

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

7. Blatt – Abgabe 03.12, Übung 04.12

**Definition:** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine nicht konstante holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen. Der *Verzweigungsindex* von  $f$  bei  $x \in X$  ist definiert als

$$b_x(f) := \text{ord}_x(f) - 1.$$

Der *totale Verzweigungsgrad* von  $f$  ist definiert als

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_x(f).$$

(Beachte, dass nur endlich viele Summanden ungleich Null sind.)

**Riemann–Hurwitz–Formel:** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine nicht konstante holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen mit Blätterzahl  $m \in \mathbb{N}$  und totalem Verzweigungsgrad  $b(f)$ , so gilt für die Geschlechter von  $X$  und  $Y$ :

$$g(X) = \frac{b(f)}{2} + m \cdot (g(Y) - 1) + 1.$$

Insbesondere ist der totale Verzweigungsgrad damit immer gerade.

**Aufgabe 22:** Wir wollen in dieser Aufgabe die Riemann-Hurwitz-Formel beweisen.

Dabei gehen wir wie folgt vor:

- i) Ist  $X$  kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ , so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

Damit ist die  $\chi(X)$  insbesondere unabhängig von der Triangulierung auf  $X$ .

- ii) In obiger Situation gilt:

$$\chi(X) = m \cdot \chi(Y) - b(f).$$

*Hinweis:* Aufgabe 21

- iii) Folgere nun die Riemann-Hurwitz-Formel.

**Aufgabe 23:** Zeige mithilfe der Riemann-Hurwitz-Formel und vermöge der Weierstraß  $\wp$ -Funktion, dass ein Torus Geschlecht 1 hat.

**Aufgabe 24:** Im Folgenden seien  $X, Y$  kompakte Riemannsche Flächen und  $f$  stets holomorph und nicht konstant. Leite aus der Riemann–Hurwitz–Formel her:

- i) Wenn  $f : X \rightarrow Y$  existiert, dann gilt:  $g(X) \geq g(Y)$
- ii) Wenn  $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow Y$  existiert, dann ist  $Y$  homöomorph zur Sphäre.
- iii) Wenn  $f : X \rightarrow Y$  mit  $b(f) = 0$  existiert, so ist  $f$  schon biholomorph.
- iv) Wenn  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit nur einem einfachen Pol existiert, so ist  $X$  isomorph zu  $\mathbb{CP}^1$ .