Задачи

1. Показать, что переменная x_1 булевой функции f является фиктивной:

1) $f = (x_2 \to \cdot x_1)\cdot(x_2 \downarrow x_2)$,

2) $f = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \mid x_2)$,

3) $f = ((x_1 + x_2) \to x_3)\cdot\neg(x_3 \to x_2)$.

2. Доказать, что $[K \cap L] \subseteq [K] \cap [L]$, $[K] \cup [L] \subseteq [K \cup L]$.

3. Показать, что функция f принадлежит замыканию класса C булевых функций:

1) $f = x$, $C = \{x + y\}$,

2) $f = x + y + z$, $C = \{x \leftrightarrow y\}$,

3) $f = x \vee y$, $C = \{\neg x \vee \neg y\}$,

4) $f = x + y + z$, $C = \{\neg x, xy \vee xz \vee yz\}$, 5) $f = x + y$, $C = \{x\cdot\neg y, x \vee \neg y\}$.

4. Содержит ли замыкание класса $\{\iota(x), x\cdot y, x\vee y\}$ функции $\theta(x)$, $\neg x$?

5. Выяснить, является ли функция f двойственной к функции g

а) $f = x+y$, $g = x\leftrightarrow y$, б) $f = x\to y$, $g = y\to x$,

в) $f = x\to y$, $g = \neg x\cdot y$, г) $f = (x+y)\cdot z$, $g = (x+y)\cdot(z+1)$,

д) $f = (x\cdot y) \vee (x\cdot z) \vee (y\cdot z)$, $g = x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z$,

е) $f = x\leftrightarrow y$, $g = (\neg x\cdot y) \vee (x\cdot\neg y)$.

6. Выяснить, будут ли следующие функции самодвойственными: $\nu(x)$, xy, $(x\cdot y)\vee(x\cdot z)\vee(y\cdot z)$, $(x\vee y)\cdot(x\vee z)\cdot(y\vee z)$, $x+y+z$.

7. Показать, что не существует самодвойственной функции, существенно зависящей от двух переменных.

8. Доказать монотонность функций $x\cdot(y\vee z)$, $x\vee(y\cdot z)$, $max(x, y, z)$, $min(x, y, z)$.

9. Выяснить, будут ли следующие функции монотонны: $yx+y$, $xy+y+x$, $x\leftrightarrow y$, $x \to (y\to x)$, $(x\cdot y)\vee(x\cdot z)\vee(y\cdot z)$, $x\to(x\to y)$.

10. Доказать, что функция, двойственная монотонной, сама монотонна.

11. Система функций С называется *базисом* замкнутого класса K, если замыкание системы С совпадает с K, но замыкание любой собственной подсистемы системы С уже не совпадает с K. Доказать, что система $\{\theta(x), \iota(x), x\cdot y, x\vee y\}$ образует базис в классе всех монотонных функций.

12. Выяснить, будут ли следующие функции линейными: $x\downarrow y$, $\neg(x \leftrightarrow \neg y)$, $(x\leftrightarrow y) \leftrightarrow z$, $x \to (y\to x)$.

13. Сведением к известным полным классам доказать полноту классов функций двузначной логики:

а) $\{x \to y, \neg x\}$, б) $\{x \to y, \theta(x)\}$,

в) $\{x \downarrow y\}$, г) $\{x \to y, x + y\}$,

д) $\{x \vee y, x + y, \iota(x)\}$, е) $\{x \leftrightarrow y, \theta(x), x \vee y\}$.

14. Используя теорему Поста, доказать полноту классов функций двузначной логики:

а) $\{x \vee y, \neg x\}$, б) $\{x \to y, \neg x\}$,

в) $\{x \cdot y + x, x + y, \iota(x))\}$, г) $\{x + y, x \leftrightarrow (y \cdot z)\}$,

д) $\{x \cdot y, x + y, x \leftrightarrow (x \cdot y)\}$, е) $\{x \leftrightarrow y, \theta(x), x \vee y\}$.

15. Выяснить, будут ли полными в $\boldsymbol{B}_2$ следующие классы функций:

а) $\{xy, x + y + 1\}$,

б) $\{\theta(x), \iota(x), (x \cdot y) \vee z\}$,

в) $\{\theta(x), \iota(x), x \leftrightarrow y\}$,

г) $\{x \cdot y + x, x \leftrightarrow y, \theta(x)\}$,

д) $\{x \vee y, x \cdot y + x \cdot z\}$,

е) $\{\neg x, (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \vee (y \cdot z)\}$,

ж) $\{\iota(x), \neg x, x + y + max(x, y, z)\}$,

з) $\{x + y, x \vee y \vee \nu(z)\}$.