

## Aufgaben zu *Riemannsche Flächen* – WS 2025/26

### 13. Blatt

**Aufgabe 41:** Sei  $X$  ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf  $X$ . Zeige, dass für jedes offene  $U \subset X$  die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

(ohne die Null am rechten Ende) immer noch exakt ist.

**Aufgabe 42:** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Zeige:

i) Folgende kurze Sequenz von Garben ist exakt:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

$$\text{ii) } \check{H}^1(X, \mathcal{O}) \cong H_{\bar{\partial}}^1(X) := \frac{\mathcal{E}^{(0,1)}(X)}{\bar{\partial}(\mathcal{E}(X))}$$

*Hinweis:* Die Garben-Sequenz aus (i) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz.

**Aufgabe 43:** Folgere aus Aufgabe 37 (Blatt 11):

$$\check{H}^1(\Delta^\times, \mathcal{O}) = 0$$

**Aufgabe 44:** Ziel dieser Aufgabe ist  $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \mathbb{Z}$  zu zeigen. Wir gehen folgendermaßen vor:

i) Begründe mit Aufgabe 6 (Blatt 2), dass folgende Sequenz von Garben auf  $\mathbb{CP}^1$  exakt ist:

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

ii) Folgere nun mithilfe der induzierten langen Kohomologiesequenz:  $\check{H}^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}^\times) \cong \check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}})$

iii) Zeige schließlich:  $\check{H}^2(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}$ .

Dafür betrachte die *Mayer-Vietoris-Sequenz* für die offene Überdeckung  $(U_0, U_\infty)$  von  $\mathbb{CP}^1$ :

$$\dots \longrightarrow \check{H}^{q-1}(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(\mathbb{CP}^1, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(U_0, \underline{\mathbb{Z}}) \oplus \check{H}^q(U_\infty, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathbb{C}^*, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \dots$$

Diese ist eine lange exakte Kohomologiesequenz<sup>1</sup>, wobei die Garbe  $\underline{\mathbb{Z}}$  jeweils die passende ist, z.B für  $\check{H}^q(U, \underline{\mathbb{Z}})$  ist dies die Garbe welche auf  $U$  die konstante Garbe ist und auf dem Komplement von  $U$  0 ist. Die Kohomologie verhält sich aber wie gewohnt. Außerdem gilt  $\check{H}^r(U, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$  für  $r \geq 1$  und  $U \cong \mathbb{C}^2$ .

<sup>1</sup>Das ist eine sehr bekannte Tatsache, welche wir an dieser Stelle nicht zeigen werden.

<sup>2</sup>Das wissen wir bisher nur für  $r = 1$ . Da wir nie mit  $\check{H}^2$  gearbeitet haben, sei diese Aussage auch ohne Beweis gegeben.