

Занятие 16. Деревья

№1. В стране Древляндия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом каждые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

№2. Пусть дерево содержит $n \geq 2$ вершин. Докажите, что в нём есть по меньшей мере две вершины, из которых выходит ровно одно ребро (такие вершины называются *висячими*).

№3. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.

№4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

№5. (а) В стране 100 городов. Дорога может соединить два города. Какое наименьшее количество дорог надо построить, чтобы из любого города можно было бы проехать в любой другой?

(б) В стране 100 городов. Любые два города соединены ровно одной дорогой. Какое наибольшее количество дорог можно перекрыть, чтобы после этого всё равно из любого города можно было бы проехать в любой другой?

(в) В стране две области по 50 городов. Два города соединены дорогой тогда и только тогда, когда они находятся в разных областях. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой.

(г) Какое наибольшее количество дорог можно перекрыть в стране из пункта (в), чтобы после этого всё равно из любого города можно было бы проехать в любой другой?

(д) В стране 10 областей по 10 городов. Два города соединены дорогой тогда и только тогда, когда они находятся в разных областях. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой.

(е) Какое наибольшее количество дорог можно перекрыть в стране из пункта (д), чтобы после этого всё равно из любого города можно было бы проехать в любой другой?

№6. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

№7. В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при этих условиях? (В королевстве действовал закон: «вассал моего вассала — не мой вассал»).

№8. У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

№9. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?