

Лабораторная работа № 6

Генерация сочетаний и размещений (4 часа)

Краткий теоретический материал

Генерация всех сочетаний

Сочетание из n элементов по k , которое часто называют просто k -сочетанием из n -элементов, представляет собой способ выбора подмножества размера k из данного множества размера n . Мы знаем, что имеется ровно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ способов сделать это.

Будем рассматривать k -сочетания множества $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, представленные в виде списков выбранных элементов $c_k \dots c_2 c_1$. При этом, выбранные элементы множества будем перечислять в *убывающем* порядке:

$$n > c_k > \dots > c_2 > c_1 \geq 0$$

На множестве таких списков можно стандартным образом определить лексикографический порядок. Будем считать, что этот порядок задаёт лексикографический порядок на множестве k -сочетаний.

Ниже перечислены в лексикографическом порядке все 3-сочетания из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

210, 310, 320, 321, 410, 420, 421, 430, 431, 432, 510, 520, 521, 530, 531, 532, 540, 541, 542, 543.

Ниже описан алгоритм генерации k -сочетаний в лексикографическом порядке.

Алгоритм (Лексикографическая генерация сочетаний). Этот алгоритм генерирует все k -сочетания $c_k \dots c_2 c_1$ из n чисел $0, 1, \dots, n - 1$ для данных $n \geq k \geq 0$. В качестве ограничителей используются дополнительные переменные c_{k+1} и c_{k+2} .

Шаг 1. [Инициализация.] Установить $c_j \leftarrow j - 1$ для $1 \leq j \leq k$; установить также $c_{k+1} \leftarrow n$, $c_{k+2} \leftarrow 0$.

Шаг 2. [Посещение.] Посетить сочетание $c_k \dots c_2 c_1$.

Шаг 3. [Поиск j .] Установить $j \leftarrow 1$. Затем, пока $c_j + 1 = c_{j+1}$, установить $c_j \leftarrow j - 1$ и $j \leftarrow j + 1$. Эти действия повторяются до тех пор, пока в конечном итоге не выполнится условие $c_j + 1 \neq c_{j+1}$.

Шаг 4. [Выполнено?] Завершить выполнение алгоритма, если $j > k$.

Шаг 5. [Увеличение c_j .] Установить $c_j \leftarrow c_j + 1$ и перейти к шагу 2.

Генерация всех размещений

Размещением из n элементов по k называется k -элементный упорядоченный набор, выбранный n -элементного множества. Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ниже перечислены (не в лексикографическом порядке!) все 2-размещения из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

01, 10, 02, 20, 03, 30, 12, 21, 13, 31, 23, 32.

Сгенерировать все k -размещения множества можно следующим образом:

- сгенерировать все k -сочетания заданного множества;
- для каждого найденного сочетания сгенерировать все перестановки элементов этого сочетания.

Задание

1. Реализовать функцию генерации в лексикографическом порядке всех k -сочетаний из множества $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ при заданных значениях n и k .
2. Реализовать функцию генерации всех k -размещений из множества $\{0, \dots, n - 1\}$ при заданных значениях n и k .
3. Реализовать генерацию сочетания по номеру и нахождение номера сочетания.

Алгоритмы разработать самостоятельно. Генерировать все сочетания для выполнения этого задания нельзя.

Указание: для выполнения этого задания полезно будет вспомнить комбинаторное доказательство тождества

$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен включать:

1. Титульный лист; задание; исходный код.
2. Примеры работы программы (скриншоты).
3. Псевдокоды алгоритмов для задания 3.
4. Выводы.

Литература

Кнут Д. Э. Искусство программирования, том 4, А. Комбинаторные алгоритмы, часть 1 / Москва: Вильямс, 2013. – Т. 4. – 960 с.