Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

8. Blatt – Abgabe 10.12, Übung 11.12

Aufgabe 25: Sei X eine Riemannsche Fläche und $z : U \to U'$ eine Karte um p. Zeige, dass für das maximale Ideal $m_p \lhd \mathcal{E}_p$ der bei $p \in X$ verschwindenden C^∞-Funktionen gilt:

$$m_p^2 = \left\{ \varphi \in m_p \;\middle|\; \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p \varphi = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \varphi \right\}.$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde folgendes Lemma gezeigt:

Lemma. *Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig um 0, sowie $f : V \to \mathbb{C}$ eine C^∞-Funktion mit $f(0) = 0$, dann existieren C^∞-Funktionen $f_j : V \to \mathbb{C}$ für $j = 1, 2$, so dass*

$$f(x + iy) = x \cdot f_1(x + iy) + y \cdot f_2(x + iy).$$

Aufgabe 26: Betrachte die holomorphe 1-Form $\dfrac{dz}{1+z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Zeige, dass diese eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\pm i\}$ hat. Wie schreibt man diese in der üblichen Karte für $\mathbb{CP}^1$ bei ∞?

Aufgabe 27: Ist $f : X \to Y$ holomorph, dann hat man für offenes $V \subset Y$ den pull-back:

$$f^* : \mathcal{E}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(f^{-1}(V)), \qquad \varphi \mapsto f^*\varphi := \varphi \circ f.$$

i) Zeige, dass man in folgender Weise ein f^* für holomorphe 1-Formen hat:
   Ist $\omega \in \Omega^1(V)$ und $z : W \to W'$ eine Karte für Y mit $W \subset V$, so schreibe $\omega|_W = \varphi(z)\,dz$ und setze

   $$f^*(\omega|_W) := f^*\big(\varphi(z)\big)\, d(f^*z).$$

   Wie ist das zu lesen und warum ist das unabhängig von der Wahl der Karte? Hat man letzteres gesehen, folgt, dass man damit $f^*\omega \in \Omega^1(f^{-1}(V))$ wohldefiniert erhalten hat.

ii) Sei $f : X \to Y$ holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen und $\omega \in \Omega^1(V)$ eine homorphe 1-Form auf einer offenen Teilmenge $V \subset Y$. Zeige, dass für eine stückweise C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U \subset f^{-1}(V)$ gilt:

   $$\int_\gamma f^*\omega = \int_{f\circ\gamma} \omega$$

iii) Sei X eine Riemannsche Fläche und γ ein geschlossener Weg in X, der weder Null- noch Polstelle einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ trifft. Zeigen Sie, dass

   $$\int_\gamma \frac{df}{f} \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

   gilt.