Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

**Prof. Dr. Marco Hien,**
**Sven Prüfer**

# Aufgaben zu Riemannschen Flächen

3. Blatt – Übung am Montag, 31.10.2016

**Aufgabe 9:** Betrachte Gitter $\Gamma(\tau) := \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$ für $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Seien nun $\tau \in \mathbb{H}$ gegeben und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\} .$$

Zeigen Sie, dass für $\tau' := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ gilt, dass die beiden Tori $\mathbb{C}/\Gamma(\tau)$ und $\mathbb{C}/\Gamma(\tau')$ isomorph sind.

**Aufgabe 10:** Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf dem topologischen Raum $X$. Begründen Sie, dass $\alpha$ zu jedem $x \in X$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

induziert. Zeigen Sie: Ist $U \subset X$ offen und $\alpha_x$ für alle $x \in U$ injektiv, so ist auch $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv.

**Aufgabe 11:** Auf $\mathbb{CP}^1$ betrachte die beiden offenen Mengen

$$U_0 := \mathbb{C} \text{ und } U_1 := \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} .$$

Sei $m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass durch

$$U \mapsto \{(f_0, f_1) \mid f_j : U \cap U_j \to \mathbb{C} \text{ holomorph und es gilt } f_0(z) = z^m f_1(z) \text{ für alle } z \in U \cap U_0 \cap U_1\}$$

eine Garbe auf $\mathbb{CP}^1$ definiert ist (was sind die Restriktionen?). Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$. Bestimmen Sie die *globalen Schnitte* $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)(\mathbb{CP}^1)$ in Abhängigkeit von $m$.

**Aufgabe 12:** Sei $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $\Lambda = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$. Zeige:

i) durch

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Lambda}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

ist eine meromorphe Funktion auf dem Torus $T := \mathbb{C}/\Lambda$ definiert.

ii) $\wp$ hat einen Pol der Ordnung $2$ bei $p := 0 + \Lambda \in T$ und muss mindestens eine Nullstelle besitzen.[1]

Zur Aufgabe 12 beachte, dass die Lokalisierung der Nullstellen nicht trivial ist, vgl.

**Theorem.** *The zeros of* $\wp(z,\tau)$ $(\tau \in \mathfrak{H},\ z \in \mathbb{C})$ *are given by*

$$z = m + \frac{1}{2} + n\tau \pm \left(\frac{\log(5+2\sqrt{6})}{2\pi i} + 144\pi i\sqrt{6}\int_\tau^{i\infty}(t-\tau)\frac{\Delta(t)}{E_6(t)^{3/2}}\,dt\right)$$

$(m, n \in \mathbb{Z})$, *where* $E_6(t)$ *and* $\Delta(t)$ $(t \in \mathfrak{H})$ *denote the normalized Eisenstein series of weight 6 and unique normalized cusp form of weight 12 on* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *respectively, and the integral is to be taken over the vertical line* $t = \tau + i\mathbb{R}_+$ *in* $\mathfrak{H}$.

(aus M. Eichler, D. Zagier, *On the Zeros of the Weierstraß $\wp$-function*, Math. Ann. 258, 399 – 407 (1982))

[1] Betrachte dazu $\wp$ als doppelt-periodische Funktion auf $\mathbb{C}$ und benutze ein geeignetes Pol-/Nullstellen zählendes Integral.