Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Seien $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeige:

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

Hinweis: Finde $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man mittels Satz von Leray die Aufgabe lösen.

Aufgabe 36: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung
$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}),$$
induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

ii) $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ ist ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ (Torsions-)frei ist.

Aufgabe 37: Sei $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ mit $0 < r \leq \infty$. Sei weiter $\mathscr{H}$ die Garbe der harmonischen Funktionen auf Δ, d.h.

$$\mathscr{H}(U) = \{f \in \mathcal{E}(U) \mid \partial\overline{\partial} f = 0\}, \quad \text{für } U \subset \Delta \text{ offen.}$$

Zeige,dass $\check{H}^1(\Delta, \mathscr{H}) = 0$ gilt.

Aufgabe 38: Sei $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit $U_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $U_2 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

i) Zeige, dass $\mathscr{U}$ eine Leray-Überdeckung für $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$ ist.

ii) Versuche damit $\check{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{O})$ zu bestimmen.