

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt

**Aufgabe 45:** Sei  $D$  ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$ . Zeige:

- i) Die Garbe  $\mathcal{O}_D$  ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).
- ii)  $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$  (als  $\mathcal{O}$ -Modulgarben)  $\Leftrightarrow D \sim 0^1$

**Aufgabe 46:** Zeige:

- i) Die Garben  $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)$  aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.
- ii) Für je zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{CP}^1$  gilt  $P \sim Q$  als Divisoren.
- iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form  $m \cdot \infty$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ .
- iv) Ist  $D$  ein beliebiger Divisor, dann existiert ein  $m \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$ .

**Aufgabe 47:**

- i) Zeige, dass die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \text{Div}(\mathbb{CP}^1) \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{CP}^1)$$

definiert.

- ii) Zeige, dass jedes holomorphe Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathbb{CP}^1$  einen von 0 verschiedenen meromorphen Schnitt besitzt und folgere daraus, dass es einen Divisor  $D$  gibt mit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D.{}^2$$

- iii) Folgere:<sup>3</sup>

$$\text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X)/\text{Prin}(X) \cong \mathbb{Z}.$$

**Aufgabe 48:** Eine kompakte Riemannsche Fläche  $X$  heißt *rational*, wenn es zwei verschiedene Punkte  $P \neq Q$  in  $X$  gibt, so dass  $P \sim Q$  als Divisoren. Zeige, dass  $X$  genau dann rational ist, wenn  $X \cong \mathbb{CP}^1$ .

---

<sup>1</sup>Expertenaufgabe: Man muss sich vorher überlegen, was es für zwei  $\mathcal{O}$ -Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus  $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$  und damit ein  $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$ , man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene  $U \subset X$ .

<sup>2</sup>Riemann-Roch

<sup>3</sup>Prin bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.