Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Prof. Dr. Marco Hien
M. Sc. Thomas Bargen

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

10. Blatt – Abgabe 07.01, Übung 08.01
Wir wünschen allen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

Aufgabe 32: Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $\pi : |\mathcal{F}| \to X$ die Projektion des *espace étalé*. Setze

$$\mathcal{G} : U \longmapsto \{\, \sigma : U \to |\mathcal{F}| \text{ stetig } \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U \,\}.$$

Zeige, dass

i) $\mathcal{G}$ eine Garbe ist

ii) und es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ für jedes $p \in X$ gibt.

Bemerkung: Zu Beginn des Semesters haben wir Garben kennengelernt. Damals ist der Begriff *Garbifizierung* gefallen, ohne dass wir je gesehen haben, was das bedeutet. Die Garbe $\mathcal{G}$ in dieser Aufgabe ist die Garbifizierung der Prägarbe $\mathcal{F}$.

Aufgabe 33: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathscr{U} = (U_1, \dots, U_n)$ eine endliche offene Überdeckung. Zeige, dass man die Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{F})$$

auch als die Kohomologie des alternierenden Komplexes

$$\check{C}^r_{\mathrm{alt}}(\mathscr{U}, \mathcal{F}) := \prod_{0 \le i_0 < \cdots < i_r \le n} \mathcal{F}\big(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}\big)$$

mit denselben Korand-Operatoren berechnen kann.

Bemerkung: Das gilt auch allgemein für alle $\check{H}^r$ und ohne Kompaktheit und Endlichkeit, ist dann aber schwieriger zu zeigen. Das darf aber ab jetzt für Aufgaben verwendet werden.

Aufgabe 34: Betrachte die Garben $\mathcal{O}(m)$ auf $\mathbb{CP}^1$ aus Aufgabe 10, Blatt 3. Sei $\mathscr{U} = (U_0, U_\infty)$ die dort betrachtete offene Überdeckung (die Standard-Kartengebiete auf $\mathbb{CP}^1$). Zeige, dass[1]

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} -m-1 & \text{für } m \le -2, \\ 0 & \text{für } m \ge -1. \end{cases}$$

Hinweis: Wir hatten in Aufgabe 10 die holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ als Potenzreihen betrachtet. Jetzt haben wir holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}^*$, können diese also als Laurentreihen auffassen.

[1] Beachte, dass diese Kohomologiegruppen in natürlicher Weise $\mathbb{C}$-Vektorräume sind, weil die lokalen Schnitte $\mathcal{O}(m)(U)$ dies sind und die Korand-Operatoren δ offenbar $\mathbb{C}$-linear.