Blatt 12

Monday, December 15, 2025 12:21 PM

A38) X top. Raum, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ off. ÜD,
$\mathcal{F}_i$ Garbe auf U_i,
$\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ mit $\phi_{ii} = id_{\mathcal{F}_i}$
und $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ auf U_{ijk}.

zz: $\exists$ Garbe $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$.

Bew: Sei $V \subseteq X$ offen. Dann für $V_i := V \cap U_i$
ist (V_i) off ÜD von V.
Def. $\mathcal{F}$ durch Zuordnung

$$V \mapsto \{(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i(V_i) \mid \forall i,j \in I : \phi_{ij}(s_i|_{V_{ij}}) = s_j|_{V_{ij}}\}$$

Was sind Restriktionen? Für $V' \subseteq V \subseteq X$:

$$S^V_{V'}((s_i)) = (s_i|_{V'_i})$$

Prägarbe dann klar

1. Separiertheit: $(V^{(k)})_{k\in K}$ off. ÜD von V.
Sei $s \in \mathcal{F}(V)$ geg. mit $s|_{V^{(k)}} = 0 \ \forall k \in K$.
Setze $V_i^{(k)} := (V^{(k)} \cap U_i)$. Dann ist $(V_i^{(k)})_k$
off. ÜD von V_i. Da $\mathcal{F}|_{V_i} \cong \mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_i$
Garbe, folgt $s_i = 0$

$\Rightarrow s = (s_i) = 0$

2. Verkleben. Sei $s_k \in \mathcal{F}(V_k)$ für alle $k \in K$ geg
mit $s_k|_{V^{(k\ell)}} = s_\ell|_{V^{(k\ell)}}$.
Für jedes $i \in I$ betrachte die i-te Komponente
$s_{k,i} \in \mathcal{F}(V_i^{(k)})$. Wissen

$s_{k,i}|_{V_i^{(k\ell)}} = s_{\ell,i}|_{V_i^{(k\ell)}}$

Da $\mathcal{F}_i$ Garbe ex. $s_i \in \mathcal{F}_i(V_i)$ mit
$s_i|_{V_i^{(k)}} = s_{k,i}$ für alle k.

Setze $s = (s_i)$. Dann

$$\phi_{ij}(s_i|_{V_{ij}^{(k)}}) = \phi_{ij}(s_{k,i}|_{V_{ij}^{(k)}}) \quad (\text{Def. } s_i)$$
$$= s_{k,j}|_{V_{ij}^{(k)}} \quad (\text{Def von } \phi_{ij})$$
$$= s_j|_{V_{ij}^{(k)}} \quad (\text{Def von } s_j)$$

Da Gleichheit auf allen Überlappungen $V_{ij}^{(k)}$ gilt und $\mathcal{F}_j$ Garbe ist muss $\phi_{ij}(s_i|_{V_{ij}}) = s_j|_{V_{ij}}$ gelten (Separiertheit von $\mathcal{F}_j$)

$\Rightarrow s = (s_i) \in \mathcal{F}(V)$

<u>Bleibt zz:</u> $\forall j \in I: \mathcal{F}|_{U_j} \cong \mathcal{F}_j$

Def $\psi_j : \mathcal{F}|_{U_j} \to \mathcal{F}_j$

durch $\psi_j(V): \mathcal{F}|_{U_j}(V) \to \mathcal{F}_j(V)$

$$(s_i)_{i\in I} \mapsto s_j$$

Def weiter $\psi_j^{-1}: \mathcal{F}_j \to \mathcal{F}|_{U_j}$

durch $\psi_j^{-1}(V): \mathcal{F}_j(V) \to \mathcal{F}|_{U_j}(V)$

$$s \mapsto (\phi_{ji}(s|_{U_{ij}}))_{i\in I}$$

<u>Beh:</u> ψ_j^{-1} Umkehrabb. von ψ

<u>Bew:</u> $(\psi_j \circ \psi_j^{-1})(\overset{\in \mathcal{F}_j(V)}{s}) = \psi_j((\phi_{ji}(s|_{U_{ij}}))_{i\in I})$

$$= \phi_{jj}(s|_{U_{jj}}) = s$$

$$(\psi_j^{-1} \circ \psi_j)(\overset{\in \mathcal{F}|_{U_j}(V)}{(s_i)_{i\in I}}) = \psi_j^{-1}(s_j)$$

$$= (\phi_{ji}(s_j|_{U_{ij}}))_{i\in I}$$

$$= (s_i)_{i\in I} \quad (\text{Def von } \mathcal{F}|_{U_i}(V))$$

$\square$

A33) Situation:
- X RF
- $\mathcal{O}$ Garbe hol. Fkt.
- $\mathcal{O}^*$ Garbe nirgends verschw. hol. Fkt.
- $\mathcal{L}$ holom Geradenbündel (= lokal freier $\mathcal{O}$-Modul von Rang 1)

Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ off. ÜD von X mit Trivialisierg.

$$\psi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}|_{U_i}$$

Def.: $g_{ij} := \psi_j|_{U_{ij}} \circ (\psi_i|_{U_{ij}})^{-1} (1) \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$

(i) ZZ: $\eta := (g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$ $(= \ker(\delta : C^1 \to C^2))$

Bew: $g_{ij} = \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \mathcal{O}|_{U_{ij}} \to \mathcal{O}|_{U_{ij}}$ ist Iso von $\mathcal{O}$-Modulgarben, jeder solcher ist einfach Multiplikation mit einer Einheit, also einfach Mult mit $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(O_{U_{ij}})$

$\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ $\mathcal{O}(U_{ij})$-lin
$\Rightarrow (\psi_j \circ \psi_i^{-1})(f) = f \cdot (\psi_j \circ \psi_i^{-1})(1) = f \cdot g_{ij}$

Also auf U_{ijk}:

$$\psi_k \circ \psi_i^{-1} = (\psi_k \circ \psi_j^{-1}) \circ (\psi_j \circ \psi_i^{-1})$$

$$\Rightarrow g_{ik} = g_{jk} \cdot g_{ij}$$

Also $\delta(g_{ij}) = (h_{ijk})$ mit

$$h_{ijk} = g_{jk} \cdot (g_{ik})^{-1} \cdot g_{ij} = 1$$

$\Rightarrow \delta(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$ $\square$

(ii) ZZ: $c(\mathcal{L}) := [\eta] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O})$ hängt nicht von gew. Trivial. ab.

Bew: Sei $(U_j', \psi_j')_{j \in J}$ andere Trivialisierung
Dann ex $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ gem. Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$
Also OBdA $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}$. (Auf Verf. nur Einschr. der Isos)
Dann ist $\psi_i' = h_i \cdot \psi_i$ mit $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$
$(\psi_i' \circ \psi_i^{-1} : \mathcal{O}(U_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}(U_i)$, also Mult mit Einheit$)$

$$\Rightarrow g_{ij}' = \psi_j' \circ (\psi_i')^{-1} (1) = h_j \, g_{ij} \, h_i^{-1}$$

$$\Rightarrow (g_{ij}')_{ij} = (h_j h_i^{-1})_{ij} \cdot (g_{ij})$$

mit $(h_j h_i^{-1}) = \delta(h_i)$

$\Rightarrow (g_{ij}')$ und (g_{ij}) unterscheiden sich nur durch Korand, also $[(g_{ij}')] = [(g_{ij})]$ $\square$

A40) $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ off. ÜD, $(g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$

gesucht: Geradenbündel $\mathcal{L}$ mit $c(\mathcal{L}) = [(g_{ij})]$

dazu: Kozykeleigenschaft garantiert

$$g_{ij} \, g_{jk} = g_{ik} \quad \text{auf } U_{ijk}$$

Auf jedem U_i sei $\mathcal{L}_i := \mathcal{O}|_{U_i}$

Auf U_{ij} definiere Iso

$$\varphi_{ij} : \mathcal{L}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{L}_j|_{U_{ij}}$$
$$f \longmapsto g_{ij} f$$

Warum sind das Isos?

g_{ij} holomorph und nirgends verschwindend

$\hookrightarrow (\varphi_{ij})^{-1}(f) = g_{ij}^{-1} \cdot f$

Also sind die φ_{ij} $\mathcal{O}(U_{ij})$-Modul-Isomorphismen.

Auf U_{ijk} gilt:

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}(f) = g_{jk}(g_{ij} \cdot f) = (g_{jk} g_{ij}) \cdot f$$
$$= g_{ik} \cdot f = \varphi_{ik}(f)$$

Wir haben:

- Garben $\mathcal{L}_i$ auf U_i
- Isos φ_{ij} mit $\varphi_{ii} = id$ und $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$

Verklebe zu Garbe $\mathcal{L}$ auf X mit $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{L}_i$ (A38)

Also gilt: $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{L}_i = \mathcal{O}|_{U_i}$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ lokal freie $\mathcal{O}$-Modulgarbe von Rang 1, also holom. Geradenbündel.

Trivialisierungen:

$$\psi_i : \left(\mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_i \Rightarrow \mathcal{O}|_{U_i} \right)$$

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \left(\mathcal{O}|_{U_{ij}} \to \mathcal{L}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{L}|_{U_{ij}} \to \mathcal{L}_j|_{U_{ij}} \to \mathcal{O}|_{U_{ij}} \right)$$

φ_{ij}

$\Rightarrow \psi_j \circ \psi_i^{-1}(1) = g_{ij}$

ψ_{ij}

$\Rightarrow \psi_j \circ \psi_i^{-1}(\lambda) = g_{ij}$

$\Rightarrow c(\mathcal{L}) = [(g_{ij})]$