Blatt 2

Wednesday, October 15, 2025 12:54 PM

A4) $\underline{A}: U \mapsto \underline{A}(U) = \{f: U \to A \mid f \text{ stetig}\}$, wobei A diskr. Topologie trägt, d.h. $\forall a \in A: \{a\} \subseteq A$ offen.

(i) Wie sehen die Schnitte dieser Garbe aus?

$f: U \to A$ stetig $\iff \forall\, V \subseteq A$ offen: $f^{-1}(V) \subseteq U$ offen

Da A diskr. Top. trägt, ist jede Teilmenge von A offen, insb.

$$U_a := f^{-1}(\{a\}) = \{x \in U \mid f(x) = a\} \subseteq U \text{ offen.}$$

Die Mengen U_a bilden eine disj. Überdeckung von U d.h. $U = \dot{\bigcup}_{a \in A} U_a$

Falls U zshg. folgt, dass die Vereinigung trivial ist, d.h. $\exists!\, a_0 \in A: U_{a_0} = U \wedge \forall a \in A \setminus \{a_0\}: U_a = \emptyset$.

$\Rightarrow f$ konst.

Falls U nicht zshg ist, betrachte die Zshgskmp. von U. Auf jeder von diesen ist f konst, d.h. f ist lok. konst

Wir können also zusammenfassen:

$$\underline{A}(U) = \{f: U \to A \mid f \text{ lokal konst.}\}$$

(Damit auch klar warum konst. Garbe)

(ii) $\underline{zz}$: Für $x \in X$ gilt kanonisch $\underline{A}_x \cong A$

Bew: Sei $\varphi : \underline{A}_x \to A$ (Gruppenhom klar)
$[f] \mapsto f(x)$

Wohldef: Seien $g \in [f]$

z.z.: $g(x) = f(x)$

Bew: $g \in [f]$, d.h. $\exists\, U \subseteq X$ offene Umg. von x mit
$g|_U = f|_U \overset{x \in U}{\Rightarrow} g(x) = f(x)$

$\psi : A \to \underline{A}_x$ (Gruppenhom klar)
$a \mapsto [\mathrm{const}_a]$

Beh: $\varphi \circ \psi = id_A$, $\psi \circ \varphi = id_{\underline{A}_x}$

Bew: $\varphi \circ \psi(a) = \varphi([\mathrm{const}_a]) = \mathrm{const}_a(x) = a$ ✓

$\psi \circ \varphi([f]) = \psi(f(x)) = [\mathrm{const}_{f(x)}] = [f]$

f lokal konst, d.h. $\exists\, U \subseteq X$ off. Umg von x mit
$f|_U \equiv f(x)$
$\Rightarrow f|_U = \mathrm{const}_{f(x)}|_U$

□

A5) F, G Garben auf X, $\varphi: F \to G$ ...

A5) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben auf X, $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Garbenmor.

Beh.: $\ker(\alpha): U \mapsto \ker \alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$

definiert eine Garbe $\ker \alpha$

Bew.: z.z.: 1) Zuordnung liefert Prägarbe

2) Garbenaxiome erfüllt

zu 1): $\forall\, U \subseteq X$ offen: $\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)$ abelsche Gruppe

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Garbenmorphismus heißt:

- $\forall U \subseteq X$ offen: $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ Gruppenhom
- $\forall\ V \underset{\text{off}}{\subseteq} U \underset{\text{off}}{\subseteq} X$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d, "{}^{\mathcal{F}}\rho^U_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{}^{\mathcal{G}}\rho^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

Sei $U \subseteq X$ offen. Dann

$\ker \alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) = \{ s \in \mathcal{F}(U) \mid \alpha(U)(s) = 0 \in \mathcal{G}(U) \}$

Bekannt $\ker \alpha(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ Untergruppe, also selbst ab. Gruppe

Restriktionen von $\mathcal{F}$ vererbt:

Seien $V \underset{\text{off}}{\subseteq} U \underset{\text{off}}{\subseteq} X$. Dann

${}^{\ker\alpha}\rho^U_V : \ker \alpha(U) \to \ker \alpha(V),\ s \mapsto {}^{\mathcal{F}}\rho^U_V(s)$

Gruppenhom. weil ${}^{\mathcal{F}}\rho^U_V$ Gruppenhom und für

Gruppenhom, weil ${}^{\mathcal{F}}\varrho^{U}_{V}$ Gruppenhom und für

$W \underset{\text{off}}{\subseteq} V \underset{\text{off}}{\subseteq} U \underset{\text{off}}{\subseteq} X$ gilt

1) ${}^{\ker\alpha}\varrho^{V}_{W} \circ {}^{\ker\alpha}\varrho^{U}_{V}(s) = {}^{\mathcal{F}}\varrho^{V}_{W} \circ {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U}_{V}(s) = {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U}_{W}(s) = {}^{\ker\alpha}\varrho^{U}_{W}(s)$

2.) $\ker\alpha(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}(\emptyset) \Rightarrow \ker\alpha(\emptyset) = \emptyset$

3.) ${}^{\ker\alpha}\varrho^{U}_{U}(s) = {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U}_{U}(s) = s \Rightarrow {}^{\ker\alpha}\varrho^{U}_{U} = id_{\ker\alpha(U)}$

Damit ist $\ker\alpha$ eine Prägarbe.

zu 2: 1.) Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ off. Überd. von $U \subseteq X$ off.

Sei weiter $s \in \ker(\alpha(U))$ mit ${}^{\ker\alpha}\varrho^{U}_{U_i}(s) = 0 \ \forall i \in I$

$\Rightarrow {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U}_{U_i}(s) = 0 \Rightarrow s = 0 \in \ker\alpha(U)$

2.) Wieder $(U_i)_{i\in I}$ wie in 1.)

Seien $s_i \in \ker\alpha(U_i)$ für alle $i \in I$ geg mit

$\forall i,j \in I: \ {}^{\ker\alpha}\varrho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = {}^{\ker\alpha}\varrho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$

$\Rightarrow \forall i,j \in I: \ {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$

$\Rightarrow \exists\, s \in \mathcal{F}(U): \forall i \in I: {}^{\mathcal{F}}\varrho^{U}_{U_i}(s) = s_i$

$s \in \ker\alpha(U)$?

$\forall i \in I \ \ {}^{\mathcal{G}}\varrho^{U}_{U_i}(\alpha(U)(s)) = 0$ (wg. komm. Diagramm)

$\forall i \in I \quad \rho_{U_i} \ldots$

$\Rightarrow \exists\, t \in \mathcal{G}(U) : \forall i \in I : {}^{\mathcal{G}}\rho^{U}_{U_i}(t) = {}^{\mathcal{G}}\rho^{U}_{U_i}(\alpha(U)(s)) = \alpha(U_i)(\underbrace{{}^{\mathcal{F}}\rho^{U}_{U_i}(s)}_{=s_i}) = 0$

$\mathcal{G}$ Garbe

$\xRightarrow[\text{Garbenaxiom}]{}\; t = 0 \in \mathcal{G}(U) \Rightarrow s \in \ker \alpha(U)$

$\square$

A6) X Riem. Fläche.

ZZ: $2\pi i\mathbb{Z} = \ker(\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^{\times})$

Bew: Sei $U \subseteq X$ offen.

$\ker \exp(U) = \{ f \in \mathcal{O}_X(U) \mid e^f = 1 \in \mathcal{O}_X^{\times} \}$

$\Rightarrow \forall f \in \ker \exp(U) : \forall x \in U : e^{f(x)} = 1$

$\Rightarrow \forall f \in \ker \exp(U) : \forall x \in U : f(x) \in 2\pi i\mathbb{Z}.$

Seien $(U_i)_{i \in I}$ die Zhgskmpt. von U dann

$\forall f \in \ker \exp(U) : \forall i \in I : f|_{U_i} \equiv 2\pi i k, \; k \in \mathbb{Z}.$

$\Rightarrow \ker \exp(U) = 2\pi i\mathbb{Z}.$

$\square$

A7) Betrachte Prägarbe

$$P: U \mapsto \left(\text{Bild}\left(\frac{d}{dz}: \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)\right)\right)$$

<u>Beh.:</u> Keine Garbe

<u>Bew.:</u> Wähle $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$U_1 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}, \quad U_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dann $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ off. Überd. von U.

Dann ex.

$$s_1 := \left(U_1 \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}\right) \in P(U_1) \quad \text{und}$$

$$s_2 := \left(U_2 \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}\right) \in P(U_2),$$

weil U_1 und U_2 einf. zshgd und damit ein holom. log auf U_1 und U_2 ex.

Außerdem $s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2}$,

aber es ex. kein $s \in P(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$, $i = 1, 2$,

denn ein solches $s: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ hat keine Stammfkt. $\square$