

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

6. Blatt

Aufgabe 19:

- i) Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche und $f : Z \rightarrow X$ eine weitere normale(!) Überlagerung. Wie könnte man eine „Einschränkung“

$$\rho : \text{Deck}(\tilde{X}|X) \rightarrow \text{Deck}(Z|X)$$

definieren? Was ist deren Kern?

- ii) Nutze die vorhergehende Teilaufgabe, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz: Ist X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es zu jedem surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) normale Überlagerung $f : Z \rightarrow X$ durch eine zusammenhängende Riemannsche Fläche Z , so dass $\text{Deck}(Z|X) \cong G$.

Aufgabe 20: Sei $X := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$, $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und

$$f : X \rightarrow Y, \quad z \mapsto (z^2 + 1)^2.$$

Zeige, dass f eine unverzweigte, 4-blättrige Überlagerung ist, die aber nicht normal ist, und dass

$$\text{Deck}(X|Y) = \{\text{id}, (z \mapsto -z)\}$$

gilt.

Aufgabe 21: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Sind dann $S \subset X$ die Verzweigungspunkte und $S' = f(S)$, so ist $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \rightarrow Y \setminus S'$ eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei mit $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Zeige:

- i) Es gibt Triangulierungen von X und Y , so dass f Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen abbildet.
- ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y), \quad K(X) = m \cdot K(Y), \quad E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#S.$$

- iii) Ist X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g , so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$