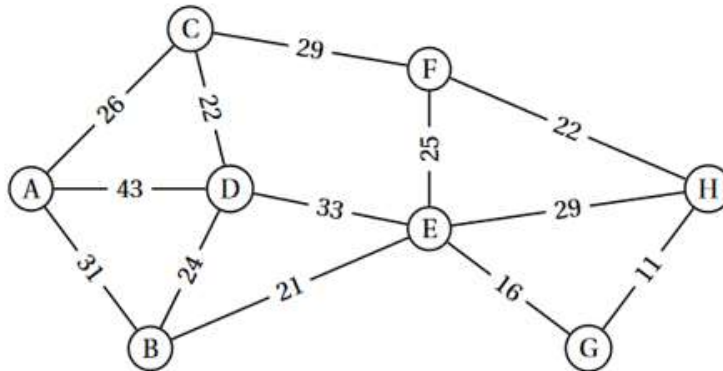


ETUDE D'UN ALGORITHME D'OPTIMISATION

Situation initiale :

Le réseau de serveurs permettant à Webflix de diffuser les films que la plate-forme propose à ses abonnés est modélisé par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent les serveurs et sur les arêtes on a indiqué les temps de réponse, exprimés en milliseconde, entre deux serveurs.



Problématique :

Des données doivent transiter du serveur A vers le serveur H. On souhaite déterminer quel chemin emprunter pour que la transmission soit la plus rapide possible.

Essais :

Faire des essais pour trouver le chemin le plus rapide entre les serveurs A et H.
Emettre une critique sur cette méthode.

Mise en place d'une démarche :

Le raisonnement systématique pour obtenir, à coup sûr, et en un temps limité, le chemin le plus rapide entre les deux sommets A et H est l'algorithme de Dijkstra.

Cet algorithme se construit pas à pas sous forme de tableau, dans lequel chaque colonne correspond à un des sommets du graphe, en commençant par A et en terminant par H. On ajoute une colonne « pense-bête » intitulée « sommet choisi ». On prépare autant de lignes qu'il y a de colonnes, ici 9.

Pour compléter les lignes du tableau, on suit les instructions suivantes :

- ◆ 1^{ère} ligne : • Indiquer 0 sous le sommet de départ, ici A, et ∞ sous tous les autres.
• Noter A dans la colonne « sommet choisi ». On neutralise toute la colonne A.
- ◆ 2^{ème} ligne : • Pour chaque arête issue de A, indiquer, dans la colonne du sommet d'arrivée, la valeur de l'arête ainsi que le sommet de départ. On complète donc les colonnes B, C et D avec successivement 31(A), 26(A) et 43(A).

• On repère le plus petit nombre : 26(A) dans la colonne C, donc on indique C en dernière colonne, puis on neutralise toute la colonne C.

◆ 3^{ème} ligne : • Pour chaque arête issue de C, indiquer, pour chaque sommet atteint (sauf ceux déjà explorés), c'est-à-dire D et F, soit le cumul de la valeur de l'arête et de la valeur de C, soit la valeur déjà écrite dans la colonne, si celle-ci est inférieure au cumul.

Par exemple ici : dans la colonne D, la somme 26+22 (48) est supérieure à 43 déjà inscrit, donc on recopie 43(A), tandis que dans la colonne F, 55 est plus petit que ∞ , donc on écrit 55(C).

• On recopie les valeurs non utilisées, c'est-à-dire ici 31(A) dans la colonne B.

On continue de la même manière jusqu'à avoir épuisé toutes les possibilités, donc jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une valeur sur la dernière colonne.

Ici, on obtient 77(F) dans la colonne H, sommet d'arrivée.

Pour obtenir le chemin le plus rapide, on reprend à partir du point d'arrivée (H) et on lit les informations pour remonter jusqu'à A :

Dans H, l'indication 77(F) indique qu'il faut remonter au sommet F. Au bas de la colonne F, on trouve 55(C), puis au bas de la colonne C, on trouve 26(A).

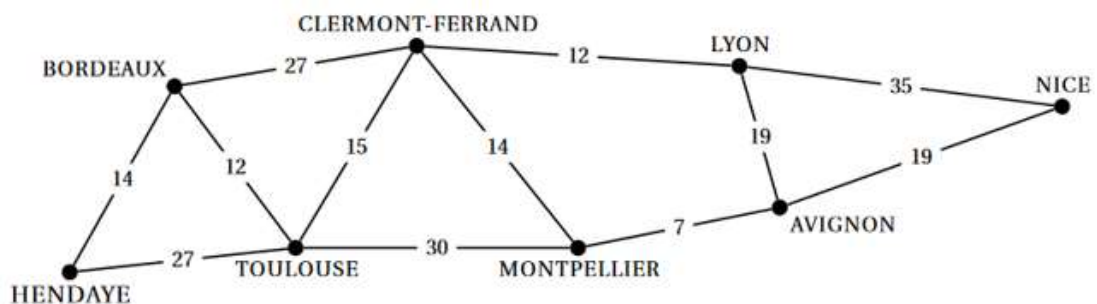
On a terminé :

Le plus court chemin est le chemin : A – C – F – H, en 77 millisecondes.

L'algorithme de Dijkstra assure que c'est le plus « court » chemin entre A et H, et permet en un nombre limité d'étapes (autant qu'il y a de sommets), de le trouver.

Application (à la main) :

Le graphe ci-dessous représente le tarif moyen, en euro, demandé sur un site de covoiturage pour effectuer le trajet entre des villes du sud de la France.



Un étudiant souhaite aller de Hendaye à Nice.

Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet qui serait le plus économique et préciser le coût de ce trajet.