

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

3. Blatt – Abgabe 05.11, Übung 06.11

Auf diesem Blatt bezeichnet $\Lambda_\tau := \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$ stets das Gitter für $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

Aufgabe 8: Seien $\tau \in \mathbb{H}$ gegeben und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Zeige: Wenn $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ gilt, dann sind die beiden Tori \mathbb{C}/Λ_τ und $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ isomorph.

Hinweis: Überlege zuerst, warum $\tau' \in \mathbb{H}$ gilt.

Aufgabe 9: Sei $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf einem topologischen Raum X .

- Begründe, dass α zu jedem $x \in X$ einen Gruppenhomomorphismus $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ auf den Halmen induziert.
- Zeige: Ist $U \subset X$ offen und α_x für alle $x \in U$ injektiv, so ist auch $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ injektiv.

Aufgabe 10: Auf \mathbb{CP}^1 betrachte die beiden offenen Mengen

$$U_0 := \mathbb{C} \quad \text{und} \quad U_\infty := \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}.$$

- Sei $m \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass durch die Zuordnung

$U \mapsto \{(f_0, f_\infty) \mid \forall j \in \{0, \infty\} : f_j : U \cap U_j \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph und } \forall z \in U \cap U_0 \cap U_\infty : f_0(z) = z^m f_\infty(z)\}$
 eine Garbe von \mathbb{C} -Vektorräumen auf \mathbb{CP}^1 definiert ist. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$.

- Bestimme die *globalen Schnitte* $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(\mathbb{CP}^1)$ dieser Garbe in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Betrachte die Potenzreihenentwicklungen der holomorphen Funktionen $f_0(z)$ bzw. $f_\infty(\frac{1}{z})$.

Aufgabe 11: Wir betrachten in dieser Aufgabe die Weierstraß \wp -Funktion, welche wie folgt definiert ist:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Man kann mit Mitteln der Funktionentheorie zeigen, dass dies eine meromorphe Funktion auf dem Torus $T := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ definiert (nicht gefordert).

Zeige: \wp hat einen Pol der Ordnung 2 bei $z = 0 + \Lambda_\tau \in T$ und muss mindestens eine Nullstelle besitzen.¹

Hinweis: Das Berechnen der Nullstellen ist nicht trivial:²

Theorem. The zeros of $\wp(z, \tau)$ ($\tau \in \mathfrak{H}$, $z \in \mathbb{C}$) are given by

$$z = m + \frac{1}{2} + n\tau \pm \left(\frac{\log(5 + 2\sqrt{6})}{2\pi i} + 144\pi i \sqrt{6} \int_{\tau}^{i\infty} (t - \tau) \frac{\Delta(t)}{E_6(t)^{3/2}} dt \right)$$

($m, n \in \mathbb{Z}$), where $E_6(t)$ and $\Delta(t)$ ($t \in \mathfrak{H}$) denote the normalized Eisenstein series of weight 6 and unique normalized cusp form of weight 12 on $SL_2(\mathbb{Z})$, respectively, and the integral is to be taken over the vertical line $t = \tau + i\mathbb{R}_+$ in \mathfrak{H} .

¹Betrachte dazu \wp als doppelt-periodische Funktion auf \mathbb{C} zum Gitter Λ_τ auf, d.h. $\forall \lambda \in \Lambda_\tau : \wp(z + \lambda) = \wp(z)$, und benutze ein geeignetes Pol-/Nullstellen zählendes Integral.

²vgl: M. Eichler, D. Zagier, *On the Zeros of the Weierstraß \wp -function*, Math. Ann. 258, 399–407 (1982)