2017－2018 学年 第一学期期末试卷

学号__________　　　　姓名___________　　　　成绩__________

考试日期：2017 年 12 月 26 日

考试科目：《 矩阵论》

一、　　填空题 （2 分×10）

1）若 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，则 $\mathbf{A}$ 相似于($\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ 　或者 $\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$)。

2）$A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&1&2\\0&b&1\\0&0&c\end{pmatrix}$, $A\otimes B$ 为

（ $\begin{bmatrix}3B&B\\0B&3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a&3&6&a&1&2\\0&3b&3&0&b&1\\0&0&c3&0&0c&\\0&0&0&a\,3&3&\\0&0&0&0&b3&\\0&0&0&0&0&c3\end{bmatrix}$ ），

$A\otimes B$ 的特征值为($3a,3b,3c$ ）。

3）已知 $X=(1,8,9,3-4j)$，其中 j 为虚数单位，则 $\|X\|_1$=（ **23** ），

$\|X\|_2$=（ $\sqrt{171}$ ），$\|X\|_\infty$=（ **9** ）。

4）已知 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$=（ **4** ），$\|A\|_2$=（ $\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}$ ），

$\|A\|_\infty$=（ **4** ）。

5）若 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$ ，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_1=(1,0,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,0,1)$，

$\beta_1=(1,1,1,0)$，$\beta_2=(0,0,0,1)$，则 V_1+V_2 的维数为（ **3** ）。

二、　（10 分）设 A 是 5 阶方阵，且 $\lambda I-A$ 等价于准对角阵：

$$D=diag\left\{\lambda^2-1,\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)^2,\ 1,\ 1\right\}$$

写出 $\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子，A 的最小多项式，A 的 Jordan 标准形。

解：（1）D 的初等因子为 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2,(\lambda-2)^2$；

（2）D 的不变因子为 $\mathrm{d}_5=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$，$\mathrm{d}_4=\lambda-2$，$d_3=d_2=d_1=1$；

（3）A 的最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

（4）A 的 Jordan 标准形为：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

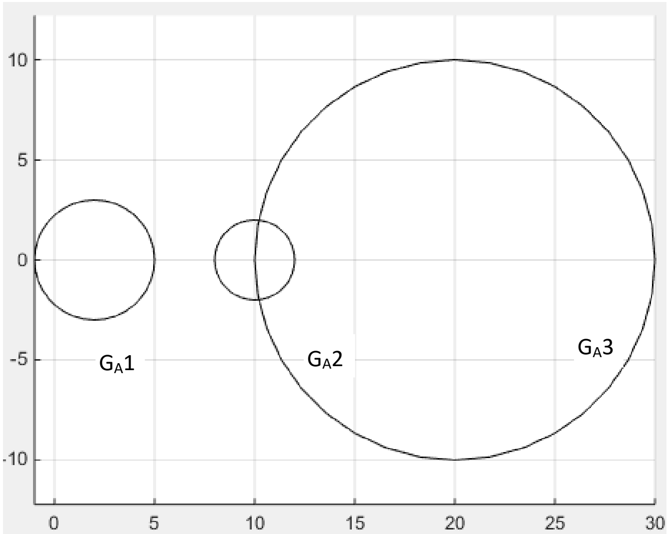
注意：只要这几块有就可以，顺序可以调换

三、 （10 分）由盖尔定理隔离 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & -1 \\ 8 & 2 & 20 \end{pmatrix}$ 的特征值（要求画图表示）。

解：A 的盖尔圆为

$G_A1: |z-2| \le 3, G_A2: |z-10| \le 2, G_A3: |z-20| \le 10$

A 的盖尔圆如下图所示

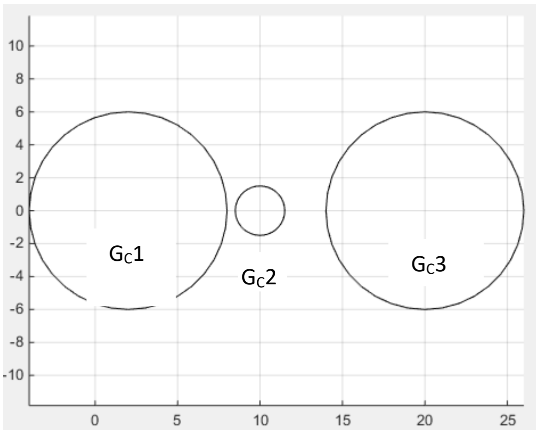


取 $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 令 $C = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1/2 & 10 & -1 \\ 4 & 2 & 20 \end{pmatrix}$

所以 C 的盖尔圆为

$G_C1: |z-2| \le 6, G_C2: |z-10| \le 3/2, G_C3: |z-20| \le 6$

C 的盖尔圆如下图所示



四、　（10 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\1 & 1 & -2 & 1 & 4\\4 & -6 & 2 & -2 & 4\\3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$，求（1）A 的值域的维数（2）A 的核。

解：

$$A\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\0 & 1 & -1 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A 的值域的维数为 3，A 的核的维数为 2。

核就是求解以$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\0 & 1 & -1 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$为系数矩阵的齐次方程组的解空间，只要能写出这个部分，并且求出核的维数为 2 就不减分了。

五、（10 分）求$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的 QR 分解

解：$A=(x_1,x_2,x_3)(rank(A)=3)$，$x_1=(2,0,2)^T$，$x_1=(2,2,1)^T$，$x_1=(1,2,2)^T$，故由 Gram_Schmidt 正交化有

$$y_1=x_1=(2,0,2)^T$$

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(2,2,1)^T-\frac{4+0+2}{4+0+4}(2,0,2)^T=(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T$$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(1,2,2)^T-\frac{\frac{1}{2}+4-1}{\frac{1}{4}+4+\frac{1}{4}}(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^T-\frac{2+0+4}{4+0+4}(2,0,2)^T$$

$$=(-\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9})^T$$

求其单位向量后有

$$\|y_1\|=2\sqrt{2}，\|y_2\|=\frac{3\sqrt{2}}{2}，\|y_3\|=\frac{4}{3}$$

则单位化后有

$$z_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T，z_2=(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6})^T，z_1=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$$

令$Q=(z_1,z_2,z_3)$，则

$$R=\begin{bmatrix} \|y_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|y_2\| & 0 \\ 0 & 0 & \|y_3\| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)} & \frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)} \\ 0 & 1 & \frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

故

$$A=QR=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

六、 （15 分）作业

验证下列方程是不相容的，并用 A^+ 表示 $Ax = b$ 的通解。

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2）解：方程的增广矩阵为

$$[A \vdots b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r4-4r1]{\substack{r2-2r1 \\ r3-2r1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r3-2r2]{r3 \leftrightarrow r4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $r(A \vdots b) = 3 \neq r(A) = 2$，故可知方程不相容。

故可得其关于 A^+ 的极小最小二乘解为

$$x = A^+ b$$

故从上式可得 A 的满秩分解为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

从而

$$A^+ = G^H (GG^H)^{-1} (F^H F)^{-1} F^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & -0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

带入公式即可。

七、 (15) 设 $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\4 & 5 & -2\\2 & -2 & 8\end{pmatrix}$，$b(t)=\begin{pmatrix}e^{9t}\\e^{9t}\\0\end{pmatrix}$，$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}$，

（1） 计算 e^{At}.

解：A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-9)^2$

取 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，设 $f(\lambda)=\varphi(\lambda)\mathrm{g}(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$

则

$$f(0)=1=c$$
$$f(9)=e^{9t}=81a+9b+c$$
$$f^{'}(9)=te^{9t}=18a+b$$

解得 $a=\frac{1}{9}te^{9t}-\frac{1}{81}e^{9t}+\frac{1}{81}$

$$b=-te^{9t}+\frac{2}{9}e^{9t}-\frac{2}{9}$$

$$c=1$$

$$e^{At}=\frac{1}{9}(e^{9t}-1)A+I$$

（2）应用矩阵函数方法求微分方程组 $\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=\begin{pmatrix}1, & 0, & 2\end{pmatrix}^T$ 的解.

解： $\boldsymbol{x}=e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0+e^{t\boldsymbol{A}}\int_{t_0}^{t}e^{-s\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}(s)ds$

$$x==\begin{bmatrix}(e^{9t})\\0\\2e^{9t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t+e^{9t}\\t\\2e^{9t}\end{bmatrix}$$

八、 (10) 作业

求解方程组$AX+XB=C$,其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

12.设$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -3 & 3\end{pmatrix}$,求解方程$AX-XB=C$.

解：

$$A\otimes I_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}, I_2\otimes B^T=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix},$$

$$\vec{C}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ -3\\ 3\end{pmatrix}$$

所以

$$A\otimes I_2-I_2\otimes B^T=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

原方程拉直等价于$\left(A\otimes I_2-I_2\otimes B^T\right)\vec{X}=\vec{C}$,即

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\vec{X}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ -3\\ 3\end{pmatrix}\text{解得}\vec{X}=\begin{pmatrix}3/2\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1/2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$ （k 为常数）

所以$X=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.