

§5. Семантические деревья, теорема Эрбрана

В предыдущем параграфе мы видели, что для получения ответа на вопрос о выполнимости множества дизъюнктов можно рассматривать не все интерпретации, а только H -интерпретации. В данном параграфе мы продвинемся еще дальше в этом направлении. Мы фактически покажем, что для решения упомянутого вопроса можно ограничиться конечными подмножествами эрбановского универсума. Основным понятием этого параграфа будет понятие семантического дерева.

На дерево будем смотреть, как на корневое ориентированное дерево. Изображать дерево будем растущим вниз, ориентацию дуг указывать не будем. Дугам дерева будут поставлены в соответствие (приписаны) множества литералов. Напомним, что листом дерева называется вершина, из которой не выходит ни одна дуга. Путь в дереве – это последовательность дуг

$$e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$$

такая, что если дуга e_i заходит в некоторую вершину, то дуга e_{i+1} выходит из этой вершины. Путь в дереве называется *максимальным*, если к нему нельзя добавить ни одной дуги. Для каждой вершины существует единственный путь от корня к этой вершине. Если вершина является листом, то этот путь максимальен. Если π – путь в дереве, то через $I(\pi)$ будем обозначать объединение всех множеств литералов, приписанных дугам пути. В случае, когда π – путь от корня до вершины v , то вместо $I(\pi)$ будем писать $I(v)$. Мы будем использовать понятие поддерева несколько в ином смысле, нежели в теории графов. А именно, *поддеревом* дерева T будем называть подграф T' , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) T' – дерево,
- 2) T' содержит корень дерева T ,
- 3) если из v в v' идет дуга в дереве T , v и $v' \in T'$, то T' содержит все вершины, в которые из v идет дуга.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов, B – эрбановский базис для S . *Семантическим деревом* для S называется корневое дерево, каждой дуге которого приписано непустое множество формул из B или их отрицаний так, что выполнены следующие условия.

1. Из любой вершины выходит конечное число дуг e_1, \dots, e_k ; если c_i – конъюнкция литералов, приписанных дуге e_i , то $c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_k$ – тождественно истинная формула.
2. Для любой вершины v множество $I(v)$ не содержит противоположных литералов.

Рассмотрим примеры. Пусть S – множество дизъюнктов из примера 2 предыдущего параграфа, B – его эрбановский базис. Напомним, что $B =$

$\{P(a), Q(a), R(a)\}$. Для простоты в примерах вместо $P(a)$, $Q(a)$ и $R(a)$ будем писать просто P , Q , R . На рисунках 4.4 и 4.5 приведены примеры семантических деревьев для S . Семантическое дерево может быть бесконечным. На рисунке 4.6 приведен пример семантического дерева для множества дизъюнктов S из примера 1 §4. Напомним, что эрбрановский базис в этом случае есть $B = \{P(a), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \dots\}$.

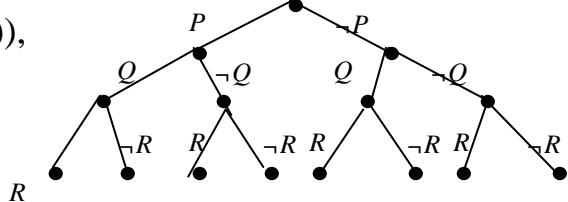


Рис. 4.4

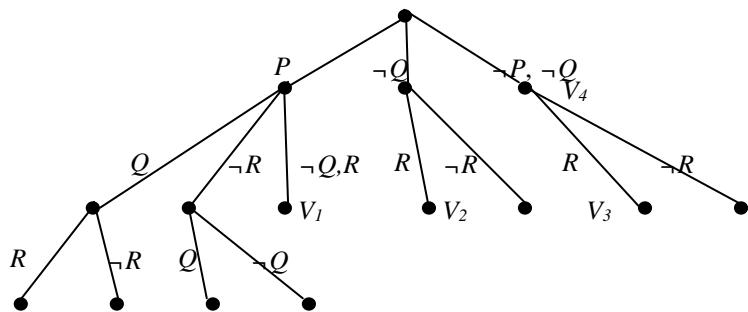


Рис. 4.5

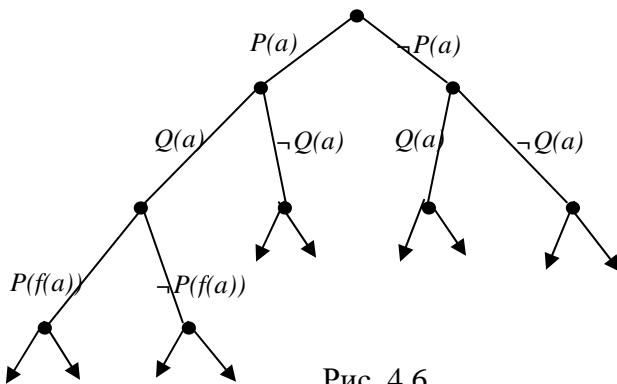


Рис. 4.6

Определение. Пусть B – эрбрановский базис множества дизъюнктов S . Семантическое дерево T называется *полным*, если для любого элемента A базиса B и любого максимального пути π множество $I(\pi)$ содержит либо A , либо $\neg A$.

Семантические деревья, изображенные на рис.4.4 и 4.6, являются полными, а семантическое дерево, изображенное на рис.4.5 – неполным.

Определение. Вершина v семантического дерева называется *опровергающей*, если $I(v)$ опровергает основной пример некоторого

дизъюнкта из S . Вершина v называется *максимальной опровергающей*, если вершина v' , предшествующая v , опровергающей не является.

Рассмотрим в качестве примера дерево, изображенное на рис.4.5. Напомним, что оно является семантическим деревом множества дизъюнктов $S = \{P(x), Q(x) \vee \neg R(y)\}$. Вершины v_1 и v_3 будут опровергающими вершинами, так как множество $I(v_1)$, равное $\{\neg Q(a) \& R(a), P(a)\}$, опровергает основной пример $Q(a) \vee \neg R(a)$ дизъюнкта $Q(x) \vee \neg R(y)$, а множество $I(v_3)$, равное $\{R(a), \neg P(a) \& \neg Q(a)\}$ опровергает основной пример $P(a)$ дизъюнкта $P(x)$. Вершина v_1 будет максимальной опровергающей, а вершина v_3 не будет максимальной опровергающей, потому что опровергающей является предшествующая ей вершина v_4 . Вершина v_2 опровергающей не является.

Определение. Вершина v семантического дерева называется *выводящей*, если все непосредственно следующие за ней вершины являются максимальными опровергающими.

Пусть $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(y)), \neg Q(f(a))\}$ множество дизъюнктов примера 1 предыдущего параграфа. Дерево, изображенное на рис.4.7, является семантическим деревом для S . Вершина v этого дерева является выводящей вершиной, а никакие другие вершины выводящими не являются.

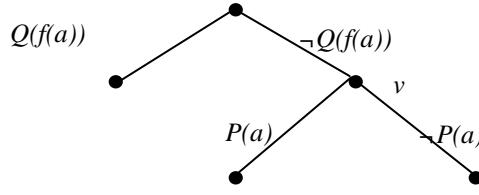


Рис.4.7

Определение. Семантическое дерево называется *замкнутым*, если каждый его лист является максимальной опровергающей вершиной.

Дерево, изображенное на рис.4.7, замкнуто, а деревья на рис.4.4 и 4.5 незамкнуты.

Следующее утверждение – знаменитая теорема математической логики, которая является основой многих алгоритмов доказательства теорем. Она называется теоремой Эрбрана.

Теорема 4.6. Множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда любое полное семантическое дерево множества S имеет конечное замкнутое поддерево.

Доказательство теоремы 4.6 использует известное в математике утверждение, которое называется леммой Кенига. Сформулируем ее.

Лемма. Если T – бесконечное дерево, из каждого узла которого выходит конечное число дуг. Тогда дерево T содержит бесконечный путь, начинающийся от корня.

Доказательство леммы Кенига приводить не будем.

Приведем доказательство теоремы 4.6. Докажем вначале необходимость. Пусть множество дизъюнктов S невыполнимо и T – полное семантическое дерево для S . Рассмотрим максимальный путь π в дереве T . По определению полного семантического дерева для каждой атомарной формулы A эрбрановского базиса B , либо A , либо $\neg A$ принадлежит $I(\pi)$. Это означает, что $I(\pi)$ есть H -интерпретация множества S . Поскольку S невыполнимо, то $I(\pi)$ опровергает основной пример D' некоторого дизъюнкта D из S . Дизъюнкт D' конечен, поэтому путь π должен проходить через максимальную опровергающую вершину дерева T . В каждом максимальном пути отметим такую вершину. Пусть T' – поддерево дерева T , листьями которого являются отмеченные вершины. В силу леммы Кенига, T' – конечное поддерево дерева T . Дерево T' по построению является замкнутым. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть полное семантическое дерево T содержит конечное замкнутое поддерево T' . По определению поддерева (см. начало данного параграфа) отсюда следует, что каждый максимальный путь дерева T содержит опровергающую вершину. Множество всех максимальных путей полного семантического дерева исчерпывает все H -интерпретации множества S . Следовательно S ложно при всех H -интерпретациях. По теореме 4.5 S невыполнимо.

§6. Полнота метода резолюций в логике первого порядка

Параграф посвящен доказательству теоремы 4.3. Напомним ее формулировку.

Теорема 4.7. Множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Отметим вначале, что вывод из множества дизъюнктов S можно определить как последовательность дизъюнктов, каждый дизъюнкт которой принадлежит S или является резольвентой предыдущих дизъюнктов.

Пусть множество дизъюнктов S невыполнимо и $B = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ – эрбрановский базис для S . Рассмотрим полное семантическое дерево T , изображенное на рис.4.8.

По теореме Эрбрана T содержит конечное замкнутое семантическое поддерево T' . Если T' состоит только из корня, то $\square \in S$, и поэтому \square выводим из S . Предположим, что T' состоит не только из корня. Тогда T' имеет вершину v , потомки v_1 и v_2 которых являются максимальными опровергающими для множества S вершинами. Пусть

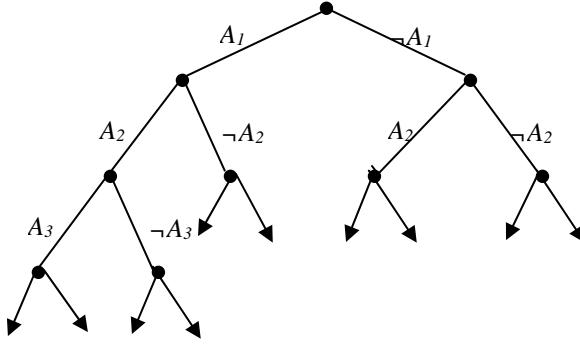


Рис. 4.8

$$I(v) = \{ L_1, L_2, \dots, L_k \}, I(v_1) = \{ L_1, L_2, \dots, L_k, A_{k+1} \}, I(v_2) = \{ L_1, L_2, \dots, L_k, \neg A_{k+1} \}.$$

Существует дизъюнкт $D_1 \in S$ такой, что его основной пример D_1' опровергается в $I(v_1)$, и существует дизъюнкт $D_2 \in S$ такой, что его основной пример D_2' опровергается в $I(v_2)$. Так как дизъюнкты D_1' и D_2' не опровергаются в $I(v)$, то D_1' содержит $\neg A_{k+1}$, а $D_2' - A_{k+1}$. Применим к D_1' и D_2' правило резолюций, отрезая литералы $\neg A_{k+1}$ и A_{k+1} , получим дизъюнкт D' :

$$D' = (D_1' - \neg A_{k+1}) \cup (D_2' - A_{k+1}).$$

Отметим, что дизъюнкт $D_1' - \neg A_{k+1}$ ложен в $I(v)$, поскольку в противном случае, D_1' был бы истинен в $I(v_1)$. Аналогично заключаем, что $D_2' - A_{k+1}$ ложен в той же интерпретации $I(v)$.

Отсюда следует, что D' ложен при $I(v)$.

По лемме о подъеме (теорема 4.4) существует дизъюнкт D , который является резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 . Ясно, что D опровергается в $I(v)$. Рассмотрим множество дизъюнктов $S \cup \{D\}$. Замкнутое семантическое дерево T'' для этого множества дизъюнктов можно получить вычеркиванием некоторых вершин (и идущих в них дуг) дерева T' . А именно, в дереве T' вычеркиваем все дуги и вершины, которые лежат ниже первой (на пути из корня) вершины, где дизъюнкт D' ложен. Полученное таким образом дерево T'' содержит меньше вершин, нежели дерево T' , так как $v_1, v_2 \notin T''$.

Применим описанный выше процесс к T'' , мы получим резольвенту дизъюнктов из $S \cup \{D\}$. Расширим множество $S \cup \{D\}$ за счет этой резольвенты, придем к конечному замкнутому дереву с меньшим числом вершин, нежели T'' . В конце концов, получим замкнутое семантическое дерево, состоящее только из корня. Это возможно, лишь в случае, когда множество S , расширенное резольвентами, содержит пустой дизъюнкт. Следовательно, \square выводим из S . Необходимость условия теоремы доказана.

Докажем достаточность. Пусть пустой дизъюнкт выводим из S , и $D_1, D_2, \dots, D_n = \square$ – вывод из S . Предположим, что S выполнимо в некоторой интерпретации. Тогда, поскольку правило резолюций и правило склейки сохраняют истинность, то все дизъюнкты вывода, в том числе и пустой, являются истинными в этой интерпретации. Полученное противоречие доказывает, что S невыполнимо.

§7. Стратегии метода резолюций

В множестве дизъюнктов существует, как правило, не одна пара дизъюнктов, к которым можно применить правило резолюций. Способ выбора дизъюнктов и литералов в них, к которым применяется правило резолюций (и правило склейки) для получения резольвенты, называется *стратегией* метода. В этом параграфе будет рассмотрено три стратегии: насыщения уровней, предпочтения более коротких дизъюнктов и вычеркивания.

Стратегия насыщения уровней. Наиболее простой с идеиной точки зрения способ выбора дизъюнктов для получения резольвенты состоит в организации полного перебора возможных вариантов. Этот перебор можно организовать следующим образом. Пусть $S_0 = S$ – исходное множество дизъюнктов. Будем считать, что S_0 упорядочено. Пусть D_2 пробегает по порядку множество дизъюнктов S_0 , начиная со второго. В качестве D_1 берем последовательно дизъюнкты из S_0 , предшествующие D_2 , начиная с первого, и формируем последовательность S_1 , состоящую из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2 . (Порядок на S_1 определяется порядком добавления дизъюнктов в S_1 .) Предположим, что получены последовательности дизъюнктов S_0, S_1, \dots, S_{n-1} и $n > 1$. Тогда последовательность S_n получается следующим образом. В качестве D_2 берутся по порядку дизъюнкты из S_{n-1} , а в качестве D_1 – дизъюнкты из $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{n-1}$, предшествующие D_2 . Последовательность S_n будет состоять из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2 . Процесс порождения резольвент прекращается, как только получается пустой дизъюнкт.

Описанная в предыдущем абзаце стратегия называется *стратегией насыщения уровней*. (Уровни – это последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$) Проследим, как она работает на примере множества дизъюнктов $S = \{X \vee Y, \neg X \vee \neg Y, X \vee Z, \neg X \vee Z, \neg Z\}$:

$S_0: (1) X \vee Y,$	(14) $\neg X \vee \neg Y$ (из (2) и (6)),
(2) $\neg X \vee \neg Y,$	(15) $X \vee Y$ (из (1) и (7)),
(3) $X \vee Z,$	(16) $\neg X \vee \neg Y$ (из (2) и (7)),
(4) $\neg X \vee Z,$	(17) $X \vee Z$ (из (3) и (7)),

- | | |
|---|--------------------------------------|
| (5) $\neg Z$, | (18) $\neg X \vee Z$ (из (4) и (7)), |
| S_1 : (6) $Y \vee \neg Y_2$ (из (1) и (2)), | (19) $X \vee Z$ (из (1) и (8)), |
| (7) $X \vee \neg X$ (из (1) и (2)) | (20) $\neg Y$ (из (5) и (8)), |
| (8) $\neg Y \vee Z$ (из (2) и (3)) | (21) $\neg Y \vee Z$ (из (6) и (8)), |
| (9) $Y \vee Z$ (из (1) и (4)), | (22) $\neg X \vee Z$ (из (2) и (9)), |
| (10) Z (из (3) и (4)), | (23) Y (из (5) и (9)), |
| (11) X (из (3) и (5)), | (24) $Y \vee Z$ (из (6) и (9)), |
| (12) $\neg X$ (из (4) и (5)), | (25) Z (из (8) и (9)), |
| S_2 : (13) $X \vee Y$ (из (1) и (6)), | (26) \square (из (5) и (10)). |

Мы видим, что порождено много лишних дизъюнктов. Так, (6) и (7) – тождественно истинные дизъюнкты. Удаление или добавление тождественно истинного дизъюнкта не влияет на выполнимость множества дизъюнктов, поэтому такие дизъюнкты должны быть удалены из вывода. Далее, некоторые дизъюнкты порождаются неоднократно, например, $X \vee Y$, $\neg X \vee \neg Y$, $Y \vee Z$. Это означает, что выбором дизъюнктов для получения резольвенты надо управлять.

Стратегия предпочтения (более коротких дизъюнктов). Эта стратегия является модификацией предыдущей: сначала в качестве D_2 берется самый короткий дизъюнкт из S_{n-1} (если таких несколько, то они перебираются по порядку), затем более длинные и т.д. Аналогичные условия налагаются и на D_1 . Такая стратегия в применении к тому же множеству дизъюнктов S дает следующую последовательность дизъюнктов:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| S_0 : (1) $X \vee Y$, | (10) $\neg Y \vee Z$ (из (2) и (3)), |
| (2) $\neg X \vee \neg Y$, | (11) $Y \vee Z$ (из (1) и (4)) |
| (3) $X \vee Z$, | (12) Z (из (3) и (4)), |
| (4) $\neg X \vee Z$, | S_2 : (13) $\neg Y$ (из (2) и (6)), |
| (5) $\neg Z$ | (14) Z (из (2) и (6)), |
| S_1 : (6) X (из (3) и (5)), | (15) Y (из (1) и (7)), |
| (7) $\neg X$ (из (4) и (5)), | (16) Z (из (3) и (7)), |
| (8) $Y \vee \neg Y$ (из (1) и (2)), | (17) \square (из (6) и (7)). |
| (9) $X \vee \neg X$ (из (1) и (2)), | |

Вывод оказался короче, чем в предыдущем примере, но по-прежнему содержит повторяющиеся и тождественно истинные дизъюнкты. Свободным от этих недостатков является вывод, полученный в соответствии со стратегией вычеркивания. Для ее описания вначале следующее понятие.

Определение. Дизъюнкт D называется *расширением* дизъюнкта C , если существует подстановка σ такая, что $\sigma(C) \subseteq D$.

Для логики высказываний это означает, что просто $D = C \vee D'$ (при некоторой перестановке литералов). В случае логики предикатов ситуация не столь проста. Например, $D = Q(a) \vee P(b,y) \vee R(u)$ есть расширение дизъюнкта $C = P(x,y) \vee Q(z) \vee Q(v)$.

Стратегия вычеркивания. Эта стратегия, как и стратегия предпочтения, является модификацией стратегии насыщения уровней. Она применяется следующим образом: после того, как получена очередная резольвента D дизъюнктов D_1 и D_2 , проверяется, является ли она тождественно истинной формулой или расширением некоторого дизъюнкта C из $S_0 \cup \dots \cup S_{n-1}$, и в случае положительного ответа D вычеркивается, т.е. не заносится в последовательность S_n .

Применение стратегии к прежнему множеству дизъюнктов дает следующую последовательность дизъюнктов:

S_0 :	(1) $X \vee Y$,	(8) Z (из (3) и (4)),
	(2) $\neg X \vee \neg Y$,	(9) X (из (3) и (5)),
	(3) $X \vee Z$,	(10) $\neg X$ (из (4) и (5)),
	(4) $\neg X \vee Z$,	(11) $\neg Y$ (из (5) и (6)),
	(5) $\neg Z$,	(12) Y (из (5) и (7)),
S_1 :	(6) $\neg Y \vee Z$ (из (2) и (3)),	(13) \square (из (5) и (8)).
	(7) $Y \vee Z$ (из (1) и (4)),	

Рассмотренные стратегии являются *полными* в том смысле, что если множество дизъюнктов S невыполнимо, то из S пользуясь стратегией можно вывести пустой дизъюнкт. Для первых двух стратегий это достаточно очевидно. Полнота стратегии вычеркивания следует из того, что если D и C – дизъюнкты из S и D – расширение C , то множество S невыполнимо в том и только в том случае, когда невыполнимо множество $S \setminus \{D\}$.

§8. Применение метода резолюций

Мы рассмотрим здесь применение метода резолюций в доказательстве теорем и при планировании действий.

Доказательство теорем. Применим метод резолюций в доказательстве одной простой теоремы из теории групп.

в качестве исходной возьмем следующую аксиоматику теории групп:

$$\begin{aligned} F_1: & (\forall x,y,z)[(xy)z = x(yz)], \\ F_2: & (\forall x,y)(\exists z)(zx = y), \\ F_3: & (\forall x,y)(\exists z)(xz = y). \end{aligned}$$

Предположим, что нам надо доказать теорему $G: (\exists x)(\forall y)(yx = y)$, т.е. что в группе существует правая единица.

Наша задача – установить, что формула G есть логическое следствие формул F_1, F_2, F_3 . Прежде, чем решать эту задачу, перейдем к другой сигнатуре. Введем символ трехместного предиката P , который интерпретируется следующим образом:

$P(x, y, z)$ означает, что $xy = z$.

В новой сигнатуре формулы F_1, F_2, F_3 и G запишутся так:

$$F'_1 = (\forall x,y,z)[P(x, y, u) \& P(y, z, v) \& P(x, v, w) \rightarrow P(u, z, w)],$$

$$F'_2 = (\forall x,y)(\exists z)P(z, x, y), \quad F'_3 =$$

$$(\forall x,y)(\exists z)P(x, z, y), \quad G' =$$

$$(\exists x)(\forall y)P(y, x, y).$$

Сформируем множество $T = \{F'_1, F'_2, F'_3, \neg G'\}$, каждую из формул множества T приведем к сколемовской нормальной форме и удалим кванторы общности (конъюнкция в сколемовских нормальных формах этих формул не появится). Получим множество дизъюнктов D_1, D_2, D_3, D_4 :

$$D_1 = \neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w), \quad D_2 =$$

$$P(f(x,y), x, y), \quad D_3 = P(x, g(x,y), y), \quad D_4 = \neg P(h(x), x, h(x)).$$

Построим вывод пустого дизъюнкта из множества дизъюнктов D_1, \dots, D_4 . Пусть эти дизъюнкты – первые дизъюнкты вывода. Заменив переменные в дизъюнкте D_2 , получим дизъюнкт $D'_2 = P(f(x',y'), x', y')$. Литералы $P(x, y, u)$ и D'_2 унифицируются подстановкой $\sigma_1 = \{x = f(x',y'), y = x', u = y'\}$. Применим правило резолюций к D_1 и D'_2 (и указанным литералам), получим дизъюнкт

$$D_5 = \neg P(x', z, v) \vee \neg P(f(x',y'), v, w) \vee P(y', z, w).$$

Далее, литерал $P(f(x',y'), v, w)$ и D_2 унифицируются подстановкой $\sigma_2 = \{x' = x, y' = y, v = x, w = y\}$. Правило резолюций, примененное к D_5 и D_2 , дает дизъюнкт $D_6 = \neg P(x, z, x) \vee P(y, z, y)$.

Резольвентой дизъюнктов D_3 и D_6 будет дизъюнкт

$$D_7 = P(y, g(y',y'), y).$$

Для получения этой резольвенты заменим переменные в D_3 , получим $D_3 = P(x', g(x',y'), y')$ и используем подстановку $\sigma_3 = \{x = y', z = g(y',y')\}$. Наконец, из дизъюнктов D_4 и D_7 с помощью подстановки $\sigma_4 = \{y = h(g(y',y')), x = g(y',y')\}$ получаем пустой дизъюнкт.

Планирование действий. Отметим вначале одно свойство метода резолюций. Пусть сигнатура τ состоит из двух символов двухместных предикатов P и Q , которые интерпретируются следующим образом: $P(x, y)$ означает, что x – сын y , $Q(x, z)$ означает, что x – внук z . Рассмотрим формулы:

$$F_1 = (\forall x,y,z)[P(x, y) \& P(y, z) \rightarrow Q(x, z)],$$

$F_2 = (\forall x)(\exists y)P(x, y)$, $G =$
 $(\forall x)(\exists z)Q(x, z)$, смысл которых
достаточно ясен.

Используя метод резолюций, покажем, что G есть логическое следствие F_1 и F_2 . Приведем формулы F_1 , F_2 и $\neg G$ к сколемовской нормальной форме, получим дизъюнкты:

$$D_1 = \neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z), D_2 = P(x, f(x)), D_3 = \neg Q(a, z).$$

Вывод пустого дизъюнкта получается довольно просто: $D_4 = \neg P(a, y) \vee \neg P(y, z)$ (D_1 и D_3 , $\{x = a\}$),

$$D_5 = \neg P(f(a), z) \quad (D_2 \text{ и } D_4, \{x = a, y = f(a)\}),$$

$$D_6 = \square \quad (D_2 \text{ и } D_5, \{x = f(a), z = f(a)\}).$$

Подстановка $z = f(f(a))$ означает, что дед элемента a есть отец отца элемента a . Таким образом, метод резолюций не только устанавливает факт логического следствия формулы G из формул F_1 и F_2 , но еще и “подсказывает”, как по данному x получить z такой, чтобы формула $Q(x, z)$ была истинна.

Довольно часто интересующая нас переменная участвует не в одной подстановке, как в этом примере переменная z , а в нескольких. Для того, чтобы отследить все подстановки, в которых может изменить значение переменная, к формуле $\neg G$ добавляют литерал ответа $ANS(z)$ и заканчивают вывод не пустым дизъюнктом, а литералом ответа.

В качестве примера использования метода резолюций в задачах планирования действий рассмотрим известную в теории искусственного интеллекта задачу об обезьяне и бананах. В задаче говорится об обезьяне, которая хочет съесть бананы, подвешенные к потолку комнаты. Рост обезьяны недостаточен, чтобы достать бананы. Однако в комнате есть стул, встав на который обезьяна может достать бананы. Какие ей надо совершить действия, чтобы достать бананы?

Задачу формализуем следующим образом. Комнату с находящимися в ней обезьянкой, стулом и бананами будем называть *предметной областью*. Совокупность мест, где находятся в данный момент в комнате обезьяна, стул и бананы, будем называть *состоянием предметной области*. Рассмотрим два предиката $P(x, y, z, s)$ и $R(s)$. Пусть

$P(x, y, z, s)$ означает, что в состоянии s обезьяна находится в точке x , стул – в y , бананы – в z ,

$R(s)$ означает, что в состоянии s обезьяна взяла бананы.

Возможности обезьяны формализуем следующим образом. Введем три функции, которые принимают значения в множестве состояний:

ИДТИ(x, y, s) – состояние, которое получится из s , если обезьяна из точки x перешла в y ,

НЕСТИ(x, y, s) – состояние, которое получится из s , если обезьяна перенесла стул из точки x в y ,

БРАТЬ(s) – состояние, которое получится из s , если обезьяна взяла бананы.

Условия задачи запишутся в виде следующих формул:

$$F_1 = (\forall x,y,z,s)[P(x, y, z, s) \rightarrow P(u, y, z, \text{ИДТИ}(x, u, s))], \quad F_2 =$$

$$(\forall x,z,s)[P(x, x, z, s) \rightarrow P(u, u, s, \text{НЕСТИ}(x, u, s))],$$

$$F_3 = (\forall x)[P(x, x, x, s) \rightarrow R(\text{БРАТЬ}(s))].$$

Пусть в начальном состоянии s_0 обезьяна находилась в точке a , стул – в точке b , бананы – в точке c . Следовательно, к написанным формулам надо добавить формулу

$$F_4 = P(a, b, c, s_0).$$

Надо показать, что формула $G = (\exists s)R(s)$ есть логическое следствие формул F_1, F_2, F_3, F_4 . Из множества формул $\{F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G\}$ получим множество дизъюнктов $D_1 - D_5$ (к дизъюнкту, полученному из $\neg G$ добавлен литерал ответа $ANS(s)$): $D_1 = \neg P(x, y, z, s) \vee P(u, y, z, \text{ИДТИ}(x, u, s))$,

$$D_2 = \neg P(x, x, z, s) \vee P(u, u, z, \text{НЕСТИ}(x, u, s)),$$

$$D_3 = \neg P(x, x, x, s) \vee R(\text{БРАТЬ}(s)),$$

$$D_4 = P(a, b, c, s_0), \quad D_5 =$$

$$\neg R(s) \vee ANS(s).$$

Последовательность дизъюнктов $D_1 - D_5$ продолжаем до вывода литерала ответа:

$$D_6 = \neg P(x, x, x, s) \vee ANS(\text{БРАТЬ}(s)) получается из } D_3 \text{ и } D_5,$$

$$D_7 = \neg P(x, x, u, s) \vee ANS(\text{БРАТЬ}(\text{НЕСТИ}(x, u, s))) получается из } D_2 \text{ и } D_6,$$

$$D_8 = \neg P(x, y, z, s) \vee ANS(\text{БРАТЬ}(\text{НЕСТИ}((y, z,$$

$$\text{ИДТИ}(x, y, s)))) получается из } D_1 \text{ и } D_7,$$

$$D_9 = ANS(\text{БРАТЬ}(\text{НЕСТИ}(b, c, \text{ИДТИ}((a, b, s_0)))) получается из } D_4 \text{ и } D_8.$$

Итак, для того, чтобы обезьяне взять бананы, надо сначала из точки a идти в точку b , затем из точки b нести стул в точку c и в точке c , встав на стул, взять бананы.

§9. Метод резолюций и логическое программирование

Наиболее распространенная в наше время технология решения задач на компьютере состоит в том, что вначале программист должен разработать алгоритм решения задачи, а затем записать его на определенном формальном языке. Эти этапы вместе с последующей отладкой требуют от программиста значительных затрат времени и достаточно высокой квалификации. На большинстве этапов решения задачи имеется сильная

зависимость от внутренних механизмов компьютера, на котором это решение будет осуществлено. Отмеченные (а также и некоторые другие) недостатки алгоритмической технологии программирования стимулировали поиск новых возможностей. Осознание того, что вычисление – частный случай логического вывода, а алгоритм – формальное задание функции, привело к идеи логического программирования. Суть этой идеи состоит в том, чтобы компьютеру предлагать не алгоритмы, а описания предметной области задачи и саму задачу в виде некоторой аксиоматической системы, а решение задачи в – виде вывода в такой системе. От программиста при таком подходе требуется описать с достаточной степенью полноты предметную область и формулировку задачи на языке этой системы, а поиск вывода, приводящего к решению задачи, поручается компьютеру.

Конечно, при таком широком понимании логического программирования, любая программная система, поддерживающая ту или иную логическую модель, представляет собой фактически и систему логического программирования. Разница может возникнуть лишь тогда, когда в инструментальной системе программист определяет в существенной степени способ обработки описания предметной области и задачи. На самом деле, логическое программирование понимается, как правило, в более узком смысле.

Логическая программа представляет собой совокупность формул логики предикатов одного из следующих видов

- (1) $p(t_1, \dots, t_k),$
- (2) $q(s_1, \dots, s_l) :- q_1(s_1, \dots, s_l), \dots, q_n(s_1, \dots, s_l),$

где $p(t_1, \dots, t_k)$, $q(s_1, \dots, s_l)$, $q_1(s_1, \dots, s_l), \dots, q_n(s_1, \dots, s_l)$ – атомарные формулы логики первого порядка, буквы t и s с индексами – термы. Синтаксис языка логического программирования требует, чтобы в конце каждого выражения ставилась точка. Формулы первого вида называются *фактами*, а второго – *правилами*. Формула $q(s_1, \dots, s_l)$ называется заголовком правила (2). Выполнение программы инициализируется запросом – формулой вида

- (3) $r_1(u_1, \dots, u_m), \dots, r_{n0}(u_1, \dots, u_m),$

где $r_j(u_1, \dots, u_m)$ ($1 \leq j \leq n_0$) – атомарные логики первого порядка, буквы u с индексами – термы.

Мы описали синтаксис основных конструкций логического программирования. Семантика обычно представляется в двух видах – логическая семантика и процедурная семантика.

Введем сначала *логическую семантику*. Каждому факту (1) поставим в соответствие формулу вида

$$(1') F = (\forall x^*) p(t_1, \dots, t_k),$$

где кванторы общности навешаны на все переменные ато-

марной формулы (1). (Кроме переменных, в термах могут быть, разумеется, константы.) Правилу (2) поставим в соответствие формулу вида

$$(2') G = (\forall x^*)[q_1(s_1, \dots, s_l) \& \dots \& q_n(s_1, \dots, s_l) \rightarrow q(s_1, \dots, s_l)],$$

где кванторы общности, как и выше, навешаны на все переменные. Запрос (3) получит в соответствие формулу

$$(3') H = (\exists x^*)[r_1(u_1, \dots, u_m) \& \dots \& r_{n0}(u_1, \dots, u_m)],$$

где квантор существования связывает все переменные. Пусть F_1, \dots, F_a – формулы, соответствующие всем фактам, G_1, \dots, G_b – всем правилам. Тогда значение пары (программа, запрос) в логической семантике есть утверждение о том, что формула H есть логическое следствие формул $F_1, \dots, F_a, G_1, \dots, G_b$.

Операционная семантика – действия компьютера при ответе на запрос. Введем ее на примере следующей программы.

- (1) $r(a, b).$,
- (2) $q(b, g(c)).$,
- (3) $p(x, f(y)) :- r(x, z), q(z, f(y)).$,
- (4) $p(x, f(y)) :- r(x, z), q(z, g(y)).$,
- (5) $r(x, z) :- q(f(x), g(z)).$

(Здесь a, b, c, d – константы, x, y, z – переменные.) Номера в скобках не являются синтаксической конструкцией логического программирования, они проставлены для удобства ссылок.

Предположим, что запрос есть

$$(6) p(u, f(v)).$$

При вычислении ответа на этот запрос, интерпретатор формулирует цель $p(u, f(v))$ и пытается достичь ее, унифицируя цель с фактами. В нашем случае цель $p(u, f(v))$ не унифицируется ни с одним из фактов. Тогда интерпретатор пытается ее унифицировать с заголовком одного из правил. Это можно сделать с заголовком правила (3) с помощью подстановки $\sigma = (u = x, v = y)$. Запрос (6) принимает следующий вид

$$(6') r(x, z), q(z, f(y))$$

и формируется цель $r(x, z)$. Она достигается унификацией с первым фактом подстановкой $\sigma_1 = (x = a, z = b)$ и интерпретатор пытается достичь цели $q(b, f(y))$, но эта цель не унифицируется ни с одним из фактов, ни с заголовками правил. Следовательно, цель $q(b, f(y))$ недостижима и происходит возврат к запросу (6') и цели $r(x, z)$. Делается попытка достичь этой цели при помощи правила (5), но эта попытка также неудачна. Происходит возврат к запросу (6) и цели $p(u, f(v))$. (См. рис.4.9, где цели подчеркнуты.)

Правило (3) “отработано”. Интерпретатор унифицирует цель с заголовком правила (4) той же подстановкой σ . Запрос принимает вид

(6'') $r(x, z), q(z, g(y)),$

а целью становится $r(x, z)$. Цель унифицируется с первым фактом подстановкой σ_1 и ставится новая цель $q(b, g(y))$, которая унифицируется со вторым фактом подстановкой $\sigma_2 = (y = c)$. Исходная цель оказалась достижимой при результирующей подстановке $\sigma_3 = (u = a, v = c)$. Интерпретатор при этом может закончить работу и выдать подстановку σ_3 . Возможен и другой режим работы интерпретатора, при котором он пытается найти все подстановки, ведущие к достижению цели.

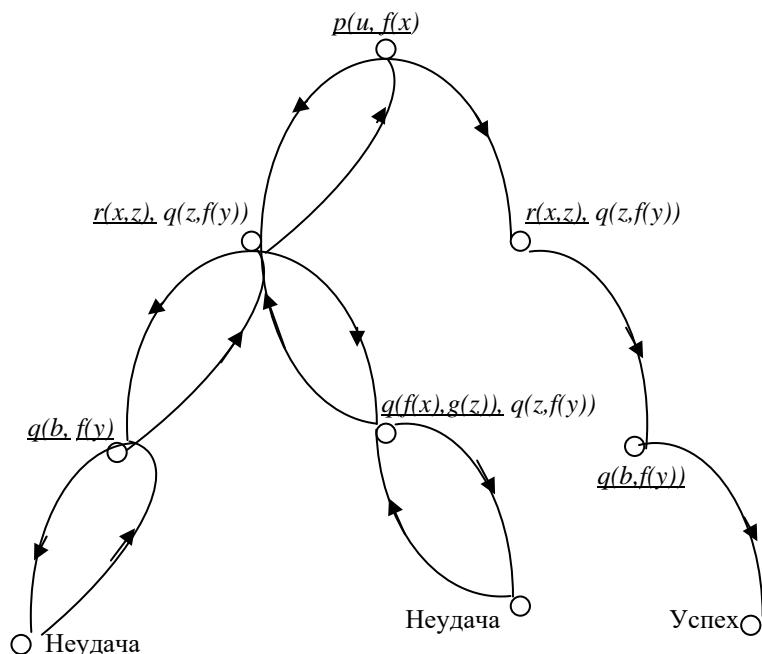


Рис. 4.9

Убедимся в том, что интерпретатор при поиске ответа на запрос фактически строит вывод с помощью правила резолюций.

Логическая семантика программе (1) – (5) ставит в соответствие следующие формулы:

$$F_1 = r(a, b),$$

$$F_2 = q(b, g(c)),$$

$$G_1 = (\forall x, y, z)[r(x, z) \& q(z, f(y)) \rightarrow p(x, f(y))],$$

$$G_2 = (\forall x, y, z)[r(x, z) \& q(z, g(y)) \rightarrow p(x, f(y))], G_3 =$$

$(\forall x, z)[q(f(x), g(z)) \rightarrow r(x, z)]$, а запросу (6) – формулу $H = (\exists u, v)p(u, f(v))$.

Эта семантика, напомним, состоит в том, что H есть логическое следствие множества формул $\{F_1, F_2, G_1, G_2, G_3\}$.

Как будет применяться в этой ситуации метод резолюций? Вначале будет составлено множество формул $T = \{F_1, F_2, G_1, G_2, G_3, \neg H\}$. Затем каждая из формул множества T будет приведена к сколемовской нормальной форме, из которой будет получено множество дизъюнктов S . В нашем случае множество S состоит из дизъюнктов $D_1 - D_6$:

$$\begin{aligned}D_1 &= r(a, b), \\D_2 &= q(b, g(c)), \\D_3 &= \neg r(x, z) \vee \neg q(z, f(g)) \vee p(x, f(y)), \\D_4 &= \neg r(x, z) \vee \neg q(z, g(y)) \vee p(x, f(y)), \\D_5 &= \neg q(f(x), g(z)) \vee r(x, z), D_6 = \\&\quad \neg p(u, f(v)).\end{aligned}$$

Отметим, что дизъюнкт D_6 получился из формулы $\neg H$.

Вывод пустого дизъюнкта будем осуществлять в соответствии с процедурной семантикой. Правило резолюций будет применяться так, что одним из исходных (для правила) дизъюнктов будет дизъюнкт D_6 или его потомки. Попытка получить пустой дизъюнкт за один шаг, т.е. правило резолюций применить к паре $\{D_1, D_6\}$ или $\{D_2, D_6\}$, не приводит к успеху. Применим тогда правило резолюций к паре $\{D_3, D_6\}$, получим резольвенту $D_7 = \neg r(x, z) \vee \neg q(z, f(y))$

с помощью подстановки $\sigma = (u = x, v = y)$. Попробуем теперь в D_7 “уничтожить” литерал $\neg r(x, z)$. Это можно сделать с помощью дизъюнктов D_1 и D_5 . Резольвентой дизъюнктов D_1 и D_7 будет дизъюнкт

$$D_8 = \neg q(b, f(y)),$$

единственный литерал, которого нельзя “уничтожить” ни одним из дизъюнктов $D_1 - D_5$. То же самое можно сказать и о резольвенте дизъюнктов D_5 и D_7 .

Мы фактически доказали, что из множества дизъюнктов $\{D_1, \dots, D_5, D_7\}$ пустой дизъюнкт невыводим (см. пути в графе на рис. 4.9, приводящие к неудаче).

Возьмем теперь резольвенту дизъюнктов D_4 и D_6 :

$$D_9 = \neg r(x, z) \vee \neg q(z, g(y)).$$

Литерал $\neg r(x, z)$ дизъюнкта D_9 “уничтожим” с помощью D_1 и подстановки $\sigma_1 = (x = a, z = b)$, получим дизъюнкт

$$D_{10} = \neg q(b, g(y)).$$

Резольвента дизъюнктов D_2 и D_{10} дает пустой дизъюнкт, при этом используется подстановка $\sigma_2 = (y = c)$. Мы получили вывод пустого дизъюнкта из множества дизъюнктов $\{D_1, \dots, D_6\}$ (см. путь в графе на рис. 4.9, приводящий к успеху).

Итак, интерпретатор при поиске ответа на запрос строит резолютивный вывод.

Задачи

7. Найти H_0, H_1, H_2 (см. §4), если

- a) $S = \{P(f(x), a), \neg P(y, g(x))\},$
- б) $S = \{P(a, g(x)), P(u, b)\},$
- в) $S = \{P(x, y), P(h(u, v), z)\}.$

8. Построить замкнутое семантическое дерево, если

- a) $S_1 = \{P, \neg P \vee Q, \neg Q\},$
- б) $S_2 = \{P(x), \neg P(f(y))\},$
- в) $S_3 = \{P, Q \vee R, \neg P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg R\}.$

9. Найти невыполнимое множество $S_i^/$ основных примеров дизъюнктов множества S_i ($1 \leq i \leq 3$), если

- a) $S_1 = \{P(x, a, g(x,b)), \neg P(f(y), z, g(f(a),b))\},$
- б) $S_2 = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y), \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y), D(b), Q(b)\},$
- в) $S_3 = \{\neg K(x,y) \vee \neg L(y) \vee M(f(x)), \neg K(x,y) \vee \neg L(y) \vee M(z), \neg M(z), K(a, b), L(b)\}.$

10. Доказать с помощью метода резолюций, что формула G есть логическое следствие формул F_1, \dots, F_k :

- a) $F_1 = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x) \& R(x)), F_2 = (\exists x)(P(x) \& T(x)), G = (\exists x)(R(x) \& T(x)),$
- б) $F_1 = (\forall x)[(\exists y)(M(y) \& S(x, y)) \rightarrow (\exists z)(I(z) \& E(x,z))], G = \neg(\exists x)I(x) \rightarrow (\forall u)(\forall v)(S(u, v) \rightarrow \neg M(v)).$
- в) $F_1 = (\forall x)[P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& S(x, y))], F_2 = (\exists x)[R(x) \vee (\forall y)\neg(\neg Q(y) \rightarrow S(x, y))], F_3 = (\exists x)P(x), G = (\exists x)(\neg P(x) \vee R(x)).$

11. Используя метод резолюций в логике предикатов, докажите логичность следующих рассуждений.

11.1. Все студенты нашей группы – члены клуба “Спартак”. А каждый член клуба “Спартак” занимается спортом. Следовательно, все студенты нашей группы занимаются спортом.

11.2. Все студенты нашей группы – болельщики “Спартака”, а некоторые занимаются спортом. Следовательно, некоторые из болельщиков “Спартака” занимаются спортом.

11.3. Некоторые пациенты уважают всех докторов. Ни один пациент не уважает знахаря. Следовательно, никакой доктор не является знахарем.

11.4. Если деталь обрабатывалась на токарном станке, то она обрабатывалась и на фрезерном. Деталь $D1$ обрабатывалась на токарном станке $C1$. Следовательно, она обрабатывалась на фрезерном станке.

12. Будут ли логичны следующие рассуждения? Если логичны, то доказать это методом резолюций. Если нет, то построить интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

12.1. Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и любой математик может ее решить. Олег – математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не сможет решить никто.

12.2. Всякий, кто может решить эту задачу – математик. Олег – математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не может решить никто.

12.3. Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и какой-нибудь математик может ее решить. Олег – математик, но не может решить задачу. Следовательно, задачу не может решить никто.

12.4. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми спортсменами института. Ни один первокурсник не знаком ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подледного лова.

12.5. Каждый из первокурсников знаком с кем-либо из спортсменов. Некоторые из первокурсников не знакомы ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подледного лова.

Ответы, указания и решения

1. Приведем решение задачи 1д). Рассмотрим множество $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$. Каждую из формул этого множества приведем к КНФ, получим соответственно $\neg X \vee \neg Y$, $\neg X \vee Y \vee Z$, $X \& \neg Z$. Тогда S равно $\{\neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Y \vee Z, X, \neg Z\}$, а вывод пустого дизъюнкта есть $\neg X \vee \neg Y, X, \neg Y, \neg X \vee Y \vee Z, \neg X \vee Z, Z, \neg Z$.

2. Приведем решение задачи 2.1. Рассмотрим высказывания: X = "конгресс отказывается принять законы", Y = "забастовка не будет закончена", Z = "забастовка длится более месяца", U = "президент фирмы уйдет в отставку". Тогда предложения рассуждения 2.1 можно представить формулами $F_1 = X \rightarrow Y \vee (Z \& U)$, $F_2 = X \& \neg Y$, $G = Z$. Сформируем множество $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$, каждую из формул приведем к КНФ и получим множество дизъюнктов $S = \{\neg X \vee Y \vee Z, \neg X \vee Y \vee U, X, \neg Y, \neg Z\}$. Легко видеть, что из S выводим . Следовательно рассуждение логично.

В задачах 2.4 и 2.5 рассуждение логично, а в задачах 2.2 и 2.3 – нелогично.

4. Указание. Воспользоваться алгоритмом унификации.

5. Дизъюнкт 5а) имеет склейку, остальные не имеют.

6. Дизъюнкты в задаче 6б) не имеют резольвент, в задаче 6а) дизъюнкты имеют одну резольвенту $Q(a, b)$, в задаче 6в) – пять

$$\neg P(a) \vee \neg Q(y, f(b)) \vee Q(c, f(v)), \quad \neg P(x) \vee \neg Q(y, f(b)) \vee Q(c, f(v)), \\ \neg P(x) \vee \neg P(a) \vee P(u), \neg Q(y, f(b)) \vee Q(c, f(v)), \neg P(a) \vee P(u).$$

7. В задаче 7б) $H_0 = \{a, b\}$, $H_1 = \{a, b, g(a), g(b)\}$, $H_2 = \{a, b, g(a), g(b), g(g(a)), g(g(b))\}$.

9. На рис. 4.9 изображены семантические деревья для S_1 , на рис. 4.11 – для S_3 . На рис. 4.10 изображено семантическое дерево для S_2 . (Эти множества дизъюнктов имеют и другие семантические деревья.)

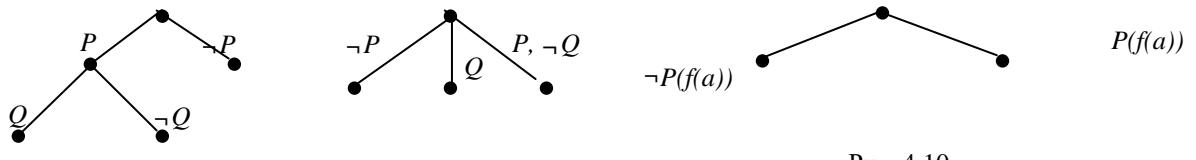


Рис. 4.10

Рис. 4.9

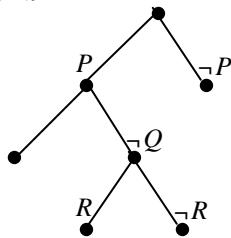
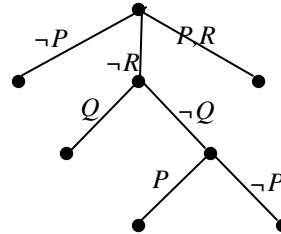


Рис. 4.11



9. Невыполнимое множество основных примеров есть
 $S_1' = \{P(f(a), a, g(f(a), b)), \neg P(f(a), a, g(f(a), b))\},$
 $S_2' = \{P(a), \neg D(b) \vee L(a, b), \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg L(a, b), D(b), Q(b)\},$
 $S_3' = \{\neg K(a, b) \vee \neg L(b) \vee M(f(a)), \neg M(f(a)), K(a, b), L(b)\}.$

10. Приведем решение задачи 10в). Составим множество $\{F_1, F_2, F_3, \neg G\}$. Каждую из формул приведем к сколемовской нормальной форме. Получим соответственно формулы

$$H_1 = (\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(f(x)) \& (\neg P(x) \vee S(x, f(x)))], \\ H_2 = (\forall y)[(R(a) \vee \neg Q(y)) \& (R(a) \vee \neg S(a, y))], \\ H_3 = P(b), \\ H_4 = (\forall x)(P(x) \& \neg R(x)).$$

Множество S будет состоять из семи дизъюнктов: $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x)), \neg P(x) \vee S(x, f(x)), R(a) \vee \neg Q(y), R(a) \vee \neg S(a, y), P(b), P(x), \neg R(x)\}$. Выводом пустого дизъюнкта будет последовательность $D_1 = \neg P(x) \vee Q(f(x)), D_2 = P(x),$

$D_3 = Q(f(x))$, $D_4 = \neg R(x)$, $D_5 = R(a) \vee \neg Q(y)$, $D_6 = \neg Q(y)$, $D_7 = \square$. Отметим, что D_3 следует по правилу резолюций из D_1 , D_2 , D_6 – из D_4 и D_5 , а D_7 – из D_3 и D_6 . Дизъюнкты D_1 , D_2 , D_4 , D_5 принадлежат S .

11. Приведем решение задачи 11.2. Пусть символы одноместных предикатов F , G и S интерпретируются следующим образом

$F(x)$: “ x – болельщик “Спартака”, $G(x)$: “ x – студент нашей группы”, $S(x)$: “ x – спортсмен”.

Тогда рассуждение 11.2 можно представить формулами: $F = (\forall x)(G(x) \rightarrow F(x)) \& (\exists y)(G(y) \& S(y))$, $G = (\exists x)(F(x) \& S(x))$.

Составим множество формул $\{F, \neg G\}$ и каждую из них приведем к сколемовской нормальной форме. Получим формулы

$$H_1 = (\forall x)(\neg G(x) \vee F(x)) \& G(a) \& S(a) \quad H_2 = \\ (\forall x)(\neg F(x) \vee \neg S(x)).$$

Множество дизъюнктов S равно $\{\neg G(x) \vee F(x), \neg F(x) \vee \neg S(x), G(a), S(a)\}$. Пустой дизъюнкт из множества S выводится очевидным образом.

12. Рассуждения 12.1, 12.4 логичны, остальные рассуждения нелогичны.