

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

6. Blatt – Abgabe 26.11, Übung 27.11

Aufgabe 19:

- i) Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche und $f : Z \rightarrow X$ eine weitere normale(!) Überlagerung. Wie könnte man eine „Einschränkung“

$$\rho : \text{Deck}(\tilde{X}|X) \rightarrow \text{Deck}(Z|X)$$

definieren? Was ist deren Kern?

- ii) Nutze die vorhergehende Teilaufgabe, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz: Ist X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es zu jedem surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) normale Überlagerung $f : Z \rightarrow X$ durch eine zusammenhängende Riemannsche Fläche Z , so dass $\text{Deck}(Z|X) \cong G$.

Aufgabe 20: Sei $X := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$, $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und

$$f : X \rightarrow Y, \quad z \mapsto (z^2 + 1)^2.$$

Zeige, dass f eine unverzweigte, 4-blättrige Überlagerung ist, die aber nicht normal ist, und dass

$$\text{Deck}(X|Y) = \{\text{id}, -\text{id}\}$$

gilt.

Hinweis: Die Teilmengenbeziehung $\{\text{id}, -\text{id}\} \subseteq \text{Deck}(X|Y)$ ist einfach zu zeigen. Für die andere Teilmengenbeziehung: Angenommen wir haben $\phi \in \text{Deck}(X|Y)$, d.h. $\phi(z)^2 + 1 = \pm(z^2 + 1)$. Der positive Fall liefert $\phi \in \{\text{id}, -\text{id}\}$. Der negative Fall ist viel schwieriger: ϕ ist also das Quadrat einer Abbildung $\psi : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. ϕ ist der Lift von ψ unter der Überlagerung $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z^2$. Jetzt betrachtet man die induzierten Abbildungen auf den Fundamentalgruppen. Man kann $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, z_0)$ direkt ausrechnen. Was macht p_* damit? Mit einer geschickt gewählten Schleife in X bekommen wir einen Widerspruch.

Dass die Überlagerung nicht normal ist, ist dafür wieder einfach zu zeigen.

Aufgabe 21: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Sind dann $S \subset X$ die Verzweigungspunkte und $S' = f(S)$, so ist $f|_{X \setminus f^{-1}(S)} : X \setminus f^{-1}(S) \rightarrow Y \setminus S'$ eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei mit $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Zeige:

- i) Es gibt Triangulierungen von X und Y , so dass f Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen abbildet.
- ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y), \quad K(X) = m \cdot K(Y), \quad E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#f^{-1}(S').$$