Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

7. Blatt – Abgabe 03.12, Übung 04.12

Definition: Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen. Der *Verzweigungsindex* von f bei $x \in X$ ist definiert als

$$b_x(f) := \mathrm{ord}_x(f) - 1.$$

Der *totale Verzweigungsgrad* von f ist definiert als

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_x(f).$$

(Beachte, dass nur endlich viele Summanden ungleich Null sind.)

Riemann–Hurwitz–Formel: Ist $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen mit Blätterzahl $m \in \mathbb{N}$ und totalem Verzweigungsgrad $b(f)$, so gilt für die Geschlechter von X und Y:

$$g(X) = \frac{b(f)}{2} + m \cdot (g(Y) - 1) + 1.$$

Insbesondere ist der totale Verzweigungsgrad damit immer gerade.

Aufgabe 22: Wir wollen in dieser Aufgabe die Riemann-Hurwitz-Formel beweisen.

Dabei gehen wir wie folgt vor:

i) Ist X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit beliebiger Triangulierung, so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

Damit ist $\chi(X)$ insbesondere unabhängig von der gewählten Triangulierung auf X.

ii) In obiger Situation gilt:

$$\chi(X) = m \cdot \chi(Y) - b(f).$$

Hinweis: Aufgabe 21

iii) Folgere nun die Riemann-Hurwitz-Formel.

Aufgabe 23: Zeige mithilfe der Riemann-Hurwitz-Formel und der Weierstraß $\wp$-Funktion, dass ein Torus Geschlecht 1 hat.

Aufgabe 24: Im Folgenden seien X, Y kompakte Riemannsche Flächen und f stets holomorph und nicht konstant. Leite aus der Riemann–Hurwitz-Formel her:

i) Wenn $f : X \to Y$ existiert, dann gilt: $g(X) \geq g(Y)$

ii) Wenn $f : \mathbb{CP}^1 \to Y$ existiert, dann ist Y homöomorph zur Sphäre.

iii) Wenn $f : X \to Y$ mit Blätterzahl 1 existiert, so ist f schon biholomorph.

iv) Wenn $f \in \mathcal{M}(X)$ mit nur einem einfachen Pol exisitiert, so ist X isomorph zu $\mathbb{CP}^1$.