

Задачи

1. Установить, какой из кванторов определяется следующими выражениями: “для всякого x истинно $F(x)$ ”, “ $F(x)$ при произвольном x ”, “найдется x , такой что $F(x)$ ”, “для подходящего x верно $F(x)$ ”, “всегда имеет место $F(x)$ ”, “каждый элемент обладает свойством F ”, “найдется, по крайней мере, один x такой, что $F(x)$ ”, “существует не менее одного x , такого что $F(x)$ ”, “свойство F присуще всем”, “каким бы ни был x $F(x)$ истинно”, “хотя бы для одного x верно $F(x)$ ”.

2. Дана алгебраическая структура $\langle N; x \leq y \rangle$. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma = (\leq)$:

- а) “ x меньше y ”,
- б) “ y равно $x+1$ ”,
- в) “ x равно 1”,
- г) “ x равно 2”,
- д) “ y лежит между x и z ”.

3. Дана алгебраическая структура $\langle N; x|y \rangle$. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma = (|)$ ($x|y$ означает, что x делит y нацело):

- а) “ x равно 1”,
- б) “ z есть $HOD(x, y)$ ”,
- в) “ z есть $HOK(x, y)$ ”,
- г) “ x – простое число”.

Можно ли определить предикаты “ x – четное число”, “ x меньше y ” формулой этой же сигнатуры?

4. Рассмотрим алгебраическую структуру $\langle N; x+y, xy, x \leq y \rangle$. Для каждой из формул:

- а) $(\forall y)(y \leq x \rightarrow x \leq y)$,
- б) $(\exists y)(x = y + y)$,
- в) $(\forall u)(\forall v)(x = uy \rightarrow x = u \vee x = v)$,
- г) $(\exists y)(\forall z)(z \leq x \rightarrow x \leq z \vee z = y)$,
- д) $y \leq z \ \& \ x \leq z \ \& \ (\forall u)(y \leq u \ \& \ x \leq u \rightarrow z \leq u)$

найти предикат из следующего списка, который эта формула определяет:

- а) “ x – простое число или x равно 1”,
- б) “ x – четное число”,
- в) “ x равно 1”,
- г) “ z есть наибольшее из чисел x и y ”,
- д) “ x принадлежит $\{1, 2\}$ ”.

5. На множестве M задан одноместный предикат $P(x)$. Выразить следующие утверждения формулами сигнатуры $\sigma = (P)$:

- а) “существует не менее одного элемента x , удовлетворяющего предикату $P(x)$ ”,

б) “существует не более одного элемента x , удовлетворяющего предикату $P(x)$ ”.

в) “существует точно один элемент x , удовлетворяющий предикату $P(x)$ ”.

г), д), е) – утверждения а), б), в) с заменой “один” на “два”.

6. Пусть M – множество всех точек, прямых и плоскостей трехмерного пространства. Рассмотрим алгебраическую систему $\langle M; x \in y, p(x), l(x), pl(x) \rangle$, где \in – отношение принадлежности, $p(x)$ означает, что x есть точка, $l(x)$ – x есть прямая, $pl(x)$ – x есть плоскость.

Выразить следующие предикаты формулами указанной сигнатуры:

а) “плоскости x и y имеют общую точку”.

б) “если плоскости x и y имеют общую точку, то они имеют общую прямую”.

в) “прямые x и y имеют общую точку”.

г) “прямые x и y параллельны”.

д) “прямые x , y и z образуют треугольник”.

В формулах можно использовать ограниченные кванторы.

7. Подберите сигнатуру и представьте следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

7.1. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, какие-то первокурсники знакомы с некоторыми спортсменами.

7.2. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

7.3. Таможенники обыскивают всякого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Некоторые люди, способствующие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков. Никто из высокопоставленных лиц не способствовал провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

8. Пусть $F(x, y) = P(x, y) \ \& \ (\exists z)(P(x, z) \ \& \ P(z, y))$ и $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x, y)$ при следующих интерпретациях:

а) $(\phi P)(x, y) = \text{”}x \text{ меньше } y\text{”}$,

б) $(\phi P)(x, y) = \text{”}x \text{ меньше или равно } y\text{”}$,

в) $(\phi P)(x, y) = \text{”}x \text{ делит } y \text{ нацело и } x \neq y\text{”}$,

г) $(\phi P)(x, y) = \text{”}y \text{ равно } x + 1\text{”}$.

9. Пусть $F(x) = x \neq a \ \& \ (\forall y)(D(y, x) \rightarrow y=a \vee y=x)$ и $M = \{1, \dots, 9\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x)$ при следующих интерпретациях:

- а) $(\phi D)(x) = \text{“}x \text{ делит } y \text{ нацело”}$, $\phi(a) = 1$;
- б) $(\phi D)(x) = \text{“}x \text{ меньше или равно } y \text{”}$, $\phi(a) = 1$;
- в) $(\phi D)(x) = \text{“}x \text{ делит } y \text{ нацело”}$, $\phi(a) = 2$.

10. Пусть $F(x) = P(x) \rightarrow Q(a, g(x))$, $M = \{0, 1\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x)$ при следующих интерпретациях:

- а) $P(x) = \text{“}x \text{ не равно } 0 \text{”}$, $Q(x, y) = \text{“}x \text{ меньше } y \text{”}$, $a = 0$, $g(x) = x+1$;
- б) $P(x) = \text{“}x \text{ не равно } 1 \text{”}$, $Q(x, y) = \text{“}x \text{ меньше } y \text{”}$, $a = 0$, $g(x) = 0$;
- в) $P(x) = \text{“}x \text{ не равно } 1 \text{”}$, $Q(x, y) = \text{“}x \text{ меньше } y \text{”}$, $a = 1$, $g(x) = x+1$, где $+$ – сложение по модулю 2.

11. Пусть $F(x) = P(x) \ \& \ (\forall y)(P(y) \rightarrow D(x, y))$, $M = \{2, 3, 4, 6, 9\}$. Найти предикаты, которые соответствуют $F(x)$ при следующих интерпретациях:

- а) $P(x) = \text{“}x \text{ – простое число”}$, $D(x, y) = \text{“}x \text{ меньше или равно } y \text{”}$;
- б) $P(x) = \text{“}x \text{ – нечетное число”}$, $D(x, y) = \text{“}x \text{ делит } y \text{”}$;
- в) $P(x) = \text{“}x \text{ не равно } 4 \text{”}$, $D(x, y) = \text{“}x \text{ меньше или равно } y \text{”}$.

Существуют ли интерпретации, при которой формуле $F(x)$ соответствуют предикаты: а) “ $x = 4$ ”, б) “ x – четное число?”

12. Выяснить, будут ли равносильны следующие пары формул:

- а) $(\forall x)(F(x) \vee G(x))$ и $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$;
- б) $(\exists x)(F(x) \ \& \ G(x))$ и $(\exists x)F(x) \ \& \ (\exists x)G(x)$;
- в) $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$ и $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$;
- г) $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x)$ и $(\exists x)(\forall y)(F(x) \rightarrow G(y))$;
- д) $(\exists x)(F(x) \rightarrow G(x))$ и $(\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$;
- е) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$ и $(\forall x)(\exists y)(F(x) \rightarrow G(y))$;
- ж) $(\exists x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\exists x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)G(x)$;
- з) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\forall x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)G(x)$.

13. Доказать равносильность формул:

- а) $F = \neg(\exists x)[(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall z)(P(z, z) \vee Q(z))]$ и $G = (\forall x)(\forall y)(\exists z)[P(x, y) \ \& \ \neg P(z, z) \ \& \ \neg Q(z)]$;
- б) $F = \neg(\forall x)[T(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)(R(y, z) \ \& \ T(z) \rightarrow R(z, z))]$ и $G = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[T(x) \ \& \ \neg R(z, z) \ \& \ \neg(R(y, z) \rightarrow \neg T(z))]$;
- в) $F = (\forall x)[(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists z)(P(x, z) \ \& \ Q(z))]$ и $G = (\forall x)(\exists u)[P(x, u) \rightarrow Q(u)]$;
- г) $F = \neg(\exists x)[(\exists y)T(x, y) \rightarrow (\forall z)(S(x, z) \vee Q(z))]$ и $G = (\forall x)(\exists y)(\exists z)[T(x, y) \ \& \ \neg(\neg S(x, z) \rightarrow Q(z))]$;

д) $F = \neg(\forall x)[(\forall y)T(x, y) \rightarrow (\exists z)(T(x, z) \& Q(z))]$ и $G = (\exists x)(\forall u)(T(x, u) \& \neg Q(u))$.

14. Привести к предваренной нормальной форме:

а) $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall y)G(y)$;

б) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$;

в) $(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)$;

г) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall y)G(y)$;

д) $(\forall x)P(x, y) \rightarrow (\exists z)[P(y, z) \vee (\forall u)(Q(u) \rightarrow P(z, z))]$.

15. Привести к сколемовской нормальной форме:

а) $(\exists x)[P(x) \& (\forall y)(S(y) \rightarrow T(x, y))]$,

б) $(\forall x)[Q(x) \rightarrow (\exists y)(\forall u)(R(x, y) \& S(y, u))]$,

в) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)[L(x, y, z) \& M(z, u, v)]$,

г) $(\forall x)[(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists z)(Q(x, z) \& R(z))]$,

д) $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall z)(Q(x, z) \vee P(z))]$,

е) $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \leftrightarrow (\exists z)Q(x, z)]$.

16. Показать, что в следующих случаях формула G не является логическим следствием множества формул K :

а) $G = (\forall x)\neg R(x)$, $K = \{(\exists x)R(x) \rightarrow (\exists x)Q(x), \neg Q(a)\}$;

б) $G = (\forall x)R(x, x)$, $K = \{(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))\}$;

в) $G = (\exists x)(P(x) \& \neg R(x))$, $K = \{(\forall x)[P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& S(x, y))], (\exists x)[R(x) \& (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg S(x, y))], (\exists x)P(x)\}$.

17. Дано утверждение: “Некоторые из первокурсников знакомы с кем-либо из спортсменов. Но ни один из первокурсников не знаком ни с одним любителем подледного лова”. Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:

а) “ни один спортсмен не является любителями подледного лова”,

б) “некоторые из спортсменов не являются любителями подледного лова”,

в) “найдется спортсмен, который любит подледный лов”?

18. Докажите нелогичность следующих рассуждений, построив интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

18.1. Все студенты нашей группы – члены клуба “Спартак”. А некоторые члены клуба “Спартак” занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

18.2. Некоторые студенты нашей группы – болельщики “Спартака”. А некоторые болельщики “Спартака” занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

18.3. Каждый первокурсник знаком с кем-либо из студентов второго курса. А некоторые второкурсники – спортсмены. Следовательно, каждый первокурсник знаком с кем-либо из спортсменов.

Законы логики первого порядка

Пусть F, G и H – некоторые формулы логики высказываний.

Тогда следующие формулы равносильны:

- 1) $F \& I$ и F ;
- 2) $F \vee I$ и I ;
- 3) $F \& 0$ и 0 ;
- 4) $F \vee 0$ и F ;
- 5) $F \& F$ и F ;
- 5) $F \vee F$ и F ;
- 7) $F \& G$ и $G \& F$;
- 8) $F \vee G$ и $G \vee F$;
- 9) $F \& (G \& H)$ и $(F \& G) \& H$;
- 10) $F \vee (G \vee H)$ и $(F \vee G) \vee H$;
- 11) $F \& (G \vee H)$ и $(F \& G) \vee (F \& H)$;
- 12) $F \vee (G \& H)$ и $(F \vee G) \& (F \vee H)$;
- 13) $F \& (F \vee G)$ и F ;
- 14) $F \vee (F \& G)$ и F ;
- 15) $F \& \neg F$ и 0 ;
- 16) $F \vee \neg F$ и 1 ;
- 17) $\neg(F \& G)$ и $\neg F \vee \neg G$;
- 18) $\neg(F \vee G)$ и $\neg F \& \neg G$;
- 19) $\neg\neg F$ и F ;
- 20) $F \rightarrow G$ и $\neg F \vee G$;
- 21) $F \leftrightarrow G$ и $(F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F)$.

- 22) $(\forall x)(F(x) \& G(x))$ равносильна $(\forall x)F(x) \& (\forall x)G(x)$,
- 23) $(\exists x)(F(x) \vee G(x))$ равносильна $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$,
- 24) $(\forall x)(\forall y)F(x, y)$ равносильна $(\forall y)(\forall x)F(x, y)$,
- 25) $(\exists x)(\exists y)F(x, y)$ равносильна $(\exists y)(\exists x)F(x, y)$,
- 26) $\neg(\forall x)F(x)$ равносильна $(\exists x)\neg F(x)$,
- 27) $\neg(\exists x)F(x)$ равносильна $(\forall x)\neg F(x)$.
- 28) $(\forall x)(F(x) \vee G)$ равносильна $(\forall x)(F(x) \vee G)$,
- 29) $(\exists x)(F(x) \& G)$ равносильна $(\exists x)(F(x) \& G)$, где G не содержит x .

Законы 22, 23, 28, 29 можно записать в общем виде:

- 30) $(Q_1x)(Q_2u)(F(x) \vee G(u))$ равносильна $(Q_1x)F(x) \vee (Q_2u)G(u)$,
 31) $(Q_1x)(Q_2u)(F(x) \& G(u))$ равносильна $(Q_1x)F(x) \& (Q_2u)G(u)$,

где Q_1, Q_2 – кванторы \forall или \exists , переменная u не входит в $F(x)$, а переменная x не входит в $G(u)$.

Для доказательства равносильности двух формул могут оказаться полезными следующие законы:

32) $(\forall x)F(x)$ равносильна $(\forall z)F(z)$,

33) $(\exists x)F(x)$ равносильна $(\exists z)F(z)$.

В законах 32 и 33 переменная z не входит в $F(x)$, а переменная x не входит в $F(z)$.

Пример. Проиллюстрируем его на примере следующей задачи: доказать равносильность формул:

$$F = \neg(\forall x)(\exists y)[S(x) \& P(x, y) \rightarrow (\exists z)(T(z) \& P(x, z))],$$

$$G = (\exists x)(\forall y)[S(x) \& P(x, y) \& (\forall z)(T(z) \rightarrow \neg P(x, z))].$$

Применив к формуле F последовательно законы 26, 27 и 20, получим, что формула F равносильна формуле

$$F_1 = (\exists x)(\forall y)\neg[\neg(S(x) \& P(x, y)) \vee (\exists z)(T(z) \& P(x, z))].$$

Далее, используя законы 18, 19 и 27 из F_1 , получаем формулу

$$F_2 = (\exists x)(\forall y)[S(x) \& P(x, y) \& (\forall z)\neg(T(z) \& P(x, z))].$$

Осталось заметить, что в силу законов 17 и 20 в формуле F_2 подформулу $\neg(T(z) \& P(x, z))$ можно заменить на $T(z) \rightarrow \neg P(x, z)$.

Нормальные формы

Как и в логике высказываний, в логике первого порядка вводятся нормальные формы. Мы рассмотрим две из них: предваренную нормальную и сколемовскую нормальную формы.

Определение. Формула G имеет *предваренную нормальную форму* (сокращенно: ПНФ), если

$$G = (Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)H,$$

где Q_1, \dots, Q_n кванторы, а формула H не содержит кванторов.

Например, формула $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \& \neg Q(y))$ имеет предваренную нормальную форму, а формула $\neg(\forall x)(T(x) \& S(x, y))$ не имеет.

Теорема. Для всякой формулы F существует формула G , равносильная F и имеющая предваренную нормальную форму.

Доказательство теоремы легко следует из анализа алгоритма приведения к ПНФ.

Алгоритм приведения к предваренной нормальной форме

Шаг 1. Используя законы 21 и 20, исключить эквиваленцию и импликацию.

Шаг 2. Занести отрицание к атомарным формулам, пользуясь законами 17–19 и 26–27.

Шаг 3. С помощью законов 22–23, 28–31 вынести кванторы вперед, используя при необходимости переименование связанных переменных (законы 32–33).

Пример. Пусть

$$F = (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)(P(y) \& Q(y, z)).$$

Выполнив шаг 1 (с помощью закона 20), получим формулу

$$F_1 = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists y)(\forall z)(P(y) \& Q(y, z)).$$

С помощью закона 26 перейдем к формуле

$$F_2 = (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists y)(\forall z)(P(y) \& Q(y, z)).$$

Тем самым, шаг 2 также выполнен. Применим закон 30

$Q_1 = \exists, Q_2 = \exists, u = y$, получим формулу

$$F_3 = (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \vee (\forall z)(P(y) \vee Q(y, z))].$$

(Пользуемся тем, что $\neg P(x)$ не содержит y , а $(\forall z)(P(y) \& Q(y, z))$ не содержит x .) Так как формула $\neg P(x)$ не содержит z , применение закона 28 дает формулу

$$F_4 = (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg P(x) \vee (P(y) \vee Q(y, z))].$$

Это и есть искомая формула, имеющая ПНФ и равносильная формуле F .

В рассмотренном примере выполнение шага 3 можно организовать по-другому. В формуле F_2 связанную переменную y заменим на переменную x (закон 33), получим формулу

$$F_3' = (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)(\forall z)(P(x) \& Q(x, z)).$$

Используя закон 23, перейдем к формуле

$$F_4' = (\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall z)(P(x) \& Q(x, z))].$$

Затем, как и в предыдущем абзаце, с помощью закона 28 вынесем квантор по z за квадратную скобку. Получим формулу

$$F_5' = (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee (P(x) \& Q(x, z))].$$

Формула F_5' , как и формула F_4 , имеет предваренную нормальную форму и равносильна формуле F . В некоторых ситуациях формула F_5' предпочтительнее формулы F_4 , поскольку содержит меньше кванторов. (Кстати, бескванторную часть формулы F_5' можно упростить.)

Определение. Формула G имеет *сколемовскую нормальную форму* (сокращенно: СНФ), если

$$G = (\forall x_1) \dots (\forall x_n)H,$$

где формула H не содержит кванторов и имеет конъюнктивную нормальную форму.

Например, формула $(\forall x)[P(x) \& (P(y) \vee Q(x, y))]$ имеет сколемовскую нормальную форму, а формулы $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ и $(\forall x)[P(x) \vee (P(y) \& Q(x, y))]$ не имеют.

Алгоритм приведения к сколемовской нормальной форме

Шаги 1 – 3 – те же, что и в предыдущем алгоритме.

Шаг 4. Бескванторную часть привести к конъюнктивной нормальной форме (алгоритм описан в §5 главы 1).

Шаг 5. Исключить кванторы существования. Этот шаг изложим на примере. Пусть после выполнения четвертого шага мы получили формулу

$F = (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)H(x, y, z, u, v)$, где H – не содержит кванторов. Предположим, что она не содержит константы c , символов одноместной функции f и двухместной функции g . Тогда в формуле H заменим x на c , z – на $f(y)$, v заменим на $g(y, u)$. Все кванторы существования вычеркнем. Получим формулу

$G = (\forall y)(\forall u)H(c, y, f(y), u, g(y, u))$. Это и есть результат выполнения шага 5.

Пример. Приведем пример приведения к СНФ. Пусть

$$F = (\exists x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow (\exists z)(Q(x, z) \& R(y))].$$

Применяя законы 20 и 23, получаем формулу

$$F_1 = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x, y) \vee (Q(x, z) \& R(y))].$$

Она имеет предваренную нормальную форму. Используя закон 12, приводим бескванторную часть к КНФ:

$$F_2 = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(\neg P(x, y) \vee Q(x, z)) \& (\neg P(x, y) \vee R(y))].$$

Сделав подстановку $x = a$, $z = f(y)$, получим искомую формулу

$$G = (\forall y)[(\neg P(a, y) \vee Q(a, f(y))) \& (\neg P(a, y) \vee R(y))].$$

Теорема. Для всякой формулы F существует формула G , имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполняемая или невыполнимая.