

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

9. Blatt

Aufgabe 28: Zeigen Sie den Residuensatz auf \mathbb{CP}^1 mit Hilfe des Residuensatzes aus der Funktionentheorie.

Hinweis: Wählen Sie einen geeigneten Integrationsweg auf $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$.

Aufgabe 29: Sei $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung, X kompakte Riemannsche Fläche. Wir wissen (aus der Überlagerungstheorie), dass jeder Wert $c \in \mathbb{CP}^1$ gleich oft angenommen wird (mit Vielfachheit). Wie folgt das auch aus dem Residuensatz?

Aufgabe 30: Sei X eine Riemannsche Fläche und γ ein geschlossener Weg in X , der weder Null- noch Polstelle einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ trifft. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma} \frac{df}{f} \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

gilt.

Aufgabe 31: Sei $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$ ein vollständiges Gitter und $T = \mathbb{C}/\Lambda$ der entsprechende Torus. Zeigen Sie, dass für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(T)$ gilt:

$$\sum_{p \in T} \nu_p(f) \cdot p = 0 \in T,$$

wobei $\nu_p(f)$ die Null-/Polstellenordnung¹ von f bei p als doppelt-periodische meromorphe Funktion auf \mathbb{C} bezeichnet.

Hinweis: Beachte, dass $T = \mathbb{C}/\Lambda$ mit der von \mathbb{C} induzierten Addition eine abelsche Gruppe ist. Zudem scheint die meromorphe 1-Form

$$\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)} dz$$

ganz hilfreich zu sein — dabei ist f als doppelt-periodische, meromorphe Funktion zu lesen, wenn von $f'(z)$ die Rede ist.

¹Beachten Sie den Unterschied zur Definition der Ordnung einer holomorphen Abbildung $g : X \rightarrow Y$ (§3), bei der wir zur Definition Karten h für X und k für Y gewählt haben, so dass $h(p) = 0$ und $k(f(p)) = 0$. Damit ist $\text{ord}_p(f) \geq 1$. Im Gegensatz dazu ist $\nu_p(f) = 0$, wenn f dort keine Null-/Polstelle hat. Man könnte das auch so ausdrücken, dass wir hier auf $Y = \mathbb{CP}^1$ im Gegensatz zur Wahl einer Karte k mit $k(f(p)) = 0$ immer eine der zwei Standardkarten auf \mathbb{CP}^1 , also z auf \mathbb{C} und $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$, verwenden.