Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

6. Blatt

Aufgabe 19:

i) Sei $\pi : \widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche und $f : Z \to X$ eine weitere normale(!) Überlagerung. Wie könnte man eine ,,Einschränkung"

$$\rho : \mathrm{Deck}(\widetilde{X}|X) \to \mathrm{Deck}(Z|X)$$

definieren? Was ist deren Kern?

ii) Nutze die vorhergehende Teilaufgabe, um den folgenden Satz zu zeigen:

Satz: *Ist X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche, dann gibt es zu jedem surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x_0) \to G$ eine (bis auf Isomorphie eindeutige) normale Überlagerung $f : Z \to X$ durch eine zusammenhängende Riemannsche Fläche Z, so dass $\mathrm{Deck}(Z|X) \cong G$.*

Aufgabe 20: Sei $X := \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$, $Y := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und

$$f : X \to Y, \quad z \mapsto (z^2 + 1)^2.$$

Zeige, dass f eine unverzweigte, 4-blättrige Überlagerung ist, die aber nicht normal ist, und dass

$$\mathrm{Deck}(X|Y) = \{\mathrm{id}, (z \mapsto -z)\}$$

gilt.

Aufgabe 21: Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Sind dann $S \subset X$ die Verzweigungspunkte und $S' = f(S)$, so ist $f|_{X \setminus S} : X \setminus S \to Y \setminus S'$ eine unverzweigte Überlagerung. Deren Blätterzahl sei mit $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet.

i) Es gibt Triangulierungen von X und Y, so dass f Ecken auf Ecken, Kanten auf Kanten und Flächen auf Flächen der Triangulierung abbildet.

ii) Mit der offensichtlichen Notation jeweils für die Anzahl der Ecken/Kanten/Flächen gilt:

$$F(X) = m \cdot F(Y), \quad K(X) = m \cdot K(Y), \quad E(X) = m \cdot E(Y \setminus S') + \#S.$$

iii) Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$