2023—2024 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________ 姓名__________ 成绩__________

考试日期：2024 年 1 月 2 日

（注：$\mathbf{I}$ 表示单位矩阵，$\mathbb{R}$ 表示实数域，$\mathbb{C}$ 表示复数域）

一. 填空(2 分×15)

(1) 设 A 与对角阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$相似，则 A 的最小多项式为$\underline{\lambda^2(\lambda+2)}$，

不变因子为 $\underline{1，1，}\underline{\lambda^2(\lambda+2)}$，初等因子为$\underline{\lambda^2}$，$\underline{(\lambda+2)}$。

(2)若 3 阶方阵 $\mathbf{A} \neq 2\mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = 0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$ 或者

$\underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$。

(3) 设 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$。则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征多项式为

$\underline{\phi_{\boldsymbol{AB}}(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i)}$。

(4) 设 A 的各列向量互相正交且模长为 1，则 $\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^H = \underline{\quad 0 \quad}$；设 A, B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵，则 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^+ = \underline{\begin{pmatrix} \mathbf{A}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^H \end{pmatrix}}$。

(5)若 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$ ，$V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$，其中 $\alpha_1 = (1,0,0,1)$，$\alpha_2 = (0,1,0,1)$，$\beta_1 = (1,1,1,0)$，$\beta_2 = (0,0,0,1)$，则 $V_1 + V_2$ 的维数为$\underline{\quad 3 \quad}$。

(6) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $\|\mathbf{Ax}\|_1 = \underline{\quad 8 \quad}$，$\|\mathbf{Ax}\|_2 = \underline{\sqrt{22}}$，$\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \underline{\quad 3 \quad}$。

(7) 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的从属于向量范数 $\|\mathbf{x}\|_1$ 的矩阵范数为__4__，$\mathbf{A}$ 的谱半径为__3__，$\mathbf{A}^5$ 的谱半径为__15____。

(8) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$， 则 $(e^{\mathrm{A}})^H e^{\mathrm{A}}=\underline{\mathbf{I}}$。

二、判断题（1 分×10），正确的写 **"T"**，错误的写 **"F"**

（1）设 A 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，A 为正规矩阵的 $\Leftrightarrow$ A 为单纯矩阵（F）

（2）设 A 和 B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，A ~ B $\Leftrightarrow$ A 和 B 具有相同的特征值（F）

（3）若 B 是列满秩矩阵， C 是行满秩矩阵， 则 $B^+=(B^HB)^{-1}B^H$, $C^+=C^H(CC^H)^{-1}$（T）

(4) A 和 B 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，X 为 $\boldsymbol{n}$ 维列向量，则 $\boldsymbol{R}$(AB) $\subseteq$ $\boldsymbol{R}$(A)，$\boldsymbol{N}$(B) $\subseteq$ $\boldsymbol{N}$(AB)（T）

(5) 任一复方阵 A 都酉相似于一个上三角阵，但是其主对角线元素不一定为 A 的特征值（F）

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}0.2 & a\\0 & 0.2\end{pmatrix}$，$a\in\mathbb{R}$, 且 $|a|<0.8$. 则 $(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)+A=2\mathrm{A}$ （F）

(7) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.2\\0.3 & 1\end{pmatrix}$，则矩阵级数 $\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{k}}{2^{\boldsymbol{k}}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ 收敛 （T）

(8) $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\mathrm{x}\in\mathbb{C}^n$，若向量范数 $\|\mathrm{x}\|_v$ 与矩阵范数 $\|A\|_m$ 满足不等式 $\|A\mathrm{x}\|_v\geq\|A\|_m\|\mathrm{x}\|_v$，则称矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|\mathrm{x}\|_v$ 是相容的 （F）

(9) 设 $A^-\in A\{1\}$ 是的一个 $\{1\}$ 逆，则 $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ 都是幂等矩阵，且 $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ 的特征值为 0 或者 1（ T ）

(10) $\mathrm{x}\in\mathbb{C}^n$ 是不相容方程组 Ax ＝ b 的最小二乘解 $\Leftrightarrow$ x 是方程组 $\mathrm{Ax}=\mathrm{AA}^{(1,4)}\mathrm{b}$ 的解（F）

三 (8 分×5)计算下列各题

1．在 $\mathbb{R}^4$ 中，取一组基 $x_1=(1,1,0,0)^T$， $x_2=(1,0,1,0)^T$， $x_3=(-1,0,0,1)^T$，

$x_4=(1,-1,-1,1)^T$，将其化为一组标准正交基，并且求出 $A=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的 QR 分解。

解 先正交化， $y_1=x_1=(1,1,0,0)^T$， $y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)^T$

$$y_3=x_3-\frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)^T$$

$$y_4=x_4-\frac{(x_4,y_3)}{(y_3,y_3)}y_3-\frac{(x_4,y_2)}{(y_2,y_2)}y_2-\frac{(x_4,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1=(1,-1,-1,1)^T$$ 4 分

单位化， $z_1=\frac{1}{\|y_1\|}y_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^T$， $z_2=\frac{1}{\|y_2\|}y_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0)^T$

$z_3=\frac{1}{\|y_3\|}y_3=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})^T$， $z_4=\frac{1}{\|y_4\|}y_4=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T$ 2 分

$$A=(z_1,z_2,z_3,z_4)R$$ 2 分

2. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&-3\\1&1&-1&0&1\end{bmatrix}^T$，求 A 的值域的正交补 $R^{\perp}(A)$

解：将齐次方程组写为

$$A^TX=0$$ 3 分

方程为

$$\begin{cases}x_1=-x_4+4x_5\\x_2=x_3+x_4-5x_5\end{cases}$$

由于 $r(A)=2$，故方程组有 3 个基础解系。将 x_1,x_2,x_3 分别取值为 $[1,0,0]^T,[0,1,0]^T,[0,0,1]^T$，故可得解空间的一组解为

（不唯一，只要求出三个就给分）

$\xi_1=[0,1,1,0,0]^T,\xi_2=[-1,1,0,1,0]^T,\xi_3=[4,-5,0,0,1]^T$ 3 分

$R^{\perp}(A)=L(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 2 分

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子，不变因子。写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型及最小多项式。

解： 首先求 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子和不变因子 共 5 分

采用初等变换法

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[c2+c1(\lambda+1)]{c1\leftrightarrow c2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r2-r1*(\lambda-3)]{-1*r1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r2\leftrightarrow r3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

不变因子：$\mathrm{d}_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2), d_2(\lambda)=1, d_1(\lambda)=1$

初等因子： $(\lambda-1)^2, (\lambda-2)$

也可以采用行列式因子法求不变因子和初等因子

$$D_3(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda+1)(\lambda-3)+4\right]=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

有一个二阶行列式因子是 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$，因此 $D_2(\lambda)=1$，从而 $D_1(\lambda)=1$

不变因子 $d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1, d_3(\lambda)=\dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$ 1 分

$Jordan$ 标准形 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 或者 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 2 分

(4) 已知次数不超过 3 的多项式空间 $P_3[t]$ 的子空间

$$W = \mathrm{span}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\},$$

其中 $f_1(t)=1+t^3$， $f_2(t)=t+t^2$， $f_3(t)=1+t^2$， $f_4(t)=t+t^3$.

1．求子空间 W 的一个基；

2．对于 W 中的多项式 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，定义线性变换

$$T[f(t)]=(a_0+a_1-a_2-a_3)+a_1t+(a_2-a_3)t^2+(a_0+2a_1-2a_2)t^3$$

求线性变换 T 在（1）中求出的基下的矩阵.

解 1．子空间 W 的一个基为 $f_1(t)=1+t^3$， $f_2(t)=t+t^2$， $f_3(t)=1+t^2$.　　4 分

2．计算基象组：

$T(f_1)=-t^2+t^3=f_1-f_3$，$T(f_2)=t+t^2=f_2$，$T(f_3)=t^2-t^3=-f_1+f_3$

设 $T(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$.　　4 分

注 1： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_1(t), f_2(t), f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix}$

注 2： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_2(t), f_3(t), f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$

注 3： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_1(t), f_3(t), f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(5) 已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&2&1\\2&0&2&2\\4&2&4&2\end{pmatrix}$ ，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

求解方程组 Ax=b 极小范数最小二乘解。

解：从上式可得 A 的满秩分解为

$$F=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\2&0\\4&2\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$ 3 分

从而

$$A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}\quad=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5&-2/5\\-2/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0&1&0&2\\-5&3&-10&6\\0&1&-0&2\\5&-2&10&-4\end{bmatrix}$$ 3 分

$$Ax=P_{R(A)}b=AA^{+}b$$

故可得其关于 A^{+} 的极小最小二乘解为

$$x=A^{+}b$$ 2 分

四、（10 分）　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$**，求** $\dfrac{\boldsymbol{d}\mathrm{e}^{\mathrm{A}\,t}}{\boldsymbol{dt}}$

解 1.（求和法）$\varphi(\lambda)=\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda(\lambda-2)^2$．因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}，\ \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\ \ (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\ \boldsymbol{A}$$ 4 分

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$ 4 分

$$\frac{\boldsymbol{d}\mathrm{e}^{\mathrm{A}\,t}}{\boldsymbol{dt}}=\mathrm{e}^{\mathrm{A}\,t}\mathrm{A}=\ \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$ 2 分

（待定法）$\varphi(\lambda)=\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda(\lambda-2)^2$．因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$．令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有　　2 分

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\qquad=1\\a+2b=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2\end{cases}$$ 3 分

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$ 3 分

$$\frac{\boldsymbol{d}\mathrm{e}^{\mathrm{A}\,t}}{\boldsymbol{dt}}=\mathrm{e}^{\mathrm{A}\,t}\mathrm{A}=\ \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$ 2 分

五、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 令

$V_1=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n \mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\right\}$， $V_2=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n \mid (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\right\}$，

求： $V_1\bigcap V_2$ 及 V_1+V_2 **的维数。**

解：任取向量 $\boldsymbol{\beta}\in V_1\bigcap V_2$,则有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{0}$ 且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ 成立，故 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$， 2 分

所以 $V_1\bigcap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$ ，所以 $V_1\bigcap V_2$ 维数等于 0. 1 分

对于 V_1，不妨设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$，则有

$$\dim(V_1)=\mathrm{n}-r \qquad 2\text{ 分}$$

而条件 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 每一个列向量均在 V_1 中，因此

$$\dim(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\le n-r$$

故 V_2 的秩满足 $\dim(V_2)=\mathrm{n}-\dim(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\ge r$ 2 分

所以 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\bigcap V_2)\ge n$ 2 分

由于 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2\subseteq\mathbb{C}^n$，$\dim(V_1+V_2)\le n$，所以 V_1+V_2 维数等于 n。 1 分