Другие аксиоматизации.

Определение. Пусть F, G и H – формулы логики высказываний. *Аксиомой логики высказываний* называется формула одного из следующих видов:

$A1$: $F \to (G \to F)$,

$A2$: $[F \to (G \to H)] \to [(F \to G) \to (F \to H)]$,

$A3$: $(\neg G \to \neg F) \to [(\neg G \to F) \to G]$,

Подчеркнем, что аксиомой является любая формула указанных пяти видов (разумеется, при выполнении условий, указанных в $A4$ и $A5$). Например, формула $p(x) \to (q(x) \to p(x))$ – аксиома, полученная в соответствии с пунктом $A1$ определения. В этом случае мы будем говорить, что данная аксиома имеет *схему* $A1$. Множество аксиом бесконечно. Но число схем, по которым получаются аксиомы, всего пять.

Определение. Пусть F и G – формулы логики высказываний. *Правилом вывода в логике* называется следующее правило:

1) $$\frac{F,\ F \to G}{G}.$$

Это правило называется *правилом отделения* (или правилом *modus ponens*). Мы его сокращенно будем обозначать через *MP*.

Сейчас мы сформулируем ряд определений, из которых основное внимание надо обратить на первое определение. После формулировки определений будет приведена значительная серия примеров.

Определение. *Выводом из множества формул* (или гипотез) P называется последовательность формул

$$F_1, F_2, \ldots, F_n,$$

каждая формула F_k которой удовлетворяет (хотя бы) одному из условий:

1) F_k принадлежит P,
2) F_k – аксиома,
3) F_k следует из предыдущих (в данной последовательности) формул по правилу *MP*.

Определение. Формула G называется *выводимой из множества формул* P, если существует вывод из P, последней формулой которого является G.

Обозначение: $P \mid- G$.

Определение. Вывод из пустого множества P называется *доказательством*.

Другими словами доказательство – последовательность формул, каждая формула которой удовлетворяет одному из условий 2 − 3 из определения вывода.

Определение. Формула G называется *доказуемой* (или *теоремой*), если существует доказательство, последней формулой которого является формула G.

Обозначение: $\vdash G$.

Перейдем, наконец, к примерам. *Для примеров будем использовать сквозную (внутри главы) нумерацию для последующих ссылок*. Последовательность формул в примерах нам будет удобно записывать не в строку, а в столбец. Будем, кроме того, указывать обоснования включения формулы в данный вывод.

Пример 1. $\vdash F \to F$.

1) $F \to ((F \to F) \to F)$, — $A1$

2) $[F \to ((F \to F) \to F)] \to$ — $A2$
$\to [(F \to (F \to F)) \to (F \to F)]$,

3) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$, — $MP(1, 2)$

4) $F \to (F \to F)$, — $A1$

5) $F \to F$. — $MP(3, 4)$

Пример 2. $\{F, \neg F\} \vdash G$.

1) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$, — $A3$

2) $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$, — $A1$

3) $\neg F$, — гипотеза

4) $\neg G \to \neg F$ — $MP(2, 3)$

5) $(\neg G \to F) \to G$, — $MP(1, 4)$

6) $F \to (\neg G \to F)$, — $A1$

7) F, — гипотеза

8) $\neg G \to F$, — $MP(6, 7)$

9) G. — $MP(5, 8)$

Пример 3. $\{F \to G, G \to H\} \vdash F \to H$.

1) $(G \to H) \to [F \to (G \to H)]$, — $A1$

2) $G \to H$ — гипотеза

3) $F \to (G \to H)$ — $MP(1, 2)$

4) $[F \to (G \to H)] \to [(F \to G) \to (F \to H)]$, — $A2$

5) $(F \to G) \to (F \to H)$, — $F \to H$.

6) $F \to G$, — гипотеза

7) $F \to H$. — $MP(5, 6)$

Теорема о дедукции

Из общих соображений ясно, что чем больше формул содержит множество гипотез, тем легче вывести из него данную формулу. В исчислении предикатов есть утверждение, которое позволяет увеличить число гипотез. Оно называется *теоремой о дедукции*.

Теорема 3.3. Пусть P – множество формул, F и G – некоторые формулы. Тогда

$$P \mid\!- F \to G \Leftrightarrow P \cup \{F\} \mid\!- G.$$

В качестве примеров применения теоремы о дедукции докажем возможность введения и снятия двойного отрицания и закон контрапозиции. Закон контрапозиции утверждает, что формула $F \to G$ равносильна формуле $\neg G \to \neg F$.

Пример 5. $\mid\!- \neg\neg F \to F$ [или по теореме о дедукции $\neg\neg F \mid\!- F$].

1) $(\neg F \to \neg\neg F) \to ((\neg F \to \neg F) \to F)$,	$A3$
2) $\neg\neg F \to (\neg F \to \neg\neg F)$,	$A1$
3) $\neg\neg F$,	гипотеза
4) $\neg F \to \neg\neg F$,	$MP(2, 3)$
5) $(\neg F \to \neg F) \to F$,	$MP(1, 4)$
6) $\neg F \to \neg F$,	Пример 1
7) F.	$MP(5, 6)$

Пример 6. $\mid\!- F \to \neg\neg F$ [или по теореме о дедукции $F \mid\!- \neg\neg F$].

1) $(\neg\neg\neg F \to \neg F) \to ((\neg\neg\neg F \to F) \to \neg\neg F)$,	$A3$
2) $\neg\neg\neg F \to \neg F$,	Пример 6
3) $(\neg\neg\neg F \to F) \to \neg\neg F$,	$MP(1, 2)$
4) $F \to (\neg\neg\neg F \to F)$,	$A1$
5) F,	гипотеза
6) $\neg\neg\neg F \to F$,	$MP(5, 4)$
7) $\neg\neg F$.	$MP(6, 3)$

Пример 7. $\neg G \to \neg F \mid\!- F \to G$ [или по теореме о дедукции $\neg G \to \neg F$, $F \mid\!- G$].

1) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$,	$A3$
2) $\neg G \to \neg F$,	
3) $(\neg G \to F) \to G$,	$MP(1, 2)$
4) $F \to (\neg G \to F)$,	$A1$
5) F,	
6) $\neg G \to F$,	$MP(5, 4)$
7) G.	$MP(6, 3)$

Пример 8. $F \to G \mid\!- \neg G \to \neg F$ [или по теореме о дедукции $F \to G, \neg G \mid\!- \neg F$].

1) $(\neg\neg F \to \neg G) \to ((\neg\neg F \to G) \to \neg F)$, $A3$
2) $\neg G \to (\neg\neg F \to \neg G)$, $A1$
3) $\neg G$, гипотеза
4) $\neg\neg F \to \neg G$, $MP(3, 2)$
5) $(\neg\neg F \to G) \to \neg F$, $MP(4, 1)$
6) $F \to G$, гипотеза
7) $\neg\neg F \to F$, Пример 5
8) $\neg\neg F \to G$, Пример 3
9) $\neg F$. $MP(8, 5)$

Другие аксиоматизации

Рассмотренная ранее система аксиом и правил вывода взята из книги [Мен]. Будем называть эту систему *системой Мендельсона*. Кроме этой аксиоматизации в литературе изучались и другие аксиоматизации.

В этом параграфе мы приведем некоторые их них.

1. *Система Мендельсона с правилом подстановки* [см. Мен]. В этой системе вместо схем аксиом берутся конкретные формулы-аксиомы и к правилу модус поненс добавляется правило подстановки, позволяющее в аксиому подставлять вместо атомарной формулы любую формулу.

2. *Система Гильберта и Аккермана* [см. ГБ или Мен]. Основные связки: $\neg$ и $\vee$. Формула $F \to G$ понимается как сокращение формулы $\neg F \vee G$. Система содержит четыре схемы аксиом: 1) $F \vee F \to F$,

2) $F \to F \vee G$,
3) $F \vee G \to G \vee F$,
4) $(G \to H) \to (F \vee G \to F \vee H)$.

Единственное правило вывода – модус поненс.

3. *Система Клини* [см. Кл, стр. 48]. Основные связки: $\neg$, &, $\vee$ и $\to$. Система содержит 10 схем аксиом:

1) $F \to (G \to F)$,
2) $(F \to (G \to H)) \to [(F \to G) \to (F \to H)]$,
3) $F \,\&\, G \to F$,
4) $F \,\&\, G \to G$,
5) $F \to (G \to F \,\&\, G)$,
6) $F \to F \vee G$,
7) $G \to F \vee G$,
8) $(F \to H) \to [(G \to H) \to (F \vee G \to H)]$,

9) $(F \to G) \to [(F \to \neg G) \to \neg F]$,

10) $\neg\neg F \to F$.

Единственное правило вывода – модус поненс.

4. *Система Черча* [см. Ч, стр. 112 − 113]. Основные связки: $\neg$ и $\to$. Система содержит три схемы аксиом:

1) $F \to (G \to F)$,

2) $(F \to (G \to H)) \to [(F \to G) \to (F \to H)]$, 3) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$.

Единственное правило вывода – модус поненс.

Все рассмотренные выше варианты аксиоматизаций логики высказываний (т. е. системы аксиом и правил вывода) относятся к так называемым *системам гильбертовского типа*. В этих системах определяется некоторое множество схем аксиом (или конкретных аксиом) и множество правил вывода. Множество схем аксиом и правил вывода должно быть конечным, а множество аксиом – рекурсивным. Вывод из множества формул P определяется как последовательность формул, каждая формула которой принадлежит P или является аксиомой, или следует из предыдущих формул по одному из правил вывода. Формула G называется выводимой из P, если существует вывод из P, последней формулой которого является G. С примером аксиоматизации, которая не относится к гильбертовскому типу, можно познакомиться по книгам [ЕП] или [СО].

Приведем примеры на выводимость в разных системах.

Пример 10. Доказать, что $\{F \to G, G \to H\} \mid- F \to H$ в системе Гильберта и Аккермана.

1) $G \to H$,	гипотеза
2) $(G \to H) \to (\neg F \lor G \to \neg F \lor H)$,	$A4$
3) $(\neg F \lor G \to \neg F \lor H)$ есть $(F \to G) \to (F \to H)$,	$MP(1, 2)$
4) $F \to G$,	гипотеза
5) $F \to H$.	$MP(3, 4)$

Пример 11. Доказать, что $\mid- F \to F$ в системе Гильберта и Аккермана.

1) $F \to F \lor F$,	$A2$
2) $F \lor F \to F$,	$A1$
3) $F \to F$.	Пример 10

Пример 12. Доказать, что $\mid- F \to F$ в системе Черча. Доказательство то же самое, что и в системе Мендельсона (см. пример 1).

Пример 13. Доказать, что $\neg F \mid- F \to G$ в системе Черча.

1) $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$,	$A1$
2) $\neg F$,	

3) $\neg G \to \neg F$, $MP(1, 2)$

4) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$, $A3$

5) $F \to G$. $MP(3, 4)$

Пример 14. Доказать, что $\{F \to (G \to H), F \,\&\, G\} \mid\!- H$ в системе Клини.

1) $F \,\&\, G \to F$, $A3$

2) $F \,\&\, G$,

3) F, $MP(1, 2)$

4) $F \to (G \to H)$

5) $G \to H$ $MP(3, 4)$

6) $F \,\&\, G \to G$, $A4$

7) G, $MP(2, 6)$

8) H. $MP(5, 7)$

Для всех рассмотренных выше систем справедлива теорема о полноте: формула G выводима (в данной системе) из множества формул P тогда и только тогда, когда G является логическим следствием этого множества формул.

Задачи

Если в формулировке задач не указана система аксиом и правил вывода, то предполагается, что это система Мендельсона.

1. Доказать, что $\neg F \to F \mid\!- F$.

2. Доказать, что $F \to G, \neg F \to G \mid\!- G$ (разбор случаев).

3. Напомним, что формула $F \vee G$ понимается как сокращение формулы $\neg F \to G$. Доказать, что $F \vee G \mid\!- G \vee F$ (коммутативность дизъюнкции).

4. Напомним, что формула $F \,\&\, G$ понимается как сокращение формулы $\neg(F \to \neg G)$. Доказать, что $F \,\&\, G \mid\!- G \,\&\, F$ (коммутативность дизъюнкции).

5. В системе Гильберта и Аккермана доказать, что $\mid\!- F \to (G \to H)$ или, используя сокращение, доказать, что $\mid\!- F \to (\neg G \vee H)$.

6. В системе Черча доказать, что $\neg\neg F \mid\!- F$.

7. В системе Клини доказать, что $\{F \to G, \neg G\} \mid\!- \neg F$.

8. В системе Клини доказать, что $\{F, \neg F\} \mid\!- G$.

9. В системе Клини доказать, что $\{F \to (G \to H), F \,\&G\} \mid\!- H$.

10. В системе Клини доказать, что $\{F \to G, G \to H, F \vee G\} \mid\!- H$.

11. В системе Клини доказать, что $\{\neg G \to \neg F, \neg G \to F\} \mid\!- G$.

Литература

1. [ГБ] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: логические исчисления и формализация арифметики. – М.: «Наука», 1979.
2. [Кл] Клини. Математическая логика. – М.: «Мир», 1973.
3. [Л] Линдон Р. Заметки по логике. М.: «Мир», 1968.
4. [Мен] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: «Наука», 1984.
5. [СО] Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: «ИНФРА-М», 2004.
6. [Ч] Черч А. Введение в математическую логику. – М.: Мир, 1963.