Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt

Aufgabe 41: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X. Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 42: Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Folgende kurze Sequenz von Garben ist exakt:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$$

ii) $\check{H}^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1_{\overline{\partial}}(X) := \frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{\overline{\partial}(\mathcal{E}(X))}$
Hinweis: Die Garben-Sequenz aus (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz.

Aufgabe 43: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Aufgabe 44:

i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Garbensequenz exakt ist:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \to 0$$

ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz: $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$

iii) Zeige schließlich mit (ii): $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$