Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

**Prof. Dr. Marco Hien**
**M. Sc. Thomas Bargen**

# Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

1. Blatt

**Aufgabe 1:** Wir betrachten die beiden folgenden Abbildungen auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$h : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}, \quad (x,y,z) \mapsto \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z},$$

$$k : S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{C}, \quad (x,y,z) \mapsto \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z}.$$

Zeige, dass diese beiden einen holomorphen Atlas auf $S^2$ ergeben.

**Aufgabe 2:** Sei $\pi : X \to Y$ eine stetige Abbildung von Hausdorffräumen, die ein lokaler Homöomorphismus ist, d.h. jedes $x \in X$ hat eine offene Umgebung $U \subset X$, so dass $\pi|_U : U \to \pi(U)$ ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge $\pi(U) \subset Y$ ist.

Beweise: Ist $Y$ Riemannsche Fläche, so erhält man dadurch eine eindeutige Struktur einer Riemannschen Fläche auf $X$.

**Aufgabe 3:** Für $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ betrachte das Gitter $\Lambda_\tau := \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$. Betrachte zu jedem dieser Gitter den wie in der Vorlesung konstruierten holomorphen Atlas von $S^1 \times S^1$.

Zeige, dass die Vereinigung der beiden Atlanten zu $\Lambda_i$ und $\Lambda_{1+i}$ keinen holomorphen Atlas auf $S^1 \times S^1$ ergibt.