Geradenbündel und Divisoren auf Riemannschen Flächen

1 Was wollen wir zeigen?

Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X. Wir fixieren eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ und Trivialisierungen

$$\psi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}|_{U_i}$$

für $i \in I$. Damit haben wir auch die Kozykel-Beschreibung von $\mathcal{L}$ via

$$(g_{ij})_{i,j} := \big(\psi_j(U_{ij})\psi_i(U_{ij})^{-1}(1)\big)_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\times)\ .$$

Ziel 1. *Finde einen Divisor $D \subset X$ und einen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{L} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_D$.*

Um zu verstehen, wie man D findet, gehen wir rückwärts vor: Wir nehmen an, wir haben φ bereits gegeben. Durch welche Daten sind dann φ und D explizit gegeben?

Beim Beweis, dass $\mathcal{O}_D$ ein Geradenbündel ist, hat man eine offene Überdeckung mit einer gewissen Eigenschaft konstruiert – hier nehmen wir oBdA an, dass die oben gewählte Überdeckung $\mathcal{U}$ diese Eigenschaft hat, nämlich:[1]

$$\text{Für jedes } i \in I \text{ existiert eine meromorphe Funktion } h_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times \text{ mit } \operatorname{div}(h_i) = -D|_{U_i} \tag{1}$$

(dabei ist $D|_{U_i} \subset U_i$ die offensichtliche Einschränkung des Divisors gemeint) – „oBdA“ wegen Verfeinerungen. Multiplikation mit h_i liefert einen lokalen Isomorphismus wie rechts vertikal im folgenden Diagramm. Dazu gibt es zudem ein $g_i \in \mathcal{O}^\times(U_i)$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}|_{U_i} \arrow[d, "\simeq"', "\psi_i"] & \mathcal{O}_D|_{U_i} \arrow[l, "\varphi|_{U_i}"', "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"', "\cdot h_i"] \\
\mathcal{O}|_{U_i} & \mathcal{O}|_{U_i} \arrow[l, "\cdot g_i"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

Umgekehrt erhält man also $\varphi_i := \varphi|_{U_i}$ durch die Angabe von $g_i \in \mathcal{O}^\times(U_i)$ und $h_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$ – und damit auch $D|_{U_i} = -\operatorname{div}(h_i)$:

$$\varphi_i(u) = g_i \cdot \underbrace{(h_i \cdot u)}_{\in\mathcal{O}(U_i)} \psi_i^{-1}(1) \text{ für } u \in \mathcal{O}_D(U_i). \tag{2}$$

Jede Wahl eines $g_i \in \mathcal{O}^\times(U_i)$ und $h_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$ liefert also einen Isomorphismus φ_i wie oben – dazu muss h_i zunächst auch überhaupt keine Eigenschaft erfüllen, weil ohnehin alles über U_i isomorph zu $\mathcal{O}|_{U_i}$ ist. Insbesondere können wir h_i durch das Produkt g_ih_i ersetzen und erhalten damit also f_i und das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}|_{U_i} \arrow[d, "\simeq"', "\psi_i"] & \mathcal{O}_D|_{U_i} \arrow[l, "\varphi|_{U_i}"', "\simeq"] \arrow[dl, "\simeq"', "\cdot f_i"] \\
\mathcal{O}|_{U_i} &
\end{tikzcd}$$

[1] mit $\mathcal{M}(U)$ bezeichnen wir die meromorphen Funktionen auf U. Das ergibt in offensichtlicher Weise eine Garbe $\mathcal{M}$ auf X. Beachte, dass $\mathcal{M}(U)$ jeweils ein Körper ist und somit $\mathcal{M}(U)^\times = \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$ die nicht-konstant-Null Funktionen sind

Jetzt wählen wir für jedes $i \in I$ ein f_i, und erhalten damit φ_i. Diese ergeben aber nur dann einen **globalen** Isomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_D \to \mathcal{L}$ (dann mit einem geeigneten D), wenn $\varphi_i|_{U_{ij}} = \varphi_j|_{U_{ij}}$ für alle i, j gilt. Mit (2) also, wenn

$$\begin{aligned}
&\underset{u \in \mathcal{O}_D(U_{ij})}{\forall} (f_i|_{U_{ij}} \cdot u)\psi_i^{-1}(1)|_{U_{ij}} = (f_j|_{U_{ij}} \cdot u)\psi_i^{-1}(1)|_{U_{ij}} \iff \\
&\underset{u \in \mathcal{O}_D(U_{ij})}{\forall} (f_i|_{U_{ij}} \cdot u) \cdot g_{ij} = (f_j|_{U_{ij}} \cdot u) \iff \\
&f_i|_{U_{ij}} \cdot g_{ij} = f_j|_{U_{ij}}
\end{aligned} \tag{3}$$

Zusammengefasst haben wir gesehen:

Satz 1. *Findet man $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$ für alle $i \in I$, so dass für alle $i, j \in I$ jeweils* (3) *gilt, dann ist*

$$D := \sum_{p \in X} (-\operatorname{ord}_p(f_i)) \cdot p$$

ein wohldefinierter Divisor und die lokalen Isomorphismen φ_i, die durch

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}|_{U_i} \arrow[d, "\psi_i", "\simeq"'] & \mathcal{O}_D|_{U_i} \arrow[l, "\varphi_i"', "\simeq"] \arrow[dl, "\cdot f_i", "\simeq"'] \\
\mathcal{O}|_{U_i} &
\end{tikzcd}$$

gegeben sind, verkleben zu einem globalen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}$.

2 Meromorphe Schnitte in einem Geradenbündel

Wie findet man diese f_i? Wir betrachten weiter das Geradenbündel $\mathcal{L}$, welches durch die Trivialisierungen

$$\psi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}|_{U_i}$$

auf der Überdeckung $\mathcal{U}$ (und damit auch durch den Kozykel $(g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\times)$) gegeben ist.

Definition 1. *Ein* **meromorpher Schnitt** *von $\mathcal{L}$ ist ein Element $\sigma \in \mathcal{L}(U)$, so dass*

- *$U = X \setminus S$ für eine Menge S aus isolierten Punkten ist und*
- *zu jedem $s \in S$ eine offene Umgebung $s \in V \subset U_i$ (für geeignetes i) gibt, so dass $V \cap S = \{s\}$ gilt und*

  $$\psi_i|_{V \setminus \{s\}}(\sigma) \in \mathcal{O}(V \setminus \{s\})$$

  einen Pol (oder hebbar) bei s hat.

Satz 2. *Für ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf der kompakten Riemannschen Fläche X gilt*

$$\dim H^1(X, \mathcal{L}) < \infty.$$

Proof. Man überzeugt sich, dass man den (schwierigen – Stichwort L_2-Techniken) Beweis für $H^1(X, \mathcal{O})$ nahezu wortwörtlich für $H^1(X, \mathcal{L})$ ebenso durchführen kann. □

Korollar 1. *Sind $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf der kompakten Riemannschen Fläche X und $a \in X$ ein beliebiger Punkt, dann existiert ein meromorpher Schnitt $\sigma \in \mathcal{L}(X \setminus \{a\})$ mit echtem Pol bei a.*

Proof. Analog zum Satz über die Existenz einer meromorphen Funktion (also der Fall $\mathcal{L} = \mathcal{O}$):

Ist $a \in U \subset X$ eine trivialisierende Menge (also mit einem $\psi : \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}|_U$) und gleichzeitig U ein Kartengebiet für eine Karte z, dann betrachte die Überdeckung $\mathcal{V} := (U, X \setminus \{a\})$ und die Elemente

$$\zeta^{(j)} := \psi_{U \setminus \{a\}}(z^{-j}) \in \mathcal{L}(U \setminus \{a\}).$$

Diese liefern Elemente $[\zeta^{(1)}], \ldots, [\zeta^{(N)}] \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{L})$ und wenn $N > \dim H^1(X, \mathcal{L})$ gewählt ist, sind sie linear abhängig. Es gibt dann also $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ (nicht alle Null) und

$$f_1 \in \mathcal{L}(U) \text{ und } f_2 \in \mathcal{L}(X \setminus \{a\})$$

mit

$$c_1\zeta^{(1)} + \ldots + c_N\zeta^{(N)} = (f_2 - f_1)|_{U \setminus \{a\}} \,.$$

Dann ist $f_2 \in \mathcal{L}(X \setminus \{a\})$ ein meromorpher Schnitt wie gefordert. $\square$

3 Wrap it up!

Sei nun also $a \in X$ und $\sigma \in \mathcal{L}(X \setminus \{a\})$ ein nicht-trivialer meromorpher Schnitt von $\mathcal{L}$ wie in obigem Satz gegeben. Wir betrachten wieder unsere Ausgangsüberdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$. Dann haben wir für jedes $i \in I$ also das Element

$$f_i := \begin{cases} \psi_i(\sigma|_{U_i}) \subset \mathcal{O}(U_i) & \text{falls } a \notin U_i \\ \psi_i(\sigma|_{U_i \setminus \{a\}}) \subset \mathcal{O}(U_i \setminus \{a\}) & \text{falls } a \in U_i \end{cases}$$

Da der Schnitt σ aber auch meromorph bei a ist, liefert das in jedem Fall jeweils ein Element $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$.

Die Tatsache, dass f_i aus den Einschränkungen des globalen meromorphen Schnitts $\sigma \in \mathcal{L}(X \setminus \{a\})$ und den Trivialisierungen ψ_i entsteht, drückt sich wiederum so aus, dass für i, j folgendes gilt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{U_{ij}} \arrow[rr, bend right, "\cdot g_{ij}"'] & \mathcal{L}|_{U_{ij}} \arrow[l, "\psi_i"'] \arrow[r, "\psi_j"] & \mathcal{O}_{U_{ij}} \end{tikzcd}$$

$$f_i|_{U_{ij}} \longleftarrow\!\shortmid \sigma|_{U_{ij}} \longmapsto f_j|_{U_{ij}}$$

Also erfüllen diese $(f_i)_i \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^\times)$ genau die Bedingung (3). Damit können wir Satz 1 anwenden und erhalten $\varphi : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}$.