

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

### 10. Blatt

**Aufgabe 32:** Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf  $X$  und  $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$  die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \mapsto \{ \sigma : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ stetig} \mid \pi \circ \sigma = \text{id}_U \}.$$

Zeige, dass

- i)  $\mathcal{G}$  eine Garbe ist
- ii) und es einen kanonischen Isomorphismus  $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$  für jedes  $p \in X$  gibt.

**Bemerkung:** Zu Beginn des Semesters haben wir Garben kennengelernt. Damals fiel der Begriff *Garbifizierung*. Die hier gesehene Garbe  $\mathcal{G}$  ist die Garbifizierung der Prägarbe  $\mathcal{F}$ .

**Aufgabe 33:** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$  eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}_{\text{alt}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

**Bemerkung:** Das gilt auch allgemein für alle  $\check{H}^r$  und ohne Kompaktheit und Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen. Das darf aber ab jetzt für Aufgaben verwendet werden.

**Aufgabe 34:** Betrachte die Garben  $\mathcal{O}(m)$  auf  $\mathbb{CP}^1$  aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei  $\mathcal{U} = (U_0, U_\infty)$  die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf  $\mathbb{CP}^1$ ). Zeige, dass<sup>1</sup>

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m - 1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

*Hinweis:* Wir hatten in Aufgabe 10 die holomorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  als Potenzreihen betrachtet. Jetzt haben wir holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}^*$ , können diese also als Laurentreihen auffassen.

<sup>1</sup>Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise  $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte  $\mathcal{O}(m)(U)$  dies sind und die Korand-Operatoren  $\delta$  offenbar  $\mathbb{C}$ -linear.