

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt

Aufgabe 45: Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X . Zeige:

- i) Die Garbe \mathcal{O}_D ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).
- ii) $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ (als \mathcal{O} -Modulgarben) $\Leftrightarrow D \sim 0^1$

Aufgabe 46: Zeige:

- i) Die Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)$ aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.
- ii) Für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{CP}^1$ gilt $P \sim Q$ als Divisoren.
- iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form $m \cdot \infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.
- iv) Ist D ein beliebiger Divisor, dann existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$.

Aufgabe 47:

- i) Zeige, dass die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \text{Div}(\mathbb{CP}^1) \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{CP}^1)$$

definiert.

- ii) Zeige, dass jedes holomorphe Geradenbündel \mathcal{L} auf \mathbb{CP}^1 einen von 0 verschiedenen meromorphen Schnitt besitzt und folgere daraus, dass es einen Divisor D gibt mit

$$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D.^2$$

- iii) Folgere:³

$$\text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X) / \text{Prin}(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 48: Eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt *rational*, wenn es zwei verschiedene Punkte $P \neq Q$ in X gibt, so dass $P \sim Q$ als Divisoren. Zeige, dass X genau dann rational ist, wenn $X \cong \mathbb{CP}^1$.

¹Expertenaufgabe: Man muss sich vorher überlegen, was es für zwei \mathcal{O} -Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$ und damit ein $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$, man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene $U \subset X$.

²Riemann-Roch

³ Prin bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.