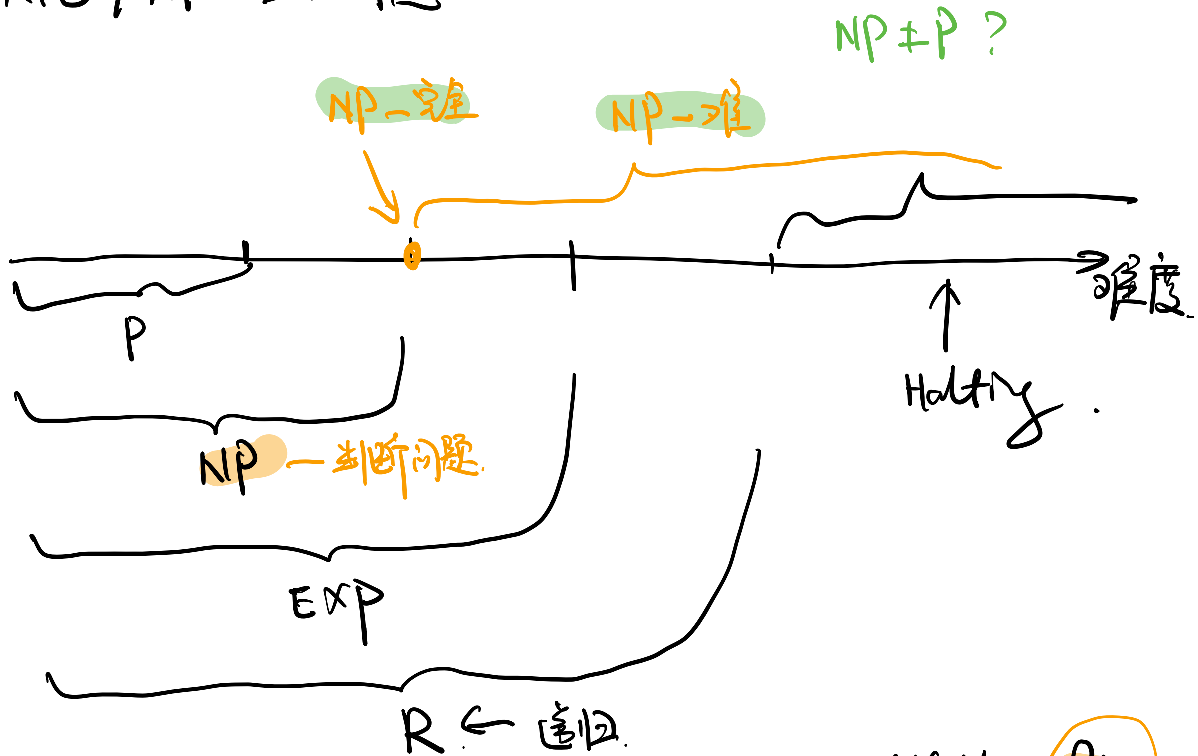
1. NPC / NP-难. 问题.



2. 近似算法: 对于一个 input size = n 的问题. 存在一个近似比 $\rho(n)$

↓ 关注最优化问题 ∀ input, 算法都可以给出一个答案 C, 使得 ← worst

$$1 \le \max\left\{ \frac{C}{C_{opt}} , \frac{C_{opt}}{C} \right\} \le \rho(n)$$

最小化 ↗ ↖ 未知最优解.

Trade off

时间开销 $T(n)$ vs. 近似比 $\rho(n)$ 精度 ← 参数. $\rho(n)\downarrow$ $T(n)\uparrow$

时间

算法本身开销 v.s. 开发该算法的开销 总成本一定.

3. 近似方案. (AA Scheme). ← 近似比是 $O(1)$.

∀ε, 近似方案是一个近似比为 $(1+\varepsilon)$-近似算法.

· PTAS. 多项式时间近似方案. $O(n^{2/\varepsilon})$ $O(n/\varepsilon^2)$

· FPTAS. 完全 - - - ———— 对 n, $1/\varepsilon$ 都是多项式时间.

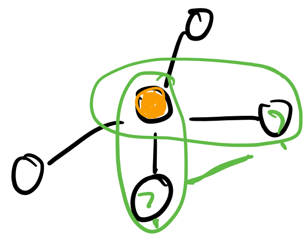
☆ 常数近似比的近似算法大多数时间不存在, 否则 P=NP

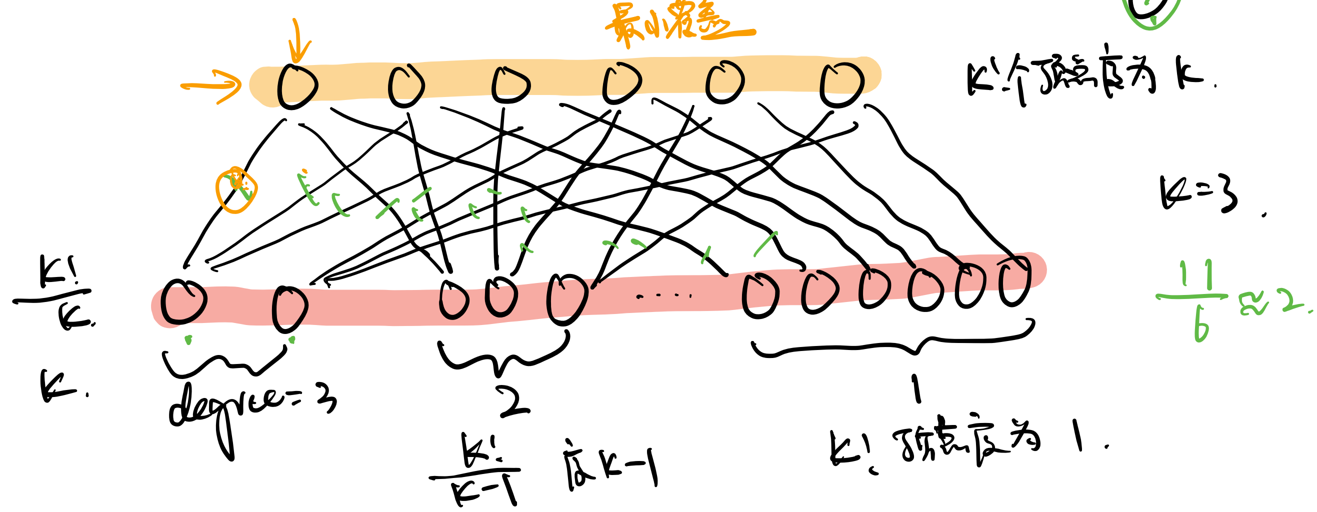
例. 顶点覆盖. Vertex Cover → NPC.

∀ G(V,E). 找到最小的顶点集合可 cover 所有的边.

TIP: 启发式算法. ← 贪心算法.

方案一. 贪心. → 顶点的度(degree). ☆ logn-近似





方案二. 随机选边.

$C \leftarrow \phi$

$E' \leftarrow E$

while $E' \neq \phi$

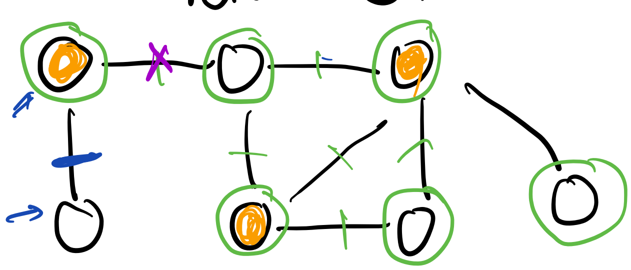
  选择 $(u,v) \in E$ 随机.

  $C \leftarrow C \cup \{u\} \cup \{v\}$

  把所有与 u.v 相连的边从 E' 中删除.

return C.

多项式时间.



opt = 3

近似解 = 6.

$\frac{6}{3} = 2$?

证明. 令 $A=\{$所选的边$\}$, 最优 C_{opt}

$\rightarrow C$.

C_{opt} 一定包含至少一个端点的边在 A 中.

A 中的边一定不共同顶点.

$|C_{opt}| \geq |A|$

$|C| = 2|A|$

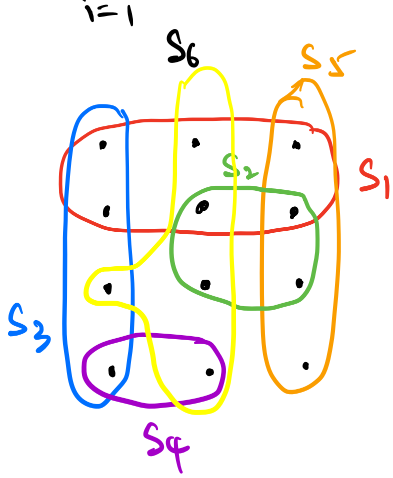
$\Rightarrow |C| \leq 2|C_{opt}|$.

$$P(n) = \frac{|C|}{|C_{opt}|}$$

例2. Set-Cover 集合覆盖. $\longrightarrow$ 规划.

给定一个集合 X, 一系列子集 $S_1, S_2 \cdots S_m \subseteq X$

$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = X$, 找到 $C \subseteq \{1,2,\dots m\}$. 使得 $|C|$最小.



opt. S_3. S_6. S_5

贪心. on 集合大小

$C = \phi$

while $X \neq \phi$

选择最大的子集 S_i.

$C = C \cup \{i\}$.

$X = X / S_i$

return C

cover.

时间复杂度.

$|X| = n$.

多项式.

$(\ln n + 1)$-近似.

算法导论.

证明：假设存在最小覆盖 C_{opt}. $|C_{opt}| = t$

令 X_k 是在第 k 轮时剩余元素集合. base. $X_0 = X$. $X_k \subseteq X$

$\forall k$, X_k 一定可以被 t 个子集覆盖.

$\Rightarrow$ 至少可以覆盖 $\frac{|X_k|}{t}$ 个元素.

$\Rightarrow$ 每一轮选的子集大小 $\geq \frac{|X_k|}{t}$ ← 贪心选到.

$\Rightarrow \forall k.\ |X_{k+1}| \leq (1-\frac{1}{t})|X_k|$ <1

$\Rightarrow \forall k.\ |X_k| \leq (1-\frac{1}{t})^k |X_0|$ $\leq n = |X|$

$\underbrace{(1-\frac{1}{t})^k}_{= e^{-\frac{k}{t}}}$

$e^{-\frac{k}{t}} \cdot n < 1$.

当 $\frac{k}{t} > \ln(n)$. $\Rightarrow$ $\frac{k}{t} \leq \ln(n)+1 = \rho(n)$ ← 循环结束时的 k

↑ n↑ 算法精度↓

计算时间 $O(n)$.

例3. 分区问题 PARTITION. (装箱问题变形)

给定一个集合 $S = \{s_1, s_2 \cdots s_n\}$. $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$.

把 S 分为2个部分. A. B.

使 $\max(\sum_{i\in A} s_i, \sum_{i\in B} s_i)$ 最小. minmax

分区尽可能平均.

(和)

☆ 2-近似算法.

PTAS. $(1+\varepsilon)$-近似算法.

定义. $m = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil - 1$. $\varepsilon \approx \frac{1}{m+1}$ 最优: $O(2^m)$

第1步: 随机分S为A', B'. $S_1, S_2 \cdots S_m$

第2步: $A \leftarrow A'$, $B \leftarrow B'$

for $i = m+1$ to n.   递减.

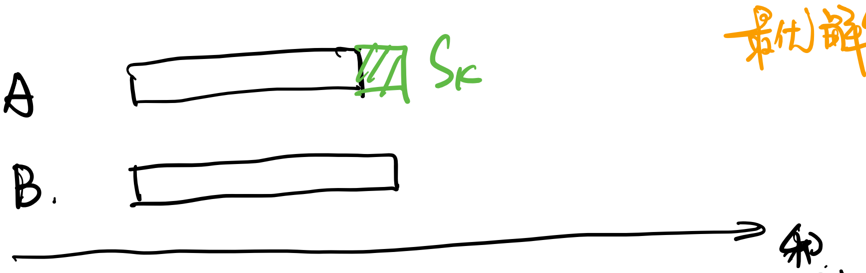
if $\Sigma(A) \le \Sigma(B)$.

$A \leftarrow A \cup \{S_i\}$

else $\Sigma(A) > \Sigma(B)$

$B \leftarrow B \cup \{S_i\}$.

证明: 假设 $\Sigma(A) \ge \Sigma(B)$, 近似比为 $\frac{\Sigma(A)}{\Sigma(S)/2}$ 最优解



第k-1轮.   k轮. S_k放在哪

1). S_k在第1步里添加到A. $\Rightarrow$ $A = A'$, 对于 $n \ge m$, $\Sigma(A')$ 是最优的

$\Sigma(A) + \Sigma(B) = \Sigma(S)$.

2). S_k在第2步 ----- A. $\Sigma(A) - S_k \le \Sigma(B)$

$\Rightarrow \Sigma(A) - S_k \le \Sigma(S) - \Sigma(A)$

$\Rightarrow 2\Sigma(A) \le \Sigma(S) + S_k$

$$\Rightarrow \quad \Sigma(A) \le \frac{\Sigma(S)}{2} + \frac{S_k}{2}$$

$$\because \; \underbrace{S_1 \geq S_2 \cdots \geq S_m}_{\geq S_k} \cdots \geq S_n .$$

$$\Rightarrow \Sigma(S) \geq (m+1)\cdot S_k \quad \because k > m$$

$$\frac{\Sigma(A)}{\Sigma(S)/2} \le 1 + \frac{S_k}{\cancel{2}\cdot \frac{\Sigma(S)}{\cancel{2}}} = 1 + \frac{S_k}{\Sigma(S)} \le 1 + \frac{S_k}{(m+1)\cdot S_k}$$

$$= 1 + \frac{1}{m+1}$$

$$= 1 + \varepsilon .$$