (z^2 + 1)^2.$$

Zeige, dass f eine unverzweigte, 4-blättrige Überlagerung ist, die aber nicht normal ist, und dass

$$\mathrm{Deck}(X|Y) = \{\mathrm{id}, (z \mapsto -z)\}$$

gilt.

Aufgabe 21: Seien $\Lambda, \Gamma \subset \mathbb{C}$ vollständige Gitter und sei $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Gamma$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung mit $f(0 \bmod \Lambda) = 0 \bmod \Gamma$. Zeige, dass es ein $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ gibt, so dass $\alpha\Lambda \subset \Gamma$ und dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "z \mapsto \alpha z"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d] \\ \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Gamma \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeige ferner, dass f eine unverzweigte Überlagerung ist und

$$\mathrm{Deck}(f) \cong \Gamma/\alpha\Lambda$$

gilt.