

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

14. Blatt – Abgabe 04.02, Übung 05.02

**Aufgabe 45:** Zeige, dass der kanonische Divisor auf  $\mathbb{CP}^1$  äquivalent zu

$$K = -2 \cdot \infty$$

ist (was heißt das eigentlich?).

**Aufgabe 46:** Sei  $D$  ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$ . Zeige:

i) Die Garbe  $\mathcal{O}_D$  ist ein holomorphes Geradenbündel (vgl. Blatt 12).

ii)  $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$  (als  $\mathcal{O}$ -Modulgarben)  $\Leftrightarrow D \sim 0$ .

*Hinweis:* Die Rückrichtung folgt schnell mit der Bemerkung unter 10.5. Für die Hinrichtung muss man sich vorher überlegen, was es für zwei  $\mathcal{O}$ -Modulgarben bedeutet, isomorph zu sein! Insbesondere hat man einen Isomorphismus  $\mathcal{O}_D(X) \cong \mathcal{O}(X)$  und damit ein  $f := \psi^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)$ . Man hat aber auch die Restriktionen auf beliebige offene  $U \subset X$ , also auch auf Kartengebiete. Die Behauptung verlangt dann nach einem meromorphen  $g$  mit  $(g) = D$  bzw.  $f$  mit  $(f) = -D$ .

**Aufgabe 47:** Zeige:

i) Die Garben  $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$  aus Blatt 3 sind holomorphe Geradenbündel.

*Hinweis:* Zeige  $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m) \cong \mathcal{O}_{m \cdot \infty}$ , wobei  $m \cdot \infty$  als Divisor zu lesen ist.

ii) Zeige, dass jeder Divisor von Grad 0 auf  $\mathbb{CP}^1$  ein Hauptdivisor ist und folgere daraus, dass für je zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{CP}^1$  als Divisoren  $P \sim Q$  gilt.

*Hinweis:* Man kann dafür z.B. Riemann-Roch verwenden.

iii) Jeder Divisor ist bis auf Äquivalenz von der Form  $m \cdot \infty$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ . Damit gilt:  $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$

**Aufgabe 48:** Sei  $X$  wieder eine kompakte Riemannsche Fläche.

i) Zeige, dass die Zuordnung

$$D \mapsto [\mathcal{O}_D]$$

einen Gruppenhomomorphismus<sup>1</sup>

$$\Phi : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X).$$

definiert.

ii) Man kann zeigen, dass diese Zuordnung sogar surjektiv ist, d.h. zu jedem holomorphen Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $X$  gibt es einen Divisor  $D$  mit  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_D$ . Das ist aber für eine Übungsaufgabe zu aufwendig.<sup>2</sup>

Zeige damit<sup>3</sup>

$$\text{Pic}(X) \cong \text{Div}(X) / \text{Div}_H(X).$$

iii) Folgere

$$\text{Pic}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

<sup>1</sup>Erinnerung: Die Gruppenstruktur auf  $\text{Pic}$  ist durch das Tensorprodukt gegeben.

<sup>2</sup>Marco hat eine Lösung für dieses Problem verfasst. Diese wird im Digicampus hochgeladen. Wir empfehlen, diese zu lesen.

<sup>3</sup> $\text{Div}_H$  bezeichnet hier die Untergruppe der Hauptdivisoren.