# Blatt 14

Monday, December 15, 2025 12:21 PM

A45 i) Zz: Der kan. Div auf $\mathbb{CP}^1$ ist $k = -2 \cdot \infty$

Bew: Warum der kan. Div.

$\omega, \omega' \in \mathcal{M}^{(1)}(\mathbb{CP}^1) \overset{10.3}{\rightsquigarrow} \exists f \in \mathcal{M}^\times(\mathbb{CP}^1): \omega' = f \cdot \omega$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\omega') = \operatorname{div}(f) \cdot \operatorname{div}(\omega)$, d.h.

die beiden kan. Divisoren unterscheiden sich nur durch einen Hauptdiv.

$\Rightarrow \operatorname{div}(\omega') \sim \operatorname{div}(\omega)$ (10.2)

($\omega = f(z)\,dz$ lokal an $p$

$\omega(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = 0$)

Betrachte $\omega$ mit $\omega|_{U_0} = dz$

$\omega$ hat auf $U_0 = \mathbb{C}$ keine Null- und Polstellen

Sei $\zeta = \frac{1}{z}$ Karte auf $U_\infty$

$dz = -\frac{1}{\zeta^2}\, d\zeta$

$\Rightarrow \omega|_{U_\infty} = -\frac{1}{\zeta^2}\, d\zeta$ hat 2-fachen Pol bei $\zeta = 0$ ($z = \infty$)

$\Rightarrow \operatorname{div}(\omega) = -2 \cdot \infty$

A46) $D \in \operatorname{Div}(X)$, $X$ kpt RF

(i) zz $\mathcal{O}_D$ ist holom. Geradenbündel

$\forall x \in U: \operatorname{ord}_x f \geq -D(x)$

Bew: Erinnerung
- $\mathcal{O}_D(U) = \{ f \in \mathcal{M}(U) \mid (f) \geq -D|_U \}$
- $\mathcal{O}$-Modulgarbe: $\mathcal{O}_D(U)$ ist $\mathcal{O}(U)$-Modul (vertr. mit Rest.)
- holom. Geradenbündel: $\mathcal{O}$-Modgarbe und

$$\forall x \in X \, \exists x \in U \subseteq X: \mathcal{O}_D|_U \cong \mathcal{O}|_U$$

zu $\mathcal{O}_D$ $\mathcal{O}$-Modgarbe:

Sei $U \subseteq X$ offen. Betrachte $f, g \in \mathcal{O}_D(U)$.

Sei $U \subseteq X$ offen. Betrachte $f, g \in \mathcal{O}_D(U)$.

$$(f+g) \geq \min\{(f),(g)\} \geq -D|_U$$

$\Rightarrow f+g \in \mathcal{O}_D(U)$

Für $h \in \mathcal{O}(U)$ gilt $(h) \geq 0$ (holom)

Also $(h \cdot f) = (h) \cdot (f) \geq (f) \geq -D|_U$

$\Rightarrow h \cdot f \in \mathcal{O}_D(U)$

Für $V \subseteq U$: $\mathcal{O}_D(U) \to \mathcal{O}_D(V)$, $f \mapsto f|_V$

Also $(f|_V) + D|_V = (f + D|_U)|_V \geq 0$

$\Rightarrow (f|_V) \geq -D|_V$

$\Rightarrow \mathcal{O}_D(U)$ ist $\mathcal{O}(U)$-Modul

<u>zu $\mathcal{O}_D$ holom. Geradenbündel!</u>

Schreibe $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P$

Sei $U$ Koordinatenumg um $P$ mit $n_P \neq 0$ und

$\forall Q \in U \setminus \{P\}: n_Q = 0$

$D|_U = n_P \cdot P$.

$$\text{Also } \mathcal{O}_D|_U = z^{-n_P}\mathcal{O}|_U := \{z^{-n_P} f \mid f \in \mathcal{O}(U)\}$$

$$\begin{array}{cc} \cong & z^{n_P} f \\ & \uparrow \downarrow \\ \mathcal{O}|_U & f \end{array}$$

(ii) <u>zz</u>: $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O} \Leftrightarrow D \sim 0$

<u>Bew</u>: <u>„$\Rightarrow$"</u>: $\psi : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}$

$f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D^{\times}(X)$

$(f) \geq -D$

Sei $P \in X$ mit $n_P \neq 0$ (wieder nur $n_p \neq 0$)

Sei $U$ Kartenumgebung von $p$. Dann

$$\begin{tikzcd}
f\cdot(\beta\circ z^{-1}) \arrow[ddd, bend right] & f|_U & 1|_U \arrow[l, mapsto] & & \beta\circ z^{-1} \arrow[llll, mapsto, bend right] \\
& \mathcal{O}_D|_U \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}|_U \arrow[l, "(\psi|_U)^{-1}"', "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & \alpha \arrow[d, mapsto] & \\
& z^{-n_p}\mathcal{O}_{B_r(0)}(B_r(0)) & \mathcal{O}_{B_r(0)}(B_r(0)) \arrow[l] & \alpha\circ z & \beta \arrow[uu, mapsto] \arrow[dll, mapsto, bend left] \\
(f\circ z)\cdot\beta & z^{-n_p}\cdot\beta \arrow[l, phantom, "\overset{(*)}{=}"] & & &
\end{tikzcd}$$

$(*) \Rightarrow \mathrm{ord}_p(f) = -n_p$

$\Rightarrow (f) = -D \quad (g := -f \Rightarrow (g) = D)$

"$\Leftarrow$": $D \sim 0$

mit Bem. unter 10.5

$\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$ $\square$

A47i) z.z.: $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$ hol. GB

Bew.:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1(m)}(U) = \{(f_0, f_\infty) \mid f_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U \cap U_j) \wedge \forall z \in U \cap U_0 \cap U_\infty : f_0(z) = z^m f_\infty(z)\}$$

$\rightsquigarrow z^m f_0(\tfrac{1}{z}) = f_\infty(\tfrac{1}{z})$

$$\begin{tikzcd}
(f|_{U_0}, z^m f|_{U_\infty}) & (f_0, f_\infty) \arrow[d, "\psi"] \\
f \arrow[u, "\varphi"] & f_0
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}_{m\cdot\infty}(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \mid f|_{\mathbb{C}\cap U} \text{ hol.} \wedge \mathrm{ord}_\infty(f) \geq -m\}$$

$\varphi, \psi$ offensichtlich wohldef. & Inverse $\square$

(ii) z.z.: $D \in Div(\mathbb{CP}1)$ mit $\deg(D) = 0 \Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}1) : div(f) = D$

Bew: Riemann-Roch:

$$\dim \check{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_D) - \dim \check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D)$$

$g = 0 = \deg(D)$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{O}_D(\mathbb{CP}1) = 1 + \dim \check{H}^1(\mathbb{CP}1, \mathcal{O}_D) \geq 1$$

$$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}_D(X) \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow (f) + D \geq 0$$

Da $\deg(f) = 0 = \deg D$, gilt: $E := (f) + D$ ist effektiv mit $\deg E = 0$, d.h. für $E = \sum_{P \in X} m_p \cdot P$ gilt $\sum m_p = 0$ und $\forall p \in X : m_p \geq 0 \Rightarrow (f) + D = 0$

Insb. für $D = P - Q$ ex. $g$ merom. mit

$(g) = P - Q \Rightarrow P \sim Q$. (als Divisoren) $\square$

(iii) z.z.: $\forall D \in Div(\mathbb{CP}1) : D \sim m \cdot \infty$ für ein $m \in \mathbb{Z}$

Bew: Sei $D = \sum_{i=1}^N n_i P_i$ mit $\sum_{i=1}^N n_i = m = \deg D$

Für jedes $P_i \neq \infty$ wähle $f_i$ mit

$(f_i) = P_i - \infty$

Sukzessiv erhält man

$$D \sim \left(\sum n_i\right) \cdot \infty = m \cdot \infty$$

Wir haben also $D \sim m \cdot \infty$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_D \overset{\text{Bem 10.5}}{\cong} \mathcal{O}_{m \cdot \infty} \overset{(i)}{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}1}(m)$$ $\square$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_D \overset{\text{Bem 10.5}}{\cong} \mathcal{O}_{m\cdot\infty} \overset{(i)}{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(m)$$ $\square$

A48) $X$ kpt RF

(i) ZZ: $\Phi: \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ Gruppenhom

$$D \longmapsto [\mathcal{O}_D]$$

Bew: Seien $D, E \in \mathrm{Div}(X)$.

$$\Phi(D+E) = [\mathcal{O}_{D+E}]$$

Nach VL gilt $\mathcal{O}_{D+E} \cong \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_E$

$$\Rightarrow \Phi(D+E) = [\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_E] = [\mathcal{O}_D] \otimes_{\mathcal{O}} [\mathcal{O}_E]$$

$$= \Phi(D) \otimes_{\mathcal{O}} \Phi(E)$$ $\square$

(ii) ZZ: $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Div}_H(X)$

Bew: Wissen $\Phi: \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ surj. (siehe Marcos Lsg Digicampus)

ker $\Phi$: Das neutrale Elt von Pic $(X)$ ist $[\mathcal{O}]$

Wir wissen $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O} \overset{46ii}{\Leftrightarrow} D \sim 0$, also $D$ HD 47ii, weil deg D=0

also $\Phi(D) = [\mathcal{O}] \Leftrightarrow D \in \mathrm{Div}_H(X)$

$\Rightarrow \ker \Phi = \mathrm{Div}_H(X)$

$\Rightarrow \overline{\Phi}: \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Div}_H(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ ist Iso.

(iii) ZZ: $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}$

Sei $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}P^1) \rightsquigarrow \mathcal{O}_D \overset{(A47\,iii)}{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(m)$, wobei $m = \deg(D)$.

D.h. $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^1) = \{ [\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(m)] \mid m \in \mathbb{Z} \}$

Haben also:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathbb{C}P^1) \arrow[r, "\bar{\Phi}", "\cong"'] \arrow[rr, bend left] & \mathrm{Div}(\mathbb{C}P^1)/\mathrm{Div}_H(\mathbb{C}P^1) \arrow[r, "\deg", "\cong"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$$[\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(m)] \mapsto [m \cdot \infty] \xrightarrow[\deg]{} m$$

$\square$