

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt

Aufgabe 41:

- i) Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige, dass folgende kurze Sequenz von Garben exakt ist:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow 0$$

- ii) Für jede Kreisscheibe $\Delta \subset X$ ist die Čech-Kohomologie $\check{H}^1(\Delta, \mathcal{O}) = 0$.

Erkläre, warum dies eine Konsequenz der folgenden beiden Tatsachen (die nicht bewiesen werden müssen) ist:

1. Die Garben-Sequenz aus Teilaufgabe (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz für die globalen Schnitte auf Δ :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(\Delta, \mathcal{O}) \rightarrow \check{H}^1(\Delta, \mathcal{E}) \rightarrow \dots$$

2. Das **Dolbeault-Theorem** für Kreisscheiben Δ :

$$\check{H}^1(\Delta, \mathcal{O}) \cong H_{\bar{\partial}}^1(\Delta)$$

Hierbei ist $H_{\bar{\partial}}^1(\Delta)$ die Dolbeault-Kohomologie:

$$H_{\bar{\partial}}^1(\Delta) = \frac{\ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^1(\Delta) \rightarrow \mathcal{E}^2(\Delta))}{\operatorname{im}(\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Delta) \rightarrow \mathcal{E}^1(\Delta))}$$

Aufgabe 42: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Aufgabe 43: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X . Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 44:

- i) Zeige, dass der kanonische Divisor auf \mathbb{CP}^1 durch

$$K = -2 \cdot \infty$$

gegeben ist (was heißt das eigentlich?).

- ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf \mathbb{CP}^1 ein Hauptdivisor ist.