

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

**Aufgabe 35:** Seien  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$$

*Hinweis:* Finde  $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$  mit einfach zusammenhängenden  $U_1, U_2$ , so dass  $U_1 \cap U_2$  genau  $n + 1$  Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

**Aufgabe 36:** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung

$$\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}),$$

induziert durch die Inklusion  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ , ist injektiv.

ii)  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$  ist ein endlich erzeugter freier  $\mathbb{Z}$ -Modul.

*Hinweis:* Zeige zuerst, dass  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$  endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$  (Torsions-)frei ist.

**Aufgabe 37:** Sei  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $\Delta^\times = \Delta \setminus \{0\}$ . In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es zu jeder  $C^\infty$ -Abbildung  $g \in \mathcal{E}(\Delta)$  eine Lösung  $f \in \mathcal{E}(\Delta)$  von

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

existiert. Variiere den Beweis so, dass die Behauptung auch für  $\Delta^\times$  gilt.

*Hinweis:* Dazu könnte man an einer entsprechenden Stelle Laurent-Polynome  $\sum_{k=-N}^M a_k z^k$  anstelle von herkömmlichen Polynomen verwenden.