

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

**Aufgabe 35:** Seien  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$$

*Hinweis:* Finde  $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$  mit einfach zusammenhängenden  $U_1, U_2$ , so dass  $U_1 \cap U_2$  genau  $n + 1$  Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

**Aufgabe 36:** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung

$$\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}),$$

induziert durch die Inklusion  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ , ist injektiv.

ii)  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$  ist ein endlich erzeugter freier  $\mathbb{Z}$ -Modul.

*Hinweis:* Zeige zuerst, dass  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$  endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$  (Torsions-)frei ist.

**Aufgabe 37:** Sei  $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$  mit  $0 < r \leq \infty$ . Sei weiter  $\mathcal{H}$  die Garbe der harmonischen Funktionen auf  $\Delta$ , d.h.

$$\mathcal{H}(U) = \{f \in \mathcal{E}(U) \mid \partial \bar{\partial} f = 0\}, \quad \text{für } U \subset \Delta \text{ offen.}$$

Zeige, dass  $\check{H}^1(\Delta, \mathcal{H}) = 0$  gilt.

**Aufgabe 38:** Sei  $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$  mit  $U_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $U_2 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

i) Zeige, dass  $\mathcal{U}$  eine Leray-Überdeckung für  $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$  ist.

ii) Versuche damit  $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$  zu bestimmen.