Riemannsche Flächen Blatt 11 

36.

(i) $F$ Prägarbe auf $X$, $\pi : |F| \to X$ Überlagerung

$$U \mapsto \mathcal{S}(U) = \{\sigma : U \to |F| \text{ stetig mit } \pi \circ \sigma = id\}$$

1. $\mathcal{S}$ Prägarbe: $\rho^V_U : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(U)$ für $U \subset V$ offen
$\sigma \mapsto \sigma|_U$

$\Rightarrow$ $Z \subset W \subset V$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}(V) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{S}(W) \arrow[r] & \mathcal{S}(Z) \end{tikzcd} \checkmark$$

- $\mathcal{S}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\rho^V_V = id$

2. Separiertheit: $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, $s \in \mathcal{S}(V)$ : $s|_{V_i} = 0 \ \forall i \in I$

$s : V \to |F|$ stetig s.d. $\pi \circ s = id$

$\forall p \in V \Rightarrow p \in V_i \Rightarrow s(p) = s|_{V_i}(p) = 0 \in F_p$

$\Rightarrow$ $s = 0 \in \mathcal{S}(V)$

3. Verkleben: $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, $s_i \in \mathcal{S}(V_i)$ : $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$

Def. $s \in \mathcal{S}(V)$ mittels $s(p) = s|_{V_i}(p)$ für $p \in V_i$

$\rightsquigarrow$ wohldefiniert, stetige Abb. und $\pi \circ s = id$ punktweise

(ii) ②

$$\mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{S}_p$$

$$\underset{\text{im } p \in U}{[s \in \mathcal{F}(U)]} \longmapsto \left[\ \tilde{s} : \begin{array}{l} U \to |\mathcal{F}| \\ q \mapsto [s] \in \mathcal{F}_q \end{array} \right]$$

○ $\tilde{s} \in \mathcal{S}(U)$ : erfüllt $\pi \circ \tilde{s} = id$ laut Def., stetig wegen Def. der Topologie auf $|\mathcal{F}|$:

$\tilde{s}(q) = b_x \in |\mathcal{F}|$

$\in$ $\cup$ offen, Basis d. Top.

$\{([b]_x, x) : x \in W \overset{offen}{\subset} X, b \in \mathcal{F}(W)\}$

$V \overset{offen}{\subset} X \Rightarrow \tilde{s}(V)$

○ wohldefiniert : $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$ : $\exists W \subset U \cap V$, $p \in W$, $s|_W = t|_W$

$\Rightarrow \tilde{s}|_W = \tilde{t}|_W$

○ Injektivität : $[\tilde{s}] = [\tilde{t}] \Rightarrow \exists U \overset{offen}{\subset} X$, $p \in U$ : $\tilde{s}|_U(q) = \tilde{t}|_U(q) \in \mathcal{F}_q$ $\forall q \in U$

$\Rightarrow$ insb. $\tilde{s}|_U(p) = \tilde{t}|_U(p)$

$\Rightarrow [s] = [t]$ in $\mathcal{F}_p$

○ Surjektivität : $t : U \to |\mathcal{F}| \in \mathcal{S}(U) \Rightarrow t(p) \in \mathcal{F}_p$, $p \in U$

$[t] \in \mathcal{S}_p$

$\Rightarrow t(p) = [s \in \mathcal{F}(V)]$ im $p \in V \overset{offen}{\subset} X$

Betrachte $\mathcal{F}_p \to \mathcal{S}_p$

$$[s] \longmapsto \left[\ \tilde{s} : \begin{array}{l} U \to |\mathcal{F}| \\ q \mapsto [s] \in \mathcal{F}_q \end{array} \right]$$

$|\mathcal{F}| \to X$ Überlagerung, $\tilde{s}|_{U\cap V}, t|_{U\cap V}$ $U \cap V \to |\mathcal{F}|$ mit $\pi \circ \tilde{s}/t = id$, stetig und $t(p) = \tilde{s}(p)$

Eindeutigkeit von Lifts : $\tilde{s}|_{U\cap V} = t|_{U\cap V} \Rightarrow [\tilde{s}] = [t] \in \mathcal{S}_p$