Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

11. Blatt

Aufgabe 35: Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{\, \sigma : U \to |\mathcal{F}| \text{ stetig } \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U \,\}.$$

Zeigen Sie, dass

i) $\mathcal{G}$ eine Garbe ist

ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.

Aufgabe 36: Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass

$$\check{H}^1\big(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \underline{\mathbb{Z}}\big) \cong \mathbb{Z}^n$$

gilt.

Hinweis: (Aus dem Buch von Otto Forster) finde eine Überdeckung $\mathscr{U} = (U_1, U_2)$ mit einfach zusammenhängenden U_1, U_2, so dass $U_1 \cap U_2$ genau $n+1$ Zusammenhangskomponenten hat. Damit kann man (mittels Satz von Leray) die Aufgabe lösen.

Aufgabe 37: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathscr{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeigen Sie, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}^r_{\mathrm{alt}}(\mathcal{F}) := \prod_{0 \le i_0 < \cdots < i_r \le n} \mathcal{F}\big(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}\big)$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Hinweis: Das gilt auch allgemein für alle $\check{H}^r$ und ohne Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen.

Aufgabe 38: Zeigen Sie für einen Torus $T = \mathbb{C}/\Lambda$ mit Hilfe einer geeigneten Leray-Überdeckung, dass

$$\check{H}^1(T, \underline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}^2.$$

Hinweis: Man benutzt natürlich die vorhergehenden Aufgaben. Dennoch ist das immer noch eine ziemliche Erbsenzählerei.