1. Логика высказываний

1.1. Высказывания и операции

«Если число π рационально, то π — алгебраическое число. Но оно не алгебраическое. Значит, π не рационально.» Мы не обязаны знать, что такое число π, какие числа называют рациональными и какие алгебраическими, чтобы признать, что это рассуждение правильно — в том смысле, что из двух сформулированных посылок действительно вытекает заключение. Такого рода ситуации — когда некоторое утверждение верно независимо от смысла входящих в него высказываний — составляют предмет *логики высказываний*.

Такое начало (особенно если учесть, что курс логики входил в программу философского факультета, где также изучалась «диалектическая логика») настораживает, но на самом деле наши рассмотрения будут иметь вполне точный математический характер, хотя мы начнём с неформальных мотивировок.

Высказывания могут быть *истинными* и *ложными*. Например, «$2^{16}+1$ — простое число» — истинное высказывание, а «$2^{32}+1$ — простое число» — ложное (это число делится на 641). Про высказывание «существует бесконечно много простых p, для которых $p+2$ — также простое» никто не берётся сказать наверняка, истинно оно или ложно. Заметим, что «x делится на 2» в этом смысле не является высказыванием, пока не сказано, чему равно x; при разных x получаются разные высказывания, одни истинные (при чётном x), другие — ложные (при нечётном x).

Высказывания можно соединять друг с другом с помощью «логических связок». Эти связки имеют довольно странные, но традиционные названия и обозначения (табл. 1.1). Отметим также, что в импликации $A \Rightarrow B$ высказывание A называют *посылкой*, или *антецедентом импликации*, а B — *заключением*, или *консеквентом*.

Говорят также, что высказывание имеет *истинностное значение* **И** (истина), если оно истинно, или **Л** (ложь), если оно ложно. Иногда вместо **И** употребляется буква **T** (true) или число 1, а вместо **Л** — буква **F** (false) или число 0. (С первого взгляда идея произвольным образом выбрать числа 0 и 1 кажется дикой — какая бы польза могла быть от, скажем, сложения истинностных значений? Удивительным образом в последние годы обнаружилось, что такая польза есть, и если оперировать с истиной и ложью как элементами конечного поля, можно получить много неожиданных результатов. Но это выходит

связка	обозначение	название
A и B	$A\&B$ $\quad A \wedge B$ A `and` B	конъюнкция
A или B	$A \vee B$ $\quad A$ `or` B	дизъюнкция
не A A неверно	$\neg A \quad {\sim} A \quad \overline{A}$ `not` A	отрицание
из A следует B если A, то B A влечёт B B — следствие A	$A \to B \quad A \Rightarrow B$ $A \supset B$ `if` A `then` B	импликация следование

Таблица 1.1. Логические связки, обозначения и названия.

за рамки нашей книги.)

Логические связки позволяют составлять сложные высказывания из простых. При этом истинность составного высказывания определяется истинностью его частей в соответствии с таблицей 1.2.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
Л	**Л**	**Л**	**Л**	**И**
Л	**И**	**Л**	**И**	**И**
И	**Л**	**Л**	**И**	**Л**
И	**И**	**И**	**И**	**И**

A	$\neg A$
Л	**И**
И	**Л**

Таблица 1.2. Таблицы истинности для логических связок.

Те же правила можно изложить словесно. Высказывание $A \wedge B$ истинно, если оба высказывания A и B истинны. Высказывание $A \vee B$ истинно, если хотя бы одно из высказываний A и B истинно. Высказывание $A \to B$ ложно в единственном случае: если A истинно, а B ложно. Наконец, $\neg A$ истинно в том и только том случае, когда A ложно.

Из всех связок больше всего вопросов вызывает импликация. В самом деле, не очень понятно, почему надо считать, скажем, высказывания «если $2 \times 2 = 5$, то $2 \times 2 = 4$» и «если $2 \times 2 = 5$, то $3 \times 3 = 1$» истинными. (Именно так говорят наши таблицы: **Л** $\to$ **И** $=$ **Л** $\to$ **Л** $=$ **И**.) На самом деле в таком определении есть свой резон. Все согласны, что если число x делится на 4, то оно делится на 2. Это означает, что высказывание

$$(x \text{ делится на } 4) \ \rightarrow\ (x \text{ делится на } 2)$$

истинно при всех x. Подставим сюда $x = 5$: обе части ложны, а утверждение в целом истинно. При $x = 6$ посылка импликации ложна, а заключение истинно, и вся импликация истинна. Наконец, при $x = 8$ посылка и заключение истинны и импликация в целом истинна. С другой стороны, обратное утверждение (если x делится на 2, то x делится на 4) неверно, и число 2 является контрпримером. При этом посылка импликации истинна, заключение ложно, и сама импликация ложна. Таким образом, если считать, что истинность импликации определяется истинностью её частей (а не наличием между ними каких-то причинно-следственных связей), то все строки таблицы истинности обоснованы. Чтобы подчеркнуть такое узко-формальное понимание импликации, философски настроенные логики называют её «материальной импликацией».

Теперь от неформальных разговоров перейдём к определениям. Элементарные высказывания (из которых составляются более сложные) мы будем обозначать маленькими латинскими буквами и называть *пропозициональными переменными*. Из них строятся *пропозициональные формулы* по таким правилам:

- Всякая пропозициональная переменная есть формула.
- Если A — пропозициональная формула, то $\neg A$ — пропозициональная формула.
- Если A и B — пропозициональные формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \rightarrow B)$ — пропозициональные формулы.

Можно ещё сказать так: формулы образуют минимальное множество, обладающее указанными свойствами (слово «минимальное» здесь существенно: ведь если бы мы объявили любую последовательность переменных, скобок и связок формулой, то эти три свойства были бы тоже выполнены).

Пусть формула φ содержит n пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Если подставить вместо этих переменных истинностные значения (**И** или **Л**), то по таблицам можно вычислить истинностное значение формулы в целом. Таким образом, формула задаёт некоторую функцию от n аргументов, каждый из которых может принимать значения **Л** и **И**. Значения функции также лежат в множестве $\{\mathbf{Л}, \mathbf{И}\}$, которое мы будем обозначать $\mathbb{B}$. Мы будем следовать уже упоминавшейся традиции и отождествлять **И** с единицей, а **Л** — с нулём, тем самым $\mathbb{B}$ есть $\{0, 1\}$. Формула φ задаёт отображение типа $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Такие отображения называют также *булевыми функциями n аргументов*.

Пример. Рассмотрим формулу $(p \wedge (q \wedge \neg r))$. Она истинна в единственном случае — когда p и q истинны, а r ложно (см. таблицу 1.3).

p	q	r	$\neg r$	$(q \wedge \neg r)$	$(p \wedge (q \wedge \neg r))$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Таблица 1.3. Таблица истинности для $(p \wedge (q \wedge \neg r))$.

Некоторые формулы выражают логические законы — составные высказывания, истинные независимо от смысла их частей. Такие формулы (истинные при всех значениях входящих в них переменных) называют *тавтологиями*.

Пример. Формула $((p \wedge q) \to p)$ является тавтологией (это можно проверить, например, составив таблицу). Она выражает такой логический закон: из конъюнкции утверждений следует первое из них.

1. Как выглядит симметричное утверждение для дизъюнкции и какая формула его выражает?

Две формулы называют *эквивалентными*, если они истинны при одних и тех же значениях переменных (другими словами, если они задают одну и ту же булеву функцию). Например, легко проверить, что формула $(p \wedge (p \to q))$ истинна лишь при $p = q = \mathbf{И}$, и потому эквивалентна формуле $(p \wedge q)$.

Рассмотрим формулу $((p \wedge q) \vee q)$. Она истинна, если переменная q истинна, и ложна, если переменная q ложна. Хотелось бы сказать, что она эквивалентна формуле q, но тут есть формальная трудность: она содержит две переменные и потому задаёт функцию от двух аргументов (типа $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$), в то время как формула q

задаёт функцию одного аргумента. Мы не будем обращать на это внимания и будем считать эти формулы эквивалентными. Вообще, если есть список переменных $p_1, \ldots, p_n$, содержащий все переменные некоторой формулы φ (и, возможно, ещё какие-то переменные), можно считать, что формула φ задаёт функцию от n аргументов, возможно, на деле зависящую не от всех аргументов (постоянную по некоторым аргументам)

После сделанных оговорок легко проверить следующий факт: формулы φ и ψ эквивалентны тогда и только тогда, когда формула $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ является тавтологией. Используя сокращение $(p \leftrightarrow q)$ для $((p \to q) \wedge (q \to p))$, можно записывать утверждения об эквивалентности формул в виде тавтологий. Вот несколько таких эквивалентностей:

Теорема 1. Формулы

$$
\begin{gathered}
(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p);\\
((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r));\\
(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p);\\
((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r));\\
(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r));\\
(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r));\\
\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q);\\
\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q);\\
(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p;\\
(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p;\\
(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p);\\
p \leftrightarrow \neg\neg p
\end{gathered}
$$

являются тавтологиями.

$\lhd$ Первые четыре эквивалентности выражают коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции. Проверим, например, вторую: левая и правая части истинны в единственном случае (когда все переменные истинны), и потому эквивалентны. (Для дизъюнкции удобнее смотреть, когда она ложна.)

Две следующие эквивалентности означают дистрибутивность — заметим, что в отличие от сложения и умножения в кольцах здесь верны оба свойства дистрибутивности. Проверить эквивалентность легко, если отдельно рассмотреть случаи истинного и ложного p.

Следующие два свойства, *законы Де Моргана*, легко проверить, зная, что конъюнкция истинна, а дизъюнкция ложна лишь в одном случае. Эти свойства иногда выражают словами: «конъюнкция двойственна дизъюнкции».

Далее следуют два очевидных *закона поглощения* (один из них мы уже упоминали).

За ними идёт правило *контрапозиции*, которое говорит, в частности, что утверждения «если x совершенно, то x чётно» и «если x нечётно, то x несовершенно» равносильны. Хотя оно и очевидно проверяется с помощью таблиц истинности, с ним связаны любопытные парадоксы. Вот один из них.

Биолог А выдвинул гипотезу: все вороны чёрные. Проверяя её, он вышел во двор и обнаружил на дереве ворону. Она оказалось чёрной. Биолог А радуется — гипотеза подтверждается. Биолог Б переформулировал гипотезу так: все не-чёрные предметы — не вороны (применив наше правило контрапозиции) и не стал выходить во двор, а открыл холодильник и нашёл там оранжевый предмет. Он оказался апельсином, а не вороной. Биолог Б обрадовался — гипотеза подтверждается — и позвонил биологу А. Тот удивляется — у него тоже есть апельсин в холодильнике, но с его точки зрения никакого отношения к его гипотезе апельсин не имеет...

Другой парадокс: с точки зрения формальной логики утверждения «кто не с нами, тот против нас» и «кто не против нас, тот с нами» равносильны.

Последнее (и очевидное) правило $p \leftrightarrow \neg\neg p$ называется *снятием двойного отрицания.* $\triangleright$

2. Перечисленные эквивалентности соответствуют свойствам операций на множествах: например, первая гарантирует, что $P \cap Q = Q \cap P$ для любых множеств P и Q. Какие утверждения соответствуют остальным эквивалентностям?

3. Две формулы, содержащие только переменные и связки $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду заменить $\wedge$ на $\vee$ и наоборот.

Далеко не все тавтологии имеют ясный интуитивный смысл. Например, формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ является тавтологией (если одно из утверждений p и q ложно, то из него следует всё, что угодно; если оба истинны, то тем более формула истинна), хотя и отчасти противоречит нашей интуиции — почему, собственно, из двух никак не связанных утверждений одно влечёт другое? Ещё более загадочна тавтология

$$((p \to q) \to p) \to p$$

(хотя её ничего не стоит проверить с помощью таблиц истинности).

Отступление о пользе скобок. На самом деле наше определение истинности содержит серьёзный пробел. Чтобы обнаружить его, зададим себе вопрос: зачем нужны скобки в формулах? Представим себе, что мы изменим определение формулы, и будем говорить, что $P \wedge Q$ и $P \vee Q$ являются формулами для любых P и Q. Останутся ли наши рассуждения в силе?

Легко понять, что мы столкнёмся с трудностью при определении булевой функции, соответствующей формуле. В этом определении мы подставляли нули и единицы на место переменных и затем вычисляли значение формулы с помощью таблиц истинности для связок. Но теперь, когда мы изменили определение формулы, формула $p \wedge q \vee r$ может быть получена двумя способами — из формул $p \wedge q$ и r с помощью операции $\vee$ и из формул p и $q \vee r$ с помощью операции $\wedge$. Эти два толкования дадут разный результат при попытке вычислить значение $0 \wedge 0 \vee 1$.

Из сказанного ясно, что скобки нужны, чтобы гарантировать однозначность синтаксического разбора формулы. Точнее говоря, верно такое утверждение:

Теорема 2 (однозначность разбора). Пропозициональная формула, не являющаяся переменной, может быть представлена ровно в одном из четырёх видов $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ или $\neg A$, где A и B — некоторые формулы, причём A и B (в первых трёх случаях) восстанавливаются однозначно.

$\lhd$ Формальное доказательство можно провести так: назовём *скобочным итогом* разницу между числом открывающихся и закрывающихся скобок. Индукцией по построению формулы легко доказать такую лемму:

Лемма. Скобочный итог формулы равен нулю. Скобочный итог любого начала формулы неотрицателен и равен нулю, лишь если это начало совпадает со всей формулой, пусто или состоит из одних символов отрицания.

Слова «индукцией по построению» означают, что мы проверяем утверждение для переменных, а также доказываем, что если оно верно для формул A и B, то оно верно и для формул $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ и $\neg A$.

После того как лемма доказана, разбор формулы проводится так: если она начинается с отрицания, то может быть образована лишь по третьему правилу. Если же она начинается со скобки, то надо скобку удалить, а потом искать непустое начало, имеющее нулевой скобочный итог и не оканчивающееся на знак логической операции. Такое начало единственно (как легко проверить, используя лемму). Это начало и будет первой частью формулы. Тем самым формула разбирается однозначно. ▷

Нет смысла вдаваться в подробности этого (несложного) рассуждения: вообще-то алгоритмы разбора формул — это отдельная большая и практически важная тема (в первую очередь в связи с компиляторами). Приведённый нами алгоритм далеко не оптимален. С другой стороны, мы вообще можем обойти эту проблему, потребовав, чтобы при записи формул левая и правая скобки, окружающие формулу, связывались линией — тогда однозначность разбора формулы не вызывает вопросов, и больше ничего нам не надо.

В дальнейшем мы будем опускать скобки, если они либо не играют роли (например, можно написать конъюнкцию трёх членов, не указывая порядок действий в силу ассоциативности), либо ясны из контекста.

4. Польский логик Лукасевич предлагал обходиться без скобок, записывая в формулах сначала знак операции, а потом операнды (без пробелов и разделителей). Например, $(a + b) \times (c + (d \times e))$ в его обозначениях запишется как $\times{+}ab{+}c{\times}de$. Эту запись ещё называют *польской* записью. *Обратная* польская запись отличается от неё тем, что знак операции идёт после операндов. Покажите, что в обоих случаях порядок действий восстанавливается однозначно.

1.2. Полные системы связок

Рассматриваемая нами система пропозициональных связок (в неё входят $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$) *полна* в следующем смысле:

Теорема 3 (Полнота системы связок). Любая булева функция (с любым числом аргументов) может быть записана в виде пропозициональной формулы.

◁ Проще всего пояснить это на примере. Пусть, например, булева функция $\varphi(p, q, r)$ задана таблицей 1.4.

В таблице есть три строки с единицами в правой колонке — три случая, когда булева функция истинна (равна 1). Напишем три конъюнкции, каждая из которых покрывает один случай (а в остальных