Стандартный и канонический вид ЗЛП. Одноэтапный симплекс-метод

Задание$_{3.1}$(общее для всех вариантов) 1 балл

Привести ЗЛП к стандартному виду. Проверить, является ли этот вид каноническим. Если да – выписать начальное допустимое базисное решение.

1	$f = x_1 + 2x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	4	$f = x_1 - x_2 \to \max$ $\begin{cases} 1 \le x_1 + x_2 \le 2 \\ 2 \le x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 1 \le 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$f = x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1/2 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	5	$f = x_1 \quad + x_3 - 7x_4 + x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \quad + 6x_4 - 2x_5 = -7 \\ \quad x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 32 \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j \in 1:5$

Алгоритм одноэтапного симплекс-метода

Одноэтапный симплекс-метод применяется к задачам, записанным в канонической форме.

Алгоритм одноэтапного симплекс-метода

0 шаг. Убедиться, что задача записана в каноническом виде. Выразить целевую функцию через нулевые переменные.

1 шаг. Выписать полученное допустимое базисное решение, найти значение целевой функции. Если среди коэффициентов целевой функции нет отрицательных – решение оптимально. Если отрицательные есть – иди к шагу 2.

2 шаг. Выбираем ведущий столбец: среди отрицательных коэффициентов целевой функции выбираем наибольший по модулю.

3 шаг. Выбираем ведущую строку. Для этого составляем отношения правых частей уравнений к элементам ведущего столбца, среди *неотрицательных* отношений выбираем наименьшее. Соответствующая ему строка будет ведущей. Если ведущую строку выбрать невозможно – целевая функция не ограничена ($f_{min} = -\infty$)

4 шаг. На пересечении ведущей строки и ведущего столбца получить единицу, поделив ведущую строку на соответствующий коэффициент. Исключить переменную ведущего столбца из всех остальных уравнений и из целевой функции. Для этого из уравнений нужно вычитать ведущую строку, умноженную на нужный коэффициент.

5 шаг. Перейти к шагу 1.

Пример

Решить симплекс-методом

Найти $\min\ f = -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 1/2x_4$

При ограничениях $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3/2x_4 \le 8 \\ -2x_1 - 6x_3 + x_4 \ge -6 \\ x_2 - 1/2x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$

Решение:

Сначала приведем задачу к стандартному виду. Для этого введем дополнительные переменные x_5, x_6, затем умножим второе уравнение на -1.

Получим

$\min\ f = -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 1/2x_4$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3/2x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 6 \\ x_2 - 1/2x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Полученный вид является каноническим.

Базисные переменные - x_5, x_6, x_2, нулевые переменные - x_1, x_3, x_4

0 шаг. Из целевой функции надо исключить базисную переменную x_2. Выразим ее из последнего уравнения и подставим в целевую функцию. Получим:

$f = -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 1/2x_4 = -2x_1 + 4(4 + 1/2x_4) - x_3 - 1/2x_4 = 16 - 2x_1 - x_3 + 3/2x_4$

1 шаг. Начальное допустимое базисное решение:

$x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 8, \quad x_6 = 6, \quad x_2 = 4.$

Значение целевой функции: $f(0,4,0,0,8,6) = 16$

Среди коэффициентов целевой функции есть отрицательные – решение не является оптимальным. Составим симплекс-таблицу

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	
x5	1	0	-2	-3/2	1	0	8
x6	2	0	6	-1	0	1	6
x2	0	1	0	-1/2	0	0	4
F	-2	0	-1	3/2	0	0	-16

Добавлено примечание ([11]): Ведущий столбец

2 шаг. Наибольший по модулю отрицательный коэффициент целевой функции равен -2, поэтому ведущий столбец – первый.

3 шаг. Составим отношения правых частей уравнений к элементам ведущего столбца: $\left(\frac{8}{1}, \frac{6}{2}, \frac{4}{0}\right)$. Среди них неотрицательные $\left(\frac{8}{1}, \frac{6}{2}\right)$, минимальное равно 3, достигается во второй строке, которая будет ведущей.

4 шаг. Коэффициент, стоящий на пересечении ведущего столбца и ведущей строки, равен 2 (выделен красным). Делим ведущую строку на 2. Исключаем переменную x_1 из остальных уравнений и из целевой функции.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	

```
-------------------------------------
 x5 |  1     0     -2  -3/2    1    0 |8  -II
 x6 |  1     0      3  -1/2    0  1/2|3
 x2 |  0     1      0  -1/2    0    0 |4
-------------------------------------
 F  | -2     0      -1  3/2    0    0 |-16  +2*II
```

Получим

```
    |  x1    x2    x3    x4    x5    x6|
-------------------------------------
 x5 |  0     0     -5    -1    1   -1 |5
 x1 |  1     0      3  -1/2    0  1/2|3
 x2 |  0     1      0  -1/2    0    0 |4
-------------------------------------
 F  |  0     0      5   1/2    0    1 |-10
```

5 шаг. Допустимое базисное решение:

$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_5 = 5, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$

Значение целевой функции: $f(3,4,0,0,5,0) = 10$. Так как целевая функция не содержит отрицательных коэффициентов, то полученное базисное решение оптимально.

Ответ: $f_{\min}(3,4,0,0,5,0) = 10$

Задание 3.2(индивидуальное) 2 балла

В задаче целевая функция подлежит максимизации.
Решить в тетради задачу симплекс-методом. Проверить поиском решения или в Wolfram|Alpha.

Вариант	Целевая функция F	Ограничения	
1	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
4	$F = 3x_1 + 2x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$F = x_1 + x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
6	$F = x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
7	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
8	$F = 2x_1 + 3x_2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

Задание 3.3 (индивидуальное) 2 балла

Решить задачу симплекс-методом (вручную или с помощью программы). Проверить поиском решения или в Wolfram|Alpha.

Вариант 1

$$\max\ f(X) = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 2

$$\max\ f(X) = 2x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 180 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 3

$$\max\ f(X) = 6x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 800 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1200 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 4

$$\max\ f(X) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 1800 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2400 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 5

$$\min\ f(X) = -3x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 600 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 400 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 6

$$\min\ f(X) = -6x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 240 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 180 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Вариант 7

$$\min\ f(X) = -2x_1 - 6x_2 - 8x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 180 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 200 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

Задание (программирование)

Написать программу, которая решает задачу одноэтапным симплекс-методом.
Ниже указаны возможности программы и баллы, которые будут за них начислены. Необходимо набрать минимум 4 балла.

1) Приведение задачи от общего вида к стандартному, запись в текстовый файл первой симплекс-таблицы (2 балла)
2) Проверка, является ли стандартный вид каноническим: дан файл с симплекс-таблицей, определить, в каждой ли строке есть базисная переменная; выражена ли целевая функция через нулевые переменные (2 балла). Если вид является каноническим – выписать начальное допустимое базисное решение.
3) Провести одну итерацию симплекс-метода: дан текстовый файл с симплекс-таблицей. Найти ведущую строку, ведущий столбец, провести исключение по методу Гаусса в ведущем столбце. Выписать новое базисное решение, вычислить значение целевой функции в нем. Новую симплекс-таблицу записать в файл (2 балла).
4) Вместо пункта 3 написать программу, реализующую симплекс-метод полностью (4 балла).