Blatt 7

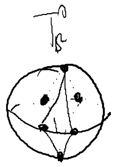
Wednesday, November 19, 2025 12:30 PM

A7.1 i) X kpt. RF, $g(X) = g$

ZZ: $\chi(X) = 2-2g$

Bew: Satz 5.3:

X homöom zu S^2 $(g=0)$, oder Fläche mit $4g$ Kanten



6 Ecken
12 Kanten
8 Flächen
$\chi(S^2)=2$

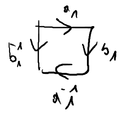
$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$
$a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g^{-1}, b_g^{-1}$

Verkleben

Je 2 Kanten werden verklebt $\Rightarrow$ $2g$ Kanten

Alle $4g$ Ecken werden durch die Kantenidentifikation zu genau einem Eck

Bsp. Torus



alle Ecken werden identifiziert und analog für $g \geq 1$

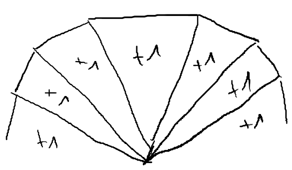
Wir haben vorm Verkleben eine Fläche und das bleibt auch danach so.

Also: $\chi(X) = E(X) - K(X) + F(X)$

$= 2 - 2g$

Sei T_X^0 folgende Triangulierung:

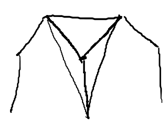
$$\left.\begin{array}{l} E(X) = 2 \\ F(X) = 4g \\ K(X) = 2g + 4g \end{array}\right\} \chi(X) = 2-2g \quad ✓$$



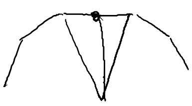
(ob hier auch $g=0$)

Sei T_X beliebige Triang. Dann haben T_X^0 und T_X eine gem. Verfeinerung. Also reicht es Verf. von T_X^0 zu betrachten.

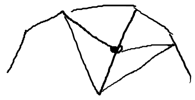
Chi ändert sich beim verfeinern nicht



+1 Eck
+2 Flächen $\rightsquigarrow$ Kürzt sich raus
+3 Kanten



+1 Ecke
+2 Kante $\rightsquigarrow$ Kürzt sich raus
+1 Fläche



+1 Ecke
+2 Fläche $\rightsquigarrow$ Kürzt sich raus
+3 Kanten

Also für alle Verfeinerungen von T_X^0 (und damit für alle Triang.)

$\chi(X) = 2-2g$ $\square$

(ii) $f: X \to Y$ hol. Abb. kpt RF, m-blättrig

ZZ: $\chi(X) = m\chi(Y) - b(f)$

Bew: Aus A7.1

$F(X) = m F(Y)$, $K(X) = m \cdot K(Y)$

$E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \# f^{-1}(S')$,

wobei $S \subseteq X$ VP von f, $S' = f(S)$.

$$\chi(X) = E(X) - K(X) + F(X)$$
$$= mE(Y\setminus S') + \# f^{-1}(S') - mK(Y) + mF(Y)$$
$$\overset{!}{=} m\chi(Y) - b(f)$$
$$\Leftrightarrow m \cdot \underbrace{E(Y\setminus S')}_{=E(Y) - \# S'} + \# f^{-1}(S') = mE(Y) - b(f)$$
$$\Leftrightarrow mE(Y) + \# f^{-1}(S') - m \cdot \# S' = mE(Y) - b(f)$$
$$\Leftrightarrow \# f^{-1}(S') - m \cdot \# S' = -b(f)$$
$$\Leftrightarrow \# f^{-1}(S') = m \cdot \# S' - b(f)$$

Dazu sei $p \in S$ mit $\operatorname{ord}_p f =: k$

$\Rightarrow b_p(f) = k-1$

Sei $q := f(p)$. Wie viele Urbilder hat q?

$m - \sum_{x \in f^{-1}(q)} b_x(f)$

$$\Rightarrow \# f^{-1}(S') = \sum_{q \in S'} \Big(m - \sum_{x \in f^{-1}(q)} b_x(f)\Big)$$
$$= m \cdot \# S' - \sum_{x \in f^{-1}(S')} b_x(f)$$
$$= m \cdot \# S' - \sum_{..} b_x(f) = m \# S' - b(f)$$

$$= m \cdot \# S - \sum_{x \in f^{-1}(S')} b_x(f)$$

$$\underset{\uparrow}{=} m \cdot \# S' - \sum_{x \in X} b_x(f) = m \cdot \# S' - b(f)$$

$\forall x \in X \setminus f^{-1}(S')$: unverzw. $\Rightarrow b_x(f) = 0$ $\square$

(iii) ZZ: In obiger Situation gilt

$$g(X) = \frac{b(f)}{2} + m(g(Y) - 1) + 1$$

Bew: $\chi(X) = 2 - 2g(X)$

$$= m \cdot \chi(Y) - b(f)$$

$$= m(2 - 2g(Y)) - b(f)$$

$$\Rightarrow 2 - 2g(X) = 2m - 2mg(Y) - b(f)$$

$$\Rightarrow g(X) = -m + 1 + mg(Y) + \frac{b(f)}{2}$$

$$= \frac{b(f)}{2} + m \cdot (g(Y) - 1) + 1$$

$\square$

A23) ZZ: $g(T) = 1$

Bew: Aus A17 (iii):

$p: T \to \mathbb{CP}^1$ 2 blättrige ÜL mit

VP $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}$ mit jew. ord 2

$$b(p) = \sum_{x \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}\}} \mathrm{ord}_x(p) = 4 \cdot (2 - 1) = 4$$

Also mit RH:

$$g(T) = \frac{b(p)}{2} + 2(g(\mathbb{CP}^1) - 1) + 1$$

$$= \frac{4}{2} + 2 \cdot (0 - 1) + 1$$

$$= 1$$

$\square$

A24) X, Y kpt RF

(i) $f: X \to Y$ hol & nicht konst

ZZ: $g(X) \geq g(Y)$

Bew: Falls $g(Y) = 0$ trivial, also

OE $g(Y) \geq 1$. Dann RH:

$$g(X) = \underbrace{\frac{b(f)}{2}}_{\geq 0} + 2(g(Y) - 1) + 1$$

$$\geq 2g(Y) - 1$$

$$= g(Y) + \underbrace{\overset{\geq 1}{g(Y)} - 1}_{\geq 0}$$

$$\geq g(Y)$$

$\square$

(ii) $f: \mathbb{CP}^1 \to Y$ hol & nicht konst

ZZ: Y homöom zur S^2

Bew: $0 = g(\mathbb{CP}^1) \overset{(i)}{\geq} g(Y) \geq 0$

$$\Rightarrow g(Y) = 0$$

$$\overset{\text{Satz 33}}{\Rightarrow} g(Y) \approx S^2$$

$\square$

Blätterzahl 1

(iii) ZZ: $\exists f: X \to Y$ mit $b(f) = 0$

Blätterzahl 1

(iii) ZZ: $\exists f: X \to Y$ mit $b(f) = 0$
$\Rightarrow f$ biholom

Bew: $b(f) = 0 \Rightarrow \forall x \in X: \operatorname{ord}_x f = 1$
$\Rightarrow f$ injektive Abb. zwischen kpt RF
$\overset{\text{Korollar 3.3}}{\Rightarrow}$ f offen, insb. $f(X) \subseteq Y$ offen & abg.
$\Rightarrow f$ surj.
$\Rightarrow f$ biholom. $\square$

(iv) ZZ: $f \in \mathcal{M}(X)$ mit nur einem einf Pol,
dann $X \cong \mathbb{CP}^1$

Bew: $f: X \to \mathbb{CP}^1$ holomorph und $\underset{\text{Blätterzahl 1}}{b(f) = 0}$,
denn ang. $\underset{\text{Blätterzahl>1}}{b(f) > 0}$, dann ex. $x \in X$ mit
$\operatorname{ord}_x(f) > 1 \Rightarrow f$ mind. 2-blättrig ↯ zu nur ein einf-Pol
$\overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} f$ biholomorph $\square$