Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-
Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

2. Blatt – Abgabe 29.10, Übung 30.10

Aufgabe 4: Wir betrachten die konstante Garbe, wie in der Vorlesung definiert. Genauer: Sei A eine abelsche Gruppe. Wir definieren die konstante Garbe (mit Werten in A) durch

$$\underline{A} : U \mapsto \underline{A}(U) := \{f : U \to A \mid f \text{ stetig}\},$$

wobei A die diskrete Topologie trägt, d.h. $\forall a \in A : \{a\} \subset A$ offen.

i) Beschreibe die Schnitte dieser Garbe. Wieso heißt diese Garbe *konstante* Garbe?

ii) Zeige, dass für die Halme $\underline{A}_x$ bei $x \in X$ kanonisch $\underline{A}_x \cong A$ gilt.

Aufgabe 5: Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf einem topologischen Raum X und $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Zeige, dass die Zuordnung

$$\ker \alpha : U \mapsto \ker \alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

eine Garbe definiert, die wir mit $\ker \alpha$ bezeichnen.

Aufgabe 6: Sei X eine Riemannsche Fläche. Zeige, dass

$$\underline{2\pi i\mathbb{Z}} \;=\; \ker\Big(\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^\times\Big)$$

gilt, wobei $\exp$ der durch $\exp(f) = e^f$ induzierte Garbenmorphismus sei und $\underline{2\pi i\mathbb{Z}}$ die konstante Garbe mit Werten in der abelschen Gruppe $2\pi i\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 7: Vervollständige das Nicht-Beispiel der Vorlesung: Für $X = \mathbb{C}$ ist die Prägarbe

$$\mathcal{P} : U \mapsto \Big(\mathrm{Bild}\Big(\frac{d}{dz} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)\Big)\Big)$$

keine Garbe.