Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{CP}^1$ aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathscr{U} = (U_0, U_1)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf $\mathbb{CP}^1$). Zeige, dass[1]

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m-1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

Aufgabe 36: Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

Hinweis: Finde $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

Aufgabe 37: Sei $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$$

genau dann eine Lösung $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit kompaktem Träger hat, wenn

$$\int_{\mathbb{C}} z^n g(z)\, dz \wedge d\overline{z} = 0 \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

[1] Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar $\mathbb{C}$-linear.