Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

**Prof. Dr. Marco Hien,**
**Sven Prüfer**

# Aufgaben zu Riemannschen Flächen

7. Blatt – Übung am Montag, 05.12.2016

Auf diesem Blatt sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen. Sind dann $S \subset X$ die Verzweigungspunkte und $S' = f(S)$, so ist $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \to Y \setminus S'$ eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei $m \in \mathbb{N}$.

**Definition:** *Der Verzweigungsindex von $f$ bei $x \in X$ ist definiert als $b_x(f) := \deg_x(f) - 1$. Der* **totale Verzweigungsgrad** *von $f$ ist definiert als*

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_x(f)$$

*(Beachte, dass endliche viele Summanden ungleich Null sind).*

**Riemann-Hurwitz-Formel:** *Ist $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen mit totalem Verzweigungsgrad $b(f)$, so gilt für die Geschlechter von $X$ und $Y$:*

$$g(X) = \frac{b(f)}{2} + m \cdot (g(Y) - 1) + 1 \; .$$

**Aufgabe 23:** Beweise die Riemann-Hurwitz-Formel.

Dabei kann man wie folgt vorgehen, indem man jeweils zeigt:

i) Es gibt Triangulierungen von $X$ und $Y$, so dass $f$ Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen der Triangulierung abbildet.

ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y) \; , \; K(X) = m \cdot K(Y) \text{ und } E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#S.$$

iii) Ist $X$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g$, so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g \; .$$

iv) In obiger Situation gilt:

$$\chi(X) = m \cdot \chi(Y) - b(f) \; .$$