Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

**Prof. Dr. Marco Hien**
**M. Sc. Thomas Bargen**

# Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt – **Abgabe bitte ausnahmsweise zum Übungstermin am 15.01**

**Aufgabe 35:** Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

*Hinweis:* Finde $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden $U_1, U_2$, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

**Aufgabe 36:** Sei $X$ eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung
$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}),$$
induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

ii) $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ ist ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul.

*Hinweis:* Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ (Torsions-)frei ist.

**Aufgabe 37:** Sei $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $\Delta^\times = \Delta \setminus \{0\}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es zu jeder $C^\infty$-Abbildung $g \in \mathcal{E}(\Delta)$ eine Lösung $f \in \mathcal{E}(\Delta)$ von

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

existiert. Variiere den Beweis so, dass die Behauptung auch für $\Delta^\times$ gilt.

*Hinweis:* Dazu könnte man an einer entsprechenden Stelle Laurent-Polynome $\sum_{k=-N}^{M} a_k z^k$ anstelle von herkömmlichen Polynomen verwenden.

Marco ist in der Vorlesung am Mittwoch nicht mit diesem Beweis fertig geworden, der Rest dazu folgt am Freitag. Wer nicht bis Freitag warten will oder den Beweis nicht mitgeschrieben hat, findet diesen in §13 im Buch *Lectures on Riemann Surfaces* von Otto Forster.