

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

12. Blatt – Abgabe 21.01, Übung 22.01

**Aufgabe 38:** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  gegeben. Weiter sei zu jedem  $i \in I$  eine Garbe  $\mathcal{F}_i$  auf  $U_i$  gegeben. Außerdem haben wir für alle  $i, j \in I$  Isomorphismen  $\Phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$  auf  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  gegeben, welche  $\Phi_{ii} = \text{id}_{\mathcal{F}_i}$  und  $\Phi_{ik} = \Phi_{jk} \circ \Phi_{ij}$  auf  $U_{ijk}$  erfüllen. Zeige, dass wir die  $\mathcal{F}_i$  zu einer Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  verkleben können. Genauer: Zeige, dass eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  mit  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$  für alle  $i \in I$  existiert.

**Aufgabe 39:** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\mathcal{O}$  die Garbe der holomorphen Funktionen. Es bezeichne  $\mathcal{O}^\times$  die Garbe der nirgends-verschwindenden holomorphen Funktionen, also  $\mathcal{O}^\times(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^\times \mid f \text{ holomorph}\}$ . Dies ist eine Garbe von abelschen Gruppen vermöge der Multiplikation.

### Definitionen:

- Eine  $\mathcal{O}$ -Modulgarbe auf  $X$  ist eine Garbe  $\mathcal{L}$ , so dass jedes  $\mathcal{L}(U)$  ein  $\mathcal{O}(U)$ -Modul ist und die Modulstruktur verträglich mit den Restriktionen ist.
- Eine solche heißt *holomorphes Geradenbündel*, wenn gilt:

$$\forall x \in X \exists x \in U \subset X : \mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}|_U,$$

das heißt, dass man einen Garbenisomorphismus der eingeschränkten Garben hat.

Sei nun  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung mit Isomorphismen  $\psi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}|_{U_i}$ . Das Datum  $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$  nennen wir ein *System lokaler Trivialisierungen* von  $\mathcal{L}$ . Wir definieren

$$g_{ij} := \psi_j(U_{ij}) \circ \psi_i(U_{ij})^{-1}(1) \in \mathcal{O}^\times(U_{ij}).$$

Zeige<sup>1</sup>, dass:

- $\eta = (g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\times)$  gilt, und wir somit eine Klasse  $c(\mathcal{L}) := [\eta] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}^\times)$  erhalten,
- diese Klasse nicht von der Wahl der Trivialisierungen abhängt.

*Hinweis:* Zwei offene Überdeckungen haben stets eine gemeinsame Verfeinerung, also kann man annehmen, dass jede Trivialisierung auf der gleichen offenen Überdeckung definiert ist.

**Aufgabe 40:** Ist umgekehrt  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung und ein Kozykel  $(g_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\times)$  gegeben, dann konstruiere dazu ein Geradenbündel  $\mathcal{L}$ , so dass  $c(\mathcal{L}) = [(g_{ij})_{ij}] \in \check{H}^1(X, \mathcal{O}^\times)$  gilt.

*Hinweis:* Setze  $\mathcal{L}_i := \mathcal{O}|_{U_i}$  und benutze an geeigneter Stelle Aufgabe 38.

**Bemerkung:** Wir haben nun Teile des Satzes bewiesen, dass man einen Isomorphismus

$$\text{Pic}(X) \cong \check{H}^1(X, \mathcal{O}^\times)$$

zwischen der Picardgruppe<sup>2</sup>  $\text{Pic}(X)$  von Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf  $X$  (mit dem offensichtlichen Isomorphiebegriff) und obiger Čech-Kohomologiegruppe hat.

<sup>1</sup>Beachte, dass aus + jetzt · wurde.

<sup>2</sup>Die Gruppenmultiplikation auf  $\text{Pic}(X)$  ist durch das Tensorprodukt gegeben.