ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ   
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

**Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова**

Зиннуров Булат Дамирович

**Моделирование пространственно-распределенных эволюционных игр**

Выпускная квалификационная работа

по направлению 01.03.04 Прикладная математика

шифр наименование направления подготовки

студента образовательной программы магистратуры  
«Прикладная математика»

наименование образовательной программы

|  |  |
| --- | --- |
| Студент  Б.Д. Зиннуров  Рецензент  Доцент, базовая кафедра ПИКСИС ВЦ РАН  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Л.Ю. Бараш | Научный руководитель  доцент ДПМ МИЭМ НИУ ВШЭ, PhD  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Е.А. Буровский |
| Москва 2019 | |

Оглавление

[Аннотация 2](#_Toc8263455)

[Введение 2](#_Toc8263456)

[Классическая игра на квадратной решётке 2](#_Toc8263457)

[Режимы игры 3](#_Toc8263458)

[Треугольная решётка 4](#_Toc8263459)

[Зависимость плотности компонент от времени 5](#_Toc8263460)

[Решёточные звери 9](#_Toc8263461)

[Беспорядок 13](#_Toc8263462)

[Список литературы 14](#_Toc8263463)

# Аннотация

Мы изучаем пространственно-распределённую эволюционную игру, основанную на Дилемме заключённого на квадратной и треугольной решётках. В ходе работы исследуются временная зависимость средней плотности игроков для различных режимов игры на треугольной решётке. Также описано поведение «решёточных зверей» для ряда режимов игры. Далее проведено моделирование игры на квадратной решётке с регулируемым процентом неактивных узлов.

# Введение

## Парная игра

Мы изучаем пространственную игру, основанную на Дилемме заключённого. В общей формулировке дилеммы есть два игрока, каждый из которых может сотрудничать, либо предать. Игрок, выбравший первую стратегию, называется кооператором C, вторую – дефектором D. Дилемма заключается в том, что игроки не всегда будут сотрудничать друг с другом, даже если в сумме они получили бы больший выигрыш. Предполагается, что игрока больше заботит выгода, которую получает он сам. [1]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | C | D |
| C | S | 0 |
| D | T | 0 |

*Таблица 1. Матрица выигрышей Дилеммы заключённого.*

Если оба игрока кооператоры – каждый из них получает выигрыш *S*. Если один игрок дефектор, а другой кооператор – дефектор получает *T>S ( где T/S=b)*, а кооператор не получает ничего, как и в случае двух дефекторов. Без ограничений общности положим, что *S=1*. Тогда *T=b* [2].

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | C | D |
| C | 1 | 0 |
| D | b | 0 |

*Таблица 2. Матрица выигрышей Дилеммы заключённого, b – параметр выигрыша.*

## Классическая игра на квадратной решётке

В игре участвуют L2 агентов на узлах квадратной решётки L×L с периодическими граничными условиями. На каждом ходу участник может быть кооператором или дефектором. Участник играет с ближайшими агентами (соседями) и с самим собой и получает выигрыш, равный сумме выигрышей во всех своих попарных играх согласно таблице 2. После этого участник определяет, кто из его соседей имеет наибольший выигрыш и на следующем ходу выбирает его стратегию. Все игроки на решётке действуют синхронно и помнят только предыдущий ход. Из выше сказанного следует, что стратегию игрока определяют его соседи и параметр выигрыша *b*.

Начальное состояние игры случайное, правила эволюции детерминистические [2]. На больших временах система приходит в стационарное состояние, которое характеризуется определённым значением плотности компонент, зависящим от параметров игры.

В такой формулировке Дилемма заключённого называется игрой Новака-Мэя, по имени первых исследователей, изучавших данную игру [2, 3].

## Режимы игры

Существуют точки перехода *b*, которые разделяют 2 режима игры. Разные режимы игры определяются разной средней плотностью кооператоров[[1]](#footnote-1)[[2]](#footnote-2) после достижения игрой стационарного состояния и разделяются скачкообразным изменением этой плотности. Внутри одного режима для разных *b* плотность кооператоров одинакова. Поведение игры в точках перехода неопределённо, т.е. одинаково выгодно быть кооператором или дефектором. Этот факт поможет найти эти точки аналитически.

Суммарный выигрыш игрока зависит от количества кооператоров вокруг него. Для дефектора это *b ∙ c1, где c1=1,…,8* – количество соседей-кооператоров. Для кооператора это *1 ∙ c2, где c2=1,…,9 –* количество соседей-кооператоров, включая его самого игрока.

Приравниваем обе части друг другу: *b ∙ c1=c2*, получим, что *b=c2/c1.* (1)

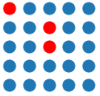
*Рис. 1. Случай максимального выигрыша для дефектора (изображён красным) и кооператора (изображён синим) соответственно.*

Значение *c1=0* имеет место быть – оно показывает, что у дефектора нет соседей-кооператоров. Тем не менее *c1=0* недопустимо для выполнения уравнения (1): суммарный выигрыш дефектора получается равным 0, когда как минимальный выигрыш кооператора равен 1. Таким образом, значения точек перехода *b* – простые дроби с числителем от 1 до 9 и знаменателем от 1 до 8.

Мы получаем большое число точек перехода, но нас интересуют только *1<b<3*, т.к. в остальных случаях поведение игры тривиально [4, 5].

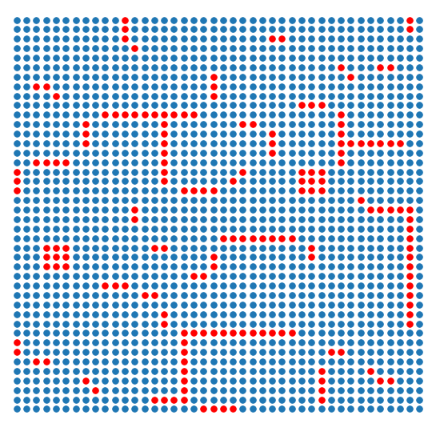
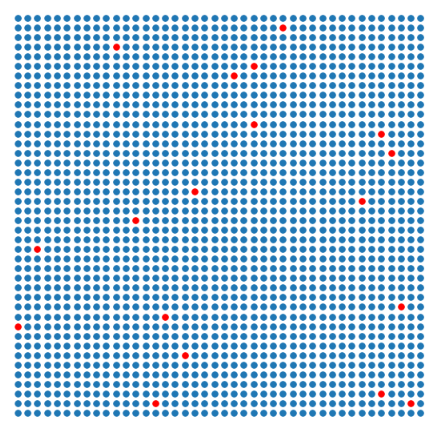
Для такого отрезка значений *b* существует 19 точек перехода: 1, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 5/4, 9/7, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 5/3, 7/4, 9/5, 2, 9/4, 7/3, 5/2, 8/3.

На частном примере убедимся в справедливости наличия точек перехода, разделяющих режимы игры. Для этого рассмотрим часть игрового поля *5×5.* Такой размер необходим, чтобы вычислить суммарный выигрыш одного игрока и всех его соседей.

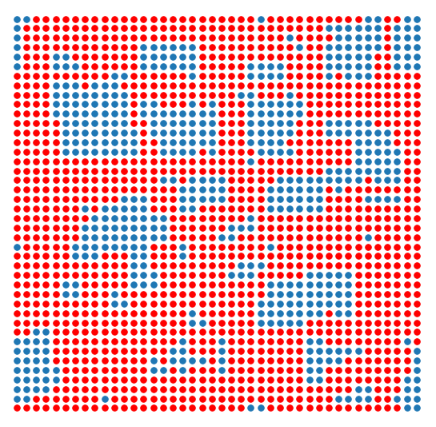


*Рис. 2. Участок игрового поля 5×5.*

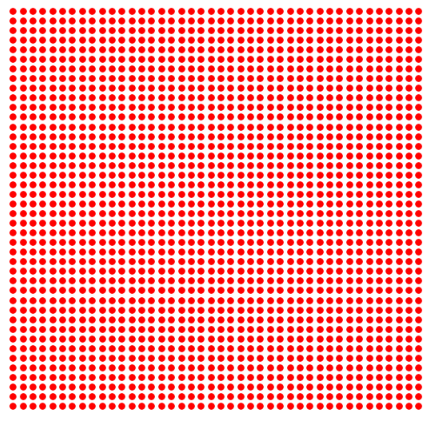
Суммарный выигрыш центрального игрока равен *7 ∙ b.* Среди соседей максимальный выигрыш в зависимости от b равен либо *7 ∙ b*, либо *8.* Таким образом, для *b<8/7* дефектор в центре на следующем ходу станет кооператором, в противном случае он не изменит стратегию. Таким образом, критическая точка *b=8/7* разделяет два режима игры.



*1<b<9/8 5/4<b<9/7*

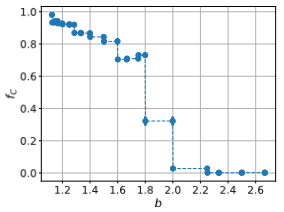


*7/4<b<9/2*  *9/5<b<2*



*8/3<b<3*

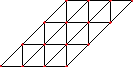
*Рис. 3. Картины игрового поля, полученные после достижения системы стационарного состояния в разных режимах. Режимы отличаются не только плотностью кооператоров, но и поведением самой игры: постепенно разрастающиеся очаги дефекторов на первых трёх картинах приводят к блуждающим участкам кооператоров на поле дефекторов в режиме 9/5<b<2, которые и вовсе исчезают по мере увеличения параметра b.*



*Рис. 4. Плотность кооператоров в стационарном состоянии как функция параметра игры b. Значение усреднено по реализациям начального распределения стратегий и по времени. Воспроизведено из [5].*

## Треугольная решётка

Рассмотрим игру Новака-Мэя на треугольной решётке. Здесь у каждого игрока меньшее число соседей. Из этого следует, что такая решётка имеет меньшее количество точек перехода. Более того, множество точек перехода треугольной решётки содержится во множестве точек перехода квадратной решётки.



*Рис. 5. Треугольная решётка 4×4. Длины вертикального, горизонтального и диагонального рёбер одинаковы, т.е. у каждого узла 6 соседей.*

# Зависимость плотности компонент от времени

Целью является изучение временной зависимости плотности кооператоров на треугольной решётке, когда игра достигает стабильного состояния. Исследования проводятся при различных значениях таких параметров игры, как коэффициент выигрыша b, размер решётки, начальное количество кооператоров и реализация начального распределения стратегий на игровом поле. Стационарное поведение игры скачкообразно меняется в критических значения параметра игры b: 1, 5/4, 4/3, 3/2, 5/3, 7/4, 2, 7/3, 3.

В каждом случае система делает 5000 шагов отжига, после чего рассматривается поведение системы на каждом шаге. Все вычисления проводились на Python 3.

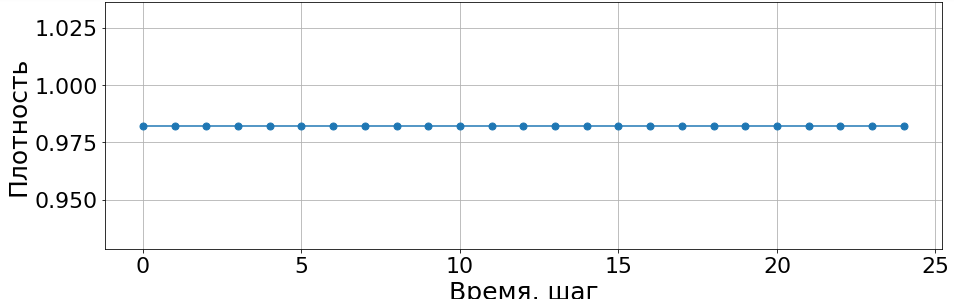
**Анализ Фурье (написать формулы)**

Метод предоставляет нам наглядные результаты исследования временного сигнала. Благодаря нему мы можем сделать правильный вывод о флуктуации плотности.

Мы разлагаем функцию на колебательные компоненты. Поскольку набор плотностей, которые мы имеем из проведенного эксперимента, является функцией времени, мы можем использовать этот частотный анализ, чтобы узнать о периодическом характере функции.

**1<b<5/4**

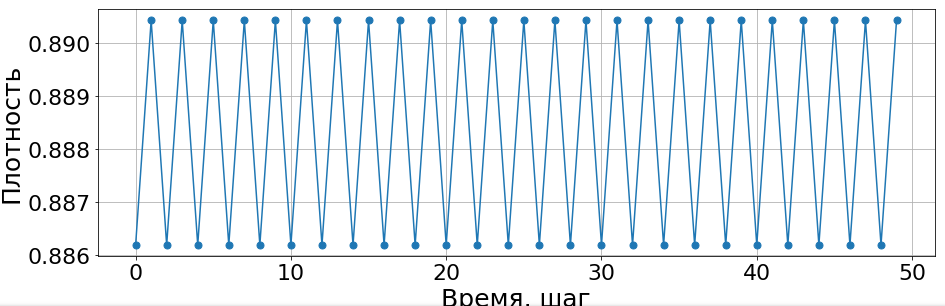
Для всех рассмотренных размеров игрового поля, значений начальной концентрации и реализаций начального распределения стратегий результат един: количество кооператоров достигает определённого значения и колебания отсутствуют.



*Рис. 6. Плотность кооператоров как функция времени для поля 72×72 с начальной концентрацией кооператоров 50%.*

**5/4<b<4/3**

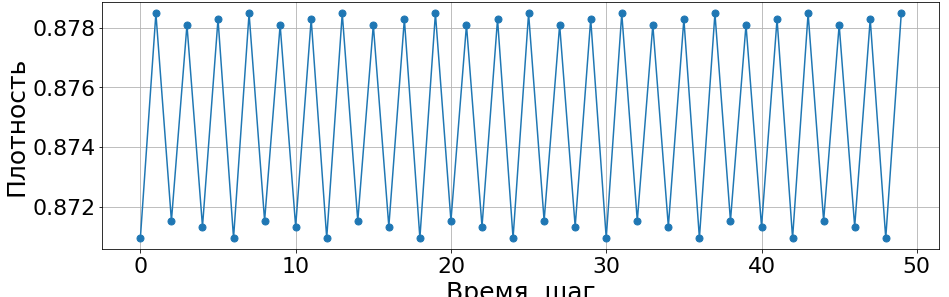
В этом режиме для всех рассмотренных размеров поля, значений начальной концентрации и реализаций начального распределения стратегий имеем данное колебание плотности (см. рис. 4).

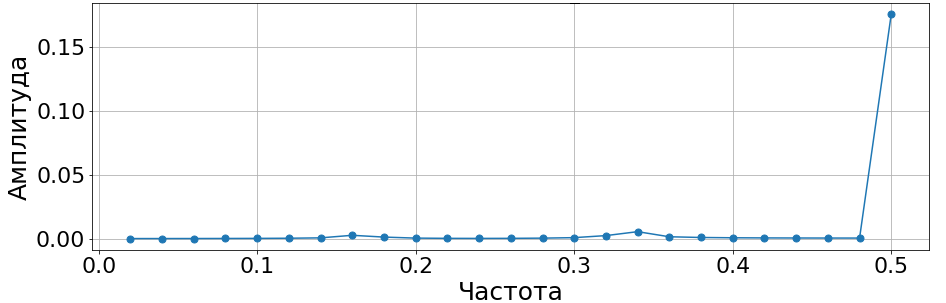
****

*Рис. 7. Плотность кооператоров как функция времени для поля 72×72 с начальной концентрацией кооператоров 50%.*

Как видно из рис. 4, сигнал является монохроматическим, содержит единственную частоту, равную 0.5, что соответствует периоду в 2 шага игры. (Дальнейшие исследования показали, что во всех случаях, когда система имеет единственный период колебаний, он равен 2).

Однако есть исключение для начальной концентрации 70% поля 72×72.

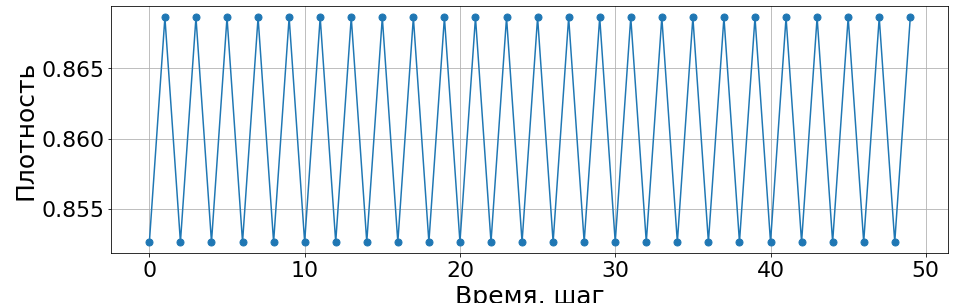




*Рис. 8. Плотность кооператоров как функция времени (верхняя панель), Фурье-спектр плотности (нижняя панель) для поля 72×72 с начальной концентрацией кооператоров 70%.*

В данном случае колебания более сложные. Присутствие разных частот означает, что существуют локальные области («решёточные звери»), колеблющиеся каждая со своим постоянным периодом, что и вызывает такую флуктуацию плотности. Тем не менее, как видно из второго графика на рис. 5, частота 0.5 преобладает, т.е. большинство зверей колеблется с периодом 2, что и замечаем на первом графике.

Ситуация меняется, если использовать другую реализацию начального распределения стратегий.



*Рис. 9. Плотность кооператоров как функция времени для поля 72×72 с начальной концентрацией кооператоров 70%.*

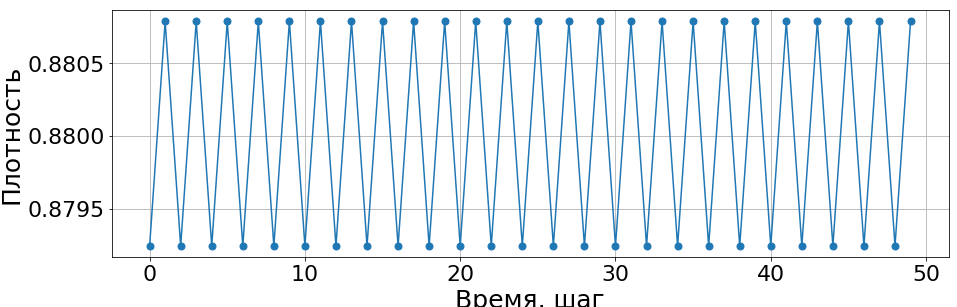
Здесь мы видим колебание с единственным периодом 2.

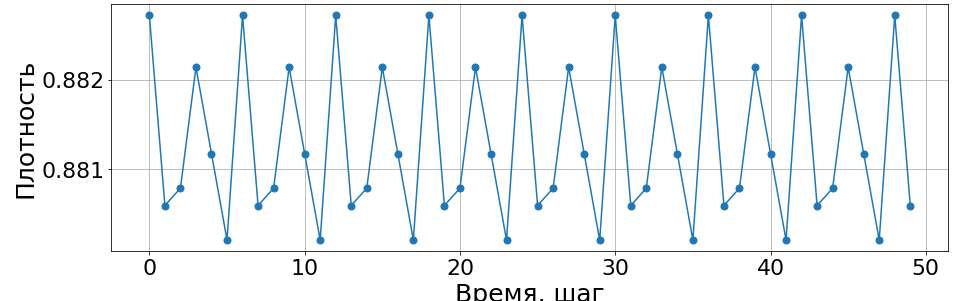
**4/3<b<3/2**

Поведение системы на полях 33×33 и 72×72 схожее: сложный период колебаний при начальной концентрации кооператоров 21% и простой период при 50% и 70%.

Система ведёт себя иначе на малом поле 15×15: при 21% колебания плотности монохроматичны, как и при 50%, а при 70% они отсутствуют.

При использовании другой реализации начального распределения стратегий получаем совершенно иные результаты: для поля 72×72 при всех начальных концентрациях присутствует сложный период, для поля 33×33 – только простой, а для поля 15×15 колебания присутствуют только при 21%, и они простые.



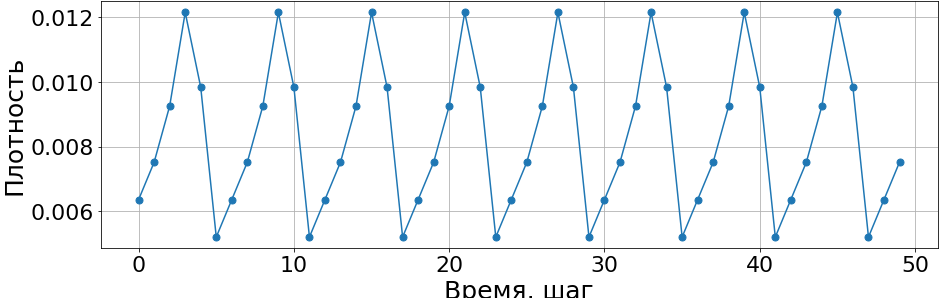


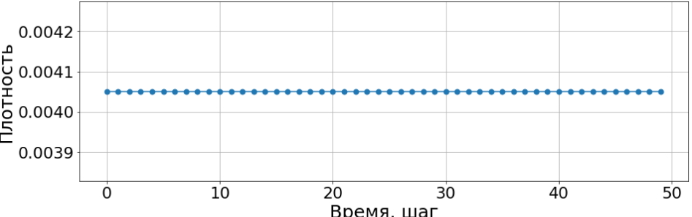
*Рис. 10. Плотности кооператоров как функции времени для поля 72×72 с начальной концентрацией кооператоров 50% и разными реализациями начального распределения стратегий.*

**7/3<b<3**

При таком граничном случае на малом поле 15×15 при всех начальных концентрациях кооператоров и при всех рассмотренных реализациях начального распределения стратегий плотность кооператоров равна нулю.

При концентрации 21% и 50% такая же картина повторяется и для полей 33×33 и 72×72. Однако для концентрации 70% в зависимости от реализации начального распределения стратегий плотность может представлять ненулевую постоянную величину или колебаться около ненулевого значения.



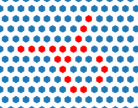


*Рис. 11. Плотности кооператоров как функции времени для поля 72×72 с начальной концентрацией кооператоров 70% и разными реализациями начального распределения стратегий.*

Во всех режимах игры наблюдается периодичность плотности кооператоров. Нередко период колебаний плотности является простым и равен 2. Во всех режимах, кроме 1<b<5/4, появляется зависимость плотности от различных параметров игры, что и было продемонстрировано в статье на примере некоторых режимов.

# Решёточные звери

Рассмотрим во всех режимах игры поведение решёточных зверей, которые получались при определённых параметрах.

****

*Рис. 12.*

При 1<b<7/6 вырождается в 2 точки.

При 7/6<b<6/5 точки со сдвигом по фазе превращаются в ромашек.

При 6/5<b<5/4 есть две пары стабильных точек. Есть мигающая точка-ромашка.

При 5/4<b<4/3 омега сохраняется, мигание тройки дефекторов.

При 4/3<b<7/5 омега колеблется с периодом 4.

При 7/5<b<3/2 новый зверь колеблется с периодом 2 - гантеля с точкой и линия с ромашкой.

При 3/2<b<5/3 новый, другой зверь колеблется с периодом 2 - две точки вместе превращаются в ромашки.

При 5/3<b<7/4 новый, другой зверь колеблется с периодом 2 - мигание точки-ромашки.

При 7/4<b<2 новый, другой зверь колеблется с периодом 2 - перемещение ромашки.

При 2<b<7/3 новый, лругой зверь колеблется с периодом 2 - перемещается точка.

При 7/3<b<5/2 зверь разрастается до размеров поля, оставляя "ромашки" кооператоров. Если 2 ромашки расположены на расстоянии одного дефектора друг от друга, то все подобные пары колеблются в одной фазе с периодом 2.

При 5/2<b<3 зависит от размера. При 72x72 зверь разрастается на всё поле, оставляя 2 стабильных кооператорных треугольника с округлыми концами. В остальных проверенных случаях, в т.ч. при 69 и 75 всё поле дефекторное.

****

*Рис. 13.*

При 1<b<7/6 зверь пропадает

При 7/6<b<6/5 -//-

При 6/5<b<5/4 -//-

При 5/4<b<4/3 -//-

При 4/3<b<7/5 -//-

При 7/5<b<3/2 -//-

При 3/2<b<5/3 зверь не меняется, стабилен.

При 5/3<b<7/4 -//-

При 7/4<b<2 колебания зверей с полным периодом 3.

При 2<b<7/3 стабильный треугольник с округлыми концами.

При 7/3<b<5/2 зверь разрастается до размеров поля, оставляя "ромашки" кооператоров. Если 2 ромашки расположены на расстоянии одного дефектора друг от друга, то все подобные пары колеблются в одной фазе с периодом 2.

При 5/2<b<3 зависит от размера. До 144 остаются 1-2 кооператорных зверя, выше - сплошное дефекторное поле.



*Рис. 14.*

При 1<b<7/6 зверь стабилен.

При 7/6<b<6/5 превращение в ромашки с периодом 2.

При 6/5<b<5/4 превращение в ромашки с периодом 2.

При 5/4<b<4/3 превращение в ромашки с периодом 2.

При 4/3<b<7/5 превращение в ромашки, потом в змейку. Зверь стабилен.

При 7/5<b<3/2 чередование ромашки со змейкой с периодом 2.

При 3/2<b<5/3 чередование ромашки со змейкой с периодом 2.

При 5/3<b<7/4 превращение ромашки в параллелограмм. Зверь стабилен.

При 7/4<b<2 чередование ромашки с параллелограммом.

При 2<b<7/3 стабильные ромашки.

При 7/3<b<5/2 зверь разрастается до размеров поля, оставляя "ромашки" кооператоров. Если 2 ромашки расположены на расстоянии одного дефектора друг от друга, то все подобные пары колеблются в одной фазе с периодом 2.

При 5/2<b<3 зависит от размера. При 114x114 зверь разрастается на всё поле оставляя 2 стабильных ромашки. В остальных проверенных случаях, в т.ч. при 111 и 117 всё поле дефекторное.



*Рис. 15.*

При 1<b<7/6 вырождается в точку.

При 7/6<b<6/5 чередование точки и ромашки.

При 6/5<b<5/4 -//-

При 5/4<b<4/3 -//-

При 4/3<b<7/5 -//-

При 7/5<b<3/2 -//-

При 3/2<b<5/3 -//-

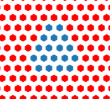
При 5/3<b<7/4 -//-

При 7/4<b<2 -//-

При 2<b<7/3 стабильная ромашка.

При 7/3<b<5/2 зверь разрастается до размеров поля, оставляя "ромашки" кооператоров. Если 2 ромашки расположены на расстоянии одного дефектора друг от друга, то все подобные пары колеблются в одной фазе с периодом 2.

При 5/2<b<3 зависит от размера. При 69x69 и 72x72 зверь разрастается на всё поле, оставляя 2 стабильных кооператорных треугольника с округлыми концами. В остальных проверенных случаях, в т.ч. при 66 и 75 всё поле дефекторное.



*Рис. 16.*

При 1<b<7/6 зверь разрастается на всё поле.

При 7/6<b<6/5 -//-

При 6/5<b<5/4 -//-

При 5/4<b<4/3 зверь разрастается на всё поле оставляя "Y"-образную линию точек дефекторов, которые мигают с ромашками с периодом 2.

При 4/3<b<7/5 оставляет три точки сверху-справа, которые мигают с ромашками с периодом 2.

При 7/5<b<3/2 -//-

При 3/2<b<5/3 "Y"-образная стабильная линия четвёрок-дефекторов

При 5/3<b<7/4 -//-

При 7/4<b<2 ещё более плотная "Y"-образная линия дефекторов, полный период колебания - 3.

При 2<b<7/3 стал шестиконечной звездой и остался ей.

При 7/3<b<5/2 периодически превращается в разных зверей. Полный период - 6.

При 5/2<b<3 - зверь не меняется, стабилен.

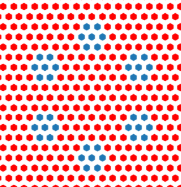


Рис. 17.

При 1<b<7/6 исчезает, оставляя "X"-образную прерывистую линию единичек-дефекторов.

При 7/6<b<6/5 единички этой линии мигают с ромашками со сдвигом по фазе (нижний дефектор отдельно от остальных). Полный период - 2.

При 6/5<b<5/4 линии дефекторов (промежуток между дефекторами сузился) пересекаются в звезду, которая расположена в том самом нижнем дефекторе). В центре свободных участков чередование единичек дефекторов с ромашками.

При 5/4<b<4/3 линии звезды сплошные. Мигание центра звезды с "Y"-образной линией (по форме похожа на ту, что была при "треугольнике с округлыми концами") со свдигом по фазе. Период - 2.

При 4/3<b<7/5 центр звезды всё так же мигает с периодом 2. От "Y"-образной линии остались точки в узлах. Колеблются в противофазе со звездой.

При 7/5<b<3/2 -//-

При 3/2<b<5/3 снова вернулась "Y"-образная линия. Её центры колеблются со свдигом фазы с центром звезды.

При 5/3<b<7/4 -//-

При 7/4<b<2 звезда и Y колеблются с периодом 3.

При 2<b<7/3 начальный зверь стабилен.

При 7/3<b<5/2 -//-

При 5/2<b<3 -//-

# Беспорядок

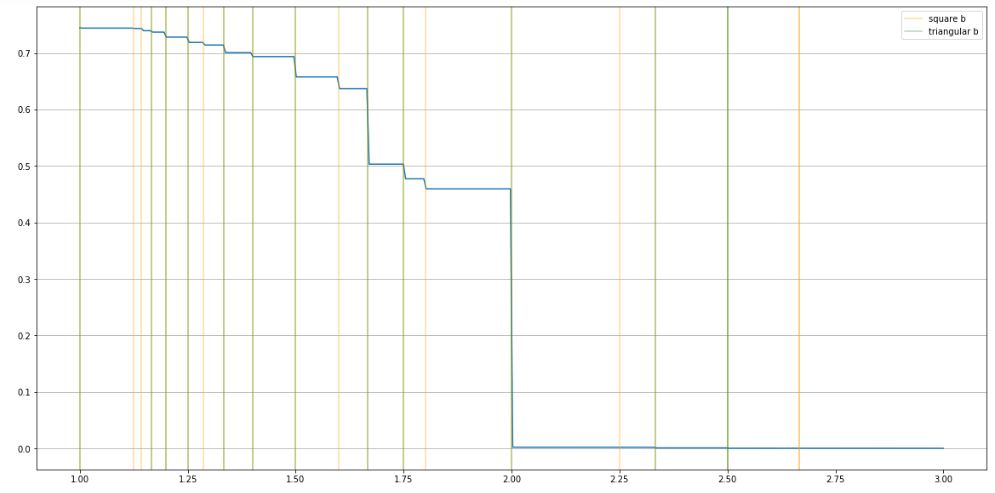
[6]

Задачей является исследовать, как беспорядок меняет игру на квадратной решётке. Под беспорядком подразумевается отключение регулируемого процента узлов решётки. Мы хотим достичь такого уровня беспорядка, чтобы режимы игры на квадратной решётке были такими же, как и на треугольной.

Для проведения игры требуется введение начальных условий.

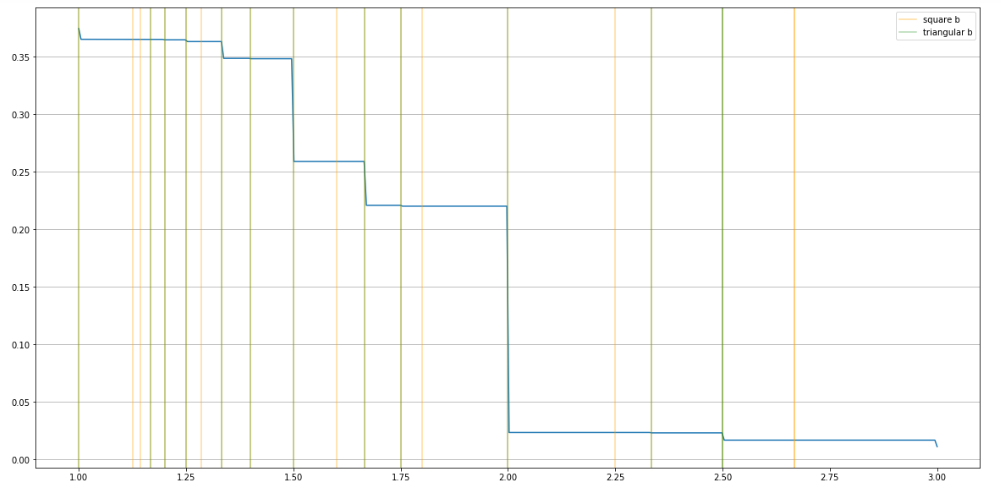
Игры проводятся для большого множества равно распределённых b на отрезке от 1 до 3. Для всех игр количество кооператоров было установлено на отметке 50% от общего числа активных участников. Перед началом измерений для каждой игры проводилось 5000 шагов отжига, чтобы система наверняка пришла в стационарное состояние. После отжига плотность кооператоров наблюдается в течение 500 шагов. Чтобы минимизировать влияние случайности на результат вычислений, игры проводятся для десяти разных реализаций начального распределения игроков на решётке.

Усредняем значения плотности по реализациям и по шагам системы. В результате получаем такие графики.



*Рис. 18. График плотности кооператоров для 25% неактивных узлов. Оранжевыми и зелёными вертикальными линиями обозначены точки перехода для квадратной и треугольной решёток соответственно. Как видно из графика для такого количества неактивных участников для системы всё ещё необходимы точки перехода квадратной решётки.*

В результате проведения множества вычислительных экспериментов стало ясно, что, начиная с 60% неактивных узлов система на квадратной решётке ведёт себя как система на треугольной.



*Рис. 19. График плотности кооператоров для 60% неактивных узлов. Точки перехода треугольной решётки отвечают всем скачкам на графике.*

В результате было получено процентное количество неактивных участников в игре на квадратной решётке, благодаря которому удалось смоделировать поведение системы на одном типе решётке с помощью другого типа.

# Список литературы

1. Axelrod, Robert and Hamilton, William D. (1981). «The Evolution of Cooperation». Science, 211 : 1390—1396.
2. M.A. Nowak and R.M. May, Evolutionary games and spatial chaos, Nature 359, 826 (1992).
3. M.A. Nowak, Evolutionary Dynamics: Exploring the equations of life, The Belknap Press, (2006).
4. S. Kolotev, A. Malyutin, E. Burovski, S. Krashakov, L. Shchur, Dynamic fractals in spatial evolutionary games, arXiv:1711.03922v1 [physics.soc-ph] 10 Nov 2017
5. E. Burovski, A. Malyutin, L. Shchur, On the geometric structures in evolutionary games on square and triangular lattices, arXiv:1811.08784.
6. Mendeli H., Vainstein, Jeferson J. Arenzon, Spatial social dilemmas: dilution, mobility and grouping effects with imitation dynamics, Physica A, v. 394, 145 (2014).

1. Средняя плотность кооператоров – отношение количества кооператоров к общему количеству игроков усреднённое по реализациям начального распределения стратегий и по времени. [↑](#footnote-ref-1)
2. Плотность именно кооператоров берётся для определённости. С таким же успехом можно брать плотность дефекторов. [↑](#footnote-ref-2)