

Задачи

1. Установить, какой из кванторов определяется следующими выражениями: “для всякого x истинно $F(x)$ ”, “ $F(x)$ при произвольном x ”, “найдется x , такой что $F(x)$ ”, “для подходящего x верно $F(x)$ ”, “всегда имеет место $F(x)$ ”, “каждый элемент обладает свойством F ”, “найдется, по крайней мере, один x такой, что $F(x)$ ”, “существует не менее одного x , такого что $F(x)$ ”, “свойство F присуще всем”, “каким бы ни был x $F(x)$ истинно”, “хотя бы для одного x верно $F(x)$ ”.

2. Данна алгебраическая структура $\langle N; \ x \leq y \rangle$. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma = (\leq)$:

- а) “ x меньше y ”, б) “ y равно $x+1$ ”,
в) “ x равно 1”, г) “ x равно 2”,
д) “ y лежит между x и z ”.

3. Данна алгебраическая структура $\langle N; \mid \rangle$. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma = (\mid)$ ($x|y$ означает, что x делит y нацело):

- а) “ x равно 1”, б) “ z есть $HOD(x, y)$ ”,
 в) “ z есть $HOK(x, y)$ ”, г) “ x – простое число”.

Можно ли определить предикаты “ x – четное число”, “ x меньше y ” формулой этой же сигнатуры?

4. Рассмотрим алгебраическую структуру $\langle N; x+y, xy, x \leq y \rangle$. Для каждой из формул:

- а) $(\forall y)(y \leq x \rightarrow x \leq y)$,
 б) $(\exists y)(x = y + y)$,
 в) $(\forall u)(\forall v)(x = uy \rightarrow x = u \vee x = v)$,
 г) $(\exists y)(\forall z)(z \leq x \rightarrow x \leq z \vee z = y)$,
 д) $y \leq z \ \& \ x \leq z \ \& \ (\forall u)(y \leq u \ \& \ x \leq u \rightarrow z \leq u)$

найти предикат из следующего списка, который эта формула определяет:

- a) “ x – простое число или x равно 1”,
 - б) “ x – четное число”,
 - в) “ x равно 1”,
 - г) “ z есть наибольшее из чисел x и y ”,
 - д) “ x принадлежит $\{1, 2\}$ ”.

5. На множестве M задан одноместный предикат $P(x)$. Выразить следующие утверждения формулами сигнатуры $\sigma = \{P\}$:

- а) “существует не менее одного элемента x , удовлетворяющего предикату $P(x)$ ”,

- б) “существует не более одного элемента x , удовлетворяющего предикату $P(x)$ ”.
- в) “существует точно один элемент x , удовлетворяющий предикату $P(x)$ ”,
- г), д), е) – утверждения а), б), в) с заменой “один” на “два”.

6. Пусть M – множество всех точек, прямых и плоскостей трехмерного пространства. Рассмотрим алгебраическую систему $\langle M; x \in y, p(x), l(x), pl(x) \rangle$, где \in – отношение принадлежности, $p(x)$ означает, что x есть точка, $l(x)$ – x есть прямая, $pl(x)$ – x есть плоскость.

Выразить следующие предикаты формулами указанной сигнатуры:

- а) “плоскости x и y имеют общую точку”,
- б) “если плоскости x и y имеют общую точку, то они имеют общую прямую”,
- в) “прямые x и y имеют общую точку”,
- г) “прямые x и y параллельны”,
- д) “прямые x , y и z образуют треугольник”.

В формулах можно использовать ограниченные кванторы.

7. Подберите сигнатуру и представьте следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

7.1. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, какие-то первокурсники знакомы с некоторыми спортсменами.

7.2. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

7.3. Таможенные чиновники обыскивают всякого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Некоторые люди, способствующие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков. Никто из высокопоставленных лиц не способствовал провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

8. Пусть $F(x, y) = P(x, y) \& (\exists z)(P(x, z) \& P(z, y))$ и $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x, y)$ при следующих интерпретациях:

- а) $(\phi P)(x, y) = "x \text{ меньше } y"$,
- б) $(\phi P)(x, y) = "x \text{ меньше или равно } y"$,
- в) $(\phi P)(x, y) = "x \text{ делит } y \text{ нацело и } x \neq y"$,
- г) $(\phi P)(x, y) = "y \text{ равно } x+1"$.

9. Пусть $F(x) = x \neq a \ \& \ (\forall y)(D(y, x) \rightarrow y=a \vee y=x)$ и $M = \{1, \dots, 9\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x)$ при следующих интерпретациях:

- а) $(\phi D)(x) = "x \text{ делит } y \text{ нацело}", \phi(a) = 1;$
- б) $(\phi D)(x) = "x \text{ меньше или равно } y", \phi(a) = 1;$
- в) $(\phi D)(x) = "x \text{ делит } y \text{ нацело}", \phi(a) = 2.$

10. Пусть $F(x) = P(x) \rightarrow Q(a, g(x))$, $M = \{0, 1\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x)$ при следующих интерпретациях:

- а) $P(x) = "x \text{ не равно } 0", Q(x, y) = "x \text{ меньше } y", a = 0, g(x) = x+1;$
- б) $P(x) = "x \text{ не равно } 1", Q(x, y) = "x \text{ меньше } y", a = 0, g(x) = 0;$
- в) $P(x) = "x \text{ не равно } 1", Q(x, y) = "x \text{ меньше } y", a = 1, g(x) = x+1, \text{ где } + - \text{ сложение по модулю } 2.$

11. Пусть $F(x) = P(x) \ \& \ (\forall y)(P(y) \rightarrow D(x, y))$, $M = \{2, 3, 4, 6, 9\}$. Найти предикаты, которые соответствуют $F(x)$ при следующих интерпретациях:

- а) $P(x) = "x \text{ – простое число}", D(x, y) = "x \text{ меньше или равно } y";$
- б) $P(x) = "x \text{ – нечетное число}", D(x, y) = "x \text{ делит } y";$
- в) $P(x) = "x \text{ не равно } 4", D(x, y) = "x \text{ меньше или равно } y".$

Существуют ли интерпретации, при которой формуле $F(x)$ соответствуют предикаты: а) “ $x = 4$ ”, б) “ $x \text{ – четное число?}$ ”

12. Выяснить, будут ли равносильны следующие пары формул:

- а) $(\forall x)(F(x) \vee G(x)) \text{ и } (\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x);$
- б) $(\exists x)(F(x) \ \& \ G(x)) \text{ и } (\exists x)F(x) \ \& \ (\exists x)G(x);$
- в) $(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x)) \text{ и } (\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x);$
- г) $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)G(x) \text{ и } (\exists x)(\forall y)(F(x) \rightarrow G(y));$
- д) $(\exists x)(F(x) \rightarrow G(x)) \text{ и } (\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x);$
- е) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x) \text{ и } (\forall x)(\exists y)(F(x) \rightarrow G(y));$
- ж) $(\exists x)(F(x) \leftrightarrow G(x)) \text{ и } (\exists x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)G(x);$
- з) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x)) \text{ и } (\forall x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)G(x).$

13. Доказать равносильность формул:

- а) $F = \neg(\exists x)[(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall z)(P(z, z) \vee Q(z))]$ и
 $G = (\forall x)(\forall y)(\exists z)[P(x, y) \ \& \ \neg P(z, z) \ \& \ \neg Q(z)];$
- б) $F = \neg(\forall x)[T(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)(R(y, z) \ \& \ T(z) \rightarrow R(z, z))]$ и $G = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[T(x) \ \& \ \neg R(z, z) \ \& \ \neg(R(y, z) \rightarrow \neg T(z))];$
- в) $F = (\forall x)[(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists z)(P(x, z) \ \& \ Q(z))]$ и
 $G = (\forall x)(\exists u)[P(x, u) \rightarrow Q(u)];$
- г) $F = \neg(\exists x)[(\exists y)T(x, y) \rightarrow (\forall z)(S(x, z) \vee Q(z))]$ и
 $G = (\forall x)(\exists y)(\exists z)[T(x, y) \ \& \ \neg(\neg S(x, z) \rightarrow Q(z))];$

д) $F = \neg(\forall x)[(\forall y)T(x, y) \rightarrow (\exists z)(T(x, z) \& Q(z))]$ и $G = (\exists x)(\forall u)(T(x, u) \& \neg Q(u))$.

14. Привести к предваренной нормальной форме:

- а) $(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall y)G(y)$;
- б) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x)$;
- в) $(\forall x)F(x) \rightarrow (\exists y)G(y)$;
- г) $(\exists x)F(x) \rightarrow (\forall y)G(y)$;
- д) $(\forall x)P(x, y) \rightarrow (\exists z)[P(y, z) \vee (\forall u)(Q(u) \rightarrow P(z, z))]$.

15. Привести к сколемовской нормальной форме:

- а) $(\exists x)[P(x) \& (\forall y)(S(y) \rightarrow T(x, y))]$,
- б) $(\forall x)[Q(x) \rightarrow (\exists y)(\forall u)(R(x, y) \& S(y, u))]$,
- в) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)[L(x, y, z) \& M(z, u, v)]$,
- г) $(\forall x)[(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists z)(Q(x, z) \& R(z))]$,
- д) $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall z)(Q(x, z) \vee P(z))]$,
- е) $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \leftrightarrow (\exists z)Q(x, z)]$.

16. Показать, что в следующих случаях формула G не является логическим следствием множества формуул K :

- а) $G = (\forall x)\neg R(x)$, $K = \{(\exists x)R(x) \rightarrow (\exists x)Q(x), \neg Q(a)\}$;
- б) $G = (\forall x)R(x, x)$, $K = \{(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))\}$;
- в) $G = (\exists x)(P(x) \& \neg R(x))$, $K = \{(\forall x)[P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(y) \& S(x, y))], (\exists x)[R(x) \& (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg S(x, y))], (\exists x)P(x)\}$.

17. Дано утверждение: “Некоторые из первокурсников знакомы с кем-либо из спортсменов. Но ни один из первокурсников не знаком ни с одним любителем подледного лова”. Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:

- а) “ни один спортсмен не является любителями подледного лова”,
- б) “некоторые из спортсменов не являются любителями подледного лова”,
- в) “найдется спортсмен, который любит подледный лов”?

18. Докажите нелогичность следующих рассуждений, построив интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

18.1. Все студенты нашей группы – члены клуба “Спартак”. А некоторые члены клуба “Спартак” занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

18.2. Некоторые студенты нашей группы – болельщики “Спартака”. А некоторые болельщики “Спартака” занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

18.3. Каждый первокурсник знаком с кем-либо из студентов второго курса. А некоторые второкурсники – спортсмены. Следовательно, каждый первокурсник знаком с кем-либо из спортсменов.

Законы логики первого порядка

Пусть F, G и H – некоторые формулы логики высказываний.

Тогда следующие формулы равносильны:

- 1) $F \& I$ и F ;
- 2) $F \vee I$ и I ;
- 3) $F \& O$ и O ;
- 4) $F \vee O$ и F ;
- 5) $F \& F$ и F ;
- 6) $F \vee F$ и F ;
- 7) $F \& G$ и $G \& F$;
- 8) $F \vee G$ и $G \vee F$;
- 9) $F \& (G \& H)$ и $(F \& G) \& H$;
- 10) $F \vee (G \vee H)$ и $(F \vee G) \vee H$;
- 11) $F \& (G \vee H)$ и $(F \& G) \vee (F \& H)$;
- 12) $F \vee (G \& H)$ и $(F \vee G) \& (F \vee H)$;
- 13) $F \& (F \vee G)$ и F ;
- 14) $F \vee (F \& G)$ и F
- 15) $F \& \neg F$ и O ;
- 16) $F \vee \neg F$ и I ;
- 17) $\neg(F \& G)$ и $\neg F \vee \neg G$;
- 18) $\neg(F \vee G)$ и $\neg F \& \neg G$;
- 19) $\neg\neg F$ и F ;
- 20) $F \rightarrow G$ и $\neg F \vee G$;
- 21) $F \leftrightarrow G$ и $(F \rightarrow G) \& (G \rightarrow F)$.

22) $(\forall x)(F(x) \& G(x))$ равносильна $(\forall x)F(x) \& (\forall x)G(x)$,

23) $(\exists x)(F(x) \vee G(x))$ равносильна $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$,

24) $(\forall x)(\forall y)F(x, y)$ равносильна $(\forall y)(\forall x)F(x, y)$,

25) $(\exists x)(\exists y)F(x, y)$ равносильна $(\exists y)(\exists x)F(x, y)$,

26) $\neg(\forall x)F(x)$ равносильна $(\exists x)\neg F(x)$,

27) $\neg(\exists x)F(x)$ равносильна $(\forall x)\neg F(x)$.

28) $(\forall x)(F(x) \vee G)$ равносильна $(\forall x)(F(x) \vee G)$,

29) $(\exists x)(F(x) \& G)$ равносильна $(\exists x)(F(x) \& G)$, где G не содержит x .

Законы 22, 23, 28, 29 можно записать в общем виде:

30) $(Q_1x)(Q_2u)(F(x) \vee G(u))$ равносильна $(Q_1x)F(x) \vee (Q_2u)G(u)$,

31) $(Q_1x)(Q_2u)(F(x) \& G(u))$ равносильна $(Q_1x)F(x) \& (Q_2u)G(u)$,

где Q_1, Q_2 – кванторы \forall или \exists , переменная u не входит в $F(x)$, а переменная x не входит в $G(u)$.

Для доказательства равносильности двух формул могут оказаться полезными следующие законы:

32) $(\forall x)F(x)$ равносильна $(\forall z)F(z)$,

33) $(\exists x)F(x)$ равносильна $(\exists z)F(z)$.

В законах 32 и 33 переменная z не входит в $F(x)$, а переменная x не входит в $F(z)$.

Пример. Проиллюстрируем его на примере следующей задачи: доказать равносильность формул:

$$F = \neg(\forall x)(\exists y)[S(x) \& P(x, y) \rightarrow (\exists z)(T(z) \& P(x, z))],$$

$$G = (\exists x)(\forall y)[S(x) \& P(x, y) \& (\forall z)(T(z) \rightarrow \neg P(x, z))].$$

Применив к формуле F последовательно законы 26, 27 и 20, получим, что формула F равносильна формуле

$$F_1 = (\exists x)(\forall y)\neg[\neg(S(x) \& P(x, y)) \vee (\exists z)(T(z) \& P(x, z))].$$

Далее, используя законы 18, 19 и 27 из F_1 , получаем формулу

$$F_2 = (\exists x)(\forall y)[S(x) \& P(x, y) \& (\forall z)\neg(T(z) \& P(x, z))].$$

Осталось заметить, что в силу законов 17 и 20 в формуле F_2 подформулу $\neg(T(z) \& P(x, z))$ можно заменить на $T(z) \rightarrow \neg P(x, z)$.

Нормальные формы

Как и в логике высказываний, в логике первого порядка вводятся нормальные формы. Мы рассмотрим две из них: предваренную нормальную и сколемовскую нормальную формы.

Определение. Формула G имеет *предваренную нормальную форму* (сокращенно: ПНФ), если

$$G = (Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)H,$$

где Q_1, \dots, Q_n кванторы, а формула H не содержит кванторов.

Например, формула $(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \& \neg Q(y))$ имеет предваренную нормальную форму, а формула $\neg(\forall x)(T(x) \& S(x, y))$ не имеет.

Теорема. Для всякой формулы F существует формула G , равносильная F и имеющая предваренную нормальную форму.

Доказательство теоремы легко следует из анализа алгоритма приведения к ПНФ.

Алгоритм приведения к предваренной нормальной форме

Шаг 1. Используя законы 21 и 20, исключить эквиваленцию и импликацию.

Шаг 2. Занести отрицание к атомарным формулам, пользуясь законами 17–19 и 26–27.

Шаг 3. С помощью законов 22–23, 28–31 вынести кванторы вперед, используя при необходимости переименование связанных переменных (законы 32–33).

Пример. Пусть

$$F = (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)(P(y) \& Q(y, z)).$$

Выполнив шаг 1 (с помощью закона 20), получим формулу

$$F_1 = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists y)(\forall z)(P(y) \& Q(y, z)).$$

С помощью закона 26 перейдем к формуле

$$F_2 = (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists y)(\forall z)(P(y) \& Q(y, z)).$$

Тем самым, шаг 2 также выполнен. Применим закон 30

$Q_1 = \exists$, $Q_2 = \exists$, $u = y$, получим формулу

$$F_3 = (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \vee (\forall z)(P(y) \vee Q(y, z))].$$

(Пользуемся тем, что $\neg P(x)$ не содержит y , а $(\forall z)(P(y) \& Q(y, z))$ не содержит x .) Так как формула $\neg P(x)$ не содержит z , применение закона 28 дает формулу

$$F_4 = (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg P(x) \vee (P(y) \vee Q(y, z))].$$

Это и есть искомая формула, имеющая ПНФ и равносильная формуле F .

В рассмотренном примере выполнение шага 3 можно организовать по-другому. В формуле F_2 связанную переменную u заменим на переменную x (закон 33), получим формулу

$$F'_3 = (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)(\forall z)(P(x) \& Q(x, z)).$$

Используя закон 23, перейдем к формуле

$$F'_4 = (\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall z)(P(x) \& Q(x, z))].$$

Затем, как и в предыдущем абзаце, с помощью закона 28 вынесем квантор по z за квадратную скобку. Получим формулу

$$F'_5 = (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee (P(x) \& Q(x, z))].$$

Формула F'_5 , как и формула F_4 , имеет предваренную нормальную форму и равносильна формуле F . В некоторых ситуациях формула F'_5 предпочтительнее формулы F_4 , поскольку содержит меньше кванторов. (Кстати, бескванторную часть формулы F'_5 можно упростить.)

Определение. Формула G имеет сколемовскую нормальную форму (сокращенно: СНФ), если

$$G = (\forall x_1) \dots (\forall x_n) H,$$

где формула H не содержит кванторов и имеет конъюнктивную нормальную форму.

Например, формула $(\forall x)[P(x) \& (P(y) \vee Q(x, y))]$ имеет сколемовскую нормальную форму, а формулы $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ и $(\forall x)[P(x) \vee (P(y) \& Q(x, y))]$ не имеют.

Алгоритм приведения к сколемовской нормальной форме

Шаг 1 – 3 – те же, что и в предыдущем алгоритме.

Шаг 4. Бескванторную часть привести к конъюнктивной нормальной форме (алгоритм описан в §5 главы 1).

Шаг 5. Исключить кванторы существования. Этот шаг изложим на примере. Пусть после выполнения четвертого шага мы получили формулу

$F = (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)H(x, y, z, u, v)$, где H – не содержит кванторов. Предположим, что она не содержит константы c , символов одноместной функции f и двухместной функции g . Тогда в формуле H заменим x на c , z – на $f(y)$, v заменим на $g(y, u)$. Все кванторы существования вычеркнем. Получим формулу

$G = (\forall y)(\forall u)H(c, y, f(y), u, g(y, u))$. Это и есть результат выполнения шага 5.

Пример. Приведем пример приведения к СНФ. Пусть

$$F = (\exists x)(\forall y)[P(x, y) \rightarrow (\exists z)(Q(x, z) \& R(y))].$$

Применяя законы 20 и 23, получаем формулу

$$F_1 = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x, y) \vee (Q(x, z) \& R(y))].$$

Она имеет предваренную нормальную форму. Используя закон 12, приводим бескванторную часть к КНФ:

$$F_2 = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(\neg P(x, y) \vee Q(x, z)) \& (\neg P(x, y) \vee R(y))].$$

Сделав подстановку $x = a$, $z = f(y)$, получим исковую формулу

$$G = (\forall y)[(\neg P(a, y) \vee Q(a, f(y))) \& (\neg P(a, y) \vee R(y))].$$

Теорема. Для всякой формулы F существует формула G , имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполнимая или невыполнимая.