Blatt 13

Monday, December 15, 2025 12:21 PM

A4 1) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ keS von Garben

ZZ: Für $U \subseteq X$ off: $0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{H}(U)$ exakt

Bew: Wissen $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ inj $\overset{\text{A9ii}}{\Rightarrow} \forall U \subseteq X: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ inj

Bleibt zz: $\ker(\mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)) = \operatorname{im}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U))$

Wissen $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$ $\forall x \in X$ exakt.

$\Rightarrow \operatorname{im}(\alpha_x) = \ker(\beta_x) \ \forall x \in X$

"$\subseteq$": Sei $s \in \operatorname{im}(\alpha(U))$, d.h. $s \in \mathcal{G}(U)$ und es ex $t \in \mathcal{F}(U)$ s.d. $\alpha(U)(t) = s$.

$\beta(U)(s) = \beta(U)(\alpha(U)(t)) = (\beta \circ \alpha)(U)(t)$

Für $x \in U$ gilt $\beta_x(\alpha_x(t_x)) = 0 \in \mathcal{H}_x$.

$\Rightarrow [(\beta \circ \alpha)(U)(t)]_x = 0 \in \mathcal{H}_x$.

Also ex $V_x \subseteq U$ mit $x \in V_x$ und $(\beta \circ \alpha)(U)(t)|_{V_x} = 0$

Dann $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ off. ÜD mit $(\beta \circ \alpha)(U)(t)|_{V_x} = 0 \ \forall x \in X$

$\overset{\mathcal{H}\text{ Garbe}}{\Rightarrow} (\beta \circ \alpha)(U)(t) = 0$.

"$\supseteq$": Sei $s \in \ker(\beta(U))$, d.h.

$\beta(U)(s) = 0$

Für $x \in U$ gilt $\beta_x(s_x) = 0$

$\Rightarrow s_x \in \ker \beta_x = \operatorname{im} \alpha_x$

$\Rightarrow \exists t_x \in \mathcal{F}_x: \alpha_x(t_x) = s_x$ $\qquad \mathcal{F}(V_x) \ni$

$\Rightarrow \forall x \in U \, \exists V_x \subseteq U: x \in V_x \wedge \alpha(V_x)(t_x) = s|_{V_x}$

Auf $\tilde{V} := V_{x_1} \cap V_{x_2}$ gilt:

$\alpha(\tilde{V})(t_{x_1}|_{\tilde{V}}) = \alpha(\tilde{V})(t_{x_2}|_{\tilde{V}})$

Wissen $\alpha(\tilde{V})$ inj., also $t_{x_1}|_{\tilde{V}} = t_{x_2}|_{\tilde{V}}$

$\overset{\mathcal{F}\text{ Garbe}}{\underset{\text{verkleben}}{\Rightarrow}} \exists t \in \mathcal{F}(U): t|_{V_x} = t_x$, also

$\alpha(U)(t)|_{V_x} = \alpha(V_x)(t|_{V_x}) = s|_{V_x}$

$\overset{\text{Separiertheit}}{\underset{\text{von } \mathcal{G}}{\Rightarrow}} \alpha(U)(t) = s$

$\square$

$\overset{\text{separiertheit von } G}{\Rightarrow} \quad \alpha(u)(t) = s$ $\square$

A42) zz: $\check{H}^1(\Delta^*, \mathcal{O}) = 0$

Bew: Aus A37: $\forall g \in \mathcal{E}(\Delta^*)\ \exists f \in \mathcal{E}(\Delta^*): \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$

Analog zu Satz 8.3:

Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ off. üD von Δ^* und

$(f_{ij}) \in \ker(\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \to \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}))$

Dann ex. wg. $\check{H}^1(\Delta^*, \mathcal{E}) = 0$ $(g_i) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{E})$

mit $f_{ij} = g_i - g_j$ auf U_{ij}.

Da $\bar{\partial} f_{ij} = 0$, folgt $\bar{\partial} g_i = \bar{\partial} g_j$ auf U_{ij}

$\overset{\mathcal{E}\text{ Garbe}}{\Rightarrow} \exists h \in \mathcal{E}(\Delta^*)$ mit $h|_{U_i} = \bar{\partial} g_i$

$\overset{A37}{\Rightarrow} \exists g \in \mathcal{E}(\Delta^*): \bar{\partial} g = h$

Setze $f_i := g_i - g \to \bar{\partial} f_i = \bar{\partial} g_i - \bar{\partial} g = 0$

$\Rightarrow (f_i)_{i \in I} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ und $\delta(f_i) = (f_{ij})$ $\square$

A43) zz $\check{H}^1(\Delta^*, \mathcal{O}) = 0$

Bew:

Betrachte keS von Garben auf Δ^*.

$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0 \quad (A37)$

Induz. lange ex. Kohom.-Sequenz:

$0 \to \mathcal{O}(\Delta^*) \to \mathcal{E}(\Delta^*) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)}(\Delta^*) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(\Delta^*, \mathcal{O}) \to \underset{0}{\underset{\|}{\check{H}^1(\Delta^*, \mathcal{E})}} \to \dots$

A37, del quer surjektiv

$\ker(\delta) = \operatorname{im}(\bar{\partial}) = \mathcal{E}^{(0,1)}(\Delta^*) \Rightarrow \check{H}^1(\Delta^*, \mathcal{O}) = 0$ $\square$

A44i) zz: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$ exakt

Bew: $\mathbb{Z} \overset{2\pi i}{\hookrightarrow} \mathcal{O}$ Inklusion

nach A6 $\ker(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}$

bleibt zz: $\exp: \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ surj.
$f \mapsto e^f$

Sei $f \in \mathcal{O}^*(U)$, $U \subseteq X$ offen

Sei $f \in \mathcal{O}^*(U)$, $U \subseteq X$ offen

Sei $p \in U$. Dann ex $W \subseteq \mathbb{C}^*$ offen mit

- $f(p) \in W$, $f^{-1}(W) \subseteq U$
- auf W ex. holom Log. $(f(p) \neq 0)$

$\Rightarrow \log(f|_{f^{-1}(W)}) \in \mathcal{O}(f^{-1}(W))$

$\Rightarrow \exp([\log(f|_{f^{-1}(W)}]_p) = [f]_p$

$\square$

(ii) z.z: $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$

Bew: lange ex. KS:

$$\cdots \to \underbrace{\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})}_{\overset{\shortparallel}{0}\ (8.4)} \to \check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \to \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \to \underbrace{\check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})}_{\overset{\shortparallel}{0}} \to \cdots$$

$\Rightarrow \check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^*) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$ $\square$

(iii) z.z: $\check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$

Bew:

Mayer-Vietoris:

$$0 \to \check{H}^0(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \to \check{H}^0(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^0(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}}) \to \check{H}^0(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \to \check{H}^1 \cdots$$

$$\to \underset{\check{H}^1(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^1(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}})}{\overset{}{0}} \to \underbrace{\check{H}^1(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}})}_{\cong \mathbb{Z}\ (A35)} \to \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \to \underbrace{\check{H}^2(U_0, \underline{\mathbb{Z}})}_{=0} \oplus \underbrace{\check{H}^2(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}})}_{=0} \to \check{H}^2(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}})$$