2021—2022 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________　　　　姓名__________　　　　成绩__________

考试日期：2021 年 1 月 13 日

(注：$\mathbf{I}$ 表示单位矩阵)

一．填空(2 分×15)

(1) 设 A 与对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似，则 A 的最小多项式为 $\underline{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}$，

不变因子为　1，1，$(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，初等因子为 $(\lambda-1)^2$，$(\lambda+2)$。

(2) 若 3 阶方阵 $\mathbf{A}\neq 3\mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2-6\mathbf{A}+9\mathbf{I}=0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A} = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$。

(3) 设 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$。则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征多项式为

$\underline{\phi_{\boldsymbol{AB}}(\lambda)=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)}$。

(4) 设 A 的各列向量互相正交且模长为 1，则 $\mathbf{A}^+-\mathbf{A}^H=\underline{\quad 0 \quad}$；设 A, B 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶酉矩阵，则 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^+ = \underline{\begin{pmatrix} \mathbf{A}^H & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^H \end{pmatrix}}$。

(5) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，定义 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$，$\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}^2$，则 $\|A\|_2=(1+\sqrt{2})$ （或者 $(3\pm 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$ ）；设 $x=(1,1)^T, y=(2,2)^T$，则在 2-范数下，$\boldsymbol{T}x$ 与 $\boldsymbol{T}y$ 的距离为 $\underline{\sqrt{10}}$；$\mathbf{A}^5$ 的谱半径为 $\underline{\quad 1 \quad}$。

(6) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $(e^{A})^H e^{A}=\mathbf{I}$。

(7)按顺序写出 Moore-Penrose 方程 $\begin{array}{ll} AXA=A & (\mathrm{i}) \\ XAX=X & (\mathrm{ii}) \\ (AX)^H=AX & (\mathrm{iii}) \\ (XA)^H=XA & (\mathrm{iv}) \end{array}$ 。

(8) 若 A 是 3 阶方阵，特征值为 0，1，-1，则行列式 $\det(e^A)=\underline{1}$.

（9）线性方程组 Ax = b 相容$\Leftrightarrow AA^{(1)}b=b$（答矩阵 A 的秩与增广矩阵的秩相等也可以），且其通解为 $x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y$，其中 $y\in C^n$ 任意（答 $x = A^{+}b + \left(I - A^{+}A\right)y$ 也可以）。

二． (8 分×5)计算下列各题

1．设 $W_1=span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ $W_2=span\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ ，求（W_1+W_2）及 $(W_1\cap W_2)$，

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$=（1, 2, 1, 0），$\boldsymbol{\alpha}_2$=（-1, 1, 1, 1），$\boldsymbol{\beta}_1$=（2, -1, 0, 1），$\boldsymbol{\beta}_2$=（1，-1, 3, 7）。

解：$W_1+W_2=span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$， 1 分

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\beta}_1^T,\boldsymbol{\beta}_2^T]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

对它作初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其秩为 3，故 $\dim(W_1+W_2)=3$。 3 分

现在计算 $\dim(W_1\cap W_2)$。

法一：设 $\boldsymbol{x}\in W_1\cap W_2$，则存在 k_1,k_2,l_1,l_2 有 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$ 1 分

则 $\begin{cases} k_1-k_2-2l_1-l_2=0 \\ 2k_1+k_2+l_1+l_2=0 \\ k_1+k_2-3l_2=0 \\ k_2-l_1-7l_2=0 \end{cases}$ ，解方程组可得 $\begin{cases} k_1=-l_2 \\ k_2=4l_2 \\ l_1=-3l_2 \end{cases}$

即 $\boldsymbol{x} = l_2(-5,2,3,4)$ ，　　2 分

所以 $(W_1 \cap W_2)$=L{x}　　1 分

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，求 A 的值域的正交补

解：将齐次方程组写为

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}=0$$ 3 分

方程为

$$\begin{cases} x_1=-x_4+4x_5 \\ x_2=x_3+x_4-5x_5 \end{cases}$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2$，故方程组有 3 个基础解系。将 x_1,x_2,x_3 分别取值为 $[1,0,0]^T,[0,1,0]^T,[0,0,1]^T$, 故可得解空间的一组解为

（不唯一，只要求出三个就给分）

$$\xi_1=[0,1,1,0,0]^T,\xi_2=[-1,1,0,1,0]^T,\xi_3=[4,-5,0,0,1]^T$$ 3 分

（2） $R(A)^{\perp} = L(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$　　2 分

3. 设 $\boldsymbol{A}\in C^{8\times 8}$， $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\cong diag\{\lambda^2+1,1,\lambda^2-2,1,\lambda^2,\lambda,\lambda+1,1\}$。求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子，不变因子，及 Smith 标准型。写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型及最小多项式。

解： $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-i,\lambda+i,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda^2,\lambda,\lambda+1$　　2 分

又因为此矩阵的秩等于 8，所以 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$d_8(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1),d_7(\lambda)=\lambda,d_6(\lambda)=d_5(\lambda)=d_4(\lambda)=d_3(\lambda)=d_2(\lambda)$$
$$=d_1(\lambda)=1$$

2 分

$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的标准型为 diag $\{1,1,1,1,1,1,\lambda,(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)\}$　　1 分

Jordan 标准型为 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & & & -\sqrt{2} & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$ 1 分

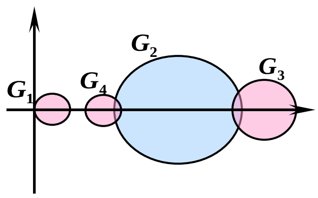
最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)\lambda^2(\lambda+1)$。 2 分

(4) 用盖尔圆隔离矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1.3 & -2 \\ 1 & 0 & 15 & 1.4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值.（要求画图表示）

① $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$； $G_2:|z-9|\le 4.3$； $G_3:|z-15|\le 2.4$； $G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交. 3 分

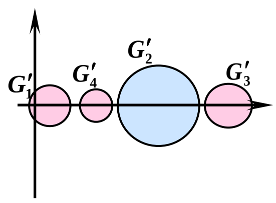


1 分

② $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 5/3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DAD}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0.6 & 9 & 1.3 & -2 \\ 0.6 & 0 & 15 & 1.4 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 2 分

$\boldsymbol{B}$ 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le \frac{5}{3}$； $G_2':|z-9|\le 3.9$； $G_3':|z-15|\le 2$； $G_4':|z-4|\le 1$ ，



1 分

其中各含 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值. 结合①与②可得：G_1, G_2',G_3',G_4' 中各含 $\boldsymbol{A}$ 的一个特

征值.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1 分

［注］ 可取 $d_1 = 1.6 \sim 1.9$.

（5）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解， $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

解：

（1）

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r4-5*r1]{r2-3*r1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r4-r2 \\ -1*r2}]{r3+r2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r1-r2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故取

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{所以 } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{FG}$$

四、（10 分）已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

求解方程组 Ax=b 极小范数最小二乘解。

解：从上式可得 A 的满秩分解为

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$　　　　　　　　　　　3 分

从而

$$A^+ = G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & -0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$ 5 分

$Ax = P_{R(A)}b = AA^{+}b$

故可得其关于 A^{+} 的极小最小二乘解为

$$x = A^{+}b$$ 2 分

五、(10 分)　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{2t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}\mathrm{x}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{A}\,\mathrm{x}(\boldsymbol{t})$ **的基础解系；**

2. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ **满足初始条件** $\boldsymbol{x}(0)$ **的解.**

解 1.（**求和法**）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$． 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\ \ (k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\,\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 5 分

（**待定法**）$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$． 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$． 令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\qquad\ =1 \\ a+2b=\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2 \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{At}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

2． $\mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{b}(s)=\left\{\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{2}\boldsymbol{A}\right\}\mathrm{e}^{2s}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}-t\\1\\t\end{bmatrix}$ 5 分

六、（10 分）已知多项式空间 $P_3[t]$ 的子空间 $W=\mathrm{span}\{f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)\}$，

其中 $f_1(t)=1+t^3$， $f_2(t)=t+t^2$， $f_3(t)=1+t^2$， $f_4(t)=t+t^3$．

1．求子空间 W 的一个基；

2．对于 W 中的多项式 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，定义线性变换

$$T[f(t)]=(a_0+a_1-a_2-a_3)+a_1t+(a_2-a_3)t^2+(a_0+2a_1-2a_2)t^3$$

求线性变换 T 在（1）中求出的基下的矩阵．

解 1．子空间 W 的一个基为 $f_1(t)=1+t^3$， $f_2(t)=t+t^2$， $f_3(t)=1+t^2$． 5 分

2．计算基象组：

$T(f_1)=-t^2+t^3=f_1-f_3$，$T(f_2)=t+t^2=f_2$，$T(f_3)=t^2-t^3=-f_1+f_3$

设 $T(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$． 5 分

注 1： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_1(t),f_2(t),f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&0&2\end{bmatrix}$

注 2： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$

注 3： 选取 $\boldsymbol{W}$ 的基为 $f_1(t),f_3(t),f_4(t)$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$