§2. Подстановка и унификация

Рассмотрим метод резолюций в логике первого порядка. Относительно переменных в дизъюнктах будем предполагать, что они связаны кванторами общности, но сами кванторы писать не будем. Отсюда следует, что две одинаковые переменные в разных дизъюнктах можно считать различными.

Заметим, прежде всего, что в логике первого порядка правило резолюций в прежнем виде уже не годится. Действительно, множество дизъюнктов $S = \{P(x), \neg P(a)\}$ невыполнимо (так как предполагается, что переменная x связана квантором общности). В то же время, если использовать правило резолюций для логики высказываний, то из S пустого дизъюнкта не получить. Содержательно понятно, что именно в этом случае надо сделать. Поскольку дизъюнкт $P(x)$ можно прочитать “для любого x истинно $P(x)$”, ясно, что $P(x)$ истинно будет и для $x = a$. Сделав подстановку x = a, получим множество дизъюнктов $S^{/} = \{P(a), \neg P(a)\}$. Множества S и $S^{/}$ одновременно выполнимы или невыполнимы. Но из $S^{/}$ пустой дизъюнкт с помощью прежнего правила резолюций выводится тривиальным образом. Этот пример подсказывает, что в логике первого порядка правило резолюций надо дополнить возможностью делать подстановку.

Дадим необходимые определения.

Определение. *Подстановкой* называется множество равенств

$$\sigma = \{x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n\},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные переменные, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, причем терм t_i не содержит переменной x_i ($1 \le i \le n$).

Если $\sigma = (x_1 = t_1, ..., x_n = t_n)$ – подстановка, а F − дизъюнкт, то через $\sigma(F)$ будем обозначать дизъюнкт, полученный из F *одновременной* заменой x_1 на t_1, x_2на t_2 и т.д. x_n на t_n. Например, если $\sigma = \{ x_1 = f(x_2), x_2 = c, x_3 = g(x_4) \}$, $F = R(x_1, x_2, x_3) \vee \neg P(f(x_2))$, то $\sigma(F) = R(f(x_2), c, g(x_4)) \vee \neg P(f(c))$. Аналогично определяется действие подстановки на терм.

Для удобства введем еще и *пустую подстановку* – подстановку, не содержащую равенств. Пустую подстановку будем обозначать через ε.

Определение. Пусть $\{E_1, \ldots, E_k\}$ − множество литералов или множество термов. Подстановка σ называется *унификатором* этого множества, если $\sigma(E_1) = \sigma(E_2) = \ldots = \sigma(E_k)$. Множество *унифицируемо*, если существует унификатор этого множества.

Например, множество атомарных формул

$$\{Q(a, x, f(x)), Q(u, y, z)\}$$

унифицируемо подстановкой $\{u = a, x = y, z = f(y)\}$, а множество

$$\{R(x, f(x)), R(u, u)\}$$

не унифицируемо. Действительно, если заменить x на u, то получим множество

$$\{R(u, f(u)), R(u, u)\}.$$

Проводить же замену $u = f(u)$ запрещено определением подстановки, да и бесполезно, т.к. она приводит к формулам $R(f(u), f(f(u)))$ и $R(f(u), f(u))$, которые тоже различны.

Если множество унифицируемо, то существует, как правило, не один унификатор этого множества, а несколько. Среди всех унификаторов данного множества выделяют так называемый наиболее общий унификатор.

Дадим необходимые определения.

Определение. Пусть $\xi = \{x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_k = t_k\}$ и $\eta = \{y_1 = s_1, y_2 = s_2, \ldots, y_l = s_l\}$ – две подстановки. Тогда *произведением* подстановок ξ и η называется подстановка, которая получается из последовательности равенств

$$\{x_1 = \eta(t_1), x_2 = \eta(t_2), \ldots, x_k = \eta(t_k),$$
$$y_1 = s_1, y_2 = s_2, \ldots, y_l = s_l\} \qquad (4)$$

вычеркиванием равенств вида $x_i = x_i$ для $1\le i\le k$, $y_j = s_j$, если $y_j \in \{x_1, \ldots, x_k\}$, для $1\le j\le l$.

Произведение подстановок ξ и η будем обозначать через $\xi\circ\eta$. Подчеркнем, что сначала действует ξ, а потом η.

Пример 2. Рассмотрим пример. Пусть $\xi = \{x = f(y), z = y, u = g(d)\}$, $\eta = \{x = c, y = z\}$. Тогда последовательность равенств (4) из определения произведения имеет вид $\{x = f(z), z = z,$
$u= g(d), x = c, y = z\}$.

В этой последовательности вычеркнем второе и четвертое равенство получим произведение

$$\xi\circ\eta = \{x = f(z), u = g(d), y = z\}.$$

Нетрудно показать, что произведение подстановок ассоциативно, т.е. для любых подстановок ξ, η, ξ выполняется равенство $\xi\circ(\eta\circ\zeta) = (\xi\circ\eta)\circ\zeta$, и что пустая подстановка является нейтральным элементом относительно умножения. Последнее означает выполнение равенств $\sigma\circ\varepsilon = \varepsilon\circ\sigma = \sigma$ для любой подстановки σ.

Произведение подстановок $\sigma = \{x_1 = t_1\}\circ\{x_2 = t_2\}\circ\ldots\circ\{x_n = t_n\}$ мы будем иногда задавать последовательностью равенств: $\sigma = (x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n)$. Действие подстановки σ на дизъюнкт (и на терм) в этом случае состоит в *последовательной* (а не одновременной) замене x_1 на t_1, x_2 на t_2, и т.д., x_n на t_n.

Определение. Унификатор σ множества литералов или термов называется *наиболее общим унификатором* этого множества, если для любого унификатора τ того же множества литералов существует подстановка ξ такая, что $\tau = \sigma \circ \xi$.

Например, для множества $\{P(x, f(\mathrm{a}), g(z)), P(f(b), y, v)\}$ наиболее общим унификатором является подстановка $\sigma = \{x = f(b), y = f(a), \ v = g(z)\}$. Если в качестве τ взять унификатор $\{x = f(b), y = f(a), z = c, v = g(c)\}$, то $\xi = \{z = c\}$.

Если множество литералов унифицируемо, то наиболее общий унификатор существует. Это утверждение мы докажем в конце параграфа. А сейчас приведем алгоритм нахождения наиболее общего унификатора. Алгоритм называется *алгоритмом унификации*. Для изложения алгоритма потребуется понятие множества рассогласований.

Определение. Пусть M – множество литералов (или термов). Выделим первую слева позицию, в которой не для всех литералов (или термов) стоит один и тот же символ. Затем в каждом литерале выпишем выражение, которое начинается символом, занимающим эту позицию. (Этими выражениями могут быть сам литерал, атомарная формула или терм.) Множество полученных выражений называется *множеством рассогласований* в M.

Например, если $M = \{P(x, f(y), a), P(x, u, g(y)), P(x, c, v)\}$, то первая слева позиция, в которой не все литералы имеют один и тот же символ – пятая позиция. Множество рассогласований состоит из термов $f(y)$, u, c. Множество рассогласований $\{P(x, y), \neg P(a, g(z))\}$ есть само множество. Если $M = \{\neg P(x, y), \neg Q(a, v)\}$, то множество рассогласований равно $\{P(x, y), Q(a, v)\}$.

Алгоритм унификации

Шаг 1. Положить $k = 0$, $M_k = M$, $\sigma_k = \varepsilon$.

Шаг 2. Если множество M_k состоит из одного литерала, то выдать σ_k в качестве наиболее общего унификатора и завершить работу. В противном случае найти множество N_k рассогласований в M_k.

Шаг 3. Если в множестве N_k существует переменная v_k и терм t_k, не содержащий v_k, то перейти к шагу 4, иначе выдать сообщение о том, что множество M неунифицируемо и завершить работу.

Шаг 4. Положить $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \{v_k = t_k\}$ (подстановка σ_{k+1} получается из σ_k заменой v_k на t_k и, возможно, добавлением равенства $v_k = t_k$). В множестве M_k выполнить замену $v_k = t_k$, полученное множество литералов взять в качестве M_{k+1}. *Шаг 5.* Положить $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Пусть $M = \{P(x, f(y)), P(a, u)\}$. Проиллюстрируем работу алгоритма унификации на множестве M. На первом проходе алгоритма будет найдена подстановка $\sigma_1 = \{x = a\}$, так как множество рассогласований N_0 равно $\{x,$

$a\}$. Множество M_1 будет равно $\{P(a,\ f(y)),\ P(a,\ u)\}$. На втором проходе алгоритма подстановка будет расширена до $\sigma_2 = \{x = a, u = f(y)\}$ и $M_2 = \{P(a, f(u))\}$. Так как M_2 состоит из одного литерала, то алгоритм закончит работу и выдаст σ_2.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $M = \{P(x, f(y)), P(a, b)\}$. На первом проходе алгоритма будет найдена подстановка $\sigma_1 = \{x = a\}$ и $M_1 = \{P(a, f(y)), P(a, b)\}$. На третьем шаге второго прохода будет выдано сообщение о том, что множество M неунифицируемо, так как множество рассогласования $N_1 = \{f(y), a\}$ не содержит переменной.

Отметим, что при выполнении шага 4 из множества M_k удаляется одна из переменных (переменная v_k), а новая переменная не возникает. Это означает, что алгоритм унификации всегда заканчивает работу, так как шаг 4 не может выполняться бесконечно. Довольно ясно, что если алгоритм заканчивает работу на шаге 3, то множество M неунифицируемо. Также понятно, что если алгоритм заканчивает работу на шаге 2, то σ_k − унификатор множества M. А вот то, что σ_k – наиболее общий унификатор, доказать не так-то просто. Тем не менее, сделаем это.

Теорема 4.2. Пусть M – конечное непустое множество литералов. Если M унифицируемо, то алгоритм унификации заканчивает работу на шаге 2 и выдаваемая алгоритмом подстановка σ_k является наиболее общим унификатором множества M.

Доказательство. Пусть τ – некоторый унификатор множества M. Индукцией по k докажем существование подстановки α_k такой, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$.

База индукции: $k = 0$. Тогда $\sigma_k = \varepsilon$ и в качестве α_k можно взять τ.

Шаг индукции. Предположим, что для всех значений k, удовлетворяющих неравенству $0 \le k \le l$, существует подстановка α_k такая, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$.

Если $\sigma_l(M)$ содержит один литерал, то на следующем проходе алгоритм остановится на шаге 2. Тогда σ_l будет наиболее общим унификатором, поскольку $\tau = \sigma_l \circ \alpha_l$.

Пусть $\sigma_l(M)$ содержит более одного литерала. Тогда алгоритм унификации найдет множество рассогласований N_l. Подстановка α_l должна унифицировать множество N_l, поскольку $\tau = \sigma_l \circ \alpha_l$ – унификатор множества M. Поскольку N_l − унифицируемое множество рассогласований, оно содержит (хотя бы одну) переменную v.

Обозначим буквой t терм из N_l, отличный от v. Множество N_l унифицируется подстановкой α_l, поэтому $\alpha_l(v) = \alpha_l(t)$. Отсюда следует, что t не содержит v. Можно считать, что на шаге 4 алгоритма для получения

σ_{l+1} использовано равенство $v = t$, т.е. $\sigma_{l+1} = \sigma_l \circ \{v = t\}$. Из равенства $\alpha_l(v) = \alpha_l(t)$ следует, что α_l содержит равенство $v = \alpha_l(t)$.

Пусть $\alpha_{l+1} = \alpha_l \backslash \{v = \alpha_l(t)\}$. Тогда $\alpha_{l+1}(t) = \alpha_l(t)$, так как t не содержит v. Далее, имеем равенства

$$\{v = t\} \circ \alpha_{l+1} = \alpha_{l+1} \cup \{v = \alpha_{l+1}(t)\} = \alpha_{l+1} \cup \{v = \alpha_l(t)\} = \alpha_l.$$

Это означает, что $\alpha_l = \{v = t\} \circ \alpha_{l+1}$. Следовательно, $\tau = \sigma_l \circ \alpha_l =$

$$\sigma_{l+1} \circ \{v = t\} \circ \alpha_l = \sigma_{l+1} \circ \alpha_{l+1}.$$

Итак, для любого k существует подстановка α_k такая, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$. Так как множество M унифицируемо, то алгоритм должен закончить работу на шаге 2. Тогда последняя подстановка σ_k будет унификатором множества M, поскольку множество $\sigma_k(M)$ состоит из одного литерала. Более того, σ_k будет наиболее общим унификатором, так как для произвольного унификатора τ существует подстановка σ_k такая, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$.

§3. Метод резолюций в логике первого порядка

Определение. *Правилом резолюций в логике предикатов* называется следующее правило: из дизъюнктов $\neg P(t_1, ..., t_n) \vee F$ и $P(s_1, ..., s_n) \vee G$ выводим дизъюнкт $\sigma(F) \vee \sigma(G)$, где σ − наиболее общий унификатор множества

$$\{P(t_1, ..., t_n), P(s_1, ..., s_n)\}.$$

Дизъюнкт $\sigma(F) \vee \sigma(G)$ называется *бинарной резольвентой* первых двух дизъюнктов, а литералы $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$ и $P(s_1, \ldots, s_n)$ *отрезаемыми* литералами.

Например, с помощью правила резолюций из дизъюнктов $\neg Q(a, f(x)) \vee R(x)$ и $Q(u, z) \vee \neg P(z)$ можно вывести дизъюнкт $R(x) \vee \neg P(f(x))$, используя подстановку $\sigma = \{u = a, z = f(x)\}$.

В отличие от логики высказываний, в логике предикатов нам понадобится еще одно правило.

Определение. *Правилом склейки в логике предикатов* называется следующее правило: из дизъюнкта $\Diamond P(t_1, ..., t_n) \vee ... \vee \Diamond P(s_1, ..., s_n) \vee F$ выводим дизъюнкт $\sigma(\Diamond P(t_1, ..., t_n)) \vee \sigma(F)$, где σ − наиболее общий унификатор множества $\{P(t_1, ..., t_n), ..., P(s_1, ..., s_n)\}$, $\Diamond$ − знак отрицания или его отсутствие. Дизъюнкт $\sigma(\Diamond P(t_1, \ldots, t_n)) \vee \sigma(F)$ называется *склейкой* исходного дизъюнкта. (Отметим, что если знак отрицания стоит перед одной из записанных выше атомарных формул, то он стоит и перед другими.)

Например, правило склейки, примененное к дизъюнкту

$$\neg \mathrm{P}(x, y) \vee \neg P(y, x) \vee \neg \mathrm{P}(a, a) \vee Q(x, y, v),$$

дает дизъюнкт

$$\neg P(a, a) \vee Q(a, a, v).$$

Определение вывода в логике первого порядка немного отличается от аналогичного определения в логике высказываний.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов. *Выводом из множества дизъюнктов S* называется последовательность дизъюнктов

$$D_1, D_2, \ldots, D_n$$

такая, что каждый дизъюнкт D_i принадлежит S, выводим из предыдущих дизъюнктов по правилу резолюций или выводим из предыдущего по правилу склейки.

Как и в логике высказываний, дизъюнкт D выводим из S, если существует вывод из S, последним дизъюнктом которого является D.

Пример 1. Приведем пример. Пусть $S = \{\neg B(x) \vee \neg C(x) \vee T(f(x)), C(y) \vee T(f(z)), B(a)\}$. Тогда последовательность

$$D_1 = \neg B(x) \vee \neg C(x) \vee T(f(x)), \qquad D_2 = C(y) \vee T(f(z)),$$

$$D_3 = \neg B(x) \vee T(f(x)) \vee T(f(z)), \qquad D_4 = \neg B(x) \vee T(f(x)),$$

$$D_5 = B(a), \qquad D_6 = T(f(a))$$

является выводом из S. Отметим, что D_1, D_2, $D_5 \in S$, дизъюнкт D_3 выводим из D_1 и D_2 по правилу резолюций, дизъюнкт D_6 выводим из D_4 и D_5 по тому же правилу, а D_4 выводим из D_3 по правилу склейки.

Как и в логике высказываний, в логике первого порядка есть утверждение, называемое теоремой о полноте. Это утверждение фактически совпадает с формулировкой теоремы 4.1. Тем не менее, приведем его.

Теорема 4.3. Множество дизъюнктов S логики первого порядка невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.

Теорема имеет довольно сложное доказательство. Оно будет приведено в §6. В данном же параграфе мы ограничимся примером применения метода резолюций и рядом определений, необходимых для доказательства теоремы 4.3.

Для доказательства логичности следствия формулы G из формул F_1, …, F_k метод резолюций в логике предикатов применяется почти так же, как и в логике высказываний. А именно, сначала составляется множество формул $T = \{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}$. Затем каждая из формул этого множества приводится к сколемовской нормальной форме, в полученных формах зачеркиваются кванторы общности и связки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов S. На последнем этапе находится вывод пустого дизъюнкта из множества S. Напомним, что все переменные в дизъюнктах предполагаются связанными кванторами общности. Это означает, что *метод резолюций для доказательства логичности может применяться лишь в случае, когда формулы* F_1, …, F_k и G *не имеют свободных* *переменных.* Если все же формулы содержат свободные переменные, то их надо заменить константами (такими, которые отсутствуют в этих формулах).

Пример 2. Рассмотрим пример. Пусть

$$F_1 = (\exists x)[П(x) \mathbin{\&} (\forall y)(C(y) \to З(x, y))],$$
$$F_2 = (\forall x)(\forall y)[П(x) \mathbin{\&} Л(y) \to \neg З(x, y)],$$
$$G = (\forall x)(C(x) \to \neg Л(x)).$$

Докажем, что формула G является логическим следствием множества формул F_1, F_2. Для этого достаточно доказать невыполнимость множества Т = $\{F_1, F_2, \neg G\}$. Каждую из формул множества Т приведем к сколемовской нормальной форме; получим формулы

$$(\forall y)[П(a) \mathbin{\&} (\neg C(y) \vee З(a, y))],$$
$$(\forall x)(\forall y)[\neg П(x) \vee \neg Л(y) \vee \neg З(x, y)],$$
$$C(b) \mathbin{\&} Л(b).$$

Тогда множество S будет содержать дизъюнкты: $D_1 = П(a)$, $D_2 = \neg C(y) \vee З(a, y)$, $D_3 = \neg П(x) \vee \neg Л(y) \vee \neg З(x, y)$, $D_4 = Cb)$, $D_5 = Л(b)$. А последовательность дизъюнктов D_1, D_3, $\neg Л(y) \vee \neg З(a, y)$, D_5, $\neg З(a, b)$, D_2, D_4, $З(a, b)$, □ будет выводом из S. Следовательно, формула G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

Введем теперь ряд определений, необходимых для рассмотрений в следующих параграфах.

Напомним, что мы условились не писать в дизъюнктах повторяющиеся литералы. Это позволяет нам смотреть, если это необходимо, на дизъюнкт как на множество литералов. Если смотреть на дизъюнкт как на множество литералов, то результат применения правила резолюций к дизъюнктам D_1 и D_2 с отрезаемыми литералами L_1 и L_2 можно записать так

$$D = [\sigma(D_1)–\sigma(L_1)] \cup [\sigma(D_2)–\sigma(L_2)],$$

где σ − наиболее общий унификатор L_1 и $\neg L_2$.

Определение. *Резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 называется одна из следующих бинарных резольвент:

1) бинарная резольвента дизъюнктов D_1 и D_2,
2) бинарная резольвента склейки D_1 и дизъюнкта D_2,
3) бинарная резольвента дизъюнкта D_1 и склейки D_2,
4) бинарная резольвента склейки D_1 и склейки D_2.

Пример 3. Пусть $D_1 = \neg P(y) \vee \neg P(g(x)) \vee R(f(y))$, $D_2 =$

$P(g(a)) \vee Q(b)$. Склейка дизъюнкта D_1 есть дизъюнкт $D_1^/ = \neg P(g(x)) \vee R(f(g(x)))$. Бинарная резольвента $D_1^/$ и D_2 равна $R(f(g(a))) \vee Q(b)$. Следовательно, последний дизъюнкт есть резольвента дизъюнктов D_1 и D_2.

Определение. Если D – дизъюнкт, а σ – подстановка, то дизъюнкт $\sigma(D)$ называется *примером дизъюнкта* D.

Следующее утверждение часто называют *леммой о подъеме*.

Теорема 4.4. Если $D_1^/$ – пример дизъюнкта D_1, $D_2^/$ – пример дизъюнкта D_2, а $D^/$ – резольвента $D_1^/$ и $D_2^/$, то существует резольвента D дизъюнктов D_1 и D_2 такая, что $D^/$ – пример D.

Доказательство. Если D_1 и D_2 имеют общие переменные, то заменой переменных в одном из дизъюнктов можно добиться того, что переменные дизъюнкта D_1 отличны от переменных дизъюнкта D_2. Будем поэтому считать, что D_1 и D_2 не имеют общих переменных.

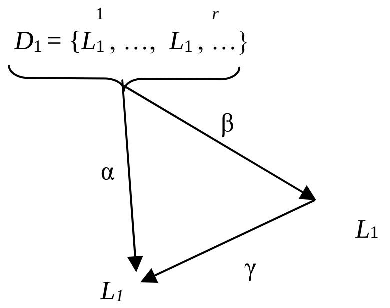
Так как $D_1^/$ – пример D_1 и $D_2^/$ – пример D_2, существуют подстановки α_1 и α_2 такие, что $D_1^/ = \alpha_1(D_1)$ $D_2^/ = \alpha_2(D_2)$. Последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ также будет подстановкой, и поскольку D_1 и D_2 не имеют общих переменных, имеем $D_1^/ = \alpha(D_1)$ и $D_2^/ = \alpha(D_2)$.

Дизъюнкт $D^/$ является резольвентой дизъюнктов $D_1^/$ и $D_2^/$. Это означает, что существуют литералы $L_1^/ \in D_1^/$ и $L_2^/ \in D_2^/$ и подстановка τ такие, что τ есть наиболее общий унификатор
$L_1^/$ и $\neg L_2^/$ и

$$D^/ = (\tau(D_1^/) – \tau(L_1^/)) \cup (\tau(D_2^/) – \tau(L_2^/)). \qquad (1)$$

(Если при получении резольвенты $D^/$ к дизъюнктам $D_1^/$ и $D_2^/$ применялись склейки, то будем считать, что они учтены подстановками α_1 и α_2.)

Пусть $L_1^1, \ldots, L_1^r$ – литералы дизъюнкта D_1, которые подстановкой α переводятся $L_1^/$, а $L_2^1, \ldots, L_2^s$ – литералы дизъюнкта D_2, которые подстановкой α переводятся в $L_2^/$. Литералы $L_1^1, \ldots, L_1^r$, следовательно, унифицируемы, а поэтому существует наиболее общий унификатор β_1 для этого множества. Литерал $\beta_1(L_1^1)$ (равный $\beta_1(L_1^2), \ldots, \beta_1(L_1^r)$) обозначим через L_1. По определению наиболее общего унификатора найдется подстановка γ_1, для которой выполняется равенство $\alpha_1 = \beta_1 \circ \gamma_1$. По аналогичным соображениям, существуют подстановки β_2 и γ_2 такие, что β_2 – наиболее общий унификатор множества литералов $L_2^1, \ldots, L_2^s$ и $\alpha_2 = \beta_2 \circ \gamma_2$. Литерал $\beta_2(L_2^1)$ обозначим через L_2. Легко видеть, что L_1 и L_2 не имеют общих переменных. Поскольку дизъюнкты D_1 и D_2 также не имеют общих переменных, то можно считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и $\alpha = \beta \circ \gamma$. Сказанное в этом абзаце иллюстрируется рисунками 4.1 и 4.2.



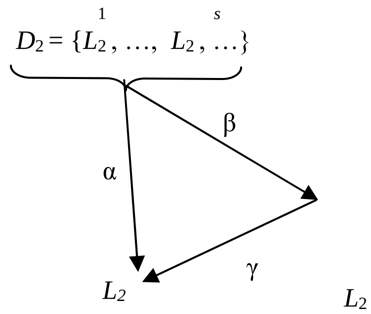


Рис. 4.1 Рис. 4.2

Литералы L_1' и $\neg L_2'$, как отмечено выше, унифицируемы подстановкой τ. Следовательно, литералы L_1 и $\neg L_2$ также унифицируемы (подстановкой $\gamma\circ\tau$). Отсюда следует, что существует наиболее общий унификатор σ множества $\{L_1, \neg L_2\}$ (см.рис.4.3). Возьмем в качестве D дизъюнкт

$$D = [\sigma(\beta(D_1)) - \sigma(L_1)] \cup [\sigma(\beta(D_2)) - \sigma(L_2)] \qquad (2)$$

Ясно, что D – резольвента дизъюнктов D_1 и D_2. Осталось показать, что D' – пример D.

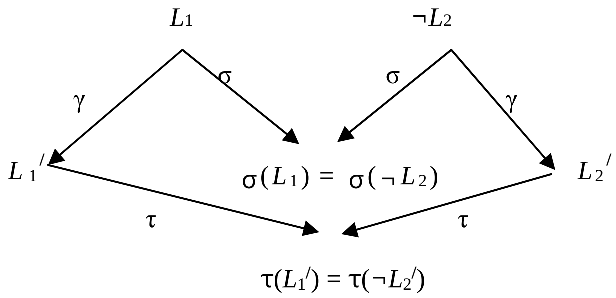


Рис. 4.3

Так как σ − наиболее общий унификатор L_1 и $\neg L_2$, то существует подстановка δ такая, что $\gamma\circ\tau = \sigma\circ\delta$. В таком случае из последнего равенства, равенств (1), (2) и $\alpha = \beta\circ\gamma$ следует, что

$$D' = (\tau(D_1') - \tau(L_1')) \cup (\tau(D_2') - \tau(L_2')) =$$
$$[\tau(\alpha(D_1)) - \tau(\alpha(L_1^1))] \cup [\tau(\alpha(D_2)) - (\tau(\alpha(L_2^1)) =$$
$$[(\alpha\circ\tau)(D_1) - (\alpha\circ\tau)(L_1^1)] \cup [(\alpha\circ\tau)(D_2) - (\alpha\circ\tau)(L_2^1)] =$$
$$[(\beta\circ\gamma\circ\tau)(D_1) - (\beta\circ\gamma\circ\tau)(L_1^1)] \cup [(\beta\circ\gamma\circ\tau)(D_2) - (\beta\circ\gamma\circ\tau)(L_2^1)] =$$
$$[(\beta\circ\sigma\circ\delta)(D_1) - (\beta\circ\sigma\circ\delta)(L_1^1)] \cup [(\beta\circ\sigma\circ\delta)(D_2) - (\beta\circ\sigma\circ\delta)(L_2^1)] =$$
$$\delta[\sigma(\beta(D_1)) - \sigma(L_1)] \cup \delta[\sigma(\beta(D_2)) - \sigma(L_2)] = \delta(D).$$

Мы доказали, что D' − пример D.

Задачи

1.

2.

3. Пусть $\sigma = \{x_1 = f(x_2), x_2 = d, x_3 = f(x_1)\}$ – подстановка, $F = P(x_1, f(x_2)) \vee \neg Q(x_3)$, $G = P(x_3, x_2) \vee R(x_1, g(x_2))$. Найти $\sigma(F)$ и $\sigma(G)$.

4. Определить, унифицируемы ли следующие множества атомарных формул:

а) $M = \{P(a, y, y), P(z, x, f(x))\}$,

б) $M = \{P(x, y, z), P(u, h(y,y), y), P(a, b, c)\}$,

в) $M = \{P(a, f(x), g(x,y)), P(u, y, g(f(a),h(y))\}$.

5. Определить, имеют ли следующие дизъюнкты склейки. Если имеют, то найти их:

а) $P(x)\vee P(a)\vee Q(f(x))$

б) $P(x)\vee Q(f(x))\vee P(f(x))$,

в) $P(a)\vee P(b)\vee P(x)$.

6. Найти все возможные резольвенты (если они есть) следующих пар дизъюнктов:

а) $C = \neg P(x)\vee Q(x, b)$, $D = P(a)\vee Q(a, b)$,

б) $C = \neg P(x)\vee Q(x, x)$, $D = \neg Q(a, f(a))$,

в) $C = \neg P(x)\vee\neg P(a)\vee\neg Q(y, f(b))$, $D = P(u)\vee Q(c, f(v))$.