Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt

Aufgabe 32: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathscr{U} = (U_1, \dots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}^r_{\mathrm{alt}}(\mathscr{U}, \mathcal{F}) := \prod_{0 \leq i_0 < \cdots < i_r \leq n} \mathcal{F}\big(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}\big)$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Bemerkung: Das gilt auch allgemein für alle $\check{H}^r$ und ohne Kompaktheit und Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen. Das darf aber ab jetzt für Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 33: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Die Abbildung

$$\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \underline{\mathbb{C}}),$$

induziert durch die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, ist injektiv.

ii) $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ ist ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ endlich erzeugt ist, und benutze dann die vorherige Teilaufgabe, um zu beweisen, dass $\check{H}^1(X, \underline{\mathbb{Z}})$ frei ist.

Aufgabe 34: Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{\, \sigma : U \to |\mathcal{F}| \text{ stetig } \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U \,\}.$$

Zeige, dass

i) $\mathcal{G}$ eine Garbe ist

ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.