Интуиционистская пропозициональная логика

Одна из аксиом пропозициональной логики (да, собственно, и всей классической математики), конкретно – аксиома (A11) – закон исключенного третьего, стала однажды в истории предметом нешуточного обсуждения, чтобы не сказать – конфликта. Один из крупнейших математиков XX века Л.Э.Я. Брауэр увидел в её использовании причину появления странных математических результатов, подобных теореме Банаха-Тарского (эти два математика однажды объяснили миру, что шар можно разрезать на конечное множество частей, из которых можно сложить два таких же шара). Брауэр на основании кажущейся абсурдности подобных результатов (в действительности теорема Банаха-Тарского отнюдь не абсурдна: части, на которые делится шар, не имеют никакого объёма, поэтому объём и не обязан сохраняться при их перекладывании в другом порядке) счёл, что математические рассуждения утратили некий исходный «интуитивный смысл» и предложил к нему некоторым образом вернуться. Например, ощущение того, что всякое утверждение может быль либо истинным, либо ложным, подтверждается, в действительности, только сравнительно простыми примерами (правда, можно заметить, что в мире почти всё просто ☺). С другой стороны, существует по меньшей мере один результат (недоказуемость и неопровержимость континуум-гипотезы: «существует несчётное подмножество R, неравномощное R»), который можно (при желании) счесть подтверждением противоположной точки зрения. Поэтому – вполне допустима такой взгляд на вещи: существуют утверждения, не являющиеся ни истинными, ни ложными. «Неизвестно» ☺. Может быть, континуум-гипотеза – не истинная и не ложная, «никакая»!

Итак, возможно, что аксиома (A11) «в действительности места не имеет», и от её использования следует воздерживаться. С другой стороны, Брауэр проницательно заметил, что доказательства всех «странных» теорем используют эту аксиому. «Все люди, умершие в двадцатом веке, ели сахар.

Естественно предположить, что от этого они и умерли. Сахар – белая смерть двадцатого века!»

То, что остаётся от классической математической логики в результате такого «воздержания от употребления сахара», называется *интуиционистской* (или *конструктивистской*) логикой. Почему вообще что-то остаётся? Потому что даже в рассмотренных примерах упомянутая аксиома использовалась далеко не всегда.

Противоположный вопрос тоже уместен: а почему, собственно, исключение аксиомы (A11), хоть что-то меняет? Может быть эта аксиома выводится из остальных?

Теорема 5.1. Формула $a \vee \neg a$ невыводима в интуиционистской пропозициональной логике.

Доказательство. Изменим смысл всех символов (научно говоря, построим *другую модель* аксиоматики). Предположим, что истинность высказывания бывает не двух, а трёх типов: «истинно» (1), «ложно» (0) и «неизвестно» (? или $1/2$). Далее, истинность сложных высказываний можно задать таблицей (любой, лишь бы остальные аксиомы выдержали предлагаемые изменения).

x	$\neg x$
0	1
?	0
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$
0	0	0	0	1
0	?	0	?	1
0	1	0	1	1
?	0	0	?	0
?	?	?	?	1
?	1	?	1	1

1	0	0	1	0
1	?	?	1	?
1	1	1	1	1

Почему именно так? Некоторые правила хорошо понятны: $(0 \to x) = 1$, $(1 \to x) = x$, $(x \wedge y) = \min\{x, y\}$, $(x \vee y) = \max\{x, y\}$ (считая, что 0<?<1), $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$. По поводу остальных правил можно сказать: делать можно как угодно, лишь бы результат получился нужный ☺. Отметим, однако, что ожидаемое $\neg ? = ?$ неприемлемо: аксиома (A9) $\neg a \to (a \to b)$ при $a = ?$ и $b = 0$ становится ложной.

Формулу назовём 3-тавтологией, если на любом наборе аргументов она принимает значение 1. Теперь нужно проверить две вещи. Во-первых – то, что все аксиомы, кроме (A11) являются 3-тавтологиями. Это длинная рутинная процедура, и она оставляется читателю в качестве самостоятельного, обязательного для исполнения упражнения. Во-вторых – состоятельность правила MP. Она очевидна: если $a = 1$ и $(a \to b) = 1$, то обязательно $b = 1$, так как $(1 \to x) = x$.

Следовательно, любая выводимая формула является 3-тавтологией. Осталось заметить, что аксиома (A11) 3-тавтологией не является: $? \vee (\neg ?) = ? \vee 0 = ?$.

QED