

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

9. Blatt

**Aufgabe 28:** Zeigen Sie den Residuensatz auf  $\mathbb{CP}^1$  mit Hilfe des Residuensatzes aus der Funktionentheorie.

*Hinweis:* Wählen Sie einen geeigneten Integrationsweg auf  $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ .

**Aufgabe 29:** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung,  $X$  kompakte Riemannsche Fläche. Wir wissen (aus der Überlagerungstheorie), dass jeder Wert  $c \in \mathbb{CP}^1$  gleich oft angenommen wird (mit Vielfachheit). Wie folgt das auch aus dem Residuensatz?

**Aufgabe 30:** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $X$ , der weder Null- noch Polstelle einer meromorphen Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  trifft. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} \frac{df}{f} \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

gilt.

**Aufgabe 31:** Sei  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$  ein vollständiges Gitter und  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  der entsprechende Torus. Zeigen Sie, dass für eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(T)$  gilt:

$$\sum_{p \in T} \nu_p(f) \cdot p = 0 \in T,$$

wobei  $\nu_p(f)$  die Null-/Polstellenordnung<sup>1</sup> von  $f$  bei  $p$  als doppelt-periodische meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

*Hinweis:* Beachte, dass  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  mit der von  $\mathbb{C}$  induzierten Addition eine abelsche Gruppe ist. Zudem scheint die meromorphe 1-Form

$$\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)} dz$$

ganz hilfreich zu sein — dabei ist  $f$  als doppelt-periodische, meromorphe Funktion zu lesen, wenn von  $f'(z)$  die Rede ist.

<sup>1</sup>Beachten Sie den Unterschied zur Definition der Ordnung einer holomorphen Abbildung  $g : X \rightarrow Y$  (§3), bei der wir zur Definition Karten  $h$  für  $X$  und  $k$  für  $Y$  gewählt haben, so dass  $h(p) = 0$  und  $k(g(p)) = 0$ . Damit ist  $\text{ord}_p(f) \geq 1$ . Im Gegensatz dazu ist  $\nu_p(f) = 0$ , wenn  $f$  dort keine Null-/Polstelle hat. Man könnte das auch so ausdrücken, dass wir hier auf  $Y = \mathbb{CP}^1$  im Gegensatz zur Wahl einer Karte  $k$  mit  $k(f(p)) = 0$  immer eine der zwei Standardkarten auf  $\mathbb{CP}^1$ , also  $z$  auf  $\mathbb{C}$  und  $\frac{1}{z}$  auf  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$ , verwenden.