Глава 4. Метод резолюций

Глава посвящена рассмотрению метода доказательства того, что формула G является логическим следствием формул F_1, F_2, ..., F_k. Этот метод называется *методом резолюций*. Отметим, что задача о логическом следствии сводится к задаче о выполнимости. Действительно, формула G есть логическое следствие формул F_1, F_2, ..., F_k тогда и только тогда, когда множество формул $\{F_1, F_2, ..., F_k, \neg G\}$ невыполнимо. Метод резолюций, если говорить более точно, устанавливает невыполнимость. Это первая особенность метода. Вторая особенность метода состоит в том, что он оперирует не с произвольными формулами, а с дизъюнктами (или элементарными дизъюнкциями).

§1. Метод резолюций в логике высказываний

Рассмотрим вначале логику высказываний. Напомним, что литералом мы назвали атомарную формулу или ее отрицание, дизъюнктом – дизъюнкцию литералов. Дизъюнкт может состоять из одного литерала. *На дизъюнкт мы иногда будем смотреть, как на множество литералов,* т.е. не будем различать дизъюнкты, которые получаются один из другого с помощью коммутативности и ассоциативности дизъюнкции, а также идемпотентности. Последнее означает, например, что дизъюнкты $X\vee\neg Y\vee X$ и $X\vee\neg Y$ равны. Нам понадобится особый дизъюнкт – *пустой*, т.е. дизъюнкт, не содержащий литералов. Его мы будем обозначать символом □. Будем считать, что пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации. Это означает, что формула F&□ равносильна □, а формула $F\vee$□ равносильна F. Пустой дизъюнкт есть фактически то же самое, что и атомарная формула 0, но в контексте метода резолюций принято использовать □.

Определение. Литералы L и $\neg L$ называются *противоположными*.

Метод резолюций в логике высказываний основан на правиле резолюций.

Определение. *Правилом резолюций в логике высказываний* называется следующее правило: из дизъюнктов $X\vee F$ и $\neg X\vee G$ выводим дизъюнкт $F\vee G$. ($\frac{X\vee F,\neg X\vee G}{F\vee G}$)

Например, из дизъюнктов $\neg X\vee Y\vee Z$ и $X\vee\neg Y$ выводим дизъюнкт $Y\vee Z\vee\neg Y$. Обратим внимание на то, что в первых двух дизъюнктах есть еще одна пара противоположных литералов. Условимся, что можно применять правило резолюций не обязательно к самым левым литералам (поскольку мы не различаем дизъюнкты, отличающиеся порядком записи литералов).

Тогда правило резолюций, примененное к Y и $\neg Y$ в дизъюнктах $\neg X \vee Y \vee Z$ и $X \vee \neg Y$, даст $\neg X \vee Z \vee X$.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов. *Выводом* из S называется последовательность дизъюнктов

$$D_1, D_2, ..., D_n$$

такая, что каждый дизъюнкт этой последовательности принадлежит S или следует из предыдущих по правилу резолюций. Дизъюнкт D *выводим из* S, если существует вывод из S, последним дизъюнктом которого является D.

Например, если $S = \{\neg X \vee Y \vee Z, \neg Y \vee U, X\}$, то последовательность $D_1 = \neg X \vee Y \vee Z$, $D_2 = \neg Y \vee U$, $D_3 = \neg X \vee Z \vee U$, $D_4 = X$, $D_5 = Z \vee U$ – вывод из S. Дизъюнкт $Z \vee U$ выводим из S.

Применение метода резолюций основано на следующем утверждении, которое называется теоремой о полноте метода резолюций.

Теорема 4.1. Множество дизъюнктов логики высказываний S невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Отметим, что правило резолюций сохраняет истинность. Это означает, что если $\phi(\neg X \vee F) = 1$ и $\phi(X \vee G) = 1$ для некоторой интерпретации ϕ, то $\phi(F \vee G) = 1$. Действительно, пусть $\phi(\neg X \vee F) = 1$ и $\phi(X \vee G) = 1$. Тогда если $\phi(F) = 1$, то и $\phi(F \vee G) = 1$. Если же $\phi(F) = 0$, то $\phi(\neg X) = 1$, поскольку $\phi(\neg X \vee F) = 1$. Но в этом случае $\phi(X) = 0$ и $\phi(G) = 1$, так как $\phi(X \vee G) = 1$. Если же $\phi(G) = 1$, то и $\phi(F \vee G) = 1$.

Докажем вначале достаточность.

Пусть из S выводим пустой дизъюнкт. Предположим противное: множество S выполнимо, т.е. существует интерпретация ψ, при которой все дизъюнкты из S истинны. Выводимость пустого дизъюнкта из S означает, что существует последовательность дизъюнктов $D_1, \ldots, D_n = \square$, каждый дизъюнкт которой принадлежит S или получается из предыдущих по правилу резолюций. Если дизъюнкт D_j из этой последовательности принадлежит S, то по предположению $\psi(D_j) = 1$. Если же он получается из предыдущих по правилу резолюций, то также $\psi(D_j) = 1$, поскольку правило резолюций сохраняет истинность. При $i = n$ получаем, что $\psi(\square) = 1$. Противоречие показывает, что предположение о выполнимости множества S – ложное предположение. Следовательно, S невыполнимо. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Доказательство проведем индукцией по следующему параметру $d(S)$: это сумма числа вхождений литералов в дизъюнкты из S минус число дизъюнктов.

Пусть множество дизъюнктов S невыполнимо. Если пустой дизъюнкт принадлежит S, то он выводим из S (вывод в этом случае состоит из одного пустого дизъюнкта) и необходимость теоремы доказана. Будем считать в силу этого, что $\square \notin S$. При этом предположении каждый дизъюнкт содержит хотя бы один литерал и поэтому $d(S) \geq 1$.

База индукции: $d(S) = 1$. Если $d(S) = 1$, то все дизъюнкты состоят из одного литерала. Поскольку множество S невыполнимо, то в нем должна найтись пара противоположных литералов X и $\neg X$. В таком случае пустой дизъюнкт выводим из S, соответствующий вывод содержит три дизъюнкта: X, $\neg X$, $\square$.

Шаг индукции: $d(S)>1$. Предположим, что для любого множества дизъюнктов Т такого, что $d(\mathrm{T})<d(S)$ необходимость теоремы доказана. Пусть

$$S = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, D_k\}.$$

Так как $d(S)>1$, то в S существует хотя бы один неодноэлементный дизъюнкт. Будем считать, что это дизъюнкт D_k, т.е. D_k $= L \vee D_k^{/}$, где L – литерал и $D_k^{/} \neq \square$. Наряду с множеством дизъюнктов S рассмотрим еще два множества дизъюнктов $S_1 = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, L\}$,

$$S_2 = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, D_k^{/}\}.$$

Ясно, что S_1 и S_2 невыполнимы и что $d(S_1)<d(S)$ и $d(S_2)<d(S)$. По предположению индукции из S_1 и S_2 выводим пустой дизъюнкт. Пусть

$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_{l-1}, A_l = \square$ – (1)

вывод пустого дизъюнкта из S_1 и

$B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots B_{m-1}, B_m = \square$ – (2)

вывод пустого дизъюнкта из S_2. Если в первом выводе не содержится дизъюнкта L, то эта последовательность дизъюнктов будет выводом из S и необходимость теоремы доказана. Будем считать, что L содержится в первом выводе, пусть $A_i = L$.

Аналогично предполагаем, что $B_j = D_k^{/}$.

Если дизъюнкт E получается из дизъюнктов E_1 и E_2 по правилу резолюций, то будем говорить, что *E непосредственно зависит от E_1* и от E_2. Транзитивное замыкание отношения непосредственной зависимости назовем *отношением зависимости.* (Другими словами, E зависит от $E^{/}$, если существуют дизъюнкты $E_1, \ldots, E_n$ такие, что $E = E_1$, $E_n = E^{/}$ и E_1 непосредственно зависит от E_2, E_2 непосредственно зависит от $E_3, \ldots, E_{n-1}$ непосредственно зависит от E_n.) Преобразуем второй вывод следующим образом: к дизъюнкту B_j и всем дизъюнктам, которые от него зависят, добавим литерал L. Новая последовательность дизъюнктов

$B_1, B_2, \ldots, B_j^{/} = D_k^{/} \vee L, \quad B^{/}_{j+1}, \ldots, B_m^{/}$ (3)

будет выводом из S. Если дизъюнкт B_m не зависит от B_j, то $B_m^{/} = \square$. Это означает, что из S выводим пустой дизъюнкт, что и требовалось доказать. Предположим, что B_m зависит от B_j. Тогда $B_m^{/} = L$. Преобразуем теперь первый вывод: на место дизъюнкта A_i (равного L) в этой последовательности подставим последовательность (3). Получим последовательность

$$A_1, \ldots, A_{i\text{-}1}, B_1, \ldots, B_j^{/}, B^{/}_{j+1}, \ldots, B_m^{/} = L, A_{i+1}, \ldots, A_l = \square.$$

Эта последовательность является выводом пустого дизъюнкта из множества дизъюнктов S. Следовательно, если множество S невыполнимо, то из S выводим пустой дизъюнкт. Доказательство закончено.

Для доказательства того, что формула G является логическим следствием множества формул $F_1, \ldots, F_k$, метод резолюций применяется следующим образом.

Сначала составляется множество формул $T = \{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}$. Затем каждая из этих формул приводится к конъюнктивной нормальной форме и в полученных формулах зачеркиваются знаки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов S. И, наконец, ищется вывод пустого дизъюнкта из S. Если пустой дизъюнкт выводим из S, то формула G является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_k$. Если из S нельзя вывести □, то G не является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_k$.

Пример 1. Проиллюстрируем сказанное на примере. Покажем, что формула $G = Z$ является логическим следствием формул $F_1 = \neg X \vee Y \to X \& Z$, $F_2 = \neg Y \to Z$. Сформируем множество формул $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$. Приведем формулы F_1 и F_2 к КНФ
(формула $\neg G$ сама имеет эту форму). Мы получим, что

F_1 равносильна $X \& (\neg Y \vee Z)$,

F_2 равносильна $Y \vee Z$.

Тогда множество дизъюнктов S равно

$$\{ X, \neg Y \vee Z, Y \vee Z, \neg Z \}.$$

Из множества S легко выводится пустой дизъюнкт:

$$\neg Y \vee Z, \neg Z, \neg Y, Y \vee Z, Y, \square.$$

Следовательно, формула G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

Задачи

1. Доказать с помощью метода резолюций, что формула G есть логическое следствие формул $F_1, \ldots F_n$:

а) $F_1 = X \vee Y$, $F_2 = X \to Z$, $G = (Y \to Z) \to Z$;

б) $F_1 = X$, $F_2 = X \& Y \to Z$, $G = Y \to Z$;

в) $F_1 = X \to Y \vee Z$, $F_2 = Z \to W$, $F_3 = \neg W$, $G = X \to Y$;

г) $F_1 = X \vee Y \vee \neg Z$, $F_2 = X \to X1$, $F_3 = Y \to Y1$, $F_4 = Z$, $G = X1 \vee Y1$;

д) $F_1 = X \& Y \to \neg X \& Z$, $F_2 = \neg(X \& \neg Y) \vee Z$, $G = X \to Z$;

е) $F_1 = X \to [\neg Y \& (\neg Y \to Z)]$, $F_2 = (X \to \neg Y) \& \neg(\neg X \& \neg W)$, $G = W \vee Z$.

2. Запишите следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Если рассуждение логично, то докажите это методом резолюций; если нелогично, то постройте интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

2.1. Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать и забастовка заканчивается. Следовательно, забастовка длилась более месяца.

2.2. Если подозреваемый совершил эту кражу, то она была тщательно подготовлена или он имел соучастника. Если бы кража была тщательно подготовлена, то, если бы он имел соучастника, был бы украден дорогой компьютер. Компьютер остался на месте. Следовательно, подозреваемый невиновен.

2.3. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

2.4. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

2.5. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.