A12) $f: \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1, z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Bestimme Verzweigungspkte

Dazu: Löse $f(z) = w$

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = w \Leftrightarrow z^2 - 2wz + 1 = 0$$

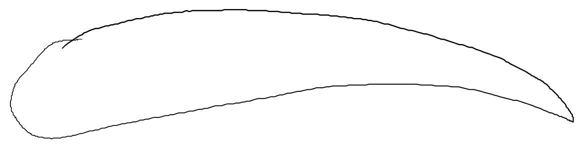
$$z_{1,2} = \frac{2w \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = w \pm \underbrace{\sqrt{w^2 - 1}}_{=:\Delta}$$

Für $\Delta = 0$ Verzweigungspkt

$$w^2 - 1 \Leftrightarrow w = \pm 1$$

Zu Programm:

Das Programm modelliert Flugzeugflügeltypen.



A13) $f: X \to Y$ Überlagerung zshgd, lok. wegzshg Hausdorff-Räume, $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0) \in Y$

Zz: $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha]$ inj.

Bew: Sei $[\alpha] \in \ker f_*$, d.h. $f_*([\alpha]) = [\mathrm{const}_{y_0}]$ konst. Weg mit Wert y_0

$$\overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow} [\alpha] = [\widetilde{\mathrm{const}}_{y_0}]$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\mathrm{const}}_{y_0}"] \arrow[r, "\mathrm{const}_{y_0}"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f \circ \widetilde{\mathrm{const}}_{y_0} = \mathrm{const}_{y_0}$

$\Rightarrow \widetilde{\mathrm{const}}_{y_0} = \mathrm{const}_{x_0}$

$\Rightarrow [\alpha] = [\mathrm{const}_{x_0}]$ $\square$

A14) $Y := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, $X := \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$

$p: X \to Y$, $z \mapsto \sin(z)$

(1) Zz: p ist Überlagerung

Bew: ρ offensichtlich stetig

Außerdem gilt

$\rho'(z) = \cos(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$

$\Rightarrow$ ρ lokaler Homöomorphismus, genauer

$\forall y \in Y = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} : \forall x \in \sin^{-1}(y) \ \exists \underset{x}{U_x} \subseteq X :$

$\sin|_{U_x} : U_x \to V$ Homöom

$\Rightarrow \sin^{-1}(V) = \coprod_{x \in \sin^{-1}(y)} U_x.$

$\Rightarrow$ ρ Überlagerung $\square$

(ii) $\alpha, \beta : [0,1] \to Y$ mit $\alpha(t) = 1 - e^{2\pi i t}$

$\beta(t) = -1 + e^{2\pi i t}$

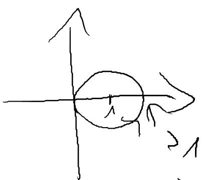
Vorab: $(t \in \mathbb{R})$

$$\sin(it) = \frac{e^{i \cdot i t} - e^{-i \cdot i t}}{2i}$$

$$= i \cdot \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

$t > 0 : e^{t} - e^{-t} > 0$

$t < 0 : e^{t} - e^{-t} < 0$

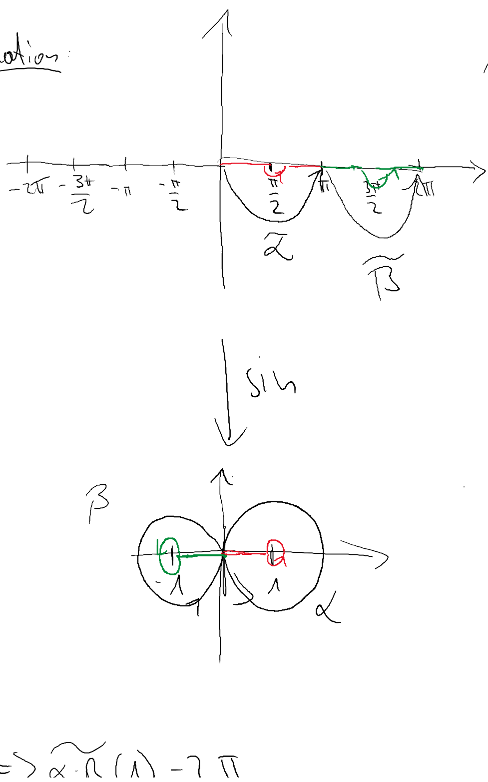


> 1

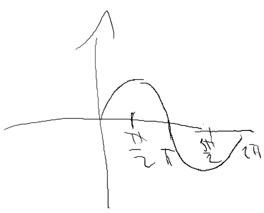
$\Rightarrow$ kein Schnitt mit reeller Achse

bzw. Sinus doppelte 1-Stelle bei $\frac{\pi}{2}$, d.h.

Situation:



$\beta = \sin \circ \widetilde{\beta}$ umrundet -1 nicht 1, deshalb gehen wir nach rechts weiter; Orientierung bleibt erhalten, also gegen UZS.



$\Rightarrow \widetilde{\alpha \cdot \beta}(1) = 2\pi$

sin

Lokal
wie ZZ
(Reihenbsp.
Vorlesung)

h.

lso.

$\Rightarrow \widetilde{\alpha\cdot\beta}(1) = 2\pi$ ↯

Analog: $\widetilde{\beta\alpha} = -2\pi$

Also: Betrachte $p_*: \pi_1(X,0) \to \pi_1(Y,0)$

$$p_*([\widetilde{\alpha\beta}]) = p_*[\tilde\alpha]\cdot p_*[\tilde\beta] = \alpha\beta$$
$$\neq \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq$$
$$p_*([\widetilde{\beta\alpha}]) = p_*[\tilde\beta]\cdot p_*[\tilde\alpha] = \beta\alpha$$

$\Rightarrow \pi_1(Y,0)$ nicht abelsch

A15) $p: X \to Y$ hol. Überlagerung Riem. Flächen
$\varphi: X \to X$ Homöom. mit $p\circ\varphi = p$ (Decktrafo)

<u>ZZ:</u> φ biholomorph

<u>Bew:</u> p hol. Überl., d.h. p hol und lok. bihol.

Sei $x \in X$ fest. Dann ex. off. Umgebung
$U \subseteq X$ von $\varphi(x)$ mit $p|_U: U \to V$ bihol.
$V \subseteq Y$ offene Umg. von $p(\varphi(x)) = p(x)$

Auf U gilt:

$$\varphi|_U = (p|_U)^{-1} \circ (p|_U) \circ (\varphi|_U) = \underbrace{(p|_U)^{-1} \circ (p|_U)}_{\text{hol.}}$$

$\Rightarrow \varphi$ lok. holomorph $\Rightarrow \varphi$ holomorph

φ^{-1} auch holomorph, denn

$p \circ \varphi^{-1} = p \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p$, also analog.

$\square$