2020—2021 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号___________　　　　姓名____________　　　　成绩___________

考试日期：2021 年 1 月 14 日

(注: **I** 表示单位矩阵)

一. 填空(2 分×15)

(1)设 $\boldsymbol{B}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

不变因子为　1，　1，　$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，

初等因子为　$(\lambda-1)^2$，$(\lambda+2)$。

(2)若 3 阶阵 $\mathbf{A}\neq 2\mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I}=0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A}=$ $\underline{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}}$

(3) 设 A 的各列互相正交且模长为 1，则 $\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{H}=$___0___；设 A, B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵，

则 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}&0\\0&\mathbf{B}\end{pmatrix}^{+}=\underline{\begin{pmatrix}\mathbf{A}^H&0\\0&\mathbf{B}^H\end{pmatrix}}$

(4)若 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_1=(1,0,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,0,1)$，$\beta_1=(1,1,1,0)$，

$\beta_2=(0,0,0,1)$，则 $V_1\cap V_2$ 的维数为__**0**__。

(5) 设 A $=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，定义 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ =A .， $\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}^2$，则 $\|A\|_2=(1+\sqrt{2})$（或者

$(3\pm 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$）；设 $x=(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})^T$，$y=(\boldsymbol{2},\boldsymbol{2})^T$ 在 2-范数下，$\boldsymbol{T}$x 与 $\boldsymbol{T}$y 的距离为 $\underline{\sqrt{10}}$。

（1） $A^HA=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$，解 A^HA 的特征值为 $3\pm 2\sqrt{2}$，

$\|A\|_2=(1+\sqrt{2})$；

（2） $Tx = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$$Ty = T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\|Tx - Ty\|_2 = \left[(1-2)^2 + (3-6)^2\right]^{1/2} = \sqrt{10}$$

(6) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$， 则 $(e^A)^H e^A =$ ___$\mathbf{I}$__________

$$(e^A)^H e^A = (e^{A^H})e^A = (e^{-A})e^A = e^{-A+A} = I$$

(7)设 $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的奇异值为 $\sqrt{3}$, 1, 0

（8）设 B 是 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶零矩阵， $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^+$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix}0 & 0\\B^{-1} & 0\end{pmatrix}$

（9）线性方程组 $Ax=b$ 相容⇔$AA^{(1)}b=b$（答矩阵 A 的秩与增广矩阵的秩相等也可以） ，且其通解为 $x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y$，其中 $y\in C^n$ 任意（答 $x = A^+b + \left(I - A^+A\right)y$ 也可以）

二.(8 分×5 分)计算下列各题

（1）设 $R^3[x]$ 为次数小于 3 的实系数多项式集合，$R^3[x]$ 中定义内积为 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$，求 $R^3[x]$ 的一组标准正交基。

解：先取一组基为 $1, x, x^2$，再根据题中内积定义进行 Schmidt 正交化。

$$y_1=1$$

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=x-\frac{\int_{-1}^{1}xdx}{\int_{-1}^{1}1dx}y_1=x-0=x$$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1$$

$$=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2xdx}{\int_{-1}^{1}xxdx}x-\frac{\int_{-1}^{1}x^2dx}{\int_{-1}^{1}1dx}1=x^2-0-\frac{1}{3}=x^2-\frac{1}{3}$$

对$1,x,x^2-\frac{1}{3}$单位化：$z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=1$，$z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=\frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x\cdot xdx}}=\frac{\sqrt{6}x}{2}$，

$$z_3=\frac{y_3}{\|y_3\|}\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}}=\frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}$$

最后得到该组标准正交基为$1,\frac{\sqrt{6}x}{2},\frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}$

（2）设A是 4 阶方阵，且$\lambda I-A$ 等价于准对角阵：

$$D=diag\{\lambda-1,(\lambda-2)^2,\lambda-2\}$$

写出$\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子，A 的最小多项式，A 的 Jordan 标准形。

解：（1）D 的初等因子为$\lambda-1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$；

（2）D 的不变因子为$d_4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，$d_3=\lambda-2$，$d_2=d_1=1$；

（3）A 的最小多项式为$(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

（4）A 的 Jordan 标准形为：

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&2&1&\\&&2&\\&&&2\end{bmatrix}$$

注意：只要这几块有就可以，顺序可以调换

（3）在欧式空间 R^4 中，对于任意两个向量

$$\alpha=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T\text{，}\quad \beta=(y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4)^T\text{，}$$

规定 α 与 β 的内积为：$(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+4x_4y_4$。

已知 $\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 1,\quad 1)^T$，$\alpha_2=(-1,\quad -1,\quad 1,\quad 1)^T$，求 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 在欧式空间 R^4 中的正交补。

解：设 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 的正交补中的向量为 $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T$，则

$(\alpha_1,x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0$

$(\alpha,\beta)=-x_1-2x_2+3x_3y_3+4x_4y_4=0$

解方程组得：$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$，

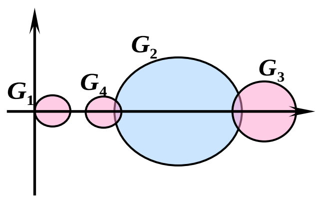
所以 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 为 $L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$

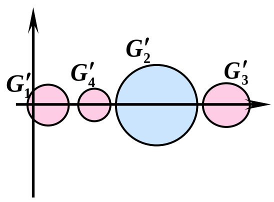
(4) 用盖尔圆定理隔离矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&9&1.3&-2\\1&0&15&1.4\\0&-1&0&4\end{bmatrix}$ 的特征值.（要求画图表示）

① $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$；　$G_2:|z-9|\le 4.3$；　$G_3:|z-15|\le 2.4$；　$G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交.





② $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5/3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 5/3 & 0 & 0\\ 0.6 & 9 & 1.3 & -2\\ 0.6 & 0 & 15 & 1.4\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B}$ 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le\dfrac{5}{3}$； $G_2':|z-9|\le 3.9$； $G_3':|z-15|\le 2$； $G_4':|z-4|\le 1$ ，其中各含 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值. 结合①与②可得：G_1,G_2',G_3',G_4' 中各含 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

[注] 可取 $d_1=1.6\sim 1.9$.

（5）设线性空间 V 的一组基为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$， V 中的线性变换 T 满足

$$T(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_4)=\boldsymbol{x}_2$$

求：①T 的值域 $R(T)$ 的一组基；

②求 T 的核 $N(T)$ 的一组基。

解：T 在基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$R(A)=L(\alpha_1,\alpha_2)$ 其中 $\alpha_1=(1,0,0,0)^T$ ， $\alpha_2=(0,1,0,0)^T$

$R(T)$ 的基为：$\beta_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\alpha_1=\mathrm{x}_1$，

$$\beta_2=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\alpha_2=\mathrm{x}_2$$

$\boldsymbol{Ax}=0$ 基础解系为 $\gamma_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$， $\gamma_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$N(T)$ 的一个基为 $\mathrm{y}_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\gamma_1=\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1$， $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1$

四、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$，求 e^{A} 的谱分解与谱半径

解法一：A 的特征多项式是 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)$

直接根据特征值的性质，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{e}^{2},\boldsymbol{e}^{5}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$ 的特征向量为 $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ 的特征向量，即存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$ 使得

$P^{-1}e^{A}P=\begin{pmatrix}e^{2}&\\&e^{5}\end{pmatrix}$，即 $e^{A}=P\begin{pmatrix}e^{2}&\\&e^{5}\end{pmatrix}P^{-1}$

因为 $P=\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$，所以 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

所以 $E_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

谱半径为 $\boldsymbol{e}^{5}$

解法二　A 的特征多项式是 $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)$

取 $\boldsymbol{f}(\lambda)=\boldsymbol{e}^{\lambda}$ ，设 $\boldsymbol{f}(\lambda)=\varphi(\lambda)\boldsymbol{g}(\lambda)+\boldsymbol{a}\lambda+\boldsymbol{b}$

则 $\boldsymbol{f}(2)=\boldsymbol{e}^{2}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{f}(5)=\boldsymbol{e}^{5}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

所以 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}^{5}-\boldsymbol{e}^{2})$ ，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(5\boldsymbol{e}^{2}-2\boldsymbol{e}^{5})$

因此 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$ 的特征值为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，及 $5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，也就是 $\boldsymbol{e}^{2},\boldsymbol{e}^{5}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$的特征向量为$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$的特征向量，即存在可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$使得

$P^{-1}e^{A}P=\begin{pmatrix}e^{2} & \\ & e^{5}\end{pmatrix}$，即$e^{A}=P\begin{pmatrix}e^{2} & \\ & e^{5}\end{pmatrix}P^{-1}$

因为$P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，所以$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

所以$E_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

谱半径为$\boldsymbol{e}^{5}$

解法三：

取 $\boldsymbol{f}(\lambda) = \boldsymbol{e}^{\lambda}$ ，设 $\boldsymbol{f}(\lambda) = \varphi(\lambda)\boldsymbol{g}(\lambda) + \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}$

则 $\boldsymbol{f}(2) = \boldsymbol{e}^{2} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{f}(5) = \boldsymbol{e}^{5} = 5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

所以$\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}^{5} - \boldsymbol{e}^{2})$ ，$\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}(5\boldsymbol{e}^{2} - 2\boldsymbol{e}^{5})$

因此 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^{5} + 2\boldsymbol{e}^{2} & 2\boldsymbol{e}^{5} - 2\boldsymbol{e}^{2}\\ \boldsymbol{e}^{5} - \boldsymbol{e}^{2} & 2\boldsymbol{e}^{5} + \boldsymbol{e}^{2}\end{bmatrix}$，然后求 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$的特征值$\boldsymbol{e}^{2}, \boldsymbol{e}^{5}$

计算特征向量，得矩阵$P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，

所以$E_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$E_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

谱半径为e^5

五、（10 分）已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 6 & 0\end{bmatrix}$**，** $b=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-3\end{bmatrix}$**.**

1. **求 A 的满秩分解；**
2. **求 A^+；**
3. **用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；**
4. **求线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解，或者极小范数最小二乘解 x_0.**

（要求指出所求的是哪种解）

解 1. $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$， $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}=FG$

2. $F^+=\left(F^{\mathrm{T}}F\right)^{-1}F^{\mathrm{T}}=\frac{1}{65}\begin{bmatrix}13 & 0 & 26 & 0\\ 0 & 10 & 0 & -15\end{bmatrix}$

$$G^+=G^{\mathrm{T}}\left(GG^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & -4\\ 3 & 0\end{bmatrix},\quad A^+=G^+F^+=\frac{1}{650}\begin{bmatrix}13 & 0 & 26 & 0\\ 0 & 20 & 0 & -30\\ 0 & -40 & 0 & 60\\ 39 & 0 & 78 & 0\end{bmatrix}$$

3-4. $x_0=A^+b=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\2\\-4\\3\end{bmatrix}$， $AA^+b=Ax_0=b$，故 $Ax=b$ 有解.

x_0 是 $Ax=b$ 的极小范数解.

六、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$**，** $\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{2t}\\0\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$**，** $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$**.**

1. 求 e^{At}**；**

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$**满足初始条件** $\boldsymbol{x}(0)$**的解.**

解 1.（**求和法**）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$．因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}，\quad \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\quad (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\,\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

（**待定法**）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$．因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$．令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\qquad\ =1\\a+2b=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2\end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

2．$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{b}(s)=\left\{\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{2}\boldsymbol{A}\right\}\mathrm{e}^{2s}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}-t\\1\\t\end{bmatrix}$