

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt – Abgabe 04.02, Übung 05.02

Aufgabe 45: Zeige, dass der kanonische Divisor auf \mathbb{CP}^1 äquivalent zu

$$K = -2 \cdot \infty$$

ist (was heißt das eigentlich?).

Aufgabe 46: Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X . Zeige:

- i) Die Garbe \mathcal{O}_D ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).
- ii) $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ (als \mathcal{O} -Modulgarben) $\Leftrightarrow D \sim 0$.

Hinweis: Die Rückrichtung folgt schnell mit der Bemerkung unter 10.5. Für die Hinrichtung muss man sich vorher überlegen, was es für zwei \mathcal{O} -Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$ und damit ein $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$, man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene $U \subset X$, also auch auf Kartengebiete. Die Behauptung verlangt dann nach einem meromorphen g mit $(g) = D$ bzw. f mit $(f) = -D$.

Aufgabe 47: Zeige:

- i) Die Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$ aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.

Hinweis: Zeige $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m) \cong \mathcal{O}_{m \cdot \infty}$, wobei $m \cdot \infty$ als Divisor zu verstehen ist.

- ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf \mathbb{CP}^1 ein Hauptdivisor ist und folgere daraus, dass für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{CP}^1$ als Divisoren $P \sim Q$ gilt.

Hinweis: Man kann dafür z.B. Riemann-Roch verwenden.

- iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form $m \cdot \infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Damit gilt: $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$

Aufgabe 48: Sei X wieder eine kompakte Riemannsche Fläche.

- i) Zeige, dass die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

einen Gruppenhomomorphismus¹

$$\Phi : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X).$$

definiert. Diese Zuordnung ist sogar surjektiv, d.h. zu jedem holomorphen Geradenbündel \mathcal{L} auf X gibt es einen Divisor D mit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D.$$

Das ist für eine Übungsaufgabe zu aufwendig zu zeigen. Wer will, kann das nachlesen in §29 im Buch *Lectures on Riemann Surfaces* von Otto Forster.

- ii) Zeige damit, dass²

$$\text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X)/\text{Div}_H(X)$$

gilt und folgere

$$\text{Pic}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z},$$

wobei der Isomorphismus von der Gradabbildung für Divisoren induziert wird.

¹Die Gruppenstruktur auf Pic ist durch das Tensorprodukt gegeben.

² Div_H bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.