

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt

Aufgabe 32: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}_{\text{alt}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Bemerkung: Das gilt auch allgemein für alle \check{H}^r und ohne Kompaktheit und Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen. Das darf aber ab jetzt für Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 33: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

- i) Die Abbildung

$$\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{C}),$$

induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

- ii) $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ ist ein endlich erzeugter freier \mathbb{Z} -Modul ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \mathbb{Z})$ frei ist.

Aufgabe 34: Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{ \sigma : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ stetig} \mid \pi \circ \sigma = \text{id}_U \}.$$

Zeige, dass

- i) \mathcal{G} eine Garbe ist
- ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.