

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

### 6. Blatt

#### Aufgabe 19:

- i) Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche und  $f : Z \rightarrow X$  eine weitere normale(!) Überlagerung. Wie könnte man eine „Einschränkung“

$$\rho : \text{Deck}(\tilde{X}|X) \rightarrow \text{Deck}(Z|X)$$

definieren? Was ist deren Kern?

- ii) Nutze die vorhergehende Teilaufgabe, um den folgenden Satz zu zeigen:

**Satz:** Ist  $X$  eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es zu jedem surjektiven Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  eine (bis auf Isomorphie eindeutige) normale Überlagerung  $f : Z \rightarrow X$  durch eine zusammenhängende Riemannsche Fläche  $Z$ , so dass  $\text{Deck}(Z|X) \cong G$ .

**Aufgabe 20:** Sei  $X := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$ ,  $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  und

$$f : X \rightarrow Y, \quad z \mapsto (z^2 + 1)^2.$$

Zeige, dass  $f$  eine unverzweigte, 4-blättrige Überlagerung ist, die aber nicht normal ist, und dass

$$\text{Deck}(X|Y) = \{\text{id}, -\text{id}\}$$

gilt.

*Hinweis:* Die Teilmengenbeziehung  $\{\text{id}, -\text{id}\} \subseteq \text{Deck}(X|Y)$  ist einfach zu zeigen. Die andere Teilmengenbeziehung ist schwieriger: Angenommen wir haben  $\phi \in \text{Deck}(X|Y)$ , d.h.  $\phi(z)^2 + 1 = \pm(z^2 + 1)$ . Der positive Fall liefert  $\phi \in \{\text{id}, -\text{id}\}$ .

Ab hier wird die Aufgabe sehr schwierig! Für den negativen Fall:  $\phi$  ist also das Quadrat einer Abbildung  $\psi : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , d.h.  $\phi$  ist der Lift von  $\psi$  unter der Überlagerung  $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^2$ . Jetzt betrachtet man die induzierten Abbildungen auf den Fundamentalgruppen. Man kann  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, z_0)$  direkt ausrechnen. Was macht  $p_*$  damit? Mit einer geschickt gewählten Schleife in  $X$  bekommen wir einen Widerspruch.

Dass die Überlagerung nicht normal ist, ist dafür wieder einfach zu zeigen.

**Aufgabe 21:** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Sind dann  $S \subset X$  die Verzweigungspunkte und  $S' = f(S)$ , so ist  $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \rightarrow Y \setminus S'$  eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei mit  $m \in \mathbb{N}$  bezeichnet. Zeige:

- i) Es gibt Triangulierungen von  $X$  und  $Y$ , so dass  $f$  Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen abbildet.
- ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y), \quad K(X) = m \cdot K(Y), \quad E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#S.$$