zu 2. Benötigen: $\forall x \ \exists U \overset{\text{off.}}{\subset} X$ s.d. $x \in U$

und $\mathcal{O}|_U \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_D|_U$ als $\mathcal{O}$-Modulgarben

wähle kleines U um x s.d. $\exists\ \psi_U \in \mathcal{O}_D(U)$ s.d.

$$(\psi_U) = -D|_U$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_D(V)$$
$$f \longmapsto f\,\psi_U|_V$$

- wohldefiniert, weil $\operatorname{ord}(f \cdot \psi_U|_V) = \operatorname{ord} \psi_U|_V + \underbrace{\operatorname{ord} f}_{\geq 0} \geq -D|_V$
- $\mathcal{O}(V)$-linear ✓
- injektiv: $f\,\psi_U|_V \equiv 0$, $\psi_U \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, y \in V: \psi_U(y) \neq 0$

  $\Rightarrow \exists\, y \in U_y \overset{\text{off.}}{\subset} V: \psi_U|_{U_y}(z) \neq 0 \quad \forall z \in U_y$

  $\Rightarrow f|_{U_y} \equiv 0 \overset{f \text{ hol.}}{\Longrightarrow} f \equiv 0 \in \mathcal{O}(V)$
- surjektiv: $g \in \mathcal{O}_D(V) \Rightarrow \frac{g}{\psi_U} \in \mathcal{M}(V)$:

  $\operatorname{ord} \frac{g}{\psi_U|_V} = \operatorname{ord} g - \underbrace{\operatorname{ord} \psi_U}_{= -D|_V} \geq -D|_V + D|_V = 0$

  $\Rightarrow \frac{g}{\psi_U|_V} \in \mathcal{O}(V)$ mit $\frac{g}{\psi_U} \cdot \psi_U = g$

(ii)
$D \sim 0 \Rightarrow \mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ als $\mathcal{O}$-Modulgarbe

[$\mathcal{F} \cong \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists$ $\mathcal{O}$-Modulgarbenmorphismen $\varphi: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$
~~$\mathcal{G}(U) \Rightarrow$~~ $\eta: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$

s.d. $\varphi \circ \eta = id: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}$
$\eta \circ \varphi = id: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$

(i.e.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\eta(U)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r, "\eta(V)"'] & \mathcal{F}(V) \end{tikzcd}$$
),

$\Rightarrow \ \exists\, \psi \in \mathcal{M}(X)\setminus\{0\} \ : \ D = (\psi)$

$\Rightarrow$ def. $\alpha(U) : \mathcal{O}_D(U) \to \mathcal{O}(U)$

$$f \longmapsto \psi|_U \cdot f$$

∘ wohldefiniert, weil $\psi|_U \cdot f : U \to \mathbb{C}$ meromorphe Fkt. mit

$$\operatorname{ord}(\psi|_U \cdot f) = \operatorname{ord} \psi|_U + \operatorname{ord} f$$

$$\geq D|_U - D|_U \geq 0 \Rightarrow \psi|_U f \in \mathcal{O}(U)$$

∘ $\mathcal{O}(U)$-linear ✓

∘ kompatibel mit Einschränkungen: $\psi|_U \cdot f \,\big|_V = \psi|_V \, f|_V$

für $V \subset U$

$\Rightarrow$ α ist $\mathcal{O}$~~(X)~~-Garbenmorphismus $\mathcal{O}_D \Rightarrow \mathcal{O}$

Umkehrung β analog: $\beta : \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}_D$ $\mathcal{O}$-Garbenmorphismus def. mittels

$$\beta(U)(f) = \frac{1}{\psi|_U} \cdot f$$

Argumente wie oben und klarerweise $\beta \circ \alpha = id$, $\alpha \circ \beta = id$

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ als $\mathcal{O}$-Modulgarbe

$\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}$ als $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\overset{z.z.}{\Rightarrow}$ $D \sim 0$:

$\eta : \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}$ Iso. $\Rightarrow$ ~~$f := \eta(X)^{-1}(1) \in \mathcal{O}_D(X)\setminus\{0\}$~~

~~Wir zeigen: $(f) = D$~~ Wähle $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ s.d. $D|_{U_i} = (f_i)$ für $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$

~~$\eta : \mathcal{O}_D(X) \to \mathcal{O}(X)$, $g \mapsto \frac{g}{f}$ weil $\operatorname{ord}\left(\frac{g}{f}\right) = \operatorname{ord} g - \operatorname{ord} f$~~

$\Rightarrow$ $\underbrace{\eta(U_i)(f_i^{-1})}_{=:\, g_i} \in \mathcal{O}^{\times}(U_i)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f_i \cdot f_j^{-1} = g_i\, g_j^{-1}$ auf $U_i \cap U_j$

$\Rightarrow f_i g_i^{-1} = f_j g_j^{-1}$ auf $U_i \cap U_j$

$\overset{\mathcal{M}\text{ Garbe}}{\Rightarrow} \exists\, h \in \mathcal{M} : h|_{U_i} = f_i g_i^{-1} \Rightarrow (h)|_{U_i} = (f_i) = D|_{U_i}$

$\Rightarrow (h) = D$

49.)

(i) $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)(U) = \{ (f_0, f_1) \mid f_i : U \cap U_i \to \mathbb{C}$ hol., $f_0(z) = z^n f_1(z)\ \forall z \in U \cap U_1 \cap U_2 \}$

- $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)(U)$ ist $\mathcal{O}(U)$-Modul verträglich mit Einschränkungen ✓

- (lok. iso. zu $\mathcal{O}(U)$) $\quad z \in U_0 \overset{\text{off}}{\subset} \mathbb{CP}^1$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)(U_0) = \{ (f_0, f_1) : f_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ hol., $f_1 : U_0 \cap U_1 \to \mathbb{C}$ hol., $f_0(z) = z^n f_1(z) \}$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)(U_0) \longrightarrow \mathcal{O}(U_0), \qquad (f_0, f_1) \overset{\cong}{\longmapsto} f_0$$

analog für U_1

(ii) $P \sim Q$ auf $\mathbb{CP}^1 \Leftrightarrow P - Q \sim 0 \Leftrightarrow P - Q = (f)$ für $f \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$

$\deg(P - Q) = 0 \overset{46(ii)}{\Rightarrow} \exists f \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) : (f) = P - Q$

$\Rightarrow P \neq Q \Rightarrow P \sim Q \quad \forall P, Q \in \mathbb{CP}^1$

(iii) $D = \sum_{i=1}^{l} n_i P_i$ für $P_i \neq P_j \in \mathbb{CP}^1 \quad \forall i \neq j$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} D \sim \sum_{i=1}^{l} n_i \infty =: m \infty$ mit $m \in \mathbb{Z}$

(iv) D Div. auf $\mathbb{CP}^1 \overset{(iii)}{\Rightarrow} D \sim m \cdot \infty \overset{\text{Vlsg.}}{\Rightarrow} \mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{m\infty}$

z.z. $\mathcal{O}_{m\infty} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m)$ als hol. Geradenbündel