

Исчисление предикатов

В этой главе мы охарактеризуем понятие тождественной истинности и логического следствия некоторым формальным образом. А именно, построим так называемое исчисление предикатов (и как частный случай – исчисление высказываний). Будут введены понятия аксиомы и правила вывода. Предметом рассмотрения будут фактически только те формулы, которые получаются из аксиом и правил вывода. Примером такого подхода является аксиоматический метод в геометрии. Отличие логики предикатов от геометрии состоит в том, что здесь фиксируются не только исходные утверждения (аксиомы), но и способы получения следствий (правила вывода).

§ 1. Об определении некоторых семантических понятий

В этой главе мы несколько изменим определение формулы логики предикатов и определение некоторых семантических понятий.

Начнем с понятия формулы. Традиция аксиоматизации той или иной области математики предполагает использовать небольшое число аксиом. В то же время аксиоматика – это формальное определение базовых понятий. В случае логики предикатов – это понятие атомарной формулы и семь логических операций. Но семь основных операций – это довольно много. Поступим поэтому следующим образом:

- 1) исходными объектами для построения формул будут, по-прежнему множества F , G и V , только сейчас сигнатурой будем называть объединение $F \cup G \cup V$;
- 2) определение терма и атомарной формулы оставим в прежнем виде,
- 3) из логических связок оставим только \neg и \rightarrow ;
- 4) из кванторов оставим только квантор общности.

Остальные логические связки и квантор существования мы будем использовать, но будем понимать их как сокращение в соответствие со следующей таблицей:

Формула	Сокращение формулы
$\neg F \rightarrow G$	$F \vee G$
$\neg(F \rightarrow \neg G)$	$F \& G$
$\neg[(F \rightarrow G) \rightarrow \neg(G \rightarrow F)]$	$F \leftrightarrow G$
$\neg(\forall x)\neg F(x)$	$(\exists x)F(x)$

Сокращение числа связок и кванторов полезно и в другом отношении. Дело в том, что в дальнейшем надо будет часто проводить доказательство

индукцией по построению формулы. А чем меньше логических операций, тем меньше случаев при рассмотрении шага индукции.

Итак, понятие формулы в этой главе мы воспринимаем в более узком смысле, нежели в главе 2. А понятие интерпретации, наоборот, расширим. Напомним, что интерпретация с областью M определялась как функция ϕ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) если c – константа, то $\phi(c) \in M$;
- 2) если f – функциональный символ с n аргументами, то $\phi(f)$ – всюду определенная n -местная функция, заданная на M ;
- 3) если r – предикатный символ с n аргументами, то $\phi(r)$ – всюду определенный n -местный предикат, заданный на M .

Такое определение интерпретации преследовало цель изучить выразительные возможности языка логики предикатов. Оно позволяло ставить вопрос о том, выразим тот или иной предикат формулой данной сигнатуры. В этой главе предикат мы будем понимать как (всюду определенное) отображение $r: M^n \rightarrow \{0, 1\}$, где n – местность предиката, M^n – декартова степень множества M . Кроме того, к трем пунктам из определения интерпретации добавим *четвертый* пункт:

- 4) если x – переменная, то $\phi(x) \in M$;

Основная цель подобного расширения дать *точное* определение значения истинности формулы при данной интерпретации. Ранее это было сделано только для логических связок, а в случае кванторов значение истинности воспринималось на интуитивном уровне. Введем несложное обозначение: через $I(\phi, x)$ будем обозначать множество интерпретаций, совпадающих всюду, кроме возможно переменной x .

Из 1, 2 и 4 пунктов определения интерпретации следует, что $\phi(t) \in M$ для любого терма t . Значение истинности формулы F при интерпретации ϕ индуктивно определяется следующим образом:

- 1) если $F = r(t_1, t_2, \dots, t_n)$, то $\phi(F) = \phi(r)(\phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_n))$;
- 2) если $F = \neg G$, то $\phi(F) = 1 - \phi(G)$;
- 3) если $F = G \rightarrow H$, то $\phi(F) = \max\{1 - \phi(G), \phi(H)\}$;
- 4) если $F = (\forall x)G(x)$, то $\phi(F) = 1$ в том и только в том случае, когда для любой $\phi' \in I(\phi, x)$ выполняется равенство $\phi'(G) = 1$.

Пример. Пусть $F = \{c, f(x)\}$, $R = \{q(x)\}$, $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. В качестве области интерпретации возьмем множество $M = \{0, 1, 2\}$. Интерпретацию определим следующей таблицей:

M	$\phi(f)$	$\phi(q)$
0	1	0
1	0	1

2	2	0
---	---	---

и равенствами $\phi(c) = 2$ и $\phi(x_i)$ = остаток от деления i на 3.

Рассмотрим формулу

$$F(x_6) = q(x_6) \rightarrow q[f(c)].$$

Вычислим последовательно: $\phi(x_6) = 0$, $(\phi q)(0) = 0$ и поэтому $\phi[q(x_6)] = 0$. Далее считаем: $\phi(c) = 2$, $(\phi f)(2) = 2$, $(\phi q)(2) = 0$. Следовательно, $\phi[q(f(c))] = 0$. В итоге получим, что

$$\phi[F(x_6)] = \max\{1 - \phi[q(x_6)], \phi[q(f(c))]\} = 1.$$

Возьмем другую формулу

$$G = (\forall x_1)[\neg q(c) \rightarrow q(f(x_1))].$$

Мы знаем, что $\phi(G) = 1$ тогда и только тогда, когда для любой интерпретации $\phi' \in I(\phi, x)$ выполняется равенство $\phi'[\neg q(c) \rightarrow q(f(x_1))] = 1$. Надо рассмотреть различные значения для $\phi'(x_1)$.

Случай 1: $\phi'(x_1) = 0$. Тогда $\phi'[\neg q(c)] = 1$, $\phi'[q(f(x_1))] = 1$ и поэтому $\phi'[\neg q(c) \rightarrow q(f(x_1))] = 1$.

Случай 2: $\phi'(x_1) = 1$. В этом случае имеем равенства $\phi'[\neg q(c)] = 1$ и $\phi'[q(f(x_1))] = 0$. Это означает, что $\phi'[\neg q(c) \rightarrow q(f(x_1))] = 0$.

На основании последнего равенства заключаем, что $\phi(G) = 0$. Третий случай: $\phi'(x_1) = 2$ рассматривать не надо.

Проведенное изменение понятия интерпретации позволяет определить основные семантические понятия так, как это сделано в логике высказываний, а именно:

- 1) формула F называется *тождественно истинной*, если для любой интерпретации ϕ выполняется равенство $\phi(F) = 1$;
- 2) формула F называется *равносильной* формуле G , если для любой интерпретации ϕ выполняется равенство $\phi(F) = \phi(G)$;
- 3) формула G называется *логическим следствием* формул F_1, F_2, \dots, F_k если для любой интерпретации ϕ из равенств $\phi(F_1) = \phi(F_2) = \dots = \phi(F_k) = 1$ следует равенство $\phi(G) = 1$;
- 4) множество формул P называется *выполнимым*, если существует интерпретация ϕ такая, что $\phi(P) = 1$, т. е. $\phi(F) = 1$ для любой формулы F из P .

Тот факт, что формула G является тождественно истинной, будем обозначать через $\models G$. Для обозначения равносильности формул F и G оставим прежнее обозначение: $F \Leftrightarrow G$. Для множества формул P запись $P \models G$ будет означать, что формула G является логическим следствием множества формул P .

В этой главе нам придется довольно часто проводить доказательство индукцией по формуле, причем индукции будут разных «сортов».

Наиболее частой будет проводиться индукция *по построению формулы*, т. е. по частично упорядоченному множеству подформул этой формулы. Иногда будет использоваться индукция *по сложности формулы*. В этом случае сложностью формулы считается число логических операций в записи этой формулы, т. е. суммарное число связок и кванторов.

§ 2. Теоремы о замене (о подстановке)

Параграф играет вспомогательную роль. Он содержит утверждения либо о совпадении значений интерпретации на «близких» выражениях (термах или формулах), либо о совпадении значений «близких» интерпретаций.

Условимся, что запись $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для терма или $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для формулы означает в первом случае, что x_1, x_2, \dots, x_n – все переменные терма t , а во втором случае, что x_1, x_2, \dots, x_n – все свободные переменные формулы F .

Начнем с простого утверждения.

Лемма 1. Если $t = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – терм, а ϕ и ψ – две интерпретации, совпадающие на функциональных символах из t и переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то $\phi(t) = \psi(t)$.

Доказательство теоремы легко получается индукцией по построению терма и предоставляется читателю.

Теорема 3.1. Пусть $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – формула логики предикатов, ϕ и ψ – две интерпретации, совпадающие на функциональных и предикатных символах из F и переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда $\phi(F) = \psi(F)$.

Доказательство проведем индукцией по построению формулы F .

База индукции: F – атомарная формула, т. е. $F = r(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Тогда $\phi(F) = \phi(r)[\phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_n)]$ и $\psi(F) = \psi(r)[\psi(t_1), \psi(t_2), \dots, \psi(t_n)]$. По условию теоремы выполняется равенство $\phi(r) = \psi(r)$, а по лемме 1 – равенства $\phi(t_i) = \psi(t_i)$ для $1 \leq i \leq n$. Следовательно, $\phi(F) = \psi(F)$.

Шаг индукции: предположим, что для всех собственных подформул формулы F теорема доказана. Рассмотрим ряд случаев:

Случай 1: $F = \neg G$. Тогда $\phi(F) = 1 - \phi(G)$ и $\psi(F) = 1 - \psi(G)$. Но по предположению индукции $\phi(G) = \psi(G)$. Следовательно, $\phi(F) = \psi(F)$.

Случай 2: $F = G \rightarrow H$. В этом случае имеем, что $\phi(F) = \max\{1 - \phi(G), \phi(H)\}$ и $\psi(F) = \max\{1 - \psi(G), \psi(H)\}$. В силу равенств $\phi(G) = \psi(G)$ и $\phi(H) = \psi(H)$ из предположения индукции, получаем заключение теоремы.

Рассмотрим наиболее сложный

Случай 3: $F = (\forall x)G(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предположим, что $\phi(F) = 1$. Это означает, что для любой интерпретации $\phi' \in I(\phi, x)$ выполняется равенство $\phi'(G) = 1$. Возьмем произвольную интерпретацию $\psi' \in I(\psi, x)$ и выберем ϕ'

из $I(\phi, x)$ так, чтобы $\phi'(x) = \psi'(x)$. Тогда интерпретации ϕ' и ψ' совпадают на всех функциональных и предикатных символах формулы G и ее свободных переменных x, x_1, x_2, \dots, x_n . По предположению индукции имеем равенство $\phi'(G) = \psi'(G)$. Следовательно, для любой интерпретации $\psi' \in I(\psi, x)$ выполняется равенство $\psi'(G) = 1$. Это означает, что $\psi(F) = 1$. Мы доказали, что если $\phi(F) = 1$, то $\psi(F) = 1$. Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

Теорема 1 подтверждает содержательно понятную мысль о том, что интерпретация формулы не зависит от интерпретации ее связанных переменных. В другом варианте ту же мысль выразим в виде теоремы 3.1'.

Теорема 3.1'. Пусть G – формула логики предикатов, а G' – формула, полученная из G заменой связанных переменных на новые (т. е. такие, которых нет в формуле G). Тогда для любой интерпретации ϕ выполняется равенство $\phi(G) = \phi(G')$.

Доказательство теоремы 1' опустим, так как оно проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Лемма 2. Пусть $t = t(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – некоторый терм, а $s = s(u, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – терм, полученный из t заменой переменной x на терм u . Пусть, далее ϕ и ψ – две интерпретации, совпадающие на всех функциональных символах из t и переменных x_1, x_2, \dots, x_n (кроме, возможно, переменной x). Тогда если $\phi(x) = \psi(u)$, то $\phi(t) = \psi(s)$.

Доказательство леммы легко получается индукцией по построению терма t и предоставляемся читателю.

Определение. Пусть F – формула со свободной переменной x (и возможно, другими свободными переменными), u – некоторый терм. Подстановка терма u вместо всех свободных вхождений переменной x называется *допустимой*, если ни одна переменная терма u в результате подстановки не окажется связанной.

Если, например,

$$F(x) = r(x) \& (\forall y)[s(x, y) \rightarrow t(x)],$$

то для допустимости подстановки терма u вместо переменной x необходимо, чтобы терм u не содержал переменной y .

Теорема 3.2. Пусть $F = F(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – формула, а u – терм, подстановка которого в формулу F вместо x допустима. Пусть, далее ϕ и ψ – две интерпретации, совпадающие на всех функциональных и предикатных символах из F и переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда если $\phi(x) = \psi(u)$, то $\phi(F(x)) = \psi(F(u))$.

Доказательство проводится индукцией по построению формулы F . База индукции – это фактически лемма 2. Из трех случаев в шаге индукции рассмотрим только последний случай. Пусть $F(x) = (\forall y)G(x, y)$.

(Разумеется, формулы F и G в качестве свободных переменных содержит еще и переменные x_1, x_2, \dots, x_n .)

Предположим, что $\phi(F(x)) = 1$. Это означает, что для любой интерпретации $\phi' \in I(\phi, y)$ выполняется равенство $\phi'(G(x, y)) = 1$. Так как x – свободная переменная формулы F , $x \neq y$ и поэтому $\phi'(x) = \phi(x)$. Надо доказать, что для любой интерпретации $\psi' \in I(\psi, y)$ выполняется равенство $\psi'(G(u, y)) = 1$. Возьмем произвольную интерпретацию $\psi' \in I(\psi, y)$. Заметим, что $\psi'(u) = \psi(u)$, так как терм u не содержит переменной y в силу допустимости подстановки. Тогда интерпретации ϕ' и ψ' совпадают на всех функциональных и предикатных символах формулы F и свободных переменных x_1, x_2, \dots, x_n этой формулы и $\phi'(x) = \psi'(u)$. По предположению индукции получаем равенство $\phi'(G(x, y)) = \psi'(G(u, y))$. Но первое выражение равно 1. Следовательно, для любой интерпретации $\psi' \in I(\psi, x)$ выполняется равенство $\psi'(G(u, y)) = 1$. Мы доказали, что если $\phi(F(x)) = 1$, то $\psi(F(u)) = 1$. Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

§ 3. Аксиоматизация логики предикатов

Данный параграф является центральным в этой главе. В нем будут даны понятия аксиомы, правила вывода, вывода и доказательства.

Начнем по порядку.

Определение. Пусть F , G и H – формулы логики предикатов. *Аксиомой логики предикатов* называется формула одного из следующих видов:

$$A1: F \rightarrow (G \rightarrow F),$$

$$A2: [F \rightarrow (G \rightarrow H)] \rightarrow [(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)],$$

$$A3: (\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow [(\neg G \rightarrow F) \rightarrow G],$$

$A4: (\forall x)(F \rightarrow G(x)) \rightarrow (F \rightarrow (\forall x)G(x))$, если формула F не содержит x в качестве свободной переменной,

$A5: (\forall x)F(x) \rightarrow F(t)$, если подстановка терма t вместо переменной x в формулу F допустима.

Подчеркнем, что аксиомой является любая формула указанных пяти видов (разумеется, при выполнении условий, указанных в $A4$ и $A5$). Например, формула $p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(x))$ – аксиома, полученная в соответствии с пунктом $A1$ определения. В этом случае мы будем говорить, что данная аксиома имеет *схему A1*. Множество аксиом бесконечно. Но число схем, по которым получаются аксиомы, всего пять.

Определение. Пусть F и G – формулы логики предикатов. *Правилами вывода в логике предикатов* называются следующие правила:

$$1) \quad \frac{F, F \rightarrow G}{G}, \quad , \quad 2) \quad \frac{}{(\forall y)F(y)},$$

где x и y – переменные и подстановка y вместо x во втором правиле должна быть допустимой.

Первое правило называется *правилом отщепления* (или правилом *modus ponens*). Мы его сокращенно будем обозначать через *MP*. Второе правило будем называть *правилом обобщения*, и для него будем использовать сокращение *GN*.

Сейчас мы сформулируем ряд определений, из которых основное внимание надо обратить на первое определение. После формулировки определений будет приведена значительная серия примеров.

Определение. *Выводом из множества формул* (или гипотез) P называется последовательность формул

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

каждая формула F_k которой удовлетворяет (хотя бы) одному из условий:

- 1) F_k принадлежит P ,
- 2) F_k – аксиома,
- 3) F_k следует из предыдущих (в данной последовательности) формул по правилу *MP*,
- 4) F_k следует из предыдущей формулы по правилу *GN*, причем обобщаемая переменная не входит свободно в формулы из P , имеющиеся в этой последовательности.

Определение. Формула G называется *выводимой из множества формул P*, если существует вывод из P , последней формулой которого является G .

Обозначение: $P \vdash G$.

Определение. Вывод из пустого множества P называется *доказательством*.

Другими словами доказательство – последовательность формул, каждая формула которой удовлетворяет одному из условий 2 – 4 из определения вывода.

Определение. Формула G называется *доказуемой* (или *теоремой*), если существует доказательство, последней формулой которого является формула G .

Обозначение: $\vdash G$.

Перейдем, наконец, к примерам. Для примеров будем использовать сквозную (внутри главы) нумерацию для последующих ссылок. Последовательность формул в примерах нам будет удобно записывать не в строку, а в столбец. Будем, кроме того, указывать обоснования включения формулы в данный вывод.

Пример 1. $\vdash F \rightarrow F$.

- 1) $F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)$, A1
- 2) $[F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)] \rightarrow$ A2

$\rightarrow [(F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F)],$

- 3) $(F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F),$ $MP(1, 2)$
4) $F \rightarrow (F \rightarrow F),$ $A1$
5) $F \rightarrow F.$ $MP(3, 4)$

Пример 2. $\{F, \neg F\} \vdash G.$

- 1) $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G),$ $A3$
2) $\neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F),$ $A1$
3) $\neg F,$ гипотеза
4) $\neg G \rightarrow \neg F$ $MP(2, 3)$
5) $(\neg G \rightarrow F) \rightarrow G,$ $MP(1, 4)$
6) $F \rightarrow (\neg G \rightarrow F),$ $A1$
7) $F,$ гипотеза
8) $\neg G \rightarrow F,$ $MP(6, 7)$
9) $G.$ $MP(5, 8)$

Пример 3. $\{F \rightarrow G, G \rightarrow H\} \vdash F \rightarrow H.$

- 1) $(G \rightarrow H) \rightarrow [F \rightarrow (G \rightarrow H)],$ $A1$
2) $G \rightarrow H$ гипотеза
3) $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ $MP(1, 2)$
4) $[F \rightarrow (G \rightarrow H)] \rightarrow [(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)],$ $A2$
5) $(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H),$ $F \rightarrow H.$
6) $F \rightarrow G,$ гипотеза
7) $F \rightarrow H.$ $MP(5, 6)$

Первые три схемы аксиом и правило MP аксиоматизируют логику высказываний. Так что три приведенных примера – фактически примеры из логики высказываний. Следующий – четвертый – пример будет примером из собственно логики предикатов. В нем мы используем достаточно очевидную идею о том, что последовательность формул, имеющуюся в уже приведенных примерах, повторять не надо. Кроме того, пример 4 обладает еще одной особенностью: он легко получается из теоремы о дедукции, обсуждаемой в следующем параграфе. «Беда», однако, в том, выбранный нами способ доказательства этой теоремы использует пример 4. Поэтому предлагаем читателю внимательно с ним ознакомиться.

Пример 4. $\vdash (\forall z)G(z) \rightarrow (\forall y)G(y).$ (Здесь предполагается, что подстановка u вместо z допустима.)

- 1) $(\forall z)G(z) \rightarrow G(u),$ $A5$
2) $(\forall y)[(\forall z)G(z) \rightarrow G(y)],$ $GN(1)$

- 3) $(\forall y)[(\forall z)G(z) \rightarrow G(y)] \rightarrow [(\forall z)G(z) \rightarrow (\forall y)G(y)],$ A4
 4) $[(\forall z)G(z) \rightarrow (\forall y)G(y)].$ MP(2, 3)

§ 4. Теорема о дедукции

Из общих соображений ясно, что чем больше формул содержит множество гипотез, тем легче вывести из него данную формулу. В исчислении предикатов есть утверждение, которое позволяет увеличить число гипотез. Оно называется *теоремой о дедукции*.

Теорема 3.3. Пусть P – множество формул, F и G – некоторые формулы. Тогда

$$P \vdash F \rightarrow G \Leftrightarrow P \cup \{F\} \vdash G.$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Пусть

$$G_1, G_2, \dots, G_k, \dots, G_l = G \text{ –} \quad (1)$$

вывод формулы G из множества формул $P \cup \{F\}$. Если этот вывод не содержит формулы F , то он является выводом из множества P . Добавим в этом случае к (1) формулы $G \rightarrow (F \rightarrow G)$ и $F \rightarrow G$. Первая из добавленных формул является аксиомой, вторая следует из непосредственно предшествующих формул по правилу MP . Расширенная двумя формулами последовательность (1) является выводом из P формулы $F \rightarrow G$.

Будем считать, что (1) содержит формулу F .

Преобразуем последовательность (1) следующим образом. К каждой из формул последовательности (1) в качестве посылки импликации добавим формулу F . Получим последовательность формул

$$F \rightarrow G_1, F \rightarrow G_2, \dots, F \rightarrow G_k, \dots, F \rightarrow G_l = F \rightarrow G \text{ –} \quad (2)$$

Последовательность (2) выводом из P , вообще говоря, не будет. Однако ее можно расширить до вывода из P . Для этого перед каждой из формул последовательности (2) запишем несколько формул. Какие из формул записывать перед формулой $F \rightarrow G_k$ зависит от «роли», которую формула G_k играет в выводе (1). Относительно этой роли рассмотрим ряд случаев:

Случай 1: G_k – аксиома или $G_k \in P$. Тогда непосредственно перед формулой $F \rightarrow G_k$ в последовательность (2) записываем формулы

- 1) $G_k,$
- 2) $G_k \rightarrow (F \rightarrow G_k).$

Первая из формул добавляется на том основании, что она аксиома или гипотеза, а вторая – аксиома по схеме A1. Тогда формула $F \rightarrow G_k$ будет следовать из добавленных формул по правилу MP .

Случай 2: $G_k = F$. В этом случае перед формулой $F \rightarrow G_k = F \rightarrow F$ добавляется доказательство формулы $F \rightarrow F$ из примера 1.

Случай 3: G_k получается по правилу *MP* из формул G_i и G_j . В этом случае одна из формул G_i или G_j должна быть импликацией, посыпкой которой является другая формула. Будем считать, что это формула G_j , т. е. $G_j = G_i \rightarrow G_k$. Формулы G_i и G_j в последовательности (1) расположены раньше формулы G_k , поэтому в последовательности (2) формулы $F \rightarrow G_i$ и $F \rightarrow G_j$ уже «обоснованы». Для удобства изложения часть последовательности (2) изобразим в виде следующей схемы:

- $$\begin{aligned} &\dots \\ 1) & F \rightarrow G_i, \\ &\dots \\ 2) & F \rightarrow (G_i \rightarrow G_k), \\ &\dots \\ 3) & [F \rightarrow (G_i \rightarrow G_k)] \rightarrow [(F \rightarrow G_i) \rightarrow (F \rightarrow G_k)], \\ 4) & (F \rightarrow G_i) \rightarrow (F \rightarrow G_k), \\ 5) & F \rightarrow G_k, \\ &\dots \end{aligned}$$

Здесь добавленные формулы обозначены как 3) и 4). Формула 3) является аксиомой по схеме 2. Формула 4) следует из 2) и 3) по правилу отделения. А формула 5) – следствие формул 1) и 4) по тому же правилу.

Случай 4: формула G_k получается из предыдущей формулы G_i по правилу обобщения. Это означает, что $G_i = G_i(x)$ и $G_k = (\forall y)G_i(y)$. Отметим, что переменная x не входит свободно в формулу F , так как F содержится в выводе (1).

Если формула F не содержит y в качестве свободной переменной, то ситуация довольно проста. Действительно, перед формулой $F \rightarrow G_k$ в последовательности (2) добавим две формулы и, как и в третьем случае, для удобства изложения часть последовательности (2) изобразим в виде схемы:

- $$\begin{aligned} &\dots \\ 1) & F \rightarrow G_i(x), \\ &\dots \\ 2) & (\forall y)(F \rightarrow G_i(y)), \\ 3) & (\forall y)(F \rightarrow G_i(y)) \rightarrow (F \rightarrow (\forall y)G_i(y)), \\ 4) & F \rightarrow G_k = F \rightarrow (\forall y)G_i(y), \\ &\dots \end{aligned}$$

Здесь добавлены формулы 2) и 3). Формула 2) получается по правилу обобщения из формулы 1). Формула 3) является аксиомой по схеме 4. Итоговая формула 4) следует из 2) и 3) по правилу отделения.

Предположим теперь, что формула F содержит y в качестве свободной переменной. В этом случае последовательность (2) расширяем так, как показано на следующей схеме:

- 1) $F \rightarrow G_i(x),$
- 2) $(\forall z)(F \rightarrow G_i(z)),$ (переменная z не содержится в $F \rightarrow G_i(x)$)
- 3) $(\forall z)(F \rightarrow G_i(z)) \rightarrow (F \rightarrow (\forall z)G_i(z)),$
- 4) $F \rightarrow G_k = F \rightarrow (\forall z)G_i(z),$
- 8) $(\forall z)G_i(z) \rightarrow (\forall y)G_i(y)$ [формулы с 5 по 8 – формулы из примера 4],
- 15) $F \rightarrow (\forall y)G_i(y)$ [формулы с 9 по 15 – формулы из примера 3 с заменой G на $(\forall z)G_i(z)$ и H на $(\forall y)G_i(y)$],

Здесь добавлены формулы с 2 по 14. Обоснования включения той или иной формулы делать не будем, так как эти обоснования фактически те же, что и для предыдущей схемы. Случай 4 полностью рассмотрен.

В качестве примеров применения теоремы о дедукции докажем возможность введения и снятия двойного отрицания и закон контрапозиции. Закон контрапозиции утверждает, что формула $F \rightarrow G$ равносильна формуле $\neg G \rightarrow \neg F$. Для удобства дальнейшего применения продолжим нумерацию примеров из § 3.

Пример 5. $\vdash \neg\neg F \rightarrow F$ [или по теореме о дедукции $\neg\neg F \vdash F$].

- | | |
|---|----------|
| 1) $(\neg F \rightarrow \neg\neg F) \rightarrow ((\neg F \rightarrow \neg F) \rightarrow F),$ | A3 |
| 2) $\neg\neg F \rightarrow (\neg F \rightarrow \neg\neg F),$ | A1 |
| 3) $\neg\neg F,$ | гипотеза |
| 4) $\neg F \rightarrow \neg\neg F,$ | MP(2, 3) |
| 5) $(\neg F \rightarrow \neg F) \rightarrow F,$ | MP(1, 4) |
| 6) $\neg F \rightarrow \neg F,$ | Пример 1 |
| 7) $F.$ | MP(5, 6) |

Пример 6. $\vdash F \rightarrow \neg\neg F$ [или по теореме о дедукции $F \vdash \neg\neg F$].

- | | |
|---|----------|
| 1) $(\neg\neg\neg F \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg\neg\neg F \rightarrow F) \rightarrow \neg\neg F),$ | A3 |
| 2) $\neg\neg\neg F \rightarrow \neg F,$ | Пример 6 |
| 3) $(\neg\neg\neg F \rightarrow F) \rightarrow \neg\neg F,$ | MP(1, 2) |
| 4) $F \rightarrow (\neg\neg\neg F \rightarrow F),$ | A1 |

- | | |
|-------------------------------------|------------|
| 5) F , | гипотеза |
| 6) $\neg\neg\neg F \rightarrow F$, | $MP(5, 4)$ |
| 7) $\neg\neg F$. | $MP(6, 3)$ |

Пример 7. $\neg G \rightarrow \neg F \mid\vdash F \rightarrow G$ [или по теореме о дедукции $\neg G \rightarrow \neg F$, $F \mid\vdash G$].

- | | |
|---|------------|
| 1) $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G)$, | $A3$ |
| 2) $\neg G \rightarrow \neg F$, | |
| 3) $(\neg G \rightarrow F) \rightarrow G$, | $MP(1, 2)$ |
| 4) $F \rightarrow (\neg G \rightarrow F)$, | $A1$ |
| 5) F , | |
| 6) $\neg G \rightarrow F$, | $MP(5, 4)$ |
| 7) G . | $MP(6, 3)$ |

Пример 8. $F \rightarrow G \mid\vdash \neg G \rightarrow \neg F$ [или по теореме о дедукции $F \rightarrow G$, $\neg G \mid\vdash \neg F$].

- | | |
|--|------------|
| 1) $(\neg\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow ((\neg\neg F \rightarrow G) \rightarrow \neg F)$, | $A3$ |
| 2) $\neg G \rightarrow (\neg\neg F \rightarrow \neg G)$, | $A1$ |
| 3) $\neg G$, | гипотеза |
| 4) $\neg\neg F \rightarrow \neg G$, | $MP(3, 2)$ |
| 5) $(\neg\neg F \rightarrow G) \rightarrow \neg F$, | $MP(4, 1)$ |
| 6) $F \rightarrow G$, | гипотеза |
| 7) $\neg\neg F \rightarrow F$, | Пример 5 |
| 8) $\neg\neg F \rightarrow G$, | Пример 3 |
| 9) $\neg F$. | $MP(8, 5)$ |

§ 5. Оправданность аксиоматизации

Основной целью данной главы является доказательство утверждения о том, что

$$P \mid\vdash G \Leftrightarrow P \models G,$$

т. е. что выводимость формулы G из множества формул P (с помощью аксиом и правил вывода) равносильна логическому следствию формулы G из того же множества формул. Это утверждение называется *теоремой о полноте исчисления предикатов*. В этом параграфе мы докажем необходимость, т. е. утверждение о том, что если $P \mid\vdash G$, то $P \models G$. Последнее утверждение носит свое название и называется *теоремой об оправданности аксиоматизации*. Доказательство достаточности теоремы о полноте является довольно сложным. В качестве промежуточного шага оно потребует доказательства так называемой *теоремы о непротиворечивости* (см. § 6) и будем приведено в § 7.

Теорема 3.4 (об оправданности аксиоматизации). Если $P \vdash G$, то $P \models G$.

Доказательство теоремы использует следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Все аксиомы исчисления предикатов тождественно истинны.

Доказательство. Тождественная истинность аксиом, полученных по схемам A1 – A3 доказывается простым построением таблиц истинности. Рассмотрим остальные схемы аксиом.

Схема A4: $(\forall x)(F \rightarrow G(x)) \rightarrow (F \rightarrow (\forall x)G(x))$. Предполагается, что формула F не содержит свободного вхождения переменной x . Рассмотрим произвольную интерпретацию ϕ с областью

M . Предположим, что

$$\phi[(\forall x)(F \rightarrow G(x))] = 1 \text{ и } (1) \phi(F) = 1. \quad (2)$$

Надо доказать равенство

$$\phi[(\forall x)G(x)] = 1, \quad (3)$$

т. е. надо доказать, что для любой интерпретации $\phi' \in I(\phi, x)$ выполняется равенство $\phi'(G(x)) = 1$.

Из (1) следует, что $\phi'(F \rightarrow G(x)) = 1$. Далее, интерпретации ϕ и ϕ' совпадают на всех сигнатурных символах и свободных переменных формулы F . По теореме 1 имеем равенство $\phi(F) = \phi'(F)$. Учитывая равенство (2), получаем, что $\phi'(F) = 1$ $\phi'(F \rightarrow G(x)) = 1$ и поэтому $\phi'(G(x)) = 1$. Поскольку ϕ – произвольная интерпретация из $I(\phi, x)$, получаем, что $\phi[(\forall x)G(x)] = 1$. Итак, аксиомы по схеме 4 являются тождественно истинными.

Схема A5: $(\forall x)F(x) \rightarrow F(t)$. Предполагается, что подстановка терма t вместо переменной x допустима. Как и выше, возьмем произвольную интерпретацию ϕ с областью M , такую, что $\phi[(\forall x)(F(x))] = 1$. Это означает, что для любой интерпретации $\phi' \in I(\phi, x)$ выполняется равенство $\phi'(F(x)) = 1$. Среди интерпретаций из $I(\phi, x)$ выберем такую интерпретацию ϕ' , что $\phi'(x) = \phi(t)$. Тогда по теореме 2 получим равенство $\phi'(F(x)) = \phi(F(t))$, т. е. равенство $\phi(F(t)) = 1$. Тождественная истинность аксиом, полученных по схеме 5, доказана.

Приступим непосредственно к *доказательству теоремы*.

Пусть $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n = F$ – вывод формулы F из множества формул P . Рассмотрим произвольную интерпретацию ϕ такую, что $\phi(P) = 1$. Индукцией по длине вывода докажем, что $\phi(F_k) = 1$ для любого k .

База индукции: $k = 1$. Тогда F_k – аксиома или гипотеза. В первом случае равенство $\phi(F_k) = 1$ следует из леммы, во втором – из условия $\phi(P) = 1$.

Шаг индукции: предположим, что $\phi(F_1) = \phi(F_2) = \dots = \phi(F_{k-1}) = 1$. Докажем равенство $\phi(F_k) = 1$. Если F_k – аксиома или гипотеза, то это равенство доказывается так же, как и в базе индукции. Пусть формула F_k получается из формул F_i и F_j по правилу *MP*. Тогда $F_j = F_i \rightarrow F_k$ (или $F_i = F_j \rightarrow F_k$). Так как $i, j < k$, по предположению индукции имеем равенства $\phi(F_i) = 1$ и $\phi(F_j) = \phi(F_i \rightarrow F_k) = 1$. Но тогда очевидно, что $\phi(F_k) = 1$.

Осталось рассмотреть случай, когда F_k получается из F_i по правилу обобщения. В этом случае $F_i = F_i(x)$ и $F_k = (\forall y)F_i(y)$. Равенство

$$\phi[(\forall y)F_i(y)] = 1,$$

которое надо доказать, означает, что для любой интерпретации $\phi' \in I(\phi, y)$ выполняется равенство $\phi'(F_i(y)) = 1$. Возьмем ϕ' из $I(\phi, y)$. Рассмотрим интерпретацию $\psi \in I(\phi, x)$ такую, что $\psi(x) = \phi'(y)$. Так же, как и раньше, доказываем, что $\psi(F_i(x)) = 1$. По теореме 2 получаем равенство $\psi(F_i(x)) = \phi'(F_i(y))$. Следовательно, $\phi'(F_i(y)) = 1$.

§ 6. Теорема о непротиворечивости (леммы)

Начнем с основного определения.

Определение. Множество формул P называется противоречивым, если существует формула F такая, что $P \vdash F$ и $P \vdash \neg F$.

Пример 9. Убедимся в том, что множество формул

$P = \{(\forall y)(F(y) \rightarrow G(a, b)), F(a), (\forall x)\neg G(a, x)\}$ является противоречивым. Рассмотрим последовательности формул D_1, \dots, D_5 и E_1, E_2, E_3 :

$$D_1 = (\forall y)(F(y) \rightarrow G(a, b)) \rightarrow (F(a) \rightarrow G(a, b)),$$

$$D_2 = (\forall y)(F(y) \rightarrow G(a, b)),$$

$$D_3 = F(a) \rightarrow G(a, b),$$

$$D_4 = F(a), D_5 =$$

$$G(a, b).$$

$$E_1 = (\forall x)\neg G(a, x),$$

$$E_2 = (\forall x)\neg G(a, x) \rightarrow \neg G(a, b),$$

$$E_3 = \neg G(a, b).$$

Легко видеть, что эти последовательности являются выводами из P . Следовательно, $P \vdash G(a, b)$ и $P \vdash \neg G(a, b)$. Это означает, что множество P противоречиво.

Укажем два полезных для дальнейшего свойства противоречивых (и непротиворечивы) множеств формул.

Свойство 1. Из примера 2 легко следует, что *противоречивое множество можно было определить как множество, из которого выводима любая формула*.

Свойство 2. Если из множества формул P не выводима некоторая формула G , то множество $P \cup \{\neg G\}$ непротиворечиво.

Действительно, пусть найдется формула F такая, что $P \cup \{\neg G\} \vdash F$ и $P \cup \{\neg G\} \vdash \neg F$. По теореме о дедукции получаем, что

$$P \vdash \neg G \rightarrow F \text{ и } P \vdash \neg G \rightarrow \neg F.$$

Из этих утверждений и аксиомы по схеме A3

$$(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G)$$

следует, что $P \vdash G$. Получили противоречие с условием. Следовательно, множество формул $P \cup \{\neg G\}$ непротиворечиво.

Целью данного и следующего параграфов является доказательство утверждения о том, что если множество формул непротиворечиво, то оно выполнимо. Это утверждение называется теоремой о непротиворечивости. При доказательстве этой теоремы нам будет удобно считать, что непротиворечивое множество формул P удовлетворяет следующим двум формальным условиям:

- (α) для любой формулы F сигнатуры множества P либо $F \in P$, либо $\neg F \in P$;
- (β) если множество P содержит формулу $\neg(\forall x)F(x)$, то найдется переменная w , которой нет в этой формуле, такая, что $\neg F(w) \in P$.

Хотя условия (α) и (β) были названы формальными, им можно придать некоторый содержательный смысл. Действительно, условие (α) означает, что множество P является максимальным среди всех непротиворечивых множеств данной сигнатуры. (Конечно, пока неясно, что такое множество существует.) Смысл условия (β) состоит в следующем. Формула $\neg(\forall x)F(x)$ в логике с обычным набором связок и кванторов равносильна формуле $(\exists x)\neg F(x)$. Условие (β) требует, чтобы утверждение о существовании элемента x , для которого формула $F(x)$ ложна, «реализовалось» на некоторой переменной w .

Данный параграф посвящен «обеспечению» этих условий. Доказательство самой теоремы о непротиворечивости будет изложено в следующем параграфе.

Лемма 1. Пусть P – непротиворечивое множество формул сигнатуры Σ . Тогда существует множество формул P' той же сигнатуры Σ , удовлетворяющее условиям:

- 1) $P \subseteq P'$,
- 2) P' непротиворечиво,
- 3) P' удовлетворяет условию (α).

Другими словами, всякое непротиворечивое множество формул содержится в максимальном непротиворечивом расширении.

Доказательство леммы 1 использует лемму Цорна. Напомним ее формулировку: если в частично упорядоченном множестве S каждая цепь имеет верхнюю грань, то множество S содержит максимальный элемент. Цепь – это непустое линейно упорядоченное подмножество множества S .

Пусть S – множество всех непротиворечивых расширений множества P , имеющих сигнатуру Σ , т. е.

$$S = \{Q \mid Q \text{ имеет сигнатуру } \Sigma, P \subseteq Q \text{ и } Q \text{ непротиворечиво}\}.$$

Ясно, что множество S непусто, так как $P \in S$, что оно частично упорядочено отношением теоретико-множественного включения. Возьмем в S цепь

$$T = \{Q_i \mid i \in I\}.$$

В качестве «кандидатуры» на максимальную грань цепи рассмотрим множество

$$Q' = \cup \{Q_i \mid i \in I\}.$$

Надо убедиться в том, что $Q' \in S$. Очевидно, что Q' имеет сигнатуру Σ и что $P \subseteq Q'$. Предположим, что Q' противоречиво. Тогда существует формула F такая, что $Q' \vdash F$ и $Q' \vdash \neg F$. Рассмотрим вначале первый случай, т. е. что $Q' \vdash F$. Пусть

$$H_1, H_2, \dots, H_n - \quad (*)$$

вывод формулы F из множества Q' . В выводе выберем все гипотезы. Пусть это будут формулы

$$H_{i1}, H_{i2}, \dots, H_{ik}.$$

Тогда в цепи T найдутся множества $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ik}$ такие, что $H_{i1} \in Q_{i1}$, $H_{i2} \in Q_{i2}, \dots, H_{ik} \in Q_{ik}$. Эти множества являются элементами цепи, поэтому они попарно сравнимы относительно теоретико-множественного включения. Следовательно, среди них есть наибольшее по включению множество. Пусть это будет Q_{ik} . Тогда вывод $(*)$ будет выводом из Q_{ik} , т. е. $Q_{ik} \vdash F$. Аналогично доказывается существование элемента цепи Q_{il} такого, что $Q_{il} \vdash \neg F$. Воспользуемся еще раз тем, что Q_{ik} и Q_{il} – элементы цепи, и потому среди них есть наибольший. Пусть это будет Q_{il} . Но тогда $Q_{il} \vdash F$ и $Q_{il} \vdash \neg F$. Это противоречит тому, что $Q_{il} \in S$. Следовательно, Q' непротиворечиво, и поэтому $Q' \in S$. Условие леммы Цорна выполнено.

Заключение леммы Цорна говорит о том, что S содержит (хотя бы один) максимальный элемент. Обозначим его через P' . Тот факт, что $P \subseteq P'$ и что P' – непротиворечиво следует из принадлежности $P' \in S$. Осталось проверить, что P' удовлетворяет условию (α) . Предположим противное, пусть существует формула F такая, что $F \notin P'$ и $\neg F \notin P'$. Тогда по свойству 2 множества формул $P' \cup \{F\}$ и $P' \cup \{\neg F\}$ противоречивы, так как P' – максимальное непротиворечивое множество. Проанализируем

противоречивость множества $P' \cup \{\neg F\}$. По определению противоречивого множества существует формула G такая, что

$$P' \vdash G \text{ и } P' \vdash \neg G.$$

Как уже неоднократно делалось, применение здесь теоремы о дедукции и аксиомы по схеме 3 дает, что $P' \vdash F$. Но тогда множество $P' \cup \{F\}$ не может быть противоречивым, так как $P' \cup \{F\} = P'$ и P' непротиворечиво. Следовательно, P' удовлетворяет условиям 1) – 3) из формулировки леммы 1.

С «обеспечением» условия (β) дело обстоит несколько сложнее. Мы вначале в лемме 2 получим ослабленный вариант этого условия.

Лемма 2. Пусть P – непротиворечивое множество формул сигнатуры Σ . Тогда существует сигнатура Σ' и множество формул P' сигнатуры Σ' , для которого выполняются условия:

- 1) $P \subseteq P'$,
- 2) P' непротиворечиво,
- 3) если формула $\neg(\forall x)F(x)$ принадлежит P , то найдется новая переменная w такая, что формула $\neg F(w)$ принадлежит P' .

Доказательство. Пусть

$$M = \{\neg(\forall x_i)F_i(x_i) \mid i \in I\} -$$

множество всех формул вида $\neg(\forall x)F(x)$, содержащихся в P . Для каждой такой формулы $\neg(\forall x_i)F_i(x_i)$ из M добавим к Σ новую (такую, которой нет в P) переменную w_i . Получим сигнатуру Σ' .

В качестве P' рассмотрим множество $P' = P \cup \{\neg F_i(w_i) \mid i \in I\}$.

Ясно, что P' удовлетворяет условиям 1) и 3) леммы 2. Надо доказать, что P' непротиворечиво. Предположим противное: пусть множество P' противоречиво. Тогда достаточно рассмотреть множество P' , полученное из P' добавлением конечного множества формул вида $\neg(\forall x)F(x)$, а следовательно, и одной формулы такого вида.

Итак, пусть $\neg(\forall x)F(x) \in P$, $P' = P \cup \{\neg F(w)\}$ и множество P' противоречиво. По определению противоречивости существует формула G такая, что

$$P \cup \{\neg F(w)\} \vdash G \text{ и } P \cup \{\neg F(w)\} \vdash \neg G.$$

Тогда, как это часто демонстрировалось, $P \vdash F(w)$. Применение правила обобщения дает, что $P \vdash (\forall x)F(x)$. И в то же время, $\neg(\forall x)F(x) \in P$. Получили противоречие с условием о непротиворечивости множества P . Итак, множество P' удовлетворяет условиям 1) – 3) из формулировки леммы.

Лемма 3. Для любого непротиворечивого множества P существует непротиворечивое расширение P' , удовлетворяющее условиям (α) и (β) .

Доказательство. Построим последовательность множеств формул $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots$ сигнатур $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots$ соответственно следующим образом. Пусть $Q_0 = P$ и Σ_0 – сигнатура множества формул P . К множеству Q_0 применим лемму 1, получим непротиворечивое множество Q_1 , удовлетворяющее условию (α) , сигнатуры Σ_1 , равной Σ_0 . Далее к множеству Q_1 применим лемму 2, получим непротиворечивое множество Q_2 сигнатуры Σ_2 . Затем снова применим лемму 1, но теперь уже к множеству Q_2 и т. д. В итоге возникнет последовательность непротиворечивых расширений множества P :

$$P = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_n \subseteq \dots$$

Каждое множество с четным номером удовлетворяет условию (α) . А каждое множество с нечетным номером удовлетворяет условию 3) леммы 2, более слабому, чем условие (β) . Для удобства изложения повторим третье условие леммы 2 в новых обозначениях: если $\neg(\forall x)F(x) \in Q_l$ и l – нечетно, то существует новая переменная w такая, что $\neg F(w) \in Q_{l+1}$. Условие 3 в такой «редакции» обозначим через (4).

В качестве P' рассмотрим объединение построенной последовательности множеств формул:

$$P' = Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_n \cup \dots$$

а в качестве – объединение сигнатур:

$$\Sigma' = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n \cup \dots$$

Доказательство непротиворечивости множества P' в близкой ситуации (см. проверку условия леммы Цорна) мы уже проводили. Действительно, если найдется формула F такая, что $P' \vdash F$ и $P' \vdash \neg F$ то существует множество Q_n с тем же свойством. Это противоречит тому, что Q_n непротиворечиво.

Докажем, что множество P' удовлетворяет условию (α) . Пусть F – формула сигнатуры Σ' . Так как Σ' – объединение возрастающей последовательности сигнатур существует сигнатура Σ_k такая, что F является формулой сигнатуры Σ_k . Можно считать, что k – четное число (иначе вместо n можно взять $k+1$).

Но тогда Q_{k+1} удовлетворяет условию (α) и поэтому либо $F \in Q_{k+1}$, либо $\neg F \in Q_{k+1}$. По построению множества P' отсюда следует, что либо $F \in P'$, либо $\neg F \in P'$.

Установим, что множество P' удовлетворяет условию (β) .

Возьмем формулу $\neg(\forall x)F(x)$ из P' . Тогда найдется множество Q_l , содержащее эту формулу. Можно считать, что l – нечетное число (иначе

вместо l можно взять $l + 1$). Тогда по условию (4) существует переменная w такая, что $\neg F(w) \in Q_{l+1}$. Так как Q_{l+1} содержится в P' , получаем, что $\neg F(w) \in P'$.

§ 7. Теорема о непротиворечивости (доказательство теоремы)

Напомним вначале формулировку теоремы о непротиворечивости.

Теорема 3.5. Если множество формул P непротиворечиво, то P выполнимо, т. е. существует интерпретация ϕ такая, что $\phi(P) = 1$.

Доказательство. В силу леммы 3 можно считать, что P удовлетворяет условиям (α) и (β) .

Сигнатуру множества P обозначим через Σ . В качестве области интерпретации возьмем множество термов T сигнатуры Σ .

Функцию ϕ определим следующим образом:

- 1) $\phi(x) = x$,
- 2) $\phi(c) = c$,
- 3) $(\phi f)(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$,
- 4) $(\phi r)(t_1, t_2, \dots, t_n) = 1 \Leftrightarrow r(t_1, t_2, \dots, t_n) \in P$.

Здесь x – переменная, c – константа, f и r – соответственно n -местные символы функции и предиката.

Легко видеть, что из первых трех пунктов определения интерпретации следует, что $\phi(t) = t$ для любого терма t .

Индукцией по построению интерпретации докажем, что

$$\phi(F) = 1 \Leftrightarrow F \in P. \quad (*)$$

Из этой эквиваленции очевидным образом следует выполнимость множества формул P .

База индукции: F – атомарная формула. Эквиваленция $(*)$ следует из построения интерпретации (см. пункт 4), так как множество P одновременно не может содержать атомарную формулу и ее отрицание.

Шаг индукции: предположим, что для всех собственных подформул формулы F эквиваленция $(*)$ доказана. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $F = \neg G$. Тогда выполняются следующие эквиваленции: $\phi(F) = 1 \Leftrightarrow \phi(\neg G) = 1 \Leftrightarrow \phi(G) = 0 \Leftrightarrow G \notin P \Leftrightarrow \neg G \in P \Leftrightarrow F \in P$.

В дополнительных комментариях нуждаются только две эквиваленции: $\phi(G) = 0 \Leftrightarrow G \notin P$ – по предложению индукции, $G \notin P \Leftrightarrow \neg G \in P$ – по условию (α) .

Случай 2: $F = G \rightarrow H$. Этот случай сложнее первого. Доказательство эквиваленции (*) разобьем на две части: «туда» и «обратно». А каждую из этих частей разобьем еще на две возможности.

(\Rightarrow) Пусть $\phi(G \rightarrow H) = 1$.

Возможность 1: $\phi(H) = 1$. Тогда по предположению индукции $H \in P$, и $P \vdash G \rightarrow H$ (аксиома A1). Но в таком случае, $G \rightarrow H \in P$, так как P непротиворечиво и удовлетворяет условию (α).

Возможность 2: $\phi(H) = 0$. Так как $\phi(G \rightarrow H) = 1$, имеем равенство $\phi(G) = 0$. По предположению индукции отсюда следует, что $G \notin P$.

Следовательно, $\neg G \in P$ и множество $P \cup \{G\}$ противоречиво. В таком случае, из $P \cup \{G\}$ выводима любая формула (свойство 2 и предыдущего параграфа), в том числе формула H . По теореме о дедукции получаем, что $P \vdash G \rightarrow H$. Следовательно, $G \rightarrow H \in P$.

(\Leftarrow) Пусть $G \rightarrow H \in P$.

Возможность 1: $H \in P$. Тогда по предположению индукции $\phi(H) = 1$, и следовательно, $\phi(G \rightarrow H) = 1$.

Возможность 2: $H \notin P$. Тогда $G \notin P$, поскольку в противном случае из условий $G \in P$ и $G \rightarrow H \in P$ следует, что $H \in P$. По предположению индукции получаем равенство $\phi(G) = 0$, и поэтому $\phi(G \rightarrow H) = 1$.

Случай 2 рассмотрен полностью.

Случай 3: $F = (\forall x)G(x)$. Этот случай, как и предыдущий, разобьем на две части: «туда» и «обратно».

(\Rightarrow) Пусть $\phi[(\forall x)G(x)] = 1$. Надо доказать, что $(\forall x)G(x) \in P$. Предположим противное: пусть $(\forall x)G(x) \notin P$. Тогда по свойствам (α) и (β) и найдется переменная w такая, что $\neg G(w) \in P$. Еще раз воспользуемся свойством (α), получим, что $G(w) \notin P$. По предположению индукции имеем равенство $\phi(G(w)) = 0$. С другой стороны, известно, что аксиома $(\forall x)G(x) \rightarrow G(w)$ тождественно истинна. Посылка этой аксиомы истинна при интерпретации ϕ . Следовательно, $\phi(G(w)) = 1$. Полученное противоречие показывает, что формула $(\forall x)G(x)$ принадлежит P .

(\Leftarrow) Пусть $(\forall x)G(x) \in P$. Надо доказать, что $\phi[(\forall x)G(x)] = 1$. Как в части «туда» здесь удобно рассуждать от противного. Предположим, что $\phi[(\forall x)G(x)] = 0$. Тогда существует интерпретация $\phi' \in I(\phi, x)$ такая, что $\phi'(G(x)) = 0$. Вспомним, наконец, что областью определения интерпретации ϕ является множество термов T . Следовательно, $\phi'(x)$ – это некоторый терм. Обозначим его через t .

Если подстановка t вместо x в формуле $G(x)$ допустима, то все заканчивается довольно просто. Действительно, тогда по теореме 2

получаем равенство $\phi'(G(x)) = \phi[G(t)] = 0$. По предположению индукции имеем, что $G(t) \notin P$. Получаем противоречие с предположением $(\forall x)G(x) \in P$ и аксиомой $(\forall x)G(x) \rightarrow G(t)$ по схеме A5.

Предположим теперь, что подстановка t вместо x в формуле $G(x)$ недопустима. Заменим в формуле $G(x)$ все связанные переменные так, чтобы эта подстановка была допустима. Полученную формулу обозначим через $\underline{G}(x)$. Если $(\forall x)\underline{G}(x) \in P$, то рассуждаем так же, как и в предыдущем абзаце. Пусть $(\forall x)\underline{G}(x) \notin P$. Тогда по условиям (α) и (β) существует переменная w такая, что $\neg\underline{G}(w) \in P$. По предположению индукции имеем равенство $\phi(\underline{G}(w)) = 0$. Однако $\phi(\underline{G}(w)) = \phi(G(w))$ по теореме 1 о замене. Следовательно, $\phi(G(w)) = 0$ и $G(w) \notin P$. Как и выше, получаем противоречие с предположением $(\forall x)G(x) \in P$ и аксиомой $(\forall x)G(x) \rightarrow G(w)$ по схеме A5. Случай 3 полностью рассмотрен.

§ 8. Теоремы о полноте и о компактности

Цель этого параграфа доказать совпадение семантического понятия логического следования с синтаксическим понятием выводимости. Соответствующее утверждение, как уже отмечалось, называется теоремой о полноте. Кроме того, в этом параграфе будет доказана «обещанная» в предыдущей главе теорема о компактности.

Теорема 3.6 (о полноте). Формула выводима из множества формул тогда и только тогда, когда она является логическим следствием этого множества.

Доказательство. Необходимость уже доказана (см. теорему об оправданности аксиоматизации). Достаточность докажем методом от противного. Предположим, что формула G является логическим следствием множества формул P и G не выводима из P . Тогда по свойству 2 непротиворечивых множеств (см. § 6) множество формул $P \cup \{\neg G\}$ непротиворечиво. Из теоремы о непротиворечивости следует, что оно выполнимо. Это означает, что существует интерпретация ϕ такая, $\phi(P) = 1$ и $\phi(\neg G) = 1$, т. е. $\phi(P) = 1$ и $\phi(G) = 0$. Получили противоречие с тем, что формула G является логическим следствием множества P .

Теорема 3.7 (о компактности). Если формула F является логическим следствием бесконечного множества формул P , то она является логическим следствием некоторого конечного подмножества P_0 множества P .

Доказательство. Пусть формула F является логическим следствием бесконечного множества формул P . Тогда по теореме о полноте формула F выводима из P . Это означает, что существует вывод из P , последней формулой которого является формула F :

$$F_1, F_2, \dots, F_n = F.$$

Обозначим через P_0 множество тех формул из P , которые встречаются в выводе. Ясно, что P_0 – конечное множество и что этот вывод является выводом из множества P_0 . Применим теорему о полноте еще раз, получим, что формула F является логическим следствием множества P_0 .

§ 9. Независимость аксиом

Как мы уже отмечали, есть некоторая математическая традиция, идущая еще от древних греков, согласно которой аксиом в той или иной теории должно быть как можно меньше. В идеальном варианте – наименее возможное число. Для этого обычно ставится следующий вопрос: будет ли данная аксиома следствием других аксиом? В случае положительно ответа аксиому можно удалить из списка аксиом. В случае отрицательного ответа ее удалить нельзя и аксиома называется *независимой* (от остальных аксиом). Здесь можно сослаться на известную ситуацию в геометрии, а именно на вопрос о том следует ли пятый постулат Евклида из первых четырех. Как показали Лобачевский и Бойяи, пятый постулат независим от остальных аксиом.

В этом параграфе вопрос о независимости мы поставим для схем аксиом в следующей формулировке: можно ли данную схему аксиом получить из остальных схем с помощью правил вывода? Мы решим этот вопрос только для логики высказываний. Так что схемами аксиом будут первые три, а правило вывода будет одно – модус поненс. Как мы увидим, во всех трех случаях имеет место независимость.

Теорема 3.7. Схема $A1$ независима от схем $A2$ и $A3$.

Доказательство. Возьмем трехэлементное множество $M = \{0, 1, 2\}$. Элементы этого множества будем обозначать заглавными буквами латиницы. На множестве M введем на нем две операции: унарную $Y = \neg X$ (отрицание) и бинарную $Z = X \rightarrow Y$ (импликацию). Отрицание определяется таблицей 3.1, импликация – таблицей 3.2.

Таблица 3.1

X	$\neg X$
0	1
1	1
2	0

Таблица 3.2

X	Y	$X \rightarrow Y$
0	0	0
0	1	2
0	2	0
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0

2	2	0
---	---	---

Определение. *Интерпретацией* называется функция $\phi: A \rightarrow \{0, 1, 2\}$, где A – множество атомарных формул логики высказываний.

С помощью таблиц 1 и 2 интерпретацию можно расширить на все множество формул логики высказываний.

Определение. Формула F логики высказываний называется *выделенной*, если для любой интерпретации ϕ выполняется равенство $\phi(F) = 0$.

Нетрудно проверить, что любая аксиома схемы $A2$ или $A3$ является выделенной. Для аксиомы схемы $A3$ это сделано в таблице 3.3. Для схемы $A2$ соответствующую проверку предлагается сделать читателю.

Таблица 3.3

F	G	$\neg G \rightarrow \neg F$	$\neg G \rightarrow F$	$(\neg G \rightarrow F) \rightarrow G$	$(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow [(\neg G \rightarrow F) \rightarrow G]$
0	0	2	2	0	0
0	1	2	2	0	0
0	2	2	0	0	0
1	0	2	2	0	0
1	1	2	2	0	0
1	2	2	2	0	0
2	0	2	0	0	0
2	1	2	0	2	0
2	2	0	0	2	0

Убедимся в том, что правило MP сохраняет выделенность. Действительно, если $\phi(F) = 0$ и $\phi(F \rightarrow G) = 0$, то, как следует из таблицы 0.2, выполняется равенство $\phi(G) = 0$. Следовательно, любая формула, которая получается из аксиом схем $A2$ и $A3$ с помощью правила MP является выделенной.

Рассмотрим теперь аксиому $F = X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ схемы $A1$ и интерпретацию $\phi(X) = 1$, $\phi(Y) = 2$. Легко видеть, что $\phi(F) = 2$. Аксиома F выделенной не является, а поэтому не может быть получена из аксиом схем $A2$ и $A3$ с помощью правила MP .

Теорема 3.8. Схема $A2$ независима от схем $A1$ и $A3$.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы. Только здесь функции $Y = \neg X$ (отрицание) и $Z = X \rightarrow Y$ (импликацию) определим по-другому (см. таблицы 3.4 и 3.5)

Таблица 3.4

X	$\neg X$
0	1
1	0
2	1

Таблица 3.5

X	Y	$X \rightarrow Y$
0	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	0
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Нетрудно проверить, что любая аксиома схем $A1$ и $A3$ является выделенной, и что правило MP сохраняет выделенность. С другой стороны, аксиома $F = [X \rightarrow (Y \rightarrow Z)] \rightarrow [(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)]$ схемы $A2$ при интерпретации $\phi(X) = 0, \phi(Y) = 0, \phi(Z) = 1$ получает значение 2. Следовательно, F не может быть получена из аксиом схем $A1$ и $A3$ с помощью MP .

Теорема 3.9. Схема $A3$ независима от схем $A1$ и $A2$.

Доказательство будет проведено методом, отличным от метода доказательства лемм 1 и 2. Для формулы F логики высказываний через $h(F)$ обозначим формулу, полученную из F удалением всех знаков отрицания. Формулу F будем называть *выделенной*, если $h(F)$ – тождественно истинная формула логики высказываний.

Поскольку $h(F \rightarrow G) = h(F) \rightarrow h(G)$, все аксиомы схем $A1$ и $A2$ являются выделенными. Нетрудно видеть также, что правило MP сохраняет выделенность. С другой стороны, аксиома $F = (\neg Y \rightarrow \neg X) \rightarrow ((\neg Y \rightarrow X) \rightarrow X)$ схемы $A3$ не является выделенной, так как формула $h(F) = (Y \rightarrow X) \rightarrow ((Y \rightarrow X) \rightarrow X)$ не является тождественно истинной. Действительно, если $\phi(X) = \phi(Y) = 0$, то $\phi(h(F)) = 0$. Это означает, что формула F не может быть получена из аксиом схем $A1$ и $A3$ с помощью MP .

§ 9. Другие аксиоматизации

Рассмотренная в предыдущих параграфах система аксиом и правил вывода взята из книги [Мен]. Будем называть эту систему *системой*

Мендельсона. Кроме этой аксиоматизации в литературе изучались и другие аксиоматизации.

В этом параграфе мы приведем некоторые из них, правда, только в случае логики высказываний.

1. *Система Мендельсона с правилом подстановки* [см. Мен]. В этой системе вместо схем аксиом берутся конкретные формулы-аксиомы и к правилу модус поненс добавляется правило подстановки, позволяющее в аксиому подставлять вместо атомарной формулы любую формулу.

2. *Система Гильберта и Аккермана* [см. ГБ или Мен]. Основные связки: \neg и \vee . Формула $F \rightarrow G$ понимается как сокращение формулы $\neg F \vee G$. Система содержит четыре схемы аксиом: 1) $F \vee F \rightarrow F$,

$$2) F \rightarrow F \vee G,$$

$$3) F \vee G \rightarrow G \vee F,$$

$$4) (G \rightarrow H) \rightarrow (F \vee G \rightarrow F \vee H).$$

Единственное правило вывода – модус поненс.

3. *Система Клини* [см. Кл, стр. 48]. Основные связки: \neg , $\&$, \vee и \rightarrow . Система содержит 10 схем аксиом:

$$1) F \rightarrow (G \rightarrow F),$$

$$2) (F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow [(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)],$$

$$3) F \& G \rightarrow F,$$

$$4) F \& G \rightarrow G,$$

$$5) F \rightarrow (G \rightarrow F \& G),$$

$$6) F \rightarrow F \vee G,$$

$$7) G \rightarrow F \vee G,$$

$$8) (F \rightarrow H) \rightarrow [(G \rightarrow H) \rightarrow (F \vee G \rightarrow H)],$$

$$9) (F \rightarrow G) \rightarrow [(F \rightarrow \neg G) \rightarrow \neg F],$$

$$10) \neg \neg F \rightarrow F.$$

Единственное правило вывода – модус поненс.

4. *Система Черча* [см. Ч, стр. 112 – 113]. Основные связки:

\neg и \rightarrow . Система содержит три схемы аксиом:

$$1) F \rightarrow (G \rightarrow F),$$

$$2) (F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow [(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)], 3) (\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G).$$

Единственное правило вывода – модус поненс.

Все рассмотренные выше варианты аксиоматизаций логики высказываний (т. е. системы аксиом и правил вывода) относятся к так называемым *системам гильбертовского типа*. В этих системах определяется некоторое множество схем аксиом (или конкретных аксиом)

и множество правил вывода. Множество схем аксиом и правил вывода должно быть конечным, а множество аксиом – рекурсивным. Вывод из множества формул P определяется как последовательность формул, каждая формула которой принадлежит P или является аксиомой, или следует из предыдущих формул по одному из правил вывода. Формула G называется выводимой из P , если существует вывод из P , последней формулой которого является G . С примером аксиоматизации, которая не относится к гильбертовскому типу, можно познакомиться по книгам [ЕП] или [СО].

Приведем примеры на выводимость в разных системах.

Пример 10. Доказать, что $\{F \rightarrow G, G \rightarrow H\} \vdash F \rightarrow H$ в системе Гильберта и Аккермана.

- | | |
|---|------------|
| 1) $G \rightarrow H$, | гипотеза |
| 2) $(G \rightarrow H) \rightarrow (\neg F \vee G \rightarrow \neg F \vee H)$, | A4 |
| 3) $(\neg F \vee G \rightarrow \neg F \vee H)$ есть $(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$, | $MP(1, 2)$ |
| 4) $F \rightarrow G$, | гипотеза |
| 5) $F \rightarrow H$. | $MP(3, 4)$ |

Пример 11. Доказать, что $\vdash F \rightarrow F$ в системе Гильберта и Аккермана.

- | | |
|-------------------------------|-----------|
| 1) $F \rightarrow F \vee F$, | A2 |
| 2) $F \vee F \rightarrow F$, | A1 |
| 3) $F \rightarrow F$. | Пример 10 |

Пример 12. Доказать, что $\vdash F \rightarrow F$ в системе Черча. Доказательство то же самое, что и в системе Мендельсона (см. пример 1).

Пример 13. Доказать, что $\neg F \vdash F \rightarrow G$ в системе Черча.

- | | |
|--|------------|
| 1) $\neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$, | A1 |
| 2) $\neg F$, | |
| 3) $\neg G \rightarrow \neg F$, | $MP(1, 2)$ |
| 4) $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G)$, | A3 |
| 5) $F \rightarrow G$. | $MP(3, 4)$ |

Пример 14. Доказать, что $\{F \rightarrow (G \rightarrow H), F \& G\} \vdash H$ в системе Клини.

- | | |
|--------------------------------------|------------|
| 1) $F \& G \rightarrow F$, | A3 |
| 2) $F \& G$, | |
| 3) F , | $MP(1, 2)$ |
| 4) $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ | |
| 5) $G \rightarrow H$ | $MP(3, 4)$ |
| 6) $F \& G \rightarrow G$, | A4 |
| 7) G , | $MP(2, 6)$ |
| 8) H . | $MP(5, 7)$ |

Для всех рассмотренных выше систем справедлива теорема о полноте: формула G выводима (в данной системе) из множества формул P тогда и только тогда, когда G является логическим следствием этого множества формул.

Задачи

Если в формулировке задач не указана система аксиом и правил вывода, то предполагается, что это система Мендельсона, т. е. та, которая введена в § 3.

- 1.** Доказать, что $\neg F \rightarrow F \vdash F$.
- 2.** Доказать, что $F \rightarrow G, \neg F \rightarrow G \vdash G$ (разбор случаев).
- 3.** Напомним, что формула $F \vee G$ понимается как сокращение формулы $\neg F \rightarrow G$. Доказать, что $F \vee G \vdash G \vee F$ (коммутативность дизъюнкции).
- 4.** Напомним, что формула $F \& G$ понимается как сокращение формулы $\neg(F \rightarrow \neg G)$. Доказать, что $F \& G \vdash G \& F$ (коммутативность дизъюнкции).
- 5.** Формула $(\exists x)F(x)$ была введена как сокращение формулы $\neg(\forall x)\neg F(x)$. Доказать, что $\neg(\exists x)\neg F(x) \vdash (\forall x)F(x)$.
- 6.** Доказать, что $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$.
- 7.** Доказать, что $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash (\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$.
- 8.** В системе Гильберта и Аккермана доказать, что $\vdash F \rightarrow (G \rightarrow H)$ или, используя сокращение, доказать, что $\vdash F \rightarrow (\neg G \vee H)$.
- 9.** В системе Черча доказать, что $\neg\neg F \vdash F$.
- 10.** В системе Клини доказать, что $\{F \rightarrow G, \neg G\} \vdash \neg F$.
- 11.** В системе Клини доказать, что $\{F, \neg F\} \vdash G$.
- 12.** В системе Клини доказать, что $\{F \rightarrow (G \rightarrow H), F \& G\} \vdash H$.
- 13.** В системе Клини доказать, что $\{F \rightarrow G, G \rightarrow H, F \vee G\} \vdash H$.
- 14.** В системе Клини доказать, что $\{\neg G \rightarrow \neg F, \neg G \rightarrow F\} \vdash G$.