

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt

Aufgabe 32: Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{ \sigma : U \rightarrow |\mathcal{F}| \text{ stetig} \mid \pi \circ \sigma = \text{id}_U \}.$$

Zeige, dass

- i) \mathcal{G} eine Garbe ist
- ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.

Bemerkung: Zu Beginn des Semesters haben wir Garben kennengelernt. Damals fiel der Begriff *Garbifizierung*. Die hier gesehene Garbe \mathcal{G} ist die Garbifizierung der Prägarbe \mathcal{F} .

Aufgabe 33: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}_{\text{alt}}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r})$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Bemerkung: Das gilt auch allgemein für alle \check{H}^r und ohne Kompaktheit und Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen. Das darf aber ab jetzt für Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 34: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf \mathbb{CP}^1 aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathcal{U} = (U_0, U_\infty)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf \mathbb{CP}^1). Zeige, dass¹

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m-1 & \text{für } m \leq -2, \\ 0 & \text{für } m \geq -1. \end{cases}$$

Hinweis: Wir hatten in Aufgabe 10 die holomorphen Funktionen auf \mathbb{C} als Potenzreihen betrachtet. Jetzt haben wir holomorphe Funktionen auf \mathbb{C}^* , können diese also als Laurentreihen auffassen.

¹Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise \mathbb{C} -Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar \mathbb{C} -linear.