

Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

7. Blatt – Abgabe 03.12, Übung 04.12

Definition: Sei $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen. Der *Verzweigungsindex* von f bei $x \in X$ ist definiert als

$$b_x(f) := \text{ord}_x(f) - 1.$$

Der *totale Verzweigungsgrad* von f ist definiert als

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_x(f).$$

(Beachte, dass nur endlich viele Summanden ungleich Null sind.)

Riemann–Hurwitz–Formel: Ist $f : X \rightarrow Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen mit Blätterzahl $m \in \mathbb{N}$ und totalem Verzweigungsgrad $b(f)$, so gilt für die Geschlechter von X und Y :

$$g(X) = \frac{b(f)}{2} + m \cdot (g(Y) - 1) + 1.$$

Insbesondere ist der totale Verzweigungsgrad damit immer gerade.

Aufgabe 22: Wir wollen in dieser Aufgabe die Riemann-Hurwitz-Formel beweisen.

Dabei gehen wir wie folgt vor:

- i) Ist X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit beliebiger Triangulierung, so gilt für die Eulercharakteristik:

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

Damit ist $\chi(X)$ insbesondere unabhängig von der gewählten Triangulierung auf X .

- ii) In obiger Situation gilt:

$$\chi(X) = m \cdot \chi(Y) - b(f).$$

Hinweis: Aufgabe 21

- iii) Folgere nun die Riemann-Hurwitz-Formel.

Aufgabe 23: Zeige mithilfe der Riemann-Hurwitz-Formel und der Weierstraß \wp -Funktion, dass ein Torus Geschlecht 1 hat.

Aufgabe 24: Im Folgenden seien X, Y kompakte Riemannsche Flächen und f stets holomorph und nicht konstant. Leite aus der Riemann–Hurwitz-Formel her:

- i) Wenn $f : X \rightarrow Y$ existiert, dann gilt: $g(X) \geq g(Y)$
- ii) Wenn $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow Y$ existiert, dann ist Y homöomorph zur Sphäre.
- iii) Wenn $f : X \rightarrow Y$ mit $b(f) = 0$ existiert, so ist f schon biholomorph.
- iv) Wenn $f \in \mathcal{M}(X)$ mit nur einem einfachen Pol existiert, so ist X isomorph zu \mathbb{CP}^1 .