Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien,
Sven Prüfer

Aufgaben zu Riemannschen Flächen

9. Blatt – Übung am Montag, 19.12.2016

Aufgabe 28: Zeigen Sie den Residuensatz auf $\mathbb{CP}^1$ mit Hilfe des Residuensatzes aus der Funktionentheorie.
Hinweis: Wählen Sie eine geeigneten Integrationsweg auf $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$.

Aufgabe 29: Sei $f : X \to \mathbb{CP}^1$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung, X kompakte Riemannsche Fläche. Wir wissen (aus der Überlagerungstheorie), dass jeder Wert $c \in \mathbb{CP}^1$ gleich oft angenommen wird (mit Vielfachheit). Wie folgt das auch aus dem Residuensatz?

Aufgabe 30: Sei X eine Riemannsche Fläche und γ ein geschlossener Weg in X, der weder Null- noch Polstelle einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ trifft. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma \frac{df}{f} \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

gilt.

Aufgabe 31: Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein vollständiges Gitter und $T = \mathbb{C}/\Gamma$ der entsprechende Torus. Zeigen Sie, dass für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(T)$ gilt, dass

$$\sum_{p \in T} \nu_p(f) \cdot p = 0 \in T$$

gilt. Hierbei ist $\nu_p(f)$ die Null-/Polstellenordnung[1] von f bei p als doppelt-periodische meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.
Beachte, dass $T = \mathbb{C}/\Gamma$ mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Addition eine abelsche Gruppe ist. Zudem scheint die meromorphe 1-Form

$$\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)}\, dz$$

ganz hilfreich zu sein – dabei ist f als doppelt-periodische, meromorphe Funktion zu lesen, wenn von $f'(z)$ die Rede ist.

[1] Beachten Sie den Unterschied zur Definition der Ordnung einer holomorphen Abbildung $g : X \to Y$ (§3), bei der wir zur Definition Karten h für X und k für Y gewählt haben, so dass $h(p) = 0$ und $k(f(p)) = 0$. Damit ist $\mathrm{ord}_p(f) \geq 1$. Im Gegensatz dazu ist $\nu_p(f) = 0$, wenn f dort keine Null-/Polstelle hat. Man könnte das auch so ausdrücken, dass wir hier auf $Y = \mathbb{CP}^1$ im Gegensatz zur Wahl einer Karte k mit $k(f(p)) = 0$ immer eine der zwei Standardkarten auf $\mathbb{CP}^1$, also id auf $\mathbb{C}$ und $1/z$ auf $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$, verwenden.