Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

8. Blatt

Aufgabe 25:

i) Beweise das folgende Lemma.

Lemma. *Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig um 0, sowie $f : V \to \mathbb{C}$ eine C^∞-Funktion mit $f(0) = 0$, dann existieren C^∞-Funktionen $f_j : V \to \mathbb{C}$ für $j = 1, 2$, so dass*

$$f(x + iy) = x \cdot f_1(x + iy) + y \cdot f_2(x + iy).$$

Hinweis: $f(x + iy) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx + ity)\, dt = \ldots$

ii) Sei X eine Riemannsche Fläche und $z : U \to U'$ eine Karte um p. Zeige, dass für das maximale Ideal $m_p \lhd \mathcal{E}_p$ der bei $p \in X$ verschwindenden C^∞-Funktionen gilt:

$$m_p^2 = \left\{ \varphi \in m_p \;\middle|\; \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p \varphi = 0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \varphi \right\}.$$

Aufgabe 26: Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann ist induziert die komplexe Struktur von X auch eine differenzierbare Struktur auf X und macht diese zu einer 2-dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit (daher auch der Name Fläche). Es bezeichne $T_p^{\mathbb{R}} X$ den reell 2-dimensionalen Tangentialraum von X bei p. Wieso definiert die komplexe Struktur in kanonischer Weise die Struktur eines 1-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums auf $T_p^{\mathbb{R}} X$?

Hinweis: Dazu muss man sich an Analysis III bzw. an die Kenntnis über Mannigfaltigkeiten erinnern, z. B. dass eine differenzierbare Abbildung $h : U \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $d_p h : T_p^{\mathbb{R}} X \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ liefert.

Aufgabe 27: Betrachte die holomorphe 1-Form $\dfrac{dz}{1 + z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Zeige, dass diese eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\pm i\}$ hat. Wie schreibt man diese in der üblichen Karte für $\mathbb{CP}^1$ bei ∞?

Aufgabe 28: Ist $f : X \to Y$ holomorph, dann hat man für offenes $V \subset Y$ den pull-back:

$$f^* : \mathcal{E}(V) \longrightarrow \mathcal{E}(f^{-1}(V)), \qquad \varphi \mapsto f^*\varphi := \varphi \circ f.$$

Zeige, dass man in folgender Weise ein f^* für holomorphe 1-Formen hat: Ist $\omega \in \Omega^1(V)$ und $z : W \to W'$ eine Karte für Y mit $W \subset V$, so schreibe $\omega|_W = \varphi(z)\, dz$ und setze

$$f^*(\omega|_W) := f^*\big(\varphi(z)\big)\, d(f^* z).$$

Wie ist das zu lesen und warum ist das unabhängig von der Wahl der Karte? Hat man letzteres gesehen, folgt, dass man damit $f^*\omega \in \Omega^1(f^{-1}(V))$ wohldefiniert erhalten hat.