Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

5. Blatt – Abgabe 19.11, Übung 20.11

Aufgabe 16: Wir wollen in dieser Aufgabe Behauptung 1 aus dem Beweis zur Existenz der universellen Überlagerung zeigen. Sei also Y eine Mannigfaltigkeit und $y_0 \in Y$. Ferner sei α ein Weg von y_0 nach $y \in Y$. Für eine einfach zusammenhängende, offene Umgebung U von y sei

$$(U, [\alpha]) := \{(z, [\alpha \cdot \gamma]) \mid z \in U,\ \gamma \text{ ein Weg in } U \text{ von } y \text{ nach } z\}.$$

Zeige, dass diese Mengen eine Basis einer Topologie von $\widetilde{Y}$ bilden, d.h. dass durch

$$W \subset \widetilde{Y} \text{ offen} :\iff \forall w \in W \exists\, (U, [\alpha]) \text{ wie oben} : w \in (U, [\alpha]) \subset W$$

eine Topologie definiert ist.

Aufgabe 17: Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$ zu $\tau \in \mathbb{H}$ und $T := \mathbb{C}/\Lambda$ der entsprechende Torus. Wir nennen eine meromorphe Funktion $f : T \to \mathbb{CP}^1$ *gerade*, wenn die zugehörige doppelt-periodische, meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ es ist (also $f(-z) = f(z)$ erfüllt) und *ungerade* analog ($f(-z) = -f(z)$). Im Folgenden sei f immer eine doppelt-periodische Funktion bzgl. Λ. Zeige:

i) Die Weierstraß $\wp$-Funktion (vgl. Blatt 3, Aufgabe 11) ist gerade und ihre Ableitung $\wp'$ ist ungerade.

ii) Jedes f hat eine Darstellung $f = f_{\text{ev}} + f_{\text{odd}}$ mit geradem f_{ev} und ungeradem f_{odd}.

iii) Ist f gerade, so existiert eine rationale Funktion $R(z) \in \mathbb{C}(z)$, so dass

$$f(z) = R(\wp(z)).$$

Hinweis: Zu finden ist also ein $R \in \mathbb{C}(z) = \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$, so dass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\wp"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{CP}^1 \arrow[r, "R"] & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Untersuche dazu die geometrischen Eigenschaften der eigentlichen Abbildung $\wp$: Wo ist sie verzweigt? Wieso sind die Punkte $b_1 := \wp(\frac{1}{2})$, $b_2 := \wp(\frac{\tau}{2})$ und $b_3 := \wp(\frac{1+\tau}{2})$ und $b_4 := \infty$ besonders? Welche Überlagerung ist $\wp$ außerhalb der verzweigten Punkte? Welche Fasern hat diese Überlagerung und was hat das damit zu tun, dass $\wp$ gerade ist? Beachte, dass f auch gerade sein soll!

iv) Jedes f hat die Darstellung $f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot S(\wp(z))$ mit $R, S \in \mathbb{C}(z)$.

v) Die gerade Funktion $\wp'(z)^2$ hat die Darstellung

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

mit $g_2 = 60G_4$ und $g_3 = 140G_6$, wobei

$$G_k := \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-k}.$$

Aufgabe 18: Folgere aus der vorhergehenden Aufgabe, dass für einen Torus $T = \mathbb{C}/\Lambda$ gilt:

$$\mathcal{M}(T) \cong \mathbb{C}(z)[w]/(w^2 - 4z^3 + g_2 z + g_3).$$