Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

12. Blatt

Aufgabe 38: Sei X ein topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ gegeben. Weiter sei zu jedem $i \in I$ eine Garbe $\mathcal{F}_i$ auf U_i gegeben. Außerdem haben wir für alle $i, j \in I$ Isomorphismen $\Phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ auf $U_{ij} = U_i \cap U_j$ gegeben, welche $\Phi_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_i}$ und $\Phi_{ik} = \Phi_{jk} \circ \Phi_{ij}$ auf U_{ijk} erfüllen. Zeige, dass wir die $\mathcal{F}_i$ zu einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X verkleben können. Genauer: Zeige, dass eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$ für alle $i \in I$ existiert.

Aufgabe 39: Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen. Es bezeichne $\mathcal{O}^\times$ die Garbe der nirgends-verschwindenden holomorphen Funktionen, also $\mathcal{O}^\times(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\}$. Dies ist eine Garbe von abelschen Gruppen vermöge der Multiplikation.

Definitionen:

- Eine *$\mathcal{O}$-Modulgarbe* auf X ist eine Garbe $\mathcal{L}$, so dass jedes $\mathcal{L}(U)$ ein $\mathcal{O}(U)$-Modul ist und die Modulstruktur verträglich mit den Restriktionen ist.
- Eine solche heißt *holomorphes Geradenbündel*, wenn gilt:
  $$\forall x \in X \exists x \in U \subset X : \mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}|_U,$$
  das heißt, dass man einen Garbenisomorphismus der eingeschränkten Garben hat.

Sei nun $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung mit Isomorphismen $\psi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}|_{U_i}$. Das Datum $(U_i, \psi_i)_{i\in I}$ nennen wir ein *System lokaler Trivialisierungen* von $\mathcal{L}$. Wir definieren

$$g_{ij} := \psi_j(U_{ij}) \circ \psi_i(U_{ij})^{-1}(1) \in \mathcal{O}^\times(U_{ij}).$$

Zeige[1], dass:

i) $\eta = (g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}^\times)$ gilt, und wir somit eine Klasse $c(\mathcal{L}) := [\eta] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}^\times)$ erhalten,

ii) diese Klasse nicht von der Wahl der Trivialisierungen abhängt.

   Hinweis: Zwei offene Überdeckungen haben stets eine gemeinsame Verfeinerung, also kann man annehmen, dass jede Trivialisierung auf der gleichen offenen Überdeckung definiert ist.

Aufgabe 40: Ist umgekehrt $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung und ein Kozykel $(g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}^\times)$ gegeben, dann konstruiere dazu ein Geradenbündel $\mathcal{L}$, so dass $c(\mathcal{L}) = [(g_{ij})_{ij}] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}^\times)$ gilt.

Hinweis: Setze $\mathcal{L}_i := \mathcal{O}|_{U_i}$ und benutze an geeigneter Stelle Aufgabe 38.

Bemerkung: Wir haben nun Teile des Satzes bewiesen, dass man einen Isomorphismus

$$\mathrm{Pic}(X) \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}^\times)$$

zwischen der Picardgruppe[2] $\mathrm{Pic}(X)$ von Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X (mit dem offensichtlichen Isomorphiebegriff) und obiger Čech-Kohomologiegruppe hat.

[1] Beachte, dass aus $+$ jetzt $\cdot$ wurde.

[2] Die Gruppenmultiplikation auf $\mathrm{Pic}(X)$ ist durch das Tensorprodukt gegeben.