A1) $h: S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C},\ (x,y,z) \mapsto \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$

$k: S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{C},\ (x,y,z) \mapsto \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z}$

zz: h, k ergeben holomorphen Atlas auf S^2

Bew: h, k offensichtlich stetig

Suche Umkehrabbildung h^{-1}:

Setze $w = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$

$\Leftrightarrow w(1-z) = x + iy$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)(1-z) = x \wedge \mathrm{Im}(w)(1-z) = y \quad (*)$

Außerdem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Setze (*) ein: $\mathrm{Re}(w)^2(1-z)^2 + \mathrm{Im}(w)^2(1-z)^2 + z^2 = 1$

$\Leftrightarrow |w|^2(1-z)^2 + z^2 = 1$

$\Leftrightarrow |w|^2 - 2|w|^2 z + |w|^2 z^2 + z^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (|w|^2+1)z^2 - 2|w|^2 z + (|w|^2 - 1) = 0$

Löse quadratische Gleichung:

$$z = \frac{|w|^2 \pm 1}{|w|^2+1}$$

Wegen $z \neq 1$ $\quad z = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$

Setze in $(*)$ ein: $x = \frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2+1}$, $y = \frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2+1}$

Erhalten also

$$h^{-1}: \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\},$$

$$w \mapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right)$$

und analog

$$k^{-1}: \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{(0,0,-1)\},$$

$$w \mapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2+1}, -\frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2+1}, \frac{-|w|^2+1}{|w|^2+1} \right)$$

h^{-1}, k^{-1} sind beide offensichtlich stetig

Bleibt zz: $h \circ k^{-1}$, $k \circ h^{-1}$ sind holomorph

Sei $U := S^2 \setminus \{(0,0,-1),(0,0,1)\}$.

Dann $h(U) = k(U) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\quad (x^2+y^2+z^2=1)$

Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

Für $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt:

$$h \circ k^{-1}(w) = h\left(\frac{2\operatorname{Re}(w)}{|w|^2+1}, -\frac{2\operatorname{Im}(w)}{|w|^2+1}, \frac{-|w|^2+1}{|w|^2+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{2(\operatorname{Re}(w) - i\cdot \operatorname{Im}(w))}{|w|^2+1}}{1-\frac{-|w|^2+1}{|w|^2+1}} = \frac{2\overline{w}}{|w|^2+1}\cdot\frac{|w|^2+1}{2|w|^2}$$

$$= \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{\overline{w}}{\overline{w}\cdot w} = \frac{1}{w}$$

$\Rightarrow$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Analog $k \circ h^{-1}$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\left(= \frac{1}{w}\right)$ $\square$

A2) Sei Y Riem. Fläche und $\pi: X \to Y$ stetig und lokaler Homöom.

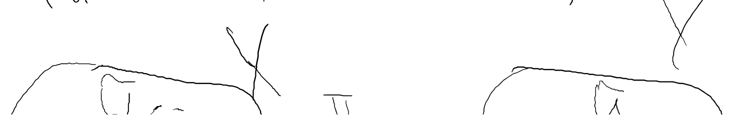
Zz: X kanonisch Riem. Fläche

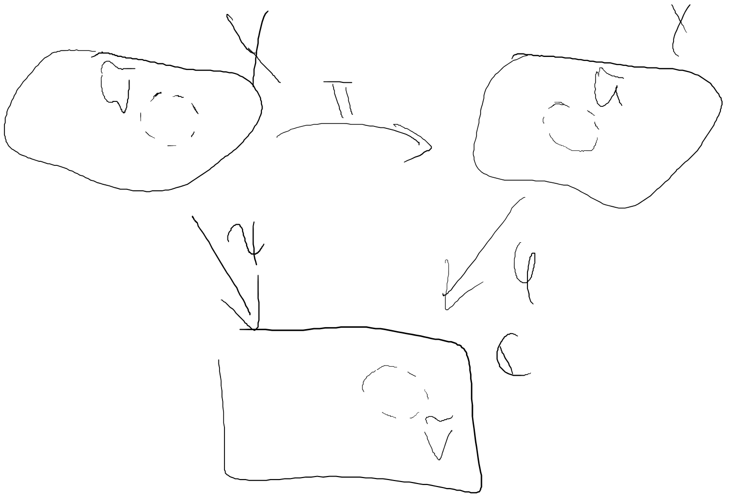
Bew: Sei $x \in X$ beliebig. Dann ex. $x \in W \subseteq X$ offen mit $\pi|_W$ Homöom.

Sei nun $\varphi: U \to V$ Karte auf Y mit $\pi(W) \cap U = \tilde{U} \ni x$. Sei weiter $\tilde{W} = \pi^{-1}(\tilde{U})$.

Def. $\psi: \tilde{W} \to \tilde{V}$ durch

$\psi = \varphi|_{\tilde{U}} \circ \pi|_{\tilde{W}}$, wobei $\tilde{V} = \varphi(\tilde{U})$.





ψ Homöom. als Verknüpfung von Homöom.

Sei nun $\mathfrak{A}$ die Menge aller solcher Karten auf X.

<u>Bleibt z.z.:</u> Zwei solcher Karten sind holom. komp.

Seien dazu $\psi_i : \tilde W_i \to \tilde V_i$, $i=1,2$ zwei solcher Karten. Dann betrachte

$$\psi_2|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2} \circ (\psi_1|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2})^{-1} : \psi_1(\tilde W_1 \cap \tilde W_2) \to \psi_2(\tilde W_1 \cap \tilde W_2)$$

$$\psi_2|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2} \circ (\psi_1|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2})^{-1}$$

$$= (\varphi_2|_{\tilde U_1 \cap \tilde U_2} \circ \pi|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2}) \circ (\varphi_1|_{\tilde U_1 \cap \tilde U_2} \circ \pi|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2})^{-1}$$

$$= \varphi_2|_{\tilde U_1 \cap \tilde U_2} \circ \pi|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2} \circ (\pi|_{\tilde W_1 \cap \tilde W_2})^{-1} \circ (\varphi_1|_{\tilde U_1 \cap \tilde U_2})^{-1}$$

$$= \varphi_2|_{\tilde U_1 \cap \tilde U_2} \circ (\varphi_1|_{\tilde U_1 \cap \tilde U_2})^{-1}$$

ist holomorph als Einschränkung der holom. Abb.

$$\varphi_2|_{U_1 \cap U_2} \circ (\varphi_1|_{U_1 \cap U_2})^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ holom. Atlas, d.h. X erhält eine eindt. Struktur einer Riem. Fläche (abh. von der Struktur auf Y)

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ holom. Atlas, d.h. X erhält eine eindt. Struktur einer Riem. Fläche (abh. von der Struktur auf Y)

A3| Aus der Vorlesung

$$\Phi_\tau : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \to S^1 \times S^1, \; [z = s + t\tau] \mapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$$

$(s, t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Damit erhält $S^1 \times S^1$ eine von τ abh. Struktur als Riem. Fläche

Proj. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda_\tau$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\pi \circ \Phi_\tau"'] & \mathbb{C}/\Lambda_\tau \arrow[r, "\Phi_\tau"] & S^1 \times S^1 \end{tikzcd}$$

Karten $\psi : U \to V$ mit $\psi(x) = \varphi \circ \Phi_\tau^{-1}$

$$\overset{\shortparallel}{(\pi|_U)^{-1}}$$

Betrachte nun Λ_i und Λ_{1+i}:

Für $z = [s + it] \in \mathbb{C}/\Lambda_i$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ sind die zugehörigen reellen Parameter s, t.

Unter Λ_{1+i} schreibt man den selben Pkt mit der Basis $(1, 1+i)$.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},$$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \end{pmatrix},$

denn $s' + t'(1+i) = s + ti$, d.h. $s' = s+t$, $t' = t$

Sei $w = s + it \in \mathbb{C}$

Für $\tau = 1+i$ ist

$$w' = s' + it' = (s+t) + it = w + t$$

$$\Rightarrow t = \frac{w - \bar{w}}{2i} \left(= \frac{s + it - \overline{s + it}}{2i} \right)$$

$$\Rightarrow w' = w + \frac{w - \bar{w}}{2i} = \left(1 - \frac{i}{2}\right) w + \frac{i}{2} \bar{w}$$

Somit für Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$, $\varphi_{1+i} : U_{1+i} \to V_{1+i}$ mit $U_i \cap U_{1+i} \neq \emptyset$:

$$\left(\varphi_{1+i} \circ \varphi_i^{-1}\right)\big|_{\varphi_i(U_i \cap U_{1+i})} : \varphi_i(U_i \cap U_{1+i}) \to \varphi_{1+i}(U_i \cap U_{1+i})$$

Ist das holomorph?

$$w \longmapsto \left(1 - \frac{i}{2}\right) w + \frac{i}{2} \bar{w}$$

Nein, denn $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\varphi_{1+i} \circ \varphi_i^{-1}\right)\big|_{\varphi(U_i \cap U_{1+i})} \neq 0$

(Alternativ CR-DGL nachrechnen)

<u>Wirtinger-Kalkül:</u>

$f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ reell diff'bar, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\left[z = x+iy \,,\ \bar{z} = x-iy \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \,,\ y = \frac{i}{2}(\bar{z}-z) \right.$$

$$\left. \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \,,\ dy = \frac{i}{2}(d\bar{z} - dz) \right]$$

$$\Rightarrow df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right) ,\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) \right]$$

$$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

<u>Beh:</u> f holomorph $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\iff \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\iff \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\overset{\text{CR-Dgl}}{\iff}$ f holomorph $\square$