

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}^n$$

Hinweis: Finde $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2 , so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

Aufgabe 36: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

- i) Die Abbildung

$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}),$$

induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

- ii)
- $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$
- ist ein endlich erzeugter freier
- \mathbb{Z}
- Modul.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ (Torsions-)frei ist.

Aufgabe 37: Sei $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ mit $0 < r \leq \infty$. Sei weiter \mathcal{H} die Garbe der harmonischen Funktionen auf Δ , d.h.

$$\mathcal{H}(U) = \{f \in \mathcal{E}(U) \mid \partial\bar{\partial}f = 0\}, \quad \text{für } U \subset \Delta \text{ offen.}$$

Zeige, dass $\check{H}^1(\Delta, \mathcal{H}) = 0$ gilt.**Aufgabe 38:** Sei $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ mit $U_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $U_2 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

- i) Zeige, dass
- \mathcal{U}
- eine Leray-Überdeckung für
- $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$
- ist.

- ii) Versuche damit
- $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$
- zu bestimmen.