

Задачи

1. Определить, какая логическая связка используется в следующих словесных выражениях: "A, если B", "коль скоро A, то B", "в случае A имеет место B", "как A, так и B", "для A необходимо B", "для A достаточно B", "A вместе с B", "A не имеет места", "A, только если B", "A, пока B", "или A, или B", "A одновременно с B", "A – то же самое, что и B".

2. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний.

2.1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

2.2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

2.3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

3. Выяснить, будут ли тождественно истинны следующие формулы:

- | | |
|---|---|
| а) $X \& Y \rightarrow X,$ | б) $X \vee Y \rightarrow X,$ |
| в) $X \& Y \rightarrow X \vee Y,$ | г) $X \vee Y \rightarrow X \& Y,$ |
| д) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X),$ | е) $(X \rightarrow \neg X) \rightarrow X,$ |
| ж) $(\neg X \rightarrow X) \rightarrow X,$ | з) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X),$ |
| и) $\neg(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y).$ | |

4. Выяснить, существует ли формула F такая, что формула G тождественно истинна:

- а) $G = X \& Y \rightarrow F \& Z;$
б) $G = (F \& Y \rightarrow \neg Z) \rightarrow (Z \rightarrow \neg Y);$
в) $G = (F \& Z) \vee (\neg F \& \neg Y \& \neg Z).$

5. Выяснить, будут ли следующие формулы равносильны:

- а) $X \rightarrow Y$ и $\neg Y \rightarrow \neg X,$
б) $\neg X \rightarrow Y$ и $\neg Y \rightarrow X$
в) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ и $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z,$
г) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$ и $X \& Y \rightarrow Z,$

д) $\neg(X \rightarrow Y)$ и $\neg X \rightarrow \neg Y$,

е) $X \leftrightarrow Y$ и $\neg X \leftrightarrow \neg Y$.

6. Доказать равносильность формул:

а) $\neg[(X \vee Y) \ \& \ (X \& \neg Z)]$ и $X \rightarrow Z$,

б) $(X \& \neg Y) \vee \neg(X \& Y)$ и $\neg(X \& Y)$,

в) $\neg[(X \vee \neg Y) \ \& \ Y] \ \& \ \neg(\neg X \& Y)$ и $\neg Y$,

г) $\neg[(X \& Y) \vee \neg Z]$ и $\neg(Z \rightarrow X) \vee \neg(Z \rightarrow Y)$,

д) $(X \& Y) \vee (\neg X \& Y) \vee (X \& \neg Y)$ и $X \vee Y$,

е) $(\neg X \& Y \& Z) \vee (\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (Y \& Z)$ и $(\neg X \vee Y) \ \& \ Z$

ж) $[(X \rightarrow Y) \ \& \ Z] \rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$ и $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$,

з) $[\neg(\neg X \ \& \ Z) \ \& \ \neg(Y \ \& \ Z)] \vee \neg X \vee \neg Y$ и $\neg(X \ \& \ Y \ \& \ Z)$,

и) $\neg(X \leftrightarrow Y) \vee [(X \rightarrow Y) \ \& \ Z]$ и $[\neg X \ \& \ (Y \vee Z)] \vee (X \ \& \ \neg Y) \vee (Y \ \& \ Z)$,

к) $[\neg(X \ \& \ \neg Y) \ \& \ Z] \vee \neg(X \leftrightarrow Y)$ и $(X \ \& \ \neg Y) \vee (\neg X \ \& \ Z) \vee [Y \ \& \ (\neg X \ \vee Z)]$.

7. Доказать, что формула G является логическим следствием формул F_1, \dots, F_n :

а) $F_1 = X \rightarrow Y \vee Z, F_2 = Z \rightarrow W, F_3 = \neg W, G = X \rightarrow Y$;

б) $F_1 = X \vee Y \vee \neg Z, F_2 = X \rightarrow X_1, F_3 = Y \rightarrow Y_1, F_4 = Z, G = X_1 \vee Y_1$;

в) $F_1 = X \rightarrow Y \& Z, F_2 = Y \rightarrow Z_1 \vee Z_2, F_3 = Z \rightarrow Z_1, F_4 = \neg Z_1, G = X \rightarrow Z_2$;

г) $F_1 = Z \rightarrow Z_1, F_2 = Z_1 \rightarrow Y, F_3 = X \rightarrow Y \vee Z, G = X \rightarrow Y$.

8. Доказать, что формула G не является логическим следствием формул F_1, F_2, \dots, F_n :

а) $F_1 = X \rightarrow Y \vee Z, F_2 = Y \rightarrow W, F_3 = Z \rightarrow X, G = X \rightarrow W$;

б) $F_1 = X \rightarrow Y, F_2 = Y \rightarrow Z, F_3 = Z \rightarrow Z_1 \vee Z_2, G = X \rightarrow Z_1$;

в) $F_1 = X \vee Y \vee Z, F_2 = X \rightarrow X_1, F_3 = Y \rightarrow X_1 \vee Y_1, F_4 = \neg Y_1, G = Z \rightarrow X_1$.

9. Логичны ли рассуждения из задач 2.1, 2.2, 2.3 ?

10. Логичны ли следующие рассуждения ?

10.1. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

10.2. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся.

Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

10.3. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

10.4. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

11. Привести формулы к ДНФ:

- | | |
|--|--|
| a) $(X \rightarrow Y) \ \& \ (Y \rightarrow X),$ | b) $\neg[(X \rightarrow Y) \ \& \ (Y \rightarrow X)],$ |
| v) $\neg(X \vee Z) \ \& \ (X \rightarrow Y),$ | г) $\neg(X \& Y \rightarrow X).$ |

12. Привести формулы к СДНФ:

- | | |
|---|--|
| a) $X \vee (Y \& Z),$ | b) $(X \rightarrow Y) \ \& \ (Y \rightarrow X),$ |
| v) $\neg(X \vee Y) \ \& \ (X \rightarrow Z),$ | г) $X \& Y \rightarrow \neg(X \vee Y).$ |

13. Привести формулы к КНФ:

- | | |
|--|--|
| a) $(X \rightarrow Y) \ \& \ (Y \rightarrow X);$ | b) $\neg[(X \rightarrow Y) \ \& \ (Y \rightarrow X)];$ |
| v) $X \vee Y \rightarrow X \& Y;$ | г) $\neg(X \& Y \rightarrow X \vee Z).$ |