

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}_{\text{alt}}^r(\mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Hinweis: Das gilt auch allgemein für alle \check{H}^r und ohne Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen.

Aufgabe 36: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf \mathbb{CP}^1 aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf \mathbb{CP}^1). Zeige, dass¹

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m - 1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

¹Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise \mathbb{C} -Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar \mathbb{C} -linear.