Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt

Aufgabe 31: Sei $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Zeigen Sie exemplarisch, dass

$$\delta \circ \delta : \check{C}^0(\mathscr{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^1(\mathscr{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^2(\mathscr{U}, \mathcal{F})$$

der Null-Morphismus ist.

Aufgabe 32: Seien $\mathscr{W} \leq \mathscr{V} \leq \mathscr{U}$ jeweils Verfeinerungen offener Überdeckungen. Zeigen Sie, dass die Verfeinerungsabbildungen in Čech-Kohomologie wie erwartet kommutieren, das heißt, dass das folgende Dreieck kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\check{H}^r(\mathscr{U}, \mathcal{F}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \check{H}^r(\mathscr{W}, \mathcal{F}) \\
& \check{H}^r(\mathscr{V}, \mathcal{F}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 33: Zeigen Sie, dass die Verfeinerungsabbildung auf Čech-Kohomologie

$$\check{H}^r(\mathscr{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^r(\mathscr{V}, \mathcal{F})$$

für eine Verfeinerung $\mathscr{V} \leq \mathscr{U}$ immer injektiv ist.

Aufgabe 34: Betrachten Sie die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{CP}^1$ aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathscr{U} = (U_0, U_1)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf $\mathbb{CP}^1$). Zeigen Sie, dass[1]

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m-1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

[1] Beachten Sie, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar $\mathbb{C}$-linear.