Blatt 8

Wednesday, November 26, 2025 3:25 PM

A25) X RF, $z: U \to U'$ Karte um $p \in X$.

<u>ZZ:</u> $m_p^2 = \{\varphi \in m_p \mid \frac{\partial}{\partial x}|_p \varphi = 0 = \frac{\partial}{\partial y}|_p\}$

<u>Bew:</u> <u>„$\subseteq$":</u> Sei $\varphi \in m_p^2$, d.h. $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \psi_j \eta_j$ mit

$\psi_j, \eta_j \in m_p$. Für jeden Term $\psi_j \eta_j$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p (\psi_j \eta_j) = \frac{\partial((\psi_j \eta_j) \circ z^{-1})}{\partial x}(0)$$

$$= \frac{\partial(\psi_j \circ z^{-1})}{\partial x} \cdot \underbrace{\eta_j \circ z^{-1}(0)}_{= \eta_j(p) = 0} + \underbrace{\psi_j \circ z^{-1}(0)}_{= \psi_j(p)} \cdot \frac{\partial(\eta_j \circ z^{-1})}{\partial x}(0)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p \varphi = 0 \overset{\text{analog}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \varphi$$

<u>„$\supseteq$":</u> Sei $\varphi \in m_p$ mit $\frac{\partial}{\partial x}|_p \varphi = 0 = \frac{\partial}{\partial y}|_p \varphi$.

Sei OBdA U' sternförmig.

Dann $\overset{\text{nach Lemma}}{\exists}$ $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(U')$ mit

$$\varphi(x+iy) = x\,\varphi_1(x+iy) + y\,\varphi_2(x+iy).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_p = \frac{\partial\, x \cdot \varphi_1(x+iy)}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial\, y \cdot \varphi_2(x+iy)}{\partial x}\Big|_p$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_p = \frac{\partial\, x\cdot \varphi_1(x+iy)}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial\, y \cdot \varphi_2(x+iy)}{\partial x}\Big|_p$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}\Big|_p}_{=1} \cdot \varphi_1(p) + \underbrace{x(p)}_{=0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\Big|_p$$

noch Vorauss.

$$+ \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_p}_{=0} \cdot \varphi_2(p) + \underbrace{y(p)}_{=0} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\Big|_p \overset{\downarrow}{=} 0$$

$\Rightarrow \quad \varphi_1(p) = 0$

Analog $\varphi_2(p) = 0$

Damit $\varphi(x+iy) = \underbrace{x}_{\in m_p} \underbrace{\varphi_1(x+iy)}_{\in m_p} + \underbrace{y}_{\in m_p} \underbrace{\varphi_2(x+iy)}_{\in m_p} \in m_p^2$

$\square$

A2(b) $\omega := \frac{dz}{1+z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

<u>ZZ</u>: ω hat hol. Fortsetzung auf $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\pm i\}$

<u>Bew</u>: Sei $w = \frac{1}{z}$ Karte am ∞. Dann

$$dz = d\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2}\, dw$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{-\frac{1}{w^2}\, dw}{1 + \frac{1}{w}^{\wedge 2}} = -\frac{dw}{1+w^2}$$

Also hat ω die Darstellung $-\frac{dw}{1+w^2}$ in der Karte w um ∞. $\left(\frac{1}{\pm i} = \mp i\right)$

Da $\frac{1}{1+w^2}$ in einer Umgebung um 0 $(w \neq \pm i)$ holomorph ist, kann die Form holomorph fortgesetzt werden. $\square$

A27 i) $f: X \to Y$ holom, für $V \subseteq Y$ offen:

$$f^*: \mathcal{E}(V) \to \mathcal{E}(f^{-1}(V)),\ \varphi \mapsto f^*\varphi = \varphi \circ f.$$

Sei nun $\omega \in \Omega^1(V)$ und $z: W \to W'$ Karte mit $W \subseteq V \subseteq Y$. $\rightsquigarrow \omega|_W = \varphi(z)\, dz$ (φ holom.)

Setze $f^*(\omega|_W) := f^*(\varphi(z))\, d(f^* z)$

Wie ist das zu lesen?

$$f^*(\omega|_W) = \underbrace{(\varphi \circ f)}_{\substack{\text{holom.} \\ \text{auf } f^{-1}(W) \subseteq X}}(z)\, d\underbrace{(z \circ f)}_{\substack{\text{holom} \\ \text{auf } f^{-1}(W) \subseteq X}}$$

$\Rightarrow f^*(\omega|_W)$ holom. 1-Form auf $f^{-1}(W) \subseteq X$.

"Man zieht ω zurück entlang f" (pull-back)

Unabh. von Wahl der Karte:

Sei w andere lok. Koordinate auf $\tilde{W}$ mit $V := W \cap \tilde{W} \neq \emptyset$. Dann $w = h(z)$ mit h holom, $h' \neq 0$

$$\omega|_V = \varphi(z)\,dz = \tilde{\varphi}(w)\,dw$$

Mit $dw = h'(z)\,dz$ folgt auf V:

$$\varphi(z)\,dz = \tilde{\varphi}(h(z))\,h'(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \tilde{\varphi}(h(z))\,h'(z)$$

Jetz pull-back: auf $f^{-1}(V)$ gilt $w \circ f = h(z \circ f)$

$$\Rightarrow d(w \circ f) = d(h(z \circ f)) = h'(z \circ f)\,d(z \circ f)$$

$$f^*(\tilde{\varphi}(w)\,d(f^*w)) = (\tilde{\varphi} \circ f)\,d(w \circ f) = \tilde{\varphi}(h(z \circ f))\,h'(z \circ f)\,d(z \circ f)$$

$$= (\varphi \circ f)\,d(z \circ f) = f^*(\varphi)\,d(f^*z).$$

$\Rightarrow$ Unabh. von Wahl der Karte

Weil auf Kartenüberlappungen die Darstellungen übereinstimmen, kriegen wir eine globale 1-Form

$$f^*\omega.$$

Zusatz: • f^* ist $\mathbb{C}$-linear $\big(f^*(a\omega_1 + b\omega_2)$

$= a f^*\omega_1 + b f^*\omega_2 \big)$

$= a f^* \omega + b f^* \omega_2)$

- Für $g \in \mathcal{O}(V)$ gilt:

$$f^*(g\omega) = (g \circ f)\, f^*\omega \quad \text{(Multiplikativität)}$$

- f biholomorph $\Rightarrow f^*$ Iso mit Umkehrung $(f^{-1})^*$

(ii) $f: X \to Y$ hol., $\omega \in \Omega^1_Y(V)$, $\gamma: [0,1] \to U \subseteq f^{-1}(V)$ stückw. C^1

<u>zz</u>: $\int_\gamma f^*\omega = \int_{f\circ\gamma} \omega$

<u>Bew</u>: Wähle ein Teilintervall I $(= [t_0, t_1])$ von $[0,1]$, s.d.

- $\gamma|_I$ C^1
- $\gamma(I) \subseteq W \subseteq f^{-1}(V)$ Karte

mit $f(W) \subseteq \widetilde{W} \subseteq V$ Kart

Schreibe $\omega|_{\widetilde{W}} = \varphi(z)\,dz$. Dann

$$(f^*\omega)\big|_W = \varphi(z \circ f)\, d(z \circ f)$$

Es ist $(z \circ f \circ \gamma)(t)$ eine komplexwertige C^1-Fkt

Es ist $(z \circ f \circ \gamma)(t)$ eine komplexwertige C-Fkt auf I und

$$\int_{\gamma|_I} f^*\omega = \int_0^1 \varphi(z(f(\gamma(t)))) \frac{d}{dt}(z(f(\gamma(t))))$$

$$= \int_0^1 \varphi(z(f\circ\gamma)(t)) \frac{d}{dt}(z(f\circ\gamma(t)))$$

$$= \int_{(f\circ\gamma)|_I} \varphi(z)\, dz$$

$$= \int_{(f\circ\gamma)|_I} \omega$$

Wir überdecken $[0,1]$ durch solche Teilintervalle:

$[0,1] = \bigcup_{j\in J} I_j$ mit I_j hat die Eig von I.

Dann $\int_\gamma f^*\omega = \sum_{j\in J} \int_{\gamma|_{I_j}} f^*\omega = \sum_{j\in J} \int_{(f\circ\gamma)|_{I_j}} \omega = \int_{f\circ\gamma} \omega$

$\square$

(iii) X RF, γ geschlossener Weg in X, der keine Null- und Polstellen von $\mathcal{M}(X)$ trifft

<u>Bew:</u> $f\circ\gamma$ geschlossener Weg in $\mathbb{C}^*$.

$\eta := \frac{dz}{z}$ ist holom. auf $\mathbb{C}^*$ mit einzigem Pol in 0

$\eta := \frac{dz}{z}$ ist holom. auf $\mathbb{C}$ mit einzigem Pol in 0

Mit Pullback-Formel:

$$f^*\left(\frac{dz}{z}\right) = \frac{df}{f}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{df}{f} = \int_{f\circ\gamma} f^*\left(\frac{dz}{z}\right) = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot n(\gamma, 0)$$

mit $n(\gamma, 0) \mathrel{\hat{=}}$ Umlaufzahl von γ um 0.

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{df}{f} \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

$\square$