Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

13. Blatt

Aufgabe 40:

i) Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige, dass folgende kurze Sequenz von Garben exakt ist:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(1)} \to 0$$

ii) Für jede Kreisscheibe $\Delta \subset X$ ist die Čech-Kohomologie $\check{H}^1(\Delta, \mathcal{O}) = 0$.
Erkläre, warum dies eine Konsequenz der folgenden beiden Tatsachen (die nicht bewiesen werden müssen) ist:

1. Die Garben-Sequenz aus Teilaufgabe (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz für die globalen Schnitte auf Δ:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(\Delta, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(\Delta, \mathcal{E}) \to \dots$$

2. Das **Dolbeault-Theorem** für Kreisscheiben Δ:

$$\check{H}^1(\Delta, \mathcal{O}) \cong H^1_{\overline{\partial}}(\Delta)$$

Hierbei ist $H^1_{\overline{\partial}}(\Delta)$ die Dolbeault-Kohomologie:

$$H^1_{\overline{\partial}}(\Delta) = \frac{\ker(\overline{\partial} : \mathcal{E}^1(\Delta) \to \mathcal{E}^2(\Delta))}{\mathrm{im}(\overline{\partial} : \mathcal{E}(\Delta) \to \mathcal{E}^1(\Delta))}$$

Aufgabe 41: Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

Aufgabe 42: Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X. Zeige, dass für jedes offene $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

Aufgabe 43:

i) Zeige, dass der kanonische Divisor auf $\mathbb{CP}^1$ durch

$$K = -2 \cdot \infty$$

gegeben ist (was heißt das eigentlich?).

ii) Zeige, dass jeder Divisor vom Grad 0 auf $\mathbb{CP}^1$ ein Hauptdivisor ist.