2019—2020 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________　　　姓名__________　　　成绩__________

考试日期：2019 年 12 月 27 日

一、　填空题 （2 分×15）

(1) 若 **A** 为 3 阶方阵，且 $\lambda=4$ 为 **A** 的 3 重特征根，且 **A** 仅有一个线性无关的特征向量，则 **A** 的 Jordan 标准形为 $\underline{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$。

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{B}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式为 $\underline{(\lambda-1)(\lambda+2)}$，不变因子为（1， $(\lambda-1)$， $(\lambda-1)(\lambda+2)$），初等因子为（$(\lambda-1)$，$(\lambda-1)$，$(\lambda+2)$）。

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$， $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，其中 $|x|<1$，则 **A** 的从属于向量范数 $\|\mathbf{x}\|_1$ 的矩阵范数为 $\underline{\ 0.5\ }$，**f(A)** 为 $\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}}$。

(4) 设 $A(t)=\begin{pmatrix} t\cos t & e^t\sin t \\ t^2+1 & \ln(1+t) \end{pmatrix}$，则 $\dfrac{dA(t)}{dt}$ 为 $\underline{\begin{pmatrix} \cos t - t\sin t & e^t\sin t+e^t\cos t \\ 2t & \dfrac{1}{1+t} \end{pmatrix}}$。

(5) 按顺序写出 Moore-Penrose 方程

（$AXA=A$，$XAX=X$， $(AX)^H=AX$， $(XA)^H=XA$）。

(6) 设 $A=(a_1, a_2, \cdots a_n)$，$B=(b_1, b_2, \cdots b_n)$，$AB^T=10$，则 B^TA 的特征多项式为 $\underline{\lambda^{n-1}(\lambda-10)}$，$|B^TA|=$ _0（n>1），10(n=1)___。

(7) $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，则 $\begin{cases}\|x\|_1=2\\\|Ax\|_\infty=3\\\|A\|_\infty=4\end{cases}$

（8）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$B=A^TA$ 的特征值分别为 3，1，0，则矩阵 **A** 的奇异值为（ 1，$\sqrt{3}$，0 ）。

（9）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，则 **A** 的谱分解式中的谱值为 __-1 和 5__。

二、计算下列各题（8 分×5）

(1) 设 $A\in C^{8\times 8}$，$\lambda I-A\cong diag\{\lambda^2+1,1,\lambda^2-2,1,\lambda^2,\lambda,\lambda+1,1\}$，其中 **I** 为单位矩阵，$C$ 为复数域。求：

①$\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子，及 **Smith** 标准型；

②写出 **A** 的 **Jordan** 标准型及最小多项式。

解：$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-i,\lambda+i,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda^2,\lambda,\lambda+1$ ……………2 分

$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$d_8(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1),$ ……………1 分

$d_7(\lambda)=\lambda, d_6(\lambda)=d_5(\lambda)=d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)$
$=d_1(\lambda)=1$ ……………1 分

$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的标准型为 diag$\{1,1,1,1,1,1,\lambda,(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)\}$ …………1 分

$$\boldsymbol{A} \text{ 的 Jordan 标准型为 } \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & -\sqrt{2} & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$ ………1 分

最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)$。 …………2 分

（2）设线性空间V的一组基为$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$，$V$中的线性变换$T$满足

$$T(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_1,\quad T(\boldsymbol{x}_4)=\boldsymbol{x}_2$$

求：①T的值域$R(T)$的一组基；

②求T的核$N(T)$的一组基。

解：T在基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ …………3 分

$R(A)=L(\alpha_1,\alpha_2)$ 其中$\alpha_1=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,0)^T$ ………1 分

$R(T)$的基为：$\beta_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\alpha_1=\mathrm{x}_1$，

$\beta_2=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\alpha_2=\mathrm{x}_2$ ………1 分

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$基础解系为$\gamma_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ …………2 分

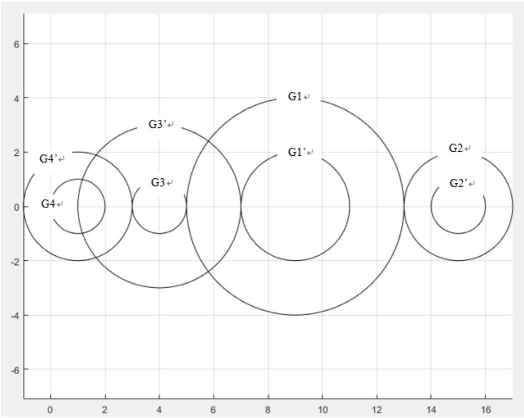
$N(T)$的一个基为$\mathrm{y}_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\gamma_1=\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1$，$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1$ …1 分

(3)由盖尔定理隔离 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 15 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **的特征值（画图表示），并由实矩阵特征值的性质改进结果。**

解：第一种方法

对 $\boldsymbol{B}$ ，$G_1:|z-9|\le 4, G_2:|z-15|\le 2, G_3:|z-4|\le 1, G_4:|z-1|\le 1$ ……2 分

对 $\boldsymbol{B}^T$，$G_1':|z-9|\le 2, G_2':|z-15|\le 1, G_3':|z-4|\le 3, G_4':|z-1|\le 2$ ……2 分



……2 分

综合考虑可知，在 G_1', G_2', G_3, G_4 中各有一个特征值。 ……1 分

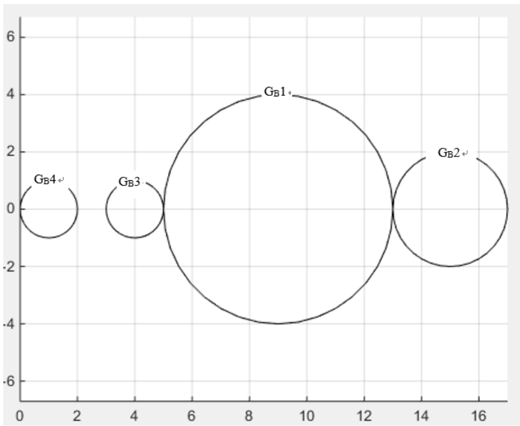
由于 $\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆两两不相交，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 4 个不相等的实数。…1 分

第二种做法

$\boldsymbol{B}$ 的盖尔圆为

$G_{B1}:|z-9|\le 4, G_{B2}:|z-15|\le 2, G_{B3}:|z-4|\le 1, G_{B4}:|z-1|\le 1$ ……2 分

$\boldsymbol{B}$ 的盖尔圆如下图所示



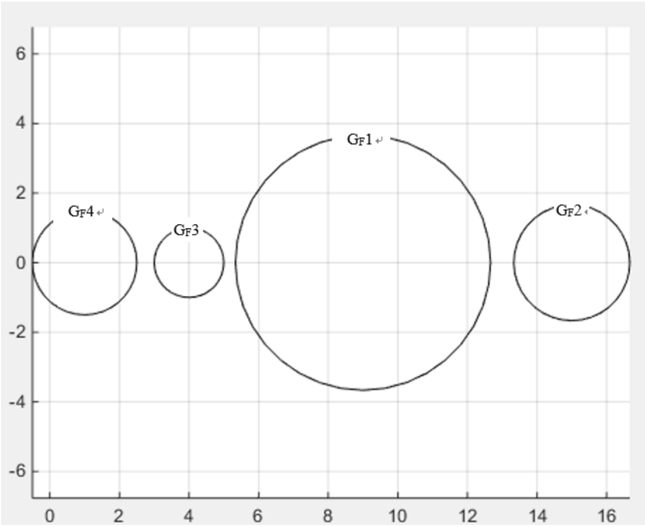
……2 分

取 $\boldsymbol{D}'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ 令 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{DBD}'^{-1}$

则 $\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆为

$G_{F1}:|z-9|\le\frac{7}{2},G_{F2}:|z-15|\le\frac{3}{2},G_{F3}:|z-4|\le1,G_{F4}:|z-1|\le2$ ……2 分

$\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆如下图所示



……1 分

由于 $\boldsymbol{F}$ 的盖尔圆两两不相交，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 4 个不相等的实数。 …1 分

(4)已知A的广义逆 $A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，求矩阵A。

解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

第一种方法：判断出A可逆，直接求A的逆。

判断出A可逆给　　　　……4分

求对A　　　　　　　　……4分

第二种方法：利用满秩分解，分解出A=AI或A=IA

分解出A=AI或A=IA　　……4分

求对A　　　　　　　　……4分

(5) 求如下线性常系数微分方程组的通解：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=3x_1(t)+x_2(t)-3x_3(t),\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-6x_1(t)-2x_2(t)+9x_3(t),\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=-2x_1(t)-x_2(t)+4x_3(t).\end{cases}$$

解：第一种方法：

将上式化为 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形式，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-6&-2&9\\-2&-1&4\end{pmatrix}$$ ……2 分

$\phi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，

从而可得其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$。 ……2 分

设 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$，满足 $f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$，则有

$$\begin{cases}f(1)=e^t=a+b+c\\ f^{'}(1)=e^t=2a+b\\ f(3)=e^{3t}=3a+b\end{cases} \text{得} \begin{cases}a=\\ b=\\ c=\end{cases}$$

则有 $r(\lambda)=\left(\dfrac{1}{2}e^{3t}-\dfrac{1}{2}e^t\right)\lambda+\dfrac{3}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{3t}$ ……2 分

所以 $e^{\boldsymbol{A}t}=r(\boldsymbol{A})=\left(\dfrac{1}{2}e^{3t}-\dfrac{1}{2}e^t\right)\boldsymbol{A}+\left(\dfrac{3}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{3t}\right)\boldsymbol{I}$

$$=\begin{pmatrix}e^{3t}&\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t&-\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^t\\-3e^{3t}+3e^t&-\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{5}{2}e^t&\frac{9}{2}e^{3t}-\frac{9}{2}e^t\\-e^{3t}+e^t&-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^t&\frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\end{pmatrix}$$ ……1 分

因此齐次方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$ 为常向量。 ……1 分

解：第二种方法：

将上式化为 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形式，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-6&-2&9\\-2&-1&4\end{pmatrix}$$ ……2 分

$\phi(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$，

从而可得其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$。 ……2 分

因为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$，所以$\boldsymbol{A}$的最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)$。

设 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$，满足 $f(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+a\lambda+b$，则有

$$\begin{cases} f(1)=e^t=a+b \\ f(3)=e^{3t}=3a+b \end{cases} 得 \begin{cases} a=-\frac{1}{2}\left(e^t-e^{3t}\right) \\ b=\frac{1}{2}\left(3e^t-e^{3t}\right) \end{cases}$$ ……2 分

则有 $r(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\right)\lambda+\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}$

所以 $e^{At}=r(\boldsymbol{A})=\left(\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t\right)\boldsymbol{A}+\left(\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}\right)\boldsymbol{I}$

$$=\begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t & -\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^t \\ -3e^{3t}+3e^t & -\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{5}{2}e^t & \frac{9}{2}e^{3t}-\frac{9}{2}e^t \\ -e^{3t}+e^t & -\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^t & \frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$$ ……1 分

因此齐次方程组的通解为$\boldsymbol{x}=e^{At}\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$为常向量。 ……1 分

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，

（1）验证方程组是否相容；

（2）如果不相容写出求解最小二乘解时所对应的线性方程组，并求出其极小范数最小二乘解。

解：

$\mathrm{r(A)=2, r(A,b)=3,}$ 故不相容．因A为列满秩，所以

$$A^{+}=(A^{H}A)^{-1}A^{H}=\left(\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5\\5&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4&7&1\\7&-4&1\end{pmatrix},$$

判断出不相容 2 分

A^{+} 求对 3 分

最小二乘解时所对应的线性方程组为 $Ax = AA^{+}b$ 3 分

求解 最小二乘解 $x = A^{+}b = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ 2 分

四、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，定义 $T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$， $\forall \boldsymbol{x}\in C^2$, 其中 C 表示复数域。

(1)写出向量范数的定义，并在2-范数下计算 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离及 $T\boldsymbol{x}$ 与 $T\boldsymbol{y}$ 的距离，

其中 $\boldsymbol{x}=(1,1)^T, \boldsymbol{y}=(2,2)^T$；

(2)写出矩阵范数的定义，并计算 $\|\mathrm{A}\|_2$。

（1）设 V 是数域 F（实数或复数域）上线性空间，若 $\forall x\in V$，均对应一个实值函数，记为 $\|x\|$，满足以下三条性质：

1)正定性：$\|x\|\ge 0$，且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$.　　　　……1 分

2)齐次性：$\forall k\in F$， $x\in V$，$\|kx\|=|k|\|x\|$.　　　　……1 分

3)三角不等式：$\forall x,y\in V$，有 $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$　　　　……1 分

则称 V 为赋范线性空间，$\|x\|$ 为 x 的**范数**.

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2=\left[(1-2)^2+(1-2)^2\right]^{1/2}=\sqrt{2}$$　　　　……1 分

$$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}= \quad ,\quad T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$\|T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y}\|_2=\left[(1-2)^2+(3-6)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$　　　　……1 分

（2）$\mathbb{C}^{n\times n}$ 中定义矩阵 A 的一个实函数，记为 $\|A\|$，满足，

1)非负性：$\|A\|\ge 0$，且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$.　　　　……1 分

2)齐次性：$\forall\lambda\in\mathbb{C}$，$\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$.　　　　……1 分

3)三角不等式：$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$，　　　　……1 分

4) 相容性*：$\forall A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|AB\|\le\|A\|\|B\|$，　　　　……1 分

$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，解 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3\pm2\sqrt{2}$，$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$；　　　　……1 分

五、（10 分）设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(1) 求齐次线性方程组的解空间 W 以及 W 的一组标准正交基；

(2) 求 W 的正交补 $W^{\perp}$。

解：将齐次方程组写为

$$\boldsymbol{AX} = 0$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

化简上式后有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

原方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 + 4x_5 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 5x_5 \end{cases}$$

由于 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，故方程组有 3 个基础解系。将 x_1, x_2, x_3 分别取值为 $[1,0,0]^T, [0,1,0]^T, [0,0,1]^T$，故可得解空间的一组解为

$$\xi_1 = [0,1,1,0,0]^T, \xi_2 = [-1,1,0,1,0]^T, \xi_3 = [4,-5,0,0,1]^T \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

对上式解用施密特正交化，有

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = [0,1,1,0,0]^T \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} \boldsymbol{\eta}_1 = [-1,1,0,1,0]^T - \frac{1}{2}[0,1,1,0,0]^T = [-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0]^T \quad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_3 - \frac{(\xi_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)} \boldsymbol{\eta}_1 - \frac{(\xi_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)} \boldsymbol{\eta}_2 = [\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1]^T \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

将上式归一化后的标准正交基为

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1)}} = \frac{\sqrt{2}[0,1,1,0,0]^T}{2}$$

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_2)}} = \frac{\sqrt{10}[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0]^T}{5}$$

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_3)}} = \frac{\sqrt{35}[\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1]^T}{21} \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

$$W = L(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \qquad \cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

（2）$W^{\perp} = L(\alpha_1, \alpha_2)$，其中 $\alpha_1 = (2, 1, -1, 1, -3)$，$\alpha_2 = (1, 1, -1, 0, 1)$ $\cdots$3 分