

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt

Aufgabe 32: Seien $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ jeweils Verfeinerungen offener Überdeckungen. Zeige, dass die Verfeinerungsabbildungen in Čech-Kohomologie wie erwartet kommutieren, das heißt, dass das folgende Dreieck kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \check{H}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad} & \check{H}^r(\mathcal{W}, \mathcal{F}) \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & \check{H}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F}) &
 \end{array}$$

Aufgabe 33: Zeige, dass die Verfeinerungsabbildung auf Čech-Kohomologie

$$\check{H}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

für eine Verfeinerung $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ immer injektiv ist.

Aufgabe 34: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf \mathbb{CP}^1 aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf \mathbb{CP}^1). Zeige, dass¹

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m - 1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

¹Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise \mathbb{C} -Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar \mathbb{C} -linear.