Blatt 5

Wednesday, November 5, 2025 10:50 AM

A16) $Y$ Mfkt, $y_0 \in Y$, $\alpha : [0,1] \to Y$ Weg mit $\alpha(0) = y_0$ und $\alpha(1) = y \in Y$.

$(U, [\alpha]) := \{ (z, [\alpha \cdot \gamma]) \mid z \in U, \gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = y, \gamma(1) = z \}$

$U$: einf. zshgd. & offen

Wir definieren:

$W \subseteq \tilde{Y}$ offen $\Leftrightarrow \forall w \in W \ \exists (U, [\alpha])$ wie oben: $w \in (U, [\alpha]) \subseteq W$

$\tilde{Y}$: univ. Überlagerung

Beh: Dadurch wird eine Topologie definiert

Bew: Vorab: $\tilde{Y} = \{ (y, [\alpha]) \mid y \in Y, [\alpha] \in \pi(Y, y_0, y) \}$

mit $\pi(Y, y_0, y) = \{ [\alpha] \mid \alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y \}$

1. $\emptyset, \tilde{Y}$ offen

$\emptyset$ klar

Da $Y$ lokal wegzshgd gilt $\forall y \in Y \ \exists U_y \subseteq Y$ offen & wegzshgd, $y \in U_y$

$\Rightarrow \tilde{Y} = \bigcup_{y \in Y} (U_y, [\alpha_y])$ ($\alpha_y$ Weg von $y_0$ zu $y$)

2.) Seien $(W_i)_{i \in I}$ offene Mengen in $\tilde{Y}$. Dann

$\forall i \in I: W_i = \bigcup_{j \in J_i} (U_j, [\alpha_j])$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} \Big( \bigcup_{j \in J_i} (U_j, [\alpha_j]) \Big)$$

$$= \bigcup_{j \in J} (U_j, [\alpha_j]),$$

wobei $J = \bigcup_{i \in I} J_i$

3.) Seien $W_1, W_2 \subseteq \tilde{Y}$ offen, d.h.

$W_i = \bigcup_{j \in J_i} (U_j, [\alpha_j])$, $i = 1, 2$

$$W_1 \cap W_2 = \Big( \bigcup_{j \in J_1} (U_j, [\alpha_j]) \Big) \cap \Big( \bigcup_{j \in J_2} (U_j, [\alpha_j]) \Big)$$

$$= \bigcup_{j \in J_1} (U_j, [\alpha_j]) \cap \bigcup_{k \in J_2} (U_k, [\alpha_k])$$

$$= \bigcup_{j \in J_1} \bigcup_{k \in J_2} \Big( (U_j, [\alpha_j]) \cap (U_k, [\alpha_k]) \Big)$$

Es reicht also zz: $(U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$ offen

dazu: sei $w = (z, [\delta]) \in (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$

Es reicht also zz: $(U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$ offen

dazu: sei $w = (z, [\delta]) \in (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$

Dann ex. in $U_1$ ein Weg $\gamma_1$ von $y_1 \in U_1$ nach $z$ und in $U_2$ ein Weg $\gamma_2$ von $y_2 \in U_2$ nach $z$ mit

$[\delta] = [\alpha_1 \cdot \gamma_1] = [\alpha_2 \cdot \gamma_2]$

Da $Y$ lfklt $\exists W \subseteq Y$ offene & einf. zshgd. Umg. von $z$.

Wollen zeigen, dass $(W, [\delta]) \subseteq (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$.

Sei $x \in W$ und $\sigma$ Weg in $W$ (also in $U_1$ und $U_2$) von $z$ nach $x$. Dann

$[\alpha_1 \cdot (\gamma_1 \cdot \sigma)] = [\alpha_2 \cdot (\gamma_2 \cdot \sigma)]$

$\Rightarrow (x, [\alpha_1 \cdot (\gamma_1 \cdot \sigma)]) \in (U_1, [\alpha_1]) \wedge (x, [\alpha_2 (\gamma_2 \cdot \sigma)]) \in (U_2, [\alpha_2])$

$\Rightarrow (W, [\delta]) \subseteq (U_1, [\alpha_1]) \cap (U_2, [\alpha_2])$ $\square$

A17) $T := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ Torus

$f: T \to \mathbb{CP}^1$ gerade $\Leftrightarrow$ doppelt period. Fkt auf $\mathbb{C}$ gerade $(f(z) = f(-z))$

$f: T \to \mathbb{CP}^1$ ungerade $\Leftrightarrow$ -"- ungerade $(f(-z) = -f(z))$

(i) $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$

zz $\wp$ gerade, $\wp'$ ungerade

Bew:

$$\wp(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left( \frac{1}{(-z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \neq 0} \left( \frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{(-\lambda)^2} \right)$$

Benennen um $\lambda \mapsto -\lambda$ (vertauscht nur Reihenfolge der Summation)

$$= \wp(z)$$

$$\wp'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \wp(z)$$

$$\Rightarrow \wp'(-z) = \frac{\partial}{\partial(-z)} \wp(-z) = -\frac{\partial}{\partial z} \wp(z) = -\wp'(z)$$ $\square$

(ii) zz: $f = f_{ev} + f_{odd}$ ($f_{ev}$ gerade, $f_{odd}$ ungerade)

Bew:

Setze $f_{ev}(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2}$ (gerade), $f_{odd}(z) := \frac{f(z) - f(-z)}{2}$ (ungerade)

$f_{ev}(z) + f_{odd}(z) = \frac{f(z) + f(-z) + f(z) - f(-z)}{2}$

$$f_{ev}(z) + f_{odd}(z) = \frac{f(z)+f(-z)+f(z)-f(-z)}{2}$$
$$= f(z) \qquad \square$$

(iii) Für $f$ gerade: $\exists R(z) \in \mathbb{C}(z)$: $f(z) = R(\wp(z))$

Bew: $\wp: T \to \mathbb{CP}^1$ ist 2-blättrige verzweigte Überlagerung ($\wp$ eigentlich, weil $T$ kmpkt)

Verzweigungspkte:

$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ in $T$

Also $\wp'(\frac{1}{2}) = \wp'(\frac{1}{2}+1) = \wp'(-\frac{1}{2}) = -\wp'(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \wp'(\frac{1}{2}) = 0$

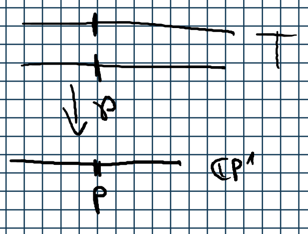
Analog für $\frac{\tau}{2}$ und $\frac{1+\tau}{2}$.

und aus A11 wissen wir, dass $\wp$ doppelten Pol bei $0$ hat, d.h. doppelte $\infty$-Stelle

Da $\wp'$ merom. Fkt. auf $T$ mit 3-fachem Pol in $0$, kann $\wp'$ keine weiteren Nst haben (Korollar 4.13)

Also sind $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{\tau}{2}$, $z_3 = \frac{1+\tau}{2}$, $z_4 = 0$ die Verzweigungspkte. Setze $b_i := \wp(z_i)$ ($b_4 = \infty$)

$\mathbb{CP}^1$ hat also die 4 ausgez. Pkte $b_i$, $i = 1, \dots, 4$ und über allen anderen Pkten liegen 2 Pkte auf dem Torus




Betrachte nun $f$ gerade

Für $z \in T$ gilt $f(z) = f(-z)$ und $\wp(z) = \wp(-z)$, d.h. $f$ ist auf den Fasern von $\wp$ konst.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\wp"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{CP}^1 \arrow[r, "R"] & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd} \qquad z \mapsto w, \quad z \mapsto v \qquad f = R \circ \wp$$

Setze $R(w) := f(z)$ Wohldef? ✓

$\wp^{-1}(\{w\}) = \{z, -z\}$, $f(z) = f(-z) = v$ ✓

Für $z \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}\}$ hebbare Singularität (mit $f(z)$ hebbar, weil $f$ insb. stetig)

Meromorph? Sei $w \in \mathbb{CP}^1 \setminus B$ beliebig. Dann

$\exists \tilde{U} \subseteq \mathbb{CP}^1 \setminus B$: lok. Umkehrung $\wp_U^{-1}$ von $\wp$ auf $U$ ($B = \{b_1, \dots, b_4\}$)

$\exists\, \hat{U}_w \subseteq \mathbb{CP}^1 \setminus B$ : lok. Umkehrung $\wp_u^{-1}$ von $\wp$ auf $U$ $\{b_1, \dots, b_4\}$

$\Rightarrow R(w) = R(\wp(z)) = f(z)$ Für $w \in B$ hebbare Singularität:

$\Rightarrow R \circ \cancel{\wp \circ \wp_u^{-1}} = \underbrace{f \circ \wp_u^{-1}}_{\text{merom}}$ $R(w) := f(z)$ ↖ $f(z)$ meromorph

$\Rightarrow R \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) = \mathbb{C}(z)$ (Satz 3.16)

iv) zz: $f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot S(\wp(z))$, $R, S \in \mathbb{C}(z)$

Bew:

$$f(z) = \underbrace{f_{ev}(z)}_{\text{gerade}} + \wp'(z) \cdot \underbrace{\frac{f(odd)}{\wp'(z)}}_{\text{gerade}}$$

$\Rightarrow \exists\, R, S \in \mathbb{C}(z)$:

$$f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot S(\wp(z))$$

$\square$

v) zz: $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\,\wp(z) - g_3$

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-6}$$

Bew:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$\left.\begin{array}{l} \wp(z) \text{ gerade} \\ \Rightarrow a_{2n+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\frac{1}{z^2} + a_0 + a_2 z^2 + \dots + a_{2n} z^{2n} + \dots$

$$a_{2n} \underset{\nearrow}{=} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\Big|_{z=0} \left( \sum_{\lambda} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right)$$

Cauchy-Integralformel

$$= \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ (2n+1) \cdot \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^{2n+2}} & , n \neq 0 \end{cases}$$

Also:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + O(z^6)$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + O(z^5)$$

$\wp'(z)^2 = \frac{4}{\dots}$

$$\Rightarrow \quad \wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{2g_2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{4g_3}{7} + O(z)$$

$$-4\wp(z)^3 = -\frac{4}{z^6} - \frac{3g_2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{3g_3}{7} + O(z)$$

$$g_2\wp(z) = g_2\frac{1}{z^2} + O(z^2)$$

Also gilt:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) = \underbrace{-g_3 + O(z)}_{\substack{\text{holomorph} \\ \text{auf } T \\ \overset{\text{Satz 3.7}}{\Rightarrow} \text{ konst}}}$$

$$\Rightarrow \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -g_3 \qquad \square$$

A18) Beh: $\mathcal{M}(T) \cong \mathbb{C}(z)[w]/(w^2-4z^3+g_2z+g_3)$

Bew:

$$\begin{array}{c} A = \mathbb{C}(z)[w]/(w^2-4z^3+g_2z+g_3) \\ \Phi \big\downarrow \\ \mathcal{M}(T) = \{f: T \to \mathbb{CP}^1 \text{ hol}\} = \{R(\wp) + \wp' S(\wp) \mid R, S \in \mathbb{C}(z)\} \end{array}$$

$$\Phi\left(\left[\sum_{i=0}^{n} f_i(z)\, w^i\right]\right) := \sum_{i=0}^{n} f_i(\wp)\,(\wp')^i$$

Wohldef?

(# 17 ...)

Wohldef?

(A 17 v)

$$\phi(w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3) = \wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 \overset{!}{=} 0$$

Insb. $(w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3) \subseteq \operatorname{Ker} \phi$

Betrachte $w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3 \in \underbrace{\mathbb{C}(z)}_{\text{Körper}}[w]$

Irreduzibel, denn sonst ex. $f \in \mathbb{C}(z)$ mit

$$f^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

Leitkoeff gerade $\qquad$ Leitkoeff ungerade

$\lightning$

$\Rightarrow A$ Körper

$\phi$ surj: Sei $f \in \mathcal{M}(T)$, d.h. $f = R(\wp) + \wp' S(\wp)$ mit $R, S \in \mathbb{C}(z)$

$$\phi(R + wS) = R(\wp) + \wp' S(\wp) = f.$$

Damit $\phi$ surj. Ringhom zwischen Körpern $\Rightarrow \phi$ iso $\square$