Тема. «Введение в логику высказываний»

Введение

Идея математической (символической, теоретической) логики принадлежит немецкому философу и математику Г.Лейбницу (1646-1718 гг.), который попытался построить универсальный логико-математический символический язык, позволявший выразить всякое знание и доказательство любой теоремы свести к вычислению, которое могла бы осуществить и «разумная» машина. Во многом идея создания логико-математического исчисления осуществлена в современной математической логике, но полная реализация ее невозможна, как было доказано в 1931 г. К.Гёделем (1906-1978) .

Современная математическая логика определяется как раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов основания математики. Одна из главных причин широкого распространения математической логики – применение аксиоматического метода в построении различных математических теорий. Важным достижением математической логики является формулировка понятия алгоритмической вычислимости, которое по своей важности приближается к понятию натурального числа. Сегодня результаты математической логики находят свое применение в других отраслях математического знания, а также в программировании, проблемах искусственного интеллекта и других науках.

Формализованный логико-математический язык – это искусственный символический язык. С его помощью математические предложения (и предложения естественного языка) выражаются в виде формул. Строение сложных формул и правила оперирования ими изучает логика высказываний. Субъектно-предикатным анализом простых формул занимается логика предикатов. Язык математической логики имеет свою четко определенную грамматику, аксиомы и правила преобразования формул. Этот язык отличается от обычного, естественного языка однозначностью, отсутствием двусмысленности.

Основы математической логики сопряжены с дискретной математикой, так как логика высказываний даёт пример для иллюстрации такого фундаментального понятия как математическая структура (булевы алгебры).

Кроме того, аппарат логики высказываний и логики предикатов применяется для эффективного математического анализа таких форм мышления, как суждение и умозаключение, которые были выделенных ещё Аристотелем в рамках классической формальной логики. Формализация отношения логического следования, возможная в рамках математической логики, наглядно иллюстрирует универсальность математических методов.

Серьезные приложения результатов математической логики – дело специалистов. Однако всем, кто хочет овладеть основами дискретной математики, полезно познакомиться с логикой высказываний и предикатов.

2.Логика высказываний

2.1. Высказывания и логические связки

Высказыванием называется любое предложение (русского языка) о котором можно судить, истинно оно или ложно. В качестве примеров высказываний приведем предложения «Москва – столица России » и «Европа находится в южном полушарии». Первое высказывание является истинным, а второе – ложным.

Обозначаются высказывания большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.п. Высказывания в речи соответствуют повествовательным предложениям. Восклицательные, повелительные, вопросительные предложения не выражают высказываний.

При этом значение истинности высказываний удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам логики высказываний):

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным (закон непротиворечия).

Высказывание всегда имеет значение истины или лжи (закон исключенного третьего).

Можно считать, что на совокупности всех высказываний определяется функция истинности, принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$:

$$\lambda(A) = \begin{cases} 1, \textit{если } A \textit{ истинно} \\ 0, \textit{если } A \textit{ ложно} \end{cases}.$$

Значение $\lambda(A)$ - логическое значение или значение истинности высказывания A.

Значение истинности высказываний традиционно обозначаются также И (0) и Л (1).

<u>Пример 1.</u>

A : «Число 2 четное» $\lambda(A) = 1$;

B: «Вычитание натуральных чисел коммутативно» $\lambda(B) = 0$.

Над высказываниями определяются следующие основные операции (логические связки), которые позволяют из имеющихся высказываний строить новые:

- отрицание $\neg A$ ($\overline{A}$) (читается «не А») ;
- конъюнкция $A \wedge B$ (AB) (читается «А и В»);
- дизъюнкция $A \vee B$ (A+B) (читается «А или В»);
- импликация $A \to B$ (читается «если А, то В»);
- эквиваленция $A \leftrightarrow B$ (читается «А тогда и только тогда, когда В»).

Логическое значение полученных высказываний связаны с логическими значениями исходных высказываний. Это отражено в таблицах истинности соответствующих операций.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Пример 2.

1) $1{,}2 \le 3$ пример истинной конъюнкции высказываний $1{,}2 < 3$ (и) и $1{,}2 = 3$ (л).

2) Предложение «любое действительное число является комплексным» можно сформулировать как импликацию «Если число действительно, то оно является комплексным», которая является истинным высказыванием.

3) Высказывания «Если заниматься самостоятельно и посещать занятия, то сессия не страшна» и «Если квадратное уравнение имеет действительные коэффициенты и отрицательный дискриминант, то его решением является пара комплексно-сопряженных чисел» имеют одинаковую логическую структуру : $A \wedge B \to C$.

Пропозициональными переменными (ПП) называются такие переменные, вместо которых можно подставлять конкретные высказывания.

Эти переменные будем обозначать X,Y, Z, также будем использовать индексы.

Логическая структура высказываний записывается с помощью ПП, а также символов логических операций и скобок.

Формула алгебры (логики) высказываний (ФЛВ) определяется индуктивным способом:

1) всякая ПП есть формула;
2) если F_1 и F_{21} - формулы, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами;

3) других формул, кроме построенных по правилам 1) и 2), нет.

Правила оперирования скобками:

1) внешние скобки опускаются;

2) скобки, отделяющие более сильную операцию от более слабой опускаются.

Операции в порядке усиления: $X \leftrightarrow Y$, $X \to Y$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $\neg X$.

Пример 3.

3.1.Последовательность символов $((X \leftrightarrow Y) \wedge Z) \to (X \vee Y)$является формулой.

3.2.Последовательность символов $((X \wedge Y)Z) \to \neg X$ формулой не является.

Подформулой формулы называется всякая ее часть, которая сама является формулой.

В примере 3.1 подформулами, например, являются $((X \leftrightarrow Y) \wedge Z)$, $(X \vee Y)$

Если $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$формула, зависящая от ПП $X_1, X_2, \ldots . X_n$, то подставив вместо ПП набор конкретных высказываний $A_1, A_2, \ldots . A_n$, получаем составное высказывание $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Значение истинности этого высказывания определяется в зависимости от значений входящих в него высказываний и от смысла логических связок.

В алгебре высказываний полностью отвлекаются от содержания высказываний, а изучают их только в связи с их свойством быть истинным или ложным.

Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор высказываний, который обращает данную формулу в истинное (ложное) высказывание.

Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется тождественно истинной или тавтологией (тождественно ложной), если она обращается в истинное (ложное) высказывание при всех наборах значений ПП.

Формула $G(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется логическим следствием формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если она обращается в истинное высказывание на всяком наборе значений переменных, для которого в истинное высказывание обращаются все формулы $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Логическое следование будем обозначать $F_1, F_2, \ldots, F_m \mapsto G$.

Формулы F и G называется равносильными или эквивалентными, если при любых значениях ПП, логические значения формул совпадают. Обозначение $F \cong G$.

Пример 4.

4.1. Формула $\overline{X \to \overline{X}}$ является выполнимой (2 строка) и опровержимой (1 строка).

X	$\overline{X}$	$X \to \overline{X}$	$\overline{X \to \overline{X}}$
0	1	1	0
1	0	0	1

4.2. Формула $X \vee \overline{X}$ является тавтологией :

X	$\overline{X}$	$X \vee \overline{X}$
0	1	1
1	0	1

4.3. Формула $X \wedge \overline{X}$ является тождественно ложной:

X	$\overline{X}$	$X \wedge \overline{X}$
0	1	0
1	0	0

4.4. Формула $X \to Y$ является логическим следствием формулы $\overline{X}$, так как при всех значениях истинности ПП, при которых истинно $\overline{X}$, является истинным и формула $X \to Y$:

X	Y	$\overline{X}$	$X \to Y$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

4.5. Формулы $X \to Y$ и $\overline{Y} \to \overline{X}$ равносильны:

X	Y	$X \to Y$	$\overline{Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Теорема: *Формула логики высказываний G есть логическое следование формул $F_1, F_2, ..., F_m$, тогда и только тогда, когда ФЛВ $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G$ есть тавтология.*

Замечание. Выделенные основные типы формул, а также отношения между ними позволяют формализовать рассуждения с целью проверки их правильности.

Любое рассуждение (умозаключение) состоит из посылок и вывода. Рассуждение считается правильным, если его вывод логически следует из посылок. Поэтому важно уметь проверять наличие отношения логического следования, уметь упрощать набор посылок, заменяя их конъюнкцию на равносильное высказывание. Сформулированная выше теорема позволяет свести проверку правильности рассуждений к логическому вычислению значения $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G$.

Важно иметь набор тавтологий, равносильностей ФЛВ и правил логического вывода.

Основные тавтологии:

1) $X \vee \overline{X} \cong И$ (закон исключенного третьего)
2) $\overline{X \wedge \overline{X}} \cong И$ (закон непротиворечия)

Основные равносильности (свойства операций)

1) коммутативность операций $\vee$, $\wedge$ соответственно

- $X \vee Y \cong Y \vee X$ $\qquad X \wedge Y \cong Y \wedge X$

2) ассоциативность операций $\vee$, $\wedge$ соответственно

$(X \vee Y) \vee Z \cong X \vee (Y \vee Z)$ $\qquad (X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$

3) дистрибутивность операции $\wedge(\vee)$ относительно $\vee(\wedge)$ соответственно

$X \wedge (Y \vee Z) \cong X \wedge Y \vee X \wedge Z$ $\qquad X \vee (Y \wedge Z) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

4) идемпотентность операций $\vee$, $\wedge$ соответственно

$X \vee X = X$ $\qquad X \wedge X = X$

5) свойства тождественно-истинного высказывания *И*

$X \vee И \cong И$ (*И* - поглощающий элемент относительно $\vee$)

$X \wedge И \cong X$ (*И* -нейтральный элемент относительно $\wedge$)

6)) свойства тождественно-ложного высказывания *Л*

$X \vee Л \cong X$ (*Л* -нейтральный элемент относительно $\vee$)

$X \wedge Л \cong Л$ (*Л* -поглощающий элемент относительно $\wedge$)

7) закон поглощения $X \vee X \wedge Y \cong X$ $\qquad X \wedge (X \vee Y) \cong X$

8) закон поглощения $X \vee \overline{X} \wedge Y \cong X \vee Y$ $\qquad X \wedge (\overline{X} \vee Y) \cong X \wedge Y$

9) закон двойного отрицания $\overline{\overline{X}} \cong X$

10) законы де Моргана $\overline{X \vee Y} \cong \overline{X} \wedge \overline{Y}$ $\qquad \overline{X \wedge Y} \cong \overline{X} \vee \overline{Y}$

11) $X \to Y \cong \overline{X} \vee Y$;

12) закон контрапозиции $X \to Y \cong \overline{Y} \to \overline{X}$.

С помощью приведенных равносильностей можно проводить преобразование формул ЛВ, приводя их к более простому виду.

2.2. Проверка правильности умозаключений

Под умозаключением в формальной логике понимается такая форма мышления, которая позволяет получать новые знания на основе имеющихся. Выделяются такие типы умозаключений: дедуктивные, индуктивные, рассуждения по аналогии. Любое умозаключение имеет посылки и вывод, которые определенным образом связаны между собой. $\dfrac{A_1, A_2, \ldots A_n}{B}$

Если умозаключение записать с помощью ФЛВ, то оно имеет вид импликации: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$.

Умозаключение будет правильным (верным), если вывод логически следует из посылок, т.е. если импликация является тавтологией.

Проверка правильности умозаключений может проводится разными способами.

1. Первый способ. Для формулы $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ построить таблицу истинности. Если данная формула является тавтологией, то умозаключение верное.

Можно предварительно с помощью равносильных преобразований привести формулу к более простому виду и так же проанализировать полученный результат.

2. Второй способ проверки носит название «метода от противного». Рассматривается формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \overline{B}$.

Рассуждение правильно в том и только том случае, если полученная формула - тождественно-ложное высказывание. Это означает, что невозможно одновременно утверждать истинность всех посылок и отрицание вывода.

Пример. Проверить правильность умозаключения: «Если наступит сессия, то мы будем сдавать экзамен. Сейчас я сдаю экзамен. Следовательно, у меня сейчас сессия.»

Решение . Введем обозначение : С – наступает сессия; Э- сдаётся экзамен. Структура умозаключения имеет вид:

$$\frac{C \to Э, Э}{C}$$

Составим высказывание: $((C \to Э) \wedge Э) \to C$. Достаточно проверить, будет ли оно являться тавтологией.

1 способ. Построить таблицу истинности

С	Э	$\tilde{N} \to \acute{Y}$	$((\tilde{N} \to \acute{Y}) \wedge \acute{Y})$	$((\tilde{N} \to \acute{Y}) \wedge \acute{Y}) \to \tilde{N}$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Рассуждение неверно, так как при истинных посылках получили ложный вывод.

Пример. Если наступит сессия, то мы будем сдавать экзамен. Сейчас у меня сессия. Следовательно, буду сдавать экзамен.

Решение. При тех же обозначениях, что и в предыдущем примере, имеем следующую схему умозаключения:

$$\frac{C \to \text{Э}, C}{\text{Э}}$$

Покажем, что формула $((C \to \text{Э}) \wedge C) \to \text{Э}$ является тавтологией.

2 способ. Преобразовать формулу с помощью равносильностей.

$$((C \to \text{Э}) \wedge C) \to \text{Э} \cong \overline{(\overline{C} \vee \text{Э}) \wedge C} \vee \text{Э} \cong \overline{(\overline{C} \wedge C) \vee (\text{Э} \wedge C)} \vee \text{Э} \cong \overline{\text{Л} \vee (\text{Э} \wedge C)} \vee \text{Э}$$
$$\cong (\overline{\text{Э}} \vee \overline{C}) \vee \text{Э} \cong \text{И} \vee \overline{C} \cong \text{И}.$$

Покажем использование метода «от противного» для этого же примера: $((C \to \text{Э}) \wedge C) \wedge \overline{\text{Э}} \cong (\overline{C} \vee \text{Э}) \wedge C \wedge \overline{\text{Э}} \cong \overline{C} \wedge C \wedge \overline{\text{Э}} \vee \text{Э} \wedge C \wedge \overline{\text{Э}} \cong \text{Л} \vee \text{Л} \cong \text{Л}$.

Вывод: умозаключение верное.