Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

Hinweis: Finde $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

Aufgabe 36: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung
$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}),$$
induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

ii) $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ ist ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ (Torsions-)frei ist.

Aufgabe 37: Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige, dass folgende kurze Sequenz von Garben exakt ist:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(1)} \to 0$$

Hinweis: Die obige Sequenz heißt exakt, wenn für alle offenen Mengen $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}(U) \to \mathcal{E}(U) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(1)}(U) \to 0$$

exakt ist. Nutze für die Surjektivität von $\overline{\partial}$ das Dolbeault Lemma.