(i)

∘ $z \notin \Lambda \Rightarrow \wp(z) < \infty$, weil λ linear im Abstand ist

$$\Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{\lambda^2} < 0 \ , \ \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{(z+\lambda)^2} < 0$$

$$\Rightarrow \underset{=: f}{\wp} : \mathbb{C}\setminus\Lambda \to \mathbb{C} \text{ Funktion}$$

∘ ordne $\lambda\in\Lambda$ nach aufsteigendem Abstand an $\rightsquigarrow \Lambda^i := \{\lambda^j \in \Lambda \mid j \le i\}$

$$f_i(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\in\Lambda^i}} \left(\frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ hol. auf } \mathbb{C}\setminus\Lambda$$

∘ Falls $\|f_i - f\|_{C^0(D)} \xrightarrow{i\to\infty} 0 \quad \forall D \underset{\text{kompakt}}{\subset} \mathbb{C}\setminus\Lambda$

z.B. $\overset{\text{Morera}}{\Rightarrow}$ f hol. auf $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ $\underset{\text{gleiches Argument}}{\overset{\text{beinahe}}{\Rightarrow}}$ f meromorph auf $\mathbb{C}$

∘ $$\sup_{z\in D} |f_i(z) - f(z)| = \sup_{z\in D} \left|\frac{1}{(z+\lambda_i)^2} - \frac{1}{\lambda_i^2}\right| \le \sup_{z\in D} \left|\frac{z(z-2\lambda_i)}{(z+\lambda_i)^2\lambda_i^2}\right|$$

D kompakt $\Rightarrow \exists z_0, \lambda^j$ s.d. $\operatorname{dist}(D,\Lambda) = \operatorname{dist}(z_0,\lambda^j) =: M$

$C \in \mathbb{R}$: $|z| < C$

$$\le \frac{C}{M^2}\left(\frac{C}{|\lambda_i|^2} + 2\frac{1}{|\lambda_i|}\right) \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\wp\ \text{hol.}"] \arrow[d] & \mathbb{CP}^1 \\ \mathbb{C}/\Lambda \arrow[ur, dashed, "?"'] & \end{tikzcd}$$

$\omega \in \Lambda$

$$\wp(z+\omega) = \frac{1}{(z+\omega)^2} + \underbrace{\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\in\Lambda}} \frac{1}{(z+\omega+\lambda)^2}}_{\eta = \omega+\lambda} - \sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\in\Lambda}} \frac{1}{\lambda^2} \quad \lambda = \eta$$

$$\sum_{\substack{\eta\neq\omega\\ \eta\in\Lambda}} \frac{1}{(z+\eta)^2}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{\eta\neq 0} \left(\frac{1}{(z+\eta)^2} - \frac{1}{\eta^2}\right) = \wp(z)$$

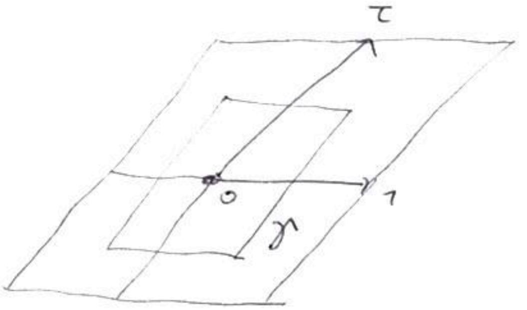
⑥

$\Rightarrow \wp : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{CP}^1$ hol., weil $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ per Def. hol. und lok. Homöo. ist

(ii) $\wp$ in lok. Koord. um $[0]$: $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \underbrace{\sum_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Lambda}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)}_{\text{hol. nach Bew. in (i) in Umgeb. von 0}}$

$\Rightarrow$ Pol v. zweiter Ordng bei 0

Pole von $\wp$ sind isoliert $\Rightarrow$ wähle elem. Parallelogramm mit Seiten parallel zu Λ, das nicht durch Pole geht, z.B.



$\wp$ doppelt periodisch $\Rightarrow \wp'$ doppelt periodisch

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil Funktion auf gegenüberliegenden Seiten gleich sind, } \gamma \text{ aber anderes Vorzeichen hat}}}{0} = \oint_\gamma \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \, dz = 2\pi i \,(\underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{Nst. mit Vielfachh.}}}{N} - \underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{Pole mit Ordng}}}{\overset{3}{\overset{\shortparallel}{P}}}) \Rightarrow N \neq 0$$