Blatt 5

Wednesday, November 5, 2025 10:50 AM

A16) Y Mfkt, $y_0 \in Y$, $\alpha : [0,1] \to Y$ Weg mit
$\alpha(0) = y_0$ und $\alpha(1) = y \in Y$.

$$(U, [\alpha]) := \{ (z, [\alpha \cdot \gamma]) \mid z \in U, \gamma : [0,1] \to U \text{ mit } \gamma(0) = y, \gamma(1) = z \}$$

einf. zshgd. & offen

Wir definieren:

$W \subseteq \tilde{Y}$ offen $\Leftrightarrow \forall w \in W \; \exists (U, [\alpha])$ wie oben: $w \in (U, [\alpha]) \subseteq W$

univ. Überlagerung

Beh: Dadurch wird eine Topologie definiert

Bew: Vorab: $\tilde{Y} := \{ (y, [\alpha]) \mid y \in Y, [\alpha] \in \Pi(Y, y_0, y) \}$
mit $\Pi(Y, y_0, y) := \{ [\alpha] \mid \alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y \}$

1. $\emptyset, \tilde{Y}$ offen

$\emptyset$ klar

Da Y lokal wegzshgd gilt $\forall y \in Y \; \exists U_y \subseteq Y$ offen & wegzshgd, $y \in U_y$

$$\Rightarrow \tilde{Y} = \bigcup_{y \in Y} (U_y, [\alpha_y]) \quad (\alpha_y \text{ Weg von } y_0 \text{ zu } y)$$

2.) Seien $(W_i)_{i \in I}$ offene Mengen in $\tilde{Y}$. Dann

$$\forall i \in I : \; W_i = \bigcup_{j \in J_i} (U_j, [\alpha_j])$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} \Big(\bigcup_{j \in J_i} (U_j, [\alpha_j]) \Big)$$

$$= \bigcup_{j \in J} (U_j, [\alpha_j]),$$

wobei $J = \bigcup_{i \in I} J_i$

3.) Seien $W_1, W_2 \subseteq \tilde{Y}$ offen, d.h.

$$W_i = \bigcup_{j \in J_i} (U_j, [\alpha_j]), \quad i = 1,2$$

$$W_1 \cap W_2 = \Big(\bigcup_{j \in J_1} (U_j, [\alpha_j]) \Big) \cap \Big(\bigcup_{j \in J_2} (U_j, [\alpha_j]) \Big)$$

$$= \bigcup_{j \in J_1} (U_j, [\alpha_j]) \cap \bigcup_{k \in J_2} (U_k, [\alpha_k])$$

$$= \bigcup_{j \in J_1} \bigcup_{k \in J_2} \Big((U_j, [\alpha_j]) \cap (U_k, [\alpha_k]) \Big)$$

Es reicht also ~~zz~~: $(U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$ offen

dazu: sei $w = (z, [\delta]) \in (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$

Es reicht also zz: $(U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$ offen

dazu: sei $w = (z, [\delta]) \in (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$

Dann ex. in U_1 ein Weg γ_1 von $y_1 \in U_1$ nach z und in U_2 ein Weg γ_2 von $y_2 \in U_2$ nach z mit

$$[\delta] = [\alpha_1 \cdot \gamma_1] = [\alpha_2 \cdot \gamma_2]$$

Da Y Mflt $\exists W \subseteq Y$ offene & einf. zshgd Umg. von z.

Wollen zeigen, dass $(W, [\delta]) \subseteq (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$.

Sei $x \in W$ und σ Weg in W (also in U_1 und U_2) von z nach x. Dann

$$[\alpha_1 \cdot (\gamma_1 \cdot \sigma)] = [\alpha_2 \cdot (\gamma_2 \cdot \sigma)]$$

$$\Rightarrow (x, [\alpha_1 \cdot (\gamma_1 \cdot \sigma)]) \in (U_1, [\alpha_1]) \wedge (x, [\alpha_2 (\gamma_2 \cdot \sigma)]) \in (U_2, [\alpha_2])$$

$$\Rightarrow (W, [\delta]) \subseteq (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$$

$\square$

A17) $T := \mathbb{C}/\Lambda_z$ Torus

$f: T \to \mathbb{CP}^1$ gerade $\Leftrightarrow$ doppelt period. Fkt auf $\mathbb{C}$ gerade $(f(z) = f(-z))$

$f: T \to \mathbb{CP}^1$ ungerade $\Leftrightarrow$ —"— ungerade $(f(-z) = -f(z))$

(i) $$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_z \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

zz $\wp$ gerade, $\wp'$ ungerade

Bew:
$$\wp(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(-z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left(\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{(-\lambda)^2} \right)$$

Benennen um $\lambda \mapsto -\lambda$ (Vertauscht nur Reihenfolge der Summanden)

$$= \wp(z)$$

$$\wp'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \wp(z)$$

$$\Rightarrow \wp'(-z) = \frac{\partial}{\partial(-z)} \wp(-z) = -\frac{\partial}{\partial z} \wp(z) = -\wp'(z)$$

$\square$

(ii) zz: $f = f_{ev} + f_{odd}$ (f_{ev} gerade, f_{odd} ungerade)

Bew:

Setze $f_{ev}(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2}$, $f_{odd}(z) := \frac{f(z) - f(-z)}{2}$

gerade, ungerade

$$f_{ev}(z) + f_{odd}(z) = \frac{f(z) + f(-z) + f(z) - f(-z)}{-}$$

$$f_{ev}(z) + f_{odd}(z) = \frac{f(z)+f(-z)+f(z)-f(-z)}{2}$$
$$= f(z) \qquad \square$$

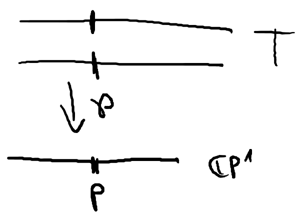
(ii) z.z. Für f gerade: $\exists R(z) \in \mathbb{C}(z): f(z) = R(\wp(z))$

<u>Bew:</u> $\wp: T \to \mathbb{C}P^1$ ist 2-blättrige verzweigte Überlagerung
($\wp$ eigentlich, weil T kpkt)

Verzweigungspkte:

$$\text{Also } \wp'\left(\tfrac{1}{2}\right) \overset{\wp' \text{ dopp period}}{=} \wp'\left(\tfrac{1}{2}-1\right) = \wp'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\wp'\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \wp'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

Analog für $\frac{\tau}{2}$ und $\frac{1+\tau}{2}$.
und aus A11 wissen wir, dass $\wp$ doppelten Pol bei 0 hat, d.h. doppelte ∞-Stelle
Da $\wp'$ merom Fkt. auf T mit 3-fachem Pol in 0, kann $\wp'$ keine weiteren Nst haben (Korollar 4.13)
Also sind $z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = \frac{\tau}{2}, z_3 = \frac{1+\tau}{2}, z_4 = 0$ die Verzweigungspkte. Setze $b_i := \wp(z_i)$ $(b_4 = \infty)$
$\mathbb{C}P^1$ hat also die 4 ausgez Pkt'e b_i, $i=1,\dots,4$ und über allen anderen Pkten liegen 2 Pkte auf dem Torus



Betrachte nun f gerade.
Für $z \in T$ gilt $f(-z)=f(z)$ und $\wp(-z)=\wp(z)$, d.h. f ist auf den Fasern von $\wp$ konst.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\wp"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "R"] & \mathbb{C}P^1 \end{tikzcd} \qquad z \mapsto w, \quad z \mapsto v \qquad f = R \circ \wp$$

Setze $R(w) := f(z)$ Wohldef?
$\wp^{-1}(\{w\}) = \{z, -z\}$, $f(z) = f(-z) = v$ ✓
Meromorph? Sei $w \in \mathbb{C}P^1 \setminus B$ beliebig. Dann
$\exists \overset{w}{\hat{U}} \subseteq \mathbb{C}P^1 \setminus B$: lok. Umkehrung $\wp_U^{-1}$ von $\wp$ auf U, $B = \{b_1, \dots, b_4\}$

$\exists \tilde{U} \subseteq \mathbb{CP}^1 \setminus B$: lok. Umkehrung p_u^{-1} von $\{b_1, \ldots, b_4\}$ p auf U

$\Rightarrow R(w) = R(p(z)) = f(z)$ Für $w \in B$ hebbare Singularität:

$\Rightarrow R \circ \cancel{p \circ p_u^{-1}} = \underbrace{f \circ p_u^{-1}}_{\text{merom}}$ $R(w) := f(z)$ ↖ $f(z)$ meromorph

$\Rightarrow R \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) = \mathbb{C}(z)$ (Satz 3.16)

iv) <u>zz:</u> $f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot S(\wp(z))$, $R, S \in \mathbb{C}(z)$

<u>Bew:</u>

$$f(z) = \underbrace{f_{ev}(z)}_{\text{gerade}} + \wp'(z) \cdot \underbrace{\frac{f(odd)}{\wp'(z)}}_{\text{gerade}}$$

$\Rightarrow \exists R, S \in \mathbb{C}(z)$:

$$f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot S(\wp(z))$$

$\square$

v) <u>zz:</u> $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2 \wp(z) - g_3$

$g_2 = 60 \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-4}$, $g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-6}$

<u>Bew:</u>

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$\left.\begin{array}{l}\wp(z) \text{ gerade} \\ \Rightarrow a_{2n+1} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{!}}{=} \frac{1}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_{2n} z^{2n} + \ldots$

$$a_{2n} \underset{\nwarrow}{=} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \bigg|_{z=0} \left(\sum_{\lambda} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right)$$

Cauchy-Integralformel

$$= \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ (2n+1) \cdot \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^{2n+2}} & , n \neq 0 \end{cases}$$

Also: $$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + O(z^6)$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + O(z^5)$$

$\wp'(z)^2 = 4$

$$\Rightarrow \quad \wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{2g_2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{4g_3}{7} + O(z)$$

$$-4\wp(z)^3 = -\frac{4}{z^6} - \frac{3g_2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{3g_3}{7} + O(z)$$

$$g_2\wp(z) = g_2\frac{1}{z^2} + O(z^2)$$

Also gilt:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) = \underbrace{-g_3 + O(z)}_{\text{holomorph auf } T}$$

$\overset{\text{Satz 3.7}}{\Rightarrow}$ konst

$$\Rightarrow \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -g_3 \qquad \square$$

A18) Beh: $\mathcal{M}(T) \cong \mathbb{C}(z)[w]/(w^2-4z^3+g_2z+g_3)$

Bew:

$$A := \mathbb{C}(z)[w]/(w^2-4z^3+g_2z+g_3)$$

$$\Big\downarrow \Phi$$

$$\mathcal{M}(T) = \{f: T \to \mathbb{CP}^1 \text{ hol}\} = \{R(\wp) + \wp' S(\wp) \mid R, S \in \mathbb{C}(z)\}$$

$$\Phi\left(\left[\sum_{i=0}^{n} f_i(z)\, w^i\right]\right) := \sum_{i=0}^{n} f_i(\wp) \cdot (\wp')^i$$

Wohldef?

(A17 ,,)

Wohldef?

(A17 v)

$$\phi(w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3) = \wp' - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 \overset{!}{=} 0$$

Insb. $(w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3) \subseteq \operatorname{Ker}\phi$

Betrachte $w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3 \in \underbrace{\mathbb{C}(z)}_{\text{Körper}}[w]$

Irreduzibel, denn sonst ex. $f \in \mathbb{C}(z)$ mit

$$f^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

Leitkoeff gerade ↑ ↑ Leitkoeff ungerade

↯

$\Rightarrow A$ Körper

ϕ surj: Sei $f \in \mathcal{M}(T)$, d.h. $f = R(\wp) + \wp' S(\wp)$ mit $R, S \in \mathbb{C}(z)$

$$\phi(R + wS) = R(\wp) + \wp' S(\wp) = f.$$

Damit ϕ surj. Ringhom zwischen Körpern $\Rightarrow \phi$ iso $\square$