Projet de restauration d'images : première partie

Charles Soussen, Elisabeth Lahalle

1. Restauration d'images : problématique

Le problème considéré est celui de la reconstruction d'un signal ayant subi un filtrage linéaire passe-bas. Le signal mesuré en sortie du filtre est de plus supposé corrompu par des incertitudes additives (bruit de quantification, bruit de mesure). La résolution de ce problème passe par une première étape de modélisation de la relation qui lie les observations (signal mesuré) au signal à reconstruire. Il s'agit du problème direct. La seconde étape consiste à résoudre le problème inverse pour reconstruire le signal d'entrée du filtre à partir du signal mesuré. Nous allons tout d'abord nous intéresser à la résolution d'un problème inverse dans le cas de signaux 1D avant de généraliser au cas 2D.

2. Déconvolution d'un signal triangulaire

Le premier exercice a pour objectif d'appréhender le caractère instable de l'opération de déconvolution, lorsque celle-ci est effectuée de façon « naïve », soit par division polynomiale (`deconv`), soit par filtrage inverse. Il est fortement inspiré par l'exemple donné en introduction de l'ouvrage collectif *[J. Idier, 2001, Approche bayésienne pour les problèmes inverses]*. En présence d'erreurs (de bruit) sur les données, même très faibles, les résultats fournis par ces méthodes d'inversion peuvent, en effet, être inexploitables. Il s'agit là d'un problème inverse *mal posé*. On verra que la réponse en fréquence du système à inverser permet de caractériser le degré de difficulté du problème. L'exercice suivant illustrera la (les) solution(s) obtenues par régularisation linéaire quadratique.

Le problème considéré est celui de la reconstruction d'un signal ayant subi un filtrage gaussien. Il s'agit d'un filtrage linéaire d'usage courant en traitement d'image ; il est utilisé, ici, dans un contexte monodimensionnel. La réponse impulsionnelle d'un filtre gaussien est définie par :

$$g(t) = \frac{1}{\sigma_h\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m_h)^2}{2\sigma_h^2}\right). \tag{1}$$

Le signal mesuré en sortie du filtre est supposé être corrompu par des incertitudes additives. En effet, les mesures en sortie de filtre sont au moins sujettes au bruit de quantification dû au convertisseur analogique-numérique de la chaîne de mesure.

Discrétisation de la réponse impulsionnelle et simulation du signal d'entrée

La fréquence d'échantillonnage est fixée à la valeur $f_e = 1\,\mathrm{Hz}$. Les échantillons du signal d'entrée sont notés $x[n]$, ceux de la réponse impulsionnelle du filtre $h[n] = g(n/f_e)$ et ceux du signal mesuré en sortie $y[n]$. Le signal mesuré en sortie est sujet à des incertitudes additives notées $w[n]$ et le problème direct peut alors être modélisé comme suit :

$$y[n] = (x \star h)[n] + w[n].$$

1. Pour les besoins de la simulation, déterminer la réponse impulsionnelle $h[n]$ du filtre gaussien obtenue par discrétisation de l'équation (1). Le filtre est de plus supposé causal et ses paramètres seront pris égaux respectivement à $m_h = 15$ et $\sigma_h = 5$. Enfin, la réponse impulsionnelle est tronquée à un horizon de 30 s. Représenter cette réponse impulsionnelle.
2. Le signal d'entrée est supposé être triangulaire et est alors défini par :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{L_x/2} & \forall \quad t \in \left[0; \frac{L_x}{2}\right] \\ \frac{-t+L_x}{L_x/2} & \forall \quad t \in \left[\frac{L_x}{2}; L_x\right]. \end{cases}$$

   Simuler le signal à temps discret $x[n]$ correspondant, pour une durée d'observation $L_x = 100\,\mathrm{s}$ [1].

2.1 Approche « naïve » par filtrage inverse

Partie 1 : simulation du problème direct

1. Simuler le signal de sortie non bruité $y_{nb}[n] = (x \star h)[n]$ (`conv`).
2. Si le signal de sortie y est mesuré à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique, il est sujet au bruit de quantification. On simulera l'opération de quantification par l'instruction `y=round(`$y_{nb} * 2^{10}$`)`$/2^{10}$. Simuler le signal quantifié y et représenter celui-ci à l'aide de la fonction `stairs`.
3. Déterminer et représenter le bruit de quantification $w[n]$. Que vaut le RSB du signal de sortie ?

Partie 2 : interprétation fréquentielle de l'inversion

1. Calculer sous Matlab la transformée de Fourier discrète (TFD) H du filtre. Tracer sa réponse en fréquence.
2. Calculer sous Matlab les TFD X du signal d'entrée et du signal de sortie Y.
3. Comment aurait-il été possible de réaliser l'opération de convolution en passant par le domaine fréquentiel ?
4. Implémenter l'opération de déconvolution, par filtrage inverse, dans le domaine fréquentiel : trouver la TFD X_{rec} à partir des TFD H et Y puis la représentation temporelle x_{rec}. Programmer ces opérations et représenter le signal ainsi reconstruit (à partir des échantillons bruités et non bruités de la sortie).
5. Pour analyser les piètres performances de l'inversion « naïve », il est proposé de représenter :
   — la densité spectrale de puissance $S_w(f)$ du bruit de quantification ;
   — la dsp $S_y(f)$ du signal de sortie ;
   — la densité spectrale d'énergie du filtre inverse.
6. En déduire l'interprétation fréquentielle du problème posé par l'opération de déconvolution. Il peut, à nouveau, être intéressant de faire varier le paramètre σ_h.

2.2 Déconvolution par régularisation quadratique ℓ_2

Le problème considéré est toujours celui de la reconstruction d'un signal triangulaire ayant subi un filtrage gaussien. Dans cette partie, le signal de sortie non bruité est simulé par l'équation

1. Il est possible d'utiliser une instruction du type, `x=[x1 x2]`, où `x1` et `x2` représentent deux tronçons successifs du signal.

matricielle $\boldsymbol{y}_{nb} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ où :

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ h[N_h-1] & \vdots & \dots & h[0] & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h[N_h-1] & \dots & \dots & \ddots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Partie 1 : simulation du problème direct par approche matricielle

L'usage d'un paramétrage soigné est recommandé pour permettre de modifier aisément les conditions de simulation et d'affichage des résultats.

1. Déterminer la dimension N_y du vecteur de sortie $\boldsymbol{y}_{nb}$ à partir des dimensions N_x et N_h des vecteurs d'entrée $\boldsymbol{x}$ et de réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}$ afin d'obtenir le même nombre d'échantillons que par la fonction `conv`.
2. Construire la matrice de convolution $\boldsymbol{H}$ à l'aide de la fonction `toeplitz`. Pour cela, il est proposé d'initialiser le premier vecteur ligne et le premier vecteur colonne de $\boldsymbol{H}$ avec des vecteurs nuls de dimension appropriée à l'aide la fonction `zeros`, puis de remplacer certains de leurs éléments avec les éléments de $\boldsymbol{h}$.
3. Déterminer la sortie non bruitée par une opération matricielle.

Partie 2 : déconvolution par régularisation linéaire quadratique

Cette partie concerne la mise en œuvre de la solution obtenue par minimisation d'un critère composite dans le cadre d'un modèle *linéaire* ($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$) et de fonctionnelles $\mathcal{F}_w$ et $\mathcal{F}_x$ *quadratiques*.

1. Dans un premier temps, calculer le signal déconvolué à l'aide de l'estimateur des moindres carrés.
2. Tracer le signal déconvolué et calculer l'énergie de l'erreur de reconstruction.
3. Construire la matrice carrée $\boldsymbol{D}_1$, de dimension N_x, telle que le produit $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{x}$ donne les différences premières $x[n+1] - x[n]$. On pourra construire la matrice $\boldsymbol{D}_1$ à l'aide de la fonction `toeplitz`.

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Calculer la solution régularisée $\widehat{\boldsymbol{x}}(\alpha)$, définie comme le minimiseur de :

$$\mathcal{F}_\alpha(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \alpha\, \|\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{x}\|^2.$$

   Vous déterminerez le coefficient de régularisation α de manière empirique[2].

2. Par exemple en testant plusieurs valeurs dans un intervalle conséquent, comme $[10^{-7}, 10^2]$.

5. En simulation, le signal à reconstruire est parfaitement connu, il est donc possible de déterminer la valeur du coefficient de régularisation qui minimise l'énergie de l'erreur de reconstruction. Tracer l'évolution de l'énergie de l'erreur de reconstruction en fonction de α. Ecrire une procédure permettant d'approcher la valeur optimale de α, par recherche exhaustive sur un intervalle, à l'aide de la fonction `min`.
6. Tracer la « courbe en L » en représentant, sur une échelle log-log, la fonctionnelle de régularisation $\mathcal{F}\{\widehat{\boldsymbol{x}}(\alpha)\} = \|\boldsymbol{D}_1\widehat{x}(\alpha)\|_2^2$ en fonction du critère d'adéquation aux données $\mathcal{G}\{\widehat{x}(\alpha)\} = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{x}}(\alpha)\|_2^2$ (moindres carrés).
7. Que se passe-t-il lorsque l'on remplace la matrice $\boldsymbol{D}_1$ par la matrice identité $\boldsymbol{I}_{N_x}$? Commenter la raison qui fait que la pénalisation des différences premières du signal déconvolué constitue une façon appropriée de coder les connaissances *a priori.*

Partie 3 : analyse du conditionnement du problème

1. Tracer l'évolution du conditionnement de la matrice $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} + \alpha\boldsymbol{D}_1^T\boldsymbol{D}_1$ (liée à la définition de $\widehat{\boldsymbol{x}}(\alpha)$) en fonction de σ_h.

Partie 4 : bruit additif blanc gaussien

1. Dans la simulation du problème direct, remplacer le bruit de quantification par un bruit additif $\boldsymbol{w}$ blanc gaussien avec différents rapports signal-sur-bruit.
2. Sous cette hypothèse, quelle est l'expression de l'estimateur sans biais à variance minimale ? Cette solution est-elle exploitable ?
3. Étudier l'évolution du coefficient de régularisation optimal en fonction de la variance du bruit.

A suivre.... Ce programme sera complété pour les prochains TD... avec une extension en 2D à venir.