2018—2019 学年 《 矩阵论》期末试卷

学号__________　　　　姓名___________　　　　成绩_________

考试日期：2018 年 12 月 27 日

一、 填空题 （2 分×15）

(1) 若 $\mathbf{A}$ 为 4 阶幂等矩阵，且 $\mathbf{A}$ 的迹等于 2，则 $\mathbf{A}$ 相似于 $\underline{\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}}$.

(2) 设 $\mathbf{A}$ 是 7 阶方阵，且 $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 等价于对角阵：

$$\mathbf{D}=diag\left\{\lambda-2,\ \lambda+1,\lambda^2-1,\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)^2,\ 1,\ 1\right\}$$

则 $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 的初等因子为（$\lambda-2$，$\lambda-2$，$(\lambda-2)^2$，$\lambda+1$， $\lambda+1$，$\lambda-1$）

$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 的不变因子为 $d_7=(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)$， $d_6=(\lambda-2)(\lambda+1)$，$d_5=(\lambda-2)$，

$d_4=d_3=d_2=d_1=1$

$\mathbf{A}$ 的最小多项式 $d_7=(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)$， $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix}2&&&&&&\\&2&&&&&\\&&2&1&&&\\&&&2&&&\\&&&&-1&&\\&&&&&-1&\\&&&&&&1\end{pmatrix}。$$

(3) 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，则 $\|\mathbf{Ax}\|_1=$ ___8______，$\|\mathbf{Ax}\|_2=$ $\underline{\sqrt{22}}$____，

$\|\mathbf{Ax}\|_\infty=$ __3______

(4) 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的从属于向量范数 $\|\mathbf{x}\|_1$ 的矩阵范数为______4____，

$\mathbf{A}$的谱半径为____3____，$\mathbf{A}^5$的谱半径为___15______。

(5)按顺序写出 Moore-Penrose 方程
$$AXA = A \quad (\text{i})$$
$$XAX = X \quad (\text{ii})$$
$$(AX)^H = AX \quad (\text{iii})$$
$$(XA)^H = XA \quad (\text{iv})$$
。

(6) 已知n阶矩阵$\mathbf{A}$可逆，设$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$，则$\mathbf{B}^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}$。

(7)已知$\sin(\mathbf{A}t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6\sin 2t & 4\sin 2t - 2\sin t & 2\sin 2t - 4\sin t \\ 0 & 0 & 6\sin t \\ 0 & 6\sin t & 0 \end{pmatrix}$，则$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

(8)设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}$，则矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}\mathbf{A}^k$是___收敛_____（或者发散）的矩阵级数。

二、计算下列各题（10 分×4）

（1）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 定义 $T\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{x}$， $\forall\mathbf{x}\in C^2$ 。在 2−范数下, 计算 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的距离及 $T\mathbf{x}$ 与 $T\mathbf{y}$ 的距离，其中 $\mathbf{x}=(1,1)^T,\mathbf{y}=(2,2)^T$ 。

解： $\|x-y\|_2=\left[(1-2)^2+(1-2)^2\right]^{1/2}=\sqrt{2}$；

$$Tx=T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$Ty=T\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$$\|Tx-Ty\|_2=\left[(1-2)^2+(3-6)^2\right]^{1/2}=\sqrt{10}$$

（2）在欧式空间 R^4 中，对于任意两个向量

$$\alpha=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T，\beta=(y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4)^T，$$

规定 α 与 β 的内积为：$(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+4x_4y_4$。

已知 $\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 1,\quad 1)^T$，$\alpha_2=(-1,\quad -1,\quad 1,\quad 1)^T$，求 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 在欧式空间 R^4 中的正交补。

解：设 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 的正交补中的向量为 $x=(x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4)^T$，则

$(\alpha_1,x)=x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0$

$(\alpha,\beta)=-x_1-2x_2+3x_3y_3+4x_4y_4=0$

解方程组得：$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$，

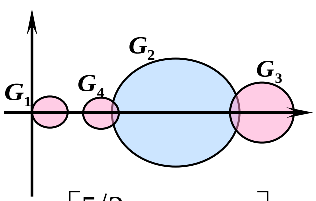
所以 $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 为 $L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\\3\end{pmatrix}$

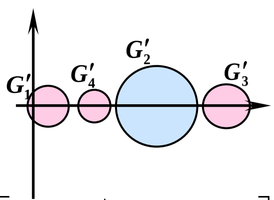
(3) 用盖尔圆定理隔离矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 9 & 1.3 & -2\\ 1 & 0 & 15 & 1.4\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$ 的特征值.（要求画图表示）

① A 的 4 个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 1$； $G_2:|z-9|\le 4.3$； $G_3:|z-15|\le 2.4$； $G_4:|z-4|\le 1$

易见 G_1 孤立，而 G_2,G_3,G_4 相交.





② $D=\begin{bmatrix}5/3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$， $B=DAD^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 5/3 & 0 & 0\\ 0.6 & 9 & 1.3 & -2\\ 0.6 & 0 & 15 & 1.4\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$

B 的 4 个孤立盖尔圆为

$G_1':|z-1|\le \dfrac{5}{3}$； $G_2':|z-9|\le 3.9$； $G_3':|z-15|\le 2$； $G_4':|z-4|\le 1$ ，其中各含 B 的一个特征值. 结合①与②可得：G_1,G_2',G_3',G_4' 中各含 A 的一个特征值.

[注] 可取 $d_1=1.6\sim 1.9$.

(4) **求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$的谱分解。**

（1）解：$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

可得特征向量分别为$x_1 = (2,1)^T$, $x_2 = (1,1)^T$

故$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

所以$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

则$A = 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

四、（15 分）已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&2&1\\2&0&2&2\\4&2&4&2\end{pmatrix}$ **，** $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

（1）验证方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ **是否相容；**
（2）如果相容求其极小范数解；
（3）如果不相容，写出其最小二乘解所对应的线性方程组，并且求极小范数最小二乘解。

解：（1）方程的增广矩阵为

$$[A\vdots b]=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\2&1&2&1&1\\2&0&2&2&0\\4&2&4&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r4-4r1]{\substack{r2-2r1\\r3-2r1}}\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&2&0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&2&0&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r3-2r2]{r3\leftrightarrow r4}\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故 $r(A\vdots b)=3\neq r(A)=2$，故可知方程不相容。

（2） $Ax=P_{R(A)}b$，其中 $P_{R(\mathrm{A})}=AA^{(1,3)}=AA^{+}$

从上式可得 A 的满秩分解为

$$F=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\2&0\\4&2\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

从而

$$A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}\quad=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5&-2/5\\-2/5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2&4\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0&1&0&2\\-5&3&-10&6\\0&1&-0&2\\5&-2&10&-4\end{bmatrix}$$

$$Ax=P_{R(A)}b=AA^{+}b$$

(3)故可得其关于 A^{+} 的极小最小二乘解为

$$x=A^{+}b$$

五、（15 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}(t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{2t}\\0\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，

1. 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$；

2. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解。

1. 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$；

2. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}(t)$ 满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$ 的解.

解 1. **（求和法）** $\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}\quad(k=3,4,\cdots)$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{1!}(\boldsymbol{A}t)+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}t)^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}t)^3+\cdots=\boldsymbol{I}+(\frac{t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\frac{2^2t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\frac{2t}{1!}+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

（待定法） $\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$. 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，所以

$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$. 令 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)\cdot g(\lambda)+(a+b\lambda)$，则有

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\qquad=1\\a+2b=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=(\mathrm{e}^{2t}-1)/2\end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

2. $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{b}(s)=\left\{\frac{1}{2}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{2}\boldsymbol{A}\right\}\mathrm{e}^{2s}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}-t\\1\\t\end{bmatrix}$