

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{ \sigma : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ stetig} \mid \pi \circ \sigma = \text{id}_U \}.$$

Zeigen Sie, dass

- i) \mathcal{G} eine Garbe ist
- ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.

Aufgabe 36: Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$$

gilt.

Hinweis: (Aus dem Buch von Otto Forster) finde eine Überdeckung $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2 , so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man (mittels Satz von Leray) die Aufgabe lösen.

Aufgabe 37: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeigen Sie, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}_{\text{alt}}^r(\mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Hinweis: Das gilt auch allgemein für alle \check{H}^r und ohne Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen.

Aufgabe 38: ?Weglassen? Zeigen Sie für einen Torus $T = \mathbb{C}/\Lambda$ mit Hilfe einer geeigneten Leray-Überdeckung, dass

$$\check{H}^1(T, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2.$$

Hinweis: Man benutzt natürlich die vorhergehenden Aufgaben. Dennoch ist das immer noch eine ziemliche Erbsenzählerei.