Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt

Aufgabe 41: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X. Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 42: Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Folgende kurze Sequenz von Garben ist exakt:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \to 0$$

ii) $\check{H}^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1_{\overline{\partial}}(X) := \frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{\overline{\partial}(\mathcal{E}(X))}$

Hinweis: Die Garben-Sequenz aus (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz.

Aufgabe 43: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Aufgabe 44: Ziel dieser Aufgabe ist $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$ zu zeigen. Wir gehen folgendermaßen vor:

i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Sequenz von Garben auf $\mathbb{CP}^1$ exakt ist:

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \to 0$$

ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz: $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$

iii) Zeige schließlich: $\check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Dafür betrachte die *Mayer-Vietoris-Sequenz* für die offene Überdeckung (U_0, U_∞) von $\mathbb{CP}^1$:

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^{q-1}(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^q(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \cdots$$

Diese ist eine lange exakte Kohomologiesequenz[1]. Außerdem gilt[2] $\check{H}^r(U, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ für $r \geq 1$ und $U \cong \mathbb{C}$.

Aufgabe 45:

i) Zeige, dass ein kanonische Divisor auf $\mathbb{CP}^1$ äquivalent zu

$$K = -2 \cdot \infty$$

ist (was heißt das eigentlich?).

ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf $\mathbb{CP}^1$ ein Hauptdivisor ist.

Hinweis: Man kann dafür z.B. Riemann-Roch verwenden.

[1] Das ist eine sehr bekannte Tatsache, welche wir an dieser Stelle nicht zeigen werden.
[2] Das wissen wir bisher nur für $r = 1$. Da wir nie mit $\check{H}^2$ gearbeitet haben, sei diese Aussage auch ohne Beweis gegeben.