Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-
Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt – Abgabe 04.02, Übung 05.02

Aufgabe 45: Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X. Zeige:

i) Die Garbe $\mathcal{O}_D$ ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).

ii) $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ (als $\mathcal{O}$-Modulgarben) $\Leftrightarrow D \sim 0$.

Hinweis: Die Rückrichtung folgt schnell mit der Bemerkung unter 10.5. Für die Hinrichtung muss man sich vorher überlegen, was es für zwei $\mathcal{O}$-Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$ und damit ein $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$, man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene $U \subset X$, also auch auf Kartengebiete. Die Behauptung verlangt dann nach einem meromorphen g mit $(g) = D$ bzw. f mit $(f) = -D$.

Aufgabe 46: Zeige:

i) Die Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$ aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.

Hinweis: Zeige $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m) \cong \mathcal{O}_{m\cdot\infty}$, wobei $m \cdot \infty$ als Divisor zu verstehen ist.

ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf $\mathbb{CP}^1$ ein Hauptdivisor ist und folgere daraus, dass für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{CP}^1$ als Divisoren $P \sim Q$ gilt.

Hinweis: Man kann dafür z.B Riemann-Roch verwenden.

iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form $m \cdot \infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Damit gilt: $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$

Aufgabe 47:

i) Zeige, dass jedes holomorphe Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{CP}^1$ einen von 0 verschiedenen globalen meromorphen Schnitt besitzt und folgere daraus, dass es einen Divisor D gibt mit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D.$$

ii) Die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \mathrm{Div}(\mathbb{CP}^1) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^1).$$

Wir wollen nun folgern, dass[1]

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{CP}^1) \;\cong\; \mathrm{Div}(\mathbb{CP}^1)/\,\mathrm{Prin}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z}$$

gilt.

[1] Prin bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.