

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

1. Blatt – Abgabe: 22.10, 10.00 Uhr, Übung: 23.10, 15.45 Uhr

**Aufgabe 1:** Wir betrachten die beiden folgenden Abbildungen auf der Einheitssphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ :

$$h : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z},$$

$$k : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z}.$$

Zeige, dass diese beiden einen holomorphen Atlas auf  $S^2$  ergeben.

**Aufgabe 2:** Sei  $\pi : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von Hausdorffräumen, die ein lokaler Homöomorphismus ist, d.h. jedes  $x \in X$  hat eine offene Umgebung  $U \subset X$ , so dass  $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$  ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge  $\pi(U) \subset Y$  ist.

Beweise: Ist  $Y$  Riemannsche Fläche, so erhält man dadurch eine eindeutige Struktur einer Riemannschen Fläche auf  $X$ .

**Aufgabe 3:** Für  $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  betrachte das Gitter  $\Lambda_\tau := \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$ . Betrachte zu jedem dieser Gitter den wie in der Vorlesung konstruierten holomorphen Atlas von  $S^1 \times S^1$ .

Zeige, dass die Vereinigung der beiden Atlanten zu  $\Lambda_i$  und  $\Lambda_{1+i}$  keinen holomorphen Atlas auf  $S^1 \times S^1$  ergibt.